

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 6 раз в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-80049

ISSN 2226-8383

Том XXII

Выпуск 2 (78)

Тула

2021

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,
г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tspu.ru

URL:
<http://www.chebsbornik.ru>

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула), А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

В. А. Артамонов (Россия, г. Москва)

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

А. О. Иванов (Россия, г. Москва)

В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)

А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)

Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)

З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)

Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

СОДЕРЖАНИЕ

Том 22 Выпуск 2

От редакции	6
В. Н. Чубариков, А. Гияси. О некоторых проблемах аналитической теории чисел в творчестве Г. И. Архипова и С. М. Воронина	7
С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, М. Н. Добровольский, О. В. Иванченко, Д. А. Камаев. Регрессионное дифференцирование и регрессионное интегрирование конечных рядов ..	27
Е. И. Деза, Б. Мханна. Квазиметрики на графах	48
А. В. Галатенко, А. Е. Панкратьев, В. М. Староверов. Об одном алгоритме проверки существования подквазигрупп	76
Н. В. Елизаров, С. В. Востоков. Расширения Любина — Тейта и модуль Карлица над проективной прямой: явная связь	90
А. А. Жукова, А. В. Шутов. Об аналоге задачи Гельфонда для обобщенных разложений Цеккендорфа	104
А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея — Касса — Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности	121
М. Р. Лангаршоев. Неравенства типа Джексона — Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана	135
Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов, Ю. И. Богатырева. Парное дискретное соревнование со свободным выбором маршрута	145
Ф. М. Малышев. Завершение доказательства теоремы Брунна элементарными средствами	160
Б. Мханна. Матрица относительной лесной доступности ориентированного пути и ориентированного цикла	183
И. А. Решетников. Комбинаторика слов, фактординамика и нормальные формы	202
А. С. Самсонов. Арифметические свойства элементов прямых произведений p -адических полей, II	236
В. Л. Усольцев. Подпрямая неразложимость и атомы решеток конгруэнций алгебр с оператором и симметрической основной операцией	257
В. Л. Усольцев. О рисовском замыкании в некоторых классах алгебр с оператором	271
А. П. Фот, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, А. С. Подолян. Об одном линейном диофантовом уравнении и его приложениях	288
В. Г. Чирский. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром	304

А. В. Шутов. Обобщенные разбиения Розы и линейные рекуррентные последовательности 313

Е. Ю. Юденкова. Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений
 F -рядов в полиадических лиувиллевых точках 334

ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ

К. К. Андреев, Г. Н. Аржанцева, В. А. Артамонов, В. С. Атабекян, И. Н. Балаба,
 Н. В. Безверхний, А. А. Вдовина, В. С. Губа, А. Э. Гутерман, Г. С. Дерябина,
 Н. М. Добровольский, М. В. Зайцев, А. Л. Канунников, А. А. Клячко,
 О. В. Куликова, О. В. Маркова, В. Г. Микаелян, М. В. Милентьева, А. Э. Минасян,
 К. В. Михайловский, А. В. Михалёв, А. Е. Панкратьев, Ю. Г. Прохоров,
 Ю. С. Семёнов, Д. А. Тимашёв, В. Н. Чубариков, И. А. Чубаров, Е. Е. Ширшова.
 Александр Юрьевич Ольшанский (к 75-летию) 347

Ю. В. Бобылев, Н. М. Добровольский, В. А. Панин, А. П. Плотников,
 И. Ю. Реброва, Д. А. Нургулеев, Н. Н. Добровольский. Юрий Филипович Головнёв
 (к 80-летию) 366

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

М. М. Абдуразаков, О. Ю. Лягинова, О. Н. Цветкова. Информатика, математика
 и логика в аспекте межпредметной и метапредметной образовательной связи 373

Е. В. Агеева, Е. В. Агеев, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев. Математическая оптимизация
 процесса электродиспергирования отходов сплава ВНЖ 389

Ю. В. Бобылев, Т. Г. Мещерякова, В. А. Панин. Компьютерное моделирование возбужде-
 ния электромагнитных колебаний открытого плазменного резонатора 402

Р. Р. Мухин. Из истории понятия структурной устойчивости 417

А. Н. Кубанова, А. Е. Гвоздев. История развития порошковой металлургии и ее
 применение в современных технологиях 437

Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев,
 Д. С. Клементьев. О значении математических вычислений в исследовании
 характеристик структуры и физико-механических свойств стали 30ХГСА,
 выплавленной на различной шихте 449

С. Л. Толоконников, В. А. Максименко. О воронке выброса, образующейся при взрыве
 двух плоских поверхностных шнуровых зарядов 472

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Ке Гонг. Замечание к теореме Давенпорта 484

И. Ш. Джаббаров, Л. Г. Исмаилова. Об экстремальности аффинного образа
 топологического произведения некоторых многообразий 490

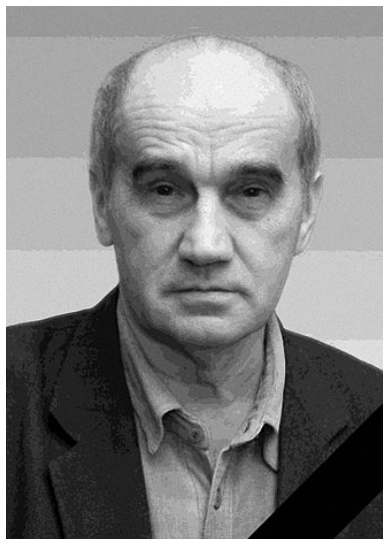
А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Ограничения на значения
 функции потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в
 случае стационарности функции сбережения 501

Р. Мохсэни. Симметрии многообразий Эйнштейна — Вейля с краем 510

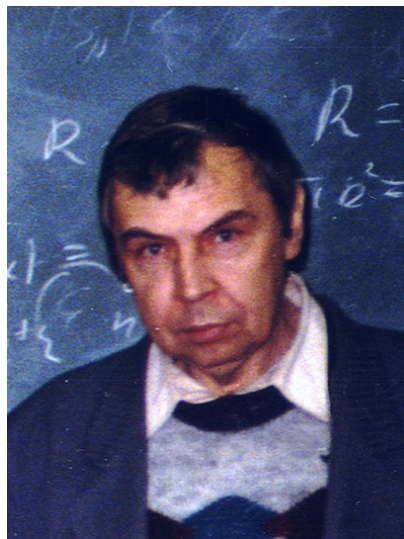
А. Х. Муньос Васкес. Арифметические свойства значений некоторых гипергеометрических F -рядов	519
А. С. Самсонов. Об одном применении методов исследования алгебраической независимости гипергеометрических рядов и значений g -адических функций	528
Е. Ю. Юденкова. Значения гипергеометрических F -рядов в полиадических лиувиллевых точках	536
РЕДКОЛЛЕГИЯ	543
THE EDITORIAL BOARD	547
TABLE OF CONTENTS	551

От редакции

Данный выпуск Чебышевского сборника посвящен
75-летию со дня рождения выдающихся советских и
российских математиков, докторов
физико-математических наук, профессоров, первых
выпускников колмогоровского интерната
Геннадия Ивановича Архипова
и
Сергея Михайловича Воронина.



Г. И. Архипов



С. М. Воронин

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-7-26

О некоторых проблемах аналитической теории чисел в творчестве Г. И. Архипова и С. М. Воронина

В. Н. Чубариков, А. Гияси

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Гияси Азар Ходабахш — кандидат физико-математических наук, Университет Алламе Табатабаи (г. Тегеран, Иран).

e-mail: azarghyasi@yahoo.com

Аннотация

В статье даны постановки задач и представлен вклад в их решение выдающихся математиков Г. И. Архипова и С. М. Воронина.

В основу статьи положены две работы, написанные в связи с юбилейными датами ученых.

Ключевые слова: дзета-функция Римана; функции Дирихле; тригонометрические суммы.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

В. Н. Чубариков, А. Гияси. О некоторых проблемах аналитической теории чисел в творчестве Г. И. Архипова и С. М. Воронина // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 7–26.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-7-26

On several problems of the analytic number theory in the creative work of G. I. Arkhipov and S. M. Voronin

V. N. Chubarikov, A. Ghyasi

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Ghyasi Azar Khodabakhsh — candidate of physical and mathematical sciences, Allameh Tabataba'i University (Tehran, Iran).

e-mail: azarghyasi@yahoo.com

Abstract

In the paper the formulation of problems are given and the contribution in their solution of the outstanding mathematicians of G. I. Arkhipov and S. M. Voronin are presented.

At the base of the paper two papers, which are written in the connection with jubileum data of scientists, are put.

Keywords: Riemann's zeta-function, Dirichlet's functions, trigonometric sums.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

V. N. Chubarikov, A. Ghyasi. 2021, "On several problems of the analytic number theory in the creative work of G. I. Arkhipov and S. M. Voronin" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 7–26.

Введение

Посвящая настоящую статью светлой памяти выдающихся математиков, одноклассников по колмогоровскому интернату, однокурсников по механико-математическому факультету Московского университета и сотрудников Математического института имени В. А. Стеклова, прекрасных профессоров Геннадия Ивановича Архипова и Сергея Михайловича Воронина, нам хотелось еще раз окунуться в ту незабываемую атмосферу научного поиска и творчества, которая царила в сообществе этих замечательных ученых.

После кончины С. М. Воронина его памяти были посвящены многие встречи, воспоминания, одним из организаторов которых был Г. И. Архипов. Часть из них отражена в нашей совместной статье. Поэтому настоящую статью мы начинаем с воспоминаний о Сергее Михайловиче Воронине.

Отметим, что здесь мы использовали материалы работ [6], [13].

1. Биографические данные С. М. Воронина

Двадцать три года назад 18 октября 1997 года профессор С. М. Воронин завершил свой земной путь.

Он родился 11 марта 1946 г. в семье служащего в г. Горно-Алтайске. Его отец, Михаил Федорович, был инженером-нефтяником; мать, Пелагея Ильинична Воронина (урожденная Маслова), — учителем литературы в школе. В 1950-х годах семья Ворониных переехала в г. Бугуруслан Оренбургской области.

С детства у Сергея обнаружились незаурядные способности в самых разных областях человеческой деятельности. Он был активной творческой личностью, вокруг него всегда группировалась компания сверстников. Еще дошкольником Сергей "обложил себя книгами" и стал уговаривать родителей отдать его сразу во второй класс, но родители не стали этого делать.

Когда он узнал, что по программе средней школы в пятом классе будет преподаваться алгебра, то он приобрел знаменитый двухтомник Ван дер Вардена "Современная алгебра", и с его помощью стал поправлять учительницу алгебры на уроках. Ее реакция была такой, что она попросила мать Сережи отобрать у него этот учебник, чтобы он не сошел с ума. Вновь учебник Ван дер Вардена попался на глаза Сергею в восьмом классе и он в течение года его полностью и самостоятельно освоил. Много позднее С. М. Воронин говорил о том, что этот учебник и стал основой его математических знаний. В пятом же классе Сережа выучился виртуозно играть на балалайке, а затем с отличием закончил музыкальную школу по классу фортепиано. До конца жизни он фанатично увлекался классической музыкой. В 7 классе Сережу покорила химия. Делая химические опыты, он получил полведрa серной кислоты.

В дальнейшем, Сергей помогал отцу в его изобретательской деятельности, проводя математические расчеты, и вместе с ним еще школьником получил авторское свидетельство на изобретение.

В 1963 г. после победы на областной олимпиаде по математике по Оренбургской области С. М. Воронин выступал на Всероссийской олимпиаде по математике и стал ее призером. Одиннадцатый класс он заканчивал в школе-интернате №18 при МГУ. Своими блестящими математическими способностями С. М. Воронин обратил на себя внимание академика А. Н. Колмогорова.

В 1964 г. С.М. поступил на механико-математический факультет МГУ. Он отлично учился по математике, самостоятельно изучал специальную математическую литературу. Надо сказать, что и художественную литературу он читал запоем, обладая редкой способностью скорочтения.

2. Кандидатская диссертация С. М. Воронина

Несмотря на широкий круг интересов, в центре его внимания всегда оставалась теория чисел, а точнее, теория дзета-функции Римана. Это и определило выбор его математической специализации на механико-математическом факультете МГУ. Его научным руководителем стал профессор А. А. Карацуба (31.01.1937–28.09.2008). С 1969 г. по 1972 г. С. М. Воронин обучался в аспирантуре Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Там он со всей страстью молодого таланта отдался доказательству знаменитой гипотезы Римана. За каждую неделю интенсивной работы С.М. прорабатывал десятки статей по теории чисел и другим разделам математики. Хотя продвинуться в доказательстве гипотезы Римана С. М. Воронину по существу не удалось, он получил в теории дзета-функции Римана другие первоклассные результаты.

В его кандидатскую диссертацию на тему “Исследование поведения дзета-функции Римана” (научный руководитель — профессор А. А. Карацуба), защищенную в 1972 г. в МИАН СССР, вошли следующие выдающиеся научные достижения:

- опровержение гипотезы Турана о нулях отрезков рядов Дирихле;
- доказательство того, что не существует непрерывной функции от нескольких переменных такой, что при подстановке вместо аргументов дзета-функции Римана и ее производных, она обращалась тождественно в нуль; эта теорема намного сильнее одного утверждения из знаменитого доклада Гильберта, в котором сформулированы его проблемы;
- доказательство того, что значения дзета-функции Римана от “сдвинутых” аргументов всюду плотны в многомерном комплексном пространстве; этот результат является глубоким многомерным обобщением известной теоремы Г. Бора.

Отметим еще один результат С. М. Воронина, полученный в это же время и не вошедший в кандидатскую диссертацию, касающийся обнаруженного им эффекта “сгущения” нулей дзета-функции Римана в окрестности единичной прямой в случае наличия хотя бы одного такого нуля.

3. Докторская диссертация С. М. Воронина

Следующим этапом исследований С. М. Воронина по теории дзета-функции Римана явилась его докторская диссертация “Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов”, защищенная в 1977 г. в МИАН СССР.

Основным результатом этой диссертации явилось доказательство знаменитой теоремы С. М. Воронина об “универсальности” дзета-функции Римана, согласно которой значения дзета-функции Римана внутри малого круга в критической полосе при вертикальном сдвиге аргумента (фрагмент функции) сколь угодно точно приближают любую аналитическую функцию, не обращающуюся в нуль в круге того же радиуса.

4. Другие проблемы, решенные С. М. Ворониным

Уже в своей кандидатской диссертации С. М. Воронин обратил внимание на то, что “утверждения теории распределения значений ζ -функции Римана и методы их доказательства близки Ω -теоремам теории ζ -функции Римана”. Основателем теории распределения значений ζ -функции и автором первых Ω -теорем для этой функции С.М. считал Г. Бора. Поэтому получив новые результаты в теории распределения ненулевых значений дзета-функции Римана, С. М. Воронин дал более простой метод доказательства существовавших к тому времени Ω -теорем.

Как известно, в теории дзета-функции Римана многие факты основаны на эйлеровском произведении по простым числам и на функциональном уравнении. В 1936 г. Г. Давенпорт и Х. Хейльбронн доказали, что линейная комбинация двух специальных рядов Дирихле, обладающих функциональным уравнением римановского типа, но не имеющая эйлеровского произведения, имеет комплексные нули, не лежащие в критической полосе. В 1980 г. С. М. Воронин обнаружил новый эффект функции Давенпорта–Хейльбронна, состоящий в том, что критическая прямая является “особым множеством” для нулей этой функции, поскольку на этой прямой лежит “аномально много нулей”. С.М. показал, что этим свойством обладают и некоторые дзета-функции квадратичных полей.

В теории рядов Дирихле со времен Римана весьма существенную роль играет их аналитическое продолжение. Основываясь на свойстве периодичности цепной дроби для квадратичной иррациональности α и на свойствах модулярных функций С. М. Воронин получает мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость функции $\Phi(s)$, задаваемой при $\operatorname{Re} s > 12$ рядом

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} e^{2\pi i n \alpha},$$

где $\tau(n)$ — функция Рамануджана.

В работе “О методе И. М. Виноградова” [10] С. М. Воронин дает интересное обобщение понятия “малого решета” на кольца целых чисел алгебраических расширений поля рациональных чисел. В частности, это позволяет ему решить аддитивную тернарную проблему в простых числах, представимых нормами дивизоров поля.

Несколько особняком стоят работы С. М. Воронина по построению квадратурных и интерполяционных формул с помощью дивизоров в полях алгебраических чисел.

Научно-исследовательская работа С. М. Воронина объединила вокруг него большую группу специалистов в области теории дзета-функции Римана и теории квадратурных формул, которые составили ядро его научной школы.

С. М. Воронин был интересным собеседником, а его научные доклады по разным направлениям математики и ее истории всегда располагали к их творческому восприятию и обсуждению.

Список научных работ С. М. Воронина приведен в его “Избранных трудах”, изданных в 2006 г. [11]. Он является соавтором монографии “Дзета-функция Римана” (1994) [12], переведенной на английский язык. В 1978 г. в серии общества “Знание” вышла его научно-популярная книга “Простые числа” [8].

5. Биографические данные Г. И. Архипова

Геннадий Иванович Архипов родился 12 декабря 1945 г. в г. Ельце Липецкой области. В семье было еще двое детей старше него: сестра Светлана и брат Александр. Родители, Иван Филиппович и Елена Михайловна были служащими, во время войны находились в эвакуации в Ельце, после войны вернулись в родной г. Орел.

На формирование характера маленького Гены большое влияние оказали бабушка Марфа Давыдовна, сестра Светлана и первый учитель математики и физики Геннадий Николаевич Плотников, к которым Геннадий Иванович сохранил горячую любовь. С раннего детства Геннадия окружала послевоенная обстановка почти полностью разрушенного Орла, которая оказала сильное влияние на формирование его характера. Это и направило его душу на служение обществу, людям. Отсюда — его открытость к людским заботам и глубокое сопереживание человеческому горю и невзгодам, резкое неприятие несправедливости, готовность без промедления прийти на помощь и добиваться истины. Геннадий Иванович с участием относится не только к несчастьям, но еще в большей степени — к радостям окружающих его людей.

С 1953 г. по 1963 г. Г. И. Архипов блестяще учился в 24-й средней школе г. Орла, побеждал в областных школьных олимпиадах по математике и физике и представлял Орловскую область на Всероссийских математических олимпиадах. В 1964 г. он окончил специализированную школу-интернат № 18 физико-математического профиля при МГУ в составе ее первого выпуска. В том же году он стал победителем Международной математической олимпиады школьников и был зачислен студентом Механико-математического факультета МГУ. В 1969 г. Г. И. Архипов окончил его и поступил в аспирантуру Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (научный руководитель — профессор А. А. Карацуба), которую закончил в 1972 г.

6. Кандидатская диссертация Г. И. Архипова

В 1975 г. Г. И. Архипов защитил кандидатскую диссертацию на тему “Кратные тригонометрические суммы и приложения” (научный руководитель — профессор А. А. Карацуба). В ней разработана теория кратных тригонометрических сумм, являющаяся мощным развитием метода тригонометрических сумм И. М. Виноградова. Основу исследования Г.И. составляет оценка сверху числа решений $J = J(P; K; n)$ в натуральных числах $x_s, y_s, 1 \leq s \leq 2K$, не превосходящих $P > 1$, системы диофантовых уравнений

$$x_1^t y_1^{s-t} + \cdots + x_K^t y_K^{s-t} = x_{K+1}^t y_{K+1}^{s-t} + \cdots + x_{2K}^t y_{2K}^{s-t} \\ (0 \leq t \leq s \leq n, s \geq 1).$$

Число N уравнений этой системы равно

$$N = \sum_{s=1}^n \sum_{t=0}^s 1 = \sum_{s=1}^n (s+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2},$$

а сумма M степеней уравнений системы равна

$$M = \sum_{s=0}^n \sum_{t=0}^s s = \sum_{s=1}^n s(s+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Очевидно, имеем $J \geq P^{2K}$.

В 1971 г. Г. И. Архипов дал точную верхнюю границу J при правильном порядке величины $K \gg M \ln M : J \ll P^{4K-M}$.

Следовательно, при достаточно большом P находим $P^{2K} \ll P^{4K-M}$. Таким образом, получим $2K \geq M$, т.е. результат Г. И. Архипова лишь логарифмическим множителем $\ln M$ отличается от найденной оценки.

В основе доказательства этой теоремы лежит оригинальное вспомогательное утверждение. Рассмотрим систему сравнений в кольце классов вычетов по модулю p^n , p — простое,

$$\sum_{k=1}^{2n^2} (-1)^k z_k^{m-t} v_k^t \equiv \lambda_l \pmod{p^m},$$

где λ_l при $l = 0, 1, \dots, N$ — фиксированные целые, z_k, v_k при $k = 1, 2, \dots, 2n^2$ — неизвестные. Обозначим эту систему сравнений буквой W , а число ее решений символом $T(W)$.

ЛЕММА 1. Пусть строки матрицы B , соответствующей набору $(z_1, v_1, \dots, z_{2n^2}, v_{2n^2})$, (т.е. $B = (b_{l,k})$, $b_{l,k} = z_k^{m-t} v_k^t$ при $l = 0, 1, \dots, N$ и $k = 1, 2, \dots, 2n^2$) линейно независимы над Z_p — полем вычетов по модулю p . Тогда имеет место следующая оценка

$$T(W) \leq n^{2n^2 p^{4n^3 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}}.$$

7. Докторская диссертация Г. И. Архипова

С 1983 г. Г. И. Архипов по приглашению И. М. Виноградова работает в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР. В 1984 г. он защищает докторскую диссертацию на тему “Исследования по проблеме Гильберта — Камке”.

Им решена классическая проблема Гильберта — Камке об одновременном представлении системы чисел суммами степеней и установлен точный порядок для количества слагаемых.

Более точно, проблема Гильберта — Камке состоит в том, чтобы доказать разрешимость системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k = N_1, \\ \dots \quad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n = N_n, \end{cases}$$

в натуральных числах $x_1, \dots, x_k$ в случае, когда число неизвестных k ограничено и возрастающие параметры $N_1, \dots, N_n$ удовлетворяют некоторым естественным условиям.

Другими словами, следует получить наилучшую возможную оценку $r(n)$ для количества переменных k , при котором эта система уравнений разрешима.

Пусть P — натуральное число, переменные $x_1, \dots, x_k$ системы уравнений Гильберта — Камке лежат в пределах от 1 до P и $I = I(P; n, k; N_1, \dots, N_n)$ обозначает число ее решений.

ТЕОРЕМА 1. При $k \geq n^2(4 \log n + 2 \log \log n + 9)$, $k \leq P^{0,1}$ и при $P \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$I = \sigma \gamma P^{k-0,5n(n+1)} + \theta n^{30n^3} P^{k-0,5n(n+1)-(30(2+\log n))^{-1}},$$

кроме того, имеет место оценка $I \leq n^{30n^3} P^{k-0,5n(n+1)}$. Здесь θ — вещественное число, $|\theta| \leq 1$, и σ, γ — неотрицательные числа. Значение величины σ равно сумме “особого ряда в проблеме Гильберта — Камке”, значение величины γ равно значению величины “особого интеграла в проблеме Гильберта — Камке,” а именно

$$\sigma = \sum_{q_1}^{\infty} \dots \sum_{q_n}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a_1 < q_1 \\ (a_1, q_1) = 1}} \dots \sum_{\substack{0 \leq a_n < q_n \\ (a_n, q_n) = 1}} q^{-k} V^k \exp(-2\pi i A),$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} W^k \exp -2\pi i B d\beta_1 \dots d\beta_n,$$

где $q = q_1 \dots q_n$,

$$V = \sum_{x=1}^q \exp \left\{ 2\pi i \left(\frac{a_1 x}{q_1} + \cdots + \frac{a_n x}{q_n} \right) \right\}, \quad A = \frac{a_1 N_1}{q_1} + \cdots + \frac{a_n N_n}{q_n}$$

$$W = \int_0^1 \exp \{ 2\pi i (\beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n) \} dx, \quad B = \frac{\beta_1 N_1}{P} + \cdots + \frac{\beta_n N_n}{P^n}.$$

Показатель сходимости $k = k_0$ особого ряда $\sigma = \sigma(k)$ равен $0,25n(n+1)+1$, а особого интеграла $\gamma = \gamma(k)$ — равен $0,25n(n+1)+0,5$.

Заметим, что полученная асимптотическая формула нетривиальна тогда и только тогда, когда особый ряд σ и особый интеграл γ положительны. Более того, если $\sigma = 0$, то система уравнений Гильберта – Камке не имеет решений вообще, а если $\gamma = 0$, то число ее решений остается ограниченным при растущих числах $N_1, \dots, N_n$.

Необходимое условие арифметического характера для разрешимости системы уравнений Гильберта – Камке состоит в том, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} t_1 \cdot 1 + \cdots + t_n \cdot n = N_1, \\ \dots \quad \dots \\ t_1 \cdot 1^n + \cdots + t_n \cdot n^n = N_n, \end{cases}$$

разрешимо в целых числах $t_1, \dots, t_n$. Обозначим его через (H).

В несколько иной форме это условие впервые было сформулировано К. К. Марджанишвили.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k \geq T = \min \{ n^2 2^{2n-1}, 3n^3 2^n - n \}$. Тогда при условии (H) для особого ряда σ справедливо неравенство

$$\sigma \geq n^{-20n^4 2^n}.$$

Если же для наборов $(N_1, \dots, N_n)$ выполняется условие (H) и $\sigma = 0$, то $k < 2^n - 1$.

Для исследования особого интеграла γ Г. И. Архипов вводит понятие характеристики числового множества на отрезке $[0, 1]$. Пусть $l \geq n$ и множество $\{0 \leq y_1, \dots, y_l \leq 1\}$. Произвольным способом κ выбираем из них n чисел с различными индексами. Пусть это будут $z_1, \dots, z_n$ и полагаем $z_0 = 0, z_{n+1} = 1$. Тогда величина

$$\Delta(y_1, \dots, y_l) = \max_{\kappa} \min_{0 \leq i < j \leq n+1} |z_i - z_j|$$

называется характеристикой множества $\{y_1, \dots, y_l\}$. Характеристика множества $\{x_1, \dots, x_k\}$, которое является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k = \beta_1, \\ \dots \quad \dots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n = \beta_n, \end{cases}$$

где $\beta_s = N_s P^{-s}$, $s = 1, \dots, n$ и неизвестные $x_1, \dots, x_k$ могут принимать значения из отрезка $[0, 1]$, называется характеристикой этого решения. Обозначим через ϵ максимальное значение характеристики решений указанной системы уравнений.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы следующие неравенства*

$$2^{2n(n-k)} k^{n-k} n^{-k-n} \varepsilon^{n(k-n)} \leq \gamma \leq 2^{2n^2} k^{2n} n^{k-2n} \varepsilon^{k-3n-n^2}.$$

Заметим, что если особый интеграл γ равен 0, то $\varepsilon = 0$. Это означает, что среди чисел решения $x_1, \dots, x_k$ найдется не более $n-1$ различных. То же самое можно сказать и о решениях системы уравнений Гильберта – Камке с правыми частями $N_1, \dots, N_n$.

В 1992 г. исследования Г. И. Архипова по проблеме Гильберта – Камке были отмечены премией им А. А. Маркова Российской Академии наук.

8. Другие проблемы, решенные Г. И. Архиповым

8.1. Интеграл Виноградова

Получены точные оценки моментов тригонометрических сумм Г. Вейля при малых значениях степени осреднения.

Пусть буква S обозначает тригонометрическую сумму Г. Вейля вида

$$S = S(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{x=1}^P \exp \{2\pi i f(x)\},$$

где $f(x) = \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Интеграл J вида

$$J = J(P; k, n) = \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(\alpha_1, \dots, \alpha_n)|^{2k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

называется интегралом И. М. Виноградова.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\tau, r_1, \dots, r_\tau, k$ — натуральные числа, где $\tau \geq 1$ и $1 = r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_\tau \leq n$. Далее, положим*

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= \left(n - \frac{r_\tau - 1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{r_\tau}\right) \left(n - \frac{r_{\tau-1} - 1}{2}\right) + \dots \\ &+ \left(1 - \frac{1}{r_\tau}\right) \left(1 - \frac{1}{r_{\tau-1}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{r_2}\right) \left(n - \frac{r_1 - 1}{2}\right), \\ \kappa_\tau &= \sum_{j=1}^{\tau} (r_j^2 + \Delta(j)). \end{aligned}$$

Тогда при $k \geq n\tau$ и $P \geq 1$ справедлива следующая оценка

$$J = J(P; n, k) \leq n^{2\Delta(\tau)r_\tau} 2^{\kappa_\tau} (8k)^{2n\tau} P^{2k-\Delta(\tau)}.$$

В частности, отсюда следует, что для любого ε с условием $0 < \varepsilon < 1/2$, $k \leq \varepsilon n^2$ и $k = mn$, m — натуральное число, справедлива следующая оценка

$$J = J(P; n, k) \ll P^{k(1+\varepsilon)}.$$

8.2. Тригонометрические интегралы. Проблема Хуа Ло-кена

Решена проблема Хуа Ло-кена о показателе сходимости особого интеграла $\theta = \theta(k)$ проблемы Терри, который имеет вид

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 \exp \{2\pi i(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)\} \right|^{2k} d\alpha_n \dots d\alpha_1.$$

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Интеграл $\theta = \theta(k)$ сходится при $2k > 0,5(n^2 + n) + 1$ и расходится при $2k \leq 0,5(n^2 + n) + 1$.*

Далее сформулируем теорему о показателе сходимости особого интеграла, отвечающего неполной системе уравнений в проблеме Гильберта – Камке.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть натуральные числа $r, m, \dots, n$ удовлетворяют условиям $r < m < \dots < n$ и $r + \dots + m + n < n(n+1)/2$,*

$$\theta' = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^1 \exp \{2\pi i(\alpha_n x^n + \alpha_m x^m + \cdots + \alpha_r x^r)\} \right|^{2k} d\alpha_n \dots d\alpha_r.$$

Тогда интеграл θ' сходится при $2k > n + m + \dots + r$ и расходится при $2k \leq n + m + \dots + r$.

8.3. Общая теория кратных тригонометрических сумм

Тригонометрические суммы с многочленом в экспоненте, следуя И. М. Виноградову, будем называть суммами Г. Вейля. Они имеют вид

$$S = S(A) = \sum_{x_1=1}^{P_1} \cdots \sum_{x_r=1}^{P_r} \exp \{2\pi i F_A(x_1, \dots, x_r)\},$$

где $F_A(x_1, \dots, x_r)$ — многочлен с вещественными коэффициентами $\alpha(t_1, \dots, t_r)$, которые являются координатами точки A в m -мерном единичном кубе Ω , $m = (n_1 + 1) \dots (n_r + 1)$.

И. М. Виноградов поставил задачу оценки сумм Г. Вейля при всевозможных значениях коэффициентов многочлена от нескольких переменных, стоящего в экспоненте. Здесь, как и в методе И. М. Виноградова, оценка индивидуальной тригонометрической суммы сводится к оценке ее среднего значения.

Пусть $J = J(\bar{P}; \bar{n}, k, r)$ обозначает среднее значение степени $2k$ модуля тригонометрической суммы $S(A)$ по кубу Ω , т.е.

$$J = \int \cdots \int_{\Omega} |S(A)|^{2k} dA.$$

Имеет место следующая теорема о среднем значении.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $\tau \geq 0$ — целое число и $n_1, \dots, n_r$ — натуральные числа. Тогда при $k_1 \geq k = m\tau$ для величины интеграла $J = J(\bar{P}; \bar{n}, k, r)$ справедлива оценка*

$$J \leq k^{2m\tau} \kappa^{4\kappa^2 \Delta(\tau)} 2^{8m\kappa\tau} (P_1 \dots P_r)^{2k_1} P^{-\kappa \Delta(\tau)},$$

где $\kappa = n_1 \nu_1 + \dots + n_r \nu_r$, $\gamma \kappa = 1$, и

$$\Delta(\tau) = 0,5m(1 - (1 - \gamma)^\tau), \quad P = (P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r})^\gamma, \quad P_1 = \min \{P_1, \dots, P_r\},$$

причем $\nu_1, \dots, \nu_r$ — натуральные числа такие, что

$$-1 < \frac{\log P_s}{\log P_1} - \nu_s \leq 0, \quad s = 1, \dots, r.$$

Отметим, что вывод оценки суммы существенно зависит от леммы комбинаторного характера, имеющей и самостоятельный научный интерес. Для ее формулировки необходимы следующие обозначения.

Пусть $F(x_1, \dots, x_r)$ — многочлен с вещественными коэффициентами,

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \cdots x_r^{t_r}.$$

Определим функции $B = B(u_1, \dots, u_r) = B(\bar{u})$ из равенства

$$F(x_1 + y_1, \dots, x_r + y_r) - F(x_1 + z_1, \dots, x_r + z_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} B(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \cdots x_r^{t_r},$$

где

$$B(t_1, \dots, t_r) = \sum_{u_1=t_1}^{n_1} \cdots \sum_{u_r=t_r}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) \binom{u_1}{t_1} \cdots \binom{u_r}{t_r} \times \\ \times (y_1^{u_1-t_1} \cdots y_r^{u_r-t_r} - z_1^{u_1-t_1} \cdots z_r^{u_r-t_r}).$$

Положим $n = n_1 + \cdots + n_r, t = t_1 + \cdots + t_r, u = u_1 + \cdots + u_r$. Пусть функция $A = A(\bar{t}; s)$ обозначает форму степени s многочлена $B(\bar{t})$, т.е.

$$A(t_1, \dots, t_r; s) = \sum_{u_1=t_1}^{n_1} \cdots \sum_{u_r=t_r}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) \binom{u_1}{t_1} \cdots \binom{u_r}{t_r} \times \\ \times (y_1^{u_1-t_1} \cdots y_r^{u_r-t_r} - z_1^{u_1-t_1} \cdots z_r^{u_r-t_r}).$$

Тогда получим $B(\bar{t}) = \sum_{s=0}^{n-u} A(\bar{t}; s)$. Заметим, что линейная форма имеет вид

$$A(\bar{t}; 1) = \sum_{j=1}^r (u_j + 1) \alpha(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j + 1, u_{j+1}, \dots, u_r) (y_j - z_j).$$

ЛЕММА 2. *Существуют многочлены $H(\bar{t}, \bar{u}; s)$ с целыми неотрицательными коэффициентами от переменных $\bar{y}, \bar{z}$ такие, что*

$$A(\bar{t}; s) = \frac{1}{t_1! \cdots t_r! s!} \sum_{u_1=t_1}^{n_1} \cdots \sum_{u_r=t_r}^{n_r} v_1! \cdots v_r! H(\bar{t}, \bar{u}; s) A(\bar{u}; 1),$$

причем сумма коэффициентов каждого из многочленов $H(\bar{t}, \bar{u}; s)$ не превосходит sr^{s-1} , и сумма степеней переменных y_j, z_j ($j = 1, \dots, r$), содержащаяся в любом мономе многочлена H , не превосходит $u_j - t_j$ ($j = 1, \dots, r$).

Далее, пусть A точка m -мерного единичного куба Ω , координаты которой удовлетворяют условиям $0 \leq \alpha(t_1, \dots, t_r) < 1$ ($0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r$), $\alpha(0, \dots, 0) = 0$. Разобьем все точки

А куба Ω на два класса Ω_1 и Ω_2 . Сначала определим области $\Omega(\bar{a}, \bar{q})$, состоящие из всех точек A , координаты которых имеют вид

$$\alpha(t_1, \dots, t_r) = \frac{a(t_1, \dots, t_r)}{q(t_1, \dots, t_r)} + \beta(t_1, \dots, t_r),$$

где

$$0 \leq a(t_1, \dots, t_r) < q(t_1, \dots, t_r), \quad (a(t_1, \dots, t_r), q(t_1, \dots, t_r)) = 1,$$

и

$$|\beta(t_1, \dots, t_r)| \leq P_1^{-t_1} \dots P_r^{-t_r} P^{0,1}, \quad 0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r.$$

Пусть Q обозначает наименьшее общее кратное чисел $q(t_1, \dots, t_r)$, $0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r$, $t_1 + \dots + t_r \geq 1$. Каждой области $\Omega(\bar{a}, \bar{q})$, отвечает свое значение Q . Первый класс Ω_1 состоит из всех областей $\Omega(\bar{a}, \bar{q})$, для которых $Q < P^{0,1}$. Вторым класс Ω_2 содержит оставшиеся точки куба Ω .

В следующей теореме дана оценка тригонометрической суммы Г. Вейля $S(A)$ для каждой точки A единичного куба Ω .

ТЕОРЕМА 8. Пусть точка A принадлежит первому классу Ω_1 . Тогда справедлива следующая оценка

$$|S(A)| \leq 2(5n^{2n})^{r\nu(Q)} (\tau(Q))^{r-1} P_1 \dots P_r Q^{-\nu}, \quad \nu \max \{n_1, \dots, n_r\} = 1.$$

Более того, если

$$\delta(t_1, \dots, t_r) = P_1^{t_1} \dots P_r^{t_r} \beta(t_1, \dots, t_r), \quad \delta = \max_{t_1, \dots, t_r} |\delta(t_1, \dots, t_r)|,$$

то при $\delta > 1$ справедлива оценка

$$|S(A)| \leq 2(5n^{2n})^{r\nu(Q)} (\tau(Q))^{r-1} P_1 \dots P_r (\delta Q)^{-\nu} (\log(\delta + 2))^{r-1}.$$

Пусть, далее, точка A принадлежит второму классу Ω_2 . Положим $\tau(t_1, \dots, t_r) = P_1^{t_1} \dots P_r^{t_r} P^{-1/3}$ и координаты $\alpha(t_1, \dots, t_r)$ точки A представим в виде

$$\begin{aligned} \alpha(t_1, \dots, t_r) &= \frac{a(t_1, \dots, t_r)}{q(t_1, \dots, t_r)} + \frac{\theta(t_1, \dots, t_r)}{q(t_1, \dots, t_r) \tau(t_1, \dots, t_r)}, \\ (a(t_1, \dots, t_r), q(t_1, \dots, t_r)) &= 1, \quad 1 \leq q(t_1, \dots, t_r) \leq \tau(t_1, \dots, t_r) \\ |\theta(t_1, \dots, t_r)| &\leq 1, \quad 0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r. \end{aligned}$$

Пусть Q_0 обозначает наименьшее общее кратное чисел $q(t_1, \dots, t_r)$ при условии, что $t_1 + \dots + t_r \geq 2$. Тогда справедлива следующая оценка

$$|S(A)| \leq 2^{32\kappa} P_1 \dots P_r P^{-\rho},$$

где $\rho = (32\kappa \log(8\kappa))^{-1}$.

Если же $Q_0 \leq P^{1/6}$, то для суммы $S(A)$ имеем оценку

$$\begin{aligned} |S(A)| &\leq (5n^{2n})^{r\nu(Q_0)} (\tau(Q_0))^{r-1} P_1 \dots P_r P^{-0,1\nu} + \\ &+ 2^{8r} (r\nu^{-1})^{r-1} P_1 \dots P_r P^{-\nu/16}. \end{aligned}$$

8.4. Гипотеза Артина

Дано принципиальное опровержение гипотезы Артина о представлении нуля формой и системой форм в поле p -адических чисел. Это исследование продолжает работу по проблеме Гильберта – Камке.

Пусть p — простое число, $F(x_1, \dots, x_k)$ — форма степени n от k переменных $x_1, \dots, x_k$ с целыми коэффициентами над полем p -адических чисел Q_p . Если существуют целые p -адические числа $x_1, \dots, x_k$, хотя бы одно из которых не равно нулю, и $F(x_1, \dots, x_k) = 0$, то говорят, что существует нетривиальное представление нуля формой F в поле Q_p .

Гипотеза Артина предполагала, что для любого простого числа p , $n \geq 1$, и $k > n^2$ форма $F(x_1, \dots, x_k)$ степени n нетривиально представляет нуль в поле Q_p . Эта гипотеза была опровергнута Г. Терзаньяном и Д. Бровкиным. После чего возникло предположение о том, что величину n^2 в формулировке гипотезы Артина следует заменить на n^3 . Подобное утверждение для системы форм было опровергнуто в докторской диссертации Г. И. Архипова. Оказалось, что количество переменных в этом случае имеет порядок не менее 2^n .

Той же силы результаты были получены Г. И. Архиповым и А. А. Карацубой для одной формы.

Говорят, что форма F не представляет нуль по модулю p , если для некоторого натурального числа r из сравнения

$$F(x_1, \dots, x_r) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

следует, что

$$x_1 \equiv \dots \equiv x_k \equiv 0 \pmod{p}.$$

ТЕОРЕМА 9. Для любого натурального числа r существует натуральное число $n_0 = n_0(r)$ такое, что для любого $n \geq n_0$ найдется форма $F(x_1, \dots, x_k)$ с целыми коэффициентами, которая не представляет нуль по модулю 2; число ее переменных k ,

$$k > 2^u, \quad u = \frac{n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n \dots \underbrace{\log_2 \dots \log_2 n}_{\log_2 \log_2 n} \cdot \underbrace{\log_2 \dots \log_2^2 n}_{\log_2^2 n}}$$

ТЕОРЕМА 10. Для любого натурального числа r существует натуральное число $n_1 = n_1(r)$ такое, что для любого $n \geq n_1$ найдется форма $F(x_1, \dots, x_k)$ с целыми коэффициентами, которая не представляет нуль по модулю p ; число ее переменных k ,

$$k > p^u, \quad u = \frac{n}{\log_p n \cdot \log_p \log_p n \dots \underbrace{\log_p \dots \log_p n}_{\log_p \log_p n} \cdot \underbrace{\log_p \dots \log_p^2 n}_{\log_p^2 n}}$$

8.5. Аддитивные и мультипликативные проблемы с нецелым показателем

Найден новый метод оценок тригонометрических сумм, основанный на оценке величин производных функции, стоящей в экспоненте, что позволило получить новую оценку показателя нецелой степени в асимптотической формуле для количества простых чисел в задаче Пятецкого–Шапи́ро.

Пусть $x \geq 1$ — вещественное число, $c > 0$ — произвольная постоянная и $\pi_c(x)$ — количество простых чисел вида $[n^c]$ при $n \leq x$, где символ $[x]$ обозначает целую часть числа x .

ТЕОРЕМА 11. При $1 < c < \frac{149}{129} = 1\frac{1}{6,45} = 1,1550\dots$ и при $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\pi_c(x) = \frac{x}{c \log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

ТЕОРЕМА 12. При $1 < c < \frac{149}{129}$ и при $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq T} \tau_k(n) = TQ_{k-1}(\log T) + O\left(\frac{T}{\log T}\right),$$

где $\tau_k(n)$ — количество решений в натуральных числах $x_1, \dots, x_k$ уравнения $x_1 \dots x_k = n$, $Q_{k-1}(x)$ — некоторый многочлен степени $k-1$.

Одним из обобщений проблемы Варинга является задача о представлении натурального числа N ограниченным количеством слагаемых вида $[n^c]$, где n принимает значения натуральных чисел и $c > 1$ — фиксированное нецелое число.

Пусть $W_{k,c}(N)$ обозначает количество решений в натуральных числах $x_1, \dots, x_k$ уравнения

$$[x_1^c] + \dots + [x_k^c] = N.$$

В 1972 г. Ж. М. Дезуйе вывел асимптотику при $N \rightarrow \infty$ величины $W_{k,c}(N)$ для k порядка $c^3 \log c$. Заметим, что в классической проблеме Варинга при натуральном c данная асимптотика найдена И. М. Виноградовым при k порядка $c^2 \log c$. Результат той же силы, что и при натуральном c , получен Г. И. Архиповым и А. Н. Житковым.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $k > 22c^2 \log(c+4)$, $\gamma c = 1$. Тогда для величины $W_{k,c}(N)$ при $N \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$W_{k,c}(N) \asymp \frac{\Gamma^k(1+\gamma)}{\Gamma(k\gamma)} N^{k\gamma-1}.$$

8.6. Ряды Виноградова

Доказана сходимость тригонометрических рядов Виноградова. В частности, доказано, что для любого вещественного числа α сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\alpha n^3)}{n}.$$

Пусть r — натуральное число, $P(x)$ — алгебраический многочлен степени r с вещественными коэффициентами, и $\mathcal{P}_r$ обозначает множество всех многочленов степени r с вещественными коэффициентами. Рассмотрим симметрическую частичную сумму

$$h_N(P) = \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{e^{2\pi i P(n)}}{n}, \quad N \geq 1,$$

ряда $h(P) = \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i P(n)}}{n}$.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $r \geq 2$. Тогда

$$\sup_{N \geq 1} \sup_{P \in \mathcal{P}_r} |h_N(P)| = g_r < \infty.$$

Далее, для каждого многочлена $P \in \mathcal{P}_r$ последовательность $h_N(P)$ сходится при $N \rightarrow \infty$ и сумма ряда $h(P)$, рассматриваемая в смысле главного значения, ограничена на $\mathcal{P}_r$.

8.7. Исключительные множества в бинарных проблемах гольдбахова типа

Получены принципиально новые оценки мощности исключительного множества в аддитивных задачах типа проблемы Гольдбаха.

ТЕОРЕМА 15. Пусть λ_1, λ_2 — положительные вещественные числа такие, что λ_2/λ_1 — иррациональное алгебраическое число. Пусть, далее, $T_2(x)$ обозначает количество натуральных чисел $n \leq x$, для которых не существует решений уравнения

$$[\lambda_1 p_1] + [\lambda_2 p_2] = n,$$

где p_1 и p_2 простые неизвестные. Тогда для любого ε справедлива оценка

$$T_2(x) \ll_{\varepsilon} x^{2/3+\varepsilon}.$$

Константа в знаке $\ll_{\varepsilon}$ неэффективная.

В основу доказательства этого утверждения положены явные формулы в теории дзета-функции Римана и следующая лемма о совместном приближении двух чисел.

ТЕОРЕМА 16. Пусть $1 \leq Q \leq X^{1/2}$, a — целое число, q — натуральное число, $(a, q) = 1$, $q \in [1, Q]$ и интервал $I_{a,q}$ вида

$$I_{a,q} = \left(\frac{a}{q} - \frac{Q}{X}, \frac{a}{q} + \frac{Q}{X} \right).$$

Далее, пусть β — иррациональное алгебраическое вещественное число, α, t — вещественные числа, $|t| \gg X^{-1/3}$, $\alpha, \beta \in (1, 2)$, k — целое число, $|k| \leq \log X$.

Обозначим через μ меру множества T точек $\{t\}$ таких, что оба числа $\nu_1 = t\alpha\beta$ и $\nu_2 = (t+k)\alpha$ лежат в некоторых промежутках из указанной выше совокупности $\{I_{a,q}\}$, т.е. $\nu_1 \in I_{a,q}$ при некотором значении $a = a_1, q = q_1$ и с параметром $Q = Q_1$ (т.е. $q_1 \leq Q_1$); $\nu_2 \in I_{a,q}$ при значениях $a = a_2, q = q_2$ с параметром $Q = Q_2$ (т.е. $q_2 \leq Q_2$).

Тогда для величины μ имеет место оценка сверху вида

$$\mu \ll_{\varepsilon} X^{-2+\varepsilon} Q_1^2 Q_2^2,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно мало.

8.8. Целые точки в областях на плоскости Лобачевского и собственные значения оператора Лапласа — Бельтрами

Впервые получены эффективные оценки первого собственного значения оператора Лапласа — Бельтрами для дискретной подгруппы движений в трехмерном пространстве Лобачевского.

Получено уточнение формулы Левитана для количества целых точек в круге на плоскости Лобачевского, а также степенное улучшение оценок Эстермана и Хиз-Брауна для среднего значения функции делителей от квадратичного многочлена.

Для любых двух точек $z = x + iy$ и $z' = x' + iy'$ из верхней полуплоскости ($y, y' > 0$) определим расстояние между ними $d = d(z, z')$. Положим

$$u = u(z, z') = \frac{|z - z'|^2}{yy'}.$$

Тогда расстояние d задается равенством

$$d = \ln \left(\frac{u + 2 + \sqrt{u^2 + 4u}}{2} \right).$$

Круг $K(z_0, T)$ с центром в точке z_0 и радиусом T состоит из точек z , удовлетворяющих неравенству $d(z_0, z) \leq T$.

Обозначим символом $N(z_0, T)$ количество элементов γ модулярной группы

$$PSL_2(Z) = SL_2(Z) / \pm I$$

таких, что точка γz_0 попадает в круг $K(z_0, T)$. Положим $N(T) = N(i, T)$.

ТЕОРЕМА 17. *При $T \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$N(T) = 8 \operatorname{ch} T + O(e^{3T/4} T^4).$$

К этой задаче близка по формулировке классическая проблема Ингама о среднем значении количества делителей от разложимого квадратичного многочлена. Сам А. Ингам в 1927 г. выделил главный член его асимптотики. В 1931 г. Т. Эстерман получил оценку остатка $x^{11/12} \log^{17/3} x$. Последняя оценка была улучшена до значения $O(x^{5/6+\varepsilon})$ только в 1978 г. Д. Исмойловым, в 1979 г. Хиз-Брауном и в 1984 г. А. И. Виноградовым и Л. А. Тахтаджяном. В 2006 г. Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков дали новое степенное понижение остаточного члена вида $O(x^{3/4+\varepsilon})$.

Пусть символом $\tau(n)$ обозначается функция количества делителей числа n , а символом $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, и $\gamma = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера. Положим

$$\xi_0 = 6/\pi^2, \xi_j = (-1)^j \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) d^{-2} \ln^j d, j \geq 1.$$

ТЕОРЕМА 18. *При $x \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$I(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n) \tau(n+1) = \sum_{n \leq x} \tau(n^2 + n) = M(x) + R(x),$$

где главный член $M(x)$ асимптотической формулы имеет вид

$$M(x) = x(A_0 \ln^2 x + A_1 \ln x + A_2),$$

$$A_0 = \xi_0, A_1 = (4\gamma - 2)\xi_0 + 4\xi_1, A_2 = ((2\gamma - 1)^2 + 1)\xi_0 + 4(2\gamma - 1)\xi_1 + 4\xi_2,$$

а остаточный член оценивается следующим образом

$$R(x) \ll x^{3/4} \ln^4 x.$$

8.9. Многомерные обобщения проблем Гольдбаха — Варинга и Гильберта — Камке

Получены оценки количества слагаемых в аддитивных задачах, являющихся многомерным обобщением проблем Гольдбаха — Варинга и Гильберта — Камке. Обнаружен ряд неожиданных эффектов. Оказалось, что если переменные пробегает значения:

а) натуральных чисел, то количество слагаемых возрастает экспоненциальным образом относительно степени и слабо зависит от размерности,

б) простых чисел — зависимость для количества слагаемых факториальная от степени и экспоненциальная по размерности,

в) целых алгебраических чисел — скорость роста количества слагаемых существенно меньше показательной функции от степени системы уравнений.

Приведем результаты относительно асимптотически точной формулы для числа слагаемых в проблеме Гильберта – Камке в простых числах, состоящей в том, что при некоторых естественных условиях набор $\{N_1, \dots, N_n\}$ из n растущих натуральных чисел представляется в виде ограниченного числа наборов $\{p, \dots, p^n\}$, где p — простое число. Другими словами, найдется число $V(n)$ такое, что для любого набора $\{N_1, \dots, N_n\}$, удовлетворяющего некоторым естественным условиям, существуют простые числа $p_1, \dots, p_k$, где $k \leq V(n)$, такие, что имеем

$$\begin{cases} p_1 + \dots + p_k = N_1 \\ \dots \quad \dots \\ p_1^n + \dots + p_k^n = N_n. \end{cases}$$

Эту систему уравнений называют системой Марджанишвили – Хуа (МН-система).

Имеется два типа условий на набор $N_1, \dots, N_n$ для его представимости в приведенном выше виде: вещественной и арифметической разрешимости. Набор $(N_1, \dots, N_n)$, удовлетворяющий этим условиям, называется допустимым.

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \varepsilon > 0$ — постоянные, и пусть переменные $\theta_m = \theta_m(N_1, \dots, N_m, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям $|\theta_m| \leq 1, m = 1, \dots, n$. Далее, предположим, что при $N_1 \geq N_0(\varepsilon)$ справедливы следующие соотношения

$$N_m = N_1^m (\gamma_m + O(N_1^{-\varepsilon})), m = 1, \dots, n.$$

Говорят, что набор $(N_1, \dots, N_n)$ условию вещественной разрешимости, если система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k = \gamma_1 \\ \dots \quad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n = \gamma_n. \end{cases}$$

разрешима в вещественных числах $0 \leq x_1, \dots, x_k \leq 1$, где матрица Якоби

$$\|tx_s^{m-1}\| (m = 1, \dots, n; s = 1, \dots, k)$$

решения $x_1, \dots, x_k$ имеет максимальный ранг. При $k \geq n$ он равен n .

Имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 19. Пусть набор $(N_1, \dots, N_n)$ удовлетворяет условию вещественной разрешимости. Тогда особый интеграл асимптотической формулы для количества решений МН-системы положителен. В противном случае особый интеграл равен нулю и МН-система имеет только конечное число решений.

Далее представим натуральное число $n + 1$ в виде

$$n + 1 = l_p(p - 1) + r_p, 0 \leq r_p \leq p - 1, l_p = [(n + 1)/(p - 1)].$$

ТЕОРЕМА 20. Для того чтобы МН-система была разрешима необходимо, чтобы выполнялись арифметические условия следующего вида: для любого простого числа $p \leq n + 1$ разрешимы системы сравнений

$$\sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu, p)=1}}^{n+l_p+1} t_{\nu, p} \nu^m \equiv N_m \pmod{p^{\delta_p}}, m = 1, \dots, n,$$

где $\delta_p = n + l_p$ и неизвестные $t_{\nu, p}$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю p^{δ_p} .

Пусть символ k_p обозначает сумму

$$k_p = \sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu,p)=1}}^{n+l_p+1} t_{\nu,p}, \quad p \leq n+1$$

и $k_0 = k_0(N_1, \dots, N_n)$ — наименьшее неотрицательное целое число, удовлетворяющее системе сравнений

$$k_0 \equiv k_p \pmod{p^{\delta_p}}, \quad p \leq n+1.$$

ТЕОРЕМА 21. Для любого допустимого набора $(N_1, \dots, N_n)$ число k слагаемых в МН-системе имеет вид $k = k_0 + tb(n)$, где t — неотрицательное целое число и $b(n) = \prod_{p \leq n+1} p^{\delta_p}$.

Отсюда следует, что $V(n) \sim b(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

8.10. Проблема моментов в теории дзета-функции Римана

Найдены новые оценки абсциссы и показателя Карлсона в теории моментов дзета-функции Римана.

Абсциссой Ф. Карлсона называют величину σ_k , определяемую соотношениями вида

$$\sigma_k = \inf M,$$

где M — множество всех вещественных чисел σ , для которых справедлива оценка

$$I_k = I_k(\sigma, T) = T^{-1} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \ll_{\varepsilon} T^{\varepsilon},$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $k > 0$ и $\varepsilon > 0$ — произвольные вещественные числа.

ТЕОРЕМА 22. Пусть при некотором a , где $1 \leq a \leq 20$, $t \geq 1$ и всех $\sigma \in (1/2, 1)$ выполняется оценка

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{a(1-\sigma)^{3/2}}.$$

Пусть, далее, $k_0 = 44 - [22/a]$. Тогда для функции σ_k при всех $k \geq 45$ имеет место оценка

$$\sigma_k \leq 1 - \frac{1}{(3a(k - k_0) + (3a(k - k_0))^{1/2})^{2/3}}$$

Экспонентой Ф. Карлсона называют величину $m(\sigma)$, определяемую равенством $m(\sigma) = 2f(\sigma)$, где $f(\sigma)$ — функция, обратная к σ_k . Функцию $m(\sigma)$ можно определить как $\sup \{m\}$, где m таково, что при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2m} dt \ll_{\varepsilon} T^{\varepsilon}.$$

ТЕОРЕМА 23. При всех $\beta \geq \beta_1 = \frac{2701}{2880}$ и $k_0 = 44 - [22/a]$ справедлива оценка

$$\frac{m(\beta)}{2} \geq k_0 - 1 + \frac{1}{3a(1 - \beta)^{3/2}} - \frac{1}{(3a)^{1/2}(1 - \beta)^{3/4}}.$$

8.11. Оценка дзета-функции Римана на единичной прямой комплексной плоскости

Дано улучшение современной оценки модуля дзета-функции Римана в критической полосе в окрестности единичной прямой.

ТЕОРЕМА 24. Пусть для некоторого $\gamma \geq 3600^{-1}$ и для всех $1 \geq y \leq t^{0.5}$ справедлива оценка вида

$$\left| \sum_{n \leq y} n^{it} \right| \leq cy \exp -\gamma \ln^3 y \cdot \ln^{-2} t,$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная. Тогда при $1 \geq \sigma > 1 - 2 \cdot 10^{-4}$, $t \geq 1$, $s = \sigma + it$ имеет место оценка

$$|\zeta(s)| \ll t^{a(1-\sigma)^{1.5}} (\ln t)^{2/3} \left((1-\sigma)^{1/4} (\ln t)^{1/6} + 1 \right)^{-1},$$

где $a = 2 \cdot 3^{-1.5} \gamma^{-0.5}$.

Доказательство основано на следующем утверждении, имеющем и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 25. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — вещественные числа, $n \geq 1$, $f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x$, $\beta_r(x) = f^{(r)}(x)/r!$, $r = 1, \dots, n$. Далее, пусть $\beta_0 = (b-a)^{-1}$, $W(x) = |\beta_0| + \sum_{r=1}^n |\beta_r(x)|^{1/r}$. Тогда справедлива следующая оценка

$$I = \int_a^b e^{f(x)} dx \leq e^{M+1} n(n+1) H^{-1},$$

где $H = \min_{a \leq x \leq b} W(x)$, $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$.

9. Заключение

Научные работы Г. И. Архипова неоднократно признавались лучшими по РАН и по Математическому институту им. В. А. Стеклова РАН. Исследования по тригонометрическим суммам были отмечены как лучшие по Академии наук СССР за 1976–1980 гг.

С 1985 г. Г. И. Архипов работал по совместительству сначала доцентом, а затем профессором кафедры математического анализа Механико-математического факультета МГУ, являясь одним из ведущих лекторов по основному курсу математического анализа.

В 1999 г. Г. И. Архипов в соавторстве подготовил, отвечающий современному уровню преподавания учебник “Лекции по математическому анализу”, выдержавший уже шесть изданий [5]. Его первое издание удостоено в 2000 г. диплома Ассоциации книгоиздателей России за создание нового учебника. Недавно учебник переведен на китайский язык.

Геннадий Иванович является соавтором оригинальных монографий “Кратные тригонометрические суммы” (1980) [3], “Теория кратных тригонометрических сумм” (1987) [4], “Тригонометрические суммы в теории чисел и анализе” (2004) [14].

Геннадий Иванович принимал активное участие в организации и проведении научных школ, семинаров и конференций. Много сил и энергии он отдавал руководству студентами, аспирантами и стажерами. Он оказал огромное влияние на становление ряда известных математиков, работающих в разных странах мира. Среди его учеников доктора и кандидаты наук. Г. И. Архипов обладал поистине энциклопедическими знаниями во многих областях науки и культуры.

Список научных работ Г. И. Архипова дан в его “Избранных трудах”, изданных в 2013 г. [1]. Скончался Г. И. Архипов 14 марта 2013 г.

Вспоминая сегодня о незаурядных людях и выдающихся ученых Геннадие Ивановиче Архипове и Сергее Михайловиче Воронине, надеемся, что их светлый образ, сохраненный в наших сердцах, будет тепло воспринят будущими поколениями математиков.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. И. Архипов. Избранные труды. Орёл: Изд-во Орловск. ун-та, 2013. 437 с.
2. Г. И. Архипов, А. А. Карацуба. Новая оценка интеграла И. М. Виноградова // Изв.АН СССР. Сер. матем. 1978, т. 42, С. 751-762.
3. Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков. Кратные тригонометрические суммы // Тр. МИАН СССР, 151, 1980, С. 3-128.
4. Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1987, 370 с.
5. Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу.: Учебник для университетов и пед. вузов / Под ред. В. А. Садовничего — М.: Высш. шк. 1999. — 695 с.
6. Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков. Сергей Михайлович Воронин (к 65-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник. 2011, т. 12, вып. 1, с. 4-9.
7. С. М. Воронин. Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975, 39:3, С. 475-486.
8. С. М. Воронин. Простые числа. — М.: Знание, 1978. 64 с.
9. С. М. Воронин. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1980. 44:1. С. 63-91.
10. С. М. Воронин. О методе И. М. Виноградова // Теория чисел, алгебра, математический анализ и их приложения, Сб. ст. Посвящается 100-летию со дня рождения Ивана Матвеевича Виноградова, Тр. МИАН, 200, Наука, М., 1991, с. 114-123.
11. С. М. Воронин. Избранные труды: Математика / Воронин С. М. , Под ред. А. А. Карацубы — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. — 480 с. — ISBN 5-7038-2800-7.
12. С. М. Воронин, А. А. Карацуба. Дзета-функция Римана — М.: Физматлит, 1994. — 376 с. — ISBN 5-02-014120-8.
13. В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. Геннадий Иванович Архипов (к 60-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник. 2007, т.7, вып. 1(17), с. 5-31.
14. G. I. Arkhipov, V. N. Chubarikov, A. A. Karatsuba, Trigonometric sums in number theory and analysis, de Gruyter Exp. Math., 39, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, x+554 pp.
15. S. M. Voronin. Functional independence of Dirichlet L-functions // Acta Arith. 27(1975), P. 493-503.
16. A. A. Karatsuba, S. M. Voronin. The Riemann Zeta-Function. De Gruyter Exp.Math.,5,Walter de Gruyter GmbH&Co. KG, Berlin, 1992, x+396pp.

REFERENCES

1. G. I. Arkhipov, 2013, "Selected works" , *Orel: Publishing house of Oryol. un-ta*, 437 p.
2. G. I. Arkhipov., A. A. Karatsuba, 1979, "A new estimate of an integral of I. M. Vinogradov" , *Math.USSR-Izv.* 13, P. 52-62.
3. G. I. Arkhipov, A. A. Karatsuba, V. N. Chubarikov, 1980, "Multiples of trigonometric sums" , *Tr. MIAN OF THE USSR*, 151, P. 3–128.
4. G. I. Arkhipov, A. A. Karatsuba, V. N. Chubarikov, 1987, "The theory of multiple trigonometric sums" , *M.: Nauka* 370 p.
5. G. I. Arkhipov, V. A. Sadovnichii, V. N. Chubarikov, 1999, "Lectures on mathematical analysis.: Textbook for universities and pedagogical universities" , / Ed. V. A. Sadovnichii — *Moscow: Higher School* — 695 p.
6. G. I. Arkhipov, V. N. Chubarikov, 2011, "Sergey Mikhailovich Voronin (to the 65th anniversary of his birth)" , *Chebyshevskii sbornik.* vol. 12, issue 1, pp. 4–9.
7. S. M. Voronin, 1975, "Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function" , *Math. USSR-Izv.*, 9, P. 443-453.
8. S. M. Voronin, 1978, "Prime numbers" , *M.: Knowledge*, 64 p.
9. S. M. Voronin, 1980, "On the zeros of some Dirichlet series lying on the critical line" , *Izv.Akad.Nauk SSSR. Ser.Mat.* 44, P.63-91.
10. S. M. Voronin, 1991, "About the method of I. M. Vinogradov" , *Number theory, algebra, mathematical analysis and their applications, Collection of articles Dedicated to the 100th anniversary of the birth of Ivan Matveevich Vinogradov, Tr. MIAN, 200, Nauka, M.*, P. 114–123.
11. S. M. Voronin, 2006, "Selected works: Mathematics" , / Ed. A. A. Karatsuba — *Moscow: Publishing House of the Bauman Moscow State Technical University*, 480 p. — ISBN 5-7038-2800-7.
12. S. M. Voronin, A. A. Karatsuba, 1994, "The Riemann Zeta function" , *M.: Fizmatlit*, 376 p. — ISBN 5–02–014120–8.
13. V. A. Sadovnichii, V. N. Chubarikov, 2007, "Gennady Ivanovich Arkhipov (on the 60th anniversary of his birth)" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 7, issue 1(17), P. 5–31.
14. G. I. Arkhipov, V. N. Chubarikov, A. A. Karatsuba, 2004, "Trigonometric sums in number theory and analysis" , *de Gruyter Exp. Math.*, 39, *Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin*, x+554 pp.
15. S. M. Voronin, 1975, "Functional independence of Dirichlet L-functions" , *Acta Arith.*, 27, P. 493-503.
16. A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, 1992, "The Riemann Zeta-Function" , *De Gruyter Exp. Math.*, 5, *Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin*, x+396pp.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 517.1, 517.2, 517.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-27-47

Регрессионное дифференцирование и регрессионное
интегрирование конечных рядов¹

С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, М. Н. Добровольский, О. В. Иванченко, Д. А. Камаев

Агаян Сергей Мартикович — доктор физико-математических наук, Геофизический центр Российской академии наук (г. Москва).

e-mail: s.agayan@gcras.ru

Богоутдинов Шамиль Рафекович — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр Российской академии наук, Институт физики Земли Российской академии наук (г. Москва).

e-mail: shm@wdcb.ru

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр Российской академии наук (г. Москва).

e-mail: shm@wdcb.ru

Иванченко Ольга Васильевна — Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Обнинский институт атомной энергетики (г. Москва).

e-mail: ovivanchenko@iate.obninsk.ru

Камаев Дмитрий Альфредович — доктор технических наук, Научно-производственное объединение «Тайфун» (г. Обнинск).

e-mail: kda@feerc.obninsk.org

Аннотация

Анализ данных понятие сложное и многозначное. Объясняется это как объективной сложностью самих данных, так и субъективной природой анализирующего их эксперта. Поэтому адекватная формализация этого требует совершенно нового аппарата, с одной стороны способного преодолеть объективную сложность данных (нерегулярность и неточность), а с другой - нечеткий характер суждений эксперта. Развитие Дискретного математического анализа (ДМА) является важным шагом в этом направлении. ДМА значительно ориентирован на эксперта и занимает промежуточное положение в анализе данных между жесткими математическими методами (статистический анализ, СВАН и др.) и мягкими комбинаторными (имитационное моделирование, нейронные сети и др.).

В настоящей работе предлагаются новые математические конструкции регрессионных производных и регрессионных интегралов для дискретных временных рядов, заданных в общем случае на нерегулярной сетке. В их изучение важную роль играет недавно созданный авторами проекционный метод решения систем линейных алгебраических уравнений, описанный в конце работы.

Полученные конструкции регрессионных производных и регрессионных интегралов имеют иерархический характер в духе вейвлет- и фрактального анализов.

Результаты работы определяют направление для дальнейших исследований, а именно, проникновение регрессионного дифференцирования и регрессионного интегрирования в конечную математику по сценариям классической.

Ключевые слова: дискретный математический анализ, регрессионная производная, регрессионный интеграл, ядро оператора, неинтегрируемый ряд.

Библиография: 16 названий.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Геофизического центра РАН, утвержденного Минобрнауки России.

Для цитирования:

С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, М. Н. Добровольский, О. В. Иванченко, Д. А. Камаев. Регрессионное дифференцирование и регрессионное интегрирование конечных рядов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 27–47.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 517.1, 517.2, 517.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-27-47

Regression differentiation and regression integration of finite series

S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, M. N. Dobrovolskiy, O. V. Ivanchenko, D. A. Kamaev

Agayan Sergei Martikovich — doctor of physical and mathematical sciences, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: s.agayan@gcras.ru

Bogoutdinov Shamil Rafekovich — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences, Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: shm@wdcb.ru

Dobrovolskiy Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical Center of the Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: shm@wdcb.ru

Ivanchenko Olga Vasilievna — National Research Nuclear University “MEPhI”, Obninsk Institute of Atomic Energy (Moscow).

e-mail: ovivanchenko@iate.obninsk.ru

Kamaev Dmitry Alfredovich — doctor of technical sciences, Research and Production Association «Typhoon» (Obninsk).

e-mail: kda@feerc.obninsk.org

Abstract

Data analysis is a complex and multi-dimensional concept. It is explained by both the objective complexity of the data itself and the subjective nature of the expert analyzing them. Therefore, adequate formalization of this requires a completely new apparatus, on the one hand, capable of overcoming the objective complexity of data (irregularity and inaccuracy), and, on the other hand, the vague nature of expert judgment. The development of Discrete Mathematical Analysis (DMA) is an important step in this direction. DMA is highly expert oriented and occupies an intermediate position in data analysis between strict mathematical methods (statistical analysis, TFA, etc.) and soft combinatorial methods (simulation modeling, neural networks, etc.).

This paper proposes new mathematical constructions of regression derivatives and regression integrals for discrete time series defined in general on an irregular grid. An important role in their study is played by the recently created by the authors projection method for solving systems of linear algebraic equations described at the end of this paper.

The obtained constructions of regression derivatives and regression integrals have a hierarchical character in the spirit of wavelet and fractal analysis.

The results of this work define another direction in further studies, namely, the propagation of regression differentiation and regression integration in finite mathematics under scenarios of the classical one.

Keywords: discrete mathematical analysis, regression differentiation, regression integration, operator kernel, functional non-integrable series.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, M. N. Dobrovolskiy, O. V. Ivanchenko, D. A. Kamaev, 2021, "Regression differentiation and regression integration of finite series", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 27–47.

Введение

Анализ данных понятие сложное и многозначное. Объясняется это как объективной сложностью самого данных, так и субъективной природой анализирующего его эксперта. Поэтому адекватная формализация этого требует совершенно нового аппарата, с одной стороны способного преодолеть объективную сложность данных (нерегулярность и неточность), а с другой – нечеткий характер суждений эксперта. Развитие Дискретного математического анализа (ДМА) (например, [6, 5, 7, 4, 1, 2, 3]) является важным шагом в этом направлении. ДМА значительно ориентирован на эксперта и занимает промежуточное положение в анализе данных между жесткими математическими методами (статистический анализ, СВАН и др.) и мягкими комбинаторными (имитационное моделирование, нейронные сети и др.). Концепция ДМА состоит из двух положений. Положение первое: преимущество эксперта при анализе данных перед формальными методами объясняется его гибким, адаптивным восприятием фундаментальных свойств предельности, близости, непрерывности, связности, тренда и других. Такое умение эксперта нужно алгоритмизировать и получить дискретные аналоги упомянутых выше свойств. Положение второе: алгоритмы анализа данных складываются, как в конструкторе, из дискретных аналогов предельности, близости, непрерывности, связности и т.д., поэтому эти аналоги надо соединить по сценарию классической непрерывной математики и извлечь из этого пользу для анализа данных.

В настоящей работе предлагаются новые математические конструкции регрессионных производных и регрессионных интегралов для дискретных временных рядов, заданных в общем случае на нерегулярной сетке. В их изучение важную роль играет недавно созданный авторами проекционный метод решения систем линейных алгебраических уравнений, описанный в конце работы.

Регрессионные производные и интегралы

Теоретические предпосылки

Пусть функция f определена вокруг нуля на отрезке $[a, b]$, ($ab < 0$), и интегрируема на нем. Для $0 \leq \Delta \leq \min(|a|, |b|)$ через f_Δ обозначим ограничение f на отрезок $[-\Delta, \Delta]$ и вычислим проекцию $\text{pr } f_\Delta$ функции f_Δ в пространстве $L^2[-\Delta, \Delta]$ на двумерное пространство линейных функций $\text{Lin}^2[-\Delta, \Delta]$.

Обозначим через $e_1 = e_1(\Delta)$, $e_2 = e_2(\Delta)$ ортонормированный базис в $\text{Lin}^2[-\Delta, \Delta]$, получающийся из естественного базиса $(1, x)$ путем ортогонализации Грама–Шмидта [8], тогда:

$$\text{pr } f_\Delta = (f_\Delta, e_1)_\Delta e_1 + (f_\Delta, e_2)_\Delta e_2.$$

Положим $e_1 = c$, $e_2 = ax + b$. На a , b , c возникают три условия:

$$\begin{aligned} \|e_1\|_\Delta = 1 &\Leftrightarrow \int_{-\Delta}^{\Delta} c^2 dx = 1 \Leftrightarrow c^2 = \frac{1}{2\Delta}, \\ (e_1, e_2)_\Delta = 0 &\Leftrightarrow \int_{-\Delta}^{\Delta} c(ax + b) dx = 0 \Leftrightarrow b = 0, \\ \|e_2\|_\Delta = 1 &\Leftrightarrow \int_{-\Delta}^{\Delta} a^2 x^2 dx = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{2\Delta^3}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\text{pr } f_\Delta)(x) = \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} f(x)dx + \frac{3}{2\Delta^3} \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} xf(x)dx \right).$$

Дополнительно потребуется дифференцируемость функции f в нуле:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \alpha(x)x,$$

где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

Тогда стремление:

$$\frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} f(x)dx \rightarrow f(0)$$

в свободном члене проекции $\text{pr } f_\Delta$ объясняется теоремой о среднем [9].

Разберем коэффициент разложения $\text{pr } f_\Delta$ при x :

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta^3} \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} xf(x)dx \right) = \\ & \frac{3}{2\Delta^3} \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} x(f(0) + f'(0)x + \alpha(x)x)dx \right) = \\ & \frac{3}{2\Delta^3} \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} xf(0)dx \right) + \frac{3}{2\Delta^3} \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} x^2 f'(0)dx \right) + \frac{3}{2\Delta^3} \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} \alpha(x)x^2 dx \right) = \\ & 0 + f'(0) + \frac{3}{2\Delta^3} \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} \alpha(x)x^2 dx \right) \end{aligned}$$

Последний интеграл стремится к нулю при $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\varepsilon) : \forall \Delta < \Delta(\varepsilon) |\alpha|_{[-\Delta, \Delta]} < \varepsilon \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left| \frac{3}{2\Delta^3} \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} \alpha(x)x^2 dx \right) \right| \leq \frac{3}{2\Delta^3} \left| \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} \varepsilon x^2 dx \right) \right| \equiv \varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом, доказано следующее:

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если функция f дифференцируема в нуле, то линейная проекция $\text{pr } f_\Delta$ стремится к ее касательной в нуле.

Замена касательной к f на проекцию $\text{pr } f_\Delta$ при малых Δ дает возможность определить касательную для дискретных функций, поскольку проекция $\text{pr } f_\Delta$ есть не что иное, как линейная регрессия для f на $[-\Delta, \Delta]$ и допускает обобщение на дискретный случай.

1. Основные понятия

1.1. Пусть $BP[a, b]$ — N -мерное пространство конечных временных рядов на дискретном отрезке $[a, b]$ с узлами сетки t_i , $i = 1, \dots, N$; $t_1 = a$, $t_N = b$.

Дискретный математический анализ поведения ряда предполагает рассмотрение его значения не только в каждой отдельной точке, но и одновременно учет значений в некоторой её окрестности. С этой целью вводится понятие локализации для области определения ряда, т.е. для точек дискретного отрезка $[a, b]$. Локализация осуществляется с помощью **нечеткой структуры** $\delta_{t_i}(t_j)$, которая выполняет роль окрестности узла t_i и выражает свойство близости остальных узлов к t_i :

$$\delta_{t_i}(t_j) - \text{степень близости узла } t_j \text{ к узлу } t_i.$$

По определению:

$$\delta_{t_i}(t_j) \in [0, 1], \quad \delta_{t_i}(t_j) = 1,$$

В общем случае, $\delta_{t_i}(t_j) \neq \delta_{t_j}(t_i)$.

Таким образом, для любой точки t_i вводится структура нечеткого множества.

1.2. С мерой близости $\delta_{t_i}(t_j)$ связывается матрица весов

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \frac{\delta_{t_i}(t_j)}{\sum_{k=1}^N \delta_{t_i}(t_k)},$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N, \quad \sum_j a_{ij} = 1$$

Заметим, что матрицу A можно представить в форме: $A = K A_0$, где $A_0 = (\delta_{t_i}(t_j))$, $K \equiv \text{diag} \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^N \delta_{t_i}(t_k)} \right)$.

Будем говорить, что нечеткая структура $\delta_{t_i}(t_j)$ однородна, если $\delta_{t_i}(t_j) = \delta(t_i - t_j)$ где функция $\delta(\xi)$ является неотрицательной, $\delta(0) = 1$. Если функция $\delta(\xi)$ является неотрицательной и четной, то порождаемую ею нечеткую структуру будем называть симметричной и однородной.

Например, в случае равномерной сетки: $t_i = a + (i-1)h$, $i = 1, \dots, N$, $t_N = b = a + (N-1)h$, $h = (b-a)/(N-1)$ нечеткая структура будет симметричной, если $\delta_{t_i}(t_j) = \delta(|t_i - t_j|) = \delta(h|i-j|)$, где функция $\delta(\xi)$ является четной, неотрицательной, $\delta(0) = 1$.

Если $\delta_{t_i}(t_j) = 0$ при $|t_i - t_j| > r$, то нечеткая структура будет называться локальной, r — радиус нечеткой структуры.

Примером может служить симметричная однородная локальная нечеткая структура вида:

$$\delta(|t_i - t_j|) \equiv \delta(i - j) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|i-j|}{r}\right)^p, & |i - j| \leq r < N \\ 0, & |i - j| > r \end{cases} \quad (1)$$

2. Регрессионные производные: определения

2.1. Мера близости $\delta_{t_i}(t_j)$ в дискретном случае заменяет предельный переход $t_j \rightarrow t_i$ в классическом случае. Для ряда x в точке t_i возникает нечеткий образ $\text{Im}_{t_i}x$:

$$\text{Im}_{t_i}x = \{(x(t_j), \delta_{t_i}(t_j)), t_j \in [a, b]\},$$

для которого в свою очередь строится линейная регрессия

$$y_i(t_j) = \alpha_i(t_j - t_i) + \beta_i, \quad j = 1, \dots, N$$

где α_i, β_i — коэффициенты регрессии, которые находятся из условия минимума функционала

$$J_i(\alpha, \beta) = \sum_j a_{ij}[x_j - \alpha(t_j - t_i) - \beta]^2. \quad (2)$$

2.2. Значение величины α_i будем называть **регрессионной производной ряда x в точке t_i** и обозначать $(\mathcal{D}(x))_i$, в свою очередь, значение величины β_i будем называть **регрессионным значением ряда x в точке t_i** и обозначать $(\mathcal{R}(x))_i$.

2.3. Условия минимума функционала $J_i(\alpha, \beta)$ приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij} (t_j - t_i) [x_j - \alpha (t_j - t_i) - \beta] = 0 \\ \sum_j a_{ij} [x_j - \alpha (t_j - t_i) - \beta] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Введем оператор $M_i(y) = \sum_j a_{ij} y_j$, действующий на ряды вида $y = (y_1, \dots, y_N)$, который совпадает с математическим ожиданием дискретной случайной величины $y = (y_1, \dots, y_N)$, принимающей значение y_j с вероятностью a_{ij} .

С помощью оператора $M_i(y)$ система (3) может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} M_i(tx) - t_i M_i(x) - \alpha M_i(t - t_i)^2 - \beta (M_i(t) - t_i) = 0 \\ M_i(x) - \alpha (M_i(t) - t_i) - \beta = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Решение системы имеет вид:

$$\alpha_i = \frac{M_i(tx) - M_i(t) M_i(x)}{M_i(t^2) - M_i(t)^2}$$

$$\beta_i = M_i(x) - \frac{M_i(tx) - M_i(t) M_i(x)}{M_i(t^2) - M_i(t)^2} (M_i(t) - t_i)$$

Заметим, что выражение $M_i(t^2) - M_i(t)^2$ есть дисперсия $D_i(t)$ случайной величины $t = (t_1, \dots, t_N)$, принимающей значение t_j с вероятностью a_{ij} . Поэтому она может быть равна 0 только в случае $t_1 = t_2 = \dots = t_N$. Таким образом, $M_i(t^2) - M_i(t)^2 \neq 0$. Выражения для коэффициентов регрессии можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (D_i(t))^{-1} [M_i(tx) - M_i(t) M_i(x)] \\ \beta_i &= M_i(x) - (D_i(t))^{-1} [M_i(tx) - M_i(t) M_i(x)] (M_i(t) - t_i) \end{aligned} \quad (5)$$

2.4. Если рассмотреть в совокупности $(\mathcal{D}(x))_i$ и $(\mathcal{R}(x))_i$ для всех значений t_i , то можно ввести операторы регрессионного дифференцирования и регрессионного значения:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : BP[a, b] &\rightarrow BP[a, b], \\ \mathcal{R} : BP[a, b] &\rightarrow BP[a, b] \end{aligned}$$

Вычислим матричное представление операторов $\mathcal{D}$ и $\mathcal{R}$. Справедливы преобразования:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (D_i(t))^{-1} [M_i(tx) - M_i(t) M_i(x)] = \\ &= (D_i(t))^{-1} \sum_j a_{ij} t_j x_j - (D_i(t))^{-1} M_i(t) \sum_j a_{ij} x_j = \\ &= \sum_j a_{ij} \left((D_i(t))^{-1} t_j - (D_i(t))^{-1} M_i(t) \right) x_j \\ \beta_i &= M_i(x) - (D_i(t))^{-1} (D_i(t))^{-1} (D_i(t))^{-1} [M_i(tx) - M_i(t) M_i(x)] (M_i(t) - t_i) = \\ &= \sum_j a_{ij} x_j - (M_i(t) - t_i) \sum_j a_{ij} \left((D_i(t))^{-1} t_j - (D_i(t))^{-1} M_i(t) \right) x_j = \\ &= \sum_j a_{ij} x_j \left[1 - (M_i(t) - t_i) \left((D_i(t))^{-1} t_j - (D_i(t))^{-1} M_i(t) \right) \right] \end{aligned}$$

Введем обозначения диагональных матриц:

$$D \equiv \text{diag } D_i(t), M \equiv \text{diag } M_i(t), T \equiv \text{diag } t_i.$$

Из приведенных формул следует матричная форма представления оператора $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(x) &= [A - D^{-1}(M - T)AT + D^{-1}(M - T)MA]x = \\ &= [A - D^{-1}(M - T)(AT - MA)]x = \\ &= [KA_0 - D^{-1}(M - T)(KA_0 T - MK A_0)]x,\end{aligned}$$

и оператора $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(x) &= [D^{-1}AT - D^{-1}MA]x = \\ &= D^{-1}(AT - MA)x = D^{-1}(KA_0 T - MK A_0)x, \\ \mathcal{D}_{ij} &= (D_i(t))^{-1}K_i\delta_{ij}(t_j - M_i(t))\end{aligned}$$

3. Регрессионные производные: примеры

3.1. Случай классической непрерывной функции (рис. 1)

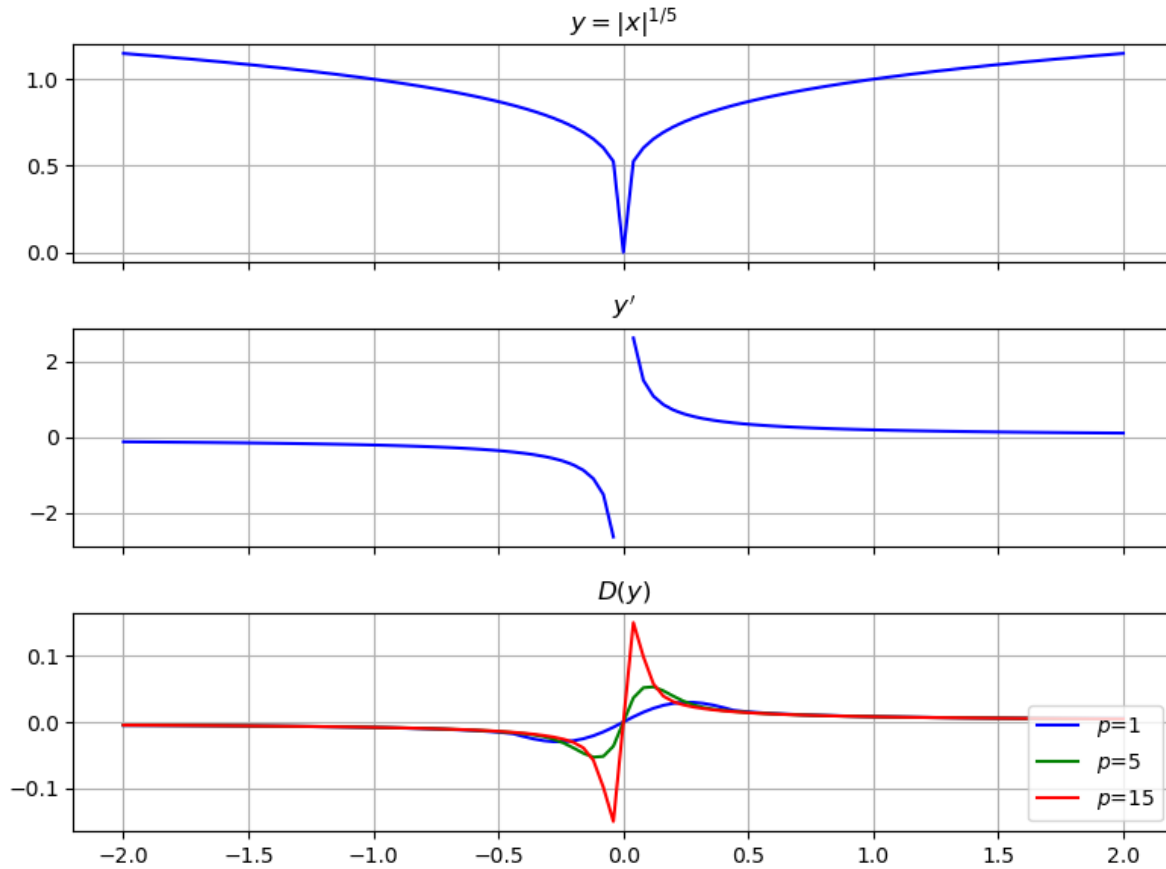


Рис. 1: На верхнем рисунке – график функции $y = |x|^{1/5}$, на среднем рисунке – ее классическая производная, на нижнем рисунке – регрессионная производная этой функции при разных значениях p

3.2. Случай реальной записи (рис. 2)

3.3. Математическое ожидание и регрессионное значение. Оператор регрессионного значения $\mathcal{R} = [A - D^{-1}(M - T)(AT - MA)]$ действует как сглаживание и является столь же естественным

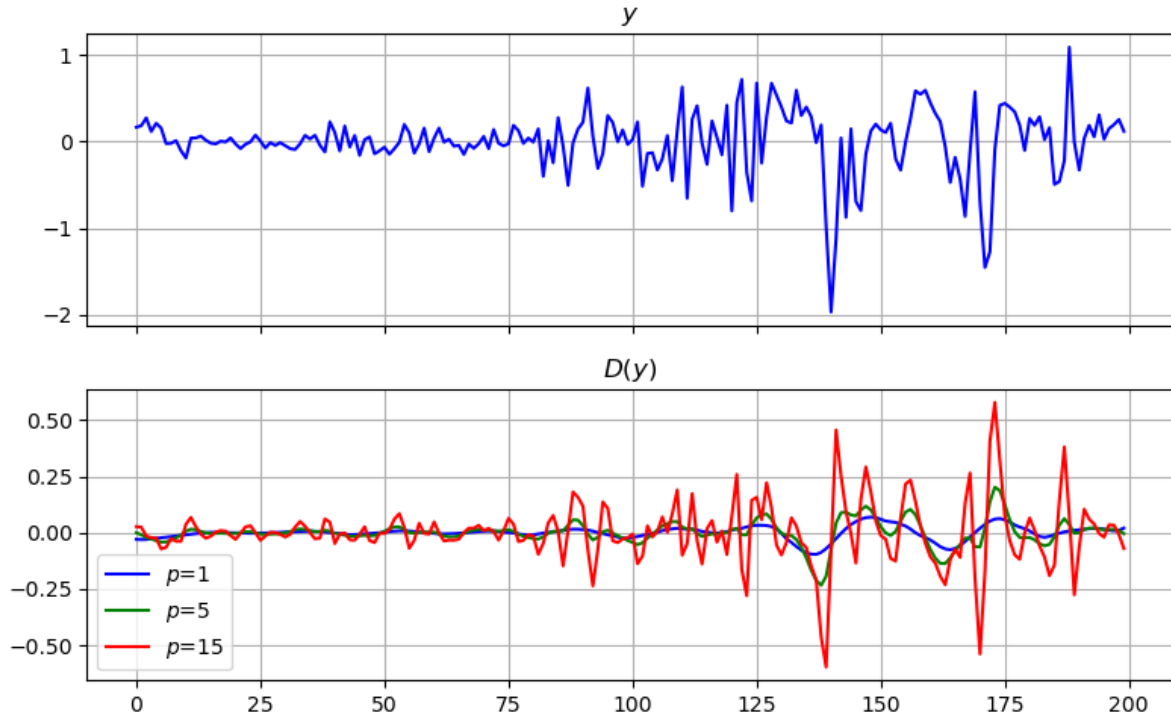


Рис. 2: На верхнем рисунке – фрагмент записи со спутника SWARM, на нижнем рисунке – ее регрессионная производная при разных значениях p

по отношению к мере близости δ , что и обычное усреднение (математическое ожидание A). Исследования показывают, что $\mathcal{R}$ работает лучше, чем A (рис. 3)

3.4. Пример нетривиального ядра оператора регрессионного интегрирования $\mathcal{D}$ (рис. 4)

4. Регрессионные производные: свойства

4.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ. (*Линейный случай*)

$$\mathcal{R}(at_i + b) = at_i + b,$$

$$\mathcal{D}(at_i + b) = a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае ряд представим в виде:

$$x_i = at_i + b$$

В принятых обозначениях, $x = at + b$, поэтому

$$M_i(t(at + b)) - M_i(t) M_i(at + b) = aD_i(t)$$

Следовательно, $\alpha_i = a$. Аналогично,

$$\beta_i = M_i(at + b) - \frac{M_i(t(at + b)) - M_i(t) M_i(at + b)}{M_i(t^2) - M_i(t)^2} (M_i(t) - t_i) =$$

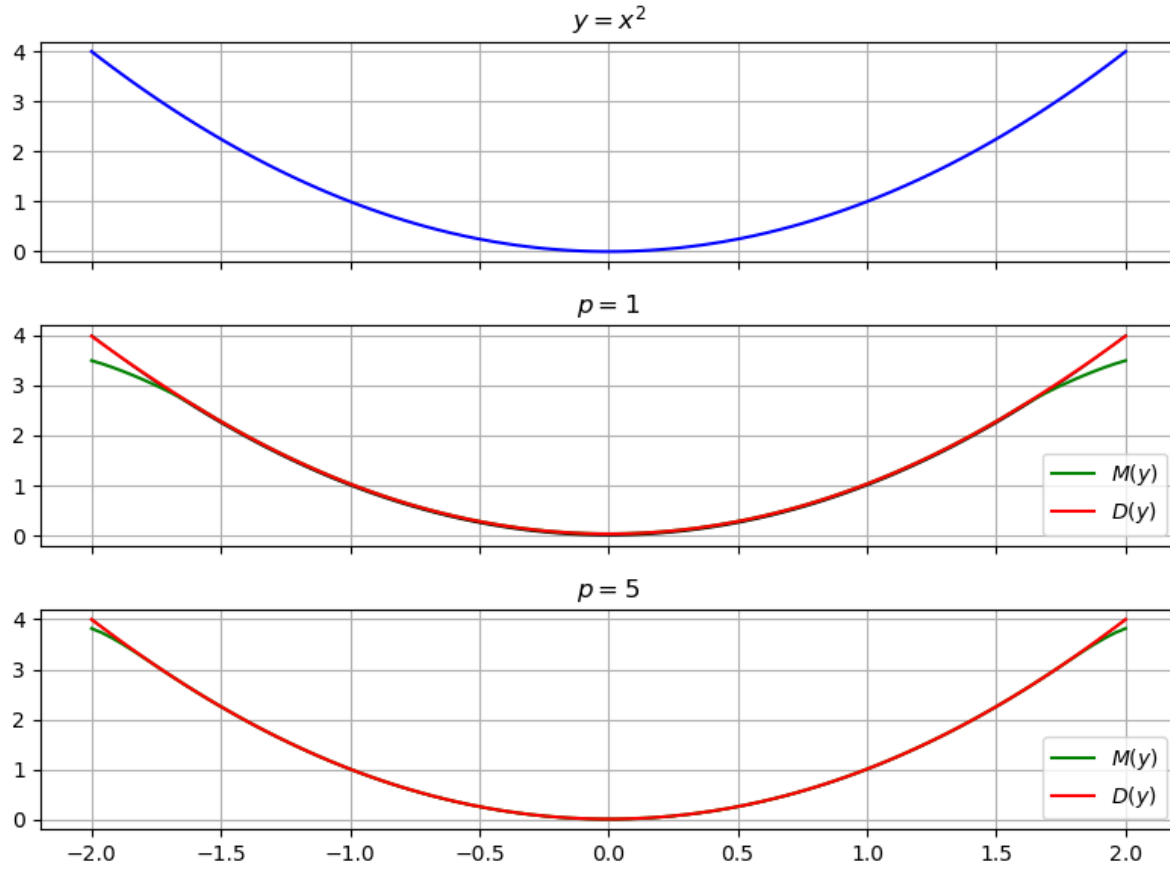


Рис. 3: На верхнем рисунке – график функции $y = x^2$, на среднем рисунке – сравнение регрессионного и обычного сглаживания при $p = 1$, на нижнем рисунке – сравнение регрессионного и обычного сглаживания при $p = 5$

$$= aM_i(t) + b - a(M_i(t) - t_i) = at_i + b$$

4.2. Ядро дифференцирования в случае трехточечной нечеткой структуры меры близости

Рассмотрим случай $r = 2$, т.е. нечеткая локальная структура $\delta_{t_i}(t_j)$ отлична от нуля только в точках t_{i-1}, t_i, t_{i+1} . Пусть $\delta_{t_i}(t_{i-1}) = \alpha_i$, $\delta_{t_i}(t_{i+1}) = \beta_i$, $\delta_{t_i}(t_i) = 1$.

В результате прямых расчетов получаем:

$$1. k_i = \frac{1}{1 + \alpha_i + \beta_i}, \quad i \neq 1, \quad i \neq N,$$

$$k_1 = \frac{1}{1 + \beta_1}, \quad k_N = \frac{1}{1 + \alpha_N}$$

$$2. M_i(t) = \frac{t_i + t_{i-1}\alpha_i + t_{i+1}\beta_i}{1 + \alpha_i + \beta_i}, \quad i \neq 1, \quad i \neq N,$$

$$M_1(t) = \frac{t_1 + t_2\beta_1}{1 + \beta_1}, \quad M_N(t) = \frac{t_N + t_{N-1}\alpha_N}{1 + \alpha_N}$$

$$3. M_i(t^2) = \frac{t_i^2 + t_{i-1}^2\alpha_i + t_{i+1}^2\beta_i}{1 + \alpha_i + \beta_i}, \quad i \neq 1, \quad i \neq N,$$

$$M_1(t^2) = \frac{t_1^2 + t_2^2\beta_1}{1 + \beta_1}, \quad M_N(t^2) = \frac{t_N^2 + t_{N-1}^2\alpha_N}{1 + \alpha_N}$$

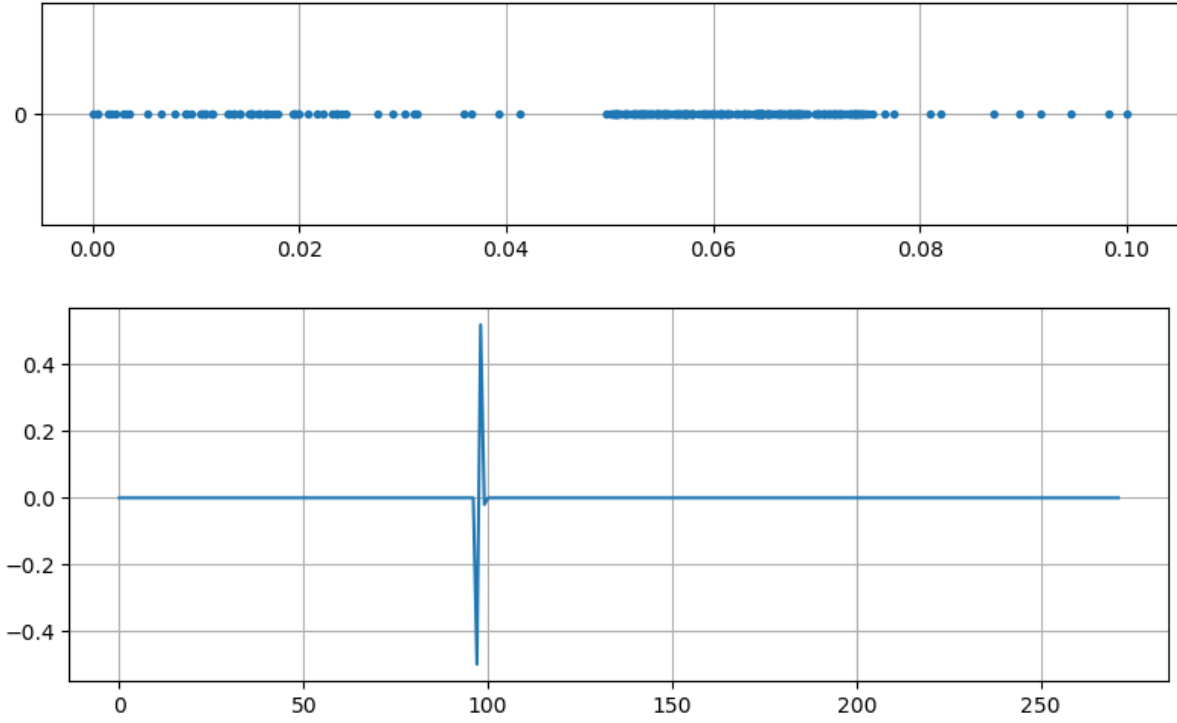


Рис. 4: На верхнем рисунке – неравномерное множество, на котором строился оператор регрессионного дифференцирования, на нижнем рисунке – нетривиальное ядро оператора $\mathcal{D}$

$$4. \quad M_i(t^2) - (M_i(t))^2 = \frac{\alpha_i(t_{i-1}-t_i)^2 + \beta_i(t_{i+1}-t_i)^2 + \alpha_i\beta_i(t_{i-1}-t_{i+1})^2}{(1+\alpha_i+\beta_i)^2}, \quad i \neq 1, \quad i \neq N,$$

$$M_1(t^2) - (M_1(t))^2 = \frac{\beta_1}{(1+\beta_1)^2}(t_1 - t_2)^2$$

$$M_N(t^2) - (M_N(t))^2 = \frac{\alpha_N}{(1+\alpha_N)^2}(t_N - t_{N-1})^2$$

$$5. \quad t_j - M_i(t) = \frac{(t_j - t_i) + \alpha_i(t_j - t_{i-1}) + \beta_i(t_j - t_{i+1})}{1 + \alpha_i + \beta_i}, \quad i \neq 1, \quad i \neq N,$$

$$t_j - M_1(t) = \frac{(t_j - t_1) + \beta_1(t_j - t_2)}{1 + \beta_1}$$

$$t_j - M_N(t) = \frac{(t_j - t_N) + \alpha_N(t_j - t_{N-1})}{1 + \alpha_N}$$

Проанализируем в случае $r = 2$ ядро и образ оператора регрессионного дифференцирования.

Воспользуемся формулой $\mathcal{D}(x) = D^{-1}(KA_0 T - MK A_0)x$. Так как $MK = KM$, то $x \in \text{Ker } \mathcal{D}$ эквивалентно условию

$$(A_0 T - MA_0)x = 0.$$

Т.е. ряд $x = (x_1, \dots, x_N)$ есть решение системы линейных уравнений:

$$(t_1 - M_1)x_1 + \beta_1(t_2 - M_1)x_2 = 0$$

$$\alpha_2(t_1 - M_2)x_1 + (t_2 - M_2)x_2 + \beta_2(t_3 - M_2)x_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
& \dots \\
& \alpha_i(t_{i-1} - M_i)x_{i-1} + (t_i - M_i)x_i + \beta_i(t_{i+1} - M_i)x_{i+1} = 0 \\
& \dots \\
& \alpha_{N-1}(t_{N-2} - M_{N-1})x_{N-2} + (t_{N-1} - M_{N-1})x_{N-1} + \beta_{N-1}(t_N - M_{N-1})x_N = 0 \\
& \alpha_N(t_{N-1} - M_N)x_{N-1} + (t_N - M_N)x_N = 0
\end{aligned}$$

Множество решений этой системы не является пустым, т.к. содержит постоянные ряды. Если $(x_1, \dots, x_N)$ есть решение системы, то в силу $t_2 - M_1 = \frac{t_2 - t_1}{1 + \beta_1} \neq 0$, $t_{i+1} - M_i = \frac{t_{i+1} - t_i + \alpha_i(t_{i+1} - t_{i-1})}{1 + \alpha_i + \beta_i} \neq 0$, из первого уравнения x_2 выражается через x_1 , из второго уравнения x_3 выражается через x_1 и x_2 , следовательно, через x_1 и т.д. Следовательно, решение системы единственно с точностью до умножения на x_1 . Таким образом, доказано следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть нечеткая локальная структура $\delta_{t_i}(t_j)$ отлична от нуля только в точках t_{i-1}, t_i, t_{i+1} , тогда $\text{Ker } \mathcal{D}$ есть подпространство постоянных рядов.

5. Регрессионные интегралы

5.1. Неопределенный интеграл: определения и свойства

Согласно концепции классического математического анализа, операция неопределенного интегрирования должна рассматриваться как обратная по отношению к операции дифференцирования. Поэтому определим результат неопределенного регрессионного интегрирования ряда $y \in B[a, b]$ как решение системы линейных уравнений

$$(\mathcal{D}(x))_i = y_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

Выше было показано, что матрица регрессионной производной $\mathcal{D}$ имеет ненулевое ядро ($\text{Ker } \mathcal{D} \neq 0$), которое в общем случае содержит не только постоянные ряды. Поэтому неопределенный регрессионный интеграл ряда y , для которого будем использовать обозначение $\mathcal{J}(y)$, может быть определен с точностью до любого ряда из $\text{Ker } \mathcal{D}$.

Неопределенный регрессионный интеграл ряда y есть множество рядов $\mathcal{J}(y)$, представимое в виде:

$$\mathcal{J}(y) = \{x^0 + z \mid z \in \text{Ker } \mathcal{D}\},$$

где x^0 – частное решение системы $\mathcal{D}(x) = y$.

Параметризация множества $\mathcal{J}(y)$ сводится к параметризации $\text{Ker } \mathcal{D}$ – пространства решений однородной системы линейных уравнений $\mathcal{D}(x) = 0$. Для её построения используется проекционный метод, изложенный в приложении. В результате параметрическое представление неопределенного интеграла имеет вид

$$\mathcal{J}(y) = \{x^0 + H(\mathcal{D})s \mid s \in B[a, b]\}$$

где $H(\mathcal{D})$ – оператор ортогонального проектирования на $\text{Ker } \mathcal{D}$.

С помощью полученной параметризации на многообразии $\mathcal{J}(y)$ можно получить элемент минимальной нормы, который обозначается $\mathcal{J}_m(y)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Операция неопределенного регрессионного интегрирования линейна: для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in \text{Im } \mathcal{D} \subset B[a, b]$

$$\mathcal{J}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{J}(y_1) + \beta \mathcal{J}(y_2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряд $\alpha \mathcal{J}_m(y_1) + \beta \mathcal{J}_m(y_2)$ лежит в $\mathcal{J}(\alpha y_1 + \beta y_2)$, поскольку дифференцирование $\mathcal{D}(\alpha \mathcal{J}_m(y_1) + \beta \mathcal{J}_m(y_2)) = \alpha y_1 + \beta y_2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\alpha y_1 + \beta y_2) &= \\ &= \{(\alpha \mathcal{J}_m(y_1) + \beta \mathcal{J}_m(y_2)) + \text{Ker } \mathcal{D}\} = \\ &= \{\alpha \mathcal{J}_m(y_1) + \text{Ker } \mathcal{D}\} + \{\beta \mathcal{J}_m(y_2) + \text{Ker } \mathcal{D}\} = \\ &= \alpha \mathcal{J}(y_1) + \beta \mathcal{J}(y_2) \end{aligned}$$

5.2. Определенный интеграл: определение и свойства

Определенный регрессионный интеграл для $y \in \text{Im } \mathcal{D}$ построим как «функцию верхнего предела», т.е. как временной ряд $\mathcal{I}(y)$:

$$\mathcal{I}(y)(t_i) = \mathcal{J}_m(y)(t_i) - \mathcal{J}_m(y)(t_1) \quad (7)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. 1. $\mathcal{I}(y) \in \mathcal{J}(y)$

2. Если $\dim \text{Ker } \mathcal{D} = 1$, то $\mathcal{I}(C)(t) = C(t - t_1)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Следует из определения $\mathcal{I}(y)$: $\mathcal{I}(y) = \mathcal{J}_m(y) - \mathcal{J}_m(y)(t_1) \cdot \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – постоянная единичная функция на отрезке $[a, b]$
2. Из утверждения 4.1 $\mathcal{D}(Ct) = C$, следовательно, $\mathcal{J}(C) = Ct + c_0 \cdot \mathbf{1}$ ($\dim \text{Ker } \mathcal{D} = 1$). $\min |Ct + c_0 \cdot \mathbf{1}|$ достигается при $c_0 = -N^{-1} \sum_j t_j$. Таким образом, $\mathcal{J}_m(C) = Ct - \left(N^{-1} \sum_j t_j\right) \cdot \mathbf{1}$ и потому $\mathcal{I}(C)(t) = C(t - t_1)$

5.3. Неинтегрируемые функции: определение и свойства

Если ряд y таков, что решения системы $\mathcal{D}(x) = y$ не существует, то y будем называть **неинтегрируемым рядом** и $\mathcal{J}(y) = \emptyset$. Так как $\text{Ker } \mathcal{D} \neq 0$, то неинтегрируемые ряды существуют всегда.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Ряд y не интегрируем тогда и только тогда, когда его ортогональная проекция на подпространство $\text{Ker } \mathcal{D}^*$ не равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ортогональное разложение

$$B[a, b] = (\text{Im } \mathcal{D})^\perp \oplus \text{Im } \mathcal{D}$$

Заметим, что $y \in (\text{Im } \mathcal{D})^\perp$ означает, что для любого $x \in B[a, b]$ место равенство нулю скалярного произведения: $(y, \mathcal{D}x) = (\mathcal{D}^*y, x) = 0$, но в таком случае $y \in \text{Ker } \mathcal{D}^*$. Поэтому $\text{Ker } \mathcal{D}^* = (\text{Im } \mathcal{D})^\perp$. Из теории систем линейных уравнений следует, что система $\mathcal{D}(x) = y$ разрешима только в случае равенства нулю ортогональной проекции y на подпространство $(\text{Im } \mathcal{D})^\perp$.

Таким образом поиск неинтегрируемых функций сводится к решению однородной системы $\mathcal{D}^*x = 0$, которое может быть выполнено с помощью проекционного метода.

5.4. Неинтегрируемость в случае трехточечной нечеткой структуры меры близости

Если ряд $z = (z_1, \dots, z_N) \in \text{Ker } \mathcal{D}^*$, то он удовлетворяет условию

$$(A_0 T - M A_0)^* D^{-1} K z = 0$$

В таком случае ряд $w = D^{-1}Kz$, удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\begin{aligned}
(t_1 - M_1)w_1 + \alpha_2(t_1 - M_2)w_2 &= 0 \\
\beta_1(t_2 - M_1)w_1 + (t_2 - M_2)w_2 + \alpha_3(t_2 - M_3)w_3 &= 0 \\
&\dots \\
\beta_{i-1}(t_i - M_{i-1})w_{i-1} + (t_i - M_i)w_i + \alpha_{i+1}(t_i - M_{i+1})w_{i+1} &= 0 \\
&\dots \\
\beta_{N-2}(t_{N-1} - M_{N-2})w_{N-2} + (t_{N-1} - M_{N-1})w_{N-1} + \alpha_N(t_{N-1} - M_N)w_N &= 0 \\
\beta_{N-1}(t_N - M_{N-1})w_{N-1} + (t_N - M_N)w_N &= 0
\end{aligned}$$

Как и в случае исследования ядра матрицы регрессионной производной, нетрудно обнаружить, что ряд $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ представим в виде $w = w_1(1, v_2, \dots, v_N)$, где компоненты $v_2, \dots, v_N$ однозначно выражаются через элементы матрицы $A_0 T - M A_0$. Таким образом, $\text{Ker } \mathcal{D}^*$ есть одномерное подпространство, порожденное рядом $u = K^{-1}D(1, v_2, \dots, v_N)$. Следовательно, образ $\text{Im } \mathcal{D} = \{x \mid (x, u) = 0\}$.

Рассмотрим вид вектора v в случае трехточечной симметричной однородной структуры: $\alpha_i = \beta_i \equiv \rho > 0$ и равномерной сетки $t_i = a + (i - 1)h$, $i = 1, \dots, N$, $t_N = b = a + (N - 1)h$, $h = (b - a)/(N - 1)$. Воспользовавшись полученными ранее соотношениями, получаем:

$$1. \quad k_i = \frac{1}{1+2\rho}, \quad i \neq 1, \quad i \neq N,$$

$$k_1 = \frac{1}{1+\rho}, \quad k_N = \frac{1}{1+\rho}$$

$$2. \quad M_i(t) = t_i = a + (i - 1)h, \quad i \neq 1, \quad i \neq N,$$

$$M_1(t) = a + h \frac{\rho}{1+\rho}, \quad M_N(t) = b - h \frac{\rho}{1+\rho}$$

$$3. \quad M_i(t^2) - (M_i(t))^2 = \frac{2\rho h^2}{1+2\rho}, \quad i \neq 1, \quad i \neq N,$$

$$M_1(t^2) - (M_1(t))^2 = \frac{\rho h^2}{(1+\rho)^2}$$

$$M_N(t^2) - (M_N(t))^2 = \frac{\rho h^2}{(1+\rho)^2}$$

$$4. \quad t_j - M_i(t) = h(j - i), \quad i \neq 1, \quad i \neq N,$$

$$t_j - M_1(t) = \frac{(j - 1)h + \rho j h}{1 + \rho}$$

$$t_j - M_N(t) = \frac{(a - b + (j - 1)h) + \rho(a - b + jh)}{1 + \rho} = a - b + jh - \frac{h}{1 + \rho}$$

Вектор v удовлетворяет системе соотношений:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\rho h}{1+\rho} + (-h)\rho v_2 &= 0 \\
 \frac{h\rho}{1+\rho} + 0v_2 + (-h)\rho v_3 &= 0 \\
 &\dots \\
 \rho h v_{i-1} + 0v_i + \rho(-h)v_{i+1} &= 0 \\
 &\dots \\
 \rho h v_{N-2} + 0v_{N-1} + \rho\left(-\frac{h}{1+\rho}\right)v_N &= 0 \\
 \rho h v_{N-1} + \left(-\frac{\rho h}{1+\rho}\right)v_N &= 0
 \end{aligned}$$

которая эквивалентна системе:

$$\begin{aligned}
 v_2 &= -\frac{1}{1+\rho}, & v_3 &= \frac{1}{1+\rho} \\
 &\dots \\
 v_{i+1} &= v_{i-1}, \quad i = 3, \dots, N-2 \\
 &\dots \\
 v_N &= (1+\rho)v_{N-2}, \quad v_N = -(1+\rho)v_{N-1}
 \end{aligned}$$

В итоге получается

$$\begin{aligned}
 v_1 &= 1, \\
 v_i &= \frac{(-1)^{i+1}}{1+\rho}, \quad i = 2, \dots, N-1 \\
 v_N &= (-1)^{N+1}
 \end{aligned}$$

Соответственно,

$$\begin{aligned}
 u &= K^{-1}D(1, v_2, \dots, v_N) = \\
 &= \left(\frac{\rho h^2}{1+\rho}, \dots, \frac{(-1)^{i+1}2\rho h}{1+\rho}, \dots, (-1)^{N+1} \frac{\rho h^2}{1+\rho} \right) = \\
 &= \frac{\rho h}{1+\rho} \left(h, \dots, 2(-1)^{i+1}, \dots, (-1)^{N+1}h \right).
 \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть нечеткая локальная структура $\delta_{t_i}(t_j)$ задана на равномерной сетке $t_i = a + (i-1)h$, $i = 1, \dots, N$, $t_N = b = a + (N-1)h$, $h = (b-a)/(N-1)$, является однородной и отлична от нуля только в точках t_{i-1}, t_i, t_{i+1} , $\delta_{t_i}(t_{i-1}) = \rho$, $\delta_{t_i}(t_{i+1}) = \rho$, $\delta_{t_i}(t_i) = 1$. Тогда $\text{Ker } D^*$ есть одномерное подпространство, порожденное рядом $u = \left(h, \dots, 2(-1)^{i+1}, \dots, (-1)^{N+1}h \right)$.

Из утверждения из пункта 5.4 следует, что ряд является неинтегрируемым, если его ортогональная проекция на подпространство, порожденное сильно осциллирующим рядом $(h, \dots, 2(-1)^{i+1}, \dots, (-1)^{N+1}h)$, не равна нулю.

Осциллирующая структура ряда u имеет место для неоднородной симметричной меры близости на равномерной сетке. Заметим, что в общем случае матрица системы уравнений для определения ряда $w = D^{-1}Kz$ является матрицей Якоби [10]:

$$(A_0 T - M A_0)^* = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -c_1 & a_2 & -b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c_2 & a_3 & -b_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -b_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{N-1} & a_N \end{pmatrix}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{\alpha_j(t_j - t_{j-1}) + \beta_j(t_j - t_{j+1})}{1 + \alpha_j + \beta_j}, \quad j = 2, \dots, N-1 \\ a_1 &= \frac{\beta_1(t_1 - t_2)}{1 + \beta_1}, \quad a_N = \frac{\alpha_N(t_N - t_{N-1})}{1 + \alpha_N} \\ b_j &= -\alpha_{j+1} \frac{(t_j - t_{j+1}) + \beta_{j+1}(t_j - t_{j+2})}{1 + \alpha_{j+1} + \beta_{j+1}} > 0, \quad j = 1, \dots, N-2 \\ b_{N-1} &= -\alpha_N \frac{(t_{N-1} - t_N)}{1 + \alpha_N} \\ c_j &= -\beta_j \frac{(t_{j+1} - t_j) + \alpha_j(t_{j+1} - t_{j-1})}{1 + \alpha_j + \beta_j} < 0, \quad j = 2, \dots, N-1 \\ c_1 &= -\beta_1 \frac{(t_2 - t_1)}{1 + \beta_1} \end{aligned}$$

Решение системы представимо в виде

$$v_j = b_1^{-1} b_2^{-1} \dots b_{j-1}^{-1} G_{j-1}, \quad j = 1, \dots, N, \quad w_1 = C G_0, \quad w_2 = C G_1 \quad (8)$$

где C – произвольная постоянная, а G_j – главные миноры матрицы Якоби, которые удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$G_0 = 1, \quad G_1 = a_1, \quad G_k = a_k G_{k-1} - b_{k-1} c_{k-1} G_{k-2}, \quad k = 2, \dots$$

Если на равномерной сетке задана симметричная, но неоднородная структура, $\alpha_j = \beta_j$, то

$$\begin{aligned} a_j &= 0, \quad j = 2, \dots, N-1 \\ a_1 &= -\frac{\alpha_1 h}{1 + \alpha_1}, \quad a_N = \frac{\alpha_N h}{1 + \alpha_N} \\ b_j &= h \alpha_{j+1} > 0, \quad j = 1, \dots, N-2 \\ b_{N-1} &= \alpha_N \frac{h}{1 + \alpha_N} \\ c_j &= -h \alpha_j < 0, \quad j = 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

$$c_1 = -\beta_1 \frac{h}{1 + \beta_1}$$

Следовательно, рекуррентное соотношение для главных миноров приобретает вид:

$$G_0 = 1, \quad G_1 = -\frac{\alpha_1 h}{1 + \alpha_1}, \quad G_2 = h^2 \alpha_2 \alpha_1$$

$$G_k = h^2 \alpha_k \alpha_{k-1} G_{k-2}, \quad k = 3, \dots, N-1$$

Таким образом, если k – четное, то $G_k > 0$, если k – нечетное, то $G_k < 0$. В силу положительности коэффициентов b_j и формул (8) получаем, что соседние компоненты вектора $u = K^{-1}D(1, v_2, \dots, v_N)$ имеют противоположные знаки.

6. Регрессионный интеграл примеры

6.1. Случай классической непрерывной функции, имеющей преобразную (рис. 5)

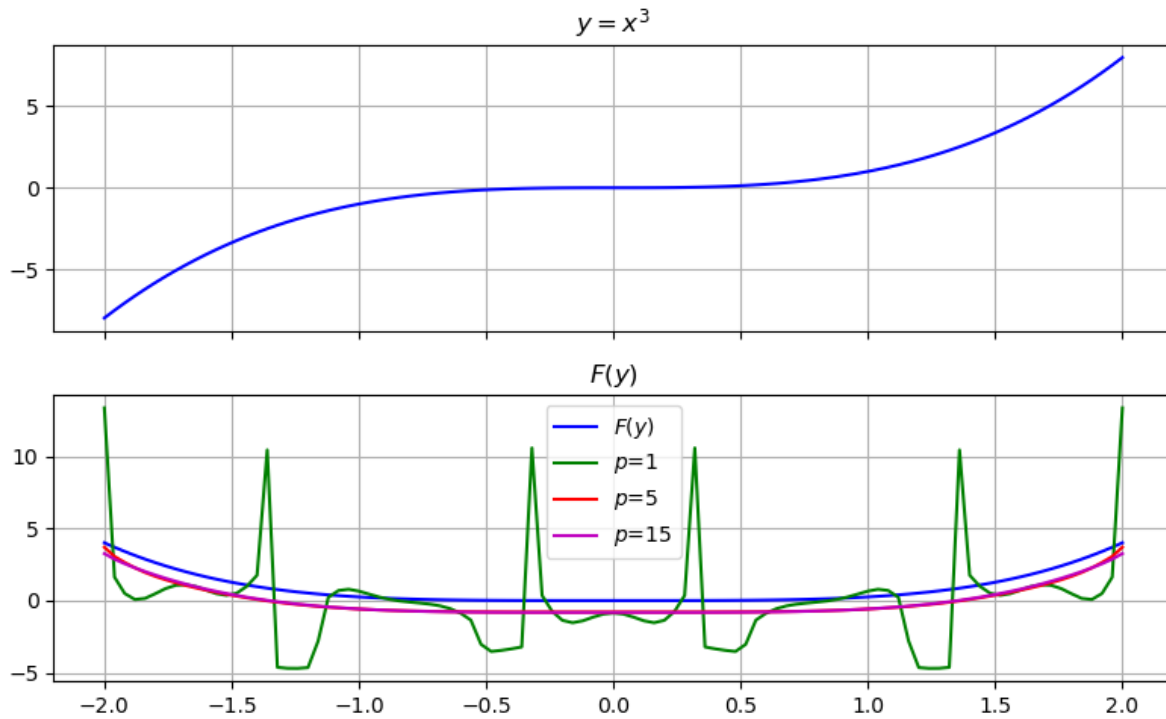


Рис. 5: На верхнем рисунке график функции $y = x^3$, на нижнем рисунке синим цветом показан интеграл функции y : $f(y) = \frac{x^4}{4}$, другими цветами – регрессионный интеграл функции y при разных значениях p

6.2. Случай классической непрерывной функции, не имеющей преобразную (рис. 6)

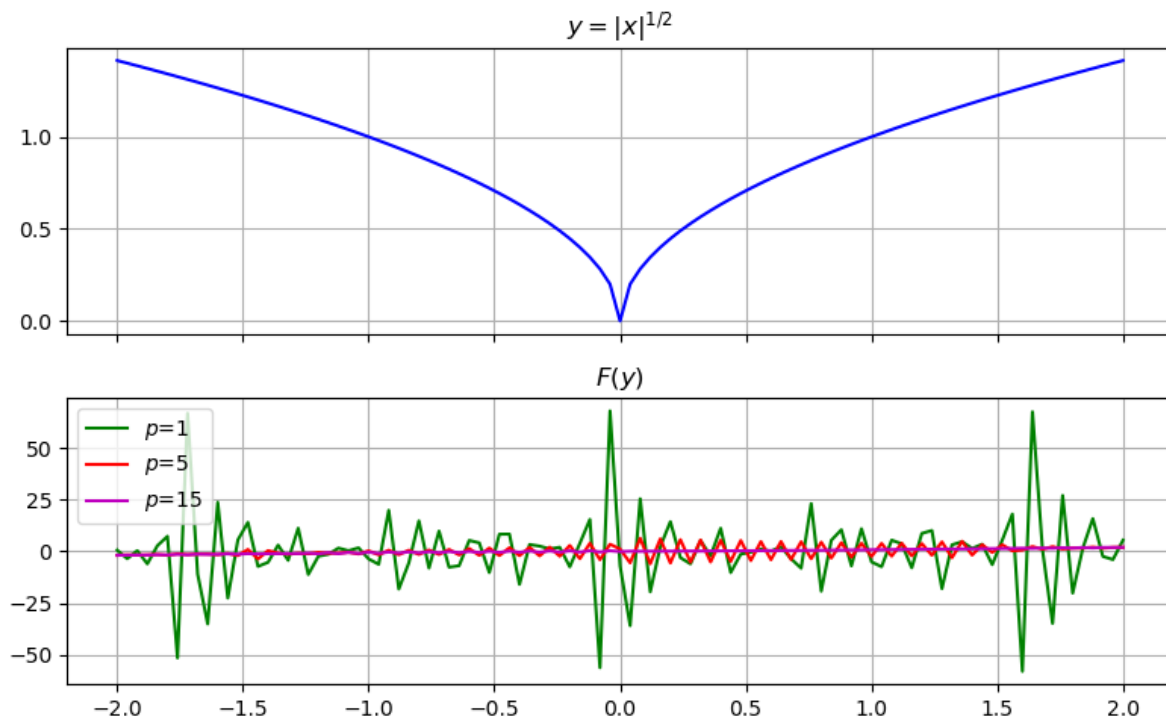


Рис. 6: На верхнем рисунке график функции $y = |x|^{1/2}$, на нижнем рисунке показан регрессионный интеграл функции y при разных значениях p

6.3. Пример неинтегрируемой функции (рис. 7)

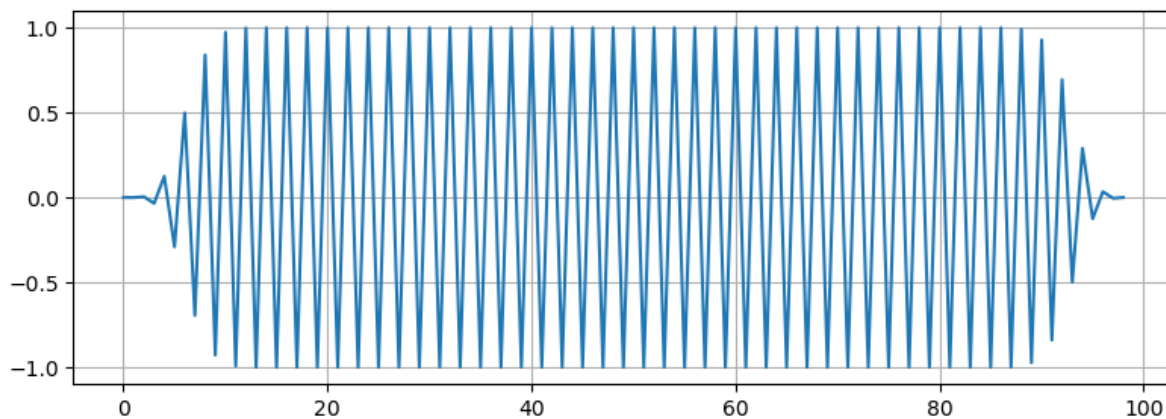


Рис. 7: Неинтегрируемая функция

Проекционный метод

Результаты приложения являются развитием подхода Абаффи, Спедикато [11] к решению систем линейных и нелинейных уравнений проекционным методом.

Исходное пространство E – евклидово относительно скалярного произведения $(,)$.

П.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для $a \in E$ положим

$$\begin{aligned} H(a) &= 1, \text{ если } a = 0 \\ H(a) &= 1 - \frac{aa^T}{a^T a}, \text{ если } a \neq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

П.2.

УТВЕРЖДЕНИЕ. $H(a)$ ортопроектор на $(L(a)|_E)^\perp$ – ортотополнение в E к прямой, натянутой на вектор a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нуля это очевидно. Теперь $a \neq 0$. Если $x \in E$, то

$$H(a)x = x - \frac{a}{\|a\|^2}(x, a) = x - \frac{a}{\|a\|} \left(x, \frac{a}{\|a\|} \right) \quad (10)$$

Таким образом, $x \in \text{Ker } H(a) \Leftrightarrow x = \frac{a}{\|a\|^2}(x, a) \Leftrightarrow x \in L(a)$

Далее,

$$H(a)^\perp = \left(1 - \frac{aa^T}{a^T a} \right)^\perp = 1 - \frac{(aa^T)^T}{a^T a} = 1 - \frac{aa^T}{a^T a} = H(a)$$

и

$$H(a)^2 = \left(1 - \frac{aa^T}{a^T a} \right)^2 = 1 - 2\frac{aa^T}{a^T a} + \frac{aa^T aa^T}{(a^T a)^2} = 1 - 2\frac{aa^T}{a^T a} + \frac{aa^T}{a^T a} = 1 - \frac{aa^T}{a^T a} = H(a)$$

Проектор ортогонален $\Leftrightarrow$ проектор самосопряжен $\Leftrightarrow$ является ортопроекцией на ортогональное дополнение к своему ядру.

Из формулы (10) непосредственно видно, что $H(a)x$ есть $x - \text{pr}_a x$ – перпендикуляр из x на a .

П.3.

УТВЕРЖДЕНИЕ. (Согласованность конструкции H с ортопроектором P)

Если P – ортопроектор, то для любого $a \in E$

$$H(Pa)P = PH(Pa)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} H(Pa)P &= \left(1 - \frac{Pa(Pa)^T}{\|Pa\|^2} \right) P = \left(1 - \frac{Pa a^T P}{\|Pa\|^2} \right) P = P - \frac{Pa a^T P^2}{\|Pa\|^2} = \\ &= P - \frac{Pa a^T P}{\|Pa\|^2} = P - \frac{P^2 a a^T P}{\|Pa\|^2} = P \left(1 - \frac{P a a^T P}{\|Pa\|^2} \right) = PH(Pa). \end{aligned}$$

П.4.

УТВЕРЖДЕНИЕ. $H(Pa)P$ ортопроектор на ортогональное дополнение $(\text{Ker} + L(a))^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала ортопроектность

$$\begin{aligned}(H(Pa)P)^2 &= H(Pa)PH(Pa)P = H(Pa)H(Pa)PP = \\ &= H(Pa)P(H(Pa)P)^T = PH(Pa) = H(Pa)P\end{aligned}$$

Итак, $H(Pa)P$ – ортопроектор, причем $\text{Ker } H(Pa)P \supseteq \text{Ker } P + L(a)$, так как $H(Pa)P(a) = H(Pa)Pa = 0$.

Покажем, что включение на самом деле является равенством. Пусть $x \in (\text{Ker } P + L(a))^\perp$, то $x \in \text{Ker}^\perp$ и потому $Px = x$. Так что

$$\begin{aligned}H(Pa)Px &= H(Pa)x = x - \frac{Pa}{\|Pa\|^2}(x, Pa) = x - \frac{Pa}{\|Pa\|^2}(Px, a) = \\ &= x - \frac{Pa}{\|Pa\|^2}(x, a) = [(x, a) = 0] = x.\end{aligned}$$

Следовательно, $(\text{Ker } H(Pa)P)^\perp \supseteq (\text{Ker } P + L(a))^\perp \Leftrightarrow \text{Ker } H(Pa)P \subseteq (\text{Ker } P + L(a))$ а с учетом верности обратного неравенства на самом деле имеет место равенство $\text{Ker } H(Pa)P = \text{Ker } P + L(a)$.

Пусть в E дана система векторов $A = (a_1, \dots, a_m)$. Построим по ним итеративную систему проекторов $H_1, \dots, H_m$, положив

$$\begin{aligned}\theta_1 &= a_1, & H_1 &= H(\theta_1) \\ \theta_2 &= H_1 a_2, & H_2 &= H(\theta_2) \\ &\dots\dots\dots \\ \theta_k &= H_{k-1} \dots H_1 a_k, & H_k &= H(\theta_k) \\ &\dots\dots\dots \\ \theta_m &= H_{m-1} \dots H_1 a_m, & H_m &= H(\theta_m)\end{aligned}$$

Далее положим $P_k = H_1 \dots H_k$. Тогда $\theta_k = P_{k-1}^\perp a_k$ и $H_k = H(P_{k-1}^\perp a_k)$ [12]

Заключение

Построены регрессионные варианты дифференцирования и интегрирования для конечных функция. Таким образом первое положение ДМА, сформулированное во введении реализовано, но не полностью, поскольку соответствующие операторы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{J}$ зависят от меры близости δ : $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\delta)$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\delta)$ и эту зависимость нужно изучать.

На сегодняшний день можно с уверенностью сказать (и это подтверждают результаты статьи), что, чем локальнее δ , тем ближе $\mathcal{D}(\delta)$ и $\mathcal{J}(\delta)$ к своим классическим аналогам.

Второе положение ДМА определяет еще одно направление в дальнейших исследованиях, а именно, проникновение регрессионного дифференцирования и регрессионного интегрирования в конечную математику по сценариям классической.

Кое-что на этом пути уже сделано (реализована связь производные-тренды [7, 13]). На очереди, например, интегро-дифференциальные уравнения, многомерные обобщения и т.д.

Все, что получится, будет иметь иерархический характер, зависящий от масштаба рассмотрения (меры близости) в духе вейвлет- и фрактального анализов [14, 15, 16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mikhailov V., Galdeano A., Diamant M., Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov Sh., Graeva E., and Sailhac P. Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering // *Geophysics*. 2003. Vol. 68, № 1, P. 168-180.
2. Zlotnicki J., LeMouel J.-L., Gvishiani A., Agayan S., Mikhailov V., Bogoutdinov Sh. Automatic fuzzy-logic recognition of anomalous activity on long geophysical records. Application to electric signals associated with the volcanic activity of la Fournaise volcano (Reunion Island) // *Earth and Planetary Science Letters*. 2005. Vol.234. P. 261-278.
3. Soloviev A., Chulliat A., Bogoutdinov S., Gvishiani A., Agayan S., Peltier A., Heumez B. Automated recognition of spikes in 1 Hz data recorded at the Easter Island magnetic observatory // *Earth Planets Space*. 2012. Vol.64. № 9. P. 743-752, DOI:10.5047/eps.2012.03.004.
4. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh.R., Graeva E.M., Zlotnicki J., Bonnin J. Recognition of anomalies from time series by fuzzy logic methods // *Russian Journal of Earth Sciences*. 2008. Vol. 10. ES1001, DOI:10.2205/2007ES000278.
5. Agayan S., Bogoutdinov Sh., Soloviev A., Sidorov R. The Study of Time Series Using the DMA Methods and Geophysical Applications // *Data Science Journal*. 2016. P. 1–21, DOI: 10.5334/dsj-2016-014
6. S.M. Agayan, Sh.R. Bogoutdinov, R.I. Krasnoperov. Short introduction into DMA // *Russian Journal of Earth Sciences*. 2018. Vol. 18. № 2. DOI: 10.2205/2018ES000618
7. С.М. Агаян, Ш.Р. Богоутдинов, Д.А. Камаев, М.Н. Добровольский. Стохастические тренды на основе нечеткой математики // *Чебышевский сборник*, т.ХХ, вып. 3, 2019, с.92-106, DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-3-92-106
8. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. // М.: Наука, 1980, 543с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.II. // М.: Наука, 1970. 800с.
10. Ф.Р. Гантмахер, М.Г. Крейн. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. // Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1950, 360с.
11. Абаффи Й., Спедикато Э. Математические методы для линейных и нелинейных уравнений: проекционные ABS- алгоритмы. // М.: Мир. 1996. 270с.
12. С.М. Агаян, Ш.Р. Богоутдинов, А.А. Булычев, А.А. Соловьев, И.А. Фирсов. Проекционный метод решения систем линейных уравнений и его применение в гравиметрии // *Доклады академии наук. Науки о Земле*. 2020, т.493, № 1, с.58-62, DOI: 10.31857/S2686739720070051
13. Агаян С. М., Соловьев А. А., Богоутдинов Ш. Р., Николова Ю. И. Регрессионные производные и их применение в изучении геомагнитных джерков. // *Геомагнетизм и аэрономия*. 2019. Т.59, № 3, С. 383-392, DOI: 10.1134/S0016794019030027
14. Mallat S. A wavelet tour of signal processing. // Academic Press. 2009. 832p. DOI: 10.1016/B978-0-12-374370-1.X0001-8
15. B. Mandelbrot. The fractal geometry of nature. // W.H. Freeman and company. 1982. 480p.
16. Федер Е. Фракталы. // М.: Мир, 1991. 254с.

REFERENCES

1. Mikhailov V., Galdeano A., Diamant M., Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov Sh., Graeva E., Sailhac P. 2003, "Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering", *Geophysics*, vol. 68, no. 1, pp. 168-180.
2. Zlotnicki J., LeMouel J.-L., Gvishiani A., Agayan S., Mikhailov V., Bogoutdinov Sh. Automatic fuzzy-logic recognition of anomalous activity on long geophysical records. 2005, "Application to electric signals associated with the volcanic activity of la Fournaise volcano (R?union Island)", *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 234, pp. 261-278.
3. Soloviev A., Chulliat A., Bogoutdinov S., Gvishiani A., Agayan S., Peltier A., Heumez B. 2012, "Automated recognition of spikes in 1 Hz data recorded at the Easter Island magnetic observatory", *Earth Planets Space*, vol. 64, no. 9, pp. 743-752, DOI:10.5047/eps.2012.03.004.
4. Gvishiani A.D., Agayan S.M., Bogoutdinov Sh.R., Graeva E.M., Zlotnicki J., Bonnin J. 2008, "Recognition of anomalies from time series by fuzzy logic methods", *Russian Journal of Earth Sciences*, vol. 10, ES1001, DOI:10.2205/2007ES000278.
5. Agayan S., Bogoutdinov Sh., Soloviev A., Sidorov R. 2016, "The Study of Time Series Using the DMA Methods and Geophysical Applications", *Data Science Journal*, pp. 1–21, DOI: 10.5334/dsj-2016-014
6. S.M. Agayan, Sh.R. Bogoutdinov, R.I. Krasnoperov. 2018, "Short introduction into DMA", *Russian Journal of Earth Sciences*, vol. 18, no 2, DOI: 10.2205/2018ES000618
7. S.M. Agayan, Sh.R. Bogoutdinov, D.A. Kamaev, M.N. Dobrovolsky. 2019, "Stochastic trends based on fuzzy mathematics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. XX, no. 3, pp. 92-106, DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-3-92-106
8. A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin. 1989, "Elements of function theory and functional analysis", *M.: Nauka*, 543p.
9. Fichtenholz G.M. 1970, "Differential and Integral Calculus Course", *M.: Nauka*, vol. II, 800p.
10. F.R. Gantmacher, M.G. Krein. 2002, "Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems: Revised Edition", *AMS Chelsea Publishing*, vol. 345, 310pp.
11. J. Abaffy, E. Spedicato. 1989, "ABS projection algorithms : mathematical techniques for linear and nonlinear equations", *Prentice Hall*, 220p.
12. S.M. Agayan, Sh.R. Bogoutdinov, A.A. Bulychev, A.A. Soloviev, I.A. Firsov. 2020, "A projection method for solving systems of linear equations: gravimetry applications", *Doklady Earth Sciences*, vol. 493, part 1, pp. 530–534, DOI: 10.1134/S1028334X20070053
13. Agayan, S. M., Soloviev, A. A., Bogoutdinov, Sh. R., Nikolova, Y. I. 2019, "Regression derivatives and their application in the study of geomagnetic jerks", *Geomagnetism and aeronomy*, vol. 59, no. 3, pp. 383-392, DOI: 10.1134/S0016794019030027
14. Mallat S. 2009, "A wavelet tour of signal processing", *Academic Press*, 832p, DOI: 10.1016/B978-0-12-374370-1.X0001-8
15. B. Mandelbrot. 1982, "The fractal geometry of nature", *W.H. Freeman and company*, 480p.
16. Feder J. 1988, "Fractals", *Springer US*, 284p.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-48-75

Квазиметрики на графах

Е. И. Деза, Б. Мханна

Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Мханна Батуль — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Аннотация

В статье рассмотрены свойства квазиметрики среднего времени первого прохода (обобщенной метрической структуры, тесно связанной с эргодическими однородными цепями Маркова), построенной на основе нескольких графовых моделей, в том числе на базе простого цикла, простого пути и их ориентированных аналогов.

Во введении представлена история вопроса, дан обзор основных идей и результатов работы.

Во втором разделе собраны основные понятия теории *цепей Маркова* — последовательностей случайных событий с конечным или счетным числом исходов, характеризующихся тем, что распределение вероятностей параметров процесса в следующий момент времени зависит только от параметров процесса в предыдущий момент. Даны базовые определения, необходимые для рассмотрения роли графовых моделей в представлении и исследовании эргодических однородных цепей Маркова. Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги — переходам между ними. С другой стороны, любой связный граф (ориентированный граф) может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова: если вершина i имеет степень (полустепень исхода) k , то все выходящие из нее ребра (дуги) превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$. Дано определение среднего времени первого прохода для однородной эргодической цепи Маркова. Проанализирован алгоритм нахождения среднего времени первого прохода с помощью использования сходящихся деревьев ориентированного графа, связанного с матрицей перехода эргодической однородной цепи Маркова. Матрица среднего времени первого прохода рассмотрена как *квазиметрика m среднего времени первого прохода* на множестве вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ориентированного графа, соответствующего матрице перехода эргодической однородной цепи Маркова: $m(i, j)$ — ожидаемое количество шагов (дуг) для случайного блуждания на орграфе Γ , начинающегося с i , для достижения j в первый раз. Эта квазиметрика обладает рядом важных теоретических и прикладных свойств.

В третьем разделе рассмотрены вопросы построения и исследования квазиметрики среднего времени первого прохода для неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$. Рассмотрены примеры построения квазиметрики среднего времени первого прохода для неориентированного цикла для малых значений n . Приведены иллюстрации "графовой" процедуры построения матрицы M . Проанализированы свойства получающиеся при этом обобщенных метрических структур.

В четвертом разделе аналогичные рассуждения проведены для квазиметрики среднего времени первого прохода для неориентированного пути P_n , $n \geq 2$.

В пятом разделе рассмотрены вопросы построения и исследования квазиметрики среднего времени первого прохода для ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$. Рассмотрены примеры построения квазиметрики среднего времени первого прохода для ориентированного

цикла для малых значений n . Приведены иллюстрации "графовой" процедуры построения матрицы M . Проанализированы свойства получающихся при этом обобщенных метрических структур.

В шестом разделе аналогичные рассуждения проведены для квазиметрики среднего времени первого прохода для ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$.

В заключении подведены итоги работы и намечены возможные пути дальнейших исследований.

Ключевые слова: цепь Маркова, среднее время первого прохода, остовный сходящийся корневой лес ориентированного графа, квазиметрика, квазиметрика среднего времени первого прохода, цикл, путь.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Е. И. Деца, Б. Мханна. Квазиметрики на графах // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 48–75.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-48-75

Quasi-metrics on graphs

E. I. Deza, B. Mhanna

Deza Elena Ivanovna – doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical sciences, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: Elena.Deza@gmail.com

Mhanna Batool – graduate student, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Abstract

In this paper we consider some questions of the theory and practice of mean first passage time quasi-metric, a generalized metric structure closely related to ergodic homogeneous Markov chains. In particular, we consider the structure and properties of mean first passage time quasi-metrics based on several graph models, including simple cycles, simple paths and their oriented analogues.

The introduction contains the history of the problem and provides an overview of the main ideas and results presented in the article.

The second section gives basic concepts of the theory of Markov chains. In fact, a *Markov chain* is a mathematical model of some random process describing a sequence of possible events in which the probability of each event depends only on the state attained in the previous event. This section collects basic definitions needed to consider the role of graph models in the presentation and study of ergodic homogeneous Markov chains. The Markov chain can be depicted as an oriented weighted graph of transitions whose vertices correspond to the states of the chain and the arcs correspond to the transitions between them. The process will be ergodic if this weighted oriented graph is weakly connected, and the largest common divisor of the lengths of all its cycles is equal to 1. On the other hand, any connected graph can be used as a basis for building a model of the simplest Markov chain: if a vertex i has degree k , all incident edges are converted into arcs with the weights $\frac{1}{k}$. Moreover, in the second section the definition of the mean first passage time for an ergodic homogeneous Markov chain is given. The algorithm of finding the mean first passage time is analyzed in detail by using converging trees of the

oriented graph, related to the transition matrix of the ergodic homogeneous Markov chain. At last, a mean first passage time is analyzed as the *quasi-metric* m of *mean first passage time* on the vertices $V = \{1, 2, \dots, n\}$ of the oriented graph corresponding to the transition matrix of a given ergodic homogeneous Markov chain: $m(i, j)$ is the expected number of steps (arcs) for random wandering on the oriented graph Γ , starting at i , to reach j for the first time. This quasi-metric has a number of important theoretical and applied properties.

The third section deals with the construction and research of mean first passage time quasi-metrics for the undirected cycles C_n , $n \geq 3$. Examples of constructions of mean first passage time quasi-metrics of undirected cycles for small values of n are considered. Illustrations of the "graphical" procedure of building the matrix M are given. Properties of the resulting generalized metric structures are analyzed.

In the fourth section, similar considerations for mean first passage time quasi-metrics of the undirected paths P_n , $n \geq 2$, are represented.

The fifth section deals with the construction and research of mean first passage time quasi-metrics for the directed (oriented) cycles $\vec{C}_n$, $n \geq 3$. Examples of constructions of mean first passage time quasi-metrics of undirected (oriented) cycles for small values of n are considered. Illustrations of the "graphical" procedure of building the matrix M are given. Properties of the resulting generalized metric structures are analyzed.

In the sixth section, similar considerations for mean first passage time quasi-metrics of the directed (oriented) paths $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, are represented.

In the conclusion, the results of the work are summed up and possible directions of further research are outlined.

Keywords: Markov chain, mean first passage time, spanning rooted forest of an oriented graph, quasi-metric, mean first passage time quasi-metric, path, cycle.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

Е. И. Деца, Б. Мханна, 2021, "Quasi-metrics on graphs", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 48–75.

Введение

Цепь Маркова представляет собой последовательность случайных событий с конечным или счетным числом исходов, характеризующуюся тем, что "при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого". [3]

Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги - переходам между ними. С другой стороны, любой связный граф может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова. Для этого достаточно превратить его во взвешенный ориентированный граф по следующему закону: если вершина i имеет степень k , то все выходящие из нее ребра превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$.

Важной характеристикой эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, \dots, n$ является *среднее время первого прохода* m_{ij} из состояния i в состояние j . Функция $m(i, j) = m_{ij}$ является квазиметрикой на множестве $1, 2, \dots, n$. Ее поведение существенно зависит от свойств орграфа, связанного с соответствующей цепью Маркова.

В этой статье мы рассматриваем свойства квазиметрики первого прохода для цепей Маркова, связанных с простыми случайными блужданиями на простом цикле C_n , $n \geq 3$, простом пути P_n , $n \geq 2$, и их ориентированных аналогах.

Квазиметрика среднего времени первого прохода

Основные понятия теории цепей Маркова

Пусть $\langle \Omega, F, \text{Pr} \rangle$ - вероятностное пространство. При изложении теории марковских цепей принято рассматривать дискретные случайные величины, областью значений (пространством состояний) которых является некоторое конечное множество $E = \{s_1, \dots, s_k\}$.

Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ образует *однородную цепь Маркова*, если для любых номеров n , а также произвольных $i, j, i_1, \dots, i_{n-2}$ справедливо равенство

$$\text{Pr}(\xi_n = s_i \mid \xi_1 = s_{i_1}, \xi_2 = s_{i_2}, \dots, \xi_{n-2} = s_{i_{n-2}}, \xi_{n-1} = s_j) = \text{Pr}(\xi_n = s_i \mid \xi_{n-1} = s_j) = p_{ij}.$$

Матрица $T = ((p_{ij}))$ называется *матрицей переходных вероятностей* (или просто *матрицей переходов*). Из определения и формулы полной вероятности следует, что $p_{ij} \geq 0$, и $\sum_{i=1}^k p_{ij} = 1$ для всех $j = 1, \dots, k$. Матрицы, обладающие такими свойствами, называются *стохастическими*.

Пусть $p_{ij}^{(n)} = \text{Pr}(\xi_{n+m} = s_i \mid \xi_m = s_j)$ - вероятность перехода за n шагов из состояния s_j в состояние s_i . Марковская цепь называется *эргодической*, если для каждого $i = 1, \dots, k$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_i > 0$, не зависящий от j . Величины π_i называются *стационарными* или *финальными вероятностями* состояний цепи Маркова, а вектор π - вектором стационарных вероятностей или, чаще в англоязычной специальной литературе, (нормализованным) вектором Перрона.

Нетрудно убедиться в том, что для вектора $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ стационарных вероятностей цепи Маркова имеют место соотношения $\pi = T \cdot \pi$, и $\sum_{i=1}^k \pi_i = 1$. [3], [5]

Представление цепей Маркова графовыми моделями

Для обсуждения возможности представления цепей Маркова с помощью графовых моделей, вспомним некоторые базовые понятия теории (ориентированных) графов. [10], [2]

Ориентированный граф (орграф) - граф, ребрам которого присвоено направление. Направленные ребра называются *дугами*. Граф, ни одному ребру которого не присвоено направление, называется *неориентированным*. Орграф называется *слабо связным*, если соответствующий неориентированный граф связан.

Орграф называется (реберно) *взвешенным*, если каждой дуге присвоено некоторое числовое значение - *вес*. *Вес взвешенного орграфа* определяется произведением весов его дуг; вес любого орграфа, который не имеет дуг, равен 1. Вес множества орграфов - это сумма весов его членов.

Сходящееся дерево - слабосвязный орграф, в котором одна вершина, называемая *корнем*, имеет нулевое значение для входящей степени, а оставшиеся вершины имеют для входящей степени значение 1. *Сходящийся лес* орграфа Γ - остоновый подграф орграфа Γ , все компоненты которого являются сходящимися деревьями.

Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги - переходам между ними. Вес w_{ij} дуги $ij = \langle i, j \rangle$, направленной от вершины i к вершине j , будет равен вероятности p_{ij} перехода из состояния s_i в состояние s_j . Очевидно, что для $i \neq j$ имеет место равенство $p_{ij} = -\ell_{ij}$, где $L = ((\ell_{ij}))$ - *матрица Лапласа* взвешенного орграфа Γ , т.е., по определению, $\ell_{ij} = -w_{ij}$ для $i \neq j$, и $\ell_{ii} = -\sum_{j \neq i} \ell_{ij}$. Другими словами, $L = I - T$, где T - матрица перехода рассматриваемой цепи Маркова, а I - единичная матрица.

Легко убедиться в том, что цепь Маркова будет эргодической, если соответствующий взвешенный оргграф является слабо связным, и наибольший общий делитель длин всех его циклов равен единице. С другой стороны, любой связный (ориентированный) граф может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова. Для этого достаточно превратить его во взвешенный оргграф по следующему закону: если вершина i имеет степень (полустепень исхода) k , то все выходящие из нее ребра (дуги) превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$. [7], [10], [2]

Среднее время первого прохода для цепей Маркова

Пусть $T = ((p_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица перехода эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, \dots, n$. Определим *среднее время первого прохода* из состояния i в состояние j как

$$m_{ij} = E(F_{ij}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(F_{ij} = k),$$

где $E(\cdot)$ – математическое ожидание, а $F_{ij} = \min\{p \geq 1 : \xi_p = j \mid \xi_0 = i\}$. [6], [10], [2]

Рассмотрим взвешенный оргграф Γ , который соответствует цепи Маркова с матрицей перехода T . Поскольку рассматриваемая цепь Маркова эргодична, то соответствующий оргграф Γ слабосвязен и, следовательно, имеет остовные сходящиеся деревья. Нетрудно показать ([18], [19], [9], [10], [2]), что в этом случае имеет место следующее "графовое" представление для среднего времени первого прохода:

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если } 1 \leq i \neq j \leq n, \\ q, & \text{если } 1 \leq i = j \leq n, \end{cases}$$

где f_{ij} – суммарный вес сходящихся лесов оргграфа Γ , состоящих из двух деревьев и имеющих одно дерево, содержащее i , а другое дерево, сходящееся к j , q_j – суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ , и $q = \sum_{k=1}^n q_k$.

Среднее время первого прохода как квазиметрика оргграфа

Если в определении среднего времени первого прохода использовать требование $p \geq 0$, то среднее время m_{ij} первого прохода из состояния i в состояние j в однородной эргодической цепи Маркова может быть представлено как $m_{ij} = f_{ij}/q_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, где f_{ij} – суммарный вес входящих лесов оргграфа Γ , состоящих из двух деревьев и имеющих одно дерево, содержащее i , а другое дерево, сходящееся к j , а q_j – суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ .

В этом случае $m_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $m(i, j) > 0$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$. Поскольку для всех $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ выполнены неравенства треугольника $m(i, j) \leq m(i, k) + m(k, j)$ ([16], теорема 6.2.1), то мы можем говорить о *квазиметрике* ([20], [1], [14]) *среднего времени первого прохода* m на $V = \{1, 2, \dots, n\}$: $m(i, j) = m_{ij}$ – ожидаемое количество шагов (дуг) для случайного блуждания на Γ , начинающегося с i , для достижения j в первый раз.

Эта квазиметрика удовлетворяет более сильной версии неравенства треугольника; именно, она обладает ([16], теорема 6.2.1) *геодезическим свойством* ([8], [17]): $m(i, j) = m(i, k) + m(k, j)$ тогда и только тогда, когда все пути в Γ от i до j проходят через k .

Простейший пример квазиметрики среднего времени первого прохода может быть получен для *простого случайного блуждания* по связному невзвешенному графу G , в котором из любой вершины графа существует равная вероятность перемещения в любую соседнюю вершину.

В этом случае квазиметрика m является *взвешиваемой квазиметрикой* (см. [12], [13], [15] и [14], глава 16), т.е. существует *весовая функция* $w : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, такая, что для всех $i, j \in V$

имеет место соотношение $m(i, j) + w_i = m(j, i) + w_j$. В качестве взвешиваемой квазиметрики, m обладает *ослабленным свойством симметрии*: для любых $i, j, k \in V$

$$m(i, j) + m(j, k) + m(k, i) = m(i, k) + m(k, j) + m(j, i).$$

Не менее интересны свойства квазиметрики среднего времени первого прохода, связанной с тем или иным специальным видом графов, в частности, с простым циклом и простым путем. Представляет интерес и перенос полученных результатов на ориентированный случай. Именно этим вопросам посвящена данная статья.

Квазиметрика среднего времени первого прохода неориентированного цикла

Неориентированный цикл на трех вершинах

Рассмотрим простой цикл на трех вершинах (рис. 3.1.1), то есть неориентированный граф $C_3 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{12, 23, 31\}$ (в неориентированном случае $ij = (i, j)$ – ребро между вершинами i и j).

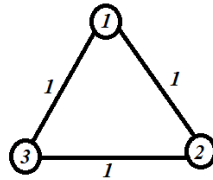


Рис. 3.1.1. Граф C_3 .

Граф C_3 может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова. Для этого достаточно превратить его во взвешенный орграф, следуя описанной выше процедуре: поскольку $d(1) = d(2) = d(3) = 2$, то мы получим орграф $\Gamma = TC_3$ на трех вершинах с весами дуг $w_{ik} = 1/2$, $i, k = 1, 2, 3$, $i \neq k$ (рис. 3.1.2). Матрица перехода соответствующей (эргодической однородной) цепи Маркова с состояниями 1, 2, 3 имеет вид $T =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

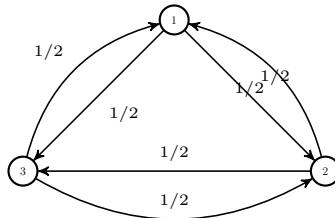
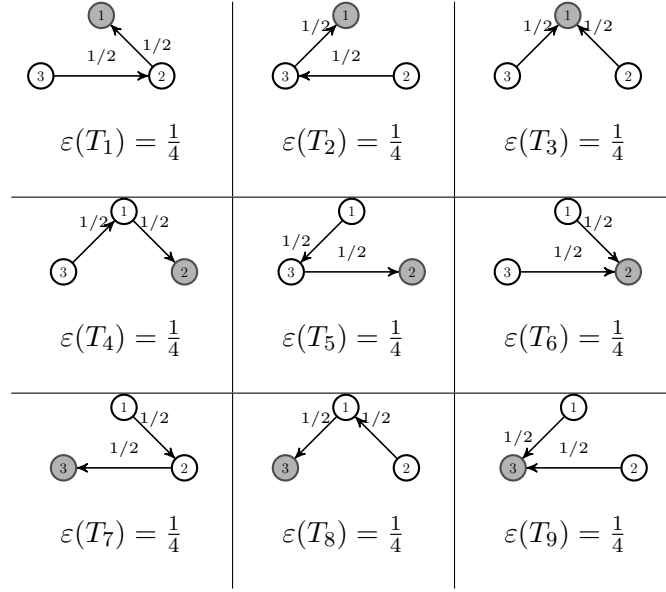


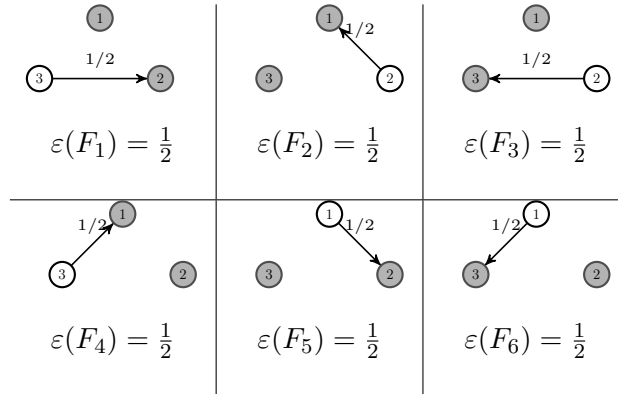
Рис. 3.1.2. Орграф TC_3 .

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 9 сходящихся деревьев орграфа TC_3 (рис. 3.1.3), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3) = (3/4, 3/4, 3/4)$. Так как $q = \sum_{i=1}^3 q_i = 9/4$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^3 q_i} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Этот вектор совпадает с π , нормированным левым вектором Перрона для T .

Рис. 3.1.3. Сходящиеся деревья орграфа TC_3 .

На рис. 3.1.4 представлены все 6 "2-деревьевых" лесов орграфа TC_3 . Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j , получаем:

$$((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & \sum \varepsilon(F_i), i = 1, 4, 6 & \sum \varepsilon(F_i), i = 2, 3, 5 \\ \sum \varepsilon(F_i), i = 1, 3, 4 & 0 & \sum \varepsilon(F_i), i = 2, 5, 6 \\ \sum \varepsilon(F_i), i = 1, 2, 3 & \sum \varepsilon(F_i), i = 4, 5, 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рис. 3.1.4. Остовные сходящиеся леса орграфа TC_3 , состоящие из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_i}$, получим матрицу среднего времени первого прохода $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Избавляясь от диагональных членов, получим квазиметрику

среднего времени первого прохода $\overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. В нашем простейшем симметричном случае данная квазиметрика является метрикой. Более того, она совпадает с удвоенной дискретной метрикой.

Неориентированный цикл на четырех вершинах

Рассмотрим простой цикл на четырех вершинах (рис. 3.2.1), то есть неориентированный граф $C_4 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{12, 23, 34, 41\}$.

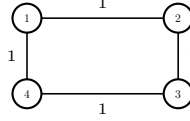


Рис. 3.2.1. Граф C_4 .

Используя граф C_4 для модели простого случайного блуждания, мы получаем орграф TC_4 на четырех вершинах с весами дуг $w_{ik} = 1/2$, $i, k = 1, 2, 3, 4$, $i \neq k$ (рис. 3.2.2). Матрица

перехода имеет в данном случае вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

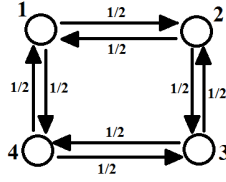


Рис. 3.2.2. Орграф TC_4 .

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 16 сходящихся деревьев орграфа TC_4 (рис. 3.2.3), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$. Так как $q = \sum_{i=1}^4 q_i = 2$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^4 q_i} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.

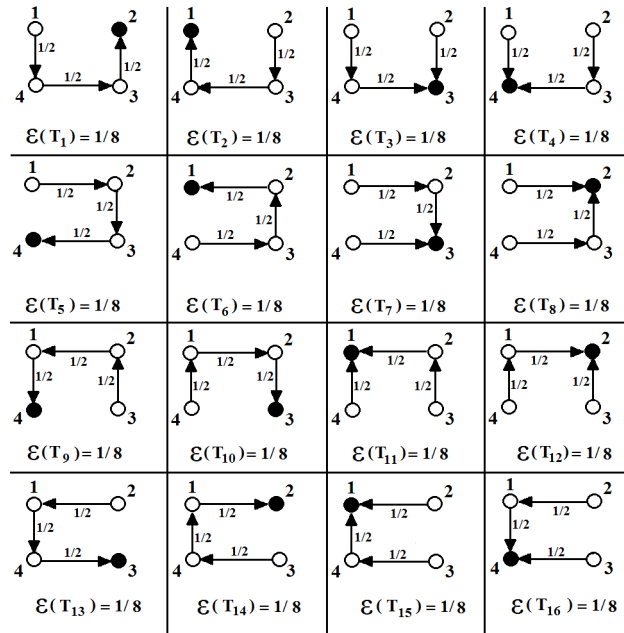


Рис. 3.2.3. сходящиеся деревья орграфа TC_4 .

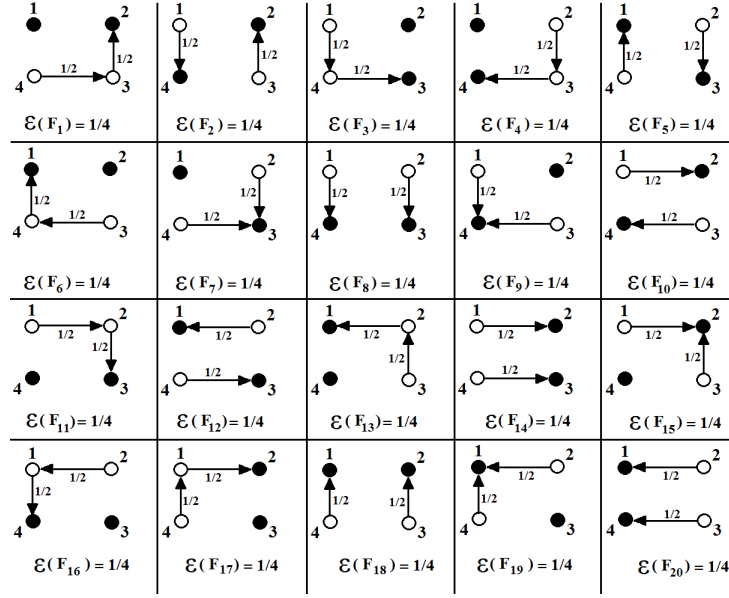


Рис. 3.2.4. Остовные сходящиеся леса орграфа TC_4 , состоящие из двух деревьев.

На рис. 3.2.4 представлены все 20 "2-деревьевых" лесов орграфа TC_4 . Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j , получаем:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{12} &= \{F_1, F_2, F_3, F_6, F_9, F_{18}\}, \mathcal{F}_{13} = \{F_5, F_7, F_8, F_{12}, F_{14}, F_{16}, F_{17}, F_{19}\}, \\ \mathcal{F}_{14} &= \{F_4, F_{10}, F_{11}, F_{13}, F_{15}, F_{20}\}, \mathcal{F}_{21} = \{F_1, F_4, F_5, F_6, F_7, F_{18}\}, \\ \mathcal{F}_{23} &= \{F_3, F_{12}, F_{14}, F_{16}, F_{17}, F_{19}\}, \mathcal{F}_{24} = \{F_2, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{13}, F_{15}, F_{20}\}, \\ \mathcal{F}_{31} &= \{F_1, F_4, F_5, F_7, F_{12}, F_{18}, F_{19}, F_{20}\}, \mathcal{F}_{32} = \{F_3, F_6, F_9, F_{10}, F_{14}, F_{17}\}, \\ \mathcal{F}_{34} &= \{F_2, F_8, F_{11}, F_{13}, F_{15}, F_{16}\}, \mathcal{F}_{41} = \{F_1, F_4, F_7, F_{12}, F_{13}, F_{20}\}, \\ \mathcal{F}_{42} &= \{F_2, F_3, F_6, F_9, F_{10}, F_{14}, F_{15}, F_{18}\}, \mathcal{F}_{43} = \{F_5, F_8, F_{11}, F_{17}, F_{16}, F_{19}\}.\end{aligned}$$

Непосредственный подсчет показывает, что $((f_{ij})) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

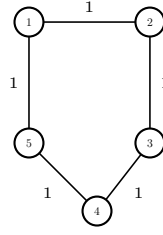
Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{q_i}$, получим матрицу среднего времени первого прохода M и, избавляясь от диагональных членов в матрице M , квазиметрику $\overline{M}$ среднего времени первого прохода для цепи Маркова, соответствующей случайному блужданию по циклу на четырех вершинах:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что она является метрикой.

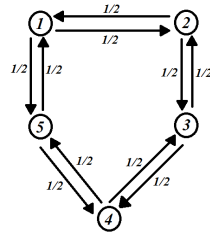
Неориентированный цикл на пяти вершинах

Для неориентированного цикла C_5 (рис. 3.3.1) можно провести аналогичные рассуждения.

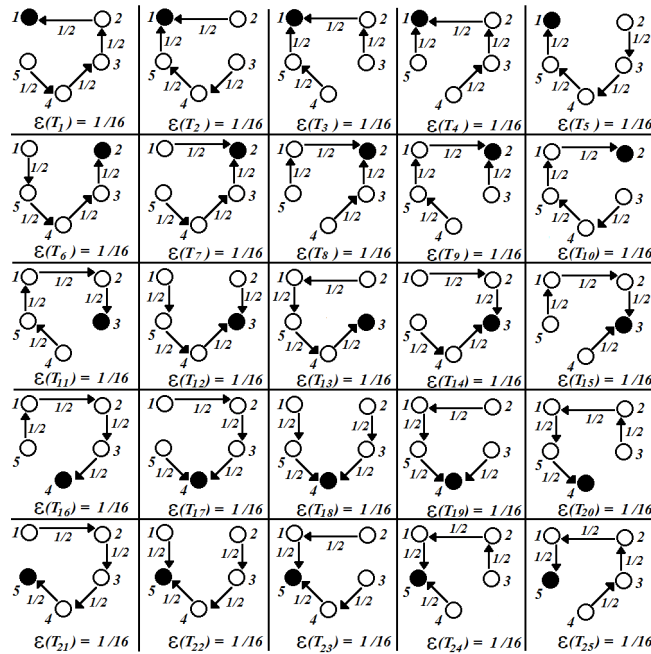
Рис. 3.3.1. Граф C_5 .

Превратим C_5 во взвешенный оргграф TC_5 (рис. 3.3.2), заменив все ребра, выходящие из вершин 1, 2, 3, 4, 5, на дуги с весами $\frac{1}{2}$. Матрица перехода соответствующей цепи Маркова

принимает вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

Рис. 3.3.2. Оргграф TC_5 .

Пользуясь определением q_i и рассматривая 25 сходящихся деревьев оргграфа TC_5 (рис. 3.3.3), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = (5/16, \dots, 5/16)$. Так как $q = \sum_{i=1}^5 q_i = 25/16$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_5) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^5 q_i} = (1/5, \dots, 1/5)$.

Рис. 3.3.3. Сходящиеся деревья оргграфа C_5 .

На рис. 3.3.4 представлены все 50 "2-деревьевых" лесов орграфа C_5 . Пользуясь определением f_{ij} , получаем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{12} &= \{F_1, F_5, F_9, F_{12}, F_{17}, F_{18}, F_{19}, F_{43}, F_{48}, F_{50}\}, \\
\mathcal{F}_{13} &= \{F_2, F_8, F_{13}, F_{16}, F_{20}, F_{23}, F_{25}, F_{31}, F_{32}, F_{33}, F_{34}, F_{35}, F_{38}, F_{47}, F_{49}\}, \\
\mathcal{F}_{14} &= \{F_3, F_7, F_{11}, F_{15}, F_{21}, F_{24}, F_{28}, F_{30}, F_{36}, F_{40}, F_{41}, F_{42}, F_{44}, F_{45}, F_{46}\}, \\
\mathcal{F}_{15} &= \{F_4, F_6, F_{10}, F_{14}, F_{22}, F_{26}, F_{27}, F_{29}, F_{37}, F_{39}\}, \\
\mathcal{F}_{21} &= \{F_1, F_5, F_9, F_{12}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{31}, F_{38}, F_{40}\}, \\
\mathcal{F}_{23} &= \{F_2, F_8, F_{13}, F_{19}, F_{20}, F_{23}, F_{25}, F_{34}, F_{35}, F_{49}\}, \\
\mathcal{F}_{24} &= \{F_3, F_7, F_{11}, F_{18}, F_{21}, F_{24}, F_{28}, F_{30}, F_{32}, F_{36}, F_{41}, F_{43}, F_{44}, F_{45}, F_{46}\}, \\
\mathcal{F}_{25} &= \{F_4, F_6, F_{10}, F_{17}, F_{22}, F_{26}, F_{27}, F_{29}, F_{33}, F_{37}, F_{39}, F_{42}, F_{47}, F_{48}, F_{50}\}, \\
\mathcal{F}_{31} &= \{F_1, F_2, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{31}, F_{38}, F_{40}, F_{44}\}, \\
\mathcal{F}_{32} &= \{F_5, F_{19}, F_{20}, F_{23}, F_{25}, F_{27}, F_{28}, F_{41}, F_{43}, F_{48}\}, \\
\mathcal{F}_{34} &= \{F_3, F_{11}, F_{18}, F_{21}, F_{24}, F_{30}, F_{32}, F_{35}, F_{36}, F_{46}\}, \\
\mathcal{F}_{35} &= \{F_4, F_{10}, F_{17}, F_{22}, F_{26}, F_{29}, F_{33}, F_{34}, F_{37}, F_{39}, F_{42}, F_{45}, F_{47}, F_{49}, F_{50}\}, \\
\mathcal{F}_{41} &= \{F_1, F_2, F_3, F_6, F_7, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{31}, F_{38}, F_{40}, F_{44}\}, \\
\mathcal{F}_{42} &= \{F_5, F_9, F_{18}, F_{19}, F_{20}, F_{21}, F_{23}, F_{24}, F_{26}, F_{27}, F_{28}, F_{41}, F_{43}, F_{48}, F_{50}\}, \\
\mathcal{F}_{43} &= \{F_8, F_{16}, F_{25}, F_{29}, F_{30}, F_{32}, F_{35}, F_{36}, F_{47}, F_{49}\}, \\
\mathcal{F}_{45} &= \{F_4, F_{17}, F_{22}, F_{33}, F_{34}, F_{37}, F_{39}, F_{42}, F_{45}, F_{46}\}, \\
\mathcal{F}_{51} &= \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_6, F_{10}, F_{14}, F_{31}, F_{40}, F_{44}\}, \\
\mathcal{F}_{52} &= \{F_5, F_9, F_{12}, F_{17}, F_{18}, F_{19}, F_{20}, F_{21}, F_{22}, F_{26}, F_{27}, F_{41}, F_{43}, F_{48}, F_{50}\}, \\
\mathcal{F}_{53} &= \{F_8, F_{13}, F_{16}, F_{23}, F_{25}, F_{29}, F_{32}, F_{33}, F_{34}, F_{35}, F_{36}, F_{37}, F_{38}, F_{47}, F_{49}\}, \\
\mathcal{F}_{54} &= \{F_7, F_{11}, F_{15}, F_{24}, F_{28}, F_{30}, F_{39}, F_{42}, F_{45}, F_{46}\}.
\end{aligned}$$

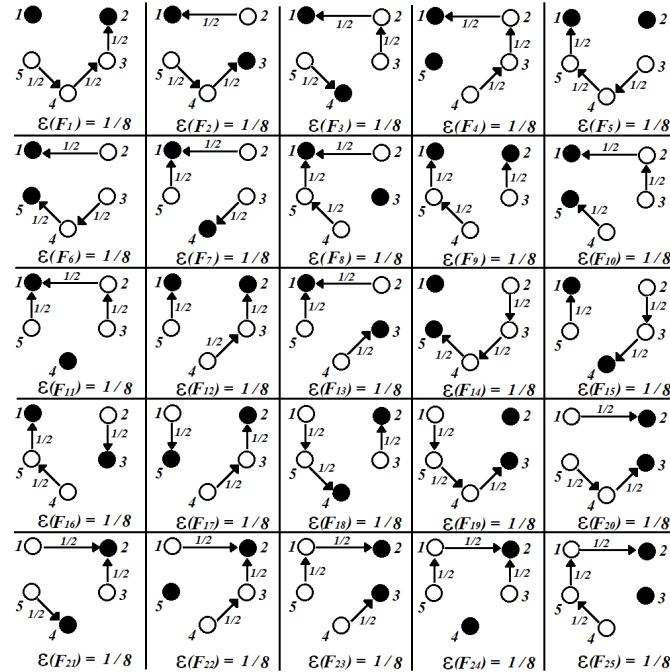


Рис. 3.3.4. Остовные сходящиеся леса орграфа TC_5 , состоящие из двух деревьев (часть 1).

Непосредственный подсчет показывает, что $((f_{ij})) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 15 & 10 \\ 10 & 0 & 10 & 15 & 15 \\ 15 & 10 & 0 & 10 & 15 \\ 15 & 15 & 10 & 0 & 10 \\ 10 & 15 & 15 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$

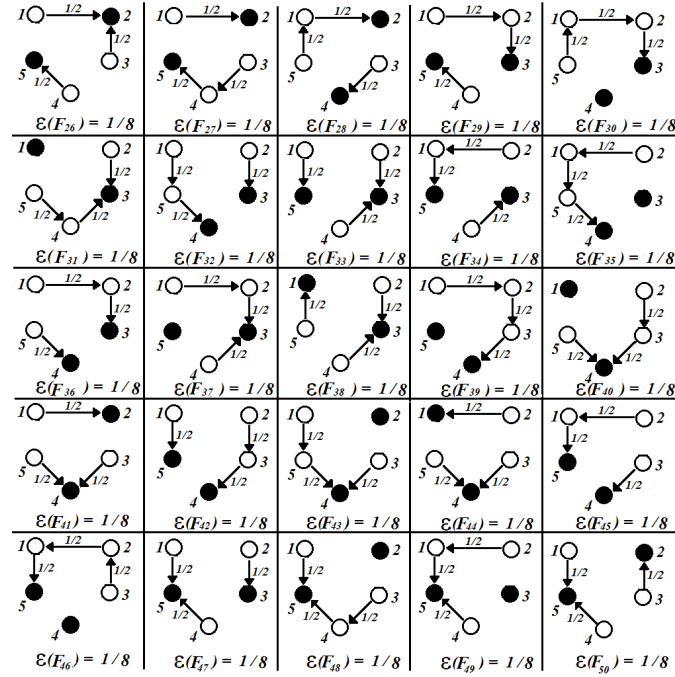


Рис. 3.3.4. Остовные сходящиеся леса орграфа TC_5 , состоящие из двух деревьев (часть 2).

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4+q_5}{q_i}$, получим матрицу среднего времени первого прохода M и, избавляясь от диагональных членов в матрице M , квазиметрику среднего времени первого прохода $\overline{M}$:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 6 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 0 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как и в предыдущих случаях, квазиметрика, соответствующая циклу C_5 , обладает свойством симметричности, то есть является метрикой.

Неориентированный цикл на n вершинах, $n \geq 3$

Нетрудно заметить некоторые закономерности, имеющие место для матрицы (квазиметрики) среднего времени первого прохода, соответствующей простому случайному блужданию по циклу C_n для любого натурального $n \geq 3$.

Прежде всего, диагональные элементы указанной матрицы равны n . Другими словами, вектор $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^n q_i}$, совпадающий с π , нормированным левым вектором Перрона для матрицы перехода T , имеет вид $(1/n, 1/n, \dots, 1/n)$. Это следует из того, что для любой вершины i существует ровно n деревьев, сходящихся к i , каждое с весом 2^{2-n} : для получения дерева "отбросим" одно из ребер графа C_n . (Следовательно, в графе TC_n имеется ровно n^2 остовных сходящихся деревьев.)

Кроме того, полная симметричность ориентированной структуры, получаемой в ходе построения матрицы (квазиметрики) среднего времени первого прохода, позволяет утверждать, что для любого цикла C_n , $n \geq 3$, квазиметрика среднего времени первого прохода, соответствующая случайному блужданию по C_n , является метрикой. Указанная симметричность обеспечивается изоморфизмом графа TC_n и графа, получаемого из TC_n "переориентацией" всех дуг.

Изоморфизм графа TC_n и графа, получаемого из TC_n сдвигом каждой вершины на 1 влево (вправо), обеспечивает соотношения $m_{ij} = m_{i+1,j+1}$, где вычисления индексов проводятся по модулю n .

При этом для элементов первого столбца имеют место соотношения $m_{i1} = (i-1)(n-(i-1))$, $i = 2, \dots, n$. Действительно, имеется ровно $n-1$ "2-деревьевых" лесов, в которых (единственное) дерево, сходящееся к 1, является изолированной вершиной 1; имеется ровно $n-2$ "2-деревьевых" лесов, в которых (единственное) дерево, сходящееся к 1, содержит вершины $n, 1$; имеется ровно $n-3$ "2-деревьевых" лесов, в которых (единственное) дерево, сходящееся к 1, содержит вершины $n-1, n, 1$; наконец, имеется ровно $i-1$ "2-деревьевых" лесов, в которых (единственное) дерево, сходящееся к 1, содержит вершины $i+1, \dots, n, 1$. Добавляя к дереву, сходящемуся к 1, вершину 2 и проводя аналогичные рассуждения, мы получим последовательность $n-2, \dots, i-2$. Продолжая построение и, наконец, добавляя к дереву, сходящемуся к 1, вершины $2, 3, \dots, i-1$, мы получим последовательность $n-i+1, \dots, 1$. Непосредственное суммирование дает результат $(i-1)(n-(i-1))$. Замечая, что все построенные деревья имеют вес 2^{2-n} , и используя полученное выше соотношение $q_1 = 2^{2-n}$, можно утверждать, что $f_{i1} = 2^{2-n}(i-1)(n-(i-1))$, в то время как $m_{ij} = f_{ij}/q_1 = (i-1)(n-(i-1))$.

Таким образом, структура матрицы $M = ((m_{ij}))$ для произвольного $n \geq 3$ полностью исследована: $m_{ii} = n$, $i = 1, 2, \dots, n$; $m_{21} = \dots = m_{n,n-1} = m_{1,n} = n-1$; $m_{31} = m_{42} = \dots = m_{n,n-2} = m_{1,n-1} = m_{2,n} = 2(n-2)$; $m_{41} = m_{52} = \dots = m_{n,n-3} = m_{1,n-2} = \dots = m_{3,n} = 3(n-3), \dots$, $m_{n-1,1} = m_{n,2} = m_{1,3} = \dots = m_{n-2,n} = (n-2) \cdot 2$, $m_{n1} = m_{12} = \dots = m_{n-1,n} = n-1$.

Другими словами, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть C_n , $n \geq 3$ – неориентированный цикл на n вершинах: $C_n = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{21, 32, \dots, n(n-1), 1n\}$ (здесь пара ij соответствует ребру (i, j)). Пусть $M = ((m_{ij}))$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ – матрица среднего времени первого прохода цепи Маркова, соответствующей простому случайному блужданию по C_n . Тогда имеют место следующие соотношения:

$$m_{ii} = n, \quad 1 \leq i \leq n; \quad , \quad m_{ij} = |i-j| \cdot (n-|i-j|), \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Заметим, что с циклом C_n связан родственный красивый результат, полученный П.Ю. Чеботаревым. [7]

Определим матрицу относительной лесной доступности графа G на n вершинах по закону $\frac{((F_{ij}))}{F}$, где F_{ij} – количество остовных (неориентированных) корневых лесов графа G , в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем i , а F – общее количество остовных корневых лесов графа G . [11], [4]

П.Ю. Чеботарев доказал ([7]), что матрица относительной лесной доступности для неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, связана с последовательностью $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$ чисел Фибоначчи. (Напомним, что $\Phi_0 = 0, \Phi_1 = 1$, в то время как $\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}$ для $n \geq 2$.)

Именно, в [7] было доказано, что для матрицы $\frac{((F_{ij}))}{F}$ относительной лесной доступности графа C_n , $n \geq 3$, имеют место следующие соотношения: $F_{ij} = \Phi_{2|j-i|} + \Phi_{2(n-|j-i|)}$, $i, j = 1, \dots, n$, в то время как $F = \Phi_{2n-1} + \Phi_{2n+1} - 2$.

Квазиметрика среднего времени первого прохода неориентированного пути

Неориентированный путь на двух вершинах

Рассмотрим неориентированный путь на двух вершинах (рис. 4.1.1), то есть неориентированный граф $P_2 = (V, E)$, где $V = \{1, 2\}$, $E = \{12\}$.

Построение модели простого случайного блуждания на графе P_2 приведет нас к орграфу TP_2 на двух вершинах с весами дуг $w_{12} = w_{21} = 1$ (рис. 4.1.2). Матрица перехода соответствующей вырожденной цепи Маркова принимает вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

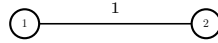


Рис. 4.1.1. Граф P_2 .

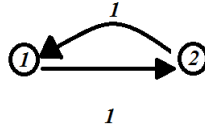


Рис. 4.1.2. Орграф TP_2 .

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 2 сходящихся дерева орграфа TP_2 (рис. 4.1.3), найдем вектор $(q_1, q_2) = (1, 1)$. Так как $q = \sum_{i=1}^2 q_i = 2$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^2 q_i} = (1/2, 1/2)$. Этот вектор совпадает с π , нормированным левым вектором Перрона для T .

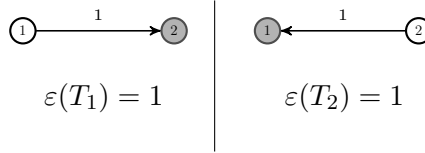


Рис. 4.1.3. Сходящиеся деревья орграфа TP_2 .

На рис. 4.1.4 представлен единственный "2-деревьевый" лес орграфа TP_2 . Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходит к j , получаем, что $((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon(F_1) \\ \varepsilon(F_1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

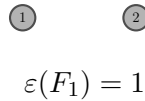


Рис. 4.1.4. Остовной сходящийся лес орграфа TP_2 , состоящий из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1 + q_2}{q_i}$, получим матрицу среднего времени первого прохода $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Избавляясь от диагональных членов в матрице M , получим квазиметрику среднего времени первого прохода $\bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. В нашем вырожденном случае она является матрицей; более того, тривиальной метрикой, принимающей значение 1 для всех пар различных элементов.

Неориентированный путь на трех вершинах

Для неориентированного пути на трех вершинах (рис. 4.2.1), то есть неориентированного графа $P_3 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{12, 23\}$, ситуация становится более интересной.

Для построения модели случайного блуждания на P_3 превратим его во взвешенный орграф TP_3 (рис. 4.2.2) по следующему закону: ребра, выходящие из вершин 1 и 3, превращаются в дуги с весами 1; ребра, выходящие из вершины 2, превращаются в дуги с весами $\frac{1}{2}$ (любое ребро (i, j) , выходящее из вершины i , превращается в дугу, соответствующую переходу из i в j с вероятностью $p_{ij} = \frac{1}{k}$, где k – степень $d(i)$ вершины i). В этом случае матрица перехода

соответствующей цепи Маркова примет вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

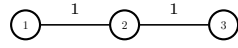


Рис. 4.2.1. Граф P_3 .

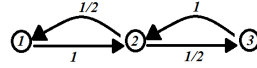


Рис. 4.2.2. Орграф TP_3 .

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 3 сходящихся дерева орграфа P_3 (рис. 4.2.3), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3) = (1/2, 1, 1/2)$. Так как $q = \sum_{i=1}^3 q_i = 2$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^3 q_i} = (1/4, 1/2, 1/4)$.

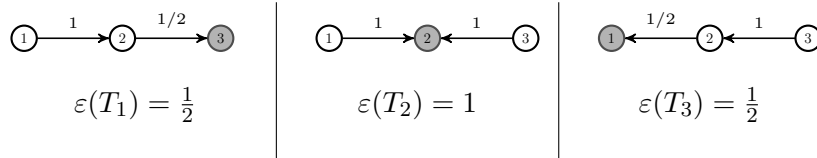


Рис. 4.2.3. Сходящиеся деревья орграфа TP_3 .

На рис. 4.2.4 представлены все 4 "2-дереьевых" леса орграфа TP_3 . Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j , получаем: $\mathcal{F}_{12} = \{F_2\}$, $\mathcal{F}_{13} = \{F_1, F_3, F_4\}$, $\mathcal{F}_{21} = \{F_1, F_2\}$, $\mathcal{F}_{23} = \{F_3, F_4\}$, $\mathcal{F}_{31} = \{F_1, F_2, F_4\}$, $\mathcal{F}_{32} = \{F_3\}$. Непосредственный подсчет показывает, что, $f_{12} = 1$, $f_{13} = 2$,

$f_{21} = 3/2$, $f_{23} = 3/2$, $f_{31} = 2$, $f_{32} = 1$. Следовательно, $((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

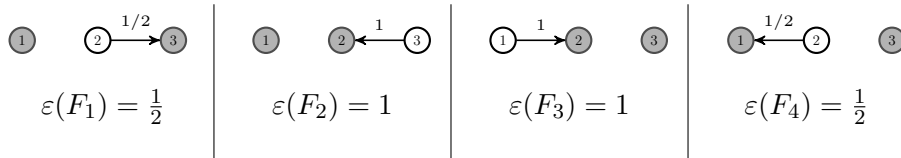


Рис. 4.2.4. Остовные сходящиеся орграфа TP_3 , состоящие из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3}{q_i}$, получим матрицу M среднего времени первого прохода и, избавляясь от диагональных членов в матрице M , квазиметрику $\overline{M}$ среднего времени первого прохода:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Она не обладает свойством симметричности, однако ряд закономерностей в ней прослеживается. Именно, совпадают элементы матрицы, полученные заменой индекса 1 (3) на индекс 3 (1): $m_{12} = m_{32} = 1$, $m_{13} = m_{31} = 4$, $m_{21} = m_{23} = 3$. Этот факт немедленно следует из изоморфности орграфа TP_3 и орграфа, полученного заменой вершины 1 на вершину 3, и вершины 3 – на вершину 1.

Неориентированный путь на четырех вершинах

Рассмотрим неориентированный путь P_4 (рис. 4.3.1).

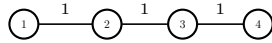


Рис. 4.3.1. Граф P_4 .

Для построения модели простого случайного блуждания на базе P_4 построим взвешенный орграф TP_4 (рис. 4.3.2) по стандартному алгоритму: ребра, выходящие из вершин 1 и 4, превратим в дуги с весами 1; ребра, выходящие из вершин 2 и 3, превратим в дуги с весами $\frac{1}{2}$.

Матрица перехода соответствующей цепи Маркова примет вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

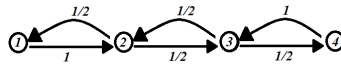


Рис. 4.3.2. Орграф TP_4 .

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 4 сходящихся дерева орграфа TP_4 (рис. 4.3.3), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (1/4, 1/2, 1/2, 1/4)$. Так как $q = \sum_{i=1}^4 q_i = 3/2$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^4 q_i} = (1/6, 1/3, 1/3, 1/6)$.

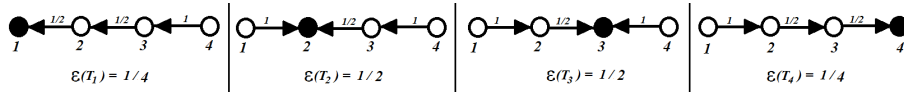


Рис. 4.3.3. Сходящиеся деревья орграфа TP_4 .

На рис. 4.3.4 представлены все 10 ”2-деревьевых“ лесов орграфа TP_4 . Пользуясь определением f_{ij} , получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{12} &= \{F_1\}, \mathcal{F}_{13} = \{F_2, F_4, F_6\}, \mathcal{F}_{14} = \{F_3, F_5, F_7, F_8, F_9, F_{10}\}, \\ \mathcal{F}_{21} &= \{F_1, F_6, F_7\}, \mathcal{F}_{23} = \{F_2, F_4\}, \mathcal{F}_{24} = \{F_3, F_5, F_8, F_9, F_{10}\}, \\ \mathcal{F}_{31} &= \{F_1, F_2, F_6, F_7, F_{10}\}, \mathcal{F}_{32} = \{F_4, F_8\}, \mathcal{F}_{34} = \{F_3, F_5, F_9\}, \\ \mathcal{F}_{41} &= \{F_1, F_2, F_3, F_6, F_7, F_{10}\}, \mathcal{F}_{42} = \{F_4, F_5, F_8\}, \mathcal{F}_{43} = \{F_9\}. \end{aligned}$$

Непосредственный подсчет показывает, что $((f_{ij})) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & 9 \\ 5 & 0 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 0 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

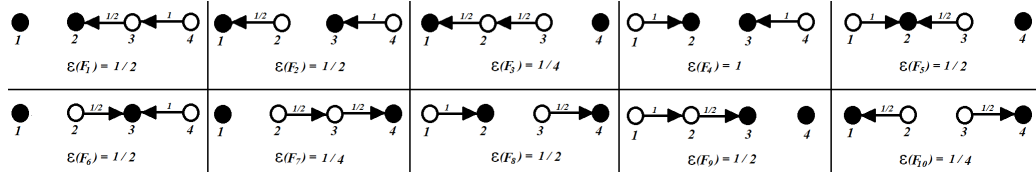


Рис. 4.3.4. Остовные сходящиеся леса орграфа TP_4 , состоящие из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{q_i}$, получим матрицу M среднего времени первого прохода и, избавляясь от диагональных членов в матрице M , квазиметрику $\overline{M}$ среднего времени первого прохода:

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 3 & 7 \\ 7 & 3 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 5 & 0 & 3 & 8 \\ 8 & 3 & 0 & 5 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Она не является симметричной, однако некоторые закономерности можно отметить. Так, $m_{12} = m_{43} = 1$, $m_{13} = m_{42} = 4$, $m_{14} = m_{41} = 8$, $m_{23} = m_{32} = 3$, и т.д. Эти соотношения не случайны. Они следуют из изоморфности орграфа TP_4 и орграфа, полученного из TP_4 заменой вершины i на вершину $4 - i + 1$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Неориентированный путь на n вершинах, $n \geq 2$

Нетрудно заметить некоторые закономерности, имеющие место для матрицы (квазиметрики) среднего времени первого прохода, соответствующей простому случайному блужданию по пути P_n для любого натурального $n \geq 2$.

Прежде всего, диагональные элементы m_{ii} указанной матрицы удовлетворяют следующим условиям: "крайние" диагональные элементы $m_{11} = m_{nn} = 2(n-1)$, в то время как "внутренние" диагональные элементы $m_{ii} = n-1$ для $2 \leq i \leq n-1$, если они существуют. Другими словами, вектор $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^n q_i}$, нормированный левый вектор Перрона для матрицы перехода T , имеет вид $(1/2(n-1), 1/(n-1), \dots, 1/(n-1), 1/2(n-1))$ для $n \geq 3$, и равен $(1/2, 1/2)$ для $n = 2$. Это следует из того, что для любой вершины i существует ровно одно дерево, сходящихся к i , причем для вершин 1 и n его вес равен 2^{2-n} , в то время как для остальных вершин соответствующий вес равен 2^{3-n} . (Следовательно, в графе TP_n имеется ровно n остовных сходящихся деревьев.)

Кроме того, "относительная" симметричность ориентированной структуры, получаемой в ходе построения матрицы (квазиметрики) среднего времени первого прохода, позволяет утверждать, что для любого пути P_n , $n \geq 3$, квазиметрика среднего времени первого прохода, соответствующая случайному блужданию по P_n , не является метрикой, однако обладает "слабой симметричностью": $m_{ij} = m_{n-i+1, n-j+1}$.

При этом для элементов первого столбца имеют место соотношения $m_{i1} = (n-1)^2 - (n-i)^2$, $i = 2, \dots, n$. Действительно, для $i = 2$ имеется ровно $n-1$ "2-деревьевых" лесов, в котором одно дерево сходится к 1, а второе содержит 2. В каждом из этих случаев дерево, сходящееся к 1, является изолированной вершиной 1, а другое дерево сходится к одной из вершин $2, 3, \dots, n$. Вес всех таких лесов, кроме последнего, равен 2^{3-n} ; в последнем случае (когда второе дерево сходится к n) мы получаем лес с весом 2^{2-n} . Таким образом, $f_{21} = 2^{3-n}(n-2) + 2^{2-n} = 2^{2-n}(2(n-2)+1) = 2^{2-n}((n-1)^2 - (n-2)^2)$. Используя полученное выше соотношение $q_1 = 2^{2-n}$, получаем, что $m_{21} = (n-1)^2 - (n-2)^2$. Для $i = 3$ имеется ровно $n-1$ "2-деревьевых" лесов, в которых дерево, сходящееся к 1, является изолированной вершиной, а второе содержит 3. Все они описаны выше: их вклад в суммарный вес равен f_{21} . Кроме того, имеется $n-2$

”2-деревьевых“ лесов, в которых дерево, сходящееся к 1, содержит вершины 2, 1, а второе дерево содержит 3. Вес всех таких лесов, кроме последнего, равен 2^{3-n} ; в последнем случае (когда второе дерево сходится к n) мы получаем лес с весом 2^{2-n} . Таким образом, $f_{31} = f_{21} + 2^{3-n}(n-3) + 2^{2-n} = 2^{2-n}((n-1)^2 - (n-2)^2) + 2^{2-n}(2(n-3)+1) = 2^{2-n}((n-1)^2 - (n-3)^2)$. Используя полученное выше соотношение $q_1 = 2^{2-n}$, получаем, что $m_{31} = (n-1)^2 - (n-3)^2$. Продолжая рассуждения, получим, что $f_{i1} = f_{i-1,1} + 2^{3-n}(n-i) + 2^{2-n} = 2^{2-n}((n-1)^2 - (n-i+1)^2) + 2^{2-n}(2(n-i)+1) = 2^{2-n}((n-1)^2 - (n-i)^2)$. Используя полученное выше соотношение $q_1 = 2^{2-n}$, получаем, что $m_{i1} = f_{i1}/q_1 = (n-1)^2 - (n-i)^2$.

Для нахождения элементов m_{i2} , $3 \leq i \leq n$, второго столбца заметим, для $i = 3$ имеется ровно $n-1$ ”2-деревьевых“ лесов, в котором одно дерево сходится к 2, а второе содержит 3. В каждом из этих случаев дерево, сходящееся к 2, содержит вершины 1, 2, а другое дерево сходится к одной из вершин 3, ..., n . Поскольку вес дерева, сходящегося к 2, равен 1, мы оказываемся в ситуации подсчета величины $f_{21} = f_{21}^{n-1}$, соответствующей пути на $n-1$ вершине. Эта величина равна $2^{3-n}((n-2)^2 - (n-3)^2)$ (впрочем, тот же результат легко получить непосредственным подсчетом). Используя полученное выше соотношение $q_2 = 2^{2-n}$, получаем, что $m_{32} = (n-2)^2 - (n-3)^2$. Рассуждая аналогично, нетрудно убедиться в том, что элементы $m_{i2} = m_{i2}^n$, $3 \leq i \leq n$, второго столбца матрицы $M = ((m_{ij}^n))$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, соответствующей графу TP_n , совпадают с элементами $m_{i-1,1} = m_{i-1,1}^{n-1}$, $3 \leq i \leq n-1$, первого столбца матрицы $M = ((m_{ij}^{n-1}))$, $i, j = 1, 2, \dots, n-1$, соответствующей графу TP_{n-1} ; другими словами, $m_{i2} = (n-2)^2 - (n-i)^2$, $3 \leq i \leq n$.

Те же соображения позволяют нам заполнить третий ($m_{i3} = (n-3)^2 - (n-i)^2$, $4 \leq i \leq n$), четвертый ($m_{i4} = (n-4)^2 - (n-i)^2$, $5 \leq i \leq n$), ..., наконец, $(n-1)$ -ый ($m_{n,n-1} = 1^2 - 0^2 = 1$) столбцы ”под главной диагональю“.

Таким образом, структура матрицы $M = ((m_{ij}))$ для произвольного $n \geq 2$ полностью исследована: $m_{11} = m_{nn} = 2(n-1)$, $m_{ii} = n-1$, $i = 2, \dots, n-1$; $m_{21} = m_{n-1,n} = (n-1)^2 - (n-2)^2$; $m_{31} = m_{n-2,n} = (n-1)^2 - (n-3)^2$; ...; $m_{n1} = m_{52} = m_{1,n} = (n-1)^2 - 0^2 = (n-1)^2$; $m_{32} = m_{n-2,n-1} = (n-2)^2 - (n-3)^2$; $m_{42} = m_{n-3,n-1} = (n-2)^2 - (n-4)^2$; ...; $m_{n,2} = m_{1,n-1} = (n-2)^2 - 0^2 = (n-2)^2$; ...; $m_{n,n-1} = m_{1,2} = 1^2 - 0^2 = 1$.

Другими словами, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть P_n , $n \geq 2$ – неориентированный путь на n вершинах: $P_n = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{21, 32, \dots, n(n-1)\}$ (здесь пара ij соответствует ребру (i, j)). Пусть $M = ((m_{ij}))$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ – матрица среднего времени первого прохода цепи Маркова, соответствующей простому случайному блужданию по P_n . Тогда имеют место следующие соотношения:

$$m_{11} = m_{nn} = 2(n-1) = n, \quad m_{ii} = n-1, \quad 2 \leq i \leq n-1;$$

$$m_{ij} = m_{n-i+1, n-j+1} = (n-j)^2 - (n-i)^2, \quad 1 \leq j < i \leq n.$$

Заметим, что с путем P_n связан родственный красивый результат, полученный П.Ю. Чеботаревым. [7]

Напомним, что матрица относительной лесной доступности графа G на n вершинах определяется по закону $\frac{((F_{ij}))}{F}$, где F_{ij} – количество остовных (неориентированных) корневых лесов графа G , в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем i , а F – общее количество остовных корневых лесов графа G . [11], [4]

П.Ю. Чеботарев доказал ([7]), что матрица относительной лесной доступности для неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, как и для неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, связана с последовательностью $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$ чисел Фибоначчи.

Именно, в [7] было доказано, что для матрицы относительной лесной доступности $\frac{((F_{ij}))}{F}$ неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, имеют место следующие соотношения: $F = \Phi_{2n}$, в то

время как $F_{ij} = \Phi_{2\min(i,j)-1} \cdot \Phi_{2(n+1-\max(i,j))-1}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Квазиметрика среднего времени первого прохода ориентированного цикла

Ориентированный цикл на трех вершинах

Рассмотрим ориентированный цикл на трех вершинах (рис. 5.1.1), то есть оргграф $\vec{C}_3 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{32, 21, 13\}$ (в ориентированном случае $ij = \langle i, j \rangle$ – дуга из вершины i в вершину j).

Модель случайного блуждания по оргграфу $\vec{C}_3$ тривиальна. В этом случае $T\vec{C}_3 = \vec{C}_3$, и матрица перехода для соответствующей цепи Маркова имеет вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

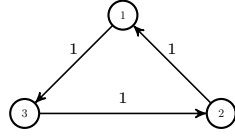


Рис. 5.1.1. Оргграф $\vec{C}_3$.

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 3 сходящихся дерева оргграфа $\vec{C}_3$ (рис. 5.1.2), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3) = (1, 1, 1)$. Так как $q = \sum_{i=1}^3 q_i = 3$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^3 q_i} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Этот вектор совпадает с π , нормированным левым вектором Перрона для T .

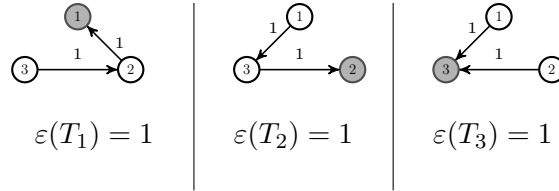


Рис. 5.1.2. Сходящиеся деревья оргграфа $\vec{C}_3$.

На рис. 5.1.3 представлены все 3 ”2-деревьевых“ леса оргграфа $\vec{C}_3$. Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j , получаем: $\mathcal{F}_{12} = \{F_1, F_3\}$, $\mathcal{F}_{13} = \{F_2\}$, $\mathcal{F}_{21} = \{F_1\}$, $\mathcal{F}_{23} = \{F_2, F_3\}$, $\mathcal{F}_{31} = \{F_1, F_2\}$, $\mathcal{F}_{32} = \{F_3\}$. Непосредственный подсчет показывает, что $f_{12} = 2$, $f_{13} = 1$, $f_{21} = 1$, $f_{23} = 2$,

$f_{31} = 2$, $f_{32} = 1$. Таким образом, $((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

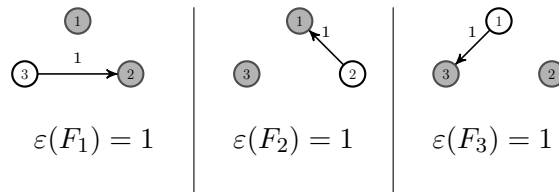


Рис. 5.1.3. Остовные сходящиеся леса оргграфа $\vec{C}_3$, состоящие из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3}{q_i}$, получим матрицу M среднего времени первого прохода и, избавляясь от диагональных членов в матрице M , квазиметрику $\overline{M}$ среднего времени первого прохода:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Естественно, она не обладает свойством симметричности. Однако нетрудно убедиться, что $m_{ij} = m_{i+1,j+1}$, где нумерация индексов рассматривается по модулю 3. Так, $m_{12} = m_{23} = m_{31} = 2$, в то время как $m_{13} = m_{21} = m_{32} = 1$. Данный результат следует из изоморфности орграфа $\vec{C}_3$ и орграфа, полученного из $\vec{C}_3$ циклическим сдвигом всех вершин на единицу (в общем случае, на любую константу).

Ориентированный цикл на четырех вершинах

Рассмотрим ориентированный цикл на четырех вершинах (рис. 5.2.1), то есть оргграф $\vec{C}_4 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{43, 32, 21, 14\}$.

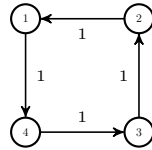


Рис. 5.2.1. Оргграф $\vec{C}_4$.

Модель случайного блуждания по $\vec{C}_4$ строится обычным образом. В этом случае $T\vec{C}_4 = \vec{C}_4$, и матрица перехода имеет вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 4 сходящихся дерева орграфа $\vec{C}_4$ (рис. 5.2.2), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (1, 1, 1, 1)$. Так как $q = \sum_{i=1}^4 q_i = 4$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^4 q_i} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.

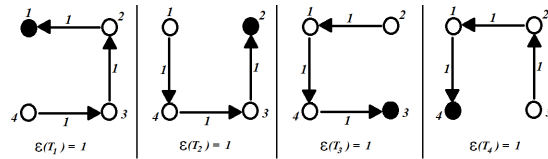


Рис. 5.2.2. Сходящиеся деревья орграфа $\vec{C}_4$.

На рис. 5.2.3 представлены все 6 "2-деревьевых" лесов орграфа $\vec{C}_4$. Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j , получаем: $\mathcal{F}_{12} = \{F_1, F_4, F_5\}$, $\mathcal{F}_{13} = \{F_2, F_6\}$, $\mathcal{F}_{14} = \{F_3\}$, $\mathcal{F}_{21} = \{F_1\}$, $\mathcal{F}_{23} = \{F_2, F_4, F_6\}$, $\mathcal{F}_{24} = \{F_3, F_5\}$, $\mathcal{F}_{31} = \{F_1, F_2\}$, $\mathcal{F}_{32} = \{F_4\}$, $\mathcal{F}_{34} = \{F_3, F_5, F_6\}$, $\mathcal{F}_{41} = \{F_1, F_2, F_3\}$, $\mathcal{F}_{42} = \{F_4, F_5\}$, $\mathcal{F}_{43} = \{F_6\}$. Таким образом, $((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

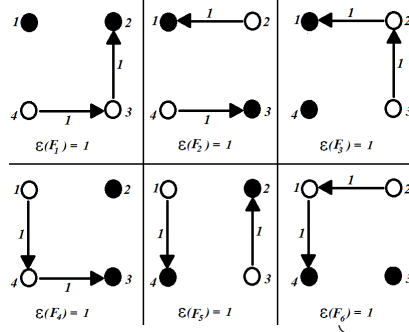


Рис. 5.2.3. Остовные сходящиеся леса орграфа $\vec{C}_4$, состоящие из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{q_i}$, получим матрицу M среднего времени первого прохода и, избавляясь от диагональных членов в матрице M , квазиметрику $\overline{M}$ среднего времени первого прохода:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Не являясь симметричной, она обладает рядом интересных свойств, которые мы обсудим ниже.

Ориентированный цикл на пяти вершинах

Рассмотрим ориентированный цикл на пяти вершинах (рис. 5.3.1), то есть орграф $\vec{C}_5 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{54, 43, 32, 21, 15\}$.

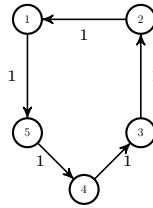
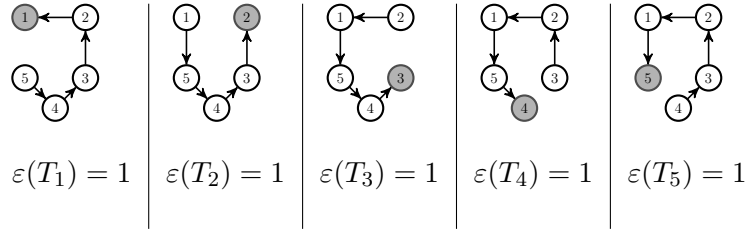


Рис. 5.3.1. Орграф $\vec{C}_5$.

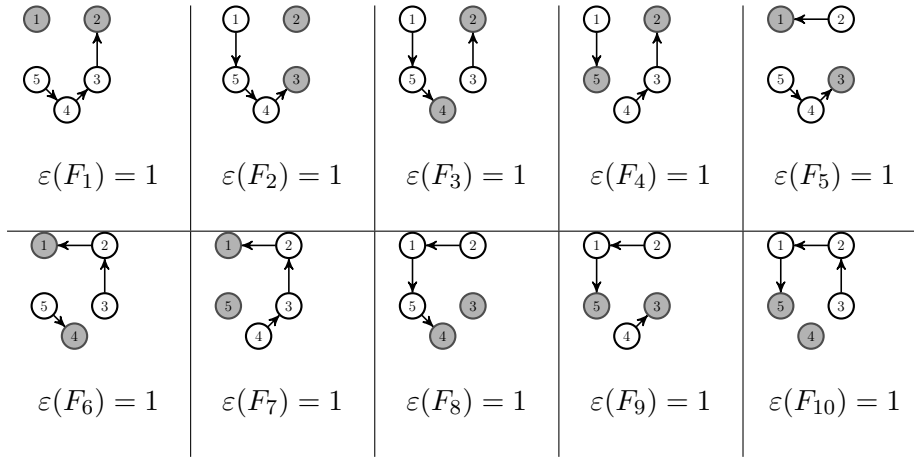
Модель случайного блуждания по $\vec{C}_5$ строится обычным образом. В этом случае $T\vec{C}_5 = \vec{C}_5$, и матрица перехода имеет вид $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 5 сходящихся деревьев орграфа $\vec{C}_5$ (рис. 5.3.2), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = (1, 1, 1, 1, 1)$. Так как $q = \sum_{i=1}^5 q_i = 5$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4, \tilde{q}_5) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^5 q_i} = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$.

Рис. 5.3.2. Сходящиеся деревья орграфа $\vec{C}_5$.

На рис. 5.3.3 представлены все 10 "2-деревьевых" лесов орграфа $\vec{C}_5$. Вспомогая, что f_{ij} определяется как общий вес всех лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j , получаем: $\mathcal{F}_{12} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, $\mathcal{F}_{13} = \{F_5, F_8, F_9\}$, $\mathcal{F}_{14} = \{F_6, F_{10}\}$, $\mathcal{F}_{15} = \{F_1\}$, $\mathcal{F}_{21} = \{F_1\}$, $\mathcal{F}_{23} = \{F_2, F_5, F_8, F_9\}$, $\mathcal{F}_{24} = \{F_3, F_6, F_{10}\}$, $\mathcal{F}_{25} = \{F_4, F_7\}$, $\mathcal{F}_{31} = \{F_1, F_5\}$, $\mathcal{F}_{32} = \{F_2\}$, $\mathcal{F}_{34} = \{F_3, F_6, F_8, F_9\}$, $\mathcal{F}_{35} = \{F_4, F_7, F_9\}$, $\mathcal{F}_{41} = \{F_1, F_5, F_6\}$, $\mathcal{F}_{42} = \{F_2, F_3\}$, $\mathcal{F}_{43} = \{F_8\}$, $\mathcal{F}_{45} = \{F_4, F_7, F_9, F_{10}\}$, $\mathcal{F}_{51} = \{F_1, F_5, F_6, F_7\}$, $\mathcal{F}_{52} = \{F_2, F_3, F_4\}$, $\mathcal{F}_{53} = \{F_8, F_9\}$, $\mathcal{F}_{54} = \{F_{10}\}$.

Непосредственный подсчет показывает, что $((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Рис. 5.3.3. Основные сходящиеся леса орграфа $\vec{C}_5$, состоящие из двух деревьев.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4+q_5}{q_i}$, получим матрицу M среднего времени первого прохода и, избавляясь от диагональных членов в матрице M , квазиметрику $\overline{M}$ среднего времени первого прохода:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Закономерности построения матрицы среднего времени первого прохода для случайного блуждания по ориентированному циклу достаточно прозрачны. Мы обсудим их в следующем пункте.

Ориентированный цикл на n вершинах, $n \geq 3$

Анализируя результаты, полученные выше для ориентированных циклов $\vec{C}_n, n = 3, 4, 5$, мы можем утверждать, что для указанных n матрица M среднего времени первого прохода имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 1 & n & n-1 & n-2 & \dots & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & n-1 & \dots & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & n & \dots & 6 & 5 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 2 & 1 & n \end{bmatrix}.$$

Можно доказать, что аналогичные результаты имеют место для любого ориентированного цикла $\vec{C}_n, n \geq 3$ (рис. 5.4.1).

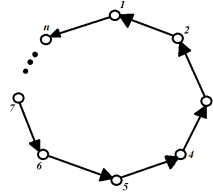


Рис. 5.4.1. Ориентированный цикл $\vec{C}_n, n \geq 3$.

Поскольку ориентированный цикл $\vec{C}_n, n \geq 3$, служит базой для построения цепи Маркова простого случайного блуждания, в котором дуга ij соответствует переходу из состояния i в состояние j с вероятностью $p_{ij} = 1$, то диагональные элементы m_{ii} матрицы M удовлетворяют условиям $m_{ii} = n$ для $1 \leq i \leq n$. Другими словами, вектор $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^n q_i}$, нормированный левый вектор Перрона для матрицы перехода T , имеет вид $(1/n, 1/n, \dots, 1/n)$. Это следует из того, что для любой вершины i существует ровно одно дерево, сходящееся к i , и его вес равен 1. (Следовательно, в графе $\vec{C}_n, n \geq 3$, имеется ровно n остовных сходящихся деревьев.)

”Слабую“ симметричность ориентированной структуры, получаемой в ходе построения матрицы среднего времени первого прохода, обеспечивает изоморфизм графа $\vec{C}_n$ и графа, получаемого из $\vec{C}_n$ сдвигом каждой вершины на 1 влево (вправо); в этом случае имеют место соотношения $m_{ij} = m_{i+1, j+1}$, где вычисления индексов проводятся по модулю n .

При этом для элементов первого столбца имеют место соотношения $m_{i1} = i - 1, i = 2, \dots, n$. Действительно, для $i = 2$ имеется ровно один ”2-деревьевый“ лес, в котором одно дерево сходится к 1, а второе содержит 2. Дерево, сходящееся к 1, является изолированной вершиной 1; дерево, содержащее 2, сходится к 2. Вес этого леса (как и любого другого), равен 1. Таким образом, $f_{21} = 1$. Используя полученное выше соотношение $q_1 = 1$, получаем, что $m_{21} = f_{21}/q_1 = 1$. Для $i = 3$ имеется ровно один ”2-деревьевый“ лес, в котором дерево, сходящееся к 1, является изолированной вершиной, а второе содержит 3. Он описан выше: его вклад в суммарный вес равен $f_{31} = 1$. Кроме того, имеется один ”2-деревьевый“ лес, в котором дерево, сходящееся к 1, содержит вершины 2, 1, а второе сходится к 3. Вес этого леса равен 1. Таким образом, $f_{31} = f_{21} + 1 = 1 + 1 = 2$. Используя соотношение $q_1 = 1$, получаем, что $m_{31} = 2$. Продолжая рассуждения, получим, что $f_{i1} = f_{i-1,1} + 1 = (i-2) + 1 = i-1$. Поскольку $q_1 = 1$, получаем, что $m_{i1} = f_{i1}/q_1 = i-1$.

Изоморфность орграфа $\vec{C}_n$ и орграфа, полученного из $\vec{C}_n$ циклическим сдвигом всех вершин на единицу (в общем случае, на любую константу), обеспечивает равенство $m_{ij} = m_{i+1, j+1}$, где нумерация индексов осуществляется по модулю n . Поскольку $m_{21} = 1$, то $m_{32} =$

$= m_{43} = m_{n,n-1} = m_{1,n} = 1$; поскольку $m_{31} = 2$, то $m_{42} = m_{53} = m_{n,n-2} = m_{1,n-1} = m_{2,n} = 2$; ...; поскольку $m_{n1} = n - 1$, то $m_{12} = m_{23} = m_{n-1,n} = n - 1$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\vec{C}_n$, $n \geq 3$ – ориентированный цикл на n вершинах: $\vec{C}_n = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{21, 32, \dots, n(n-1), 1n\}$ (здесь пара ij соответствует дуге $\langle i, j \rangle$). Пусть $M = ((m_{ij}))$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ – матрица среднего времени первого прохода цепи Маркова, соответствующей простому случайному блужданию по $\vec{C}_n$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$m_{ii} = n, \quad 1 \leq i \leq n; \quad m_{ij} = \begin{cases} i - j, & \text{если } 1 \leq j < i \leq n, \\ n + i - j, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Заметим, что соотношения для m_{ij} , $i \neq j$, можно получить и непосредственно. С учетом особенности построенной модели, m_{ij} , $i \neq j$, равно числу "2-деревьевых" лесов, один из которых сходится к j , а другой содержит i . Получение "2-деревьевого" леса сводится в нашем случае к удалению двух дуг графа $\vec{C}_n$. Сходимость одного из деревьев к j требует удаления дуги $\langle j, j-1 \rangle$ (индексы вычисляем по модулю n). Принадлежность i и j к разным деревьям требует удаления, в случае $i > j$, одной из $i-j$ дуг $\langle i-k, i-1-k \rangle$, $k = 0, 1, \dots, i-j-1$; в случае $i < j$ необходимо удалить одну из $n+i-j$ дуг $\langle i-k, i-1-k \rangle$, $k = 0, 1, \dots, n+i-j-1$ (индексы вычисляем по модулю n).

Заметим, что с ориентированным циклом $\vec{C}_n$ связан красивый результат, обобщающий результаты, полученные П.Ю. Чеботаревым в неориентированном случае. [7]

Определим матрицу относительной лесной доступности орграфа Γ на n вершинах по закону $\frac{((F_{ij}))}{F}$, где F_{ij} – количество остовных сходящихся корневых лесов графа Γ , в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , а F – общее количество остовных сходящихся корневых лесов орграфа Γ . [11], [4]

Можно доказать, что матрица относительной лесной доступности для ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, связана с последовательностью $1, 2, 4, 8, \dots$ степеней числа 2 и, как следствие, с последовательностью $1, 3, 7, 15, \dots$ чисел Мерсенна $M_n = 2^n - 1$, $n \geq 1$.

Именно, для матрицы относительной лесной доступности $\frac{((F_{ij}))}{F}$ орграфа $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, имеют место следующие соотношения: $F = 2^n - 1$, в то время как

$$F_{ii} = 2^{n-1}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad F_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i-1}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n, \\ 2^{n+i-j}, & \text{если } 1 \leq j < i \leq n. \end{cases}$$

Другими словами, элементы F_{ij} , формирующие матрицу, представляют собой элементы множества $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}\}$, заполняющие собой диагонали матрицы, параллельные главной диагонали, последовательно уменьшаясь от 2^{n-1} (на главной диагонали) до 1 при движении "вниз", и последовательно увеличиваясь от 1 до 2^{n-1} при движении "вверх". Величина F равна $2^n - 1$, то есть числу Мерсенна M_n .

Так, для $n = 4$ матрица $\frac{((F_{ij}))}{F}$ принимает вид $\frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Квазиметрика среднего времени первого прохода ориентированного пути

Рассмотрим возможность построения квазиметрики среднего времени первого прохода на базе ориентированного пути на n вершинах (рис. 6.1), то есть орграфа $\vec{P}_n = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$, и $E = \{21, 32, \dots, n(n-1)\}$.

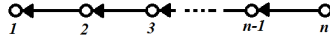


Рис. 6.1. Ориентированный путь $\vec{P}_n$, $n \geq 3$.

Поскольку в случае орграфа $\vec{P}_n$ мы не всегда можем построить ориентированный путь, соединяющий вершины i и j (так, вершина n недоступна из любой вершины i , $i \neq n$), то вопрос о случайном блуждании по ориентированному пути $\vec{P}_n$ становится тривиальным: реализовать его в обычных условиях невозможно.

Впрочем, в невозможности использования стандартной схемы можно убедиться и непосредственно. Так, диагональные элементы m_{ii} матрицы $M = ((m_{ij}))$ среднего времени первого прохода орграфа Γ на n вершинах могут быть получены по формулам $m_{ii} = \frac{q}{q_i}$, где q_i – суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к i в орграфе Γ , а $q = \sum_{k=1}^n q_k$. В случае ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, существует ровно одно остовное дерево, сам путь $\vec{P}_n$; это дерево сходится к вершине 1 и имеет вес 1. Для остальных вершин i , $2 \leq i \leq n$, сходящихся к ним остовных деревьев не существует. Следовательно, $q_1 = 1$, и $q_i = 0$ для любого i , $2 \leq i \leq n$. Таким образом, вычисление m_{ii} для $i \neq 1$ повлечет за собой деление на ноль. Аналогичная проблема возникнет и при вычислении недиагональных элементов $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$.

Заметим, что с ориентированным путем $\vec{P}_n$ связан красивый результат, обобщающий результаты, полученные П.Ю. Чеботаревым в неориентированном случае. [7]

Напомним, что матрица относительной лесной доступности орграфа Γ на n вершинах определяется по закону $\frac{((F_{ij}))}{F}$, где F_{ij} – количество остовных сходящихся корневых лесов орграфа Γ , в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , а F – общее количество остовных сходящихся корневых лесов орграфа Γ . [11], [4]

Можно доказать, что матрица относительной лесной доступности для ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 3$, связана с последовательностью $1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots$ степеней числа 2.

Именно, для матрицы относительной лесной доступности $\frac{((F_{ij}))}{F}$ орграфа $\vec{P}_n$, $n \geq 3$, имеют место следующие соотношения: $F = 2^{n-1}$, в то время как

$$F_{ii} = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если } i = 1; \\ 2^{n-2}, & \text{если } 2 \leq i \leq n; \end{cases} \quad F_{ij} = \begin{cases} 2^{n-i}, & \text{если } j = 1; \\ 2^{n-i+j-2}, & \text{если } 2 \leq j < i \leq n; \\ 0, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Другими словами, элементы F_{ij} , формирующие матрицу, представляют собой элементы множества $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}\}$, заполняющие столбцы матрицы: первый столбец состоит из последовательно убывающих чисел $2^{n-1}, \dots, 2, 1$; второй столбец, начинаясь с 0, содержит на втором месте (пересечение с главной диагональю) число 2^{n-2} , в то время как следующие элементы представляют собой последовательно убывающие числа $2^{n-3}, \dots, 2, 1$; третий столбец, содержащий нули на двух позициях, расположенных над главной диагональю, содержит на третьем месте (пересечение с главной диагональю) число 2^{n-2} , в то время как следующие

элементы представляют собой последовательно убывающие числа $2^{n-3}, \dots, 2$, и т.д. Величина F равна 2^{n-1} .

Так, для $n = 4$ матрица $\frac{((F_{ij}))}{F}$ имеет вид $\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Заключение

В статье представлены материалы, связанные с поведением специальной квазиметрики, тесно связанной со стохастическими дискретными процессами. Помимо короткого обзора теоретических оснований проблематики, подробно рассмотрен и проиллюстрирован на примерах "графовый" алгоритм построения квазиметрики среднего времени первого прохода; получены общие результаты, связанные с квазиметрикой среднего времени первого прохода, соответствующей простому случайному блужданию на неориентированных простых циклах и путях и их ориентированных аналогах. Рассмотрены связанные с проблематикой результаты, описывающие поведение матрицы относительной лесной доступности для указанных графовых моделей.

В этой связи интерес представляет задача построения и исследования свойств квазиметрики среднего времени первого прохода, соответствующей простому случайному блужданию на более сложных графовых моделях (регулярных графах, деревьях того или иного вида, двудольных графах и т.д.); перспективной представляется и задача построения конусов и многогранников рассматриваемых обобщенных (квази)метрик, заданных на малом числе точек (см., например, [1], [12], [13], [15]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза М.М., Деза Е.И., Дютур Сикирич М. Полиэдральные конструкции, связанные с квази-метриками // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, выпуск 2. С. 79 – 92.
2. Деза Е.И., Мханна Б. О специальных свойствах некоторых квазиметрик // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, выпуск 1. С. 145 – 164.
3. Потапов В.Н. Теория информации. Кодирование дискретных вероятностных источников. - Новосибирск: НГУ, 1999.
4. Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П. Матричная теорема о лесах и лапласовские матрицы орграфов. - М.: LAP LAMBERT Academic publishing, 2011.
5. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. - М.: ИЛ, 1963.
6. Catral M., Neumann M., Xu H. Proximity in group inverses of M-matrices and inverses of diagonally dominant M-matrices // Linear Algebra and its Applications. 2005. Vol. 409. P. 32 – 50.
7. Chebotarev P. Spanning forest and the Golden ratio // Discrete Applied Mathematics. 2008. Vol. 156. P. 813 – 821.
8. Chebotarev P. Studying new classes of graph metrics / in F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013) // Lecture Notes in Computer Science. 2013. LNCS 8085. P. 207 – 214.

9. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // *Linear Algebra and its Applications*. 2002. Vol. 356. P. 253 – 274.
10. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // *Optimization Letters*. 2020. Vol. 14. P. 291 – 307.
11. Chebotarev P.Y., Shamis E.V. On proximity measures for graph vertices // *Automation and Remote Control*. 1998. Vol. 59. P. 1443 – 1459.
12. Deza E., Deza M., Dutour Sikirić M. *Generalizations of Finite Metrics and Cuts*. - World Scientific, 2016.
13. Deza M., Deza E. Cones of partial metrics // *Contributions to Discrete Mathematics*. 2011. Vol. 6. P. 26 – 47.
14. Deza M. M., Deza E. *Encyclopedia of Distances*. - Springer: Berlin-Heidelberg, 2016.
15. Deza M., Deza E., Vidali J. Cones of weighted and partial metrics / in *Proceedings of the Internat. Conference on Algebra 2010 // Advances in Algebraic Structures*. 2012. P. 177 – 197.
16. Kirkland S.J., Neumann M. *Group inverses of M-matrices and their applications*. - CRC Press, 2012.
17. Klein D., Zhu H. Distances and volumina for graphs // *Journal of Mathematical Chemistry*. 1998. Vol. 23. P. 179 – 195.
18. Leighton T., Rivest R.L. The Markov chain tree theorem // *Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249*, Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass. 1983.
19. Leighton T., Rivest R.L. Estimating a probability using finite memory // *IEEE Transactions on Information Theory*. 1986. Vol. 32. P. 733 – 742.
20. Wilson W. On quasi-metric spaces // *American Journal of Mathematics*. 1931. Vol. 53. P. 675–684.

REFERENCES

1. Deza, M.M., Deza, E.I., Dutour Sikirić, M. 2015, "Polyhedral structures associated with quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 16 (2), P. 79 – 92.
2. Deza, E., Mhanna, B. "On special properties of some special quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 21 (1), P. 145 – 164.
3. Potapov, V.N. 1999, "Information Theory. Coding of discrete probabilistic sources", *Novosibirsk: NSU center*.
4. Chebotarev, P., Agaev, R. 2011, "Matrix forest theorem and Laplacian matrices of orgraphs", *M.: LAP LAMBERT Academic publishing*.
5. Shannon, K. 1963, "Works on Information theory and Cybernetics", *M.: IL*.
6. Catral, M., Neumann, M., Xu, J. 2005, "Proximity in group inverses of M-matrices and inverses of diagonally dominant M-matrices", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 409, P. 32 – 50.
7. Chebotarev, P. 2008, "Spanning forest and the Golden ratio", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 156, P. 813 – 821.

8. Chebotarev, P. 2013, "Studying new classes of graph metrics", in *F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013), Lecture Notes in Computer Science, LNCS 8085*, P. 207 – 214.
9. Chebotarev, P., Agaev, R. 2002, "Forest matrices around the Laplacian matrix", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 356, P. 253 – 274.
10. Chebotarev, P., Deza, E. 2020, "Hitting time quasi-metric and its forest representation", *Optimization Letters*, Vol. 14, P. 291 – 307.
11. Chebotarev, P.Y., Shamis E.V. 1998, "On proximity measures for graph vertices", *Automation and Remote Control*, Vol. 59, P. 1443 – 1459.
12. Deza, E., Deza, M., Dutour Sikirić, M. 2016, "Generalizations of Finite Metrics and Cuts", *World Scientific*.
13. Deza, M., Deza, E. 2011, "Cones of partial metrics", *Contributions to Discrete Mathematics*, Vol. 6, P. 26 – 47.
14. Deza, M. M., Deza, E. 2016, "Encyclopedia of Distances", *Springer, Berlin - Heidelberg*.
15. Deza, M., Deza, E., Vidali, J. 2012, "Cones of weighted and partial metrics", in *Proceedings of the Internat. Conference on Algebra 2010: Advances in Algebraic Structures*, P. 177 – 197.
16. Kirkland, S. J., Neumann, M. 2012, "Group inverses of M-matrices and their applications", *CRC Press*.
17. Klein, D., Zhu, H. 1998, "Distances and volumina for graphs", *Journal of Mathematical Chemistry*, Vol. 23, P. 179 – 195.
18. Leighton, T., Rivest, R.L. 1983, "The Markov chain tree theorem", *Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249, Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass.*
19. Leighton, T., Rivest, R.L. 1986, "Estimating a probability using finite memory", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 32, P. 733 – 742.
20. Wilson, W. 1931, "On quasi-metric spaces", *American Journal of Mathematics*, Vol. 53, P. 675–684.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 512.548.7

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-76-89

Об одном алгоритме проверки существования подквазигрупп¹

А. В. Галатенко, А. Е. Панкратьев, В. М. Староверов

Галатенко Алексей Владимирович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: agalat@msu.ru

Панкратьев Антон Евгеньевич — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: apankrat@intsys.msu.ru

Староверов Владимир Михайлович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru

Аннотация

Криптографические алгоритмы на основе квазигрупп активно изучаются в рамках перспективных исследований; кроме того, в последние годы регулярно появляются квазигрупповые алгоритмы-кандидаты на конкурсах криптографических стандартов. С точки зрения обеспечения стойкости одним из желательных требований, предъявляемых к квазигруппам, является отсутствие подквазигрупп (в противном случае преобразование может вырождаться). В работе предлагаются оптимизированные по временной сложности (за счет увеличения пространственной сложности) алгоритмы проверки наличия подквазигрупп и подквазигрупп порядка не меньше 2 в квазигруппах, заданных таблицей Кэли. Доказываются утверждения о сложности в худшем случае, а также приводятся оценки эффективности программной реализации на квазигруппах большого порядка. Результаты работы были анонсированы в рамках доклада на XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории».

Ключевые слова: квазигруппа, подквазигруппа, таблица Кэли.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

А. В. Галатенко, А. Е. Панкратьев, В. М. Староверов. Об одном алгоритме проверки существования подквазигрупп // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 76–89.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке DRDO (Индия), проект “Quasigroup Based Cryptography: Security Analysis and Development of Crypto-Primitives and Algorithms (QGSEC)”, номер гранта SAG/4600/TCID/Prog/QGSEC”.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 512.548.7

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-76-89

An algorithm for checking the existence of subquasigroups

A. V. Galatenko, A. E. Pankratiev, V. M. Staroverov

Galatenko Alexei Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: agalat@msu.ru

Pankratiev Anton Evgen'evich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: apankrat@shade.msu.ru

Staroverov Vladimir Mikhailovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: staroverovvl@imscs.msu.ru

Abstract

Quasigroup-based crypt algorithms are being actively studied in the framework of theoretic projects; besides that, a number of quasigroup-based algorithms took part in NIST contests for selection of cryptographic standards. From the viewpoint of security it is highly desirable to use quasigroups without proper subquasigroups (otherwise transformations can degrade). We propose algorithms that take a quasigroup specified by the Cayley table as the input and decide whether there exist proper subquasigroups or subquasigroups of the order at least 2. Temporal complexity of the algorithms is optimized at the cost of increased spatial complexity. We prove bounds on time and memory and analyze the efficiency of software implementations applied to quasigroups of a large order. The results were reported at the XVIII International Conference «Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: modern problems, applications and problems of history».

Keywords: quasigroup, subquasigroup, Cayley table.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

A. V. Galatenko, A. E. Pankratiev, V. M. Staroverov, 2021, "An algorithm for checking the existence of subquasigroups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 76–89.

Введение

В последние годы возник значительный интерес к использованию некоммутативных и неассоциативных алгебраических структур для построения криптографических примитивов (см., например, [1]). Примером таких структур являются конечные квазигруппы. Шеннон доказал, что основанное на квазигруппах табличное гаммирование обладает свойством совершенной секретности ([2]). Широкий спектр различных алгоритмов (хэш-функции, симметричные и асимметричные шифры, подписи) представлен в обзорах [3], [4]. В последних конкурсах NIST по выбору криптостандартов выступали и квазигрупповые кандидаты: хэш-функция EDON-R' ([5]), "легковесные" алгоритмы GAGE и InGAGE ([6]), а также модификация подписи MQQ-SIG ([7]).

Для обеспечения стойкости разумно выбирать квазигруппы, обладающие рядом дополнительных свойств. Например, полиномиальная полнота гарантирует NP-полноту задачи проверки разрешимости уравнений в соответствующей сигнатуре ([8]), а неаффинность — NP-полноту задачи проверки разрешимости систем уравнений ([9]). Известно, что почти все квазигруппы полиномиально полны и, следовательно, неаффинны (этот результат является простым следствием основной теоремы из работы [10]); таким образом, “случайные” квазигруппы оказываются хорошим выбором. Интересно, что сложность верификации полиномиальной полноты и неаффинности с помощью алгоритмов из [11], [12] оказывается сопоставимой со сложностью алгоритма порождения равномерного распределения на множестве квазигрупп заданного порядка из работы [13].

Еще одно желательное свойство — отсутствие подквазигрупп, так как в случае, если оба аргумента операции окажутся элементами подквазигруппы, результат также не выйдет за пределы подквазигруппы; это, в свою очередь, может упрощать задачу взлома за счет уменьшения пространства перебора. При этом в ряде случаев подквазигруппы порядка 1 считаются допустимыми. Так, при порождении квазигрупп с помощью правильных семейств функций над группами подквазигруппа порядка 1 существует и единственна ([14]), однако такие “неподвижные точки” могут быть учтены при построении криптоалгоритма.

В работе П. И. Собянина [15] был предложен кубический алгоритм для проверки существования подквазигрупп, описана программная реализация, распараллеленная для архитектуры CUDA, и приведены результаты работы программы на квазигруппах небольшого порядка (от 4 до 64). Идея алгоритма заключается в вычислении замыкания всевозможных одноэлементных подмножеств относительно квазигрупповой операции; таким образом, сложность в худшем случае составляет сложность вычисления одного замыкания умножить на число замыкаемых множеств. Несложно увидеть, что переход от одноэлементных подмножеств к двухэлементным даст решение задачи проверки наличия подквазигрупп порядка не меньше 2, при этом сложность увеличится на порядок (от кубической к полиному четвертой степени). Заметим, что, в силу жесткой ограниченности объема быстрой памяти у отдельных CUDA-вычислителей, неочевидно, что предложенное автором распараллеливание будет давать выигрыш в случае квазигрупп большого порядка.

В нашей работе описываются оптимизированные по времени алгоритмы для проверки существования произвольных собственных подквазигрупп и нетривиальных подквазигрупп (собственных подквазигрупп порядка не меньше 2). Временная сложность в первом случае составляет $O\left(n^{7/3} * (\log n)^{2/3}\right)$, во втором — $O\left(n^3 \log n\right)$. Основная идея оптимизации заключается в использовании монотонности замыкания множества элементов относительно операции квазигруппы: если множество A порождает множество B , то A содержится в нетривиальной подквазигруппе, только если B содержится в нетривиальной подквазигруппе. Таким образом, достаточно рассматривать только экстремальные относительно порождения начальные подмножества; эта идея будет подробно описана позднее. Практическая эффективность алгоритмов исследована на значительном количестве примеров квазигрупп большого порядка (вплоть до 2^{14}). Оказалось, что квазигруппы такого порядка могут быть обработаны за разумное время на обычной рабочей станции; дальнейшее увеличение порядка оказалось невозможным из-за исчерпания памяти. Результаты были анонсированы в рамках доклада на XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» ([16]).

Дальнейшее изложение имеет следующую структуру. Во втором разделе вводятся необходимые определения. В третьем разделе формулируются и доказываются вспомогательные утверждения. Раздел 4 посвящен проверке существования подквазигрупп порядка не меньше 2, раздел 5 — проверке существования произвольных собственных подквазигрупп. В шестом разделе описывается программная реализация и приводятся результаты вычислительных

экспериментов. Наконец, раздел 7 представляет собой заключение.

Авторы выражают благодарность В. А. Артамонову за плодотворное обсуждение результатов и Д. В. Галатенко за изящную идею доказательства Леммы 1.

Основные определения и обозначения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Конечной квазигруппой называется пара (Q, f) , где Q — конечное множество, а операция $f: Q \times Q \rightarrow Q$ такова, что для любых $a, b \in Q$ уравнения $f(a, x) = b$ и $f(y, a) = b$ однозначно разрешимы.*

В дальнейшем все используемые структуры будут конечными, поэтому для краткости слово “конечный” будет опускаться.

Пусть $Q' \subseteq Q$. Обозначим через $f(Q')$ множество всех констант, получаемых при подстановке элементов Q' в формулы, порожденные f . Несложно увидеть, что такое замыкание обладает свойством монотонности: если $Q_1 \subseteq Q_2$, то $f(Q_1) \subseteq f(Q_2)$. Если $f(Q') = Q$, то множество Q' назовем полным. Очевидно, что для полноты Q' достаточно выполнения условия $|f(Q')| > \frac{|Q|}{2}$. В силу монотонности все надмножества полного множества также полны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Пусть $Q' \subset Q$, $1 \leq |Q'| < |Q|$. Если $f(Q') = Q'$, то говорим, что квазигруппа (Q, f) содержит собственную подквазигруппу Q' (точнее, подквазигруппу (Q', f') , где f' — ограничение операции f на $Q' \times Q'$). Если дополнительно выполнено условие $|Q'| \geq 2$, то подквазигруппа называется нетривиальной.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Пусть M , $|M| < \infty$ — некоторое множество, $k \in \mathbb{N}$, $M_1, \dots, M_k$ — подмножества M . Множество $M_0 \subseteq M$ называется системой представителей для $M_1, \dots, M_k$, если для всех i от 1 до k найдется элемент $m_i \in M_0$, такой что $m_i \in M_i$.*

Заметим, что представители для различных i могут совпадать.

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\lceil x \rceil$ означает верхнюю целую часть числа x , то есть минимальное целое число, большее или равное x .

В дальнейшем все логарифмы будут полагаться двоичными.

Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. *Пусть $|M| = n$, $M_1, \dots, M_k \subset M$, $|M_1| = \dots = |M_k| = t$. Тогда жадный алгоритм строит систему представителей M_0 , такую что $|M_0| \leq \left(\frac{n}{t} + 1\right) \log k + 2$.*

Здесь под *жадным алгоритмом* подразумевается алгоритм, который стартует с пустого множества M_0 , на каждом шаге добавляет в M_0 наиболее часто встречающийся среди $\{M_i\}$ элемент v и удаляет из набора множеств $\{M_i\}$ все M_i , содержащие v . Шаги алгоритма выполняются, пока набор множеств $\{M_i\}$ не пуст.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим первый этап алгоритма, в рамках которого элементы добавляются в множество M_0 , пока количество оставшихся множеств M_i больше $k/2$. На каждом шаге первого этапа в наборе множеств $\{M_i\}$ суммарно содержится не менее $kt/2$ элементов, причем различных элементов не более n . Отсюда следует, что на каждом шаге наиболее часто встречающийся элемент среди набора множеств M_i встречается не менее, чем $\left\lfloor \frac{kt}{2n} \right\rfloor$ раз. Таким образом, за $\left\lceil \frac{k/2}{\left\lfloor \frac{kt}{2n} \right\rfloor} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{k/2}{kt/(2n)} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{t} \right\rceil$ шагов будет удалено не менее $k/2$ множеств, и первый этап завершится.

Аналогично на втором этапе получаем, что не более, чем за $\lceil n/t \rceil$ шагов количество оставшихся множеств M_i станет не больше $k/4$. Продолжаем процесс, пока семейство множеств M_i содержит хотя бы один элемент. Несложно увидеть, что число этапов не превосходит $\lceil \log k \rceil + 1 \leq \lceil \log[k+2] \rceil$, а общее количество шагов оценивается сверху величиной $(\frac{n}{t} + 1) \lceil \log k \rceil + 2$. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть (Q, f) — квазигруппа, $d \in \mathbb{N}$, $S_1, \dots, S_k \subset Q$, $|S_1| = \dots = |S_k| = d$, $M_i \subseteq f(S_i)$, $|M_i| \geq d$, $i = 1, \dots, k$, M'_i — множество всех d -элементных подмножеств M_i , M_0 — система представителей для множеств M'_i . Тогда из полноты всех $m_0 \in M_0$ следует полнота всех S_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: существует S_i , не являющееся полным. По условию найдется $m_0 \in M_0$, такое что $m_0 \in f(S_i)$. В силу монотонности замыкания

$$f(m_0) \subseteq f(f(S_i)) = f(S_i) \neq Q,$$

что противоречит условию. $\square$

Лемма 2 допускает широкое обобщение (в частности, для случая несовпадающих мощностей и множеств M'_i более общего вида), однако для наших целей достаточно приведенной выше формулировки.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия леммы 2 и дополнительно множества S_i представляют собой все d -элементные подмножества Q . Тогда квазигруппа (Q, f) имеет собственные подквазигруппы порядка $\geq d$ тогда и только тогда, когда существует $m_0 \in M_0$, не являющееся полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна (искомая подквазигруппа есть $f(m_0)$). Необходимость вытекает из леммы 2 и того, что все d -элементные подмножества Q входят в $\{S_i\}$. $\square$

Лемма 3 будет использована для обоснования корректности алгоритмов, представленных в разделах 4 (с $d = 2$) и 5 (с $d = 1$).

Алгоритм проверки существования нетривиальных подквазигрупп

Алгоритм из работы [15] осуществляет проверку существования собственных подквазигрупп, стартуя с одноэлементных подмножеств множества Q и вычисляя их замыкание. Однако для поиска нетривиальных подквазигрупп этого может оказаться недостаточно, как показывает следующий пример.

1	3	5	2	4
3	2	4	5	1
5	4	3	1	2
2	5	1	4	3
4	1	2	3	5

Таблица 1: Пример таблицы Кэли квазигруппы, в которой каждый элемент образует подквазигруппу порядка 1.

Нетрудно видеть, что каждое одноэлементное подмножество является подквазигруппой, и алгоритм закончит свою работу, не проверив существование нетривиальных подквазигрупп.

Для исправления ситуации достаточно стартовать с двухэлементных подмножеств множества Q . В дальнейшем при упоминании алгоритма из работы [15] мы будем иметь в виду и эту модификацию.

Алгоритм из [15] произведет следующие вычисления:

(1, 2) : 1, 2, 3(= 1 * 2), 5(= 1 * 3), 4(= 2 * 3)
 (1, 3) : 1, 3, 5(= 1 * 3), 4(= 1 * 5), 2(= 1 * 4)
 (1, 4) : 1, 4, 2(= 1 * 4), 3(= 1 * 2), 5(= 1 * 3)
 (1, 5) : 1, 5, 4(= 1 * 5), 2(= 1 * 4), 3(= 1 * 2)
 (2, 3) : 2, 3, 4(= 2 * 3), 5(= 2 * 4), 1(= 2 * 5)
 (2, 4) : 2, 4, 5(= 2 * 4), 1(= 2 * 5), 3(= 2 * 1)
 (2, 5) : 2, 5, 1(= 2 * 5), 3(= 2 * 1), 4(= 2 * 3)
 (3, 4) : 3, 4, 1(= 3 * 4), 5(= 3 * 1), 2(= 3 * 5)
 (3, 5) : 3, 5, 2(= 3 * 5), 4(= 3 * 2), 1(= 3 * 4)
 (4, 5) : 4, 5, 3(= 4 * 5), 1(= 4 * 3), 2(= 4 * 1)

Так как каждое двухэлементное подмножество множества Q полно, нетривиальных подквазигрупп здесь нет.

Легко увидеть, что общая сложность алгоритма составляет $O(|Q|^4)$. Воспользуемся доказанными выше вспомогательными утверждениями и понизим сложность перебора — от множества всех пар перейдем к множеству пар существенно меньшего размера. Рассмотрим следующий алгоритм, состоящий из трех основных этапов:

1. рассматриваем всевозможные неупорядоченные пары $\{q_i, q_j \mid q_i, q_j \in Q\}$; вычисляем замыкание каждой пары, пока либо не получится замкнутое подмножество (в этом случае, очевидно, находится нетривиальная подквазигруппа и алгоритм завершает работу), либо размер частичного замыкания не станет равным $\lceil c \cdot \sqrt{|Q|} \rceil$ (положительная константа c является параметром);
2. каждое частичное замыкание рассматриваем как множество неупорядоченных пар входящих в него элементов и по лемме 1 строим систему представителей;
3. для каждой пары из системы представителей строим замыкание; по лемме 3 квазигруппа содержит нетривиальные подквазигруппы, если и только если найдется пара, замыкание которой не равно Q .

Реализация первого и третьего этапов алгоритма не вызывает проблем. Однако, первый этап алгоритма будет содержать некоторые дополнительные действия, необходимые для успешной реализации второй части алгоритма.

Будем с помощью $V_{i,j}$ обозначать частичное замыкание неупорядоченной пары $\{q_i, q_j\}$ (количество таких множеств равно $C_n^2 = n(n-1)/2$). Массивы $V_{i,j}$ должны строиться на первом этапе алгоритма. Параллельно с этим мы создадим криволинейный массив $t_{p,r}$, где t_p представляет собой массив пар $\{q_i, q_j\}$ таких, что $q_p \in V_{i,j}$. В реальной программе для того, чтобы сэкономить оперативную память, мы будем строить массивы $V_{i,j}$, но не будем их сохранять. При этом на первом этапе алгоритма нам придется строить массивы $V_{i,j}$ дважды: в процессе первого построения $V_{i,j}$ мы сможем определить размеры массивов t_p , после чего можно будет отвести под них память. В процессе второго построения $V_{i,j}$ мы сможем заполнить массивы t_p . Таким образом, указанные операции будут осуществлены за время $O(|Q|^3)$ при фиксированной константе c .

Заметим, что $V_{i,j}$ также можно рассматривать как множество всех неупорядоченных пар, образованных элементами частичного замыкания пары $\{q_i, q_j\}$. Из контекста будет ясно, какая интерпретация имеется в виду.

В процессе первого построения массивов $V_{i,j}$ мы также заполним двумерный массив G , где $G_{i,j}$ равно количеству частичных замыканий $V_{p,q}$, содержащих пару $\{q_i, q_j\}$. На это также потребуется $O(|Q|^3)$ времени при фиксированной константе c . Таким образом, первый этап алгоритма будет осуществлен за время $O(|Q|^3)$ при фиксированной константе c .

Здесь следует отметить, что в дальнейшем нам потребуется для заданной пары $\{q_a, q_b\}$ получать множество пар $\{q_i, q_j\}$, замыкания которых содержат $\{q_a, q_b\}$. Мы не можем себе позволить для каждой пары хранить множество пар $\{q_i, q_j\} : \{q_a, q_b\} \in V_{i,j}$ в силу ограничений на размер оперативной памяти. Вместо этого мы создали массив $t_{p,r}$, а пересечение массивов t_a и t_b как раз нам дает требуемое множество пар $\{q_i, q_j\} : \{q_a, q_b\} \subset V_{i,j}$.

Опишем детали реализации второго (наиболее сложного) этапа алгоритма. Второй этап алгоритма будет состоять из шагов, каждый из которых будет состоять из следующих пунктов:

1. За квадратичное время ищем максимум в массиве $G_{i,j}$; пусть максимум имеет индексы (a, b) .
2. Ищем множество пар $\{q_i, q_j\}$, замыкания которых содержат $\{q_a, q_b\}$; это делается за квадратичное время с помощью нахождения пересечения массивов t_a и t_b .
3. Для всех $\{q_i, q_j\}$, найденных в предыдущем пункте, исключаем $V_{i,j}$ из семейства множеств частичных замыканий и, соответственно, корректируем значения массива G . Последнее делается вычитанием единицы из всех $G_{k,l}$ таких, что $\{q_k, q_l\} \in V_{i,j}$. Легко увидеть, что суммарное время выполнения данного пункта во всем алгоритме $O(|Q|^3)$.

По лемме 1 (в которой в качестве n и k выступает мощность множества неупорядоченных пар, равная $\frac{|Q|(|Q|-1)}{2}$), а в качестве t выступает количество неупорядоченных пар в частичных замыканиях $V_{i,j}$, равное $\left\lceil c\sqrt{|Q|} \right\rceil \left(\left\lceil c\sqrt{|Q|} \right\rceil - 1 \right) / 2$, второй этап будет содержать $O(|Q| \log |Q|)$ шагов. Поэтому суммарное время работы второго пункта алгоритма во всех шагах равно $O(|Q|^3 \log |Q|)$. Отсюда мы сразу получаем требуемую оценку на количество шагов во второй и третьей частях алгоритма.

Осталось отметить, что при фиксированном значении параметра c алгоритм имеет пространственную сложность $O(n^2 \cdot \sqrt{|Q|})$, поскольку общий объем массива t равен суммарному размеру массивов $V_{i,j}$, а массив G имеет квадратичный размер. При этом объем используемой памяти прямо пропорционален параметру c ; таким образом, для работы с квазигруппами большого порядка значение c должно выбираться маленьким. С другой стороны, увеличение значения c снижает мощность системы представителей, таким образом понижая сложность самых сложных по времени шагов 2 и 3. Наконец, на третьем шаге потребуется вычислить $O(n \log |Q|)$ замыканий, причем каждое вычисление потребует времени $O(|Q|^2)$, и требуемая память пренебрежимо мала по сравнению с первым шагом. Таким образом, верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *При фиксированной константе c предложенный алгоритм устанавливает наличие нетривиальных подквазигрупп в квазигруппе порядка n с временной сложностью $O(n^3 \log n)$ и пространственной сложностью $O(c \cdot n^{5/2})$, $n \rightarrow \infty$.*

В качестве примера, упрощающего понимание приведенного алгоритма, можно рассмотреть квазигруппу с таблицей Кэли, приведенной в Таблице 1. Пусть $c = 1.5$. В алгоритме будут строиться следующие частичные замыкания:

- $(1, 2) : 1, 2, 3 (= 1 * 2)$
- $(1, 3) : 1, 3, 5 (= 1 * 3)$
- $(1, 4) : 1, 4, 2 (= 1 * 4)$
- $(1, 5) : 1, 5, 4 (= 1 * 5)$

$(2, 3) : 2, 3, 4 (= 2 * 3)$
 $(2, 4) : 2, 4, 5 (= 2 * 4)$
 $(2, 5) : 2, 5, 1 (= 2 * 5)$
 $(3, 4) : 3, 4, 1 (= 3 * 4)$
 $(3, 5) : 3, 5, 2 (= 3 * 5)$
 $(4, 5) : 4, 5, 3 (= 4 * 5)$

На первом этапе будет построен (вообще говоря, криволинейный) массив t (t_p = массив пар (i, j) таких, что $p \in V_{i,j}$):

$1 : \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$
 $2 : \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}$
 $3 : \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$
 $4 : \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}$
 $5 : \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$

и исходный массив G ($G_{i,j}$ равно количеству $V_{p,q}$, содержащих пару $\{i, j\}$):

	3	3	3	3
		3	3	3
			3	3
				3

Первый шаг второго этапа:

- 1) Находим элемент с максимальным значением $G_{i,j} : (1, 2)$;
- 2) Ищем пересечение t_1 и $t_2 : \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}$;
- 3) Удаляем из набора $V : V_{1,2}, V_{1,4}, V_{2,5}$;

Вычитаем по единице из всех $G_{i,j} : \{i, j\} \in V_{1,2}$ или $V_{1,4}$ или $V_{2,5}$.

Получаем G :

	0	2	2	2
		2	2	2
			3	3
				3

и оставшиеся V :

$(1, 3) : 1, 3, 5 (= 1 * 3)$
 $(1, 5) : 1, 5, 4 (= 1 * 5)$
 $(2, 3) : 2, 3, 4 (= 2 * 3)$
 $(2, 4) : 2, 4, 5 (= 2 * 4)$
 $(3, 4) : 3, 4, 1 (= 3 * 4)$
 $(3, 5) : 3, 5, 2 (= 3 * 5)$
 $(4, 5) : 4, 5, 3 (= 4 * 5)$

Второй шаг второго этапа:

- 1) Находим элемент с максимальным значением $G_{i,j} : (4, 5)$;
- 2) Ищем пересечение t_4 и $t_5 : \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}$;
- 3) Удаляем из набора $V : V_{1,5}, V_{2,4}, V_{4,5}$;

Вычитаем по единице из всех $G_{i,j} : \{i, j\} \in V_{1,5}$ или $V_{2,4}$ или $V_{4,5}$

Получаем G :

	0	2	1	1
		2	1	1
			2	2
				1

и оставшиеся V :

- $(1, 3) : 1, 3, 5 (= 1 * 3)$
- $(2, 3) : 2, 3, 4 (= 2 * 3)$
- $(3, 4) : 3, 4, 1 (= 3 * 4)$
- $(3, 5) : 3, 5, 2 (= 3 * 5)$

Третий шаг второго этапа:

- 1) Находим элемент с максимальным значением $G_{i,j} : (3, 5)$;
- 2) Ищем пересечение t_3 и t_5 : $\{1, 3\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$;
- 3) Удаляем из набора V : $V_{1,3}, V_{3,5}, V_{4,5}$;

Вычитаем по единице из всех $G_{i,j} : \{i, j\} \in V_{1,3}$ или $V_{3,5}$ или $V_{4,5}$.

Оставшиеся V :

- $(2, 3) : 2, 3, 4 (= 2 * 3)$
- $(3, 4) : 3, 4, 1 (= 3 * 4)$

Четвертый шаг второго этапа:

- 3 : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$
- 4 : $\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}$

- 1) Находим элемент с максимальным значением $G_{i,j} : (3, 4)$;
- 2) Ищем пересечение t_3 и t_4 : $\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}$;
- 3) Удаляем из набора V : $V_{2,3}, V_{3,4}, V_{4,5}$;

Вычитаем по единице из всех $G_{i,j} : \{i, j\} \in V_{2,3}$ или $V_{3,4}$ или $V_{4,5}$.

Набор V пуст.

Переходим к третьему этапу. На нем мы строим полные замыкания только для найденных пар (их существенно меньше, чем для алгоритма из [15]):

- $(1, 2) : 1, 2, 3 (= 1 * 2), 5 (= 1 * 3), 4 (= 2 * 3)$
- $(3, 4) : 3, 4, 1 (= 3 * 4), 5 (= 3 * 1), 2 (= 3 * 5)$
- $(3, 5) : 3, 5, 2 (= 3 * 5), 4 (= 3 * 2), 1 (= 3 * 4)$
- $(4, 5) : 4, 5, 3 (= 4 * 5), 1 (= 4 * 3), 2 (= 4 * 1)$

Поскольку все пары полны, делается вывод, что в данной квазигруппе нет нетривиальных подквазигрупп.

Описание алгоритма проверки существования собственных подквазигрупп

Не составляет труда применить описанный подход для проверки существования произвольных собственных подквазигрупп. В этом случае алгоритм будет также состоять из трех основных этапов:

1. рассматриваем всевозможные элементы $\{q_i \mid q_i \in Q\}$; вычисляем замыкание для каждого элемента (как одноэлементного подмножества), пока либо не получится замкнутое подмножество (в этом случае, очевидно, находится нетривиальная подквазигруппа и алгоритм завершает работу), либо размер частичного замыкания не станет равным $\left\lceil c \cdot |Q|^{2/3} \cdot (\log |Q|)^{1/3} \right\rceil$ (положительная константа c является параметром);
2. по лемме 1 строим систему представителей построенных множеств;
3. для каждого элемента из системы представителей (как одноэлементного подмножества) строим замыкание; в силу леммы 3 квазигруппа содержит собственные подквазигруппы, если и только если найдется представитель, замыкание которого не равно Q .

По аналогии с предыдущим алгоритмом будем с помощью V_i обозначать частичное замыкание элемента q_i (их число равно $|Q|$). Массивы V_i должны строиться на первом этапе алгоритма. Параллельно с этим мы создадим криволинейный массив $t_{p,r}$, где t_p представляет собой массив элементов q_i таких, что $q_p \in V_i$. В реальной программе мы также будем строить массивы V_i , но не будем их сохранять. При этом на первом этапе алгоритма нам придется строить массивы V_i дважды: в процессе первого построения V_i мы сможем определить размеры массивов t_p , после чего можно будет отвести под них память. В процессе второго построения V_i мы сможем заполнить массивы t_p . Таким образом, указанные операции будут осуществлены за время $O(|Q|^{7/3} \cdot (\log |Q|)^{2/3})$ при фиксированной константе c : квадратичное от размера частичных замыканий время уйдет на обработку каждого из $|Q|$ замыканий.

В процессе первого построения массивов V_i мы также заполним массив G , где G_i равно количеству частичных замыканий V_p , содержащих элемент q_i .

Второй этап алгоритма будет сводиться к следующему: для каждого $q_i \in t_s$ (то есть элемента, замыкание которого содержит самый частый элемент q_s) исключаем V_i из семейства множеств частичных замыканий и, соответственно, корректируем значения массива G . Последнее делается вычитанием единицы из всех G_k таких, что $q_k \in V_i$, при этом корректируется значение минимума массива G (если уменьшаемый элемент массива G становится меньше минимума, то значение минимума и индекс минимального элемента изменяются). Легко увидеть, что суммарное время выполнения данного пункта во всем алгоритме по порядку совпадает с количеством элементов в массиве V , равным $O(|Q|^{5/3} \cdot (\log |Q|)^{1/3})$.

Согласно лемме 1 (в которой в качестве n и k выступает мощность множества Q , а в качестве t выступает количество элементов в частичных замыканиях V_i , равное $\left\lceil c \cdot |Q|^{2/3} \cdot (\log |Q|)^{1/3} \right\rceil$), второй этап будет содержать $O(|Q|^{1/3} \cdot (\log |Q|)^{2/3})$ шагов, но, как было указано ранее, суммарное время работы второго пункта алгоритма равно $O(|Q|^{5/3} \cdot (\log |Q|)^{1/3})$. Отсюда мы сразу получаем требуемую оценку на количество шагов во второй и третьей частях алгоритма.

Осталось отметить, что при фиксированном значении параметра c алгоритм имеет пространственную сложность $O(|Q|^2)$. Действительно, квадратичный объем потребуется для хранения таблицы Кэли. Помимо этого, потребуется объем, равный $O(c \cdot |Q|^{5/3} \cdot (\log |Q|)^{1/3})$, поскольку общий объем массива t равен суммарному размеру массивов V_i , а массив G имеет линейный размер. Заметим, что эта величина по порядку меньше, чем $|Q|^2$. На третьем шаге потребуется вычислить $O(|Q|^{1/3} \cdot (\log |Q|)^{2/3})$ замыканий, причем каждое вычисление потребует времени $O(|Q|^2)$, и требуемая память пренебрежимо мала по сравнению с первым шагом. Таким образом, верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *При фиксированной константе c предложенный алгоритм устанавливает наличие собственных подквазигрупп в квазигруппе порядка n с временной сложностью $O(n^{7/3} * (\log n)^{2/3})$ и пространственной сложностью $O(n^2)$, $n \rightarrow \infty$.*

Оценка практической эффективности

Для оценки практической эффективности алгоритма была создана программная реализация и проведен ряд вычислительных экспериментов на квазигруппах, использованных для тестов в работе [12].

Исходный код программной реализации вместе с файлом *Makiefile* и примером конфигурационного файла *config.txt* можно найти по ссылке <http://stargeo.ru/article20200808.zip>. В конфигурационном файле есть описания существенных параметров. Программа позволяет производить проверку наличия нетривиальных подквазигрупп алгоритмом из работы [15]

и алгоритмом, описанным в данной работе. Также есть возможность сравнения результатов работы этих алгоритмов.

С помощью данной программы произведено тестирование времени работы алгоритма поиска нетривиальных подквазигрупп из [15] и алгоритма, описанного в данной работе. Каждый алгоритм реализован с использованием и без использования OpenMP-распараллеливания. В следующей таблице приведены максимальные времена (в секундах) проверки наличия нетривиальных подквазигрупп (на 80 различных примерах, описанных в [12]) на 8-ядерной рабочей станции (i7-3770 CPU @3.40GHz) с 32 гигабайтами оперативной памяти:

N	Easy	EasyOMP	QC1	QC2	QC4	QC8	QC16	QP2	QP4	QP8
512	2	1	1							
1024	10	6	2							
2048	95	52	27	11	6	9	12	28	25	27
4096	1581	987	273	100	70	74	92	253	231	228
8192	17941	11426	2254	813	654	669	661	205	1 1979	1989
16384							5602			

Обозначения столбцов: N — порядок квазигруппы, Easy — алгоритм из работы [15]; EasyOMP — алгоритм из работы [15] с использованием OpenMP на 8 ядрах; QC V — быстрый алгоритм с параметром $c = 1/V$; QPN — быстрый алгоритм с использованием OpenMP на N ядрах, $c = 1$.

Следующая таблица является продолжением предыдущей таблицы для случаев использования OpenMP, $c < 1$:

N	QP2C2	QP4C2	QP8C2	QP2C4	QP4C4	QP8C24	QP4C16
2048	10	9	9	5	4	4	5
4096	93	81	82	49	32	32	35
8192	748	673	670	454	282	268	287
16384							2401

Обозначения столбцов: QPNC V — быстрый алгоритм с использованием OpenMP на N ядрах с параметром $c = 1/V$.

Проведенные расчеты показывают, что поставленную задачу можно успешно решать для квазигрупп порядков до 2^{14} . При этом задача допускает весьма эффективное распараллеливание. Использование коэффициента $c < 1$ позволяет существенно ускорить работу программы и уменьшить требуемый объем оперативной памяти. Так, расчеты для $N = 16384$ с помощью быстрого алгоритма из-за ограничений по памяти удалось провести только для $c = 1/16$. Алгоритм из работы [15] при таких порядках становится неприменимым из-за высокой сложности.

С помощью данной программы также произведено тестирование времени работы алгоритма проверки наличия собственных подквазигрупп из [15] и алгоритма, описанного в данной работе. Каждый алгоритм также реализован с использованием и без использования OpenMP-распараллеливания. В следующей таблице приведены максимальные времена (в секундах) проверки наличия собственных подквазигрупп на тех же примерах и на той же машине, что использовались в предыдущих численных экспериментах:

N	Easy	EasyOMP	QC0.25	QC0.5	QC1	QC2	QC4	QP4C0.25	QP4C0.5	QP4C1
4096	72	31								
8192	690	287								
16384	5639	2411	1	1	1	1	2	1	1	1
32762			3	2	3	4	6	2	1	1
65536			9	8	9	14	22	5	4	4

Обозначения столбцов аналогичны соответствующим обозначениям в предыдущих таблицах.

Заключение

В работе предложена оптимизация алгоритмов для проверки существования нетривиальных подквазигрупп и произвольных собственных подквазигрупп, а также приведена оценка практической эффективности этого алгоритма. В дальнейшем планируется рассмотрение других способов задания квазигрупп, прежде всего случай функционального задания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Markov V. T., Mikhalev A. V., Nechaev A. A. Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245, no. 2. P. 178–196. doi: 10.1007/s10958-020-04685-5
2. Shannon C. Communication theory of secrecy systems // Bell System Technical Journal. 1949. Vol. 28, no. 4. P. 656–715. doi: 10.1002/j.1538-7305.1949.tb00928.x
3. Глухов М. М. О применениях квазигрупп в криптографии // Прикладная дискретная математика. 2008. №2. С. 28–32.
4. Shcherbacov V. A. Quasigroups in cryptology // Computer Science Journal of Moldova. 2009. Vol. 17, no. 2(50). P. 193–228.
5. Gligoroski D., Ødegård R. S., Mihova M., Knapskog S. J., Drapal A., Klíma V., Amundsen J., El-Hadedy M. Cryptographic hash function EDON-R' // Proceedings of the 1st International Workshop on Security and Communication Networks. 2009. P. 1–9.
6. Gligoroski D. On the S-box in GAGE and InGAGE [электронный ресурс]. 2019. URL: <http://gageingage.org/upload/LWC2019NISTWorkshop.pdf> (дата обращения: 14.10.2020).
7. Gligoroski D., Ødegård R., Jensen R., Perret L., Faugère J.-C., Knapskog S., Markovski S. MQQ-SIG: an ultra-fast and provably CMA resistant digital signature scheme // INTRUST'11: Proceedings of the Third international conference on Trusted Systems. 2011. P. 184–203. doi: 10.1007/978-3-642-32298-3_13
8. Horváth G, Nehaniv Gh. L, Szabó Cs. An assertion concerning functionally complete algebras and NP-completeness // Theoretical Computer Science. 2008. Vol. 407. P. 591–595. doi: 10.1016/j.tcs.2008.08.028
9. Larose B., Zádori L. Taylor terms, constraint satisfaction and the complexity of polynomial equations over finite algebras // International Journal of Algebra and Computation. 2006. Vol. 16. P. 563–581. doi: 10.1142/S0218196706003116
10. Cameron P.J. Almost all quasigroups have rank 2 // Discrete Mathematics. 1992. Vol. 106–107. P. 111–115. doi: 10.1016/0012-365X(92)90537-P
11. Galatenko A. V., Pankratiev A.E. The complexity of checking the polynomial completeness of finite quasigroups // Discrete Mathematics and Applications. 2020. Vol. 30, no. 3. P. 169–175. doi: 10.1515/dma-2020-0016
12. Galatenko A. V., Pankratiev A.E., Staroverov V. M. Efficient verification of polynomial completeness of quasigroups // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, no. 8, accepted for publication.

13. Jacobson M. T., Matthews P. Generating uniformly distributed random latin squares // *Journal of Combinatorial Designs*. 1996. Vol. 4, no. 6. P. 405–437. doi: 10.1002/(SICI)1520-6610(1996)4:6<405::AID-JCD3>3.0.CO;2-J
14. Galatenko A. V., Nosov V. A., Pankratiev A.E. Latin squares over quasigroups // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. Vol. 41, no. 2. P. 194–203. doi: 10.1134/S1995080220020079
15. Собянин П. И. Об алгоритме проверки наличия подквазигруппы в квазигруппе // *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*. 2019. Т. 23, № 2. С. 79–84.
16. Галатенко А. В., Панкратьев А. Е., Староверов В. М. Об одном алгоритме проверки существования нетривиальных подквазигрупп // *Материалы XVIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории»*, Тула, 2020, С. 150–153.

REFERENCES

1. Markov, V. T., Mikhalev, A. V. & Nechaev, A. A. 2020, “Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding“, *J. Math. Sci.*, vol. 245, no. 2, pp. 178–196. doi: 10.1007/s10958-020-04685-5
2. Shannon, C. 1949, “Communication theory of secrecy systems“, *Bell Syst. tech.*, vol. 28, no. 4, pp. 656–715. doi: 10.1002/j.1538-7305.1949.tb00928.x
3. Glukhov, M. M. 2008, “Some applications of quasigroups in cryptography“, *Prikl. Discr. Mat.*, no. 2, pp. 28–32 (in Russian).
4. Shcherbacov, V. A. 2009, “Quasigroups in cryptology“, *CSJM*, vol. 17, no. 2(50), pp. 193–228.
5. Gligoroski, D., Ødegård, R. S., Mihova, M., Knapskog, S. J., Drapal, A., Klíma, V., Amundsen, J. & El-Hadedy, M. “Cryptographic hash function EDON-R“, *Proc. 1st Int. Wksh. on Security and Communication Networks*. Trondheim, 2009, pp. 1–9.
6. Gligoroski, D. On the S-box in GAGE and InGAGE (2019), Available at <http://gageingage.org/upload/LWC2019NISTWorkshop.pdf> (accessed 14 October 2020).
7. Gligoroski, D., Ødegård, R., Jensen, R., Perret, L., Faugère, J.-C., Knapskog, S. & Markovski, S. “MQQ-SIG: an ultra-fast and provably CMA resistant digital signature scheme“, *INTRUST’11: Proc. 3rd Int. Conf on Trusted Systems*. Beijing, 2011. pp. 184–203. doi: 10.1007/978-3-642-32298-3_13
8. Horváth, G., Nehaniv, Gh. L & Szabó, Cs. 2008, “An assertion concerning functionally complete algebras and NP-completeness“, *Theor. Comput. Sci.*, vol. 407, pp. 591–595. doi: 10.1016/j.tcs.2008.08.028
9. Larose, B. & Zádori, L. 2006, “Taylor terms, constraint satisfaction and the complexity of polynomial equations over finite algebras“, *Int. J. Algebra Comput.*, vol. 16, pp. 563–581. doi: 10.1142/S0218196706003116
10. Cameron, P.J. 1992, “Almost all quasigroups have rank 2“, *Discrete Math.*, vol. 116–117, pp. 111–115. doi: 10.1016/0012-365X(92)90537-P
11. Galatenko, A. V. & Pankratiev, A.E. 2020, “The complexity of checking the polynomial completeness of finite quasigroups“, *Discret. Math. Appl.*, vol. 30, no. 3, pp. 169–175. doi: 10.1515/dma-2020-0016

12. Galatenko, A. V., Pankratiev, A. E. & Staroverov, V. M. 2020, “Efficient verification of polynomial completeness of quasigroups“, *Lobachevskii J. Math.*, vol. 41, no. 8, pp. 1444–1453. doi: 10.1134/S1995080220080053.
13. Jacobson, M. T. & Matthews, P. 1996, “Generating uniformly distributed random latin squares“, *J. Comb. Des.*, vol. 4, no. 6, pp. 405–437. doi: 10.1002/(SICI)1520-6610(1996)4:6<405::AID-JCD3>3.0.CO;2-J
14. Galatenko, A. V., Nosov, V. A. & Pankratiev, A.E. 2020, “Latin squares over quasigroups“, *Lobachevskii J. Math.*, vol. 41, no. 2, pp. 194–203. doi: 10.1134/S1995080220020079
15. Sobyenin, P.I. 2019, “An algorithm that decides if a quasigroup contains subquasigroups“, *Intellektualnye sistemy. Teoria i prilozhenia*, vol. 23, no. 2, pp. 79–84 (in Russian).
16. Galatenko, A. V., Pankratiev, A. E. & Staroverov, V. M. “An algorithm for checking the existence of nontrivial subquasigroups“, *Materialy XVIII Mejdunarodnoi Konferentsii “Algebra, Teoria Chisel i Diskretnaya Geometrija: Sovremennye Problemy, Prilozhenia i Problemy Istorii”* (Proc. 18th Int. Conf. “Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history“). Tula, 2020, pp. 150–153 (in Russian).

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 51

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-90-103

**Расширения Любина — Тейта и модуль Карлица
над проективной прямой: явная связь**

Н. В. Елизаров, С. В. Востоков

Елизаров Никита Вячеславович — магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: nikich97@bk.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: s.vostokov@spbu.ru

Аннотация

В данной статье рассматриваются различные подходы к построению максимальных абелевых расширений для локальных и глобальных геометрических полей. Теория Любина — Тейта играет ключевую роль в построении максимального Абелева расширения для локальных геометрических полей. В случае глобальных геометрических полей особый интерес представляют модули Дринфельда. В настоящей работе рассматривается самый простой частный случай модулей Дринфельда для проективной прямой, который называется модулем Карлица.

Во введении мы приводим мотивацию и краткую историческую справку по затронутым в работе темам.

В первом и втором разделах мы приводим краткую информацию о модулях Любина-Тейта и модуле Карлица.

В третьем разделе мы приводим два основных результата:

- установлена явная связь между теориями глобальных и локальных полей в геометрическом случае проективной прямой над конечным полем: доказано, что башня расширения модуля Карлица индуцирует башню расширений Любина-Тейта.
- установлена связь между отображениями Артина расширений функционального поля произвольной проективной гладкой неприводимой кривой и расширениями пополнений локальных колец в замкнутых точках этой кривой.

В последнем разделе мы формулируем различные открытые задачи и интересные направления для дальнейших исследований, которые включают обобщение первого результата для произвольной гладкой проективной кривой над конечным полем и рассмотрение модулей Дринфельда более высокого ранга.

Ключевые слова: теория полей классов, теория Любина — Тейта, модуль Карлица, модули Дринфельда, отображение Артина, максимальное абелево расширение, проективная прямая над конечным полем.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:

Н. В. Елизаров, С. В. Востоков. Расширения Любина — Тейта и модуль Карлица над проективной прямой: явная связь // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 90–103.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 51

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-90-103

**Lubin–Tate extensions and Carlitz module
over a projective line: an explicit connection**

N. V. Elizarov, S. V. Vostokov

Elizarov Nikita Vyacheslavovich — graduate student, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).*e-mail: nikich97@bk.ru***Vostokov Sergei Vladimirovich** — doctor of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).*e-mail: s.vostokov@spbu.ru***Abstract**

In this article we consider different approaches for constructing maximal abelian extensions for local and global geometric fields. The Lubin–Tate theory plays key role in the maximal abelian extension construction for local geometric fields. In the case of global geometric fields, Drinfeld modules are of particular interest. In this paper we consider the simplest special case of Drinfeld modules for projective line which is called the Carlitz module.

In the introduction, we provide motivation and a brief historical background on the topics covered in the work.

In the first and second sections we provide brief information about Lubin–Tate modules and Carlitz module.

In the third section we present two main results:

- an explicit connection between the local and global field theory in the geometric case for projective line over finite field: it is proved that the extension tower of Carlitz module induces the tower of the Lubin–Tate extensions.
- a connection between Artin maps of extensions of a function field of an arbitrary projective smooth irreducible curve and extensions of completions of local rings at closed points of this curve.

In the last section we formulate different open problems and interesting directions for further research, which include generalization first result for an arbitrary smooth projective curve over a finite field and consideration Drinfeld modules of higher rank.

Keywords: class field theory, Lubin–Tate theory, Carlitz module, Drinfeld modules, Artin map, maximal abelian extension, projective line over a finite field.

Bibliography: 11 titles.

For citation:

N. V. Elizarov, S. V. Vostokov, 2021, “Lubin–Tate extensions and Carlitz module over a projective line: an explicit connection”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 90–103.

Introduction

The main motivation of this work is the study of Hilbert's 9th problem, in particular, an attempt to transfer the results of S. V. Vostokov [1] to the case of geometric fields. This problem is of high interest in modern algebraic number theory and has been discussed in numerous scientific papers [2] - [3].

In 1853, the famous *Kronecker–Weber theorem* was proved for the arithmetic global case. It says that an arbitrary finite abelian extension of the field of rational numbers lies in some cyclotomic extension of $\mathbb{Q}$.

Consider a geometric analogue of this statement. Let $\mathbb{F}_q(X)$ be a field of rational functions of the projective line $X = \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^1$ over a finite field $\mathbb{F}_q$. Using the theory of *Carlitz module*, we can build explicitly cyclotomic extensions of $\mathbb{F}_q(X)$ and construct the maximum abelian extension of the *global field* $\mathbb{F}_q(X)$.

Teruyoshi Yoshida built the maximum abelian extension and the Artin map for an arbitrary *local field* of an arbitrary characteristic [6]. In the construction, the theory of formal Lubin–Tate modules was applied.

The first result of this paper is a construction of a connection between theories of building a maximal abelian extension for local and global fields. It is proved that the extension tower of *Carlitz module* of the global field induces the extension tower of *formal Lubin–Tate modules* over the completion of the local ring at the closed point of our curve *Theorem 1*.

The second result is a description of the connection between Artin mappings for an arbitrary projective irreducible smooth curve X and for completions of local rings at its closed points *Theorem 2*.

Acknowledgement. The research is supported by the Russian Science Foundation under grant N 16-11-10200.

Preliminaries and notation

Local fields

Throughout the work all the considered fields have characteristic other than 2.

Let p be a prime integer not equal to 2. $q = p^s$, where s is an arbitrary natural number. Then for $\mathbb{F}_q$ we denote a finite field consisting of q elements.

We call a field $\mathfrak{K}$ with non-Archimedean regular valuation $\nu_{\mathfrak{K}}$ *local* if:

- $\mathfrak{K}$ is complete with respect to $\nu_{\mathfrak{K}}$;
- residue field with respect to $\nu_{\mathfrak{K}}$ is finite.

We denote *ring of integers*, *simple ideal* and *residue field* by $\mathfrak{O}_{\mathfrak{K}}$, $\mathfrak{p}_{\mathfrak{K}}$ and $\mathfrak{k}_{\mathfrak{K}}$ respectively. If $\mathfrak{K}'$ is a finite extension of local field $\mathfrak{K}$ we denote ramification index and the degree of inertia by $e_{\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}}$ and $f_{\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}}$ respectively.

If $e_{\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}} = 1$, then the extension is called *finite unramified*. If $f_{\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}} = 1$, then we call such extension as *finite completely ramified*. Finally, if $e_{\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}}$ is coprime with p , then the extension is called *finite weakly ramified*, and the ramification itself is called *finite tamely ramification*.

Now we need to take a closer look on infinite extensions.

A separable extension $E/\mathfrak{K}$ is said to be *unramified (completely ramified)* if the extension is obtained by the union of finite unramified (completely ramified) extensions over $\mathfrak{K}$. We assume that the *ring of integers* of an arbitrary separable extension $E/\mathfrak{K}$ is the complete closure of the ring of integers $\mathfrak{O}_{\mathfrak{K}}$ in E . In the case when all our extensions are finite, this definition coincides with the

classical one. We also call separable extension $E/\mathfrak{K}$ a *finitely-ramified* if $E/\mathfrak{K}$ is a finite extension of some unramified extension.

It is well-known fact that for every positive integer n and arbitrary local field $\mathfrak{K}$ there is a unique finite unramified extension $\mathfrak{K}_n$ such that $[\mathfrak{K}_n : \mathfrak{K}] = n$. Moreover, $\text{Gal}(\mathfrak{K}_n/\mathfrak{K}) \cong \text{Gal}(\mathfrak{t}_{\mathfrak{K}_n}/\mathfrak{t}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. We denote the *Frobenius automorphism*, the generator of $\text{Gal}(\mathfrak{K}_n/\mathfrak{K})$, by Δ .

Maximal unramified extension of the local field $\mathfrak{K}$ is $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{K}_n$ and we denote it by $\mathfrak{K}^{ur}$. It is unramified by the very definition. What is more, $\text{Gal}(\mathfrak{K}^{ur}/\mathfrak{K})$ is a projective limit of $\text{Gal}(\mathfrak{K}_n/\mathfrak{K})$:

$$\text{Gal}(\mathfrak{K}^{ur}/\mathfrak{K}) \cong \varprojlim \text{Gal}(\mathfrak{K}_n/\mathfrak{K}) \cong \varprojlim (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong \widehat{\mathbb{Z}}.$$

A Frobenius automorphism is the unique automorphism Δ in $\text{Gal}(\mathfrak{K}^{ur}/\mathfrak{K})$ with the property $\Delta(x) \equiv x^q \pmod{\mathfrak{p}^{\mathfrak{K}^{ur}}}$ for all $x \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{K}^{ur}}$. The Frobenius element maps to identity under the isomorphism $\varprojlim (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong \widehat{\mathbb{Z}}$. Restriction of this automorphism on an arbitrary finite unramified field $\mathfrak{K}_n$ gives us the corresponding Frobenius automorphism in the finite extension. It explains the name.

PROPOSITION 1. *Let $E/\mathfrak{K}$ be a finitely ramified separable extension.*

- $\mathfrak{O}_E$ is a discrete valuation ring. Moreover, the valuation obtained from this ring is a continuation of the valuation $\nu_{\mathfrak{K}}$. According to this valuation, we can take the completion E . We denote it by $\widehat{E}$.
- If E'/E is a finite separable extension, then $E' \cdot \widehat{E} = \widehat{E'}$.
- $\widehat{E} \cap \mathfrak{K}^{sep} = E$. In particular, for finitely ramified extensions E, E' over $\mathfrak{K}$ if $\widehat{E} = \widehat{E'}$, then $E = E'$.

We call the field L a *complete extension* of $\mathfrak{K}$ if L is the completion of some finitely ramified separable extension of $\mathfrak{K}$. L is a complete unramified extension if it is the completion of an unramified separable extension of $\mathfrak{K}$.

For convenience we denote the completion of $\mathfrak{K}^{ur}$ with respect to $\nu_{\mathfrak{K}}$ by $\mathfrak{F}$.

If $L/\mathfrak{K}$ is a complete unramified extension of $\mathfrak{K}$, and L' is a completely ramified extension of L , then we say that this is a *Galois extension* if any automorphism $\phi^i \in \text{Aut}(L/\mathfrak{K})$ extends to $[L' : L]$ different automorphisms in $\text{Aut}(L'/\mathfrak{K})$. We call the *Weil group* of such Galois extension a $W(L'/\mathfrak{K}) := \{\sigma \in \text{Aut}(L'/\mathfrak{K}) \mid \sigma|_L \in \Delta^{\mathbb{Z}}\}$. If $L = \mathfrak{F}$, then we introduce the map:

$$v : W(L'/\mathfrak{K}) \rightarrow \mathbb{Z};$$

$$\sigma|_{\mathfrak{F}} \mapsto \Delta^{-v(\sigma)}.$$

Formal group laws

By a formal group law over an arbitrary ring R we mean a series $F(X, Y) \in R[[X, Y]]$ which satisfies:

- $F(X, Y) \equiv X + Y \pmod{\deg 2}$;
- $F(X, F(Y, Z)) \equiv F(F(X, Y), Z)$ (associativity);
- $F(X, Y) \equiv F(Y, X)$ (commutativity).

Lubin–Tate extensions and maximal abelian extensions

DEFINITION 1. We call the polynomial $f \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{F}}[X]$ **Lubin–Tate polynomial** if it satisfies two properties:

1. $f(X) \equiv \pi \cdot X \pmod{\deg 2}$;
2. $f(X) \equiv X^q \pmod{\mathfrak{p}_{\mathfrak{F}}}$,

where by π we mean the arbitrary unifomizer of local field $\mathfrak{K}$. Let us also define the action of Δ on an arbitrary formal group law $F(X, Y) \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{F}}[[X, Y]]$. If $F(X, Y) = \sum_{i,j \geq 1} a_{ij} X^i Y^j$ then $F^\Delta :=$

$$\sum_{i,j \geq 1} \Delta(a_{ij}) X^i Y^j.$$

Then for arbitrary Lubin–Tate polynomial f it is known [6, Lemma 3.4] that there exists a unique formal group law $F(X, Y) \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{F}}[[X, Y]]$:

$$f \circ F = F^\Delta \circ f.$$

We call such a law a formal group law which corresponds to f and denote it by F_f .

Lubin–Tate polynomials are very important in the explicit construction of the maximal abelian extension and Artin map for an arbitrary local field. In the general situation Lubin–Tate polynomials are generalized to Lubin–Tate series with coefficients not necessary in $\mathfrak{O}_{\mathfrak{F}}$ but in $\mathfrak{O}_L$, where L can be an arbitrary complete unramified extension of $\mathfrak{K}$. However, in the considered here cases the series belongs to $\mathfrak{O}_{\mathfrak{K}}[X]$. The next proposition partly explains it.

PROPOSITION 2. If $f \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{K}}[X]$, then $F_f \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{K}}[[X, Y]]$ and, therefore, $F_f^\Delta = F_f$.

PROOF. The idea of proof is taken from [6, Lemma 3.4]. It is enough to construct such a sequence of polynomials $\{F_m\}$ satisfying two properties:

1. $\deg F_m \leq m$;
2. $f \circ F_m \equiv F_m^\Delta \circ f \pmod{\deg(m+1)}$.

However, due to our needs we only prove that $F_m \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{K}}[X, Y]$ by induction.

The base case is simple, because $F_1 = X + Y$ and required property is true. To understand inductive step we define $H_{m+1} = F_{m+1} - F_m$ and G_{m+1} as $f \circ F_m - F_m^\Delta \circ f$. To find F_{m+1} it is enough to find H_{m+1} .

From [6, Lemma 3.4] we obtain that if $\pi \cdot \beta_{ij}$ is the coefficient at $X^i Y^j$ in G_{m+1} , then the coefficient α_{ij} at the same monomial in H_{m+1} satisfies the equality:

$$\alpha_{ij} = -\beta_{ij} - \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{l-1} \Delta^i(\pi^m) \cdot \Delta^l(\beta_{ij}).$$

According to the induction hypothesis, $\Delta(\beta_{ij}) = \beta_{ij}$. We note that since $\pi \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{K}}$, then $\Delta(\pi) = \pi$. Thus, we get $\Delta(\alpha_{ij}) = \alpha_{ij}$. $\square$

Now we briefly introduce Lubin–Tate modules. As we already mentioned, we work mostly with polynomials from $\mathfrak{O}_{\mathfrak{K}}[X]$. The technical details and proofs can be found in [6].

PROPOSITION 3. For any Lubin–Tate polynomial $f \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{F}}[[X]]$ and for any nonzero element $\theta \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{K}}$ there exists a unique series $[\theta]_f \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{F}}[[X]]$, satisfying two properties:

1. $[\theta]_f \equiv \theta \cdot X \pmod{\deg 2}$;

$$2. f \circ [\theta]_f = [\theta]_f^{\Delta} \circ f.$$

Moreover, for arbitrary non-zero θ_1 and θ_2 of $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ holds:

- $[\theta_1]_f +_{F_f} [\theta_2]_f = [\theta_1 + \theta_2]_f$;
- $[\theta_1]_f \circ [\theta_2]_f = [\theta_1 \cdot \theta_2]_f$;
- $f = [\pi]_f$.

Thus $\{[\alpha]_f, \alpha \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}\}$ is isomorphic to $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ as $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ -module with the addition in the form of a substitution in the F_f and multiplying by scalar in the form of taking composition with corresponding series.

For a Lubin–Tate polynomial $f \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}[X]$ we denote $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{m \text{ times}}$ by f_m . Let $\mu_{f,m}$ be the set of roots f_m , $\mathfrak{F}_f^m$ be the decomposition field of f_m over $\mathfrak{F}$. Then $\mu_{f,m}$ is a $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ -module with addition in the form of a substitution in F_f and multiplication by scalars as a composition with $[\cdot]_f$. Moreover, $\mu_{f,m}^{\times} := \mu_{f,m} \setminus \mu_{f,m-1}$.

Before introducing the Artin map let us put all necessary facts in the next proposition.

PROPOSITION 4. • For any $\alpha \in \mu_{f,m}^{\times}$ the map:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{K}}^m \rightarrow \mu_{f,m}$$

$$a \rightarrow [a]_f(\alpha),$$

is an isomorphism of $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ -modules. If $\alpha \in \mu_{f,m}^{\times}$, then $\mathfrak{F}_f^m = \mathfrak{F}(\alpha)$, $N_{\mathfrak{F}_f^m/\mathfrak{F}}(-\alpha) = \Delta^{m-1}(\pi)$.

- α is the uniformizer of $\mathfrak{F}_f^m$ and $(\mathfrak{F}_f^m/\mathfrak{F})$ is a completely ramified Galois extension of degree $q^{m-1}(q-1)$.
- The following isomorphism is defined:

$$\rho_{f,m} : \text{Gal}(\mathfrak{F}_f^m/L) \cong \text{Aut}_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}}(\mu_{f,m}) \cong (\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{K}}^m)^{\times}$$

$$(\alpha \mapsto [u](\alpha) \quad \forall \alpha \in \mu_{f,m}) \mapsto u \pmod{\mathfrak{p}_{\mathfrak{K}}^m}.$$

- $\mathfrak{F}_f^m$ is a Galois extension over $\mathfrak{K}$. For any $\alpha \in \mu_{f,m}^{\times}$, the following map is bijective:

$$\mathfrak{K}^{\times}/(1 + \mathfrak{p}_{\mathfrak{K}}^m) \rightarrow \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} \mu_{f,m}^{\times}$$

$$x \pmod{(1 + \mathfrak{p}_{\mathfrak{K}}^m)} \mapsto [x\pi^j]_f(\alpha), \quad \nu_{\mathfrak{K}}(x) = -j.$$

- The map $\rho_{f,m}$ mentioned above continues to isomorphism:

$$W(\mathfrak{F}_f^m/\mathfrak{K}) \rightarrow \mathfrak{K}^{\times}/(1 + \mathfrak{p}_{\mathfrak{K}}^m)$$

$$(\alpha \mapsto [x\pi^j](\alpha)) \mapsto x \pmod{(1 + \mathfrak{p}_{\mathfrak{K}}^m)}, \quad \nu_{\mathfrak{K}}(x) = -j.$$

Now if we define $\mathfrak{F}_f^{LT} = \bigcup_{m \geq 1} \mathfrak{F}_f^m$, then passing to projective limit, we get:

$$\rho_f : W(\mathfrak{F}^{LT}/\mathfrak{K}) \cong \mathfrak{K}^{\times}.$$

And we immediately can define the Artin map as the inverse of the map ρ_f :

$$\text{Art}_{\mathfrak{K}} : \mathfrak{K}^{\times} \rightarrow W(\mathfrak{F}^{LT}/\mathfrak{K}).$$

Projective line over $\mathbb{F}_q$

Let X be an arbitrary projective smooth irreducible curve over $\mathbb{F}_q$. We denote its field of rational functions by $K(X)$. Let R be a discrete valuation ring containing $\mathbb{F}_q$ and whose field of quotients is isomorphic to $K(X)$. Then the unique maximal ideal $P \subset R$ is called the simple ideal of $K(X)$. The maximal ideal P defines the valuation on the field $K(X)$.

Then we say that:

- $f(X) \in K(X)$ has a pole in P , if $\nu_P(f) < 0$.
- $f(X) \in K(X)$ has zero in P , if $\nu_P(f) > 0$.
- The degree of a prime P is the dimension of the field of quotients R/P over $\mathbb{F}_q$.

Let L be a finite extension of the field $K(X)$. We say that the ideal $\mathfrak{B} \subset L$ lies above the ideal $P \subset K(X)$, if $\mathfrak{D}_P = K(X) \cap \mathfrak{D}_{\mathfrak{B}}$ and $P = \mathfrak{D}_P \cap \mathfrak{B}$. The concepts of ramification and inertia are introduced as in the classical case. We assume that an extension over $K(X)$ is unramified if it is unramified in all ideals.

Let us fix some simple ideal of $K(X)$ and denote it by ∞ . Let $A := \{f(X) \in K(X) \mid f \text{ has no poles in ideals other than } \infty\}$, then A is the Dedekind integral domain [8]. It is well-known that all the remaining simple ideals of $K(X)$ are in one-to-one correspondence with the simple ideals $A[8, p.219]$.

From now we consider the projective line $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^1$ over $\mathbb{F}_q$. Consider any point of degree one and call such an ideal ∞ . For example, the ideal $(\frac{1}{T})$ in the ring $\mathbb{F}_q[\frac{1}{T}]$. Then $\mathbb{F}_q[T]$ is such a subring of $\mathbb{F}_q(T)$, whose elements have poles only at the point ∞ . All other points are in one-to-one correspondence with the unitary irreducible polynomials $\mathbb{F}_q[T]$.

Carlitz Module

Our goal is to find a connection between maximal abelian extension constructions for local and global geometric fields. As we saw, the Lubin–Tate modules are very useful for local geometric fields. Now we introduce the *Carlitz Module* the global analogue.

Let L be an arbitrary field. A polynomial $h \in L[X]$ is called additive if

$$h(X + Y) \equiv h(X) + h(Y).$$

A polynomial $h \in L[X]$ is called $\mathbb{F}_q$ -linear if it is additive and for any $\alpha \in \mathbb{F}_q$

$$h(\alpha X) = \alpha h(X).$$

If the field L is of characteristic p and L contains $\mathbb{F}_q$, then the set of $\mathbb{F}_q$ -linear polynomials coincides with the set of polynomials from X^q . On the set of $\mathbb{F}_q$ -linear polynomials, can be introduced the ring structure with respect to addition and composition operations. Such a ring is denoted by $L\langle\tau\rangle$, where by τ we mean X^q .

For convenience we give an alternative ring construction of $L\langle\tau\rangle$: as a set, it is isomorphic to $L[X]$; the addition operation is determined by coefficient-wise addition at τ in equal degrees; the operation of multiplying two polynomials is a “twisted multiplication”: for any $\alpha \in L$ the following is true $\tau \cdot \alpha = \alpha^q \cdot \tau$.

It is easy to see that $L\langle\tau\rangle$ is a $\mathbb{F}_q$ -algebra. If R is a subring of L , is closed under multiplication by elements of $\mathbb{F}_q$, then $R\langle\tau\rangle$ is a $\mathbb{F}_q$ -subalgebra of $L\langle\tau\rangle$.

DEFINITION 2. Let $L = \mathbb{F}_q(T)$ and $R = \mathbb{F}_q[T]$.

Consider the morphism of $\mathbb{F}_q$ -algebras:

$$C : \mathbb{F}_q[T] \rightarrow \mathbb{F}_q(T)\langle\tau\rangle$$

$$C : T \mapsto T \cdot \tau^0 + \tau$$

$$C : 1 \mapsto \tau^0$$

$$C : 0 \mapsto 0.$$

The image of $\mathbb{F}_q[T]$ in $\mathbb{F}_q(T)\langle\tau\rangle$ is called the **Carlitz module**. The image of an arbitrary element $a \in \mathbb{F}_q[T]$ under the action of C is denoted by C_a .

As before we need to look through some statements to use them further. All technical details and proofs can be found in [8, 12 section]. For convenience we collected all necessary statements in one proposition.

We fix a unitary irreducible polynomial $P \in \mathbb{F}_q[T]$ of degree d_P .

PROPOSITION 5. 1. C_P is the Eisenstein unitary polynomial in $\mathbb{F}_q[T]$ of degree q^{d_P} with respect to the ideal (P) .

2. C_{P^e} is a separable polynomial.

3. Denote the set of zeros of the polynomial $C_{P^e}(X)$ in the algebraic closure¹ of $\mathbb{F}_q(T)$ by Λ_{P^e} . Then on Λ_{P^e} one can introduce the structure of a $\mathbb{F}_q[T]$ -module with standard addition and multiplication by a scalar $a \in \mathbb{F}_q[T]$ as an application of C_a .

4. The set Λ_{P^e} is isomorphic, as $\mathbb{F}_q[T]$ -module, to $\mathbb{F}_q[T]/(P^e \cdot \mathbb{F}_q[T])$. Moreover, for any $m \in \mathbb{F}_q[T]$ it is true that the set Λ_m is isomorphic, as $\mathbb{F}_q[T]$ -module, to the set $\mathbb{F}_q[T]/(m \cdot \mathbb{F}_q[T])$, where Λ_m is the set of zeros of the polynomial $C_m[X]$.

5. Denote $\mathbb{F}_q(T)(\Lambda_m)$ by K_m . Then the extension $K_{P^e}/\mathbb{F}_q(T)$ is a Galois extension with a Galois group:

$$\text{Gal}(K_{P^e}/\mathbb{F}_q(T)) \cong (\mathbb{F}_q[T]/(P^e \cdot \mathbb{F}_q[T]))^\times.$$

6. If $(Q) \neq (P)$ and $(Q) \neq \infty$, where ∞ is some simple ideal of $\mathbb{F}_q(T)$, (see the previous section) then K_{P^e} is unramified in (Q) .

7. K_{P^e} is completely ramified in (P) and, if λ is an arbitrary generator of Λ_{P^e} , and $\mathfrak{O}_{K_{P^e}}$ is the integral closure of $\mathbb{F}_q[T]$ in K_{P^e} , then:

$$(\lambda)^{(q^{d_P}-1) \cdot q^{d_P \cdot e}} \cdot \mathfrak{O}_{K_{P^e}} = (P) \cdot \mathfrak{O}_{K_{P^e}}.$$

8. $\mathfrak{O}_{K_{P^e}} = \mathbb{F}_q[T](\lambda)$.

Main results

Connection between the Lubin–Tate theory and the Carlitz module

In this section we consider projective line $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}$. For this section we fix the notation:

- $K := \mathbb{F}_q(T)$ is a field of functions of $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}$.
- $\infty := (\frac{1}{T})$ is an ideal in the subring $\mathbb{F}_q[\frac{1}{T}]$ that corresponds to one fixed point on our line.

¹Throughout the paper, the algebraic closure is fixed $\mathbb{F}_q(T)$.

- $A := \mathbb{F}_q[T]$ is $\{f(X) \in K(X) \mid f \text{ has no poles in ideals other than } \infty\}$.
- $\mathfrak{K} := \mathbb{F}_q((T))$ is the completion of the K with respect to ideal (T) .
- $\mathfrak{F} := \mathbb{F}_q((T))^{ur}$ is the maximal unramified extension of $\mathfrak{K}$.

ЛЕММА 1. Consider the polynomial $f = T \cdot X + X^q$. Such a polynomial is the Lubin–Tate polynomial for the local field $\mathfrak{K} = \mathbb{F}_q((T))$. The Lubin–Tate law corresponding to it is the additive law $F_{add} = X + Y$.

Since $\mathbb{F}_q[T] \subset \mathfrak{O}_{\mathfrak{K}}$, it means that for any $a \in \mathbb{F}_q[T]$ the series $[a]_f \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{F}}$ is defined. It is claimed that for any $a \in \mathbb{F}_q[T]$:

$$[a]_f = C_a,$$

where C_a is considered as an element of $\mathbb{F}_q(T)[X]$.

Moreover, let $a \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{K}}$, $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot T^i$, $a_i \in \mathbb{F}_q$. Then

$$[a]_f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot C_{T^i}.$$

PROOF. Note that T is uniformizer for $\mathbb{F}_q((T))$. Also, the residue field of this local field is isomorphic to $\mathbb{F}_q$. From these two remarks it follows that C_T is the Lubin–Tate polynomial for $\mathbb{F}_q((T))$. According to proposition 2, $F_{add} = F_{add}^{\Delta}$. Further, it is seen that:

$$f \circ F_{add} = T \cdot (X + Y) + (X + Y)^q,$$

which is equal to:

$$F_{add} \circ f = T \cdot X + X^q + T \cdot Y + Y^q.$$

The series $[a]_f$ is uniquely defined by two conditions:

1. $[a]_f \equiv aX \pmod{\deg 2}$;
2. $f \circ [a]_f = [a]_f^{\Delta} \circ f$.

First, check the first condition. It is enough to note that when two polynomials are added, the coefficients at X are added, and during composition are multiplied.

For any $a \in \mathbb{F}_q[T]$, the polynomial C_a lies in $\mathbb{F}_q(T)[X]$, which means $C_a = C_a^{\Delta}$. The map C is a morphism of $\mathbb{F}_q$ -algebras, and $\mathbb{F}_q[T]$ is a commutative ring, which means:

$$C_T \circ C_a = C_a \circ C_T.$$

Now we notice that $f = C_T$ and get:

$$f \circ C_a = C_a \circ f.$$

It is remaining to prove that if $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot T^i$, $a_i \in \mathbb{F}_q$, then

$$[a]_f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot C_{T^i}.$$

First, check that the series $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot C_{T^i}$ is set correctly. Consider the coefficient b_{q^r} of this series at X^{q^r} . Let us prove that for T^k in b_{q^r} there is a finite sum of elements of the field $\mathbb{F}_q$.

C_{T^n} by definition is equal to $\prod_{j=1}^n (T \cdot \tau^0 + \tau)$, where the multiplication is twisted. If $r < n$, then $\tau^r = X^{q^r}$ and X^{q^r} is in C_{T^n} with a coefficient divisible by at least T^{n-r} , since when opening the brackets, we must take $T \cdot \tau^0$ no later than in $(n-r)$ -th bracket. Moreover, $T \cdot \tau^0$, and τ increase the degree of T by at least 1. Therefore, if $n > r + k$, then in C_n at X^{q^r} there are no terms whose valuation is less or equal to k . That is, for T^k in X^{q^r} there is a finite sum of elements from $\mathbb{F}_q$.

Note that $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot C_{T^i} \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}[[X]]$, which means:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot C_{T^i} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot C_{T^i} \right)^{\Delta}.$$

Now we are going to check two properties defining the series $[a]_f$.

The first property follows automatically from the fact that $C_{T^i} \equiv T^i X \pmod{\deg 2}$.

For the second property, we should understand that:

- $f \circ \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot C_{T^i} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (f \circ C_{T^i})$,
- $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot C_{T^i} \right) \circ f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (C_{T^i} \circ f)$.

Note that both properties are true if we consider expressions modulo $\deg n$, since both series are polynomials of finite degree, and f is $\mathbb{F}_q$ -linear. So both equities are true for these series.

Using the fact that f and C_{T^i} commute, then equating the right-hand sides of the last two expressions, we obtain the required property. $\square$

We have already noticed that all points of our projective line except infinity are in one-to-one correspondence to unitary irreducible polynomials of $\mathbb{F}_q[T]$. The local field of the projective line at a point (T) is just $\mathbb{F}_q(T)$. The next proposition explores these fields for other points of $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}$ except infinity.

PROPOSITION 6. *Let $P \in \mathbb{F}_q[T]$ be an arbitrary unitary, irreducible polynomial from T , of degree d_P . Then the localization residue field of the ring $\mathbb{F}_q[T]$ by the simple ideal (P) is $\mathbb{F}_{q^{d_P}}$.*

PROOF. Localization by the ideal (P) consists of rational functions of T whose denominators are coprime to P . The only maximum ideal of this ring is $P \cdot \mathbb{F}_q[T]_{(P)}$. By definition, the residue field is $\mathbb{F}_q[T]_{(P)} / (P \cdot \mathbb{F}_q[T]_{(P)})$. Let us prove that it is isomorphic to $\mathbb{F}_q[T] / (P \cdot \mathbb{F}_q[T])$.

(P) is the maximum ideal in $\mathbb{F}_q[T]$, then $\mathbb{F}_q[T] / (P \cdot \mathbb{F}_q[T])$ is a field. Consider an arbitrary element $\frac{h(T)}{g(T)} \in \mathbb{F}_q[T]_{(P)} / (P \cdot \mathbb{F}_q[T]_{(P)})$, where $g(T)$ is coprime with P . If:

$$h(T) = q_h(T) \cdot P + r_h(T),$$

$$g(T) = q_g(T) \cdot P + r_g(T),$$

then

$$\frac{h(T)}{g(T)} \equiv \frac{r_h(T)}{r_g(T)} \pmod{(P \cdot \mathbb{F}_q[T])}.$$

Since $\mathbb{F}_q[T] / (P \cdot \mathbb{F}_q[T])$ is a field, then for any $r_g(T)$ there exists a polynomial $b(T)$, of degree less than d_P , such that $g(T) \cdot b(T) \equiv 1 \pmod{(P \cdot \mathbb{F}_q[T])}$. Thus, $\mathbb{F}_q[T]_{(P)} / (P \cdot \mathbb{F}_q[T]_{(P)})$ is exactly the set of polynomials, which degree less than d_P . Let $\frac{h_1(T)}{g_1(T)}$ and $\frac{h_2(T)}{g_2(T)}$ be two arbitrary elements from $\mathbb{F}_q[T]_{(P)} / (P \cdot \mathbb{F}_q[T]_{(P)})$. Note that:

$$\frac{h_1(T)}{g_1(T)} + \frac{h_2(T)}{g_2(T)} = \frac{h_1(T) \cdot g_2(T) + h_2(T) \cdot g_1(T)}{g_1(T) \cdot g_2(T)} \equiv h_1(T) \cdot b_1(T) + h_2 \cdot b_2(T).$$

Similarly:

$$\frac{h_1(T)}{g_1(T)} \cdot \frac{h_2(T)}{g_2(T)} \equiv (h_1(T) \cdot b_1(T)) \cdot (h_2(T) \cdot b_2(T)).$$

Therefore, the map $\frac{h(T)}{g(T)} \mapsto h(T) \cdot b(T)$ is an isomorphism. $\square$

Note that when we take the completion of the field K with respect to the valuation associated with the ideal (P) , the residue field and the uniformizer do not change with respect to this valuation. The proof of this statement can be found in [9, Claim 1.1.3].

LEMMA 2. *C_P is the Lubin–Tate polynomial for the completion of K with respect to the valuation associated with the simple ideal (P) .*

PROOF. As already noted in lemma 1, $C_P \equiv P \cdot X \pmod{\deg 2}$. Also according to propositions 5, C_P is the unitary polynomial of degree q^{d_P} , and all its coefficients, except the highest, are divisible by P . We write this in the form of two sequences:

1. $C_P \equiv P \cdot X \pmod{\deg 2}$;
2. $C_P \equiv X^{q^{d_P}} \pmod{(P)}$.

Note that when the field $\mathbb{F}_q(T)$ is the completion with respect to the valuation associated with the ideal (P) , the residue field and the uniformizer do not change with respect to this valuation. The proof of this statement can be found in [9, Claim 1.1.3].

Finally, according to the proposition 6 and remark above, the residue field of completion is isomorphic to $\mathbb{F}_{q^{d_P}}$, and the maximal ideal is the main ideal (P) . $\square$

We fix some irreducible polynomial $P \in \mathbb{F}_q[T]$. Let f_P be the Lubin–Tate polynomial of the field $K_{(P)}$, where $K_{(P)}$ is the completion of K with respect to the valuation, corresponding to the ideal (P) . Let also $f_P \in \mathfrak{O}_{K_{(P)}}[X]$. Define $f_{P,m}$ as $\underbrace{f_P \circ f_P \circ \dots \circ f_P}_{m \text{ times}}$, and $K_{(P),m}$ as the decomposition

field of $f_{P,m}$ over the field $K_{(P)}$. Then the extension tower

$K_{(P)} \subset K_{(P),1} \subset K_{(P),2} \subset \dots$ we call the Lubin–Tate extensions tower with respect to the ideal (P) , and $\bigcup_{m=1}^{\infty} K_{(P),m}$ by Lubin–Tate extension of the field K with respect to the ideal (P) .

ТЕОРЕМА 1. *The tower of extensions $K \subset K_P \subset K_{P^2} \subset \dots$ induces the Lubin–Tate extensions tower with respect to the ideal (P) . The union of K_{P^e} over all positive integers e induces the Lubin–Tate extension with respect to the ideal (P) .*

PROOF. From the proposition 5, we know that for K_{P^e} there is only one ideal ramified, and it is defined as $(\lambda) \cdot \mathfrak{O}_{K_{P^e}}$, where $\mathfrak{O}_{K_{P^e}}$ is the integral closure of $\mathbb{F}_q[T]$ in K_{P^e} .

Consider the ring $(\mathfrak{O}_{K_{P^e}})_{(\lambda)}$. Since this is the localization of some ring by a simple ideal, $(\mathfrak{O}_{K_{P^e}})_{(\lambda)}$ is discrete valuation ring with maximum ideal (λ) . The field of quotients of this ring is the field K_{P^e} , since all elements except λ and P are already invertible, and the addition of λ^{-1} automatically adds the inverse to P , due to the fact that:

$$(\lambda)^{(q^{d_P}-1) \cdot q^{d_P \cdot e}} = (P).$$

Therefore, localization by the ideal (λ) is the discrete valuation ring that lies above the localization $\mathbb{F}_q[T]$ by the ideal (P) .

We denote the completion of K with respect to the valuation $\nu_{(P)}$ by $K_{(P)}$ and the completion of K_{P^e} with respect to the valuation $\nu_{(\lambda)}$ by $(K_{P^e})_{(\lambda)}$. Then, by the proposition 1:

$$(K_{P^e})_{(\lambda)} = K_{(P)} \cdot K_{P^e} = K_{(P)}(\lambda),$$

where λ is the primitive root of C_{Pe} .

Since $C_P \in \mathbb{F}_q[T]\langle\tau\rangle$, it means that it lies in $\mathfrak{D}_{K(P)}[X]$, and therefore for any m :

$$C_{P,m} = \underbrace{C_P \circ C_P \circ \cdots \circ C_P}_{m \text{ times}}.$$

Thus $C_{Pe} = C_{P,e}$. It remains to notice that according to the proposition 4,

$$K_{(P)}(\lambda) = K_{(P)}(C_{P,e}).$$

Thus, the extension K_{Pe}/k induces on $K_{(P)}$ the Lubin–Tate extension of order e .

Passing to the projective limit with respect to e , we obtain that $\bigcup_{e=1}^{\infty} K_{Pe}$ induces the maximum abelian extension of the local field $K_{(P)}$. $\square$

Artin maps for global and local fields

In order to relate theories for the local and global cases, we need first to recall the Artin map in the global case.

DEFINITION 3. *Let X be a projective smooth irreducible curve over $\mathbb{F}_q$ and $K = k(X)$ be its field of functions. Then:*

- *For an arbitrary closed point $P \in X$, we denote the completion of the local ring in P by $\widehat{\mathfrak{D}_P}$, and the field of quotients of $\widehat{\mathfrak{D}_P}$ by K_P .*
- *By the idel group $\mathbb{I}_K$ of the field K we call bounded product of groups of invertible elements K_P by groups of ring units $\widehat{\mathfrak{D}_P}$, by all closed points $P \in X$.*

Consider the maximal unramified extension $K^{u,ab}$. We call the Artin map [9]:

$$\begin{aligned} \Phi_K^u : \mathbb{I}_K / \prod_{P \in X} \widehat{\mathfrak{D}_P}^\times &\rightarrow \text{Gal}(K^{u,ab}/K) \\ (\cdots, a_P, \cdots) &\mapsto \text{Frob}_P^{\text{ord}_P(a_P)}. \end{aligned}$$

REMARK 1. *If the extension of the field K is abelian, then for any point (ideal) P we can define the Frobenius automorphism [8, p. 136-137]. It can be described as a mapping $\text{Frob}_P \in \text{Gal}(K^{u,ab}/K)$ such that for any ideal $\mathfrak{B}$ lying above P it holds:*

$$\text{Frob}_P(w) \equiv w^{N(P)} \pmod{\mathfrak{B}},$$

where $N(P)$ is the dimension of the residue field of the local ring at the point P over the field $\mathbb{F}_q$.

Consider the local case. Since the maximal unramified abelian extension K , is used, then in the local case it is natural to consider the completion of the maximal unramified extension for K_P , denoting it by K_P^{ur} . Then the map Art_{K_P} , (remark 9) restricted on $\text{Gal}(K_P^{ur}/K)$ is defined as:

$$\begin{aligned} \text{Art}_{K_P} : K_P^\times &\rightarrow \text{Gal}(K_P^{ur}/K) \\ x &\mapsto \phi_P^{-j}, \text{ if } \nu_P(x) = j, \end{aligned}$$

where ϕ_P is the Frobenius map of the extension K_P^{ur}/K .

ТЕОРЕМА 2. *For a partially defined mapping, we introduce the notation $\sigma_P : \text{Gal}(K^{u,ab}/K) \rightarrow \text{Gal}(K^{ur}/K)$, which sends Frob_P to ϕ_P^{-1} . Then the following commutative diagram holds:*

$$\begin{array}{ccc} K_P^\times / \widehat{\mathfrak{D}_P^\times} & \xrightarrow{\Phi_K^u|_{K_P^\times}} & \text{Gal}(K^{u,ab}/K) \\ \downarrow id & & \downarrow \sigma_P \\ K_P^\times / \widehat{\mathfrak{D}_P^\times} & \xrightarrow{Art_{K_P}} & \text{Gal}(K_P^{ur}/K_P) \end{array}$$

PROOF. $Art_{K_P}|_{\text{Gal}(K_P^{ur}/K)}$ converts any element from $\widehat{\mathfrak{D}_P^\times}$ to one, since for any x from $\widehat{\mathfrak{D}_P^\times}$ it is true that $\nu_P(x) = 0$.

Then a_P goes to $\sigma_P(\text{Frob}_P^{ord_P(a_P)})$, therefore it goes to $\phi_P^{-ord_P(a_P)}$, which by definition is the image of a_P under action of $Art_{K_P}|_{\text{Gal}(K_P^{ur}/K)}$. $\square$

Conclusion

In *Lemmas 1, 2* and in the *theorem 1* it is proved that the extension tower of *Carlitz module* induces the extension tower of *formal Lubin–Tate modules* over completion of the local ring at a closed point of the curve.

In the *theorem 2* the description was given of the connection between the Artin maps for an arbitrary projective smooth irreducible curve X and the completions of local rings at its closed points.

Open questions

- The Carlitz module is a special case of Drinfeld modules of rank 1, which can be considered for an arbitrary smooth projective curve over a finite field. One of the most interesting problems is the generalization of the *theorem 1* for an arbitrary smooth projective curve over a finite field.
- As a development of Theorem 1, we can consider a morphism that takes T to an arbitrary polynomial in $\mathbb{F}_q[T]\langle\tau\rangle$, which will be a Lubin–Tate polynomial of degree r . For example, for $r = 2$, one can send T to the polynomial $T \cdot X + X^q + T \cdot X^{q^2}$. Then, extending $\mathbb{F}_q(T)$ by the powers of this polynomial, we again get a tower of Lubin–Tate extensions for the ideal (T) , but it remains unknown what will happen at the other points of our curve.
- Combining the previous two problems leads us to consider Drinfeld modules of rank greater than 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Востоков С. В. Явная форма закона взаимности // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 1978. – Т. 42. – №. 6. – Р. 1288–1321.
2. Востоков С. В. Символ Гильберта в дискретно нормированном поле // Записки научных семинаров ПОМИ. – 1979. – Т. 94. – №. 0. – С. 50–69.
3. Шафаревич И. Р. Общий закон взаимности // Математический сборник. – 1950. – Т. 26. – №. 1. – С. 113–146.
4. Silverman, Joseph H. The arithmetic of elliptic curves. Vol. 106. Springer Science & Business Media, 2009. – Т. 106.

5. Strickland N. P. Formal schemes and formal groups // *Contemporary Mathematics*. – 1999. – Т. 239. – P. 263-352.
6. Yoshida T. Local class field theory via Lubin-Tate theory // *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*. – 2008. – Т. 17. – №. 2. – P. 411-438.
7. Goss D. Basic structures of function field arithmetic. – Springer Science & Business Media, 2012.
8. Rosen M. Number theory in function fields. – Springer Science & Business Media, 2013. – Т. 210.
9. Péter Tóth. Geometric abelian class field theory. – Master Thesis, Universiteit Utrecht, 2011.
10. Ивасава К. Локальная теория полей классов. – Мир, 1983.
11. Thakur D. S. Function field arithmetic. – World Scientific, 2004.

REFERENCES

1. Vostokov, S.V., 1978, "Explicit form of the law of reciprocity *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, vol. 42, no. 6, pp.1288-1321.
2. Vostokov, S.V., 1979, "Hilbert symbol in a discrete valuated field *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, vol. 94, pp.50-69.
3. Shafarevich, I.R., 1950, "A general reciprocity law *Matematicheskii Sbornik*, vol. 68, no 1., pp.113-146.
4. Silverman, J.H. 2009, *The arithmetic of elliptic curves (Vol. 106)*, Springer Science & Business Media.
5. Strickland, N.P., 1999, "Formal schemes and formal groups *Contemporary Mathematics*, vol. 239, pp.263-352.
6. Yoshida, T., 2008, "Local class field theory via Lubin-Tate theory *In Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, vol. 17, no. 2, pp. 411-438.
7. Goss, D. 2012, *Basic structures of function field arithmetic*, Springer Science & Business Media.
8. Rosen, M. 2013, *Number theory in function fields (Vol. 210)*, Springer Science & Business Media.
9. Tóth, P., 2011, "Geometric abelian class field theory Master Thesis, Universiteit Utrecht.
10. Iwasawa K. and Iwasawa K. 1986, *Local class field theory*, New York : Oxford University Press.
11. Thakur, D.S. 2004, *Function field arithmetic*, World Scientific.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-104-120

Об аналоге задачи Гельфонда
для обобщенных разложений Цеккендорфа

А. А. Жукова, А. В. Шутов

Жукова Алла Адольфовна — кандидат физико-математических наук, доцент, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Владимирский филиал (г. Владимир).

e-mail: georg967@mail.ru

Шутов Антон Владимирович — кандидат физико-математических наук, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).

e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Гельфонд доказал что при условии взаимной простоты $b - 1$ и d суммы цифр разложений натуральных чисел в b -ичную систему счисления равномерно распределены по арифметическим прогрессиям с разностью d . Позднее аналогичный результат был получен для разложений натуральных чисел по линейным рекуррентным последовательностям.

Мы рассматриваем вопрос об остаточном члене в соответствующей асимптотике и изучаем дихотомию между логарифмической и степенной оценкой остаточного члена. В случае $d = 2$ получены некоторые достаточные условия справедливости логарифмической оценки. С их помощью показано, что логарифмическая оценка имеет место для разложений по всем рекуррентным последовательностям порядка 2 и бесконечному семейству последовательностей порядка 3, а также строим пример линейной рекуррентной последовательности произвольного порядка с таким свойством. С другой стороны, мы приводим пример линейной рекуррентной последовательности третьего порядка, для которой логарифмическая оценка не имеет места. Также нами показано, что для $d = 3$ логарифмическая оценка не имеет места уже в простейшем случае разложений по числам Фибоначчи.

Кроме того, мы рассматриваем разложения натуральных чисел по знаменателям подходящих дробей к произвольному иррациональному числу. В этом случае нами доказана равномерность распределения сумм цифр по арифметическим прогрессиям с разностью 2 с логарифмическим остаточным членом.

Ключевые слова: числа Фибоначчи, обобщенные разложения Цеккендорфа, линейные рекуррентные последовательности, цепные дроби, суммы цифр, задача Гельфонда.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

А. А. Жукова, А. В. Шутов. Об аналоге задачи Гельфонда для обобщенных разложений Цеккендорфа // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 104–120.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-104-120

On Gelfond-type problem for generalized Zeckendorf representations

A. A. Zhukova, A. V. Shutov

Zhukova Alla Adolfovna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of Russian Federation, Vladimir branch (Vladimir).

e-mail: georg967@mail.ru

Shutov Anton Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs (Vladimir).

e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

Gelfond proved that for coprime $b - 1$ and d sums of digits of b -ary expressions of natural numbers are uniformly distributed on arithmetic progressions with the common difference d . Later, similar result was proved for the representations of natural numbers based on linear recurrent sequences.

We consider the remainder term of the corresponding asymptotic formula and study the dichotomy between the logarithmic and power estimates of the remainder term. In the case $d = 2$, we obtain some sufficient condition for the validity of the logarithmic estimate. Using them, we show that the logarithmic estimate holds for expansions based on all second-order linear recurrent sequences and on infinite family of third-order sequences. Also we construct an example of the linear recurrent sequence of an arbitrary order with such property. On the other hand, we give an example of a third-order linear recurrent sequence for which the logarithmic estimate does not hold. We also show that for $d = 3$ the logarithmic estimate does not hold even in the simplest case of the expansions based on Fibonacci numbers.

In addition, we consider the representations of natural numbers based on the denominators of partial convergents of the continued fraction expansions of irrational numbers. In this case, we prove the uniformity of the distribution of sums of digits over arithmetic progressions with the common difference 2 with the logarithmic remainder term.

Keywords: Fibonacci numbers, generalized Zeckendorf representations, linear recurrent sequences, continued fractions, sums of digits, Gelfond problem.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

A. A. Zhukova, A. V. Shutov, 2021, “On Gelfond-type problem for generalized Zeckendorf representations”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 104–120.

Введение

Пусть

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k b^k,$$

где $n_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ и $n_k = 0$ при $k > k_0(n)$ – разложение n в b -ичной системе счисления. Пусть $N_{d,a}^{(b)}(n)$ – количество натуральных чисел, меньших n , для которых $\sum_{k=0}^{\infty} n_k \equiv a \pmod{d}$.

А.О. Гельфонд показал [3], что при условии взаимной простоты d и $b-1$ существует постоянная $\mu < 1$ такая, что

$$N_{d,a}^{(b)}(n) = \frac{n}{d} + O(n^{\mu}).$$

С другой стороны, пусть $\{F_k\}$: $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ – последовательность чисел Фибоначчи. Хорошо известно, что каждое натуральное n имеет разложение [4]

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k F_k,$$

где $f_k \in \{0, 1\}$, $f_k f_{k+1} = 0$, и $f_k = 0$ при $k > k_0(n)$. Поэтому можно определить

$$N_{d,a}^{(F)}(n) = \#\{m < n : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(m) \equiv a \pmod{d}\}.$$

Данное представление известно как разложение Цеккендорфа или же как система счисления Фибоначчи.

В этом случае известно, что

$$N_{2,a}^{(F)}(n) = \frac{n}{2} + O(\log n). \quad (1)$$

Данный результат можно найти, например в [5], где получены также существенно более глубокие результаты об остаточном члене асимптотической формулы (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. По всей видимости (1) было известно задолго до работы [5]. Авторы были бы благодарны за информацию о соответствующих работах.

Последовательность Фибоначчи является простейшим примером линейной рекуррентной последовательности. В общем случае удобно рассматривать класс линейных рекуррентных последовательностей $\{T_k\}$, удовлетворяющих следующим условиям [6], [8]:

1. Существуют целые числа $a_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq r-1$) и $a_r > 0$ такие, что при $k \geq 0$ справедливо равенство

$$T_{k+r} = a_1 T_{k+r-1} + \dots + a_k T_r.$$

2. $T_0 = 1$ и

$$T_k \geq a_1 T_{k-1} + \dots + a_k T_0 + 1 \quad \text{при всех } 1 \leq k < r.$$

3. Коэффициенты рекуррентного соотношения удовлетворяют условию Парри [12], т.е.

$$(a_k, a_{k+1}, \dots, a_r) \preceq (a_1, a_2, \dots, a_{r-k+1})$$

при $1 < k \leq r$, где $\preceq$ обозначает лексикографический порядок.

Любое натуральное число n можно представить в виде:

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} t_k T_k, \quad (2)$$

где $t_k \in \mathbb{Z}$, $t_k \geq 0$, причем, коэффициенты t_k подбираются так, что для любого $k \geq 0$ справедливо неравенство

$$\left| n - \sum_{i=k}^{\infty} t_i T_i \right| < T_k.$$

Последнее условие означает, что разложение (2) получается по так называемому жадному алгоритму.

Разложение (2) позволяет ввести величину

$$N_{d,a}^{(T)}(n) = \#\{m < n : \sum_{k=1}^{\infty} t_k(m) \equiv a \pmod{d}\}$$

и задать вопрос о ее асимптотике.

В [6] показано, что

$$N_{2,a}^{(T)}(n) = \frac{n}{2} + O(n^{\mu}) \quad (3)$$

для некоторого $\mu < 1$.

Более того, в [8] показано, что при условии взаимной простоты d и $a_1 + a_2 + \dots + a_d - 1$ имеет место асимптотика

$$N_{d,a}^{(T)}(n) = \frac{n}{d} + O(n^{\mu}) \quad (4)$$

для некоторого $\mu < 1$. Значения μ в (3) и (4) зависят от выбора линейной рекуррентной последовательности, а также от d .

Заметим, что остаточный член в (1) является логарифмическим, а в (3) и (4) – степенным. Поэтому встает естественный вопрос о том, каков правильный порядок этого остаточного члена. В настоящей работе мы делаем первые шаги к ответу на данный вопрос, приводя новые примеры аналога асимптотики (1) с логарифмическим остатком, а также иллюстрируем примерами ситуации, когда логарифмическая оценка остатка не имеет места.

Последовательность чисел Фибоначчи имеет еще одну важную интерпретацию: ее можно рассматривать как последовательность знаменателей подходящих дробей к $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Выберем произвольное иррациональное $\alpha \in [0; 1)$. Пусть $\{q_k\}$ – последовательность неполных частных разложения α в цепную дробь, $\{Q_k\}$ – последовательность знаменателей соответствующих подходящих дробей. Тогда любое натуральное n однозначно представимо в виде [11]

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} z_k Q_k,$$

где $0 \leq z_0 \leq q_1 - 1$, а для $k \geq 1$ $0 \leq z_k \leq q_{k+1}$, причем из $z_k = q_{k+1}$ следует, что $z_{k-1} = 0$. Поэтому можно рассмотреть величину

$$N_{d,a}^{(Q)}(n) = \#\{m < n : \sum_{k=1}^{\infty} z_k(m) \equiv a \pmod{d}\}$$

и поставить вопрос о ее асимптотике. Данная задача по всей видимости является новой. В настоящей работе мы полностью решаем вопрос об асимптотике $N_{d,a}^{(Q)}(n)$ для $d = 2$.

Отметим, что оба рассматриваемых нами класса представлений натуральных чисел – разложения по линейным рекуррентным последовательностям и по знаменателям подходящих дробей естественным образом обобщают разложение Цеккендорфа по числам Фибоначчи. Поэтому их можно называть обобщенными разложениями Цеккендорфа.

Формулировки основных результатов

Пусть X – один из символов F , T или Q . Рассмотрим величину

$$r_{d,a}^{(X)}(n) = N_{d,a}^{(X)}(n) - \frac{n}{d}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{T_k\}$ – линейная рекуррентная последовательность второго порядка, удовлетворяющая условиям 1–3. Тогда

$$r_{2,a}^{(T)}(n) = O(\log n).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{T_k\}$ – линейная рекуррентная последовательность третьего порядка, удовлетворяющая условиям 1–3. Пусть a_1 и a_2 имеют одинаковую четность, а $a_3 = 1$. Тогда

$$r_{2,a}^{(T)}(n) = O(\log n).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{T_k\}$ – линейная рекуррентная последовательность, заданная соотношением $T_k = 4T_{k-1} + 3T_{k-2} + T_{k-3}$ и начальными условиями $T_0 = 1$, $T_1 = 5$, $T_2 = 24$, $T_3 = 112$. Тогда существуют бесконечная последовательность $\{n_k\}$ и числа c, μ , $c > 0$, $0 < \mu < 1$ такие, что

$$|r_{2,a}^{(T)}(n_k)| > cn_k^\mu.$$

При этом

$$r_{2,a}^{(T)}(n) = O(n^\mu \log n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 3 показывает, что в данном случае логарифмическая оценка остатка не может иметь места. Последовательность $\{T_k\}$, рассмотренная в теореме 3, разумеется удовлетворяет условиям 1–3. При этом начальные условия выбраны так, чтобы в условии 2 всегда имело место равенство.

Следующая теорема доказывает существование линейных рекуррентных последовательностей произвольного порядка с логарифмической оценкой остаточного члена.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$T_k = T_{k-1} + \dots + T_0 + 1 \quad \text{при всех } 1 \leq k \leq r$$

и

$$T_{m+r} = T_{m+r-1} + \dots + T_m.$$

Тогда

$$r_{2,a}^{(T)}(n) = O(\log n).$$

Следующая теорема показывает, что для $d > 2$ логарифмическая оценка остаточного члена может не иметь места даже для последовательности Фибоначчи.

ТЕОРЕМА 5. Существуют бесконечная последовательность $\{n_k\}$ и числа c, μ , $c > 0$, $0 < \mu < 1$ такие, что

$$|r_{3,0}^{(F)}(n_k)| > cn_k^\mu.$$

И, наконец, последняя теорема описывает ситуацию для $d = 2$ и разложений по знаменателям подходящих дробей.

ТЕОРЕМА 6. Для любого иррационального α

$$r_{2,a}^{(Q)}(n) = O(\log n).$$

Вспомогательные результаты

Пусть X – по прежнему один из символов F , T или Q , x – один из символов f , t или z . Положим $\varepsilon_{d,a}(n)$ равным 1, если сумма цифр соответствующего разложения n сравнима с a по модулю d и равным $-\frac{1}{d-1}$ в противном случае, то есть

$$\varepsilon_{d,a}(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{k=0}^{\infty} x_k \equiv a \pmod{d}, \\ -\frac{1}{d-1}, & \text{если } \sum_{k=0}^{\infty} x_k \not\equiv a \pmod{d}. \end{cases}$$

ЛЕММА 1. *Имеет место явная формула*

$$N_{d,a}^{(X)}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\varepsilon_{d,a}(k) + \frac{1}{d-1} \right) \cdot \frac{d-1}{d}.$$

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$r_{d,a}^{(X)}(n) = \frac{d-1}{d} S_{d,a}^{(X)}(n),$$

где

$$S_{d,a}^{(X)}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{d,a}(k).$$

Доказательство получается простым вычислением на основе леммы 1 и определения $r_{d,a}^{(X)}(n)$.

Таким образом, доказательство теорем сводится к задаче получения оценок для $S_{d,a}^{(X)}(n)$.

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$\sum_{a=0}^{d-1} S_{d,a}^{(X)}(n) = 0.$$

Доказательство вытекает из определения $S_{d,a}^{(X)}(n)$ и того, что $\sum_{a=0}^{d-1} \varepsilon_{d,a}(n) = 0$ (последнее получается непосредственным вычислением).

В случае $d = 2$ лемма 3 означает, что

$$r_{2,1}^{(X)}(n) = -r_{2,0}^{(X)}(n),$$

то есть теоремы 1–4, 6 достаточно доказать для $a = 0$.

Положим

$$S_1(n) = S_{2,0}^{(T)}(n), \quad S_1^*(n) = S_1(T_n), \quad \varepsilon(k) = \varepsilon_{2,0}(k),$$

$$\chi_2(a) = \begin{cases} 1 & \text{при } a \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } a \text{ четном.} \end{cases}$$

ЛЕММА 4. *При всех натуральных $k \geq r$ справедливо линейное рекуррентное соотношение для $S_1^*(k+1)$:*

$$S_1^*(k+1) = \sum_{s=1}^r (-1)^{A_s} S_1^*(k-s+1) \chi_2(a_s - 1), \quad (5)$$

где $A_s = \sum_{t=1}^{s-2} a_t$.

Доказательство. Пусть

$$A_j^s = \{n : n \in \mathbb{N}, \sum_{t=0}^{s-2} a_t T_{k-t} + j T_{k-s+1} \leq n < \sum_{t=0}^{s-2} a_t T_{k-t} + (j+1) T_{k-s+1}\},$$

где $0 \leq j < a_s$, $1 \leq s \leq d$. Тогда

$$S_1^*(k+1) = \sum_{s=1}^r \sum_{j=0}^{a_s-1} \sum_{n \in A_j^s} \varepsilon(n).$$

Если натуральное число $n \in A_j^s$, то набор коэффициентов t_i в разложении (2) одинаков при всех $i \geq k-s+1$, значит

$$\varepsilon(n) = \varepsilon\left(n - \sum_{t=1}^{s-2} a_t T_{k-t} - j T_{k-s+1}\right) \cdot (-1)^{A_s+j} = \varepsilon(n') \cdot (-1)^{A_s+j},$$

где $0 \leq n' < T_{k-s+1}$, $A_s = \sum_{t=1}^{s-2} a_t$. В таком случае выражение для $S_1^*(k+1)$ приобретает вид

$$\begin{aligned} S_1^*(k+1) &= \sum_{s=1}^r \sum_{j=0}^{a_s-1} \sum_{n'=0}^{T_{k-s+1}-1} \varepsilon(n') \cdot (-1)^{A_s+j} = \\ &= \sum_{s=1}^r (-1)^{A_s} \sum_{j=0}^{a_s-1} (-1)^j \sum_{n'=0}^{T_{k-s+1}-1} \varepsilon(n') = \\ &= \sum_{s=1}^r (-1)^{A_s} \sum_{j=0}^{a_s-1} (-1)^j S_1^*(k-s+1) = \sum_{s=1}^r (-1)^{A_s} S_1^*(k-s+1) \sum_{j=0}^{a_s-1} (-1)^j. \end{aligned}$$

Далее остается воспользоваться соотношением

$$\sum_{j=0}^{a-1} (-1)^j = \chi_2(a). \quad (6)$$

Из теории линейных рекуррентных соотношений немедленно вытекает следующий результат.

ЛЕММА 5. Пусть все корни характеристического уравнения рекуррентного соотношения (5) различны и по модулю равны единице. Тогда

$$S_1^*(n) = O(1).$$

ЛЕММА 6. Для любого натурального n с разложением вида $n = b_1 T_{k_1} + b_2 T_{k_2} + \dots + b_l T_{k_l}$, $b_i \neq 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, l$, справедливо равенство

$$S_1(n) = \sum_{s=1}^l (-1)^{B_{s-1}} S_1^*(k_s) \chi_2(b_s - 1),$$

где $B_s = \sum_{i=1}^s b_i$.

Доказательство. Представим n в виде суммы слагаемых вида $b_i T_{k_i}$:

$$n = b_1 T_{k_1} + b_2 T_{k_2} + \dots + b_l T_{k_l},$$

где $k_i > k_{i+1}$ и $1 \leq b_i \leq \max(a_1, a_2, \dots, a_r)$ при всех i .

Введем множества:

$$B_j^s = \{k : k \in \mathbb{N}, \sum_{t=1}^{s-1} b_t T_{k_t} + j T_{k_s} \leq k < \sum_{t=1}^{s-1} b_t T_{k_t} + (j+1) T_{k_s}\},$$

где $0 \leq j < b_s$, $1 \leq s \leq l$.

В таком случае $S_1(n)$ будет равно

$$S_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon(k) = \sum_{s=1}^l \sum_{j=0}^{b_s-1} \sum_{k \in B_j^s} \varepsilon(k).$$

Если натуральное k принадлежит множеству B_j^s , то набор коэффициентов t_i в разложении (2) перед числами T_{k_i} при всех $k_i \geq k_s$ одинаков, следовательно,

$$\varepsilon(k) = \varepsilon\left(k - \sum_{i=1}^{s-1} b_i T_{k_i} - j T_{k_s}\right) \cdot (-1)^{B_{s-1}+j} = \varepsilon(k'') \cdot (-1)^{B_{s-1}+j},$$

где $B_s = \sum_{i=1}^s b_i$, $0 \leq k'' < T_{k_s}$.

В таком случае

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \sum_{s=1}^l \sum_{j=0}^{b_s-1} \sum_{k''=0}^{T_{k_s}-1} \varepsilon(k'') \cdot (-1)^{B_{s-1}+j} = \\ &= \sum_{s=1}^l (-1)^{B_{s-1}} \sum_{j=0}^{b_s-1} (-1)^j \sum_{k''=0}^{T_{k_s}-1} \varepsilon(k'') = \sum_{s=1}^l (-1)^{B_{s-1}} \sum_{j=0}^{b_s-1} (-1)^j S_1^*(k_s) = \\ &= \sum_{s=1}^l (-1)^{B_{s-1}} S_1^*(k_s) \sum_{j=0}^{b_s-1} (-1)^j, \end{aligned}$$

и остается только воспользоваться соотношением (6).

ЛЕММА 7. Пусть $S_1^*(n) = O(1)$. Тогда

$$S_1(n) = O(\log n),$$

$$r_{2,a}^{(T)}(n) = O(\log n).$$

Доказательство. Исходя из сказанного выше достаточно доказать только первую из оценок. В силу лемм 5, 6 и соотношения (6) получаем, что

$$\begin{aligned} |S_1(n)| &\leq \left| \sum_{s=1}^l (-1)^{B_{s-1}} S_1^*(k_s) \sum_{j=0}^{b_s-1} (-1)^j \right| \leq \sum_{s=1}^l |S_1^*(k_s)| \cdot \left| \sum_{j=0}^{b_s-1} (-1)^j \right| \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^l |S_1^*(k_s)| \leq Cl. \end{aligned}$$

Из условий 1–3 на последовательность $\{T_k\}$ вытекает, что существует $\lambda_1 > 1$ и $C_1 > 0$ такие, что $T_l \sim C_1 \lambda_1^l$. Зная, что $k_l \geq l$ и $n = b_1 T_{k_1} + b_2 T_{k_2} + \dots + b_l T_{k_l}$, получаем, что $T_l \leq T_{k_l} \leq n$ или $C_1 \lambda_1^l \leq n$, и, следовательно, $l = O(\log n)$. Данная оценка и дает утверждение леммы 7.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть все корни характеристического уравнения рекуррентного соотношения (5) различны и по модулю равны единице. Тогда

$$r_{2,a}^{(T)}(n) = O(\log n).$$

Доказательство немедленно вытекает из лемм 5 и 7.

Доказательство теорем 1, 2, 4

В силу леммы 7 и следствия 1 достаточно доказать ограниченность $S_1^*(n)$ или же то, что все корни характеристического уравнения для $S_1^*(n)$ различны.

Пусть $r = 2$. В таком случае утверждение леммы 4 принимает вид

$$S_1^*(n+1) = S_1^*(n) \sum_{j=0}^{a_1-1} (-1)^j + (-1)^{a_1} S_1^*(n-1) \sum_{j=0}^{a_2-1} (-1)^j. \quad (7)$$

Принимая во внимание соотношение (6) найдем вид уравнения (7) при различных значениях a_1 и a_2 .

1) Пусть a_1 и a_2 четные, тогда из уравнения (7) получаем $S_1^*(k+1) = 0$, и, следовательно, $S_1^*(n)$ ограничено.

2) Если a_1 четное, а a_2 нечетное, то уравнение (7) принимает вид: $S_1^*(n+1) = S_1^*(n-1)$. Из этого равенства следует, что $S_1^*(n)$ может принимать не более двух различных значений и, следовательно, ограничено.

3) В том случае, когда a_1 нечетное, а a_2 четное получим уравнение $S_1^*(k+1) = S_1^*(k)$, из которого вытекает, что $S_1^*(k)$ является величиной постоянной и, значит, ограниченной.

4) Если же a_1 и a_2 нечетные, то уравнение (7) становится следующим: $S_1^*(n+1) = S_1^*(n) - S_1^*(n-1)$. Характеристическое уравнение, соответствующее данному равенству имеет вид $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ таковы, что $|\lambda_{1,2}| = 1$.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Для $r = 3$ и $a_3 = 1$ воспользовавшись леммой 4, получим рекуррентное соотношение для $S_1^*(k)$

$$S_1^*(k+1) = S_1^*(k) \sum_{j=0}^{a_1-1} (-1)^j + (-1)^{a_1} S_1^*(k-1) \sum_{j=0}^{a_2-1} (-1)^j + (-1)^{a_1+a_2} S_1^*(k-2).$$

Если a_1 и a_2 четные, то выражение для $S_1^*(k+1)$ принимает вид $S_1^*(k+1) - S_1^*(k-2) = 0$. Характеристическое уравнение для данного равенства $\lambda^3 - 1 = 0$ имеет три корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Все корни таковы, что $|\lambda_{1,2,3}| = 1$.

Если же a_1 и a_2 нечетные, то справедливо равенство $S_1^*(k+1) - S_1^*(k) + S_1^*(k-1) - S_1^*(k-2) = 0$. Корнями характеристического уравнения $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ являются: действительное число $\lambda_1 = 1$ и два комплексных корня $\lambda_{1,2} = \pm i$. Все корни по модулю вновь равны единице.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Пусть теперь

$$T_k = T_{k-1} + \dots + T_0 + 1 \quad \text{при всех } 1 \leq k \leq r$$

и

$$T_{m+r} = T_{m+r-1} + \dots + T_m.$$

Тогда

$$S_1^*(k+1) = S_1^*(k) - S_1^*(k-1) + S_1^*(k-2) + \dots + (-1)^{r-1} S_1^*(k-r+1).$$

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$\lambda^r - \lambda^{r-1} + \lambda^{r-2} - \lambda^{r-3} + \dots + (-1)^r = 0.$$

Домножим обе части этого выражения на $\lambda + 1$ и получим

$$\lambda^{r+1} + (-1)^r = 0.$$

Все корни данного уравнения различны и по модулю равны 1. Поскольку домножение на множитель $\lambda + 1$ только добавило корень -1 , то все корни исходного уравнения также различны и по модулю равны 1. Таким образом, теорема 4 полностью доказана.

Доказательство теоремы 3

Вначале заметим, что характеристическое уравнение для последовательности $\{T_k\}$ из теоремы 3 имеет вид

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 \approx 4,69$, $\lambda_{2,3} \approx -0,34 \pm 0,31i$, причем $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_{2,3}| < 1$. Поэтому имеет место асимптотика

$$T_k = c_1 \lambda_1^k + o(1) \quad (8)$$

с некоторым $c_1 \neq 0$.

Далее, лемма 4 дает нам

$$S_1^*(k+1) = S_1^*(k-1) - S_1^*(k-2).$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda + 1 = 0$$

имеет корни $\lambda'_1 \approx -1,32$, $\lambda'_{2,3} \approx 0,66 \pm 0,56i$, причем $|\lambda'_1| > 1$, $|\lambda'_{2,3}| < 1$ и $|\lambda'_1| < |\lambda_1|$. Поэтому

$$S_1^*(k) = c'_1 \lambda_1'^k + c'_2 \lambda_2'^k + c'_3 \lambda_3'^k.$$

Непосредственное вычисление показывает, что начальные условия имеют вид $S_1^*(1) = 1$, $S_1^*(2) = 1$, $S_1^*(3) = 0$, $S_1^*(4) = -1$. Вычисление в системе компьютерной алгебры Maple приводят к явной формуле

$$S_1^*(k) = \sum_{\zeta: \zeta^3 - \zeta^2 + 1 = 0} -\frac{(-\zeta^2 + 2\zeta + 2)\zeta^{-k}}{(3\zeta^2 - 2\zeta)\zeta},$$

показывающей, что все c'_i отличны от нуля. Поэтому

$$S_1^*(k) = c'_1 \lambda_1'^k + o(1)$$

и

$$S_1(T_k) = c'_1 \lambda_1'^k + o(1).$$

С учетом (8) последнее равенство переписывается в виде

$$S_1(T_k) \sim c'_1 T_k^\mu, \quad (9)$$

где

$$\mu = \log_{\lambda_1} \lambda'_1.$$

Так как $|\lambda'_1| < |\lambda_1|$, $\mu < 1$. В частности,

$$S_1(T_k) > c T_k^\mu$$

с некоторым $c > 0$, что и доказывает первую часть теоремы 3 с $n_k = T_k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Доказать, что $c'_1 \neq 0$ можно было бы и без нахождения явной формулы для $S_1^*(k)$. Действительно, из $c'_1 = 0$ и $|\lambda'_{2,3}| < 1$ вытекает ограниченность последовательности $\{S_1^*(k)\}$. При этом $\{S_1^*(k)\}$ представляет собой линейную рекуррентную последовательность с целыми коэффициентами и целыми начальными условиями. Известно [16], что для таких последовательностей ограниченность влечет за собой периодичность. С другой стороны, периодичность линейной рекуррентной последовательности означает, что все корни ее характеристического уравнения являются корнями из единицы, что приводит к противоречию и показывает, что $c'_1 \neq 0$.

Для доказательства второй части теоремы 3 заметим, что из доказательства леммы 7 видно, что разложение $n = b_1 T_{k_1} + b_2 T_{k_2} + \dots + b_l T_{k_l}$, $b_i \neq 0$ вытекает оценка

$$|S_1(n)| \leq \sum_{s=1}^l |S_1^*(k_s)| = \sum_{s=1}^l |S_1(T_{k_s})|.$$

С учетом (9),

$$|S_1(n)| \leq c_2 \sum_{s=1}^l T_{k_s}^\mu$$

с некоторым $c_2 > 0$. Поскольку $T_{k_s} \leq n$, последняя оценка переписывается в виде

$$|S_1(n)| \leq c_2 n^\mu l.$$

При этом из (8) вытекает, что $l = O(\log n)$, что, в сочетании с предыдущей оценкой и дает доказательство второй части теоремы 3.

Доказательство теоремы 5

Обозначим $\bar{S}_{3,a}(n) = S_{3,a}^{(F)}(F_n)$. Для доказательства теоремы 5 достаточно показать, что существует бесконечная последовательность $\{n_k\}$ для которой

$$|\bar{S}_{3,0}(n)| > c F_{n_k}^\mu.$$

В начале получим рекуррентные соотношения для $\bar{S}_{3,a}(n)$.

ЛЕММА 8. При всех натуральных $n \geq 2$ справедливо соотношение для $\bar{S}_{d,a}(n+1)$:

$$\bar{S}_{d,a}(n+1) = \bar{S}_{d,a}(n) + \bar{S}_{d,a-1}(n-1) \quad \text{при } a \neq 0,$$

$$\bar{S}_{d,0}(n+1) = \bar{S}_{d,0}(n) + \bar{S}_{d,d-1}(n-1) \quad \text{при } a = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распишем $\bar{S}_{d,a}(n+1)$ по определению:

$$\bar{S}_{d,a}(n+1) = \sum_{k=0}^{F_{n+1}-1} \varepsilon_{d,a}(k) = \bar{S}_{d,a}(n) + \sum_{k=F_n}^{F_n+F_{n-1}-1} \varepsilon_{d,a}(k).$$

Пусть $k - F_n = k'$, тогда $k = k' + F_n$, где $0 \leq k' < F_{n-1}$, и справедливо равенство

$$\sum_{k=F_n}^{F_n+F_{n-1}-1} \varepsilon_{d,a}(k) = \sum_{k'=0}^{F_{n-1}-1} \varepsilon_{d,a}(k' + F_n).$$

Далее остается заметить, что

$$\begin{aligned}\varepsilon_{d,a}(k' + F_n) &= \varepsilon_{d,a-1}(k') \quad \text{при } a \neq 0; \\ \varepsilon_{d,0}(k' + F_n) &= \varepsilon_{d,d-1}(k') \quad \text{при } a = 0.\end{aligned}$$

Леммы 3 и 8 дают набор из 4 линейных рекуррентных соотношений для последовательностей $\bar{S}_{3,a}(n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Эти соотношения не являются независимыми.

Исключение $\bar{S}_{3,1}(n)$ и $\bar{S}_{3,2}(n)$ приводит к линейному рекуррентному соотношению

$$\bar{S}_{3,0}(n) = 2\bar{S}_{3,0}(n-1) - 2\bar{S}_{3,0}(n-2) + \bar{S}_{3,0}(n-3) - \bar{S}_{3,0}(n-4).$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Данное уравнение имеет две пары комплексных корней $\lambda_{1,2} \approx 1,07 \pm 0,76i$ и $\lambda_{3,4} \approx -0,07 \pm 0,76i$. Очевидно, что $|\lambda_{1,2}| > 1$, а $|\lambda_{3,4}| < 1$. Непосредственное вычисление дает начальные условия $\bar{S}_{3,0}(1) = 1$, $\bar{S}_{3,0}(2) = \frac{1}{2}$, $\bar{S}_{3,0}(3) = 0$, $\bar{S}_{3,0}(4) = -1$. Далее,

$$\bar{S}_{3,0}(n) = c'_1 \lambda_1^n + c'_2 \lambda_2^n + c'_3 \lambda_3^n + c'_4 \lambda_4^n.$$

Прямое вычисление в системе компьютерной алгебры Maple показывает, что все c'_i отличны от нуля. Кроме того, учитывая, что $|\lambda_{3,4}| < 1$ можно записать

$$\bar{S}_{3,0}(n) = c'_1 \lambda_1^n + c'_2 \lambda_2^n + o(1).$$

Поэтому достаточно доказать, что существует бесконечная последовательность $\{n_k\}$ для которой

$$c'_1 \lambda_1^{n_k} + c'_2 \lambda_2^{n_k} > c F_{n_k}^\mu.$$

Полагая $\rho = |\lambda_{1,2}|$ и $\varphi = \arg \lambda_1$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\rho^{n_k} (c'_1 \sin n_k \varphi + c'_2 \cos n_k \varphi) > c F_{n_k}^\mu.$$

Так как $F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$, выбирая $\mu = \log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \rho$, мы можем свести задачу к доказательству существования бесконечной последовательности $\{n_k\}$ для которой

$$c'_1 \sin n_k \varphi + c'_2 \cos n_k \varphi > c$$

с некоторой $c > 0$. Последнее неравенство можно свести к неравенству

$$\sin(n_k \varphi + \theta) > c' > 0$$

с некоторым эффективно вычислимым θ или же к

$$\sin 2\pi \left\{ \frac{n_k \varphi + \theta}{2\pi} \right\} > c',$$

где фигурные скобки означают дробную часть числа.

Если $\frac{\varphi}{2\pi}$ – иррационально, то последовательность $\left\{ \frac{n\varphi + \theta}{2\pi} \right\}$ равномерно распределена по модулю 1 и можно выбрать бесконечную последовательность $\{n_k\}$ для которой $\left\{ \frac{n_k \varphi + \theta}{2\pi} \right\} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ и которая дает нам требуемый результат с $c' = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Предположим теперь, что $\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{a}{b}$ – рационально. Поскольку φ – аргумент кубической иррациональности, можно утверждать, что $b > 4$. При этом можно выбрать k_a , $1 \leq k_a \leq b-1$ таким образом, что $\left\{ \frac{k_a \varphi + \theta}{2\pi} \right\} = \left\{ \frac{k_a a}{b} + \theta \right\} \in (0; \frac{\pi}{2})$. Выбирая $n_k = kb + k_a$, получаем требуемый результат с $c' = \sin \left\{ \frac{k_a a}{b} + \theta \right\}$.

Заключение

В работе начато исследование аналога задачи Гельфонда о распределении сумм цифр числа по арифметическим прогрессиям в случае, когда обычная b -ичная система счисления заменяется на разложение натурального числа по линейной рекуррентной последовательности или же по последовательности знаменателей подходящих дробей к некоторому иррациональному числу.

Особое внимание уделяется остаточному члену, описывающему отклонение от равномерности распределения по прогрессиям. Показано, что во многих случаях имеет место логарифмическая оценка остатка и даны некоторые эффективные достаточные условия для такой оценки. С другой стороны приведены примеры ситуаций, в которых доказано, что логарифмическая оценка остатка не имеет места.

Настоящая работа может рассматриваться только как начало исследований в данной области и порождает множество открытых вопросов. Главный из них – найти точный порядок роста $r_{d,a}^{(X)}(n)$ в каждом случае. Эта проблема представляется нам чрезвычайно трудной. В связи с этим приведем ряд более конкретных проблем, решение которых может представлять интерес.

1. Верно ли утверждение, обратное к следствию 1?

ЗАМЕЧАНИЕ 6. *Можно показать, что верно утверждение, обратное к лемме 5, но этого недостаточно для ответа на заданный вопрос.*

2. Можно ли улучшить логарифмическую оценку для $r_{2,a}^{(T)}(n)$ и какой-либо линейной рекуррентной последовательности?

ЗАМЕЧАНИЕ 7. *В [5] без доказательства и без каких-либо ссылок на литературу сформулировано утверждение о неулучшаемости логарифмической оценки для $r_{2,a}^{(F)}(n)$.*

3. Можно ли ликвидировать зазор между верхней и нижней оценкой в теореме 3?

4. Возможна ли логарифмическая оценка для $r_{d,a}^{(X)}(n)$ и $d > 2$?

5. Получить нетривиальную оценку для $r_{d,a}^{(Q)}(n)$ и $d > 2$.

6. Получить нетривиальные нижние оценки для $r_{d,a}^{(X)}(n)$.

7. Можно ли убрать условие взаимной простоты d и $a_1 + a_2 + \dots + a_d - 1$ из асимптотики (4)?

ЗАМЕЧАНИЕ 8. *Настоящая работа, а также [6] показывают, что для $d = 2$ ответ положительный.*

Работа Гельфонда породила целый ряд работ, в которых изучались различные свойства натуральных чисел, у которых сумма цифр b -ичного разложения принадлежит заданной арифметической прогрессии ([10], [14], [15], [17]–[19] и т.д.). Представляется крайне интересным обобщение этих результатов на разложения, рассмотренные в настоящей работе. В частности, отметим две задачи:

1) Изучить совместное распределение сумм цифр разложений чисел n и $kn + l$ по линейным рекуррентным последовательностям (или по знаменателям подходящих дробей) по арифметическим прогрессиям. Первый результат в этом направлении имеется в [13].

2) Верно ли, что существует бесконечно много простых чисел, у которых суммы цифр разложений по линейным рекуррентным последовательностям (или по знаменателям подходящих дробей) принадлежат заданной арифметической прогрессии? Наилучший результат в данном направлении имеется в препринте [9].

Отметим также, что существует множество других интересных систем счисления, в которых можно изучать аналоги рассматриваемых задач. Наибольший интерес на наш взгляд

представляют факториальная система счисления ($n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k k!$, $1 \leq f_k \leq k$) и системы счисления Дюмонта-Томаса [1], [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dumont J.-M., Thomas A. Systemes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions // Theoretical computer science. 1989. Vol. 65, №2. P. 153-169.
2. Dumont J.-M., Thomas A. Gaussian asymptotic properties of the sum-of-digits function // J. Number Theory. 1997. Vol. 62. P. 19–38.
3. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données // Acta Aithmetica. 1968. Vol. 13. P. 259-265.
4. Zeckendorf E. Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas // Bull. Soc. R. Sci. Liege. 1972. Vol. 41. P. 179-182.
5. Drmota M., Skalba M. The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function // Manuscripta mathematica. 2000. Vol. 101. P. 361–383.
6. Drmota M., Gajdosik J. The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations // Fibonacci Quarterly. 1998. Vol. 36, №1. P. 3-19.
7. Khinchin A. Ya. Zur metrischen Kettenbruchtheorie // Compositio Matzematica. 1936. Vol. 3, №2. P. 275–285.
8. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences // Mathematica Slovaca. 2003. Vol. 53, №1. P. 1-20.
9. Madritsch M. G., Thuswaldner J. M. The level of distribution of the sum-of-digits function of linear recurrence number systems // Cornell University. 2019. Arxiv.1909.08499.
10. Mauduit C., Rivat J. Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers // Annals of Mathematics. 2010. Vol. 171, №3. P. 1591-1646.
11. Ostrowski V. A. Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen // Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. 1922. Vol. 1. P. 77-98.
12. Parry W. On the β -expansion of real numbers // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1960. Vol. 11. P. 401-416.
13. Shutov A. V. On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers // Fibonacci quarterly. 2020 (accepted)
14. Карацуба А. А., Новак Б. Арифметические задачи с числами специального вида // Матем. заметки. 1999. Т. 66, №2. С. 314–317.
15. Науменко А. П. О числе решений некоторых диофантовых уравнений в натуральных числах с заданными свойствами двоичных разложений // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, №1. С. 140–157.
16. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Т. 1 М.: Мир, 1990.
17. Эминян К. М. Об одной бинарной задаче // Матем. заметки. 1996. Т. 60, №4. С. 634–637.

18. Эминян К. М. О представлении чисел с заданными свойствами двоичного разложения суммами двух квадратов // Тр. МИАН. 1994. Т. 207. М.: Наука. С. 377–382.
19. Эминян К. М. О средних значениях функции $\tau_k(n)$ в некоторых последовательностях натуральных чисел // Матем. заметки. 2011. Т. 90, №3. С. 439–447.

REFERENCES

1. Dumont, J.-M. & Thomas, A. 1989, “Systemes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions“, *Theoretical computer science*, vol. 65, no. 2, pp. 153–169. doi: 10.1016/0304-3975(89)90041-8.
2. Dumont, J.-M. & Thomas, A. 1997, “Gaussian asymptotic properties of the sum-of-digits function“, *J. Number Theory*, vol. 62, pp. 19–38. doi: 10.1006/jnth.1997.2044.
3. Gelfond, A. O. 1968, “Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données“, *Acta Aithmetica*, vol. 13, pp. 259–265. doi: 10.4064/aa-13-3-259-265.
4. Zeckendorf, E. 1972, “Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas“, *Bull. Soc. R. Sci. Liege*, vol. 41, pp. 179–182.
5. Drmota, M. & Skalba, M. 2000, “The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function“, *Manuscripta mathematica*, vol. 101, pp. 361–383. doi: 10.1007/s002290050221.
6. Drmota, M. & Gajdosik J. 1998, “The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations“, *Fibonacci Quarterly*, vol. 36, no. 1, pp. 3–19.
7. Khinchin, A. Ya. 1936, “Zur metrischen Kettenbruchtheorie“, *Compositio Matematica*, vol. 3, no. 2, pp. 275–285.
8. Lamberger, M. & Thuswaldner, J. W. 2003, “Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences“, *Mathematica Slovaca*, vol. 53, no. 1, pp. 1–20.
9. Madritsch, M. G. & Thuswaldner, J. M. 2019, “The level of distribution of the sum-of-digits function of linear recurrence number systems“, *Cornell University*, arxiv. 1909.08499.
10. Mauduit, C. & Rivat, J. 2010, “Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers“, *Annals of Mathematics*, vol. 171, no. 3, pp. 1591–1646.
11. Ostrowski, V. A. 1922, “Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen“, *Abh. Math. Semin. Hamburg Univ.*, vol. 1, pp. 77–98. doi: 10.1007/BF02940581.
12. Parry, W. 1960, “On the β -expansion of real numbers“, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, vol. 11, pp. 401–416. doi: 10.1007/BF02020954.
13. Shutov, A. V. 2020, “On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers“, *Fibonacci quarterly* (accepted).
14. Karatsubaa, A. A. & Novak, B. 1999, “Arithmetical problems with numbers of special type“, *Mathematical Notes*, vol. 66, no. 2, pp. 251–253. doi: 10.1007/FBF02674886.
15. Naumenko, A. P. 2011, “On the number of solutions of some Diophantine equations in positive integers with given properties of binary expansions“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 12, no. 1, pp. 140–157.

16. Stanley, R. 1986, “Enumerative combinatorics“, vol. 1, Monterey: Wadsworth.
17. Eminyan, K. M. 1996, “A binary problem“, *Mathematical Notes*, vol. 60, no. 4, pp. 478–481. doi: 10.1007/FBF02305438.
18. Eminyan, K. M. 1995, “On the representation of numbers with given properties of binary expansion by sums of two squares“, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 347–351.
19. Eminyan, K. M. 2011, “On the Mean Values of the Function $\tau_k(n)$ in Sequences of Natural Numbers“, *Mathematical Notes*, vol. 90, no. 3, pp. 439–447. doi: 10.1134/FS0001434611090124.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 518.865

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-121-134

Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея — Касса — Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности¹

А. И. Козко, Л. М. Лузина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Козко Артем Иванович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Лузина Любовь Михайловна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).

e-mail: lluzhina@gmail.com

Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуется полная полезность экономической деятельности. В случае производственной функции Кобба-Дугласа и экономического ресурса $K(t) = K_0 e^{-\lambda t}$ доказывается, что показатель экспоненты λ , доставляющий максимум полной полезности, находится в определенном интервале.

Ключевые слова: математическая модель, задача Рамсея — Касса — Купманса, конкурентные домохозяйства, максимизация полной полезности.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

А. И. Козко, Л. М. Лузина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея — Касса — Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 121–134.

¹Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00332-а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 518.865

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-121-134

**Localization of the indicator optimal exponent
of the Ramsey–Kass–Koopmans problem tending to infinity
of the power utility function**

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow center of fundamental and applied mathematics, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Luzhina Lyubov Mihailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: lluzhina@gmail.com

Popov Anton Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Chirskii Vladimir Grigorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The full utility of economic activity is investigated in article. In the case of the Cobb–Dougllass production function and the economic resource $K(t) = K_0 e^{-\lambda t}$, it is proved that the exponent of λ that delivers the maximum of total utility is in a certain interval.

Keywords: mathematical model, Ramsey–Kass–Koopmans problem, competitive households, maximizing total utility.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2021, “Localization of the indicator optimal exponent of the Ramsey–Kass–Koopmans problem tending to infinity of the power utility function”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 121–134.

Введение и основной результат

Задача Рамсея — Касса — Купманса (см. [1], [2], [8]) заключается в максимизации интеграла

$$P = \int_0^{+\infty} U \left(f(K(t)) - \dot{K}(t) \right) e^{-\rho t} dt. \quad (1)$$

Точная верхняя грань интегралов (1) берется по всем не возрастающим на луче $[0; +\infty)$ функциям $K \in C^1[0; +\infty)$, удовлетворяющим условиям (число $K_0 > 0$ задано)

$$K(0) = K_0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} K(t) = 0. \quad (2)$$

Такая задача ставится при исследовании эффективности различного рода экономических моделей, где в качестве U (функции полезности) обычно рассматривают

$$U(C) = U_\theta(C) = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \quad C > 0, \quad \theta > 0. \quad (3)$$

В "особом" случае $\theta = 1$ функция полезности является логарифмической:

$$U_1(C) = \lim_{\theta \rightarrow 1} U_\theta(C) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C^x - 1}{x} = \ln C. \quad (4)$$

Все функции (3) возрастают на луче $0 < C < +\infty$, но стремятся к $+\infty$ при $C \rightarrow +\infty$ только при $0 < \theta \leq 1$. В исследованиях по этой тематике рассматривались всевозможные значения параметра θ : значения $\theta \in (0; 1)$, $\theta = 1$ и $\theta > 1$ брались в [7]-[12], [16] в [13] фигурировала функция (4). Здесь мы уделим внимание значениям $0 < \theta \leq 1$, особому случаю $\theta = 1$ была посвящена наша статья [3].

Отметим, что авторами был разобран аналог поставленной модели в случае конечного отрезка [5], [6] (интегрирование в (1) ведётся по конечному отрезку).

Интеграл (1) в рассматриваемых моделях выражает полную полезность экономической деятельности. Функция $K(t)$ интерпретируется как экономический ресурс (капитал) в момент времени t . В наиболее простых моделях считается, что происходит непрерывное вложение экономического ресурса в производство и поэтому $K(t)$ — убывающая функция. Функция $f(K)$ выражает зависимость производства продукции от величины капитала. Обычно согласно Коббу и Дугласу (историю этой производственной функции можно посмотреть в [14]) рассматривают степенную зависимость

$$f(K) = aK^\alpha, \quad a > 0, \quad 0.5 \leq \alpha < 1. \quad (5)$$

Производственная функция (5) с показателем $\alpha < 0.5$ делает экономическую модель заведомо неэффективной. Впрочем, значения $\alpha \in [0.5; 0.7]$ также представляют, в основном, теоретический интерес. Наиболее востребованы в приложениях значения $\alpha \in [0.72; 0.96]$, а чаще всего берут $\alpha = 0.75$ (см. [8]). В работе [15] было замечено, что, например, при $\alpha = 0.3$ модель Рамсея — Касса — Купманса не представляет интереса.

Число ρ называется ставкой временного предпочтения. Обычно (см. [8]) этот параметр лежит в границах $\rho \in (0; 0.025]$.

Задача максимизации интеграла (1) вкладывается в общую схему поиска экстремалей $K(t)$ интеграла

$$\int_0^T F(t, K(t), \dot{K}(t)) dt, \quad (6)$$

удовлетворяющих граничным условиям $K(0) = K_0$, $K(T) = K_1$, где F — произвольная гладкая функция трех переменных. В нашем случае

$$F(t, K(t), \dot{K}(t)) = U(f(K) - \dot{K})e^{-\rho t}. \quad (7)$$

Если не накладывать на функцию $K(t)$ дополнительных ограничений (таким ограничением в исследуемой модели является неравенство $\dot{K}(t) \leq 0$), то экстремали интеграла (6) являются решениями уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{K}} \right),$$

сводящегося к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции $K(t)$. Для зависимости (7) мы выписали соответствующие уравнения в [3], но получившееся уравнение даже в этом случае, когда функции U и f имеют максимально простой вид (3)–(5), не решается в квадратурах. Ещё сложнее выглядит система уравнений, из которой находится $K(t)$, получаемая на основе принципа максимума Понтрягина и учитывающая ограничение $\dot{K}(t) \leq 0$. В то же время, в практической деятельности достаточно найти режим вложения экономического ресурса $K(t)$ пусть не оптимальный, но достаточно близкий к оптимальному, который был бы максимально простой функцией времени. Наиболее простыми убывающими функциями, удовлетворяющими условия (2) являются экспоненты

$$K(t) = K_0 e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0. \quad (8)$$

В этой работе мы исследуем, какой из показателей λ дает максимальное значение интеграла полной полезности (1), когда в качестве $K(t)$ берутся только функции (8), а функция полезности U задана формулой (3), в которой мы рассматриваем значения $\theta \in (0; 1)$. Подставив в интеграл (1) функцию (8) и её производную

$$\dot{K}(t) = -\lambda K_0 e^{-\lambda t},$$

мы приходим к задаче максимизации интеграла

$$P_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty} U_\theta(aK_0^\alpha e^{-\alpha\lambda t} + \lambda K_0 e^{-\lambda t}) e^{-\rho t} dt \quad (9)$$

на действительной полуоси $0 \leq \lambda < +\infty$. В предыдущей нашей работе [3] мы рассмотрели "особое" значение $\theta = 1$. В предположении, что начальный экономический ресурс K_0 является "достаточно большим", а именно, величина

$$\varepsilon = aK_0^{\alpha-1}\rho^{-1}$$

мала (нам хватило неравенства $\varepsilon \leq 1/3$), мы получили следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. (см. теорему 2 из [3]). Если $1/2 \leq \alpha < 1$, постоянные a , ρ , K_0 таковы, что $\varepsilon \leq 1/3$, то оптимальный показатель λ экспоненты (8) в задаче максимизации на луче $0 \leq \lambda < +\infty$ интеграла

$$\int_0^{+\infty} \ln(aK_0^\alpha e^{-\alpha\lambda t} + \lambda K_0 e^{-\lambda t}) e^{-\rho t} dt$$

существует, единствен и лежит на интервале $((1 - \varepsilon)\rho, \rho)$.

Здесь мы доказываем аналог теоремы 1 для произвольных значений параметра $\theta \in (0; 1)$, который усиливает её результат, позволяя рассматривать произвольное значение $\theta \in (0; 1)$. Вместе с тем, здесь не выясняется вопрос единственности оптимального показателя. Однако ввиду наибольшего разброса получаемых значений величины λ , которая может быть оптимальной в рассматриваемой задаче, вопрос единственности в приложениях не имеет решающего значения.

Основным результатом статьи являются следующая теорема. В ней мы рассматриваем параметр α , определяющий производственную функцию Кобба – Дугласа (5), удовлетворяющий ограничению $2/3 \leq \alpha < 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\theta \in (0; 1)$. Тогда при условии $\varepsilon \leq \alpha$ показатель λ экспоненты (8), доставляющий максимум на полуоси $0 \leq \lambda < +\infty$ интеграла (9), лежит в интервале

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \frac{\rho}{\theta} < \lambda < \frac{\rho}{\theta}.$$

Скажем несколько слов о структуре статьи. В §2 мы выводим интегральное представление производной по переменной λ функции полной полезности (9). Затем мы доказываем две леммы, дающие возможность определить знак интеграла от специальным образом устроенной функции с одной переменной знака. В §3 и §4 мы доказываем более детальные, нежели теорема 2, утверждения о монотонности функции полной полезности $P_\theta(\lambda)$, из которых следует теорема 2. В заключительном параграфе мы подводим итог нашему исследованию и намечаем перспективы дальнейших исследований в данном направлении.

Вспомогательные утверждения

Запишем интеграл, которым выражается функция (9) в более краткой форме, введя функцию двух переменных

$$\begin{aligned} C(t, \lambda) &= aK_0^\alpha e^{-\alpha\lambda t} + \lambda K_0 e^{-\lambda t} : \\ P_\theta(\lambda) &= \int_0^{+\infty} U_\theta(C(t, \lambda)) e^{-\rho t} dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно убедиться в том, что на множестве

$$\{(t, \lambda) \mid 0 \leq t < +\infty, \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_0\} \quad (11)$$

функция $C(t, \lambda)$ является положительной и ограниченной, каково бы ни было число λ_0 . Поэтому функция $U_\theta(C(t, \lambda))$ при любом $\theta \in (0; 1)$ также является ограниченной на любом множестве вида (11). Отсюда заключаем, что ввиду наличия в подынтегральной функции сомножителя $e^{-\rho t}$, интеграл (10) равномерно сходится по λ на любом отрезке $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, а значит, представляет собой непрерывную функцию переменной λ на полуоси $0 \leq \lambda < +\infty$. Итак, мы доказали непрерывность $P_\theta(\lambda)$ на луче $[0; +\infty)$. Теперь докажем непрерывную дифференцируемость этой функции. Согласно известной теореме о дифференцируемости интеграла по параметру для этого достаточно непрерывной дифференцируемости по λ подынтегральной функции и равномерной сходимости на любом отрезке $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ интеграла от частной производной подынтегральной функции по переменной λ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} U_\theta(C(t, \lambda)) &= U'_\theta(C(t, \lambda)) \frac{\partial C}{\partial \lambda} = C^{-\theta}(t, \lambda) \frac{\partial C}{\partial \lambda}(t, \lambda) = \\ &= \frac{K_0 e^{-\lambda t} - \lambda t K_0 e^{-\lambda t} - a K_0^\alpha \alpha t e^{-\alpha \lambda t}}{(a K_0^\alpha e^{-\alpha \lambda t} + \lambda K_0 e^{-\lambda t})^\theta} = \frac{1 - \lambda t - a K_0^{\alpha-1} \alpha t e^{(1-\alpha)\lambda t}}{K_0^{\theta-1} e^{\lambda t} (a K_0^{\alpha-1} e^{-\alpha \lambda t} + \lambda e^{-\lambda t})^\theta}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись обозначениями

$$\varepsilon = a K_0^{\alpha-1} \rho^{-1}, \quad \beta = 1 - \alpha,$$

окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} U_\theta(C(t, \lambda)) = K_0^{1-\theta} \frac{1 - \lambda t - \alpha \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}}{(\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t})^\theta} \cdot e^{-\lambda(1-\theta)t}. \quad (12)$$

Ниже понадобится еще одна форма записи частной производной по λ функции $U_\theta(C(t, \lambda))$, получающаяся тождественным преобразованием правой части (12):

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} U_\theta(C(t, \lambda)) = K_0^{1-\theta} (A_1(t, \lambda) - A_2(t, \lambda)) \cdot e^{-\lambda(1-\theta)t}, \quad (13)$$

где

$$A_1(t, \lambda) = \frac{1 + \beta \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}}{(\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t})^\theta}, \quad A_2(t, \lambda) = t(\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t})^{1-\theta}. \quad (14)$$

Поскольку

$$\frac{1 + \beta \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}}{\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t}} < \frac{1}{\lambda + \varepsilon \rho} + \beta t,$$

то верна оценка сверху

$$A_1(t, \lambda) < \left(\frac{1}{\lambda + \varepsilon \rho} + \beta t \right) (\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t})^{1-\theta}. \quad (15)$$

Из (13)–(15) выводим двустороннюю оценку

$$-t(\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t})^{1-\theta} e^{-\lambda(1-\theta)t} < K_0^{\theta-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} U_\theta(C(t, \lambda)) < \left(\frac{1}{\lambda + \varepsilon \rho} + \beta t \right) (\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t})^{1-\theta} e^{-\lambda(1-\theta)t}. \quad (16)$$

Отсюда заключаем, что в доказательстве тождества

$$P'_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U_\theta(C(t, \lambda))) e^{-\rho t} dt \quad (17)$$

достаточно установить равномерную сходимость интеграла (17) на любом отрезке $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$. Для этого, в свою очередь (вследствие интегрируемости на полуоси $(1+t)e^{-\rho t}$), достаточно проверить ограниченность функции

$$(\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t})^{1-\theta} e^{-\lambda(1-\theta)t} \quad (18)$$

на множестве (11), каково бы ни было число $\lambda_0 > 0$. Ввиду неравенства $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ справедливого при любых $a \geq 0$, $b \geq 0$, $p \in [0; 1]$, функция (18) не превосходит

$$\begin{aligned} (\lambda^{1-\theta} + (\varepsilon \rho)^{1-\theta} e^{\lambda \beta(1-\theta)t}) e^{-\lambda(1-\theta)t} &= \lambda^{1-\theta} e^{-\lambda(1-\theta)t} + (\varepsilon \rho)^{1-\theta} e^{-\lambda \alpha(1-\theta)t} \leq \\ &\leq \lambda^{1-\theta} + (\varepsilon \rho)^{1-\theta} < \lambda + \varepsilon \rho \quad \forall \theta \in (0; 1). \end{aligned}$$

Ограниченность функции (18) на любом множестве вида (11) доказана, а значит, по признаку Вейерштрасса интеграл (17) сходится равномерно на любом отрезке значений λ , лежащем на положительной полуоси. Тем самым, доказана справедливость интегрального представления (17) производной функции полной полезности (9), а частная производная по λ , стоящая под знаком интеграла, может быть записана в одной из двух форм: (12) или (13)–(14). В дальнейшем потребуются леммы, дающие возможность выяснить знак интеграла от произведения двух функций одна из которых положительна и монотонна, а другая один раз меняет знак с плюса на минус.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{F} \in L(0; +\infty)$, $t_0 > 0$,

$$\mathcal{F}(t) > 0 \quad \text{при } 0 < t < t_0, \quad \mathcal{F}(t) < 0 \quad \text{при } t > 0. \quad (19)$$

Пусть, затем, функция φ положительна и не возрастает на луче $[0; +\infty)$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}(t) \varphi(t) dt \geq \varphi(t_0) \int_0^{+\infty} \mathcal{F}(t) dt. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (19), а также положительности и невозрастания функции φ верно неравенство $\mathcal{F}(t) \varphi(t) \geq \mathcal{F}(t) \varphi(t_0)$ при любом $t \in (0; +\infty)$ (оно проверяется отдельно на интервале $0 < t < t_0$, в точке $t = t_0$ и на луче $t_0 < t < +\infty$). Проинтегрировав это неравенство, получаем (20). $\square$

ЛЕММА 2. Пусть функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям леммы 1, а положительная функция φ , напротив, неубывает на луче $[0; +\infty)$, и произведение $\mathcal{F}\varphi$ интегрируемо на $(0; +\infty)$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}(t)\varphi(t) dt \leq \varphi(t_0) \int_0^{+\infty} \mathcal{F}(t) dt. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится так же, как и в лемме 1: здесь верно неравенство $\mathcal{F}(t)\varphi(t) \leq \mathcal{F}(t)\varphi(t_0)$, проинтегрировав которое, получаем (21). $\square$

Промежуток возрастания функции полной полезности

ТЕОРЕМА 3. При условии $\varepsilon \leq \alpha$ функция полной полезности (9) возрастает на промежутке $0 \leq \lambda \leq (1 - \varepsilon/\alpha)\rho/\theta$, имея на нём всюду положительную производную.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (12), (17) имеем

$$K_0^{\theta-1} P'_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \lambda t - \alpha \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}}{(\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t})^\theta} \cdot e^{-(\rho + \lambda(1-\theta))t} dt. \quad (22)$$

Положим

$$\varphi(t) = (\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t})^\theta, \quad \mathcal{F}(t) = (1 - \lambda t - \alpha \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}) e^{-(\rho + \lambda(1-\theta))t}. \quad (23)$$

Из (22), (23) следует равенство

$$K_0^{\theta-1} P'_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \mathcal{F}(t) dt. \quad (24)$$

Проверим что функции φ и $\mathcal{F}$ удовлетворяют условиям леммы 1. Ввиду возрастания экспоненты и убывания на положительной полуоси степенной функции с отрицательным показателем $(\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t})^{-\theta}$ является положительной и убывающей функцией на луче $0 \leq t < +\infty$. Функция $\mathcal{F}$ интегрируема на этом луче, поскольку является разностью произведений убывающих экспонент на линейные функции (наибольший из показателей этих экспонент, равен $\lambda\beta - \lambda(1-\theta) - \rho = \lambda(\theta - \alpha) - \rho < -\lambda\alpha \leq 0$, поскольку $\lambda\theta - \rho < 0$). С помощью формул $\int_0^{+\infty} e^{-\mu t} dt = \mu^{-1}$, $\int_0^{+\infty} t e^{-\mu t} dt = \mu^{-2}$ (для $\mu > 0$) интеграл $\int_0^{+\infty} \mathcal{F}(t) dt$ вычисляется:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}(t) dt &= \frac{1}{\rho + \lambda(1-\theta)} - \frac{\lambda}{(\rho + \lambda(1-\theta))^2} - \frac{\alpha \rho \varepsilon}{(\rho + \lambda(1-\theta) - \lambda\beta)^2} = \\ &= \frac{\rho - \lambda\theta}{(\rho + \lambda(1-\theta))^2} - \frac{\alpha \rho \varepsilon}{(\rho + \lambda(1-\theta) - \lambda\beta)^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Наконец, функция $\mathcal{F}(t)$ действительно меняется знак один раз с плюса на минус, поскольку функция $1 - \lambda t - \alpha \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}$ непрерывна, убывает на луче $0 \leq t < +\infty$, в точке $t = 0$ равна 1, а в точке $t = 1/\lambda$ равна $-(\alpha \varepsilon \rho t) e^\beta < 0$ (в частности, отсюда видно, что точка t_0 перемены знака $\mathcal{F}(t)$ меньше $1/\lambda$). В результате применения леммы 1 заключаем, что для доказательства положительности интеграла (24) достаточно проверить положительность интеграла (25), то есть установить справедливость неравенства

$$\frac{\alpha \rho \varepsilon}{(\rho + \lambda(1-\theta) - \lambda\beta)^2} < \frac{\rho - \lambda\theta}{(\rho + \lambda(1-\theta))^2}. \quad (26)$$

Поскольку $\lambda \leq (1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}) \frac{\rho}{\theta}$, то $\lambda\theta \leq (1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}) \rho$, а значит $\rho - \lambda\theta \geq \frac{\varepsilon \rho}{\alpha}$. Отсюда видно, что заменив в числителе правой части (26) величину $\rho - \lambda\theta$ на её оценку снизу $\varepsilon \rho / \alpha$, мы вправе доказать вместо (26) более сильное и одновременно более простое неравенство

$$\frac{\alpha \rho \varepsilon}{(\rho + \lambda(1-\theta) - \lambda\beta)^2} < \frac{\varepsilon \rho}{\alpha(\rho + \lambda(1-\theta))^2},$$

равносильное ввиду положительности всех сомножителей (в том числе выражений, возводимых в квадрат) следующему:

$$\alpha < \frac{\rho + \lambda(1 - \theta) - \lambda\beta}{\rho + \lambda(1 - \theta)}. \quad (27)$$

Нетрудно убедиться в том, что правая часть неравенства (27) является убывающей функцией переменной λ на луче $0 \leq \lambda < +\infty$ и в точке $\lambda = \rho/\theta$ принимает значение, равное α . А так как у нас $\lambda \leq (1 - \varepsilon/\lambda)\rho/\theta < \rho/\theta$, то правая часть неравенства (27) больше α , что и требуется доказать. Тем самым положительность производной функции полной полезности (9) на отрезке $0 \leq \lambda \leq (1 - \varepsilon/\lambda)\rho/\theta$ доказана, и доказательство теоремы завершено. $\square$

Промежуток убывания функции полной полезности

ТЕОРЕМА 4. *Функция полной полезности (9) убывает на луче $\rho/\theta \leq \lambda < +\infty$, имея на нём всюду отрицательную производную.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию двух переменных

$$J_\theta(\lambda, \xi) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \lambda t - \alpha \xi \rho t e^{\lambda \beta t}}{(\lambda + \xi \rho e^{\lambda \beta t})^\theta} \cdot e^{-(\rho + \lambda(1 - \theta))t} dt. \quad (28)$$

Согласно (22) справедливо равенство

$$K_0^{\theta-1} P'_\theta(\lambda) = J_\theta(\lambda, \varepsilon),$$

и, следовательно, мы должны установить справедливость неравенства

$$J_\theta(\lambda, \varepsilon) < 0 \quad \forall \lambda \geq \frac{\rho}{\theta} \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (29)$$

На первом этапе доказательства мы собираемся применить следующее соображение. Коль скоро справедливо равенство

$$\begin{aligned} J_\theta(\lambda, 0) &= \lambda^{-\theta} \int_0^{+\infty} (1 - \lambda t) e^{-(\rho + \lambda(1 - \theta))t} dt = \\ &= \lambda^{-\theta} \left(\frac{1}{\rho + \lambda(1 - \theta)} - \frac{\lambda}{(\rho + \lambda(1 - \theta))^2} \right) = \frac{\lambda^{-\theta}(\rho - \lambda\theta)}{(\rho + \lambda(1 - \theta))^2}, \end{aligned}$$

то

$$J_\theta\left(\frac{\rho}{\theta}, 0\right) = 0, \quad J_\theta(\lambda, 0) < 0 \quad \forall \lambda > \frac{\rho}{\theta}. \quad (30)$$

Из (30) видно, что для доказательства неравенства (29) достаточно (проверив непрерывность $J_\theta(\lambda, \xi)$ по переменной ξ на луче $0 \leq \xi < +\infty$ и дифференцируемость по ξ на открытом луче $0 < \xi < +\infty$ при любом $\lambda \geq \rho/\theta$) вывести неравенство

$$\frac{\partial J_\theta}{\partial \xi}(\lambda, \xi) < 0, \quad \forall \lambda \geq \frac{\rho}{\theta} \quad \forall \xi > 0. \quad (31)$$

Нам удастся доказать (31) при $0 < \theta \leq \alpha$. А когда параметр θ лежит на интервале $\alpha < \theta < 1$, мы это сможем сделать только для значений λ из полуинтервала

$$\frac{\rho}{\theta} \leq \lambda < \frac{\rho\theta}{(\theta - \alpha)(1 + \theta)}. \quad (32)$$

Полуинтервал (32) непуст; его непустота, как нетрудно проверить равносильна неравенству $\frac{\theta}{1+\theta} < \alpha$, а оно выполняется, поскольку $\frac{\theta}{1+\theta} < 1/2$ при $\theta \in (0; 1)$, а параметр α не меньше $2/3$.

Тем самым окажется, что неравенство (29) будет доказано при всех $\theta \in (0; \alpha]$, а при $\theta \in (\alpha; 1)$ только для значений λ из полуинтервала (32). Для значений $\lambda \geq \rho\theta(\theta - \alpha)^{-1}(1 + \theta)^{-1}$ мы докажем (29) другим способом.

Сначала проверим непрерывность функции $J_\theta(\lambda, \xi)$ по переменной ξ на луче $0 \leq \xi < +\infty$ при любом $\lambda > 0$. Поскольку подынтегральная функция в (28) по переменной ξ непрерывна на луче $0 \leq \xi < +\infty$ при любом $\lambda > 0$, то достаточно доказать равномерную сходимость по $\xi \in [0; \xi_0]$ несобственного интеграла (28) при любом $\lambda > 0$, каково бы ни было положительное число ξ_0 . Разобьём интеграл (28) на две части:

$$J_\theta(\lambda, \xi) = J_{\theta,1}(\lambda, \xi) - \alpha\rho J_{\theta,2}(\lambda, \xi),$$

где

$$J_{\theta,1}(\lambda, \xi) = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \lambda t)e^{-(\rho + \lambda(1-\theta))t}}{(\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t})^\theta} dt, \quad J_{\theta,2}(\lambda, \xi) = \int_0^{+\infty} \frac{\xi t e^{\lambda\beta t - \rho t - \lambda(1-\theta)t}}{(\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t})^\theta} dt.$$

Интеграл $J_{\theta,1}(\lambda, \xi)$ сходится равномерно по $\xi \in [0; +\infty)$ при любом $\lambda > 0$, поскольку модуль подынтегральной функции имеет интегрируемую по t на полуоси $0 \leq t < +\infty$ и не зависящую от ξ мажоранту $\lambda^{-\theta}(\lambda t + 1)e^{-\rho t}$. Оценим подынтегральную функцию в $J_{\theta,2}(\lambda, \xi)$. Она положительна и не превосходит

$$\xi^{1-\theta} \rho^{-\theta} t e^{\lambda\beta(1-\theta)t - \rho t - \lambda(1-\theta)t} = \xi^{1-\theta} \rho^{-\theta} t e^{-\rho t - \lambda\alpha(1-\theta)t} \leq \xi_0^{1-\theta} \rho^{-\theta} t e^{-\rho t},$$

то есть снова мажорируется функцией, интегрируемой на полуоси $0 \leq t < +\infty$, но уже только на отрезке $0 \leq \xi \leq \xi_0$. Требуемая равномерная сходимость интеграла (28) доказана.

Подынтегральная функция в (28) при любых $\lambda > 0$ и $t > 0$ непрерывно дифференцируема по переменной ξ на луче $0 \leq \xi < +\infty$. Вычислим её частную производную по ξ . Если A, B, A_1, B_1, θ — постоянные, то верна формула дифференцирования

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{A_1 - B_1\xi}{(A + B\xi)^\theta} \right) = - \frac{(1 - \theta)BB_1\xi + \theta BA_1 + AB_1}{(A + B\xi)^{1+\theta}}.$$

Отсюда заключаем, что частная производная по переменной ξ подынтегральной функции в (28) равна

$$\begin{aligned} & - \frac{(1 - \theta)\alpha\rho^2 t \xi e^{2\lambda\beta t} + \theta\rho(1 - \lambda t)e^{\lambda\beta t} + \lambda\alpha\rho t e^{\lambda\beta t}}{(\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1+\theta}} e^{-(\rho + \lambda(1-\theta))t} = \\ & = -\rho \frac{(1 - \theta)\alpha\rho t \xi e^{\lambda\beta t} + \theta + \lambda(\alpha - \theta)t}{(\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1+\theta}} e^{-\rho t + \lambda(\beta + \theta - 1)t}. \end{aligned}$$

Поэтому для доказательства равенства

$$\frac{\partial J_\theta}{\partial \xi}(\lambda, \xi) = -\rho \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \theta)\alpha\rho t \xi e^{\lambda\beta t} + \theta + \lambda(\alpha - \theta)t}{(\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1+\theta}} e^{-\rho t + \lambda(\beta + \theta - 1)t} dt \quad (33)$$

при любых положительных значениях переменных λ и ξ достаточно проверить равномерную сходимость интеграла (33) по $\xi \in [\xi_1, \xi_0]$ при любых $\lambda > 0$, каковы бы ни были положительные числа $\xi_1, \xi_0, \xi_1 < 1 < \xi_0$. С этой целью оценим сверху модуль подынтегральной функции в (33), учитывая, что $\theta, \alpha, \rho \in (0; 1)$. При любых $\lambda > 0, t > 0$ и $\xi \in [\xi_1, \xi_0]$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(1 - \theta)\alpha\rho t \xi e^{\lambda\beta t} + \theta + \lambda(\alpha - \theta)t}{(\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1+\theta}} \right| < \frac{\rho t \xi e^{\lambda\beta t} + 1 + \lambda t}{(\xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1+\theta}} = \\ & = (\rho\xi)^{-\theta} t e^{-\lambda\beta\theta t} + (1 + \lambda t)(\xi\rho)^{-1-\theta} e^{-\lambda\beta(1+\theta)t} < (\rho\xi_1)^{-2}(1 + (1 + \lambda)t)e^{-\lambda\beta\theta t}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что подынтегральная функция в (33) по абсолютной величине не превосходит

$$\begin{aligned} (\rho\xi_1)^{-2}(1 + (1 + \lambda)t)e^{-\rho t}e^{(\lambda\beta - \lambda\beta\theta + \lambda(\theta-1))t} = \\ = (\rho\xi_1)^{-2}(1 + (1 + \lambda)t)e^{-\rho t}e^{\lambda\alpha(\theta-1)t} < (\rho\xi_1)^{-2}(1 + (1 + \lambda)t)e^{-\rho t} \end{aligned}$$

при любых $\lambda > 0$, $t > 0$ и $\xi \in [\xi_1, \xi_0]$, то есть оценивается сверху интегрируемой на полуоси $0 < t < +\infty$ функцией, не зависящей от ξ , когда ξ пробегает фиксированный отрезок. Требуемая равномерная сходимость интеграла (33), а значит, и его равенство частной производной $\partial J_\theta(\lambda, \xi)/\partial \xi$ при любых $\lambda > 0$ и $\xi > 0$ доказаны.

Перейдём к доказательству отрицательности $\partial J_\theta(\lambda, \xi)/\partial \xi$. Согласно (33) для этого надо доказать положительность умноженного на $(-\rho)$ интеграла. В случае $\theta \in (0; \alpha]$ его положительность очевидна, ввиду положительности всех слагаемых в числителе дроби ($\forall t > 0$). Рассмотрим случай $\alpha < \theta$ и обозначим $\gamma = \theta - \alpha$. Тогда $\beta + \theta - 1 = \theta - \alpha = \gamma$. Достаточно доказать положительность интеграла

$$\tilde{J}_\theta(\lambda, \xi) = \int_0^{+\infty} \frac{\theta - \lambda\gamma t}{(\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1+\theta}} e^{-\rho t + \lambda\gamma t} dt. \quad (34)$$

Мы опустили первое положительное слагаемое $(1 - \theta)\alpha\rho t\xi e^{\lambda\beta t}$, которое при малых ξ не вносит существенного вклада.

Положим $\varphi(t) = (\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t})^{-\theta-1}$, $\mathcal{F}(t) = (\theta - \lambda\gamma t)e^{-\rho t + \lambda\gamma t}$. Нетрудно убедиться в том, что функции φ , $\mathcal{F}$ удовлетворяют условиям леммы 1, интеграл

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F} dt = \frac{\theta}{\rho - \lambda\gamma} - \frac{\lambda\gamma}{(\rho - \lambda\gamma)^2} \quad (35)$$

существует, если $\lambda < \rho/\gamma$. В результате применения леммы 1 получим, что положительность интеграла (34) в случае $\alpha < \theta < 1$ следует из положительности интеграла (35), а она имеет место при

$$\lambda < \frac{\theta\rho}{\gamma(1 + \theta)} = \frac{\theta\rho}{(\theta - \alpha)(1 + \theta)}.$$

Итак, мы выполнили первую часть намеченной выше программы доказательства неравенства (29), и нам осталось доказать отрицательность интеграла $J_\theta(\lambda, \xi)$ или, что то же самое, отрицательность интеграла (17) только при

$$\theta \in (\alpha; 1) \quad \lambda \geq \frac{\theta\rho}{(\theta - \alpha)(1 + \theta)}. \quad (36)$$

Ввиду оценки сверху (16) подынтегральной функции (17), достаточно доказать отрицательность интеграла

$$\tilde{P}_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda + \varepsilon\rho} - \alpha t \right) (\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1-\theta} e^{-(\rho + \lambda(1-\theta)t} dt \quad (37)$$

при любом $\varepsilon > 0$ и произвольных значениях величин θ и λ , указанных в (36).

Положим

$$\varphi(t) = (\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t})^{1-\theta}, \quad \mathcal{F}(t) = \left(\frac{1}{\lambda + \varepsilon\rho} - \alpha t \right) e^{-(\rho + \lambda(1-\theta)t} dt. \quad (38)$$

Нетрудно проверить, что пара функций (38) удовлетворяет условиям леммы (2), а интеграл (37) равен $\tilde{P}_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\mathcal{F}(t) dt$. Применив лемму 2, получим, что отрицательности интеграла (37) следует отрицательности интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}(t) dt &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda + \varepsilon \rho} - \alpha t \right) e^{-(\rho + \lambda(1-\theta)t} dt < \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda} - \alpha t \right) e^{-(\rho + \lambda(1-\theta)t} dt = \\ &= \frac{1}{\lambda(\rho + \lambda(1-\theta))} - \frac{\alpha}{(\rho + \lambda(1-\theta))^2} = \frac{\rho + \lambda(1-\theta) - \lambda\alpha}{\lambda(\rho + \lambda(1-\theta))^2} = \frac{\rho + \lambda(\beta - \theta)}{\lambda(\rho + \lambda(1-\theta))^2}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что интеграл (37) заведомо отрицателен при

$$\lambda \geq \frac{\rho}{\theta - \beta},$$

а вместе с ним отрицателен при этих значениях λ интеграл $J_\theta(\lambda, \varepsilon)$, отрицательность которого осталось доказать при условии (36). Поэтому для завершения доказательства теоремы осталось проверить справедливость неравенства

$$\frac{\rho}{\theta - \beta} \leq \frac{\theta \rho}{(\theta - \alpha)(1 + \theta)} \quad \text{при } \alpha < \theta < 1.$$

Данное неравенство, ввиду положительности всех содержащихся в нем сомножителей, равносильно следующему:

$$(\theta - \alpha)(1 + \theta) \leq \theta(\theta - \beta) \iff \theta + \theta^2 - \alpha(1 + \theta) \leq \theta^2 - \beta\theta \iff \theta + \beta\theta \leq \alpha + \alpha\theta.$$

А так как $\alpha + \beta = 1$, то последнее неравенство сводится к $2\beta\theta \leq \alpha$. Тем самым, ввиду ограничения $\theta < 1$, достаточно убедиться в том, что $2\beta \leq \alpha$. Но в нашей работе мы рассматриваем значения $\alpha \in [2/3; 1)$, поэтому $\beta = 1 - \alpha \in (0; 1/3]$ и неравенство $2\beta \leq \alpha$ выполняется. Теорема полностью доказана. $\square$

Заключение

Главный вывод из приведенного исследования стоит в том, что показатель λ экспоненты $K(t) = K_0 e^{-\lambda t}$, дающий среди всех других таких экспонент максимальное значение интеграла (9), лежит (при достаточно большом значении начального экономического ресурса K_0) очень близко к числу ρ/θ , но немного меньше ρ/θ . Таким образом, в качестве наиболее просто устроенной функции $K(t)$, могущей дать, если не оптимальный, то достаточно хороший результат в задаче (1), (2), когда функции U и f заданы формулами (3), (5), рекомендуем экспоненту

$$K(t) = K_0 \exp\left(-\frac{\rho}{\theta}t\right).$$

Представляется перспективным в дальнейшем исследовать, не даст ли линейная комбинация двух убывающих экспонент

$$K(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} \quad \text{при условии } C_1 + C_2 = K_0 \quad (39)$$

лучший результат в задаче Рамсея — Касса — Купманса, нежели одна экспонента (22). Более того, есть надежда, что функция (39) окажется достаточно близкой к оптимальному решению задачи (1), (2). В пользу этого говорит следующее обстоятельство. Действительно, экстремали интегралов (1) удовлетворяют уравнениям Эйлера, которые приводятся (по крайней мере в нашем случае) к нелинейным дифференциальным уравнениям второго порядка. После линеаризации, предложенной нами в [4], получается линейное (правда, неоднородное) уравнение второго порядка, а его решение содержит линейную комбинацию двух экспонент, которая может (по крайней мере при "небольших" значениях t) оказаться "лидирующей" компонентой решения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acemoglu Daron. The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth // Princeton: Princeton University Press. 2009. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.
2. Bénassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory // New York: Oxford University Press. 2011. P. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.
3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея —Касса —Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019;20(4):197-207. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207>.
4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея —Касса —Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44
5. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея —Касса —Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.
6. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея—Касса—Купманса // Чебышевский сборник. 2019. Vol 20(4), С. 188-196. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196>.
7. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey —Cass —Koopmans Model // http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.
8. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.
9. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=899250>.
10. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory. Vol. 44, No. 2, 2010.
11. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: <http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture\%20notes/Ch7-2010-1.pdf>, 2010.
12. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.
13. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114, No 4. P. 1125-1152.
14. Paul H. Douglas. In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas // New York, Harcourt Brace Jovanovich. 1972.
15. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September. P. 908-931.
16. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey —Cass —Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf

REFERENCES

1. Acemoglu, Daron. 2009, “The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth“, *Princeton: Princeton University Press*. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.
2. Bénassy, Jean-Pascal. 2011, “The Ramsey Model. Macroeconomic Theory“, *New York: Oxford University Press*. pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.
3. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, “Optimal exponent in the Ramsey —Kass —Koopmans problem with logarithmic utility function“, *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 20(4), September. pp. 197-207. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207>
4. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2020, “On the Ramsey — Kass —Koopmans problem for consumer choice“, *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review*. vol. 182, September, pp. 39-44. (In Russ.) DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44.
5. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey —Kass —Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow*. pp. 87-88.
6. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, “Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey —Kass —Koopmans problem“, *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 20(4), September, pp. 188-196. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196>.
7. Rahul, Giri. “Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey–Cass–Koopmans Model“, 2018, http://ciep.itam.mx/rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.
8. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, “Economic growth (2nd ed.)“, *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.
9. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, “Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)“, *CESifo Working Paper Series*, no. 1701. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=899250>.
10. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2010, “When Economic Growth is Less than Exponential“, *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 213-242.
11. Groth, C. 2010, “Chapter 10: The Ramsey Model“, Available at: <http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture\%20notes/Ch7-2010-1.pdf>.
12. Romer, D. 2006, “Advanced Macroeconomics. 3rd ed“, *New York: McGraw-Hill/Irwin*, pp. 651.
13. Robert J. Barro. 1999, “Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model“, *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.
14. Douglas, Paul H. 1972, “In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas“, *New York, Harcourt Brace Jovanovich*.
15. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, “Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model“, *American Economic Review*. vol. 83, September, pp. 908-931.

16. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey–Cass–Koopmans Model“, *UC Berkeley Fall*, https://eml.berkeley.edu/webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ram_sey_Cass_Koop_mans_pog.pdf.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-135-144

Неравенства типа Джексона — Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана

М. Р. Лангаршоев

Лангаршоев Мухтор Рамазонович — кандидат физико-математических наук, Подмосковный колледж «Энергия» (г. Старая Купавна).

e-mail: mukhtor77@mail.ru

Аннотация

В экстремальных задачах теории приближения функций важную роль играют точные неравенства, содержащие оценки величины наилучшего полиномиального приближения посредством усредненных значений модулей непрерывности высших порядков производных функций. В настоящей работе приводится неравенство типа А.А. Лигуна — двухсторонняя оценка наилучших весовых приближений аналитических в единичном круге функций из пространства Бергмана $B_{2,\gamma}$. Полученные неравенства позволяют установить новые связи между конструктивными и структурными свойствами функций а также для соответствующих классов функций дают оценку сверху поперечников. Вычислены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n -поперечников классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых усредненными с положительным весом модулями непрерывности высших порядков производных функций в пространстве $B_{2,\gamma}$.

Ключевые слова: аналитическая функция, модуль непрерывности, наилучшее приближение, весовое пространство Бергмана, n -поперечники.

Библиография: 12 названия.

Для цитирования:

М. Р. Лангаршоев. Неравенства типа Джексона — Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 135–144.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-135-144

Jackson–Stechkin type inequalities and widths of classes of functions in the weighted Bergman space

M. Langarshoev

Langarshoev Mukhtor Ramazonovich — candidate of physical and mathematical sciences, College near Moscow «Energia» (Staraya Kupavna).

e-mail: mukhtor77@mail.ru

Abstract

In extremal problems of the theory of approximation of functions an important role is played by exact inequalities of the value of the best polynomial approximation by means of averaged values of the modules of continuity of higher orders of the derived functions. In this paper we present an inequality of type Ligun-two-sided estimate for the best weighted approximate analytic functions in the unit disc from the Bergman space $B_{2,\gamma}$. The resulting inequalities allow us to establish new connections between the constructive and structural properties of the functions and for the corresponding classes of functions give an estimate from the top of the widths. The exact values of Bernstein, Kolmogorov, Gelfand, linear and projection n -widths of classes of analytic functions in unit discs defined by modules of continuity of higher orders of the derived functions in the space $B_{2,\gamma}$ averaged with positive weight are calculated.

Keywords: analytical function, modulus of continuity, best approximation, weight Bergman's space, n -widths.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

M. Langarshoev, 2021, “Jackson–Stechkin type inequalities and widths of classes of functions in the weighted Bergman space”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 135–144.

Введение

К настоящему времени задаче, связанной с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина для функций одной действительной переменной, посвящено значительное множество работ (см., например, работы [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] и литературу в них).

Используя вопросы наилучшего приближения функций тригонометрическими полиномами М.Ш. Шабозов и Г.А. Юсупов обобщили результаты А.А.Лигуна [3], полученные для 2π периодических функций. Ими было доказано, что если $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$, то справедливы неравенства

$$\frac{1}{A_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)} \leq \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{E_n(f)_2}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \leq \frac{1}{\inf_{n \leq k < +\infty} A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)}, \quad (1)$$

где

$$A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p},$$

и

$$\omega_m(f^{(r)}, \delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \left\| \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f^{(r)}(x + kt) \right\|$$

– модуль непрерывности m -го порядка производной $f^{(r)}(x) \in L_2^{(r)}$.

В настоящей работе мы распространяем неравенства (1) на случай аналитических в единичном круге функций $f(z)$, принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, где $1 \leq q \leq \infty$, $\gamma = \gamma(|z|) > 0$ (см. [8]).

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Известно, что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho < 1$$

принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, если

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \gamma(\rho) |f(\rho e^{it})|^q d\rho dt \right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

где $\gamma(\rho) \geq 0$ – суммируемая на $[0, 1]$ функция. Множество всех комплексных алгебраических полиномов степени $\leq n-1$ обозначим

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Через

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

обозначим наилучшее приближение функции $f \in B_{q,\gamma}$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$.

Величину

$$\begin{aligned} \omega_m(f, t)_{B_{q,\gamma}} &= \sup \{ \|\Delta_h^m(f, \cdot, \cdot)\|_{B_{q,\gamma}} : |h| \leq t \} \\ &= \sup \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \gamma(\rho) |\Delta_h^m(f; \rho, u)|^q d\rho du \right)^{1/q} : |h| \leq t \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_h^m(f; \rho, u) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f(\rho e^{i(u+kh)})$$

– разность m -го порядка функции $f(\rho e^{it})$ по аргументу t с шагом h , назовем интегральным модулем непрерывности m -го порядка.

Для $r \in \mathbb{Z}_+$ обычную производную r -го порядка функции $f(z)$ обозначим через $f^{(r)}(z) = d^r f / dz^r$ ($f^{(0)}(z) \equiv f(z)$). Всюду далее полагаем

$$\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)} = \left\{ f(z) \in B_{q,\gamma} : \|z^r f^{(r)}\|_{q,\gamma} < \infty \right\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p}(\varphi, h) = \sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)} \\ f^{(r)} \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} E_n(f)_{2,\gamma}}{\left(\int_0^h \omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\gamma} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}, \quad (2)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p < \infty$, $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$, $0 < h \leq \pi/n$.

Пусть X банахово пространство, S – единичный шар в X , $\mathfrak{N}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество X , $\Lambda_n \subset X$ – n -мерное подпространство, $\Lambda^n \subset X$ – подпространство коразмерности n , $\mathcal{L} : X \rightarrow X$ – непрерывный линейный оператор, $\mathcal{L}^\perp : X \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования.

Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathfrak{N}, X) &= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{N} \} : \Lambda_{n+1} \subset X \}, \\ d^n(\mathfrak{N}, X) &= \inf \{ \sup \{ \|f\|_X : f \in \mathfrak{N} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset X \}, \\ d_n(\mathfrak{N}, X) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - \varphi\|_X : \varphi \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{N} \} : \Lambda_n \subset X \}, \\ \lambda_n(\mathfrak{N}, X) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\|_X : f \in \mathfrak{N} \} : \mathcal{L}X \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset X \}, \\ \pi_n(\mathfrak{N}, X) &= \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\|_X : f \in \mathfrak{N} \right\} : \mathcal{L}^\perp X \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset X \right\}, \end{aligned}$$

называют соответственно бернштейновским, гильбертовским, колмогоровским, линейным и проекционным n -поперечниками в пространстве X . Поскольку X – гильбертово пространство, то между перечисленными выше n -поперечниками выполняются соотношения [9]:

$$b_n(\mathfrak{N}, X) \leq d^n(\mathfrak{N}, X) \leq d_n(\mathfrak{N}, X) = \lambda_n(\mathfrak{N}, X) = \pi_n(\mathfrak{N}, X). \quad (3)$$

Также полагаем

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) := \sup \{ E_n(f) : f \in \mathfrak{N} \}.$$

Пусть $\Phi(t)$ ($t \geq 0$) – произвольная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Через $W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, обозначим класс функций $f \in \mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$, для которых при любых $h > 0$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{2}{h^2} \int_0^h t \omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \right)^{1/p} \leq \Phi(h).$$

Положим

$$(1 - \cos nt)_*^m = \begin{cases} (1 - \cos nt)^m, & \text{если } nt < \pi, \\ 2^m, & \text{если } nt \geq \pi. \end{cases}$$

Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p < 2$, $0 < h \leq \pi/n$, φ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда справедливы неравенства

$$\{b_{n,m,r,p}(\varphi; h)\}^{-1} \leq \mathcal{K}_{m,n,r,p}(\varphi, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} b_{k,m,r,p}(\varphi; h) \right\}^{-1}, \quad (4)$$

где

$$b_{k,m,r,p}(\varphi; h) = \left(\alpha_{k,r}^p \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}, \quad (5)$$

$$\alpha_{k,r} = k(k-1)(k-2) \cdots (k-r+1), \quad k > r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [8], что для произвольной аналитической функции $f(z) \in \mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$ имеет место соотношение

$$\omega_m^2(z^r f^{(r)}, t)_{2,\gamma} = 2^m \sup_{|u| \leq t} \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k|^2 (1 - \cos ku)^m \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho. \quad (6)$$

Воспользуемся следующим неравенством [10]

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p dt \right)^{2/p} \right)^{1/2},$$

справедливым при $0 < p \leq 2$ и любом $h \in \mathbb{R}_+$. С учетом соотношения (6) имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^h \omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\gamma} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \\ & \geq \left\{ \int_0^h \left[2^m \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k|^2 (1 - \cos kt)^m \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho [\varphi(t)]^{2/p} \right]^{p/2} dt \right\}^{1/p} \\ & \geq 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \left[|c_k|^p \alpha_{k,r}^p \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \left(\int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{p/2} \right]^{2/p} \right\}^{1/2} \\ & = 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \left[\left(\alpha_{k,r}^p \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right) \left(\int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{p/2} \right]^{2/p} \right\}^{1/2} \\ & = 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \left[(b_{k,m,r,p}(\varphi; h))^p \left(\int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{p/2} \right]^{2/p} \right\}^{1/2} \\ & \geq 2^{m/2} \inf_{n \leq k < \infty} b_{k,m,r,p}(\varphi; h) \left(\sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2} \\ & = 2^{m/2} \inf_{n \leq k < \infty} b_{k,m,r,p}(\varphi; h) E_n(f)_{2,\gamma}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{2^{m/2} E_n(f)_{2,\gamma}}{\left(\int_0^h \omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\gamma} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} b_{k,m,r,p}(\varphi; h) \right\}^{-1}, \quad (7)$$

и оценка сверху получена. Чтобы получить оценки снизу в неравенстве (4) введем в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in \mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)}$. Для этой функции непосредственными вычислениями получаем

$$E_n(f_0)_{2,\gamma} = \left(\int_0^1 \rho^{2n+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/2},$$

$$\omega_m \left(z^r f_0^{(r)}, t \right)_{2,\gamma} = 2^{m/2} \alpha_{n,r} (1 - \cos nt)^{m/2} E_n(f_0)_{2,\gamma}.$$

Используя два последних соотношения, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{m,n,r,p}(\varphi, h) &\geq \frac{2^{m/2} E_n(f_0)_{2,\gamma}}{\left(\int_0^h \omega_m^p \left(z^r f_0^{(r)}, t \right)_{2,\gamma} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} \\ &= \frac{1}{\left(\alpha_{n,r}^p \int_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \{b_{n,m,r,p}(\varphi; h)\}^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Сравнивая оценку сверху (7) и оценку снизу (8), получаем утверждение теоремы 1.

Отметим, что неравенства типа (4) при $p = 2$ для классов аналитических функций в пространстве Харди H_p и классов аналитических функций в пространстве Бергмана B_p были получены Г.А. Юсуповым [11] и М.Р. Лангаршоевым [12] соответственно.

ЛЕММА. Пусть весовая функция $\varphi(t) \geq 0$ непрерывно дифференцируемо на отрезке $[0, h]$ и пусть для всех $0 \leq t \leq h$, $1 \leq p \leq 2$ выполнено неравенство

$$\left(\sum_{s=0}^{r-1} \frac{p}{k-s} - \frac{1}{k} \right) \varphi(t) - \frac{1}{k} t \varphi'(t) \geq 0. \quad (9)$$

Если

$$\inf_{n \leq k < \infty} b_{k,m,r,p}(\varphi; h) = b_{n,m,r,p}(\varphi; h),$$

то

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p}(\varphi, h) = \{b_{n,m,r,p}(\varphi; h)\}^{-1}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя вид величины (5) достаточно показать, что при выполнении неравенства (9) функция

$$y(k) = \alpha_{k,r}^p \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \quad (11)$$

при $k \geq n$ является возрастающей. Из соотношения (11) имеем

$$\begin{aligned} y'(k) &= \alpha_{k,r}^p \sum_{s=0}^{r-1} \frac{p}{k-s} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \\ &\quad + \alpha_{k,r}^p \int_0^h \frac{d}{dk} (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Воспользовавшись очевидным тождеством

$$\frac{d}{dk}(1 - \cos kt)^{mp/2} = \frac{t}{k} \cdot \frac{d}{dt}(1 - \cos kt)^{mp/2}$$

и методом интегрирования по частям, из равенства (12) в силу (9) получаем

$$\begin{aligned} y'(k) &= \alpha_{k,r}^p \sum_{s=0}^{r-1} \frac{p}{k-s} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \\ &+ \alpha_{k,r}^p \frac{1}{k} \int_0^h [t\varphi(t)] d[(1 - \cos kt)^{mp/2}] = \alpha_{k,r}^p \left\{ \frac{1}{k} h \varphi(h) (1 - \cos kh)^{mp/2} \right. \\ &\left. + \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \left[\left(\sum_{s=0}^{r-1} \frac{p}{k-s} - \frac{1}{k} \right) \varphi(t) - \frac{1}{k} t \varphi'(t) \right] dt \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\inf \{y(k) : k \geq n\} = y(n)$. Таким образом

$$\inf_{n \leq k < \infty} b_{k,m,r,p}(\varphi; h) = b_{n,m,r,p}(\varphi; h),$$

из которого в силу двойного неравенства (4) получаем (10). Лемма доказано. Из доказанной леммы вытекает следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\varphi(t) \equiv t$, $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\frac{2}{k} \left(\sum_{s=0}^{r-1} \frac{1}{k-s} \right)^{-1} \leq p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p}(t, h) = \{b_{n,m,r,p}(t; h)\}^{-1} = \alpha_{n,r}^{-1} \left(\int_0^h t (1 - \cos nt)^{mp/2} dt \right)^{-1/p}. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $2/r < p \leq 2$ и функция Φ при любых значениях $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию

$$(nh)^2 \Phi^p(h) \int_0^{\pi/n} t (1 - \cos nt)^{mp/2} dt \geq \pi^2 \Phi^p(\pi/n) \int_0^h t (1 - \cos nt)_*^{mp/2} dt. \quad (14)$$

Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\sigma_n \left(W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi), B_{2,\gamma} \right) \\ &= \frac{1}{2^{(pm+2)/(2p)} n^{2/p} \alpha_{n,r}} \left(\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/n} t (1 - \cos nt)^{mp/2} dt \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\sigma_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n -поперечников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $f \in B_{2,\gamma}^{(r)}$ из соотношение (13) имеем

$$E_n(f)_{B_{2,\gamma}} \leq 2^{-m/2} \alpha_{n,r}^{-1} \left(\int_0^h t (1 - \cos nt)^{mp/2} dt \right)^{-1/p} \left(\int_0^h \omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\gamma} \varphi(t) dt \right)^{1/p}.$$

Полагая в этом неравенстве $h = \frac{\pi}{n}$, с учётом определения класса $W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)$ запишем оценки сверху для проекционного n -поперечника

$$\begin{aligned} \Pi_n \left(W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi), B_{2,\gamma} \right) &\leq \mathcal{E}_n \left(W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi), B_{2,\gamma} \right) \\ &\leq \frac{1}{2^{(pm+2)/(2p)} n^{2/p} \alpha_{n,r}} \left(\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/n} t (1 - \cos nt)^{mp/2} dt \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n). \end{aligned} \quad (16)$$

Для получения соответствующей оценки снизу для бернштейновского n -поперечника $b_n \left(W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi), B_{2,\gamma} \right)$ введём в рассмотрение шар

$$S_{n+1} = \left\{ p_n : \|p_n(z)\| \leq \frac{1}{2^{(pm+2)/(2p)} n^{2/p} \alpha_{n,r}} \left(\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/n} t (1 - \cos nt)^{mp/2} dt \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n) \right\}.$$

Покажем, что $S_{n+1} \in W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)$. Для произвольного $p_n(z) \in B_{2,\gamma}$ из соотношения (6) имеем

$$\omega_m^2(z^r p_n^{(r)}, t)_{2,\gamma} \leq 2^m \alpha_{n,r}^2 (1 - \cos nt)_*^m \|p_n\|^2. \quad (17)$$

В силу условия (14) и неравенства (17), с учётом определения класса $W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)$ получаем

$$\begin{aligned} &\frac{2}{h^2} \int_0^h t \omega_m^p(z^r p_n^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt \\ &\leq \frac{2}{h^2} \cdot 2^{mp/2} \alpha_{n,r}^p \int_0^h t (1 - \cos nt)_*^{mp/2} dt \\ &\times \left[\frac{1}{2^{(pm+2)/(2p)} n^{2/p} \alpha_{n,r}} \left(\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/n} t (1 - \cos nt)^{mp/2} dt \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n) \right]^p \\ &= \left(\frac{\pi}{nh} \right)^2 \cdot \frac{\int_0^h t (1 - \cos nt)_*^{mp/2} dt}{\int_0^{\pi/n} t (1 - \cos nt)^{mp/2} dt} \Phi^p(\pi/n) \leq \Phi^p(h). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что шар S_{n+1} содержится в классе $W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)$. Используя определение бернштейновского n -поперечника, запишем соответствующую оценку снизу

$$\begin{aligned} b_n \left(W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi), B_{2,\gamma} \right) &\geq \frac{1}{2^{(pm+2)/(2p)} n^{2/p} \alpha_{n,r}} \left(\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/n} t (1 - \cos nt)^{mp/2} dt \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n). \end{aligned} \quad (18)$$

Из сопоставления неравенств (16) и (18) с учётом неравенства (3) получим утверждение теоремы 2.

Заключение

В настоящей работе аппроксимативные неравенства типа А.А. Лигуна для 2π -периодических функций распространены на случай аналитических в единичном круге функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана. Для некоторых классов функций в пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ вычислены точные значения n -поперечников по Бернштейну, Гельфанду и Колмогорову, а также линейных и проекционных n -поперечников.

Автор искренне признателен В.И.Иванову за ценные замечания при подготовке статьи к печати.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем.заметки. 1967. т. 2, №5. с. 513–522.
2. Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем.заметки. 1976. Т. 20, № 3. С. 433–438.
3. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем.заметки. 1978. Т. 24, № 6. С.785–792.
4. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p . Тула.: ТулГУ, 1995. 192 с.
5. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников // Матем.заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764–775.
6. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем.заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 497–514.
7. Лангаршоев М.Р. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве L_2 // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т. 20, №5. С. 90–105.
8. Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближение некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана. // Доклады РАН. 2007. Т. 412, № 4. С. 466–469.
9. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // М.: Изд-во МГУ, 1976. 324 с.
10. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения // М.: Наука, 1969.
11. Юсупов Г.А. Наилучшее приближение аналитических в круге функций в пространстве Харди // Дисс... канд. физ.-мат. наук. Душанбе, 2004. 86 с.
12. Лангаршоев М.Р. Наилучшее приближение аналитических функций в пространстве Бергмана // Дисс... канд. физ.-мат. наук. Душанбе, 2008. 88 с.

REFERENCES

1. Chernykh N.I., 1967, "Best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2 ", *Math. Notes*, vol. 2., no 5, pp. 803–808.
2. Taikov L.V., 1976, "Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in L_2 ", *Math. Notes*, vol. 20, no 3, pp. 797–800.
3. Ligun A.A. 1978, "Some inequalities between best approximations and moduli of continuity in an L_2 space", *Math. Notes*, vol. 24, no 6, pp. 917–921.
4. Ivanov V.I., Smirnov O.I., 1995, "Jackson constants and Yung constants in L_p -spaces", *Tula: TSU*, 192 p. [in Russian]
5. Shabozov M.Sh, Yusupov G.A., 2011, "Best polynomial approximations in L_2 of classes of 2π -periodic functions and exact values of their widths", *Math. Notes*, vol. 90, no 5, pp. 748–757.
6. Vakarchuk S.B, Zabutnaya V.I., 2012, "Jackson–Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2 ", *Math. Notes*, vol. 92, no 4, pp. 458–472.
7. Langarshoev M.R., 2013, "The exact inequalities of Jackson–Stechkin type and the width values for some classes of functions in L_2 space", *Model. and analysis of inform. system*, vol. 20, no 5, pp. 90–105. [in Russian]
8. Shabozov M.Sh., Shabozov O.Sh., 2007, "On the best approximation of some classes of analytic functions in weighted Bergman spaces", *Dokl. of RAS*, vol. 412, no 4, pp. 466–469.
9. Tikhomirov V.M., 1976, "Some problems of theory of approximation", *Moscow: MSU*, 324 p. [in Russian]
10. Nikolskii S.M., 1977, "Approximation of functions of several variables and embedding theorems", *Moscow: Nauka*, 455 p. [in Russian]
11. Yusupov G.A., 2004, "The best approximation of analytic functions in the circle in Hardy space", *Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences*, Dushanbe, 86 p. [in Russian]
12. Langarshoev M.R., 2008, "The best approximation of analytic functions in the Bergman space", *Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences*, Dushanbe, 88 p. [in Russian]

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 519.217.1

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-145-159

**Парное дискретное соревнование
со свободным выбором маршрута**

Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов, Ю. И. Богатырева

Ларкин Евгений Васильевич — доктор технических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: elarkin@mail.ru

Привалов Александр Николаевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: privalov.61@mail.ru

Богатырева Юлия Игоревна — доктор педагогических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: kiit@tspu.ru

Аннотация

В работе рассмотрена проблема оптимизации расписания функционирования многопроцессорных систем. Решение данной проблемы предполагает формирование жесткого графика работы, который определяет ритм процессов, но на практике на функционирование систем оказывает влияние множество побочных факторов, которые делают интервалы времени выполнения работ случайными. В работе построена полумарковская модель формирования стохастического расписания в условиях парного соревнования. Показано, что если при функционировании системы возможно исполнение пунктов расписания в произвольном порядке, то эволюция полумарковского процесса проходит по гамильтонову пути. Доказано, что все возможные реализации гамильтоновых путей образуют полную группу несовместных событий. Отмечается, что вследствие наложения ограничений по характеру эволюции, процесс эволюции не является строго полумарковским, и поэтому предложен метод формирования из первичной модели, строго полумарковского процесса с древовидной структурой. Получены зависимости для расчета плотностей распределения и вероятностей переключения из состояний полумарковского процесса в сопряженные состояния, а также времени блуждания от стартового до поглощающих состояний. С использованием понятия парного дискретного соревнования и распределенного штрафа оценивается эффективность выбора гамильтонова пути одним из субъектов с учетом того, что алгоритм поведения его оппонента известен с точностью до построения полумарковской модели.

Ключевые слова: соревнование, маршрут, гамильтонов путь, полная группа несовместных событий, дискретное распределение, дисциплина штрафования.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов, Ю. И. Богатырева. Парное дискретное соревнование со свободным выбором маршрута // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 145–159.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 519.217.1

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-145-159

Paired discrete competition with a free route choice

E. V. Larkin, A. N. Privalov, Yu. I. Bogatyreva

Larkin Evgenii Vasil'evich — doctor of technical sciences, Tula State University (Tula).*e-mail: elarkin@mail.ru***Privalov Alexander Nikolaevich** — doctor of technical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: privalov.61@mail.ru***Bogatyreva Yulia Igorevna** — doctor of pedagogical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: kiit@tspu.ru***Abstract**

The paper considers the problem of optimizing the operation schedule for multiprocessor systems. The solution to this problem involves the formation of a rigid work schedule, which determines the rhythm of the processes, but in practice the functioning of systems is influenced by many side factors that make the intervals of work execution random. In the work, a semi-Markov model of the formation of a stochastic schedule in conditions of pair competition is constructed. It is shown that if during the functioning of the system it is possible to execute the items of the schedule in an arbitrary order, then the evolution of the semi-Markov process follows the Hamiltonian path. It is proved that all possible realizations of Hamiltonian paths form a complete group of incompatible events. It is noted that, due to the imposition of restrictions on the nature of evolution, the evolution process is not strictly semi-Markov, and therefore a method of forming a strictly semi-Markov process with a tree structure from the primary model is proposed. Dependences are obtained for calculating the distribution densities and the probabilities of switching from states of a semi-Markov process to conjugate states, as well as the time of walking from the starting to absorbing states. Using the concept of paired discrete competition and a distributed penalty, the effectiveness of the choice of a Hamiltonian path by one of the subjects is estimated, taking into account the fact that the algorithm of his opponent's behavior is known up to the construction of a semi-Markov model.

Keywords: competition, route, Hamiltonian path, full group of inconsistent events, discrete distribution, forfeit discipline.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

E. V. Larkin, A. N. Privalov, Yu. I. Bogatyreva, 2021, "Paired discrete competition with a free route choice", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 145–159.

Введение

Одним из важных факторов, определяющих эффективность функционирования многопроцессорных систем, является формирование задела на обработку данных, который затем выбирается программой-диспетчером в соответствии с принятым алгоритмом составления расписаний [1, 2, 3, 4]. Подобные задачи, помимо многопроцессорных систем, возникают на производстве, в бизнесе, военной сфере, спорте (Соревнования по «Охоте на лис») и т.п. [5, 6, 7,

8]. Рационально составленное расписание позволяет оптимально загружать вычислительные мощности многопроцессорных систем, технологическое оборудование на производстве, решать проблемы логистики в бизнесе, распределять ресурсы в военной сфере и т.п.

Задача оптимизации расписания обычно предполагает формирование жесткого графика работы, который определяет ритм процессов, но на практике на функционирование систем оказывает влияние множество побочных факторов, которые делают интервалы времени выполнения работ случайными. Кроме того, случайным является и выбор каждой следующей работы для исполнения. Поэтому адекватным подходом к моделированию случайной динамики является использование теорий марковских и полумарковских процессов [9, 10, 11, 12]. Однако прямое применение указанных теорий затруднительно вследствие ограничений, накладываемых на траектории блуждания по марковским/полумарковским цепям. Кроме того, для решения задач оптимизации необходимо использование аппарата, позволяющего оценивать эффективность принимаемых решений, в качестве которого может быть использован аппарат распределенного штрафования, изложенный в [13, 14]. С целью упрощения практического использования этого аппарата ниже он будет изложен в дискретном варианте [15]. Предложенный подход к моделированию не получил широкого распространения, что и объясняет актуальность работы.

Для реализации подхода сделаны следующие допущения:

- 1) в соревновании участвуют два субъекта, A и B , каждый из которых должен пройти маршрут, включающий J контрольных пунктов;
- 2) маршрут субъекта A начинается в пункте a_0 и заканчивается в пункте a_{J+1} ;
- 3) маршрут субъекта B начинается в пункте b_0 и заканчивается в пункте b_{J+1} ;
- 4) маршруты субъектов должны проходить через все без исключения контрольные пункты маршрутов по одному разу;
- 5) на последовательность прохождения контрольных пунктов субъектами не накладываются никаких ограничений;
- 6) после прохождения очередного контрольного пункта субъект немедленно, без задержек, выбирает в качестве цели следующий пункт и начинает движение к нему;
- 7) временные интервалы прохождения участков маршрутов между каждой парой контрольных пунктов являются случайными, величины временных интервалов зависят от участка маршрута и определяются с точностью до дискретного распределения;
- 8) субъекты соревнуются между собой, причем результат соревнования реализуется в виде штрафа, который проигравший субъект платит выигравшему субъекту;
- 9) сумма начисляемого штрафа определяется разностью номеров участков маршрута, временем, в течение которого эта разность сохраняется и дисциплиной распределенного штрафования.

Модель системы

Модель соревнования со свободным выбором маршрута приведена на рис. 1. Модель включает полумарковские процессы μ_A и μ_B [16], у которых

$$\mu_A = \{\tilde{A}, h_A(t)\}; \mu_B = \{\tilde{B}, h_B(t)\} \quad (1)$$

где $\tilde{A} = \{a_{0(A)}, a_{1(A)}, \dots, a_{i(A)}, \dots, a_{j(A)}, a_{J(A)+1}\}$, $\tilde{B} = \{b_{0(B)}, b_{1(B)}, \dots, b_{i(B)}, \dots, b_{j(B)}, b_{J(B)+1}\}$ — множества состояний; $h_A(t)$, $h_B(t)$ — полумарковские матрицы; t — время.

Вследствие того, что процессы (1) являются в известном смысле одинаковыми, для определения их свойств может быть исследован обобщенный процесс (рис. 1)

$$\{\tilde{\Xi}, h_{\Xi}(t)\} = \mu_{\Xi} \in \{\mu_A, \mu_B\}. \quad (2)$$

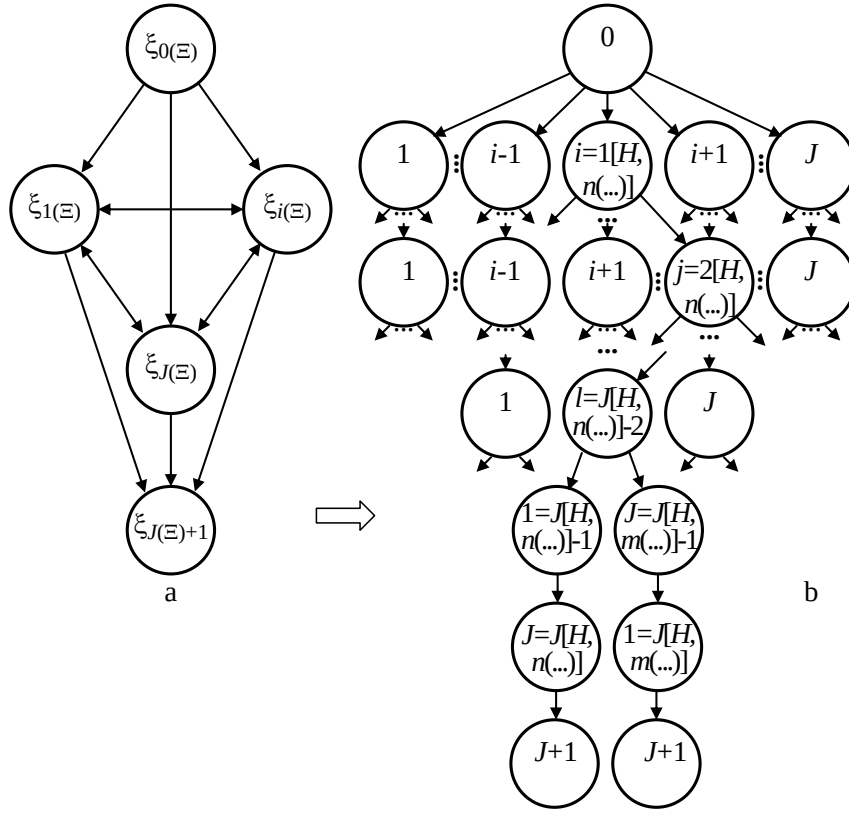


Рис. 1: Полумарковский процесс (а) и древовидная структура (b), поясняющая формирование гамильтонова пути.

Множество состояний процесса (2) имеет вид:

$$\tilde{\Xi} = \{ \xi_0(\Xi), \xi_1(\Xi), \dots, \xi_i(\Xi), \dots, \xi_J(\Xi), \xi_{J(\Xi)+1} \}, \quad (3)$$

где $\xi_0(\Xi)$ — состояния, моделирующее начальный пункт движения (точку старта соревнования); $\xi_{J(\Xi)+1}$ — поглощающие состояния, моделирующие конечный пункт движения (точку финиша соревнования); $\xi_1(\Xi), \dots, \xi_i(\Xi), \dots, \xi_J(\Xi)$ — состояния, моделирующие контрольные пункты соревнования.

Вследствие допущения 4) исключаяющего возврат в ранее пройденные контрольные пункты, на полумарковские матрицы из (1)

$$h_{\Xi}(t) = p_{\Xi} \otimes f_{\Xi}(t) = [h_{i(\Xi),j(\Xi)}(t)] = [p_{i(\Xi),j(\Xi)} \cdot f_{i(\Xi),j(\Xi)}(t)], \quad (4)$$

где p_{Ξ} — стохастическая матрица; $f_{\Xi}(t)$ — матрица плотностей распределения; $p_{i(\Xi),j(\Xi)}$, $f_{i(\Xi),j(\Xi)}(t)$ — вероятность и плотность распределения времени пребывания полумарковского процесса в состоянии $\xi_{i(\Xi)}$ с последующим переключением в состояние $\xi_{j(\Xi)}$, накладываются следующие ограничения:

$$p_{i(\Xi),j(\Xi)} \begin{cases} = 0, \text{ when } i(\Xi) = 0, j(\Xi) = J(\Xi) + 1, \\ \text{or } i(\Xi) = j(\Xi), \text{ or } i(\Xi) = J(\Xi) + 1; \\ = 1, \text{ when } i(\Xi) = J(\Xi), j(\Xi) = J(\Xi) + 1; \\ \neq 0 \text{ otherwise;} \end{cases} \quad (5)$$

$$\sum_{j(\Xi)=0}^J p_{i(\Xi),j(\Xi)} = \begin{cases} 1, \text{ when } i(\Xi) \neq J(\Xi) + 1; \\ 0, \text{ when } i(\Xi) = J(\Xi) + 1; \end{cases} \quad (6)$$

$$f_{i(\Xi),j(\Xi)}(t) \begin{cases} = \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \delta(t - \vartheta), \text{ when } i(\Xi) = 0, j(\Xi) = J(\Xi) + 1, \\ \text{or } i(\Xi) = j(\Xi), \text{ or } i(\Xi) = J(\Xi) + 1; \\ \delta(t), \text{ when } i(\Xi) = 0, j(\Xi) \leq J(\Xi); \\ \neq \lim_{\tau \rightarrow \infty} \delta(t - \tau) \text{ otherwise,} \end{cases} \quad (7)$$

где ϑ — вспомогательный параметр, имеющий размерность времени; $\delta(t)$ — δ -функция Дирака.

Как следует из (1), априорная модель представляет собой 2-параллельный полумарковский процесс [16] с ограничениями (5) – (7), эволюция которого происходит следующим образом. Из исходного состояния $\xi_{0(\Xi)}$ полумарковский процесс (2) переключается в одно из состояний подмножества $\{\xi_{1(\Xi)}, \dots, \xi_{i(\Xi)}, \dots, \xi_{J(\Xi)}\}$, причем в соответствии с допущением 4) в это состояние при дальнейшей эволюции процесс больше не возвращается. Эволюция завершается, когда полумарковский процесс, побывав во всех без исключения состояниях подмножества $\{\xi_{1(\Xi)}, \dots, \xi_{i(\Xi)}, \dots, \xi_{J(\Xi)}\}$, достигает поглощающего состояния $\xi_{J(\Xi)+1}$. Подобный характер эволюции указывает на то, что маршрут представляют собой прокладываемый субъектом из пункта $\xi_{0(\Xi)}$ в пункт $\xi_{J(\Xi)+1}$ гамильтонов путь [17, 18, 19], который может быть представлен в виде вектора

$$H_{n(\Xi)} = [\xi_{0(\Xi)}, \xi_{1[H,n(\Xi)]}, \dots, \xi_{i[H,n(\Xi)]}, \dots, \xi_{J[H,n(\Xi)]}, \xi_{J(\Xi)+1}]; \quad (8)$$

где $n(\Xi)$ — номер возможного сформированного гамильтонова пути; $\xi_{i[H,n(\Xi)]} \in \{\xi_{1(\Xi)}, \dots, \xi_{i(\Xi)}, \dots, \xi_{J(\Xi)}\}$; $1[H,n(\Xi)] \leq i[H,n(\Xi)] \leq J[H,n(\Xi)]$.

Индексы в элементах вектора (8) не повторяются, следовательно, указанное множество векторов формируется путем перестановок элементов $\{\xi_{1(\Xi)}, \dots, \xi_{i(\Xi)}, \dots, \xi_{J(\Xi)}\}$. Общее количество перестановок равно

$$N(\Xi) = J(\Xi)!. \quad (9)$$

Плотность распределения времени достижения поглощающего состояния $\xi_{J(\Xi)+1}$ из стартового состояния по гамильтонову пути (7) определяются по зависимости:

$$f_{n(\Xi)}(t) = L^{-1} \left[\prod_{i[H,n(\Xi)]=1}^{J[H,n(\Xi)]} L[f_{i[H,n(\Xi)]}(t)] \right]; \quad (10)$$

где $f_{i[H,n(\Xi)]}(t) \in f_{\Xi}(t)$, $1[H,n(\Xi)] \leq i[H,n(\Xi)] \leq J[H,n(\Xi)]$.

Для определения вероятностей движения по гамильтоновым путям следует доказать

утверждение. Факты достижения поглощающего состояния $\xi_{J(\Xi)+1}$ из их стартового состояния $\xi_{0(\Xi)}$ при блуждании по полумарковскому процессу (2) по всем возможным гамильтоновым путям (8) образуют полную группу несовместных событий [20, 21].

Доказательство. Несовместность событий следует из определения гамильтонова пути и утверждения, что все возможные пути подобного типа формируются за счет перестановок элементов в векторе (8). Перестановки не повторяются, следовательно, события несовместны.

Для доказательства полноты группы событий достаточно показать, что сумма вероятностей формирования всех возможных гамильтоновых путей на графах, определяющих структуры полумарковских процессов (1), равна единице.

Полнота группы доказывается методом математической индукции. Базой индукции является простейший полумарковский процесс ${}^1\mu_{\Xi}$ с множеством состояний

$${}^1\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}, \quad (11)$$

стохастическая матрица которого имеет вид:

$${}^1p = \begin{pmatrix} 0 & {}^1p_{0,1} & 0 \\ 0 & 0 & {}^1p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где выполняется ограничение (6), т.е. ${}^1p_{0,1} = {}^1p_{1,2} = 1$ (принадлежность индекса (Ξ) для краткости опущена).

В процессе ${}^1\mu_{\Xi}$ существует единственный гамильтонов путь

$${}^1H_1 = [\xi_0, \xi_1, \xi_2]. \quad (13)$$

Вероятность достижения $\xi_{2(\Xi)}$ из $\xi_{0(\Xi)}$ по единственному пути равна единице, т.е. для базы индукции утверждение выполняется.

Шагом индукции является добавление в полумарковский процесс четвертого состояния, после чего

$${}^1\mu_{\Xi} \rightarrow {}^2\mu_{\Xi}; \quad (14)$$

$${}^1\Xi \rightarrow {}^2\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\} \quad (15)$$

$${}^1p \rightarrow {}^2p = \begin{pmatrix} 0 & {}^2p_{0,1} & {}^2p_{0,2} & 0 \\ 0 & 0 & {}^2p_{1,2} & {}^2p_{1,3} \\ 0 & {}^2p_{2,1} & 0 & {}^2p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где выполняется ограничение (6), т.е. ${}^2p_{0,1} + {}^2p_{0,2} = 1$; ${}^2p_{1,2} + {}^2p_{1,3} = 1$; ${}^2p_{2,1} + {}^2p_{2,3} = 1$.

В полумарковском процессе ${}^2\mu_{\Xi}$ существует два гамильтоновых пути:

первый путь формируется, когда с вероятностью ${}^2p_{0,1}$ процесс переключается в состояние ξ_1 ;

второй путь формируется, когда с вероятностью ${}^2p_{0,2}$ процесс переключается в состояние ξ_2 .

В первом случае, поскольку последующий возврат в состояние ξ_1 невозможен, вероятность переключения в ξ_3 из ξ_2 определяется по зависимости

$${}^2\tilde{p}_{2,3} = \frac{{}^2p_{2,3}}{1 - {}^2p_{2,1}} = 1.$$

Во втором случае, поскольку последующий возврат в состояние ξ_2 невозможен, вероятность переключения в ξ_3 из ξ_1 определяется по зависимости

$${}^2\tilde{p}_{1,3} = \frac{{}^2p_{1,3}}{1 - {}^2p_{1,2}} = 1.$$

Таким образом, гамильтоновы пути ${}^2H_1 = [\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3]$ и ${}^2H_2 = [\xi_0, \xi_2, \xi_1, \xi_3]$, выбираемые с вероятностями ${}^2p_{0,1}$ и ${}^2p_{0,2}$, с вероятностями 1 каждый ведут в состояние ξ_3 . Но ${}^2p_{0,1} + {}^2p_{0,2} = 1$, значит и в этом случае события выбора гамильтоновых путей ${}^2H_1$ и ${}^2H_2$ составляют полную группу.

Для завершения доказательства следует предположить, что утверждение выполняется для полумарковского процесса ${}^j\mu_{\Xi}$ с множеством состояний

$${}^j\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \xi_{j+1}\}, \quad (17)$$

стохастическая матрица которого имеет вид:

$${}^jp = \begin{pmatrix} 0 & {}^jp_{0,1} & \dots & {}^jp_{0,i} & \dots & {}^jp_{0,j} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & {}^jp_{1,i} & \dots & {}^jp_{1,j} & {}^jp_{1,j+1} \\ & & & \dots & & & \\ 0 & {}^jp_{i,1} & \dots & 0 & \dots & {}^jp_{i,j} & {}^jp_{i,j+1} \\ & & & \dots & & & \\ 0 & {}^jp_{j,1} & \dots & {}^jp_{j,i} & \dots & 0 & {}^jp_{j,j+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где выполняются ограничение (6), т.е. $\sum_{i=1}^{j+1} j p_{l,i} = 1, 0 \leq l \leq j$.

В процессе $j\mu_{\Xi}$ существует $N = j!$ гамильтоновых путей $H_n = [\xi_0, \xi_{1[H,n]}, \dots, \xi_{i[H,n]}, \dots, \xi_{j[H,n]}, \xi_{j+1}]$, вида (8) каждый из которых получается в результате перестановок элементов $\xi_{i[H,n]} \in \{\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j\}$. Вероятность достижения ξ_{j+1} из ξ_0 по одному из возможных путей, по предположению, равна единице.

Шагом индукции является добавление в полумарковский процесс $j\mu_{\Xi}$ состояния ξ_{j+2} , после чего

$$j\mu_{\Xi} \rightarrow j+1\mu_{\Xi}; \quad (19)$$

$$j\Xi \rightarrow j+1\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \xi_{j+1}, \xi_{j+2}\} \quad (20)$$

$$j p \xrightarrow{j+1} p = \begin{pmatrix} 0 & j+1 p_{0,1} & \dots & j+1 p_{0,i} & \dots & j+1 p_{0,j} & j+1 p_{0,j} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & j+1 p_{1,i} & \dots & j+1 p_{1,j} & j+1 p_{0,j+1} & j+1 p_{0,j+2} \\ & & & & & & & \\ 0 & j+1 p_{i,1} & \dots & 0 & \dots & j+1 p_{i,j} & j+1 p_{i,j+1} & j+1 p_{i,j+2} \\ & & & & & & & \\ 0 & j+1 p_{j,1} & \dots & j+1 p_{j,i} & \dots & j+1 p_{j,j} & j+1 p_{j,j+1} & j+1 p_{j,j+2} \\ 0 & j+1 p_{j+1,1} & \dots & j+1 p_{j+1,i} & \dots & j+1 p_{j+1,j} & j+1 p_{j+1,j+1} & j+1 p_{j+1,j+2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где выполняется ограничение (6), т.е. $\sum_{i=1}^{j+2} j+1 p_{l,i} = 1, 0 \leq l \leq j+1$.

В полумарковском процессе $j+1\mu_{\Xi}$ существует $(j+1)!$ гамильтоновых путей, начинающихся в ξ_0 и оканчивающихся ξ_{j+2} , в том числе по $j!$ путей, которые могут быть сформированы после первого переключения из ξ_0 в $\xi_i, 1 \leq i \leq j+1$ с вероятностью $j+1 p_{0,i}$ на подмножестве $\{\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_j, \xi_{j+1}, \xi_{j+2}\}$. Вследствие того, что возврат в ξ_i из состояний подмножества $\{\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_j, \xi_{j+1}, \xi_{j+2}\}$ невозможен (по определению гамильтонова пути) вероятности переключения в остальные состояния подмножества должны быть пересчитаны по зависимости

$$j+1 \tilde{p}_{l,k} = \frac{j+1 p_{l,k}}{1 - 2 p_{l,i}}, 0 \leq l, k \leq j+1, l, k \neq i. \quad (21)$$

При этом очевидно, что ограничение (6), накладываемое на значения вероятностей, сохраняется, т.е.

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{j+2} j+1 \tilde{p}_{l,k} = 1, 0 \leq l \leq j+1, l \neq i. \quad (22)$$

Это, в свою очередь, означает, что после первого переключения полумарковского процесса $j+1\mu_{\Xi}$ с вероятностями $j+1 p_{0,i}$ формируется $j+1$ полумарковских процессов, для каждого из которых, в соответствии с предположением, выполняется условие утверждения. Но $\sum_{i=1}^{j+1} j+1 p_{0,i} = 1$, и это означает, что сумма вероятностей достижения состояния ξ_{j+2} по всем возможным гамильтоновым путям равна единице, что и доказывает утверждение.

Следствие из утверждения. Процесс движения по гамильтонову пути не является строго полумарковским, так как после каждого переключения в состояние ξ_i оно исключается из дальнейшего возможного продолжения пути, и вероятности переключения в оставшиеся состояния-претенденты на гамильтонов путь должны быть пересчитаны, чтобы выполнялось условие (6). Таким образом, вероятности каждого следующего переключения, в соответствии с доказанным утверждением, зависят от предыстории процесса.

С использованием доказанного утверждения и следствия из него может быть получена рекурсивная процедура расчета вероятностей формирования гамильтонова пути $H_n(\Xi)$, аналогичная изложенной в [22], В соответствии с ней полумарковский процесс преобразуется в

процесс с древовидной структурой, показанный на рис. 1 б. Без нарушения общности можно считать, что в гамильтоновом пути (8) $\xi_{1[H,n(\Xi)]} = \xi_{1(\Xi)}, \dots, \xi_{i[H,n(\Xi)]} = \xi_{i(\Xi)}, \dots, \xi_{J[H,n(\Xi)]} = \xi_{J(\Xi)}$.

Рекурсивная процедура заключается в следующем.

На первом шаге рекурсии вероятность переключения в состояние $\xi_{1(\Xi)}$ определяется как

$${}^0p_{0[\Xi],1[\Xi]} = p_{1[H,(n)]} = p_{0[\Xi],1[\Xi]}, \quad (23)$$

После первого переключения состояние $\xi_{1[H,n(\Xi)]} = \xi_{1(\Xi)}$ уже не может быть включено в гамильтонов путь, поэтому вероятности дальнейших возможных переключений должны быть пересчитаны по формуле

$${}^1p_{i(\Xi),j(\Xi)} = \frac{{}^0p_{i(\Xi),j(\Xi)}}{1 - {}^0p_{i(\Xi),1(\Xi)}}, \quad 2(\Xi) \leq i(\Xi), j(\Xi) \leq 2(\Xi), \quad (24)$$

где ${}^0p_{i(\Xi),j(\Xi)} = p_{i(\Xi),j(\Xi)}$, $1(\Xi) \leq i(\Xi), j(\Xi) \leq 2(\Xi)$.

При втором переключении вероятность перехода в состояние $\xi_{1(\Xi)}$ определяется как

$${}^1p_{1[\Xi],2[\Xi]} = p_{2[H,(n)]}. \quad (25)$$

Пересчет вероятностей после второго переключения осуществляется по формуле

$${}^2p_{i(\Xi),j(\Xi)} = \frac{{}^1p_{i(\Xi),j(\Xi)}}{1 - {}^1p_{i(\Xi),1(\Xi)}}, \quad 3(\Xi) \leq i(\Xi), j(\Xi) \leq 2(\Xi). \quad (26)$$

При l -м переключении вероятность перехода в состояние $\xi_{l(\Xi)}$ определяется как

$${}^lp_{l[\Xi]-1,l[\Xi]} = p_{l[H,(n)]}. \quad (27)$$

Пересчет вероятностей после l -го переключения осуществляется по формуле

$${}^{l+1}p_{i(\Xi),j(\Xi)} = \frac{{}^lp_{i(\Xi),j(\Xi)}}{1 - {}^lp_{i(\Xi),1(\Xi)}}, \quad l(\Xi) + 1 \leq i(\Xi), j(\Xi) \leq 2(\Xi). \quad (28)$$

И наконец, при $(J+1)$ -м переключении вероятность перехода в состояние $\xi_{J(\Xi)+1}$ равна единице, поскольку $\xi_{J(\Xi)}$ и $\xi_{J(\Xi)+1}$ являются предпоследним и последним состояниями n -го гамильтонова пути.

В итоге вероятность выбора гамильтонова пути (8), плотность распределения времени движения по которому рассчитывается по зависимости (10), равна

$$p_n(\Xi)(t) = \prod_{i[H,n(\Xi)]=1}^{J[H,n(\Xi)]} p_{i[H,n(\Xi)]}. \quad (29)$$

Общая плотность распределения времени достижения ξ_{j+1} из ξ_j по одному из возможных гамильтоновых путей определяется стохастическим суммированием плотностей (10):

$$f_{\Xi}(t) = \sum_{n(\Xi)=1}^{n(\Xi)} p_{n(\Xi)} f_{n(\Xi)}(t). \quad (30)$$

Следует отметить, что в (30) формируется чистая плотность распределения, ξ_{j+1} из ξ_j .

Оценка эффективности соревнований со свободным выбором маршрута

Для оценки эффективности соревнования между участниками A и B следует определить, для какого из субъектов оценивается эффективность. Ниже рассчитывается эффективность стратегии участника A , который определяет свой порядок прохождения контрольных пунктов маршрута. Без нарушения общности можно предположить, что порядок прохождения маршрута указанным субъектом является жестким и определяется как

$$H_A = [a_{0(A)}, a_{1(A)}, \dots, a_{i(A)}, \dots, a_{j(A)}, a_{J(A)+1}] = \quad (31)$$

где $a_{i(A)} \in \tilde{A}$ — состояния полумарковского процесса μ_A .

С точки зрения субъекта A маршрут субъекта B является случайным, о котором известно только то, что он представляет собой гамильтонов путь с номером $n(B)$, и поэтому

$$H_{n(B)} = [b_{0(b)}, b_{1[H,n(B)]}, \dots, b_{i[H,n(B)]}, \dots, b_{J[H,n(B)]}, b_{J(B)+1}], \quad (32)$$

где $b_{i[H,n(B)]} \in \tilde{B}$ — состояния полумарковского процесса μ_B .

Полумарковские процессы являются дискретными, и поэтому распределения времени пребывания в состояниях определяются как

для гамильтонова пути H_A -

$$f_{i(A)} = \sum_{k[i(A)]=0}^K p_{k[i(A)]} \delta(t - \tau \cdot k[i(A)]), \quad (33)$$

где τ — шаг дискретизации, одинаковый для всех распределений; $p_{k[i(A)]}$ — значения отсчетов; $\sum_{k[i(A)]=0}^K p_{k[i(A)]} = 1$; $\delta(t)$ — δ -функция Дирака; K — общее количество отсчетов в дискретном распределении, одинаковое для всех распределений.

для гамильтонова пути $H_{n(B)}$ -

$$f_{i[H,n(B)]} = \sum_{k\{i[H,n(B)]\}=0}^K p_{k\{i[H,n(B)]\}} \delta(t - \tau \cdot k\{i[H,n(B)]\}), \quad (34)$$

где $p_{k\{i[H,n(B)]\}}$ — значения отсчетов; $\sum_{k\{i[H,n(B)]\}=0}^K p_{k\{i[H,n(B)]\}} = 1$.

Индексы при значениях отсчетов распределений (33), (34) могут быть сведены в следующие множества, упорядоченные по возрастанию:

$$X_{i(A)} = (1[i(A)], \dots, k[i(A)], \dots, K[i(A)]); \quad (35)$$

$$X_{i[H,n(B)]} = (1[i[H,n(B)]], \dots, k[i[H,n(B)]], \dots, K[i[H,n(B)]]). \quad (36)$$

Декартовы произведения множеств (35), (36) дают множества детерминированных реализаций гамильтоновых путей;

$$\begin{aligned} \prod_{i(A)=1(A)}^{J(A)} X_{i(A)} &= \{(0[1(A)], \dots, 0[i(A)], \dots, 0[J(A)]), \dots, \\ & (k[1(A)], \dots, k[i(A)], \dots, k[J(A)]), \dots, (K[1(A)], \dots, K[i(A)], \dots, K[J(A)])\} = \\ &= \{1(X, A), \dots, k(X, A), \dots, K(X, A)\}; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \prod_{i[H,n(B)]=1[H,n(B)]}^{J[H,n(B)]+1} X_{i[H,n(B)]} &= \{[0(1[H,n(B)]), \dots, 0(i[H,n(B)]), \dots, 0(J[H,n(B)])], \\ & \dots, k(1[H,n(B)]), \dots, k(i[H,n(B)]), \dots, k(J[H,n(B)]), \dots, \\ & K(1[H,n(B)]), \dots, K(i[H,n(B)]), \dots, K(J[H,n(B)])\} = \\ &= \{1[X, n(B)], \dots, k[X, n(B)], \dots, K[X, n(B)]\}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $k(X, A)$, $k[X, n(B)]$ — индексы-векторы, определяющие номер реализации маршрутов.

Каждый выбранный маршрут предполагает его прохождение по жесткому расписанию. Общее количество выбранных маршрутов равно

$$|K(X, A)| = |K[X, n(B)]| = K^j. \quad (39)$$

где $|\dots|$ — мощность множества.

Вероятности формирования $k(X, A)$ -й и $k[X, n(B)]$ -й реализаций маршрутов и плотности распределения времени движения по ним определяются по зависимостям:

$$p_{k(X,A)} = \prod_{\substack{i(A)=1(A) \\ k[i(A)] \in k(X,A)}}^{J(A)} p_{k[i(A)]}; p_{k[X,n(B)]} = \prod_{\substack{i[H,n(B)]=1[H,n(B)] \\ k[i[H,n(B)]] \in k[X,n(B)]}}^{J[H,n(B)]} p_{k[i[H,n(B)]]}; \quad (40)$$

$$f_{k(X,A)}(t) = \delta \left(t - \sum_{\substack{i(A)=1(A) \\ k[i(A)] \in k(X,A)}}^{J(A)} \tau_{k[i(A)]} \right); f_{k[X,n(B)]}(t) = \delta \left(t - \sum_{\substack{i[H,n(B)]=1[H,n(B)] \\ k[i[H,n(B)]] \in k[X,n(B)]}}^{J[H,n(B)]} \tau_{k[i[H,n(B)]]} \right).$$

Выделение $k(X, A)$ -й и $k[X, n(B)]$ реализаций маршрутов позволяет оценить штраф, который субъект A получает от субъекта B . Введем вспомогательные переменные $\theta(A)$ и $\theta(B)$, которые имеют размерность времени. Рекурсивная процедура начинается в функциональном состоянии $[0(A), 0(B)]$, при этом ни одного переключения сделано не было, и $r = 0$.

На первой шаге рекурсии должна быть выполнена подстановка $\theta_0(A) := \tau_{k[1(A)]}$ и $\theta_0(B) := \tau_{k[1[H,n(B)]]}$ и временные интервалы $\theta_0(A)$, $\theta_0(B)$ начинают соревноваться между собой. Возможный исход соревнования определяется следующим образом:

- а) если $\theta_0(A) < \theta_0(B)$, то побеждает субъект A , и $\Theta_0^* = \{\theta_0^*(A)\} = \min\{\theta_0(A), \theta_0(B)\}$, $\theta_0^* := \theta_0^*(A)$, $\tilde{r} = 1$;
- б) если $\theta_0(A) > \theta_0(B)$, то побеждает субъект B , и $\Theta_0^* = \{\theta_0^*(B)\} = \min\{\theta_0(A), \theta_0(B)\}$, $\theta_0^* := \theta_0^*(B)$, $\tilde{r} = 1$;
- с) если $\theta_0(A) = \theta_0(B)$, то имеет место эффект ничьей и $\Theta_0^* = \{\theta_0^*(A), \theta_0^*(B)\} = \min\{\theta_0(A), \theta_0(B)\}$, $\theta_0^* := \theta_0^*(A) = \theta_0^*(B)$, $\tilde{r} = 2$.

Сумма штрафа определяется по зависимости [13. 14]:

$$C_{k(X,A),k[X,n(B)],0} = \int_0^{\theta_0^*} c_{1(A),1[H,n(B)]}(t) dt, \quad (41)$$

где $c_{1(A),1[H,n(B)]}(t)$ — дисциплина штрафования субъектом A субъекта B , если субъекты находятся в первых состояниях гамильтоновых путей; $C_{k(X,A),k[X,n(B)],0}$ — штраф, который получает субъект A от субъекта B , если первый субъект реализует $k(X, A)$ -ю траекторию, второй субъект реализует $k[X, n(B)]$ -ю траекторию, и не было никаких переключений, кроме переключения в первые состояния гамильтоновых путей ($r = 0$).

Для подготовки следующего этапа рекурсии должны быть сделаны следующие подстановки:

индексы интервалов $\theta_0(A)$, $\theta_0(B)$, и элемента $A_{1(A),1(B)}(t)$ должны быть заменены на следующие -

$$r := 0 + \tilde{r}; \quad (42)$$

$$i(A) := \begin{cases} i(A) + 1 \text{ in the case a); c);} \\ i(A) \text{ in the case a);} \end{cases} \quad (43)$$

$$i(B) := \begin{cases} i(B) + 1 \text{ in the case b), c);} \\ i(B) \text{ in the case a);} \end{cases} \quad (44)$$

временные интервалы, которые будут соревноваться далее, должны быть скорректированы следующим образом -

$$\theta_r(A) := \begin{cases} T_{2(A)} \text{ in the case s a), c);} \\ \theta_0(A) - \theta_0^* \text{ in the case b);} \end{cases} \quad (45)$$

$$\theta_s(B) := \begin{cases} T_{2(B)} \text{ in the case s b), c);} \\ \theta_0(A) - \theta_0^* \text{ in the case a);} \end{cases} \quad (46)$$

Таким образом, на второй фазе рекурсии будут соревноваться жесткие временные интервалы $\theta_r(A)$ и $\theta_r(B)$, где r определяется по зависимости (42).

Допустим, что на очередной фазе рекурсии, после r переключений вектор функционального состояния имеет вид $[i(A), i(B)]$, и между собой соревнуются временные интервалы $\theta_r(A)$ и $\theta_r(B)$, которые, также, как и индекс r , формируются на предыдущих фазах рекурсии. Результаты соревнования выражаются следующим образом:

- а) если $\theta_r(A) < \theta_r(B)$, то выигрывает субъект A , и $\Theta_r^* = \{\theta_r^*(A)\} = \min\{\theta_r(A), \theta_r(B)\}$, $\theta_r^* := \theta_r^*(A)$, $\tilde{r} = 1$;
- б) если $\theta_r(A) > \theta_r(B)$, то выигрывает субъект B , и $\Theta_r^* = \{\theta_r^*(B)\} = \min\{\theta_r(A), \theta_r(B)\}$, $\theta_r^* := \theta_r^*(B)$, $\tilde{r} = 1$;
- с) если $\theta_r(A) = \theta_r(B)$, то имеет место эффект ничьей $\Theta_r^* = \{\theta_r^*(A), \theta_r^*(B)\} = \min\{\theta_r(A), \theta_r(B)\}$, $\tilde{r} = 2$.

Величина штрафа рассчитывается следующим образом:

$$C_{k(X,A),k[X,n(B)],r} = \int_0^{\theta_r^*} c_{i(A),i[H,n(B)]}(t) dt. \quad (47)$$

Для подготовки следующей фазы рекурсии должны быть сделаны следующие подстановки:

$$r := r + \tilde{r}; \quad (48)$$

индексы распределенного штрафа $c_{i(A),j(B)}(t)$ должны быть изменены в соответствии с (43), (44);

временные интервалы, которые будут участвовать в соревновании дальше, определяются выражениями:

$$\theta_r(A) := \begin{cases} T_{i(A)} \text{ in the case s a), c);} \\ \theta_r(A) - \theta_r^* \text{ in the case b);} \end{cases} \quad (49)$$

$$\theta_r(B) := \begin{cases} T_{i(B)} \text{ in the case s b), c);} \\ \theta_r(A) - \theta_r^* \text{ in the case a).} \end{cases} \quad (50)$$

Допустим, что на последней стадии рекурсии на маршруте остается только субъект A , и остаток времени, который он тратит на преодоление J -го этапа равен θ_{R-1}^* . Величина штрафа рассчитывается следующим образом:

$$C_{k(X,A),k[X,n(B)],R-1} = \int_0^{\theta_{R-1}^*} c_{J(A)-1,J[H,n(B)]}(t) dt \quad (51)$$

Общая сумма штрафа, который субъект A получает от субъекта B определяется последовательно: суммированием штрафов по стадиям маршрута, стохастическим суммированием по траекториям и стохастическим суммированием по маршрутам по зависимости

$$C_{A \leftarrow B} = \sum_{n(B)}^{N(B)} p_{n(B)} \cdot \sum_{k[X,n(B)]=1}^{J[X,n(B)]} p_{k[X,n(B)]} \cdot \sum_{k(X,A)=1}^{J(X,A)} p_{k(X,A)} \times \sum_r C_{k(X,A),k[X,n(B)],r}, \quad (52)$$

где $p_{n(B)}$ рассчитывается по зависимости (29).

Заключение

Мы представили соревнование как прохождение контрольных пунктов в произвольном порядке. Поскольку в этой игре сумма штрафа зависит от сочетания пунктов, в которых в настоящее время находятся участники соревнования, выбор порядка прохождения контрольных пунктов существенно влияет на сумму штрафа, а значит, вектор гамильтонова пути может быть варьируемой дискретной переменной в задаче оптимизации. Рекуррентная процедура оценки суммы штрафа является ключом к формированию оптимальных маршрутов обхода контрольных пунктов. Дальнейшие исследования в данной области могут быть направлены как на решение общей задачи поиска указанных стратегий, так и на разработку прикладных алгоритмов оптимизации поведения участников соревнования при прохождении маршрута.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ по проекту 19-47-710004_p_a.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Haefner J. W. Parallel computers and individual-based models: an overview // Individual-based models and approaches in ecology, Chapman and Hall/CRC, 2018, pp. 126 - 164.
2. Gupta C.B., Optimization techniques in operation research, 2-nd Kindle edition. U.K. International Publishing House, 2012, 386 p.
3. Wooldridge M., An Introduction to Multi-Agent Systems. 2nd Edition. Chichester, U.K: John Wiley & Sons, 2009, 484 p.
4. Deng C. et al., An effective grid-based and density-based spatial clustering algorithm to support parallel computing // Pattern Recognition Letters, 2018, vol. 109. pp.. 81 - 88.
5. Pinedo M.L., Scheduling. Theory: Algorithms and systems // Springer. Science+Business media, 2016, 670 p.
6. Khodr Y.M., Scheduling Problems and Solutions (Computer Science, Technology and Application) // Nova Science Pub Inc., 2012, 330 p.
7. Drozdowski M., Scheduling for Parallel Processing (Computer Communications and Networks) // Springer, 2009, 386 p.
8. Gawiejnowicz S., Time-Dependent Scheduling (Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series). Springer, 2008, 380 p.
9. Ching W.K., Huang X., Ng M.K., Siu T.K., Markov Chains: Models, Algorithms and Applications /// International Series in Operations Research & Management Science, 2013, vol. 189, Springer Science + Business Media NY, 241 p.
10. Yang T., Zhang L., Yin X., Time-varying gain-scheduling-error mean square stabilization of semi-Markov jump linear systems // IET Control Theory & Applications, 2016, vol. 10. Iss. 11, pp. 1215 – 1223.
11. Jiang Q., Xi H.-S., Yin B.-Q., Event-driven semi-Markov switching state-space control processes // IET Control Theory & Applications vol. 6, Iss. 12, 2012, pp. 1861 – 1869.
12. Janssen J., Manca R., Applied Semi-Markov processes // Springer US, 2005, 310 p.
13. Ivutin A.N, Larkin E.V., Simulation of Concurrent Games // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, Chelyabinsk, 2015, vol. 8. no. 2, pp. 43 - 54.

14. Larkin E.V., Ivutin A.N., Kotov V.V., Privalov A.N., Simulation of Relay-races // Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 117 - 128.
15. Larkin E., Bogomolov A., Privalov A., Discrete model of mobile robot assemble fault-tolerance // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics) 2019, vol. 11659 LNAI, pp. 204-215.
16. Akimenko, T.A., Larkin, E.V., The temporal characteristics of a wandering along parallel semi-Markov chains // Communications in Computer and Information Science. 4th International Conference on Data Mining and Big Data, Chiang Mai; Thailand, 2019, vol. 1071, pp. 80-89.
17. Bielecki T.R., Jakubowski J., Niewęłowski M., Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence // Stochastic Processes and their Applications, 2017, vol. 127, no 4, pp. 1125–1170.
18. Deo N., Graph theory with applications to Engineering and computer science // N.Y.: Dover Publications, 2016, 496 p.
19. Oltean M., A light-based device for solving the Hamiltonian path problem // Unconventional Computing. Lecture Notes in Computer Science. Unconventional Computing, 2006, vol. 4135 Springer LNCS, pp. 217–227.
20. Björklund A., Determinant sums for undirected Hamiltonicity // Proc. 51-st IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS '10), 2010, pp. 173–182.
21. Kobayashi H., Marl B.L., Turin W., Probability, Random Processes and Statistical Analysis // Cambridge University Press, 2012, 812 p.
22. Grimmett G.R., Stirzaker D.R., Probability and Random Processes // Oxford: Clarendon Press, 2001, 608 p.
23. Larkin E.V., Ivutin A.N., Troshina A., Model of interruptions in Swarm unit // Advances in swarm intelligence. Proceedings of 8-th International conference ICSI, Fukuoka, Japan. 2017, part 1, pp. 50 - 59.

REFERENCES

1. Haefner J. W., 2018, “*Parallel computers and individual-based models: an overview*” In: Individual-based models and approaches in ecology, Chapman and Hall/CRC, pp. 126 - 164.
2. Gupta C.B., 2012, Optimization techniques in operation research, 2-nd Kindle edition. U.K. International Publishing House, 386 p.
3. Wooldridge M., 2009, An Introduction to Multi-Agent Systems. 2nd Edition. Chichester, U.K: John Wiley & Sons, 484 p.
4. Deng C. et all., 2018, *An effective grid-based and density-based spatial clustering algorithm to support parallel computing*, In: Pattern Recognition Letters, vol. 109. pp.. 81 - 88.
5. Pinedo M.L., 2016, *Scheduling. Theory: Algorithms and systems*, Springer. Science+Business media, 670 p.
6. Khodr Y.M., 2012, *Scheduling Problems and Solutions (Computer Science, Technology and Application)*, Nova Science Pub Inc., 330 p.

7. Drozdowski M., 2009, *Scheduling for Parallel Processing (Computer Communications and Networks)*, Springer, 386 p.
8. Gawiejnowicz S., 2008, *Time-Dependent Scheduling (Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series)*. Springer, 380 p.
9. Ching W.K., Huang X., Ng M.K., Siu T.K., 2013, *Markov Chains: Models, Algorithms and Applications, In: International Series in Operations Research & Management Science*, vol. 189, Springer Science + Business Media NY, 241 p.
10. Yang T., Zhang L., Yin X., 2016, *Time-varying gain-scheduling-error mean square stabilization of semi-Markov jump linear systems In: IET Control Theory & Applications*, vol. 10. Iss. 11, pp. 1215 – 1223.
11. Jiang Q., Xi H.-S., Yin B.-Q., 2012, *Event-driven semi-Markov switching state-space control processes, In: IET Control Theory & Applications*, vol. 6, Iss. 12, pp. 1861 – 1869.
12. Janssen J., Manca R., 2005, *Applied Semi-Markov processes*. Springer US, 310 p.
13. Ivutin A.N., Larkin E.V., 2015, *Simulation of Concurrent Games In: Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, Chelyabinsk, vol. 8. no. 2, pp. 43 - 54.
14. Larkin E.V., Ivutin A.N., Kotov V.V., Privalov A.N., 2016, *Simulation of Relay-races In: Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, vol. 9, no. 4, pp. 117 - 128.
15. Larkin E., Bogomolov A., Privalov A., 2019, *Discrete model of mobile robot assemble fault-tolerance In: Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, vol. 11659 LNAI, pp. 204-215.
16. Akimenko, T.A., Larkin, E.V., 2019, *The temporal characteristics of a wandering along parallel semi-Markov chains In: Communications in Computer and Information Science. 4th International Conference on Data Mining and Big Data*, Chiang Mai; Thailand, vol. 1071, pp. 80-89.
17. Bielecki T.R., Jakubowski J., Niewęłowski M., 2017, *Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence In: Stochastic Processes and their Applications*, vol. 127, no 4, pp. 1125–1170.
18. Deo N., 2016, *Graph theory with applications to Engineering and computer science*. N.Y.: Dover Publications, 496 p.
19. Oltean M., 2006, *A light-based device for solving the Hamiltonian path problem In: Unconventional Computing. Lecture Notes in Computer Science*. Unconventional Computing, vol. 4135 Springer LNCS, pp. 217–227.
20. Björklund A., 2010, *Determinant sums for undirected Hamiltonicity In: Proc. 51-st IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS '10)*, pp. 173–182.
21. Kobayashi H., Marl B.L., Turin W., 2012, *Probability, Random Processes and Statistical Analysis*, Cambridge University Press, 812 p.
22. Grimmett G.R., Stirzaker D.R., 2001, *Probability and Random Processes*, Oxford: Clarendon Press, 608 p.

-
23. Larkin E.V., Ivutin A.N., Troshina A., 2017, *Model of interruptions in Swarm unit In: Advances in swarm intelligence. Proceedings of 8-th International conference ICSI 2017*, Fukuoka, Japan. part 1, pp. 50 - 59.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 514.172.4+514.177.2

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-160-182

Завершение доказательства теоремы Брунна
элементарными средствами

Ф. М. Малышев

Малышев Фёдор Михайлович — Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
(г. Москва).e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Аннотация

Брунн в 1887 году сформулировал теорему о трёх параллельных сечениях выпуклого тела с одинаковыми по площади крайними сечениями, но не получающимися друг из друга параллельным сдвигом, утверждающую, что площадь среднего сечения строго больше, а корректно доказал, как заметил Минковский, что только не меньше. Исключение равенства, считавшегося до сих пор наиболее трудным в теореме, доказывается вплоть до настоящего времени многими авторами, привлекая серьёзную математику. В статье предлагается принципиально иной геометрический подход к доказательству теоремы, благодаря чему для корректного завершения исходного доказательства Брунна можно ограничиться элементарными средствами, доступными школьникам, минуя трудности с равенством, причём предлагаемые рассуждения распространяются на все размерности, как и сама теорема, на что указывал Брунн. Пусть, в общем случае, $V_n(Q)$ — n -мерный объём тела $Q \subset \mathbb{R}^n$, L_0, L_1 — параллельные гиперплоскости в $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащие соответственно выпуклые тела P_0, P_1 , а L — параллельная им гиперплоскость, находящаяся строго между ними, и P — пересечение L с выпуклой оболочкой объединения $P_0 \cup P_1$. Теорема Брунна утверждает, что если P_1 не получается из P_0 параллельным переносом и $V_n(P_1) = V_n(P_0) = v > 0$, то $V_n(P) > v$. В 1887 году Брунн строго доказал, что $V_n(P) \geq v$, используя эффективный приём *одновременного одинакового деления* объёмов P_0, P_1 гиперплоскостью в $\mathbb{R}^{n+1}$. В предлагаемой статье это называется *рассечением Брунна*. Для строго неравенства $V_n(P) > v$ оставалось небольшим "шевелением" перейти от тела P_1 к другому выпуклому телу $\tilde{P}_1$, $V_n(\tilde{P}_1) = v$, так, что $V_n(P) > V_n(\tilde{P})$, где $\tilde{P}$ — новое сечение в гиперплоскости L , возникающее после замены P_1 на $\tilde{P}_1$. Поскольку $V_n(\tilde{P}) \geq v$, то $V_n(P) > v$. Проще всего такая замена P_1 на $\tilde{P}_1$ осуществляется в случае выпуклых многогранников P_0 , которыми можно приближать выпуклые тела сколь угодно близко. Совсем просто требуемая замена P_1 на $\tilde{P}_1$ осуществляется, когда в качестве P_0 выступают n -мерные симплексы, на которые выпуклый многогранник может разбиваться *рассечениями Брунна*. До настоящего времени не предлагался очерченный выше достаточно наивный естественный геометрический способ доказательства строгого неравенства $V_n(P) > v$ как бы в лоб может из-за того, что изначально теорема формулировалась не для выпуклых многогранников P_0, P_1 , а для произвольных выпуклых тел. Главная же причина, по мнению автора, заключается в алгебраическом представлении $P = (1-t)P_0 + tP_1$, где t — отношение расстояния от L_0 до L к расстоянию от L_0 до L_1 , $0 < t < 1$. Это приводит к соблазну переходить в доказательствах теоремы от $\mathbb{R}^{n+1}$ к $\mathbb{R}^n$ и использовать эквивалентную формулировку теоремы, считая $L_0 = L_1 = \mathbb{R}^n$. В результате от ситуации общего положения, когда $L_0 \neq L_1$, перешли в особенность $L_0 = L_1$, в условиях которой существенно уменьшаются возможности для привлечения геометрической интуиции и, как следствие, уменьшаются возможности для более простых наглядных геометрических обоснований неравенства $V_n(P) > v$. Настоящей статьёй показывается, что при доказательстве теоремы в эквивалентной формулировке следует, напротив, пространство $\mathbb{R}^n$ включать в $\mathbb{R}^{n+1}$ и использовать изначально формулировку теоремы, когда основным инструментом доказательства элементарными средствами становится *рассечение*

Брунна. Справедливости ради следует отметить, что многочисленные приложения настоящей теоремы, полученные Минковским и другими авторами, связаны как раз с её эквивалентной формулировкой, со смешанными объёмами, с алгебраическими представлениями $P = (1 - t)P_0 + tP_1$, называемыми суммами Минковского.

Ключевые слова: выпуклые многогранники, симплексы, треугольники, объёмы, неравенство Брунна – Минковского.

Библиография: 31 названий.

Для цитирования:

Ф. М. Малышев. Завершение доказательства теоремы Брунна элементарными средствами // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 160–182.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 514.172.4+514.177.2

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-160-182

Completion of the proof of Brunn's theorem by elementary means

F. M. Malyshev

Malyshev Fedor Mikhailovich — Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Abstract

Brunn in 1887 formulated a theorem on three parallel sections of a convex body with extreme sections of the same area, but not obtained from each other by a parallel shift, asserting that the area of the middle section is strictly larger, and correctly proved, as Minkowski noted, that only not less. The elimination of equality, which was still considered the most difficult in the theorem, has been proved up to the present time by many authors, using serious mathematics. The article proposes a fundamentally different geometric approach to the proof of the theorem, due to which, for the correct completion of Brunn's original proof, one can restrict oneself to the elementary means available to schoolchildren, bypassing the difficulties with equality. The proposed reasoning extends to all dimensions, like the theorem itself, as pointed out by Brunn. Let, in the general case, $V_n(Q)$ be the n -dimensional volume of the body $Q \subset \mathbb{R}^n$, L_0, L_1 be parallel hyperplanes in $\mathbb{R}^{n+1}$, containing respectively convex bodies P_0, P_1 , and L is a parallel hyperplane, located strictly between them, and P is the intersection of L with the convex hull $P_0 \cup P_1$. Brunn's theorem states that if P_1 is not obtained from P_0 by parallel translation and $V_n(P_1) = V_n(P_0) = v > 0$, then $V_n(P) > v$. In 1887, Brunn rigorously proved that $V_n(P) \geq v$ using the effective trick of the division of the volumes P_0, P_1 by a hyperplane in $\mathbb{R}^{n+1}$. In this article, this is called *Brunn cuts*. For the strictly inequality $V_n(P) > v$, it remained a small "perturbation" go from the body P_1 to another convex body $\tilde{P}_1$, $V_n(\tilde{P}_1) = v$, so that $V_n(P) > V_n(\tilde{P})$, where $\tilde{P}$ is a new section in the hyperplane L arising after replacing P_1 with $\tilde{P}_1$. Since $V_n(\tilde{P}) \geq v$, then $V_n(P) > v$. The easiest way is to replace P_1 with $\tilde{P}_1$ in the case of convex polytopes P_0 , which can approximate convex bodies arbitrarily close. The required replacement of P_1 by $\tilde{P}_1$ is quite simple, when n -dimensional simplices act as P_0 , into which the convex polytope can be split by *Brunn cuts*. Until now, the sufficiently naive natural geometric method outlined above has not been proposed for proving the strict inequality $V_n(P) > v$, as it were head-on, due to the fact that initially the theorem was formulated not for convex polytopes P_0, P_1 , but for arbitrary convex bodies. The main reason, according to the author, lies in the algebraic representation $P = (1 - t)P_0 + tP_1$, where t is the ratio of the distance

from L_0 to L to the distance from L_0 to L_1 , $0 < t < 1$. This leads to the temptation to go over in the proofs of the theorem from $\mathbb{R}^{n+1}$ to $\mathbb{R}^n$ and use the equivalent statement of the theorem, assuming $L_0 = L_1 = \mathbb{R}^n$. As a result, from the general situation, when $L_0 \neq L_1$, passed into the singularity $L_0 = L_1$, in the conditions of which the possibilities for attracting geometric intuition are significantly reduced and, as a consequence, the possibilities for simpler visual geometric justifications of the inequality $V_n(P) > v$ are significantly reduced. This article shows that in the proof of the theorem in an equivalent formulation, on the contrary, the space $\mathbb{R}^n$ should be included in $\mathbb{R}^{n+1}$ and use the original formulation of the theorem, when the main tool of the proof the elementary means are *Brunn cuts*. For the sake of fairness, it should be noted that numerous applications of this theorem, obtained by Minkowski and other authors, are connected precisely with its equivalent formulation, with mixed volumes, with algebraic representations $P = (1-t)P_0 + tP_1$, called Minkowski sums.

Keywords: convex polyhedra, simplices, triangles, volumes, Brunn-Minkowski inequality

Bibliography: 31 titles.

For citation:

F. M. Malyshev, 2021, "Completion of the proof of Brunn's theorem by elementary means", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 160–182.

Введение

В статье речь идёт о следующей известной геометрической теореме Брунна–Минковского, имеющей много обобщений и приложений в различных областях математики (см., например, [1, 2, 3, 4]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть в двух параллельных гиперплоскостях L_0, L_1 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, содержатся выпуклые тела P_0, P_1 одинакового n -мерного объёма $v > 0$, и пусть P – сечение выпуклой оболочки их объединения гиперплоскостью L , параллельной L_0, L_1 и находящейся строго между ними. Тогда n -мерный объём тела P будет не меньше v , причём, если равен v , то P_1 получается из P_0 параллельным переносом.

Из ближайших обобщений этой теоремы приведём неравенство

$$\sqrt[n]{V_n(Q_0 + Q_1)} \geq \sqrt[n]{V_n(Q_0)} + \sqrt[n]{V_n(Q_1)}$$

для непустых компактов Q_0, Q_1 в $\mathbb{R}^n$, $Q_0 + Q_1 = \{a + b \mid a \in Q_0, b \in Q_1\}$ [1].

У данной теоремы не простая судьба. При $n = 1$ она очевидна. При $n = 2$ теорема уже является содержательной, её сформулировал Н. Брунн в 1887 году [5]. Он заметил также, что теорема может быть распространена на случай $n \geq 3$. Б.Н. Делоне ([6], стр. 39) отмечал: "Сам Брунн доказал лишь первую часть этой теоремы (1887 г.), второй же, дополнительной части об условиях равенства площади промежуточного сечения площадям первых двух сечений ему сначала строго доказать не удалось, на что обратил внимание Минковский. Впоследствии были даны Минковским и Бруном доказательства и дополнительной части. Любопытно, что Минковский закончил свою известную книгу "Geometrie der Zahlen" [7] как раз на 56-м параграфе (1896 г.), в котором надо было дать доказательство теоремы Бруна, так что "Geometrie der Zahlen" обрывается, так сказать, на полуслове. По смерти Минковского (1909 г.) в его бумагах было найдено это доказательство и напечатано (1910 г.) через 14 лет после появления "Geometrie der Zahlen" в виде последнего, заключительного её 57-го параграфа [7]". Даты и ссылки на [7] вставлены в цитату автором настоящей работы. Любопытно, что по каким-то причинам доказательства теоремы Брунна (так она тогда называлась) в книге [7] за 1896 год не оказалось. Видимо Минковского не совсем устраивали имевшиеся на тот момент доказательства.

Впоследствии теорема доказывалась многими авторами. Необходимые ссылки имеются, например, в книгах [1, 8, 9, 10, 11], в обзорах [4], [12]. В работе [13] приводится доказательство через монотонные отображения, которое хоть и не элементарное, но достаточно мощное для случая равенства. Наиболее прозрачным из известных автору представляется аналитическое доказательство индукцией по n со стр. 844 – 846 книги [14]. Наиболее геометрическим, как представляется, является доказательство из книги [10], использующее симметризацию Штейнера, основанную на принципе Кавальери, из-за чего не может быть отнесено к элементарным.

Б.Н. Делоне считал эту теорему "*хотя, быть может, и трудно доказуемой, но самой по себе довольно очевидной*" ([15], стр. 37). Ощутимое несоответствие между *очевидностью* теоремы и существенной неэлементарностью её доказательств в части строгого неравенства (из-за чего она часто приводится без доказательства) имело место до настоящего времени даже для $n = 2$. Данная теорема, кроме её многочисленных приложений для изопериметрических оптимизационных задач, относится к основам теории выпуклых многогранников, поэтому желательно иметь её геометрическое доказательство элементарными методами, доступное школьникам и студентам младших курсов. Брунн в 1887 году был буквально в шаге от такого доказательства, что и будет продемонстрировано в настоящей статье.

Распространение утверждаемого теоремой неравенства Брунна–Минковского на различные многообразия и дискретные структуры продолжается до настоящего времени (см, например, [16]–[24]).

1.1. Основные понятия и используемые обозначения. Для доступного введения в теорию выпуклых множеств можно порекомендовать первую главу книги [25]. Под телом в $\mathbb{R}^n$ в статье понимается ограниченное замкнутое выпуклое множество положительного n -мерного объёма.

Договоримся через $[X]$ обозначать выпуклую оболочку множества X в евклидовом пространстве, через ∂X – множество граничных точек выпуклого множества X . Через $\bar{X}$ и $\overset{\circ}{X}$ обозначаем соответственно замыкание и множество внутренних точек множества X . Для точек $B_1, \dots, B_k$ выпуклый многогранник $\{B_1, \dots, B_k\}$ обозначаем $[B_1, \dots, B_k]$.

Если тело P_1 получается из P_0 параллельным переносом, то пишем $P_1 \parallel P_0$, иначе $P_1 \nparallel P_0$. Тела и многогранники, а при $n = 2$ области и многоугольники, предполагаются выпуклыми. Для n -мерного объёма тела $Q \subset \mathbb{R}^n$ используем обозначение $V_n(Q)$. Через Δ_n обозначаем n -мерный симплекс.

Гиперплоскость $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$, задающая разбиение $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}^- \cup \mathcal{L}^+$ на замкнутые полупространства $\mathcal{L}^-$, $\mathcal{L}^+$, $\mathcal{L}^- \cap \mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, считаем опорной для тела $Q \subset \mathbb{R}^n$, если $\emptyset \neq Q \cap \mathcal{L} \subset \partial Q$. Опорную гиперплоскость $\mathcal{L}$ считаем ориентированной с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$, перпендикулярным к гиперплоскости $\mathcal{L}$ и направленным в сторону от тела Q . Обозначаем $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(Q)$ и считаем, что $Q \subset \mathcal{L}^- = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$. Множество всех возможных нормалей $\mathbf{n}$ отождествляем с единичной сферой $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ с центром в начале координат $\mathcal{O}$. Очень часто вместо заведомо справедливого равенства $Q = \bigcap_{\mathbf{n} \in S^{n-1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$ можно пользоваться равенствами $Q = \bigcap_{\mathbf{n} \in X} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$ для специальных подмножеств $X \subset S^{n-1}$, вплоть до конечных подмножеств X в случае выпуклых многогранников Q .

Через $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}} = \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}(P_0, P_1)$, $\mathbf{n} \in S^{n-1}$, обозначаем боковую опорную гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$ для тела $[P_0 \cup P_1]$ такую, что $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}} \cap L_0 = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(P_0)$, $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}} \cap L_1 = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(P_1)$. Ясно, что $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}} \cap [P_0 \cup P_1] = [(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(P_0) \cap P_0) \cup (\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(P_1) \cap P_1)]$. Замкнутые полупространства $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^-$ и $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^+$ определяются по аналогии с $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^+$, $[P_0 \cup P_1] \subset \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^-$, $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^- \cup \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^+ = \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^- \cap \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^+ = \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}$. Обратим внимание, что вектор $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ не обязан быть перпендикулярным гиперплоскости $\mathfrak{L}_{\mathbf{n}}$. Тело $[P_0 \cup P_1] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является пересечением замкнутой полосы между гиперплоскостями L_0 и L_1 с множеством $\bigcap_{\mathbf{n} \in S^{n-1}} \mathfrak{L}_{\mathbf{n}}^-$.

1.2. Рассечение Брунна для одновременного одинакового деления объёмов P_0 , P_1 . Пусть M – гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, разбивающая тела P_0 и P_1 соответственно на части P'_0 , P''_0 и P'_1 , P''_1 , $P_0 = P'_0 \cup P''_0$, $P_1 = P'_1 \cup P''_1$, причём $V_n(P'_0) = V_n(P'_1)$ и P'_0 , P'_1 находятся по одну

сторону от гиперплоскости M . Тогда P_0'', P_1'' находятся по другую сторону от гиперплоскости M и $V_n(P_0'') = V_n(P_1'')$, так как $V_n(P_0) = V_n(P_1)$. Если утверждение теоремы справедливо для пар тел P_0', P_1' и P_0'', P_1'' , то оно будет справедливо и для тел P_0, P_1 . Действительно, тогда

$$\begin{aligned} V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) &\geq V_n(L \cap [P_0' \cup P_1']) + V_n(L \cap [P_0'' \cup P_1'']) \geq \\ &\geq V_n(P_0') + V_n(L \cap [P_0'' \cup P_1'']) \geq V_n(P_0') + V_n(P_0'') = V_n(P_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Далее, если $P_1 \nparallel P_0$, то либо $P_1' \nparallel P_0'$, либо $P_1'' \nparallel P_0''$. Иначе, при $P_1' \parallel P_0'$ и $P_1'' \parallel P_0''$ имели бы $P_0 \parallel P_1$, так как соответствующие векторы сдвига для $P_1' \parallel P_0'$ и $P_1'' \parallel P_0''$ будут одинаковы, они совпадают с вектором сдвига для $(P_1 \cap M) \parallel (P_0 \cap M)$. Таким образом, при $P_1 \nparallel P_0$ одно из двух последних неравенств в цепочке (1) является строгим.

Обратим внимание, что первое неравенство в цепочке (1) в общем случае нельзя заменять равенством, например, из-за точек $[A, B] \cap L \in [P_0 \cup P_1] \cap L$, $A \in P_0'$, $B \in P_1''$, которые, возможно, не принадлежат $(L \cap [P_0' \cup P_1']) \cup (L \cap [P_0'' \cup P_1''])$.

1.3. Основная идея предлагаемого доказательства теоремы. Её утверждение (если игнорировать тривиальную ситуацию $P_1 \parallel P_0$) выражается импликацией

$$P_1 \nparallel P_0 \Rightarrow V_n(P) > v, \quad (2)$$

где $P = L \cap [P_1 \cup P_0]$. Импликация (2) доказывается с помощью неравенства

$$V_n(P) = V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) \geq v, \quad v = V_n(P_0) = V_n(P_1), \quad (3)$$

для которого уже имеются доказательства элементарными средствами.

Используя приближения выпуклого тела P_0 многогранниками, доказательство импликации (2) может быть сведено к случаю, когда тело P_0 является выпуклым многогранником. В свою очередь, с помощью многократных рассечений Брунна доказательство импликации (2) в случае многогранников P_0 сводится к n -мерным симплексам, когда $P_0 = \Delta_n$, а P_1 произвольное тело.

Благодаря неравенству (3), справедливость импликации (2) следует из справедливости импликации

$$P_1 \nparallel P_0 \Rightarrow \exists \tilde{P}_1 \subset L_1, V_n(\tilde{P}_1) = v : V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) > V_n(L \cap [P_0 \cup \tilde{P}_1]). \quad (4)$$

Если заранее известно, что при заданном P_0 на некотором P_1^* достигается минимум $V_n(L \cap [P_0 \cup P_1])$ по всем P_1 с $V_n(P_1) = v$, то для доказательства (2) с помощью (4) неравенство (3) не требуется.

В случае $P_0 = \Delta_n$ построение требуемого выпуклого тела $\tilde{P}_1$ в (4) осуществляется в два этапа незначительными "шевелениями" границы ∂P_1 . Пусть A и $B \neq C$ вершины симплекса P_0 . Вначале увеличиваем P_1 до $\hat{P}_1$ так, что $\mathfrak{L}_n(P_0, \hat{P}_1) = \mathfrak{L}_n(P_0, P_1)$ для всех $\mathbf{n} \in S^{n-1}$, для которых $\mathcal{L}_n(\Delta_n) \cap \Delta_n \neq \{A\}$. Новое положение $(\mathfrak{L}_v(P_0, \hat{P}_1) \neq \mathfrak{L}_v(P_0, P_1))$ могут занимать (удаляясь от P_1) только боковые опорные гиперплоскости $\mathfrak{L}_v(P_0, \hat{P}_1)$ для тех $\mathbf{v} \in S^{n-1}$, для которых $\mathcal{L}_v(\Delta_n) \cap \Delta_n = \{A\}$. Затем на столько же уменьшаем n -мерный объём тела $\hat{P}_1$, переходя к телу $\tilde{P}_1$ так, что для некоторого одного конкретного $\mathbf{m} \in S^{n-1}$ такого, что $\mathcal{L}_m(\Delta_n) \cap \Delta_n \supseteq [B, C]$, боковая опорная гиперплоскость $\mathfrak{L}_m(P_0, \tilde{P}_1)$ (содержащая $[B, C]$) оставляет часть объёма тела $\hat{P}_1$ в полупространстве $\mathfrak{L}_m^+(P_0, \tilde{P}_1)$, или, иначе и точнее, в полупространстве $\mathcal{L}_m^+(\tilde{P}_1) \subset L_1 \supset \hat{P}_1$. В результате, при сохранении n -мерного объёма на уровне гиперплоскости L_1 , на уровне гиперплоскости L уменьшение n -мерного объёма на втором этапе будет строго больше, нежели его увеличение на первом этапе. Обратим внимание, что в результате предлагаемых перестроек $\mathcal{L}_v(P_1) \neq \mathcal{L}_v(\hat{P}_1)$, $\mathcal{L}_m(P_1) \neq \mathcal{L}_m(\tilde{P}_1)$, но $\mathfrak{L}_v(\Delta_n, P_1) \cap L_0 = \mathfrak{L}_v(\Delta_n, \hat{P}_1) \cap L_0 = \mathcal{L}_v(\Delta_n)$, как и $\mathfrak{L}_m(\Delta_n, P_1) \cap L_0 = \mathfrak{L}_m(\Delta_n, \tilde{P}_1) \cap L_0 = \mathcal{L}_m(\Delta_n)$.

Новизна представленного наивного геометрического подхода, обеспечившего простоту доказательства импликации (2) как бы в лоб, видится в следующем.

1.3.1. Ранее вместо импликации (4) доказывалась непосредственно импликация: $V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) = v \Rightarrow P_1 \parallel P_0$. Этот нюанс оказался решающим.

1.3.2. Ранее выпуклые тела P_0 только приближались "снизу" прямоугольными параллелепипедами. В нашем случае многогранник P_0 исчерпывается n -мерными симплексами полностью.

1.3.3. Начиная с Минковского рассматривали эквивалентную формулировку теоремы (2), полагая $L_0 = L_1 = \mathbb{R}^n$ и $P = (1 - t)P_0 + tP_1$, $0 < t < 1$, использовали так называемые смешанные объёмы. (При $L_0 \neq L_1$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ выпуклое тело $P = L \cap [P_0 \cup P_1]$ тоже представляется суммой Минковского $P = (1 - t)P_0 + tP_1$, если расстояния от L к L_0 и к L_1 относятся как t к $1 - t$.) Автор склонен думать, что как раз это обстоятельство: уход от ситуации общего положения ($L_0 \neq L_1$) в особенность ($L_0 = L_1$) явилось одной из причин, из-за которой возникла трудность со строгим неравенством в теореме, длившаяся с 1887 года до настоящего времени. Переход от $\mathbb{R}^{n+1}$ к $\mathbb{R}^n$ может приводить ещё к непониманию смысла теоремы. Например, в переводе [26] второго издания книги с названием "Геометрия чисел" (как у [7]) на стр. 12 в ошибочной формулировке теоремы подразумеваются построения как в $\mathbb{R}^{n+1}$, так и в $\mathbb{R}^n$. Здесь, справедливости ради, следует оговориться, что многочисленные приложения настоящей теоремы (2), полученные Минковским и другими авторами, связаны как раз со смешанными объёмами, с алгебраическими представлениями $P = (1 - t)P_0 + tP_1$ в виде суммы Минковского.

1.4. Содержание статьи (план доказательства). В § 2, состоящем из пп. 2.1, 2.2, 2.3, доказательство импликации (2) сводится к её очень частному случаю, к доказательству импликации (4) с $P_0 = \Delta_n$. В п. 2.1 доказывается неравенство (3) с помощью рассечений Брунна. В п. 2.2 доказывается лемма о том, что произвольный выпуклый многогранник $P_0 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, последовательными рассечениями Брунна может быть разбит на n -мерные симплексы (первое сечение производится как в п. 1.2, затем отдельные части независимо рассекаются аналогичным образом). При $n = 2$ выпуклый многоугольник рассекается на треугольники по диагоналям. В п. 2.3 импликация (2) доказывается в предположении, что справедлива импликация (4) в частном случае, когда $P_0 = \Delta_n$.

В § 3 приводятся два доказательства импликации (2) для рассмотренного первоначально Брунном в [5] случая $n = 2$. Одно аналитическое (с целью дополнительно подчеркнуть важность обращения к симплексам), другое геометрическое, реализующее схему рассуждений п. 1.3. Оба доказательства доступны школьникам. Представляется, что оба из этих доказательств могут претендовать на доказательство в книгу [27] в последующих её изданиях, если теорема Брунна – Минковского когда-либо будет там представлена.

В § 4 содержатся необходимые предварительные замечания общего характера, которые будут использоваться в § 5 при доказательстве импликации (4) с $P_0 = \Delta_n$. Принципиально новым в § 4 является содержание п. 4.2, относящееся к особенностям доказательства, связанным с увеличением размерности n . Там для выпуклых тел P_1 используем обозначение Q . Для каждого выпуклого тела $Q \subset L_1 = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, в случае $P_0 = \Delta_n \subset L_0$, $V_n(Q) = V_n(\Delta_n)$, строится расширяющийся ряд из n выпуклых тел

$$Q = Q^{(1)} \subseteq Q^{(2)} \subseteq \dots \subseteq Q^{(n-1)} \subseteq Q^{(n)} = \hat{\Delta}_n, \quad (5)$$

в котором $\hat{\Delta}_n \subset L_1$ – минимальный симплекс, содержащий Q и гомотетичный симплексу Δ_n с положительным коэффициентом гомотетии. Тело $Q^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, задаётся пересечением полупространств всех опорных гиперплоскостей тела Q уровней $j \geq i$, а к уровню $j \in \{1, \dots, n\}$ отнесены те опорные гиперплоскости $\mathcal{L}_n(Q)$, $\mathbf{n} \in S^{n-1}$, для которых параллельные им опорные гиперплоскости $\mathcal{L}_n(\hat{\Delta}_n)$ содержат грани $\hat{\Delta}_n$ размерности $j - 1$ и не содержат граней большей

размерности, т.е. в опорной гиперплоскости $\mathcal{L}_n(\hat{\Delta}_n)$ содержится ровно j вершин симплекса $\hat{\Delta}_n$, $|\hat{\Delta}_n \cap \mathcal{L}_n(\hat{\Delta}_n)| = |\Delta_n \cap \mathcal{L}_n(\Delta_n)| = j$. Всё множество опорных гиперплоскостей уровня j , $j = 1, \dots, n$, естественным образом разбивается на C_n^j подмножеств, отвечающих конкретным подмножествам вершин симплекса $\hat{\Delta}_n$ (или Δ_n) мощности j . Телу Q приписываем порядок $i \in \{1, \dots, n\}$ (относительно Δ_n), если $Q = Q^{(1)} = Q^{(2)} = \dots = Q^{(i-1)} = Q^{(i)} \neq Q^{(i+1)}$. Считаем Q телом общего положения, если $Q = Q^{(1)} \neq Q^{(2)}$. Когда $Q = Q^{(i)}$, $i > 1$, тело Q считаем особым. Если $Q \not\parallel \Delta_n$, то $Q \neq \hat{\Delta}_n = Q^{(n)}$, и тогда при $Q = Q^{(i)} \neq Q^{(i+1)}$ обязательно $i \leq n - 1$. Для выпуклого тела Q порядка i чем меньше $j \in \{i, i + 1, \dots, n\}$, тем точнее тело Q приближается телом $Q^{(j)}$. Другими словами, папа Карло, выстругивая Q , следовал бы по ряду (5) в обратном порядке, начиная с самой грубой заготовки $\hat{\Delta}_n$. В общем случае, чем меньше $j \in \{i + 1, \dots, n - 1\}$, тем больше у него работы для получения $Q^{(j)}$ из $Q^{(j+1)}$.

Доказательство импликации (4) в § 5 для $n \geq 3$ и $P_0 = \Delta_n$ разбито на пп. 5.1 и 5.2. В п. 5.1 импликация (4) доказывается для выпуклых тел $P_1 = Q = Q^{(1)} \neq Q^{(2)}$ общего положения аналогично геометрическому доказательству теоремы (2) для $n = 2$ из п. 3.2, реализующему схему рассуждений п. 1.3. В п. 5.2 импликация (4) доказывается для выпуклых тел $P_1 = Q = Q^{(i)} \neq Q^{(i+1)}$ порядка $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ индукцией по i путём рассматриваемых в п. 1.2 рассечений Брунна, при которых P'_0, P''_0 – симплексы, а выпуклое тело P'_1 имеет порядок $i - 1$. Размерность $n = 3$ (когда ещё есть возможность для наглядного представления) в п. 5.2.1 рассматривается отдельно, чтобы случай $n \geq 4$ в п. 5.2.2 воспринимался проще.

Рассечений Брунна вместе с леммой из п. 2.2 и ряда (5) оказалось достаточно (как показывается далее в §§ 2–5) для доказательства неравенства (2) в общем случае.

1.5. Столь пространное введение приведено в надежде на то, что после этого некоторым читателям по их желанию даже не потребуется знакомиться собственно с доказательствами из §§ 2–5. Приводимые там рассуждения можно отнести к не сложным упражнениям на выпуклые множества, которые заведомо проще предлагаемых в монографии [25]. При написании доказательств не было цели уменьшения объёма статьи, измеряемого числом страниц. Если измерять формальными выкладками, начиная с аксиоматики Пеано, то сокращение до элементарности по сравнению с ранее известными доказательствами теоремы сомнений не вызывает, особенно это касается случая $n = 2$. Для изложения полного пусть не подробного доказательства теоремы по предлагаемой схеме хватило четырёх страниц тезисов [28].

1.6. Ранее в [29] (см., также [30]) на основе этих же идей приводились другие доказательства теоремы Брунна – Минковского. Там, в частности, рассматривалась возможность получения неравенства (3) непосредственно из утверждения (4). Для этого при фиксированном P_0 достаточно было убедиться в наличии выпуклых тел Q_1 , на которых достигается минимум функции $F(Q) = V_n(L \cap [P_0 \cup Q])$. Предварительно стандартным способом доказывалась компактность множества $\mathfrak{X}$ всех выпуклых тел Q с достаточно большой верхней границей для их диаметра и с $V_n(Q) = v$ (точнее классов эквивалентности таких тел Q относительно параллельных переносов) в специальной метрике, эквивалентной метрике Хаусдорфа, и доказывалась непрерывность функции $F: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$. В работе [29] в некоторых ситуациях строятся семейства выпуклых тел $P_1(s)$, $V_n(P_1(s)) = v$, $s \in [0, 1]$, $P_1(0) = P_1$, $P_1(1) \parallel P_0$, для которых функции $f(s) = V_n(L \cap [P_0 \cup P_1(s)])$ строго монотонно убывают на отрезке $[0, 1]$. Доказательство леммы о разбиении выпуклого многогранника на симплексы при рассечениях Брунна из п. 1.2 в работе [29] не такое наглядное, как в п. 2.2 ниже.

1.7. Геометрическим неравенствам обычно отвечают одна или несколько оптимизационных задач. Для неравенства (2) в [31] имеется достаточно наглядная оптимизационная задача прикладного практического происхождения. В [31] для замкнутых выпуклых тел X и Q в $\mathbb{R}^n$ рассматривается множество $\Gamma_Q(X) = \bigcup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n: \\ \emptyset \neq (v+Q) \cap X = \partial(v+Q) \cap X}} (v + Q)$, называемое Q -границей

для тела X . В работе [31] доказывается теорема о том, что при заданных Q с $V_n(Q) > 0$ и

$v = V_n(X) > 0$ минимум объёма Q -границы $V_n(\Gamma_Q(X))$ достигается для единственного (с точностью до параллельных сдвигов) тела X_0 , гомотетичного с положительным коэффициентом гомотетии Q -границе точки.

Сведение доказательства теоремы (2) к проверке импликации (4) для $P_0 = \Delta_n$

В п. 2.1 этого параграфа с помощью рассечений Брунна доказывается неравенство (3). В п. 2.2 доказывается лемма о том, что произвольный выпуклый многогранник $P_0 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, последовательными рассечениями Брунна может быть разбит на n -мерные симплексы. В п. 2.3 импликация (2) доказывается в предположении, что уже справедлива импликация (4) с $P_0 = \Delta_n$. Импликация (4) в случае $P_0 = \Delta_n$ будет доказана в §5.

2.1. Доказательство неравенства (3). После рассечения Брунна (см. п. 1.2) неравенство (3) для пары выпуклых тел P_0, P_1 , $V_n(P_0) = V_n(P_1)$, следует из таких же неравенств, но для пар выпуклых тел P'_0, P'_1 , $V_n(P'_0) = V_n(P'_1)$, и P''_0, P''_1 , $V_n(P''_0) = V_n(P''_1)$. К каждой из пар P'_0, P'_1 и P''_0, P''_1 также при необходимости можно применять рассечение Брунна. К некоторым из далее получаемых частей тоже можно применять рассечение Брунна. После $N - 1$ рассечений возникают разбиения $P_0 = \bigcup_{i=1}^N P_0^{(i)}$, $P_1 = \bigcup_{i=1}^N P_1^{(i)}$ такие, что каждому ломтю $P_0^{(i)} \subseteq P_0$, $i = 1, \dots, N$, отвечает свой ломоть $P_1^{(i)} \subseteq P_1$, причём $V_n(P_0^{(i)}) = V_n(P_1^{(i)})$ и, согласно (1), $V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) \geq \sum_{i=1}^N V_n(L \cap [P_0^{(i)} \cup P_1^{(i)}])$. В результате, неравенство (3) будет следовать из неравенств $V_n(L \cap [P_0^{(i)} \cup P_1^{(i)}]) \geq V_n(P_0^{(i)}) = V_n(P_1^{(i)})$, $i = 1, \dots, N$, которые, при достаточно большом N , по отдельности могут легко устанавливаться.

Приступим теперь непосредственно к доказательству неравенства (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гиперплоскости L_0 и L_1 будем отождествлять с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ ортонормированный базис $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n$. Поместим тело $P_0 \subset L_0$ в сетку из n -мерных одинаковых кубиков со стороной $\varepsilon > 0$, получающихся в результате разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ n семействами гиперплоскостей в L_0 , перпендикулярных соответственно $\mathbf{n}_i$, $i = 1, \dots, n$. Назовём их верхними гиперплоскостями. Из каждого семейства потребуется только конечное число гиперплоскостей, которые либо пересекаются с телом P_0 либо находятся в непосредственной близости к нему. Пересекающиеся с границей ∂P_0 кубики назовём граничными. Возникающее разбиение тела P_0 на кубики и небольшие их части индуцирует разбиение тела P_1 на параллелепипеды и небольшие их части следующим образом.

Семейство верхних гиперплоскостей, перпендикулярных $\mathbf{n}_1$ и пересекающихся с телом P_0 , индуцирует в результате рассечений Брунна однозначно задаваемое семейство такого же числа нижних гиперплоскостей в L_1 , перпендикулярных $\mathbf{n}_1$ и разрезающих тело P_1 . Предварительно верхние гиперплоскости, перпендикулярные $\mathbf{n}_1$ и пересекающиеся с телом P_0 , как-то линейно упорядочиваются. В соответствии с этой упорядоченностью производятся один за другим рассечения Брунна. Однозначность возникающих нижних гиперплоскостей и независимость их от введённой упорядоченности обеспечивается тем, что соответственные пары из верхних и нижних ломтей (включая крайние) между каждыми парами соответственных верхних и нижних гиперплоскостей должны иметь одинаковые n -мерные объёмы.

Каждый образовавшийся ломоть в P_1 , независимо от остальных ломтей P_1 , аналогично разбивается семейством гиперплоскостей, перпендикулярных $\mathbf{n}_2$, исходя из уже имеющегося разбиения (такими же гиперплоскостями) соответствующего ломтя из P_0 . И так для всех остальных по порядку векторов $\mathbf{n}_3, \dots, \mathbf{n}_n$, при этом каждый раз рассечения ломтей, образовавшихся на предыдущем этапе, происходят независимо друг от друга. После чего граничные кубики в P_0 и соответствующие им ломти Q_1 в P_1 исключаем из дальнейшего рассмотрения.

После этого тело P_1 помещаем в такую же сетку из n -мерных кубиков со стороной, для

определённости, тоже ε . Эта сетка индуцирует разбиение на параллелепипеды (или небольшие их части вблизи границы ∂P_1) каждого не исключённого ранее ломтя Q_1 тела P_1 . Каждому такому ломтю Q_1 (n -мерного объёма ε^n) отвечает кубик Q_0 в P_0 , на котором как и выше, другими n сериями рассечений Брунна индуцируется разбиение на параллелепипеды, отвечающее возникшему разбиению на параллелепипеды (или их части) ломтя Q_1 . Каждый раз роль тела P_0 играет ломоть Q_1 , а соответствующий ему кубик Q_0 играет роль тела P_1 .

Долю ломтя Q_1 , не являющуюся параллелепипедом (соприкасающуюся с границей ∂P_1 , содержащуюся в кубике, пересекающемся с границей ∂P_1), исключаем из дальнейшего рассмотрения вместе с соответствующей долей (в виде параллелепипеда) кубика Q_0 .

Суммарный объём всех оставшихся параллелепипедов в P_0 и в P_1 за счёт выбора $\varepsilon > 0$ достаточно малым будет приближаться снизу к ν сколь угодно близко, так как исключённые доли содержатся в сколь угодно малых окрестностях границ ∂P_0 и ∂P_1 .

Между оставшимися параллелепипедами в P_0 и P_1 имеет место взаимно однозначное соответствие, причём n -мерные объёмы двух соответственных параллелепипедов $\Pi_0 \subseteq P_0$ и $\Pi_1 \subseteq P_1$ одинаковы, $L \cap [\Pi_0 \cup \Pi_1] \subseteq L \cap [P_0 \cup P_1]$. По построению для любых двух пар соответственных параллелепипедов (Π'_0, Π'_1) , (Π''_0, Π''_1) обязательно $V_n((L \cap [\Pi'_0 \cup \Pi'_1]) \cap (L \cap [\Pi''_0 \cup \Pi''_1])) = 0$. Благодаря сделанным замечаниям и суммированию по всем оставленным соответственным парам параллелепипедов из P_0 и P_1 , неравенство (3) достаточно доказать для двух прямоугольных параллелепипедов Π_0, Π_1 со сторонами $a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}$, $j = 0, 1$, для которых $a_1^{(0)} \cdot \dots \cdot a_n^{(0)} = a_1^{(1)} \cdot \dots \cdot a_n^{(1)} = \nu$. Тогда неравенство (3) принимает вид $\prod_{i=1}^n \left((1-t)a_i^{(0)} + ta_i^{(1)} \right) \geq \nu$ или $t^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{1-t}{t} + \frac{a_i^{(1)}}{a_i^{(0)}} \right) \geq 1$. Справедливость последнего неравенства следует из того, что минимум произведения $p = p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (\tau + x_i)$ при $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$, заданном $\tau = \frac{1-t}{t}$ и $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, достигается только при $x_1 = \dots = x_n = 1$ и равен $(\tau + 1)^n$. Действительно, при замене $x_i \neq x_j$ на $x'_i = x'_j = \sqrt{x_i x_j}$ величина p становится строго меньшей, поэтому $p(x_1, \dots, x_n) > p'' = p(x''_1, \dots, x''_n)$, причём произведение p'' можно сделать сколь угодно близким к $(\tau + 1)^n$ за счёт того, что все компоненты $x''_1, \dots, x''_n$ можно сделать несколькими заменами пар различных компонент на равные сколь угодно близкими к 1. В результате неравенство (3) для параллелепипедов Π_0, Π_1 , а значит и для произвольных тел P_0, P_1 , доказано.

2.2. Доказательство теоремы (2) для выпуклых многогранников P_0 в предположении справедливости импликаций (4) для $P_0 = \Delta_n$. В этих предположениях импликации (2) для $P_0 = \Delta_n$ следуют из (4) и (3). После этого теорема (2) для выпуклых многогранника P_0 и произвольного тела P_1 доказывается с помощью многократного использования рассечений Брунна. Каждый из многогранников P'_0 и P''_0 , полученных после первого рассечения, можно продолжать аналогично независимо разбивать своими гиперплоскостями на пары многогранников, с которыми поступаем так же до тех пор, пока все части многогранника P_0 не окажутся n -мерными симплексами. На такую возможность указывает следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Произвольный выпуклый ограниченный многогранник P_0 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, за конечное число последовательных рассечений гиперплоскостями можно разбить на симплексы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по n . Выделяя в многограннике P_0 какую-либо вершину A , можно считать P_0 "пирамидой" с вершиной A и неровным "основанием", состоящим из нескольких его $(n-1)$ -мерных граней (несодержащих A). Гиперплоскость $E \subset \mathbb{R}^n$, содержащая вершину A и одну из $(n-2)$ -мерных граней, общую для двух $(n-1)$ -мерных граней "основания", разбивает P_0 на две "пирамиды", в каждой из которых число граней "основания" по крайней мере на 1 меньше, чем в "основании" у P_0 . Дальнейшие независимые разбиения частей P_0 гиперплоскостями $E \ni A$ оставят во всех "основаниях" по одной

$(n - 1)$ -мерной грани, которые по предположению индукции разбиваются на $(n - 1)$ -мерные симплексы, а значит и P_0 разбивается на n -мерные симплексы.

Лемма доказана.

2.3. Доказательство теоремы (2) в предположении справедливости импликаций (4) для $P_0 = \Delta_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P_0 и $P_1 \not\parallel P_0$ два выпуклых тела одинакового n -мерного объёма. Рассмотрим многогранник P'_0 , содержащийся в теле P_0 , n -мерный объём которого можно сделать сколь угодно близким n -мерному объёму P_0 (например, P'_0 – выпуклая оболочка совокупности внутренних ε -кубиков из п. 2.1). Тело $P'_1 \subseteq P_1$ получаем последовательными отсечениями Брунна частей P_1 гиперплоскостями, параллельными $(n - 1)$ -мерным граням многогранника P'_0 , отслеживая каждый раз (в соответствии с п. 1.2) равенство отсекаемых объёмов у P_0 и P_1 . Приближения P'_0 к P_0 осуществляем на столько близко, что $P'_1 \not\parallel P'_0$.

Благодаря (1), для доказательства теоремы (2), учитывая доказанное в п. 2.2 неравенство $V_n(L \cap [P'_0 \cup P'_1]) > V_n(P'_0) = V_n(P'_1)$, останется применить доказанные в п. 2.1 неравенства $V_n(L \cap [Q_0 \cup Q_1]) \geq V_n(Q_0) = V_n(Q_1)$ ко всем отсекаемым парам соответственных ломтей $Q_0 \subset P_0$, $Q_1 \subset P_1$.

Импликация (2) доказана, но пока только в предположении, что справедливы импликации (4) для симплексов P_0 и произвольных тел P_1 . Последнее при $n \geq 3$ будет доказано в § 5.

Доказательства теоремы (2) для $n = 2$

Согласно результатам предыдущего параграфа для доказательства строгого неравенства в (2) при $n = 2$ достаточно убедиться в справедливости импликации (4) для треугольника P_0 . Далее в § 3 считаем $P_0 = \Delta_2$, $P_1 \not\parallel P_0$.

3.1. Аналитическое доказательство теоремы (2) для $n = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\hat{\Delta}_2$ минимальный треугольник, содержащий область P_1 и гомотетичный Δ_2 с коэффициентом гомотетии большим 1 (см. рис. 1). Пусть A_1, A_2, A_3 – вершины треугольника Δ_2 , а B_1, B_2, B_3 – соответствующие вершины треугольника $\hat{\Delta}_2$, и, наконец, M_1, M_2, M_3 – области (не выпуклые в общем случае) соответственно при вершинах B_1, B_2, B_3 , на которые разбивается замыкание множества $\hat{\Delta}_2 \setminus P_1$.

Выпуклая оболочка $[\Delta_2 \cup P_1]$ множества $\Delta_2 \cup P_1$ получается из усечённой пирамиды $[\Delta_2 \cup \hat{\Delta}_2]$ с основаниями Δ_2 и $\hat{\Delta}_2$ исключением пирамид $\Lambda_i = \Lambda(A_i, M_i) = [\{A_i\} \cup M_i]$ с вершинами A_i и основаниями M_i , $i = 1, 2, 3$. Поясним это. Тело $[\Delta_2 \cup P_1]$ есть пересечение всех полупространств, содержащих Δ_2 и P_1 , поэтому его боковая поверхность состоит из отрезков $[A, B]$, $A \in \partial\Delta_2$, $B \in \partial P_1$, содержащихся в опорных плоскостях $\mathfrak{L}_n$, $n \in S^1$, общих для Δ_2 и P_1 . Треугольник Δ_2 и область P_1 должны находиться по одну сторону от опорных плоскостей $\mathfrak{L}_n$, которые однозначно восстанавливаются по прямым $\mathcal{L}_n(P_1) = L_1 \cap \mathfrak{L}_n$, $n \in S^1$, опорным для области P_1 в плоскости L_1 .

Просматривая по кругу все возможные положения прямой $\mathcal{L}_n(P_1)$, $n \in S^1$, замечаем, что боковая поверхность тела $[\Delta_2 \cup P_1]$ состоит из отрезков $[A, B]$, $A = A_i$, $i = 1, 2, 3$, $B \in \partial M_i \setminus \partial \hat{\Delta}_2$, а также (при $\mathcal{L}_n(P_1) \supset [B_i, B_j]$) из трапеций с основаниями $[A_i, A_j]$ и $P_1 \cap \mathfrak{L}_n(P_1) = P_1 \cap [B_i, B_j]$, вырождающихся в треугольники, когда пересечение $P_1 \cap [B_i, B_j]$ состоит из одной точки.

Пусть площади треугольника Δ_2 и области P_1 равны $v = 1$, и линейный размер треугольника Δ_2 (например, с точностью до постоянного множителя, его периметр) равен 1. Положим площадь треугольника $\hat{\Delta}_2$ равной (при $P_1 \not\parallel P_0$) $1 + \delta$, $\delta > 0$, $\delta = V_2(M_1) + V_2(M_2) + V_2(M_3)$. Расстояния от L до L_0 и L_1 относятся как t к $1 - t$, $0 < t < 1$. Тогда по гомотетии линейный размер треугольника $\hat{\Delta}_2$ равен $\sqrt{1 + \delta}$, а линейный размер треугольника $\Delta'_2 = [\Delta_2 \cup \hat{\Delta}_2] \cap L$ равен $1 + t(\sqrt{1 + \delta} - 1)$, и, в свою очередь, площадь треугольника Δ'_2 равна $(1 - t + t\sqrt{1 + \delta})^2$.

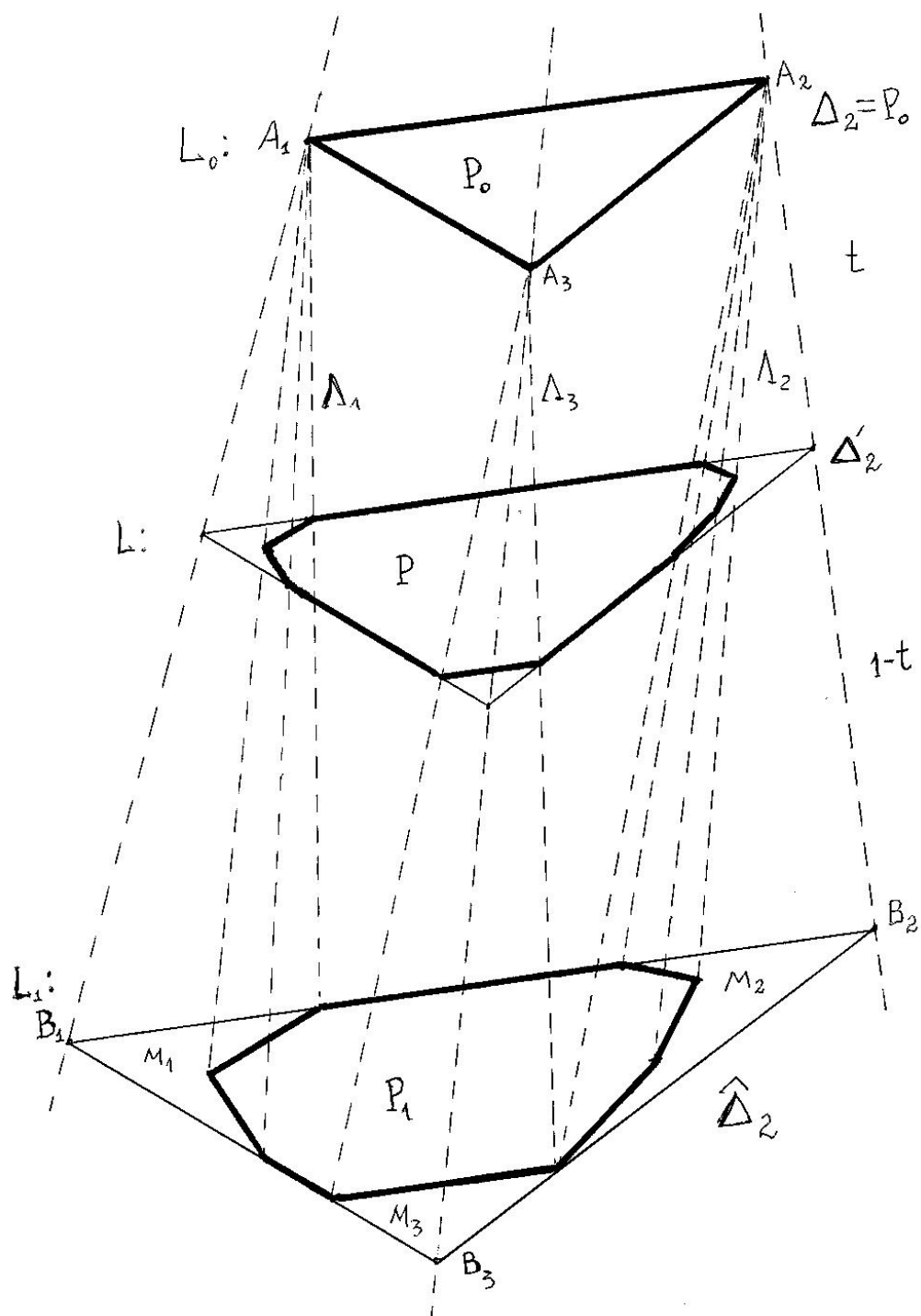


Рис. 1

Для получения площади сечения P нужно из площади треугольника Δ'_2 вычесть суммарную площадь пересечений плоскости L с тремя пирамидами, исключаемыми из усечённой пирамиды $[\Delta_2 \cup \hat{\Delta}_2]$ (см. рис. 1). В результате для площади сечения P имеем:

$$V_2(P) = (1 - t + t\sqrt{1 + \delta})^2 - t^2\delta = 1 + 2t(1 - t)(\sqrt{1 + \delta} - 1) > 1.$$

В импликации (4) можно положить $\tilde{P}_1 \parallel \Delta_2$.

Теорема (2) при $n = 2$ аналитическим способом доказана.

3.2. Геометрическое доказательство теоремы (2) для $n = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительные рассуждения относительно устройства области $P = L \cap [\Delta_2 \cup P_1]$ те же, что и в первом аналитическом доказательстве. Пусть вершина $B_2 \notin P_1$ (см. рис. 2), $V_2(M_2) = \delta_2 > 0$. Рассмотрим $\hat{P}_1 = P_1 \cup M_2$. Тогда $V_2(L \cap [\Delta_2 \cup \hat{P}_1]) = V_2(P \cup (L \cap \Lambda(A_2, M_2))) = V_2(P) + t^2\delta_2$. Отсечём от области $\hat{P}_1$ прямой, параллельной B_1B_3 , область Ω площади δ_2 . Останется область $\tilde{P}_1$, для которой

$$\begin{aligned} V_2(\tilde{P}_1) &= V_2(P_1), \tilde{P} = L \cap [\Delta_2 \cup \tilde{P}_1] \subset L \cap [\Delta_2 \cup \hat{P}_1], \\ (L \cap [\Delta_2 \cup \hat{P}_1]) \setminus (L \cap [\Delta_2 \cup \tilde{P}_1]) &\supseteq L \cap [(A_1, A_3) \cup \Omega] \supset \\ &\supset (L \cap \Lambda(A_1, \Omega)) \cup (L \cap \Lambda(A_3, \Omega)). \end{aligned}$$

В результате,

$$\begin{aligned} V_2(\tilde{P}) &= V_2(L \cap [\Delta_2 \cup \tilde{P}_1]) \leq \\ &\leq V_2(P) + t^2\delta_2 - V_2((L \cap \Lambda(A_1, \Omega)) \cup (L \cap \Lambda(A_3, \Omega))) < \\ &< V_2(P) + t^2\delta_2 - t^2\delta_2 = V_2(P). \end{aligned}$$

Теорема (2) при $n = 2$ вторым геометрическим способом доказана.

Предварительные замечания к случаю $n \geq 3$

В настоящем параграфе через Q обозначаем произвольное выпуклое тело $Q \subset L_1 = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $P_0 = \Delta_n \subset L_0$, $V_n(Q) = V_n(\Delta_n) = v$. Одним из таких Q является тело P_1 , фигурирующее в импликации (4), доказываемой в § 5 для произвольных n -мерных симплексов P_0 . На протяжении всего § 4 вместо $\mathcal{L}_n(Q)$ будем использовать обозначение $\mathcal{L}_n$.

Если α – аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющее $(n+1)$ -ю координату неизменной, то $L \cap [\alpha(P_0) \cup \alpha(P_1)] = \alpha(L \cap [P_0 \cup P_1])$. С точки зрения доказываемой теоремы конкретная форма симплекса Δ_n не так существенна, поскольку аффинным преобразованием α , сохраняющим n -мерный объём (например, с определителем 1 у матрицы линейной части преобразования α), произвольный симплекс $\Delta_n = [A_1, \dots, A_n, A_{n+1}]$ переводится в правильный симплекс, у которого все рёбра одной длины. Это доказывается, например, индукцией по n . Вначале представляемое горизонтально основание $\Delta_{n-1} = [A_1, \dots, A_n]$ пирамиды Δ_n с вершиной A_{n+1} переводится в правильный симплекс Δ_{n-1} с центром в начале координат. Затем вершина пирамиды A_{n+1} переводится по горизонтали (при неподвижном основании) на вертикальную координатную ось. Наконец, растяжениями основания пирамиды и изменением её высоты (передвижением вершины A_{n+1} вдоль вертикальной координатной оси) можно получить правильный симплекс Δ_n прежнего объёма.

4.1. В этом пункте симплекс Δ_n считаем правильным. Будем также считать $v = 1$ и $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) \in [1, 2]$. В этом случае тело Q содержится в шаре ограниченного радиуса R .

Если диаметры тел Q не ограничены, а расстояния от L до L_0 и от L до L_1 относятся как t к $1 - t$, $t \in (0, 1)$, то для некоторого Q найдутся точки $B_1, \dots, B_r \in Q$, $r > \frac{2}{(1-t)^n}$, для которых $(L \cap [\{B_i\} \cup \Delta_n]) \cap (L \cap [\{B_j\} \cup \Delta_n]) = \emptyset$ для всех $1 \leq i < j \leq r$. Тогда $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) \geq$

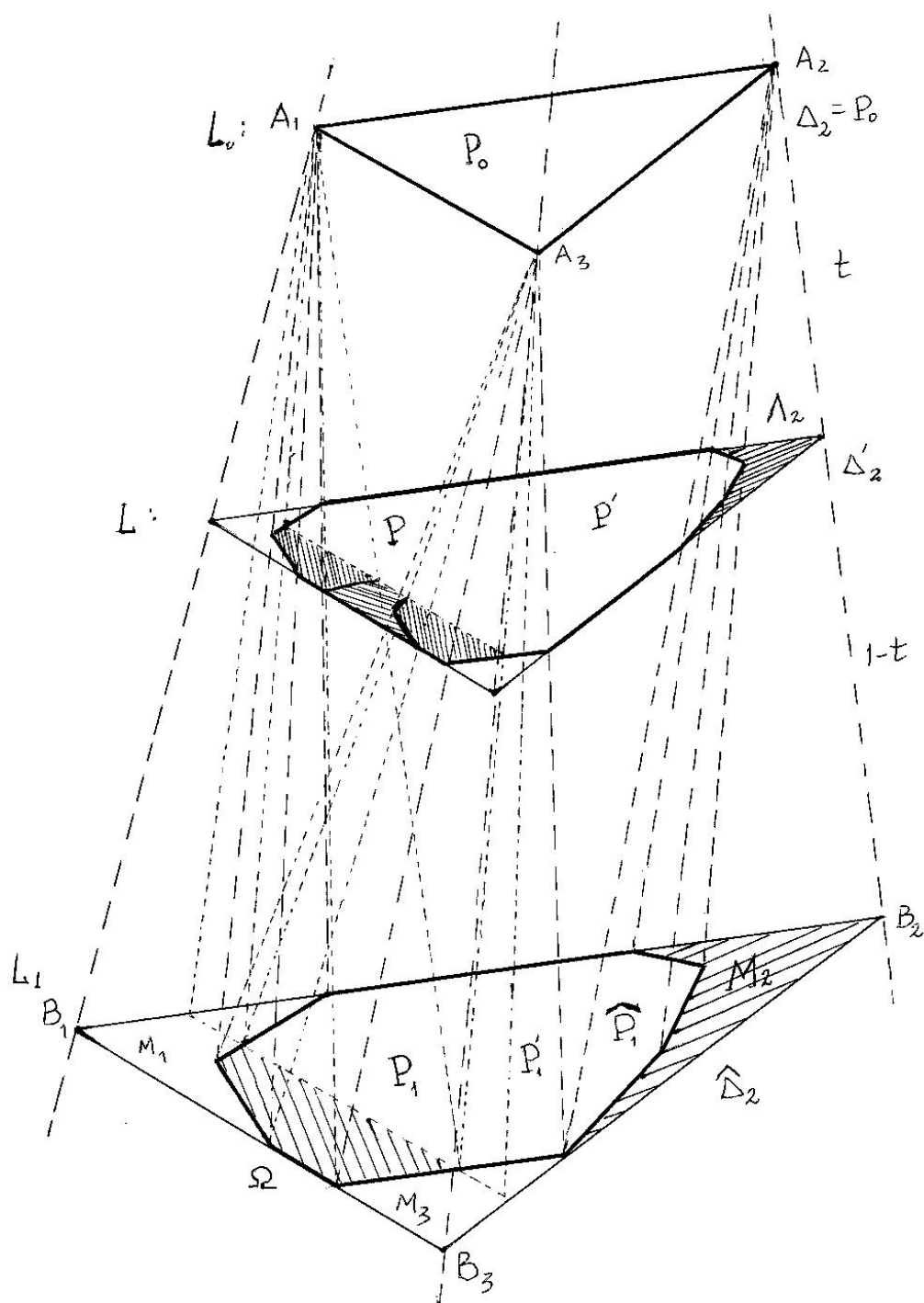


Рис. 2

$\sum_{i=1}^r V_n(L \cap [\{B_i\} \cup \Delta_n]) = r(1-t)^n > 2$. Полученное противоречие указывает на ограниченность радиуса R , с верхней оценкой, зависящей только от $n \geq 3$ и $t \in (0, 1)$.

Будем говорить, что некоторая характеристика, относящаяся к телу Q , имеет *гарантированную* величину, если она имеет нижнюю оценку в виде положительной константы, зависящей только от $n \geq 3$ и $t \in (0, 1)$.

4.1.1. Для любого $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ расстояние $h = h_{\mathbf{n}} = \rho(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}, \mathcal{L}_{-\mathbf{n}}) \leq 2R$ между опорными для Q гиперплоскостями $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ и $\mathcal{L}_{-\mathbf{n}}$ гарантировано, поскольку $V_n(Q) = 1$, а для всех гиперплоскостей $\mathcal{L} \parallel \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ величина $V_{n-1}(Q \cap \mathcal{L})/R^{n-1}$ меньше зависящей от n константы. В то же время для некоторой гиперплоскости $\mathcal{L}' \parallel \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ величина $V_{n-1}(Q \cap \mathcal{L}')$ гарантирована, не меньше $\frac{1}{2R}$.

4.1.2. При любом $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ для гиперплоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)}$, параллельной гиперплоскостям $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ и $\mathcal{L}_{-\mathbf{n}}$ и расположенной строго по середине между ними, гарантировано значение $V_{n-1}(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)} \cap Q)$. Действительно, если $\mathcal{L}'$ – гиперплоскость из предыдущего п. 4.1.1 и $\rho(\mathcal{L}_{-\mathbf{n}}, \mathcal{L}') < \frac{h_{\mathbf{n}}}{2}$, а вершина $B \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \cap Q$, то даже значение $V_{n-1}(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)} \cap [\{B\} \cup (\mathcal{L}' \cap Q)]) \leq V_{n-1}(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)} \cap Q)$ гарантировано, меньше по сравнению с $V_{n-1}(Q \cap \mathcal{L}')$ не более чем в 2^{n-1} раз.

4.1.3. Пусть $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ и гиперплоскость $\mathcal{L} \parallel \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ такая, что $\mathcal{L}^- \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{L}_{\mathbf{n}}) = d < h_{\mathbf{n}}/2$. Значение $V_n(\mathcal{L}^+ \cap Q)/d^n$ гарантировано согласно предыдущему подпункту, поскольку гарантировано $V_n([\{B\} \cup (\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)} \cap Q)])$, $B \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \cap Q$.

4.2. Для точек сферы S^{n-1} с центром в начале координат "плоскостями" размерности $k = 0, 1, \dots, n-2$ считаем пересечения векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$ размерности $k+1$ с открытыми полусферами (без границ в виде "экваторов" S^{n-2}). Выпуклой оболочкой пары точек $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in S^{n-1}$ с угловым расстоянием меньшим 180° считаем "отрезок" $[\mathbf{n}, \mathbf{m}] \subset S^{n-1}$, являющийся пересечением сферы S^{n-1} и угла с вершиной в начале координат и лучами вдоль векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$. Это позволяет использовать на сфере S^{n-1} аналоги понятий и терминов, относящихся к выпуклым множествам евклидова пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, и позволяет рассматривать структуру разбиения сферы S^{n-1} на i -мерные "симплексы", $i = 0, 1, \dots, n-1$, по типу устройства границы n -мерного симплекса Δ_n .

Пусть: $\hat{\Delta}_n = \hat{\Delta}_n(Q) = [B_1, \dots, B_{n+1}]$ – минимальный симплекс, содержащий тело $Q \subset L_1$ и гомотетичный симплексу $P_0 = \Delta_n \subset L_0$ с положительным коэффициентом гомотетии, $\mathbf{n}_j \in S^{n-1}$, $j = 1, \dots, n+1$, – нормаль $(n-1)$ -мерной грани $[B_1, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_{n+1}]$ симплекса $\hat{\Delta}_n$. Обозначим $\mathcal{N}_0 = \{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n+1}\}$. Для собственного подмножества $\mathbf{a} \subset \mathcal{N}_0$ с $|\mathbf{a}| = i+1 \geq 2$ обозначим $\mathcal{N}_{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}] \setminus \partial[\mathbf{a}]$ – внутренность i -мерного "симплекса" $[\mathbf{a}] \subset S^{n-1}$. Считаем $\mathcal{N}_{\{\mathbf{n}_j\}} = \{\mathbf{n}_j\}$, $j = 1, \dots, n+1$, по определению. Полагая $\mathcal{N}_i = \bigsqcup_{\mathbf{a} \subset \mathcal{N}_0: |\mathbf{a}|=i+1} \mathcal{N}_{\mathbf{a}}$, получаем $S^{n-1} = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{N}_i$. Если $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}} \subset \mathcal{N}_{n-i}$, $\mathbf{a} = \{\mathbf{n}_{j_1}, \dots, \mathbf{n}_{j_{n-i+1}}\}$, то $\hat{\Delta}_n \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}}(\hat{\Delta}_n)$ является $(i-1)$ -мерной гранью симплекса $\hat{\Delta}_n$ с вершинами B_j , $j \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{j_1, \dots, j_{n-i+1}\}$. Во введении в п. 1.4 опорные гиперплоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ тела Q с нормальными $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{n-i}$, были отнесены к уровню i , $i = 1, \dots, n$.

Полагая $\mathcal{M}_i = \bigsqcup_{k=0}^{n-i} \mathcal{N}_k$, $i = 1, \dots, n$, получаем строгие вложения

$$S^{n-1} = \mathcal{M}_1 \supsetneq \mathcal{M}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{M}_{n-1} \supsetneq \mathcal{M}_n = \mathcal{N}_0, \quad (6)$$

задающие ряд (5) с $Q^{(i)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{M}_i} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, $i = 1, \dots, n$, $Q^{(1)} = Q$, $Q^{(n)} = \hat{\Delta}_n$. Телу Q приписываем (по отношению к Δ_n) порядок j , $j = 1, \dots, n-1$, если $Q = Q^{(j)} \neq Q^{(j+1)}$. Если $Q \parallel \Delta_n$, то $Q = Q^{(n)} = \hat{\Delta}_n$ имеет порядок n .

Совокупность из $2^{n+1} - 2$ подмножеств $\mathcal{N}_{\mathbf{a}} \subset S^{n-1}$, $\mathbf{a} \subset \mathcal{N}_0$, $|\mathbf{a}| = 1, \dots, n$, на которые разбилась сфера S^{n-1} , упорядочим по мере увеличения $k = |\mathbf{a}|$. При каждом $k \in \{1, \dots, n\}$ всю совокупность открытых $(k-1)$ -мерных "граней" общим числом $\binom{n+1}{k}$ линейно упорядочиваем произвольным образом. Наряду с (6) рассмотрим более плотный ряд

$$S^{n-1} = \mathcal{M}_1 = \mathcal{H}_1 \supsetneq \mathcal{H}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{H}_{2^n - n - 3} \supsetneq \mathcal{H}_{2^n + 1 - n - 2} = \mathcal{N}_0, \quad (7)$$

в котором $\mathcal{H}_{s+1}$, $s = 1, \dots, 2^{n+1} - n - 3$, получается удалением из множества $\mathcal{H}_s$ открытой "границы" $\mathcal{N}_a$ с максимальным (в $\mathcal{H}_s$) номером. Аналогом (5) является тоже более плотный ряд

$$Q = Q^{(1)} = R^{(1)} \subseteq R^{(2)} \subseteq \dots \subseteq R^{(2^{n+1}-n-3)} \subseteq R^{(2^{n+1}-n-2)} = \widehat{\Delta}_n, \quad (8)$$

в котором $R^{(s)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_s} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, $s = 1, \dots, 2^{n+1} - n - 2$. Для каждого $\mathcal{M}_j$, $j = 1, \dots, n$, в (7) найдётся $\mathcal{H}_{s(j)} = \mathcal{M}_j$, $s(j) \in \{1, \dots, 2^{n+1} - n - 2\}$.

4.2.1. Если $Q = Q^{(j)} \subsetneq Q^{(j+1)}$, $j = 1, \dots, n - 1$, то для некоторого $s \in \{s(j), s(j) + 1, \dots, s(j + 1) - 1\}$ в (8) имеем $Q = R^{(s)} \subsetneq R^{(s+1)}$, и найдётся подмножество $\mathbf{a}_1 \subset \mathcal{N}_0$ мощности $n - j + 1$, $\mathbf{a}_1 = \{\mathbf{n}_{i_1}, \dots, \mathbf{n}_{i_{n-j+1}}\}$, для которого $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{s+1} \sqcup \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$, $Q = R^{(s)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_s} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = R^{(s+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$. Обозначим $R^{(s+1)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_{s+1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = Q^{(j,j+1)}$.

Пусть $\{k_1, \dots, k_j\} = \{1, \dots, n + 1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-j+1}\}$. Для всех нормалей $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$ гиперплоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ параллельна грани $[B_{k_1}, \dots, B_{k_j}]$, содержащейся в аффинном подпространстве $B_{k_1} + U$, параллельном $(j-1)$ -мерному линейному подпространству $U = \langle \overrightarrow{B_{k_1}, B_{k_2}}, \dots, \overrightarrow{B_{k_1}, B_{k_j}} \rangle$ в $\mathbb{R}^n$. Поскольку $Q = Q^{(j,j+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, то с каждой точкой $x \in \overset{\circ}{Q}^{(j,j+1)} \cap \partial Q$ на границе ∂Q будут содержаться все точки из $(x + U) \cap Q^{(j,j+1)}$. Все эти точки содержатся в $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$ для всех $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$ и для всех $\mathbf{n} \in \mathcal{H}_{s+1}$.

Справедливо и обратное, если $x \in \overset{\circ}{Q}^{(j,j+1)}$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(Q) \supset x + U$, то обязательно $\mathbf{u} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$. Приведём этому очевидному факту формальное доказательство от противного. Пусть $\mathbf{u} \notin \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$. Поскольку $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\widehat{\Delta}_n) \supset [B_{k_1}, \dots, B_{k_j}]$, то $\mathbf{u} \in \partial \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1} = \partial[\mathbf{a}_1]$, поэтому $\mathbf{u} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_2}$, $|\mathbf{a}_2| < |\mathbf{a}_1|$. В результате номер открытого "симплекса" $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_2}$ меньше номера открытого "симплекса" $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$, поэтому, согласно правилу построения ряда (7), $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_2} \subset \mathcal{H}_{s+1}$ и $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{s+1}$. Последнее означает, что $Q^{(j,j+1)} \subset \mathcal{L}_{\mathbf{u}}^-(Q)$. Но это противоречит тому, что точка $x \in \mathcal{L}_{\mathbf{u}}^-(Q)$ является внутренней для тела $Q^{(j,j+1)}$.

4.2.2. В случае тела общего положения в обозначениях п. 4.2.1 имеем $j = 1$ и $Q = Q^{(1)} \subsetneq Q^{(2)}$, $Q^{(1)} = R^{(1)}$, $Q^{(2)} = R^{(n+2)}$. Тогда найдутся $s \in \{1, \dots, n + 1\}$ и $\mathbf{a}_0 \subset \mathcal{N}_0$ мощности n , для определённости $\mathbf{a}_0 = \{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n\}$, для которых $\mathcal{H}_{s+1} = \mathcal{H}_s \setminus \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$, $Q = R^{(s)} \subsetneq R^{(s+1)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_{s+1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = Q^{(1,2)}$. Поскольку $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{s+1} \sqcup \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$ и $Q = R^{(s)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_{s+1} \sqcup \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = Q^{(1,2)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, то

$$Q^{(1,2)} \setminus Q = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}} (Q^{(1,2)} \cap \overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+) = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}} \left(\overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+ \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \partial[\mathbf{a}_0]} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- \right). \quad (9)$$

Второе равенство в (9) справедливо согласно далее доказываемым интуитивно очевидным равенствам

$$Q^{(1,2)} \cap \overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+ = \overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+ \cap \bigcap_{\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]} \mathcal{L}_{\mathbf{m}}^- \quad (10)$$

для всех $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$. Напомним, что $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_0} = [\mathbf{a}_0] \setminus \partial[\mathbf{a}_0]$. Настоящий параграф закончим доказательством равенств (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве этих равенств воспользуемся разбиением $S^{n-1} = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0} \sqcup \partial[\mathbf{a}_0] \sqcup (S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0])$, для которого $\partial[\mathbf{a}_0] \subsetneq \mathcal{H}_{s+1} \subseteq \partial[\mathbf{a}_0] \sqcup (S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0]) = S^{n-1} \setminus \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$. Векторы из подмножеств $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$, $\partial[\mathbf{a}_0]$, $S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0]$ сферы S^{n-1} обозначаем соответственно как $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$, $\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]$ и $\mathbf{w} \in S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0]$. Равенства (10) будут следовать из включений

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+ \cap \bigcap_{\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]} \mathcal{L}_{\mathbf{m}}^- \subset \mathcal{L}_{\mathbf{w}}^- \quad (11)$$

для всех $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$ и $\mathbf{w} \in S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0] \supseteq \mathcal{H}_{s+1} \setminus \partial[\mathbf{a}_0]$.

При $n = 2$ включения (11) очевидны (см. рис. 3). В этом случае $\mathbf{a}_0 = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\} = \partial[\mathbf{a}_0]$, $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{n}_1 + \alpha_2 \mathbf{n}_2$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $-\mathbf{v} \in S^1 \setminus [\mathbf{a}_0]$. Включение (11) выполнено, так как точка пересечения прямых L_v и L_w (если таковая есть) находится за пределами отрезка $[C, D]$ или совпадает с одним из его концов.

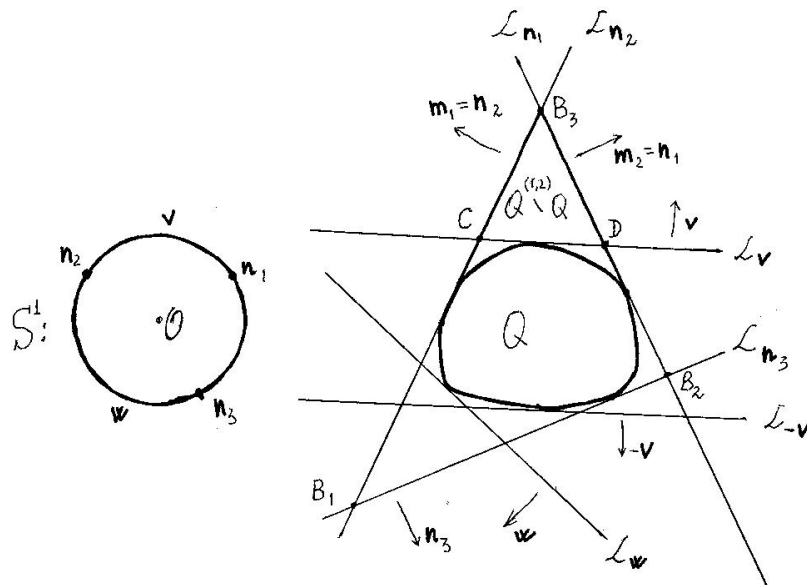


Рис. 3

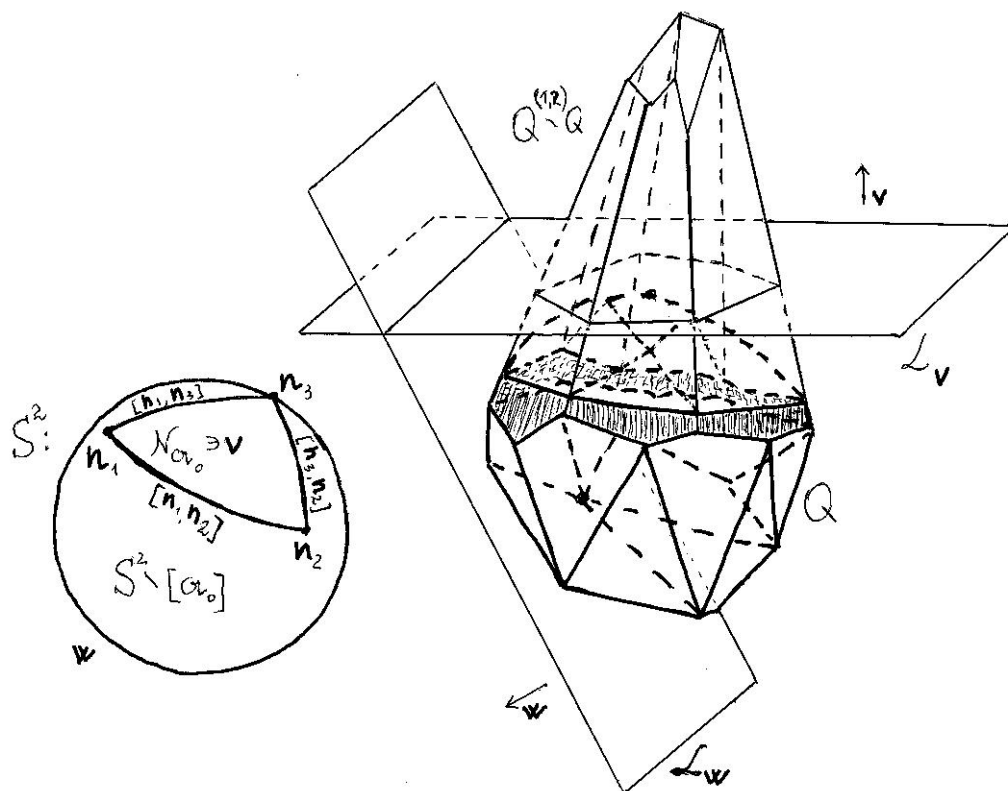


Рис. 4

Пусть $n \geq 3$ (см. рис. 4 для $n = 3$). Без ограничения общности векторы $\overrightarrow{B_{n+1}}, \overrightarrow{B_i}, i = 1, \dots, n$, можно считать взаимно перпендикулярными. В пространстве $\mathbb{R}^n$ предполагаем систему координат с ортонормальным базисом $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_i = \alpha_i \overrightarrow{B_{n+1}}, \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n$. Тогда $\mathbf{n}_i = -\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$. Для $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$ имеем $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n, v_i < 0, i = 1, \dots, n$. Для $\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]$ имеем $\mathbf{m} = m_1 \mathbf{e}_1 + \dots + m_n \mathbf{e}_n, m_i \leq 0, i = 1, \dots, n$, и существует $j \in \{1, \dots, n\}$ с $m_j = 0$. Наконец, для $\mathbf{w} \in S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0]$ имеем $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + \dots + w_n \mathbf{e}_n$ и существует $j \in \{1, \dots, n\}$ с $w_j > 0$. Для $\mathbf{w} = -\mathbf{v} \in S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0]$ включение (11) очевидно. При $\mathbf{w} \neq -\mathbf{v}$ рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ плоскость $U_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ и ортогональное к ней подпространство $U_{n-2} \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n = U_2 \oplus U_{n-2}$. Проекция тел Q и $Q^{(1,2)}$ на плоскость U_2 параллельно подпространству U_{n-2} обозначим соответственно как $\hat{Q}$ и $\hat{Q}^{(1,2)}$.

Опорными прямыми для выпуклых областей $\hat{Q}$ и $\hat{Q}^{(1,2)}$ будут соответственно прямые $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} \cap U_2$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}(Q^{(1,2)}) \cap U_2$ для нормалей $\mathbf{n} \in S^1 = S^{n-1} \cap U_2$. На окружности S^1 будет ровно две различных нормали $\mathbf{m}_+, \mathbf{m}_- \in \partial[\mathbf{a}_0]$. Укажем их. Если нормаль $\mathbf{u} \in S^1$ перпендикулярна $\mathbf{v}$, то $\mathbf{m}_+ = \mathbf{v} \cos \varphi_+ + \mathbf{u} \sin \varphi_+$, где $\varphi_+ = \min_{i=1, \dots, n} \varphi_{+,i}, \varphi_{+,i} \in (0, \pi), (\mathbf{v} \cos \varphi_{+,i} + \mathbf{u} \sin \varphi_{+,i}, \mathbf{e}_i) = 0$ или $\operatorname{ctg} \varphi_{+,i} = -\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)}{(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i)}$. Аналогично определяется $\mathbf{m}_- = \mathbf{v} \cos \varphi_- - \mathbf{u} \sin \varphi_-$. Множество $S^1 \setminus \{\mathbf{m}_+, \mathbf{m}_-\}$ разбивается на две дуги, на одной нормали из $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$, а на другой – из $S^{n-1} \setminus [\mathbf{a}_0]$. После этого доказательство включения (11) сводится к разобранному случаю $n = 2$ (см. рис. 3). Включения (11) выполнены, так как они имеют место для проекций.

Равенства (10) доказаны.

Доказательство импликации (4) для $P_0 = \Delta_n$ и $n \geq 3$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью аффинных преобразований, сохраняющих $(n+1)$ -мерный объём и оставляющих гиперплоскости L_0, L, L_1 на месте, любой n -мерный симплекс $\Delta_n \subset L_0$ можно перевести в правильный. Поэтому, доказав импликацию (4) для какого-то одного симплекса Δ_n , она будет справедлива для произвольного симплекса Δ_n заданного объёма. Вместо P_1 будем использовать обозначение $Q \subset L_1, Q \not\parallel \Delta_n, V_n(Q) = \underline{V}_n(\Delta_n) = v$. Согласно (3) $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) \geq v$, и если $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) > v$, то в качестве $\tilde{P}_1$ в (4) можно взять $\tilde{Q} \parallel \Delta_n$. Останется проверить, что равенство $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) = v$ невозможно при $Q \not\parallel \Delta_n$. В п. 5.1 это устанавливается для тел Q общего положения, $Q = Q^{(1)}$, а в п. 5.2 для тел Q порядка $j = 2, \dots, n-1$ индукцией по j , в п. 5.2.1 для $n = 3$, а в п. 5.2.2 для $n \geq 4$. Каждый раз, предполагая равенство $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) = v$, будем получать противоречие в виде строгого неравенства $V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) > v$.

5.1. Пусть $Q \subset L_1 = \mathbb{R}^n$ является телом общего положения, $Q = Q^{(1)} \subsetneq Q^{(2)}$. Далее рассуждения п. 3.2, относящиеся к $n = 2$ (см. рис. 2), перенесём на случай $n \geq 3$.

В обозначениях далее используемого п. 4.2.2 имеем $V_n(Q^{(1,2)}) = V_n(Q) + \delta = v + \delta, \delta > 0$. Пусть одна конкретная опорная гиперплоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\Delta_n)$ содержит какое-либо ребро $[B, C]$ симплекса Δ_n . С помощью гиперплоскости в L_1 с нормалью $\mathbf{u}$ отсечём от тела $Q^{(1,2)}$ тело Ω с $V_n(\Omega) = \delta$. Тогда для $\tilde{Q} = Q^{(1,2)} \setminus \Omega$ имеем $V_n(\tilde{Q}) = V_n(Q) = v$. Обозначим $P = L \cap [\Delta_n \cup Q], P^{(1,2)} = L \cap [\Delta_n \cup Q^{(1,2)}], \tilde{P} = L \cap [\Delta_n \cup \tilde{Q}], V_n(P) \geq v$. Проверим, что $V_n(P) > \underline{V}_n(\tilde{P})$.

Пусть $x \in [\Delta_n \cup Q^{(1,2)}] \setminus [\Delta_n \cup Q]$ и y – точка пересечения луча $A_{n+1} + \alpha \overrightarrow{A_{n+1}}, \alpha \geq 0$, с плоскостью L_1 . Поскольку $x \in [\Delta_n \cup Q^{(1,2)}]$, а $A_{n+1} \in \mathcal{L}_{\mathbf{m}}(\Delta_n)$ для всех $\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]$, то $x \in \mathcal{L}_{\mathbf{m}}^-(\Delta_n, Q)$ для всех $\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]$ и поэтому $y \in \bigcap_{\mathbf{m} \in \partial[\mathbf{a}_0]} \mathcal{L}_{\mathbf{m}}^-$. Для некоторого $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_0}$ имеем $x \in \mathring{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+(\Delta_n, Q)$, из-за чего $y \in \mathring{\mathcal{L}}_{\mathbf{v}}^+$. Согласно (9) имеем $y \in Q^{(1,2)} \setminus Q$. Следовательно $[\Delta_n \cup Q^{(1,2)}] \setminus [\Delta_n \cup Q] = \{A_{n+1}\} \cup (Q^{(1,2)} \setminus Q) \setminus \{A_{n+1}\}$. Таким образом, $V_n(P^{(1,2)}) = V_n(P) + t^n \delta$. Как и в п. 3.2 убеждаемся (см. рис. 2), что

$$V_n(P^{(1,2)}) - V_n(\tilde{P}) \geq V_n([B, C] \cup \Omega) =$$

$$= V_n \left(\bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \left((L \cap [\{B\} \cup \Omega]) + \alpha(1-t)\overrightarrow{B, C} \right) \right) > \\ > V_n(L \cap [\{B\} \cup \Omega]) = t^n \delta,$$

поэтому $V_n(\tilde{P}) < V_n(P^{(1,2)}) - t^n \delta = V_n(P) + t^n \delta - t^n \delta = V_n(P)$.

5.2. Пусть теперь $Q = Q^{(j)} \subsetneq Q^{(j+1)}$, $2 \leq j \leq n-1$. Как и в п. 4.1 здесь нам будет удобно считать симплекс Δ_n правильным и $v = 1$. Обозначим $w(Q) = V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n])$. Пусть, вопреки доказываемому, $w(Q) = 1$.

5.2.1. Если $n = 3$, то $j = 2$, $Q = Q^{(2)} \subsetneq Q^{(3)} = \hat{\Delta}_3$. Тогда, согласно далее используемому п. 4.2.1 для некоторого $s \in \{5, \dots, 10\}$ имеем $Q = R^{(s)} \subsetneq R^{(s+1)}$, и найдётся подмножество $\mathbf{a}_1 \subset \mathcal{N}_0 = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4\}$ мощности $3 - 2 + 1 = 2$, для которого $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{s+1} \sqcup \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$, $Q = R^{(s)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_s} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = R^{(s+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, $R^{(s+1)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_{s+1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = Q^{(2,3)} \supsetneq Q$. Пусть для определённости $\mathbf{a}_1 = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$. Тогда $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \setminus \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$.

Рассмотрим точку $x \in \overset{\circ}{Q}^{(2,3)} \cap \partial Q$. Согласно п. 4.2.1 вместе с точкой x в $Q^{(2,3)} \cap \partial Q$ содержится отрезок $Q^{(2,3)} \cap \{x + \alpha \overrightarrow{B_3, B_4} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Таким образом (см. рис. 5), если $x \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}$, то $[B_3, B_4] \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3)$ и $\mathbf{n}_0 \in (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$. Выбрав внутреннюю точку $B'_4 \in [B_1, B_4]$ поближе к

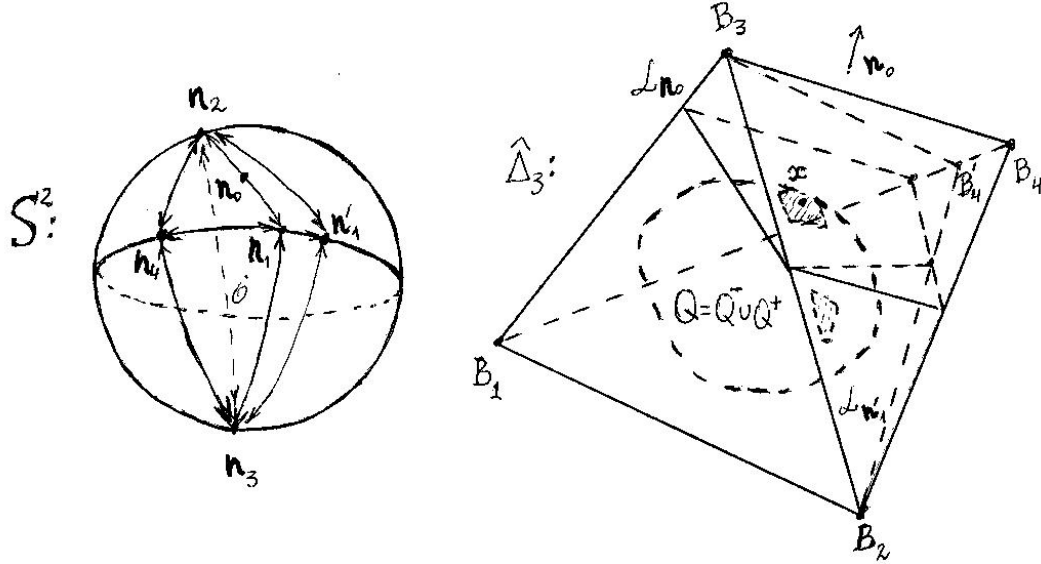


Рис. 5

B_4 , симплекс $\hat{\Delta}_3$ плоскостью $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$, содержащей треугольник $\Delta_{B_3 B_2 B'_4}$, разбиваем на два симплекса. Ориентация плоскости $\mathcal{L}$ выбрана так, что $B_4 \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^+$. Симплекс $\Delta_3 \subset L_0$ разбиваем на два симплекса плоскостью $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)} \subset L_0$, параллельной $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$. Плоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$ параллельно перенесём (не выходя из L_1) в положение $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}$ так, что $V_3(\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^+ \cap Q) = V_3(\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)+} \cap \Delta_3)$. Положим $Q^+ = Q \cap \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^+$, $Q^- = Q \cap \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^-$, $Q = Q^- \cup Q^+$, $\Delta_3^- = \Delta_3 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)-}$, $\Delta_3^+ = \Delta_3 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)+}$, $\Delta_3 = \Delta_3^- \cup \Delta_3^+$.

Согласно п. 4.1.3 точку $B'_4 \in [B_1, B_4]$ можно выбрать на столько близкой к вершине B_4 , что точка x останется внутри $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^-$, из-за чего тело Q^- будет иметь порядок 1 (относительно симплекса Δ_3^-), что (благодаря параллельности) достаточно проверить в случае $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$. Проверим. Плоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3^-) = \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3)$ содержит только вершину B_3 симплекса $\hat{\Delta}_3^- \supset$

Q^- , иначе она содержала бы (вместе с B_4) три вершины симплекса $\hat{\Delta}_3$. Если, например, $B'_4 \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3)$, то $\triangle_{B_3 B_4 B'_4} \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3)$ и поэтому $\triangle_{B_3 B_4 B_1} \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3)$ (см. рис. 5). При $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1} \neq \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$ каждая грань симплекса $\hat{\Delta}_3^-$ параллельна соответствующей грани симплекса $\hat{\Delta}_3 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$, плоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3^-)$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_3 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1})$ тоже параллельны, поэтому и в общем случае тело Q^- будет иметь порядок 1 по отношению к симплексу Δ_3^- .

Пусть $V_3(\Delta_3^-) = V_3(Q^-) = v^-$, $V_3(\Delta_3^+) = V_3(Q^+) = v^+$, $v^- + v^+ = 1$. Согласно (3) имеем $w(Q^-) \geq v^-$, $w(Q^+) \geq v^+$. По доказанному в п. 5.2.1 справедливо строгое неравенство $w(Q^-) > v^-$. В результате (см. п. 1.2) имеем

$$1 = w(Q) \geq w(Q^-) + w(Q^+) \geq w(Q^-) + v^+ > v^- + v^+ = 1.$$

Импликация (4) для $P_0 = \Delta_n$ и $n = 3$ доказана.

5.2.2. Пусть теперь $Q = Q^{(j)} \subsetneq Q^{(j+1)}$, $2 \leq j \leq n-1$, $n \geq 4$. Снова согласно далее используемому п. 4.2.1 для некоторых $s \in \{s(j), s(j)+1, \dots, s(j+1)-1\}$ и подмножества $\mathbf{a}_1 \subset \mathcal{N}_0$ мощности $n-j+1$, $\mathbf{a}_1 = \{\mathbf{n}_{i_1}, \dots, \mathbf{n}_{i_{n-j+1}}\}$ имеем: $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{s+1} \sqcup \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$,

$$Q = R^{(s)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_s} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = R^{(s+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-,$$

$$R^{(s+1)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_{s+1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = Q^{(j,j+1)} \supsetneq Q = Q^{(j,j+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-.$$

Положим $\{k_1, \dots, k_j\} = \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-j+1}\}$. Рассмотрим точку $x \in \overset{\circ}{Q}^{(j,j+1)} \cap \partial Q$. Согласно п. 4.2.1 вместе с точкой x в $Q^{(j,j+1)} \cap \partial Q$ содержится $(j-1)$ -мерное тело $Q^{(j,j+1)} \cap (x + U)$, где U — $(j-1)$ -мерное векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$, параллельное грани $[B_{k_1}, \dots, B_{k_j}]$. Таким образом, если $x \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}$, то $[B_{k_1}, \dots, B_{k_j}] \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_n)$ и, согласно п. 4.2.1, других вершин симплекса $\hat{\Delta}_n$ в $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}$ нет, т.е. обязательно $\mathbf{n}_0 \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1}$.

На ребре $[B_{i_1}, B_{k_j}]$ симплекса $\hat{\Delta}_n = [B_1, \dots, B_{n+1}]$ выберем внутреннюю точку B'_{k_j} ближе к B_{k_j} . Симплекс $[B_1, \dots, B_{n+1}]$ разбиваем на два симплекса гиперплоскостью $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$, содержащей $(n-1)$ -мерный симплекс $\{[B_i] \mid i \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, k_j\}\} \cup \{B'_{k_j}\}$, а симплекс $\Delta_n \subset L_0$ разобьём на два симплекса параллельной $\mathcal{L}$ гиперплоскостью $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)} \subset L_0$. Ориентация гиперплоскости $\mathcal{L}$ выбрана так, что $B_{k_j} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^+$.

Гиперплоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$ параллельно перенесём в положение $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}$ так, чтобы $V_n(\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^+ \cap Q) = V_n(\mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)+} \cap \Delta_n)$. Положим $Q^+ = Q \cap \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^+$, $Q^- = Q \cap \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^-$, $Q = Q^- \cup Q^+$, $\Delta_n^- = \Delta_n \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)-}$, $\Delta_n^+ = \Delta_n \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}^{(0)+}$, $\Delta_n = \Delta_n^- \cup \Delta_n^+$.

Согласно п. 4.1.3 точку $B'_{k_j} \in [B_{i_1}, B_{k_j}]$ можно выбрать на столько близкой к вершине B_{k_j} , что точка x останется внутри $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1}^-$, из-за чего многогранник Q^- будет относиться к классу $j-1$, что (благодаря параллельности) достаточно проверить в случае $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'_1} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}'_1}$. Проверим. Гиперплоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_n^-) = \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_n)$ содержит (согласно п. 4.2.1) только вершины $B_{k_1}, \dots, B_{k_{j-1}}$ симплекса $\hat{\Delta}_n^- \supset Q^-$, иначе она содержала бы (вместе с B_{k_j}) $j+1$ вершину симплекса $\hat{\Delta}_n$. Если, например, $B'_{k_j} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_n)$, то $\triangle_{B_{k_{j-1}} B_{k_j} B'_{k_j}} \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_n)$ и поэтому $\triangle_{B_{i_1} B_{k_{j-1}} B_{k_j}} \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(\hat{\Delta}_n)$ (см. рис. 5 для $n=3$).

Коль скоро тело Q^- имеет порядок $j-1$ относительно симплекса Δ_n^- , то, применив индукцию по j и (1), имеем $1 = w(Q) \geq w(Q^-) + w(Q^+) \geq w(Q^-) + V_n(Q^+) > V_n(Q^-) + V_n(Q^+) = V_n(Q) = 1$.

Импликация (4) для $P_0 = \Delta_n$ и $n \geq 4$ доказана.

Этим завершено доказательство теоремы (2) для произвольных выпуклых тел P_0, P_1 и $n \geq 2$.

В заключении автор благодарит Р.Н. Карасёва за оказанные консультации и предоставленную литературу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бураго, Ю. Д., Залгаллер, В. А. 1980, "Геометрические неравенства." Наука, Л., 288 с.
2. Федерер, Г. 1987, "Геометрическая теория меры." Наука, Москва, 760 с.
3. Булдыгин, В. В., Харазишвили, А. Б., 1985, "Неравенство Брунна – Минковского и его приложения." Наукова Думка, Киев, 200 с.
4. Gardner, R. J. 2002, "The Brunn–Minkowski inequality", *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, vol. 39, no. 3, pp. 355–405.
5. Brunn, H. 1887, "Uber Ovale und Eiflachen." Inag. Diss., Munchen, 86 pp.
6. Делоне, Б. Н. 1936, "Доказательство неравенства Брунна – Минковского", *Успехи математических наук*, в. 2, стр. 39–46.
7. Minkowski, H. 1896, 1910, "Geometrie der Zahlen." Leipzig-Berlin, 278 pp.
8. Хадвигер, Г. "Лекции об объёме, площади поверхности и изометрии." Наука, Москва, 416 с.
9. Лейхтвейс, К. 1985, "Выпуклые множества." Наука, М., 336 с.
10. Бляшке, В. 1967, "Круг и шар." Наука, М., 232 с.
11. Schneider, R. 2013, "Convex Bodies: The Brunn–Minkowski theory" *Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its applications*, **151**. Cambridge University Press, Cambridge, xvii+736 pp.
12. Barthe, F. 2006, "The Brunn–Minkowski theorem and related geometric and functional inequalities", *Proc. International Congress Math.*, Madrid, Spain, pp. 1529–1546.
13. Ball, K. 2004, "An Elementary Introduction to Monotone Transportation" *LNM*, no. 1850, pp. 41–52.
14. Александров, А. Д. 1950, "Выпуклые многогранники." ГИТТЛ, М. – Л., 428 с.
15. Делоне, Б. Н. 1936, "Герман Минковский", *Успехи математических наук*, в. 2, стр. 32 – 38.
16. Bollobas, S., Leader, I. 1996, "Sums in the grid", *Discrete Math.*, no. 6, pp. 31–48.
17. Gardner, R. J., Gronchi, P. 2001, "A Brunn–Minkowski inequality for the integer lattice", *Trans. Amer. Math. Soc.*, no. 353, pp. 3995–4024.
18. Lv, S. 2010, "Dual Brunn–Minkowski inequality for volume differences", *Geom. Dedicata*, no. 145, pp. 169–180.
19. Salani, P. 2011, "Convexity of solutions and Brunn– Minkowski inequalities for Hessian equations in $\mathbb{R}^3$ ", *Advances in Math.*, vol. 229, no. 3, pp. 1924–1948.
20. Bobkov, S. G., Madiman, M. 2012, "Reverse Brunn–Minkowski and reverse entropy power inequalities for convex measures", *Journal of Func. Anal.*, no. 7, pp. 3309–3339.
21. Lutwak, E., Boröczky, K. J., Yang, D., Zhang, G. 2012, "The log–Brunn–Minkowski inequality", *Advances in Math.*, no. 3–4, pp. 1974–1997.

22. Gardner, R. J., Hug, D., Weil, W. 2014, "The Orlicz–Brunn–Minkowski theory: A general framework, additions, and inequalities", *J. Diff. Geom.*, no. 3, pp. 427–476.
23. Berndtsson, B. 2015, "A Brunn–Minkowski type inequalities for Fano manifolds and some uniqueness theorems in Kahler geometry", *Inventiones math.*, vol. 200, no. 1, pp. 149–200.
24. Timergaliev, B. S. 2016, "Generalization of the Brunn–Minkowski inequality in the Form of Hadwiger for Power Moments", *Lobachevskii J. Math.*, vol. 37, no. 6, pp. 794–806.
25. Белоусов, Е. Г. 1977, "Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование." МГУ, М., 196 с.
26. Грубер, П. М., Леккеркеркер, К. Г. 2008, "Геометрия чисел." Наука, М. 716 стр.
27. Айгнер, М., Циглер, Г. 2006, "Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времён Евклида до наших дней." Мир, М., 256 стр.
28. Малышев, Ф. М. 2019, "Элементарное доказательство теоремы Брунна–Минковского", *Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессора Н.И. Фельдмана и девяностолетию со дня рождения профессоров А.И. Виноградова, А.В. Малышева и Б.Ф. Скубенко.* ТГПУ им. Л. Н. Толстого, Тула, стр. 173–177.
29. Малышев, Ф. М. 2020, "Доказательство теоремы Брунна – Минковского элементарными методами", *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз.*, **182**, ВИНТИ РАН, М., 70–94.
30. Малышев, Ф. М. 2019, "Новое доказательство неравенства Брунна–Минковского", *Классическая и современная геометрия. Материалы Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения В. Т. Базылёва.* МПГУ, М., стр. 111–113.
31. Малышев, Ф. М. 1997, "Оптимизационная задача для неравенства Брунна–Минковского", *Труды МИАН*, **218**, Наука, М., стр. 262–265.

REFERENCES

1. Burago, Ju. D., Zalgaller V. A. 1980, "Geometricheskie neravenstva." [*Geometric inequality*], Nauka, Leningrad, 288 pp. (Russian)
2. Federer, H. 1969, "Geometric measure theory." Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 676 pp.
3. Buldigin, V. V., Charasishvili, A. B. 1985, "Neravenstvo Brunna – Minkovskogo i ego prilogenij" [*Brunn – Minkowski inequality and its applications*], Naukova Dumka, Kiev, 200 pp.
4. Gardner, R. J. 2002, "The Brunn–Minkowski inequality", *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, vol. 39, no. 3, pp. 355–405.
5. Brunn, H. 1887, "Uber Ovale und Eiflachen." Inag. Diss., Munchen, 86 pp.
6. Delaunay, B. N. 1936, "Proof of the Brunn–Minkowski inequality", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, no. 2. pp. 39–46.
7. Minkowski, H. 1896, 1910, "Geometrie der Zahlen." Leipzig–Berlin, 278 pp.

8. Hadwiger, Dr., H. 1957, "Vorlesungen über inhalt, oberfläche und isoperimetrie." Berlin Göttingen Heidelberg, 416 pp.
9. Leichtweis, K. 1985, "Konvexe Mengen." VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 336 pp.
10. Blaschke W. 1967, "Kreis und kugel." Berlin, 232 pp.
11. Schneider, R. 2013, "Convex Bodies: The Brunn–Minkowski theory" *Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its applications*, **151**. Cambridge University Press, Cambridge, xvii+736 pp.
12. Barthe, F. 2006, "The Brunn–Minkowski theorem and related geometric and functional inequalities", *Proc. International Congress Math.*, Madrid, Spain, pp. 1529–1546.
13. Ball, K. 2004, "An Elementary Introduction to Monotone Transportation" *LNM*, no. 1850, pp. 41–52.
14. Alexandrov, A. D., 1950, "Vipuklie mnogogranniki" [*Convex Polyhedra.*], GITTL, M.–L., 428 pp. (Russian)
15. Delaunay, B. N., 1936, "Herman Minkowski", *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, no. 2. pp. 32–38.
16. Bollobas, S., Leader, I. 1996, "Sums in the grid", *Discrete Math.*, no. 6, pp. 31–48.
17. Gardner, R. J., Gronchi, P. 2001, "A Brunn–Minkowski inequality for the integer lattice", *Trans. Amer. Math. Soc.*, no. 353, pp. 3995–4024.
18. Lv, S. 2010, "Dual Brunn–Minkowski inequality for volume differences", *Geom. Dedicata*, no. 145, pp. 169–180.
19. Salani, P. 2011, "Convexity of solutions and Brunn– Minkowski inequalities for Hessian equations in $\mathbb{R}^3$ ", *Advances in Math.*, vol. 229, no. 3, pp. 1924–1948.
20. Bobkov, S. G., Madiman, M. 2012, "Reverse Brunn–Minkowski and reverse entropy power inequalities for convex measures", *Journal of Func. Anal.*, no. 7, pp. 3309–3339.
21. Lutwak, E., Boröczky, K. J., Yang, D., Zhang, G. 2012, "The log–Brunn–Minkowski inequality", *Advances in Math.*, no. 3–4, pp. 1974–1997.
22. Gardner, R. J., Hug, D., Weil, W. 2014, "The Orlicz–Brunn–Minkowski theory: A general framework, additions, and inequalities", *J. Diff. Geom.*, no. 3, pp. 427–476.
23. Berndtsson, B. 2015, "A Brunn–Minkowski type inequalities for Fano manifolds and some uniqueness theorems in Kahler geometry", *Inventiones math.*, vol. 200, no. 1, pp. 149–200.
24. Timergaliev, B. S. 2016, "Generalization of the Brunn–Vinkowski inequality in the Form of Hadwiger for Power Moments", *Lobachevskii J. Math.*, vol. 37, no. 6, pp. 794–806.
25. Belousov, E. G. 1977, "Vvedenie v vipuklii analiz i celochislennoe programmirovaniye." [*Introduction to Convex Analysis and Integer Programming.*], MGU, Moscow, 196 pp. (Russian)
26. Gruber P. M., Lekkerkerker, C. G. 1987, "Geometry of numbers." North–Holland, Amsterdam–New York–Oxford–Tokyo, 716 pp.
27. Aigner M., Ziegler G. M. 1998, "Proofs from the book." Springer, Berlin, 256 pp.

28. Malyshev F. M. 2019, "An elementary proof of the Brunn - Minkowski theorem." *Materiali XVII Mejdunarodnoi konferencii "Algebra, teorij chisel i diskretnaj geometrij"* (Proc. 17th Int. Conf. "Algebra, number theory and discrete geometry"). TGPU, Tula, pp. 173–177.
29. Malyshev F. M. 2020, "Proof of the Brunn - Minkowski theorem by elementary methods" ,*Itogi nauki i tehniki. Ser. Contemporary math. and its appl. Thematic overview.* **182**, VINITI RAN, Moscow, pp. 70–94.
30. Malyshev F. M. 2019, "New proof of the Brunn - Minkowski inequality." *Materiali Mejdunarodnoi konferencii "Klassicheskaj i sovremennaj geometrij"* (Proc. Int. Conf. "Classical and modern geometry"). MPGU, Moscow, pp. 111–113.
31. Malyshev F. M. 1997, "Optimization problem for the Brunn-Minkowski inequality", *Trudi MIAN*, Nauka, Moscow, pp. 262–265.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-183-201

**Матрица относительной лесной доступности
ориентированного пути и ориентированного цикла**

Б. Мханна

Мханна Батуль — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Аннотация

В статье рассмотрены свойства матрицы относительной лесной доступности ориентированного цикла и ориентированного пути.

Во введении представлена история вопроса, дан обзор основных идей и результатов работы.

Во втором разделе собраны основные понятия теории графов, и дано "графовое" представление матрицы относительной лесной доступности орграфа Γ : $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}))_{n \times n}}{f}, i, j = 1 \dots n$, где f_{ij} — количество остовных сходящихся корневых лесов орграфа Γ , в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , а f — общее количество остовных сходящихся корневых лесов орграфа Γ .

В третьем разделе рассмотрены вопросы построения и исследования матрицы относительной лесной доступности ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$. Рассмотрены примеры построения матрицы относительной лесной доступности ориентированного пути для малых значений n . Приведены иллюстрации "графовой" процедуры построения матрицы $\mathbb{F}$. Доказано, что матрица относительной лесной доступности ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, связана с последовательностью $1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots$ степеней числа 2. Другими словами, элементы f_{ij} , формирующие матрицу, представляют собой элементы множества $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}\}$, заполняющие столбцы матрицы: первый столбец состоит из последовательно убывающих чисел $2^{n-1}, \dots, 2, 1$; второй столбец, начинаясь с 0, содержит на втором месте (пересечение с главной диагональю) число 2^{n-2} , в то время как следующие элементы представляют собой последовательно убывающие числа $2^{n-3}, \dots, 2, 1$; третий столбец, содержащий нули на двух позициях, расположенных над главной диагональю, содержит на третьем месте (пересечение с главной диагональю) число 2^{n-2} , в то время как следующие элементы представляют собой последовательно убывающие числа $2^{n-3}, \dots, 2$, и т.д. Величина f равна 2^{n-1} .

В четвертом разделе аналогичные рассуждения проведены для матрицы относительной лесной доступности для ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$.

В заключении подведены итоги работы.

Ключевые слова: матрица относительной лесной доступности, ориентированный путь, ориентированный цикл, граф, орграф, остовные сходящиеся леса, число Мерсенна.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Б. Мханна. Матрица относительной лесной доступности ориентированного пути и ориентированного цикла // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 183–201.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-183-201

Matrix of relative forest accessibility of the oriented path and the oriented cycle

B. Mhanna

Mhanna Batool — graduate student, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: batool.mhanna77@gmail.com

Abstract

In this paper we consider the properties of the matrix of relative forest accessibility of the oriented cycle and the properties of the matrix of relative forest accessibility of the oriented path.

The introduction contains the history of the problem and provides an overview of the main ideas and results presented in the article.

The second section gives basic concepts of the graph theory and a "graphical" representation of the matrix of relative forest accessibility of the digraph Γ : $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}))}{f}$, $i, j = 1 \dots n$, where f_{ij} is the number of spanning converging rooted forests of the digraph Γ , in which the vertices i and j belong to the same tree converging to j , and f is the total number spanning converging rooted forests of the digraph Γ .

The third section deals with the construction and research of the matrix of relative forest accessibility of the oriented path $\vec{P}_n$, $n \geq 2$. Examples of constructing the matrix of relative forest accessibility of oriented path for small values of n are considered. Illustrations of the "graphical" procedure of building the matrix $\mathbb{F}$ are given. It is proved that the matrix of relative forest accessibility for the directed path $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, is related to the sequence $1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots$ of powers of 2. In other words, the elements of f_{ij} that form the matrix are elements of the set $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}\}$ filling the columns of the matrix: the first column consists of sequentially decreasing numbers $2^{n-1}, \dots, 2, 1$; the second column, starting at 0, contains in the second place (the intersection with the main diagonal) the number 2^{n-2} , while the following elements are consecutively decreasing numbers $2^{n-3}, \dots, 2, 1$; the third column, containing zeros in two positions above the main diagonal, contains in the third place (the intersection with the main diagonal) the number 2^{n-2} , while the following elements are sequentially decreasing numbers $2^{n-3}, \dots, 2$, etc. The value of f is equal to 2^{n-1} .

In the fourth section, similar considerations for matrix of relative forest accessibility of the oriented cycle $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, are represented.

In the conclusion, the results of the work are summed up.

Keywords: the matrix of relative forest accessibility, oriented path, oriented cycle, graph, digraph, spanning converging forests, Mersenne number.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

B. Mhanna, 2021, "Matrix of relative forest accessibility of the oriented path and the oriented cycle", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 183–201.

Введение

Матрица относительной лесной доступности имеет широкий спектр приложений. Она является мерой близости вершин графов и орграфов.

Матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F} = ((F_{ij}))_{n \times n}$, $i, j = 1 \dots n$, для неориентированного пути P_n , $n \geq 2$, как и для неориентированного цикла C_n , $n \geq 3$, связана с последовательностью $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$ чисел Фибоначчи. (Напомним, что $\Phi_0 = 0$, $\Phi_1 = 1$, в то время как $\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}$ для $n \geq 2$.) [7]

В этой статье мы рассматриваем свойства матрицы относительной лесной доступности ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, и свойства матрицы относительной лесной доступности ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$.

Матрица относительной лесной доступности

Основные понятия теории графов

Вспомним некоторые базовые понятия теории (ориентированных) графов. [1], [8]

Ориентированный граф (орграф) – граф, ребрам которого присвоено направление. Направленные ребра называются *дугами*. Граф, ни одному ребру которого не присвоено направление, называется *неориентированным*. Орграф называется *слабо связным*, если соответствующий неориентированный граф связан.

Орграф называется (реберно) *взвешенным*, если каждой дуге присвоено некоторое числовое значение – *вес*. *Вес взвешенного орграфа* определяется произведением весов его дуг; вес любого орграфа, который не имеет дуг, равен 1. Вес множества орграфов – это сумма весов его членов; в случае, если веса дуг орграфов равны 1, то вес множества орграфов – это количество его членов.

Сходящееся дерево – слабосвязный орграф, в котором одна вершина, называемая *корнем*, имеет нулевое значение для выходящей степени, а оставшиеся вершины имеют для выходящей степени значение 1. *Сходящийся лес* орграфа Γ – остовной подграф орграфа Γ , все компоненты которого являются сходящимися деревьями.

Матрица относительной лесной доступности орграфа

Пусть $\Gamma = (V, E)$ – орграф с множеством вершин $V(\Gamma) = \{1, \dots, n\}$ и множеством дуг $E(\Gamma) \subset \{\langle i, j \rangle | i, j \in V, i \neq j\}$. (В ориентированном случае $\overleftarrow{\langle i, j \rangle} = \langle i, j \rangle$ – дуга из вершины j в вершину i .)

Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}(\Gamma) = \overleftarrow{\mathcal{F}}$ – множество всех остовных сходящихся лесов орграфа Γ . Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{j \leftarrow i}(\Gamma) = \overleftarrow{\mathcal{F}}_{j \leftarrow i}$ – множество всех остовных сходящихся лесов орграфа Γ , в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к вершине j .

Матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F} = ((F_{ij}))_{n \times n}$ орграфа Γ имеет следующее "графовое" представление [6]:

$$\mathbb{F} = ((F_{ij}))_{n \times n} = ((f_{ij}))_{n \times n}(\Gamma)/f(\Gamma), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где $f_{ij}(\Gamma) = f_{ij}$ – количество всех остовных сходящихся лесов Γ , в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к вершине j , а $f(\Gamma) = f$ – количество всех остовных сходящихся лесов в орграфе Γ .

Матрица относительной лесной доступности ориентированного пути

Ориентированный путь на двух вершинах

Рассмотрим ориентированный путь на двух вершинах (рис. 3.1.1), то есть ориентированный граф $\vec{P}_2 = (V, E)$, где $V = \{1, 2\}$, $E = \{\overleftarrow{(1, 2)}\}$ (в ориентированном случае $\overleftarrow{(i, j)} = \langle i, j \rangle$ – дуга из вершины j в вершину i). Для ориентированного пути $\vec{P}_2$ мы получим 2 остовных сходящихся лесов (рис. 3.1.1).

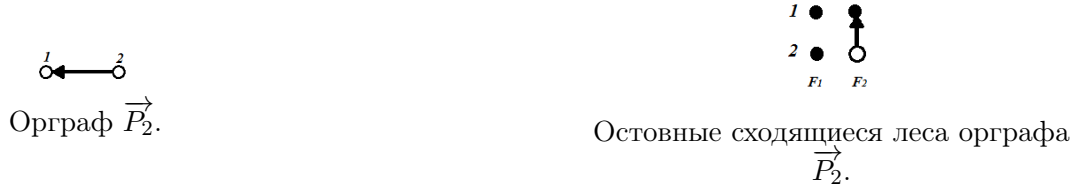


Рис. 3.1.1. Орграф $\vec{P}_2$ и остовные сходящиеся леса орграфа $\vec{P}_2$.

Вспомогая, что $f_{ij}(\vec{P}_2)$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_2$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к вершине j , а $f(\vec{P}_2)$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_2$, получаем: $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 1}(\vec{P}_2) = \{F_1, F_2\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 1}(\vec{P}_2) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 2}(\vec{P}_2) = \{F_2\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 2}(\vec{P}_2) = \{F_1\}$.

Непосредственный подсчет показывает, что $f_{11}(\vec{P}_2) = 2$, $f_{12}(\vec{P}_2) = 0$, $f_{21}(\vec{P}_2) = 1$, $f_{22}(\vec{P}_2) = 2$, $f(\vec{P}_2) = 2$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}(\vec{P}_2)))_{2 \times 2}}{f(\vec{P}_2)}$, получим $\mathbb{F} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ориентированный путь на трех вершинах

Рассмотрим ориентированный путь на трех вершинах (рис. 3.2.1), то есть орграф $\vec{P}_3 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{\overleftarrow{(1, 2)}, \overleftarrow{(2, 3)}\}$.



Рис. 3.2.1. Орграф $\vec{P}_3$ и остовные сходящиеся леса орграфа $\vec{P}_3$.

Для ориентированного пути $\vec{P}_3$ мы получим 4 остовных сходящихся лесов (рис. 3.2.1). Вспомогая, что $f_{ij}(\vec{P}_3)$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_3$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к вершине j , а $f(\vec{P}_3)$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_3$, получаем: $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 1}(\vec{P}_3) = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 1}(\vec{P}_3) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 1}(\vec{P}_3) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 2}(\vec{P}_3) = \{F_2, F_4\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 2}(\vec{P}_3) = \{F_1, F_3\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 2}(\vec{P}_3) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 3}(\vec{P}_3) = \{F_4\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 3}(\vec{P}_3) = \{F_3\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 3}(\vec{P}_3) = \{F_1, F_2\}$.

Непосредственный подсчет показывает, что $f_{11}(\vec{P}_3) = 4$, $f_{12}(\vec{P}_3) = 0$, $f_{13}(\vec{P}_3) = 0$, $f_{21}(\vec{P}_3) = 2$, $f_{22}(\vec{P}_3) = 2$, $f_{23}(\vec{P}_3) = 0$, $f_{31}(\vec{P}_3) = 1$, $f_{32}(\vec{P}_3) = 1$, $f_{33}(\vec{P}_3) = 2$, $f(\vec{P}_3) = 4$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}(\vec{P}_3)))_{3 \times 3}}{f(\vec{P}_3)}$, получим $\mathbb{F} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ориентированный путь на четырех вершинах

Рассмотрим ориентированный путь на четырех вершинах (рис. 3.3.1), то есть оргграф $\vec{P}_4 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\overleftarrow{(1, 2)}, \overleftarrow{(2, 3)}, \overleftarrow{(3, 4)}\}$.

Для ориентированного пути $\vec{P}_4$ мы получим 8 остовных сходящихся лесов (рис. 3.3.1).



Остовные сходящиеся леса оргграфа $\vec{P}_4$.

Рис. 3.3.1. Оргграф $\vec{P}_4$ и остовные сходящиеся леса оргграфа $\vec{P}_4$.

Вспоминая, что $f_{ij}(\vec{P}_4)$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_4$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , а $f(\vec{P}_4)$ – количество всех остовных сходящихся лесов пути $\vec{P}_4$, получаем: $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 1}(\vec{P}_4) = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 1}(\vec{P}_4) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 1}(\vec{P}_4) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4 \leftarrow 1}(\vec{P}_4) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 2}(\vec{P}_4) = \{F_2, F_5, F_6, F_8\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 2}(\vec{P}_4) = \{F_1, F_3, F_4, F_7\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 2}(\vec{P}_4) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{4 \leftarrow 2}(\vec{P}_4) = \emptyset$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 3}(\vec{P}_4) = \{F_5, F_8\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 3}(\vec{P}_4) = \{F_3, F_7\}$, $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 3}(\vec{P}_4) = \{F_1, F_2, F_4, F_6\}$.

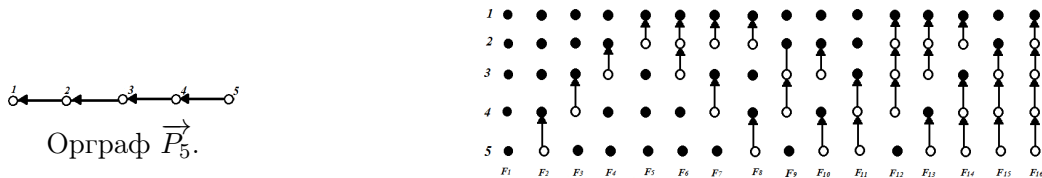
Непосредственный подсчет показывает, что $f_{11}(\vec{P}_4) = 8$, $f_{12}(\vec{P}_4) = 0$, $f_{13}(\vec{P}_4) = 0$, $f_{14}(\vec{P}_4) = 0$, $f_{21}(\vec{P}_4) = 4$, $f_{22}(\vec{P}_4) = 4$, $f_{23}(\vec{P}_4) = 0$, $f_{24}(\vec{P}_4) = 0$, $f_{31}(\vec{P}_4) = 2$, $f_{32}(\vec{P}_4) = 2$, $f_{33}(\vec{P}_4) = 4$, $f_{34}(\vec{P}_4) = 0$, $f_{41}(\vec{P}_4) = 1$, $f_{42}(\vec{P}_4) = 1$, $f_{43}(\vec{P}_4) = 2$, $f_{44}(\vec{P}_4) = 4$, $f = 8$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}(\vec{P}_4)))_{4 \times 4}}{f(\vec{P}_4)}$, получим $\mathbb{F} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Ориентированный путь на пяти вершинах

Рассмотрим ориентированный путь на пяти вершинах (рис. 3.4.1), то есть оргграф $\vec{P}_5 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\overleftarrow{(1, 2)}, \overleftarrow{(2, 3)}, \overleftarrow{(3, 4)}, \overleftarrow{(4, 5)}\}$.

Для ориентированного пути $\vec{P}_5$ мы получим 16 остовных сходящихся лесов (рис. 3.4.1).



Остовные сходящиеся леса оргграфа $\vec{P}_5$.

Рис. 3.4.1. Оргграф $\vec{P}_5$ и остовные сходящиеся леса оргграфа $\vec{P}_5$.

Вспоминая, что $f_{ij}(\vec{P}_5)$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_5$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , а $f(\vec{P}_5)$ – количество всех остовных сходящихся лесов пути $\vec{P}_5$, получаем: $f_{11}(\vec{P}_5) = 16$, $f_{12}(\vec{P}_5) = 0$, $f_{13}(\vec{P}_5) = 0$, $f_{14}(\vec{P}_5) = 0$, $f_{15}(\vec{P}_5) = 0$, $f_{21}(\vec{P}_5) = 8$, $f_{22}(\vec{P}_5) = 8$, $f_{23}(\vec{P}_5) = 0$, $f_{24}(\vec{P}_5) = 0$, $f_{25}(\vec{P}_5) = 0$, $f_{31}(\vec{P}_5) = 4$, $f_{32}(\vec{P}_5) = 4$, $f_{33}(\vec{P}_5) = 4$, $f_{34}(\vec{P}_5) = 0$, $f_{35}(\vec{P}_5) = 0$, $f_{41}(\vec{P}_5) = 2$, $f_{42}(\vec{P}_5) = 2$, $f_{43}(\vec{P}_5) = 4$, $f_{44}(\vec{P}_5) = 8$, $f_{45}(\vec{P}_5) = 0$, $f_{51}(\vec{P}_5) = 1$, $f_{52}(\vec{P}_5) = 1$, $f_{53}(\vec{P}_5) = 2$, $f_{54}(\vec{P}_5) = 4$, $f_{55}(\vec{P}_5) = 8$, $f = 16$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}(\vec{P}_5)))_{5 \times 5}}{f(\vec{P}_5)}$, получим $\mathbb{F} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Мы обсудим в следующем пункте обобщенный закон для построения матрицы относительной лесной доступности ориентированного пути $\vec{P}_n, n \geq 2$.

Ориентированный путь на n вершинах, $n \geq 2$

Анализируя результаты, полученные выше для ориентированных путей $\vec{P}_n, n = 2, 3, 4, 5$, мы можем утверждать, что для указанных n матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F}$ имеет вид

$$\mathbb{F} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2^{n-3} & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 0 & \dots & 0 \\ 2^{n-4} & 2^{n-4} & 2^{n-3} & 2^{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2^1 & 2^2 & \dots & 2^{n-2} \end{bmatrix}.$$

Можно доказать, что аналогичные результаты могут быть получены для любого ориентированного пути $\vec{P}_n, n \geq 2$ (рис. 3.5.1). Именно, имеет место следующая теорема.

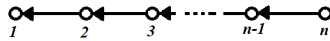


Рис. 3.5.1. Ориентированный путь $\vec{P}_n, n \geq 2$.

Теорема 1. Пусть $\vec{P}_n, n \geq 2$ – ориентированный путь на n вершинах: $\vec{P}_n = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \dots, \langle n-1, n \rangle\}$. Пусть $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}))_{n \times n}}{f}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ – матрица относительной лесной доступности ориентированного пути $\vec{P}_n$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$f = 2^{n-1}, \quad f_{ii} = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если } i = 1, \\ 2^{n-2}, & \text{если } 2 \leq i \leq n, \end{cases} \quad f_{ij} = \begin{cases} 2^{n-i}, & \text{если } j = 1, \\ 2^{n-i+j-2}, & \text{если } 2 \leq j < i \leq n, \\ 0, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $\vec{\mathcal{F}}(\vec{P}_n) = \vec{\mathcal{F}}^n$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$. Пусть $f(\vec{P}_n) = f^n$ – количество $|\vec{\mathcal{F}}(\vec{P}_n)|$ всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$.

Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{j \leftarrow i}(\overrightarrow{P}_n) = \overleftarrow{\mathcal{F}}_{j \leftarrow i}^n$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_n$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j . Пусть $f_{ij}(\overrightarrow{P}_n) = f_{ij}^n$ – количество $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{j \leftarrow i}(\overrightarrow{P}_n)|$ всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_n$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j .

Пусть $\overleftarrow{(i, j)} = \langle i, j \rangle$ – дуга из вершины j в вершину i . Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(i, j)}}^n$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_n, n \geq 2$, содержащих дугу $\overleftarrow{(i, j)}$. Пусть $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(i, j)}}^n|$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_n, n \geq 2$, содержащих дугу $\overleftarrow{(i, j)}$. Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(i, j)}}^n$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_n, n \geq 2$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(i, j)}$. Пусть $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(i, j)}}^n|$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_n, n \geq 2$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(i, j)}$.

А. Докажем, что $f^n = 2^{n-1}$.

І. Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_{k+1}, k \geq 1$, может быть получено как сумма всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_{k+1}, k \geq 1$, содержащих дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$ и всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_{k+1}, k \geq 1$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_{k+1}, k \geq 1$, содержащих дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$, равно $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(1, 2)}}^{k+1}|$, и число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_{k+1}, k \geq 1$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$, равно $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(1, 2)}}^{k+1}|$, то для любого $k \geq 1$,

$$f^{k+1} = |\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(1, 2)}}^{k+1}| + |\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(1, 2)}}^{k+1}|. \quad (1)$$

ІІ. Покажем, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_{k+1}, k \geq 1$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_k, k \geq 1$.

Действительно, биекция между множествами всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_{k+1}$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$ и всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_k$, устанавливается путем склеивания корня **2** с корнем **1**. Следовательно, количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_{k+1}$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_k$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_{k+1}$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$, равно $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(1, 2)}}^{k+1}|$, и число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_k$, равно f^k , то для любого $k \geq 1$,

$$|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(1, 2)}}^{k+1}| = f^k. \quad (2)$$

ІІІ. Покажем, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_{k+1}, k \geq 1$, содержащих дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_k, k \geq 1$.

Действительно, биекция между множествами всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_{k+1}$, содержащих дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$ и всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P}_k$, устанавливается путем удаления дуги $\overleftarrow{(1, 2)}$ и склеивания корня **k + 1** с вершиной

k , в случае, если не существует дуга $\overleftarrow{(k, k+1)}$. А в случае если существует дуга $\overleftarrow{(k, k+1)}$ - сохраним дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$, удалим дугу $\overleftarrow{(k, k+1)}$ и склеим вершины $k+1$ и k .

Следовательно, количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}$, содержащих дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_k}$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{k+1}}$, содержащих дугу $\overleftarrow{(1, 2)}$, равно $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{(1,2)}^{k+1}|$, и число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_k}$, равно f^k , то для любого $k \geq 1$,

$$|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{(1,2)}^{k+1}| = f^k. \quad (3)$$

IV. Докажем, что $f^n = 2^{n-1}$.

Из отношений (1), (2) и (3), получим что $f^{k+1} = f^k + f^k = 2f^k, k = 1, 2, \dots$.

Замечая, что $f^1 = 1$, получим что $f^2 = 2f^1 = 2^{2-1}, f^3 = 2f^2 = 2^{3-1}, f^4 = 2f^3 = 2^{4-1}, \dots, f^n = 2f^{n-1} = 2^{n-1}$.

Таким образом, мы доказали что $f^n = 2^{n-1}$.

B. Докажем, что $f_{ii}^n = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если } i = 1; \\ 2^{n-2}, & \text{если } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$

I. Докажем, что $f_{11}^n = 2^{n-1}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина 1 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 1, может быть получено как сумма всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина 1 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 1, равно f_{11}^n , и число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, равно f^n , то $f_{11}^n = f^n = 2^{n-1}$.

II. Докажем, что $f_{ii}^n = 2^{n-2}, i = 2, 3, \dots, n$.

Действительно, биекция между множествами всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина i принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же i и всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{n-1}}$ устанавливается путем склеивания корня i с вершиной $i-1$.

Следовательно, количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина i принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же i , может быть получено как сумма всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_{n-1}}$.

Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершина i принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же i , равно f_{ii}^n , и число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, равно f^{n-1} , то $f_{ii}^n = f^{n-1} = 2^{(n-1)-1} = 2^{n-2}$.

C. Докажем, что $f_{ij}^n = \begin{cases} 2^{n-i}, & \text{если } j = 1; \\ 2^{n-i+j-2}, & \text{если } 2 \leq j < i \leq n; \\ 0, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n. \end{cases}$

I. Докажем, что $f_{ij}^n = 0, 1 \leq i < j \leq n$.

Для ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}, n \geq 2$, остовные сходящиеся леса, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к $j, 1 \leq i < j \leq n$, не существуют. Следовательно, $f_{ij}^n = 0, 1 \leq i < j \leq n$.

II. Докажем, что $f_{ii}^n = 2^{n-i}, i = 2, 3, \dots, n$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\overrightarrow{P_n}$, в которых вершины 1 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина

количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, равно f^n , то $f_{21}^n = \frac{f^n}{2} = \frac{2^{n-1}}{2} = 2^{n-2}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 1 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 1 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 1 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, равно f_{21}^n , то $f_{31}^n = \frac{f_{21}^n}{2} = 2^{n-3}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 1 и 4 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 1 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 1 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, равно f_{31}^n , то $f_{41}^n = \frac{f_{31}^n}{2} = 2^{n-4}$.

Завершая рассуждения, заметим, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 1 и n принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 1 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 1 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, равно $f_{n-1,1}^n$, то $f_{n1}^n = \frac{f_{n-1,1}^n}{2} = \frac{2^{n-(n-1)}}{2} = 1 = 2^{n-n}$.

Таким образом, мы доказали что $f_{i1}^n = 2^{n-i}$, $i = 2, 3, \dots, n$.

III. Докажем, что $f_{ij}^n = 2^{n-i+j-2}$, $2 \leq j < i \leq n$.

а. Докажем, что $f_{i2}^n = \frac{f_{22}^n}{2^{i-2}}$, $i = 3, 4, \dots, n$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 3 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершина 2 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 2. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершина 2 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 2, равно f_{22}^n , то $f_{32}^n = \frac{f_{22}^n}{2} = \frac{f_{22}^n}{2^{3-2}}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 4 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 3 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 3 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2, равно f_{32}^n , то $f_{42}^n = \frac{f_{32}^n}{2} = \frac{f_{22}^n}{4} = \frac{f_{22}^n}{2^{4-2}}$.

Завершая рассуждения, заметим, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 2 и n принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 2 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 2 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 2, равно $f_{n-1,2}^n$,

$$\text{то } f_{n2}^n = \frac{f_{n-1,2}^n}{2} = \frac{f_{22}^n}{2^{n-2}}.$$

б. Докажем, что $f_{i3}^n = \frac{f_{33}^n}{2^{i-3}}, i = 4, 5, \dots, n$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 4 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершина 3 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 3. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершина 3 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 3, равно f_{33}^n , то $f_{43}^n = \frac{f_{33}^n}{2} = \frac{f_{33}^n}{2^{4-3}}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 5 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 4 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 4 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3, равно f_{43}^n , то $f_{53}^n = \frac{f_{43}^n}{2} = \frac{f_{33}^n}{4} = \frac{f_{33}^n}{2^{5-3}}$.

Завершая рассуждения, заметим, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 3 и n принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 3 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины 3 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 3, равно $f_{n-1,3}^n$, то $f_{n3}^n = \frac{f_{n-1,3}^n}{2} = \frac{f_{33}^n}{2^{n-3}}$.

с. Докажем, что $f_{i,n-1}^n = \frac{f_{n-1,n-1}^n}{2^{i-(n-1)}}, i = n$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершины n и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к $n-1$, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершина $n-1$ принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же $n-1$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, в которых вершина $n-1$ принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же $n-1$, равно $f_{n-1,n-1}^n$, то $f_{n,n-1}^n = \frac{f_{n-1,n-1}^n}{2} = \frac{f_{n-1,n-1}^n}{2^{n-(n-1)}}$.

д. Докажем, что $f_{ij}^n = 2^{n-i+j-2}, 2 \leq j < i \leq n$.

Для любых $2 \leq j < i \leq n$, $f_{ij}^n = \frac{f_{jj}^n}{2^{i-j}} = \frac{2^{n-2}}{2^{i-j}} = 2^{n-i+j-2}$. $\square$

Очевидно, что матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F}$ ориентированного пути $\vec{P}_n$, $n \geq 2$, не симметрична и является стохастической по строкам, т.е. $\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$, для любого $i = 1, \dots, n$.

Напомним, что матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F}$ графа G на n вершинах определяется по закону $\frac{((f_{ij}))_{n \times n}}{f}$, где f_{ij} - количество остовных (неориентированных) корневых лесов графа G , в которых вершины i и j принадлежат одному дереву с корнем i , а f - общее количество остовных корневых лесов графа G . [2], [10]

П.Ю. Чеботарев доказал ([7]), что матрица относительной лесной доступности для неориентированного пути $P_n, n \geq 2$, связана с последовательностью $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$ чисел Фибоначчи.

Именно, в [7] было доказано, что для матрицы относительной лесной доступности

$\frac{((f_{ij}))_{n \times n}}{f}$ неориентированного пути $P_n, n \geq 2$, имеют место следующие соотношения: $f = \Phi_{2n}$, в то время как $f_{ij} = \Phi_{2\min(i,j)-1} \cdot \Phi_{2(n+1-\max(i,j))-1}, i, j = 1, \dots, n$.

Матрица относительной лесной доступности ориентированного цикла

Ориентированный цикл на трех вершинах

Рассмотрим ориентированный цикл на трех вершинах (рис. 4.1.1), то есть орграф $\vec{C}_3 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{\overrightarrow{(1, 2)}, \overrightarrow{(3, 1)}, \overrightarrow{(2, 3)}\}$.

Для ориентированного цикла $\vec{C}_3$ мы получим 7 остовных сходящихся лесов (рис. 4.1.2).

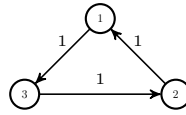


Рис. 4.1.1. Орграф $\vec{C}_3$.

Вспомогая, что $f_{ij}(\vec{C}_3)$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_3$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к вершине j , а $f(\vec{C}_3)$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_3$, получаем:

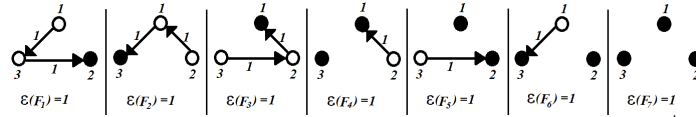


Рис. 4.1.2. Остовные сходящиеся леса орграфа $\vec{C}_3$.

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 1}(\vec{C}_3) &= \{F_3, F_7, F_4, F_5\}, \quad \overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 1}(\vec{C}_3) = \{F_1\}, \quad \overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 1}(\vec{C}_3) = \{F_2, F_6\}, \quad \overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 2}(\vec{C}_3) = \{F_3, F_4\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 2}(\vec{C}_3) &= \{F_1, F_7, F_5, F_6\}, \quad \overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 2}(\vec{C}_3) = \{F_2\}, \quad \overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 3}(\vec{C}_3) = \{F_3\}, \quad \overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 3}(\vec{C}_3) = \{F_1, F_5\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 3}(\vec{C}_3) &= \{F_2, F_7, F_4, F_6\}. \end{aligned}$$

Непосредственный подсчет показывает, что $f_{11}(\vec{C}_3) = 4$, $f_{12}(\vec{C}_3) = 1$, $f_{13}(\vec{C}_3) = 2$, $f_{21}(\vec{C}_3) = 2$, $f_{22}(\vec{C}_3) = 4$, $f_{23}(\vec{C}_3) = 1$, $f_{31}(\vec{C}_3) = 1$, $f_{32}(\vec{C}_3) = 2$, $f_{33}(\vec{C}_3) = 4$, $f(\vec{C}_3) = 7$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}(\vec{C}_3)))_{3 \times 3}}{f(\vec{C}_3)}$, получим $\mathbb{F} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Ориентированный цикл на четырех вершинах

Рассмотрим ориентированный цикл на четырех вершинах (рис. 4.2.1), то есть орграф $\vec{C}_4 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\overrightarrow{(1, 2)}, \overrightarrow{(4, 1)}, \overrightarrow{(3, 4)}, \overrightarrow{(2, 3)}\}$. Для этого цикла получим 15 остовных сходящихся лесов (рис. 4.2.2).

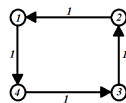


Рис. 4.2.1. Орграф $\vec{C}_4$.

Вспомогая, что $f_{ij}(\vec{C}_4)$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_4$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , а $f(\vec{C}_4)$ - количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_4$, получаем:

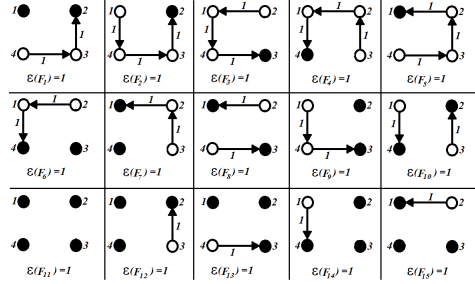


Рис. 4.2.2. Остовные сходящиеся леса орграфа $\vec{C}_4$.

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 1}(\vec{C}_4) &= \{F_1, F_2, F_7, F_8, F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{15}\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 1}(\vec{C}_4) = \{F_2\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 1}(\vec{C}_4) = \{F_3, F_9\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{4 \leftarrow 1}(\vec{C}_4) &= \{F_4, F_6, F_{10}, F_{14}\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 2}(\vec{C}_4) = \{F_2, F_7, F_8, F_{15}\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 2}(\vec{C}_4) = \{F_3\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 2}(\vec{C}_4) &= \{F_1, F_2, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14}\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{4 \leftarrow 2}(\vec{C}_4) = \{F_4, F_6\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 3}(\vec{C}_4) &= \{F_2, F_7\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 3}(\vec{C}_4) = \{F_1, F_2, F_{10}, F_{12}\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 4}(\vec{C}_4) = \{F_2\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 3}(\vec{C}_4) &= \{F_3, F_6, F_8, F_9, F_{11}, F_{13}, F_{14}, F_{15}\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{4 \leftarrow 3}(\vec{C}_4) = \{F_4\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 4}(\vec{C}_4) &= \{F_1, F_2\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 4}(\vec{C}_4) = \{F_3, F_8, F_9, F_{13}\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{4 \leftarrow 4}(\vec{C}_4) &= \{F_4, F_6, F_7, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{14}, F_{15}\}. \end{aligned}$$

Непосредственный подсчет показывает, что $f_{11}(\vec{C}_4) = 8$, $f_{12}(\vec{C}_4) = 1$, $f_{13}(\vec{C}_4) = 2$, $f_{14}(\vec{C}_4) = 4$, $f_{21}(\vec{C}_4) = 4$, $f_{22}(\vec{C}_4) = 8$, $f_{23}(\vec{C}_4) = 1$, $f_{24}(\vec{C}_4) = 2$, $f_{31}(\vec{C}_4) = 2$, $f_{32}(\vec{C}_4) = 4$, $f_{33}(\vec{C}_4) = 8$, $f_{34}(\vec{C}_4) = 1$, $f_{41}(\vec{C}_4) = 1$, $f_{42}(\vec{C}_4) = 2$, $f_{43}(\vec{C}_4) = 4$, $f_{44}(\vec{C}_4) = 8$, $f(\vec{C}_4) = 15$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}(\vec{C}_4)))_{4 \times 4}}{f(\vec{C}_4)}$, получим $\mathbb{F} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Ориентированный цикл на пяти вершинах

Рассмотрим ориентированный цикл на пяти вершинах (рис. 4.3.1), то есть орграф $\vec{C}_5 = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\overrightarrow{(5, 1)}, \overrightarrow{(4, 5)}, \overrightarrow{(3, 4)}, \overrightarrow{(2, 3)}, \overrightarrow{(1, 2)}\}$. Для этого цикла получим 31 остовный сходящийся лес (рис. 4.3.2).

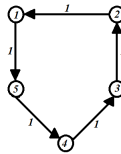
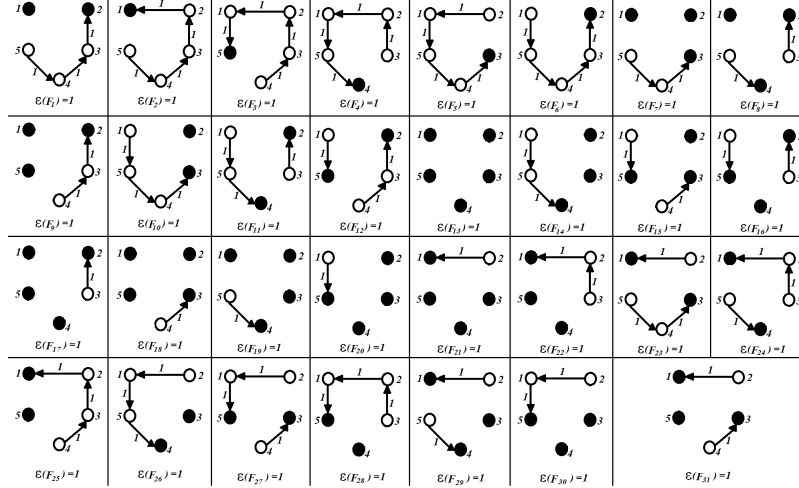


Рис. 4.3.1. Орграф $\vec{C}_5$.

Вспомогая, что $f_{ij}(\vec{C}_5)$ определяется как количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_5$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j , а $f(\vec{C}_5)$ - количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_5$, получаем:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 1}(\vec{C}_5) &= \{F_1, F_2, F_7, F_8, F_9, F_{13}, F_{17}, F_{18}, F_{19}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{24}, F_{25}, F_{29}, F_{31}\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 1}(\vec{C}_5) &= \{F_6\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 1}(\vec{C}_5) = \{F_5, F_{10}\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{4 \leftarrow 1}(\vec{C}_5) = \{F_4, F_{11}, F_{14}, F_{26}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overleftarrow{\mathcal{F}}_{5 \leftarrow 1}(\overrightarrow{C_5}) &= \{F_3, F_{12}, F_{15}, F_{16}, F_{20}, F_{27}, F_{28}, F_{30}\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{5 \leftarrow 2}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_{23}, F_{27}, F_{28}, F_{30}\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 2}(\overrightarrow{C_5}) &= \{F_2, F_4, F_{22}, F_{23}, F_{24}, F_{25}, F_{29}, F_{31}\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 2}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_5\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{4 \leftarrow 2}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_4, F_{26}\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 2}(\overrightarrow{C_5}) &= \{F_1, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{17}, F_{18}, F_{19}, F_{20}\},\end{aligned}$$

Рис. 4.3.2. Основные сходящиеся леса орграфа $\overrightarrow{C_5}$.

$$\begin{aligned}\overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 3}(\overrightarrow{C_5}) &= \{F_2, F_{22}, F_{24}, F_{25}\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 3}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_1, F_6, F_8, F_9, F_{11}, F_{12}, F_{16}, F_{17}\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 3}(\overrightarrow{C_5}) &= \{F_5, F_7, F_{10}, F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{18}, F_{19}, F_{20}, F_{21}, F_{23}, F_{26}, F_{27}, F_{29}, F_{30}, F_{31}\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{4 \leftarrow 3}(\overrightarrow{C_5}) &= \{F_4\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{5 \leftarrow 3}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_3, F_{28}\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 4}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_2, F_{25}\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{5 \leftarrow 4}(\overrightarrow{C_5}) &= \{F_3\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{4 \leftarrow 5}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_4, F_8, F_{11}, F_{14}, F_{19}, F_{24}, F_{26}, F_{29}\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 4}(\overrightarrow{C_5}) &= \{F_1, F_6, F_9, F_{12}\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 4}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_5, F_7, F_{10}, F_{15}, F_{18}, F_{23}, F_{27}, F_{31}\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{4 \leftarrow 4}(\overrightarrow{C_5}) &= \{F_4, F_8, F_{11}, F_{13}, F_{14}, F_{16}, F_{17}, F_{19}, F_{20}, F_{21}, F_{24}, F_{26}, F_{28}, F_{29}, F_{30}, F_{22}\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{1 \leftarrow 5}(\overrightarrow{C_5}) &= \{F_2\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{2 \leftarrow 5}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_1, F_6\}, \overleftarrow{\mathcal{F}}_{3 \leftarrow 5}(\overrightarrow{C_5}) = \{F_5, F_7, F_{10}, F_{23}\}, \\ \overleftarrow{\mathcal{F}}_{5 \leftarrow 5}(\overrightarrow{C_5}) &= \{F_3, F_9, F_{12}, F_{13}, F_{15}, F_{16}, F_{17}, F_{18}, F_{20}, F_{21}, F_{22}, F_{25}, F_{27}, F_{28}, F_{30}, F_{31}\}.\end{aligned}$$

Непосредственный подсчет показывает, что $f_{11} = 16$, $f_{12} = 1$, $f_{13} = 2$, $f_{14} = 4$, $f_{15} = 8$, $f_{21} = 8$, $f_{22} = 16$, $f_{23} = 1$, $f_{24} = 2$, $f_{25} = 4$, $f_{31} = 4$, $f_{32} = 8$, $f_{33} = 16$, $f_{34} = 1$, $f_{35} = 2$, $f_{41} = 2$, $f_{42} = 4$, $f_{43} = 8$, $f_{44} = 16$, $f_{45} = 1$, $f_{51} = 1$, $f_{52} = 2$, $f_{53} = 4$, $f_{54} = 8$, $f_{55} = 16$, $f = 31$.

Пользуясь тем, что $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}(\overrightarrow{C_5})))_{5 \times 5}}{f(\overrightarrow{C_5})}$, получим $\mathbb{F} = \frac{1}{31} \begin{bmatrix} 16 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 16 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 16 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$.

Мы обсудим в следующем пункте обобщенный закон для построения матрицы относительной лесной доступности ориентированного цикла $\overrightarrow{C_n}$, $n \geq 3$.

Ориентированный цикл на n вершинах, $n \geq 3$

Анализируя результаты, полученные выше для ориентированных циклов $\overrightarrow{C_n}$, $n = 3, 4, 5$, мы можем утверждать, что для указанных n матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F}$ имеет вид

$$\mathbb{F} = \frac{1}{2^n - 1} \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 2^{n-1} & 1 & 2 & \dots & 2^{n-3} \\ 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1} & 1 & \dots & 2^{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Можно доказать, что аналогичные результаты могут быть получены для любого ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$ (рис. 4.4.1). Именно, имеет место следующая теорема.

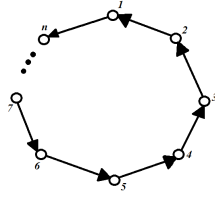


Рис. 4.4.1. Ориентированный цикл $\vec{C}_n$, $n \geq 3$.

Теорема 2. Пусть $\vec{C}_n$, $n \geq 3$ – ориентированный цикл на n вершинах: $\vec{C}_n = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\overleftarrow{(1, 2)}, \overleftarrow{(2, 3)}, \dots, \overleftarrow{(n, 1)}\}$. Пусть $\mathbb{F} = \frac{((f_{ij}))_{n \times n}}{f}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ – матрица относительной лесной доступности ориентированного цикла $\vec{C}_n$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$f = 2^n - 1, \quad f_{ii} = 2^{n-1}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad f_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i-1}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n, \\ 2^{n+i-j}, & \text{если } 1 \leq j < i \leq n. \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}(\vec{C}_n) = \overleftarrow{\mathcal{F}}^n$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$. Пусть $f(\vec{C}_n) = f^n$ – количество $|\overleftarrow{\mathcal{F}}(\vec{C}_n)|$ всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$.

Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{j \leftarrow i}(\vec{C}_n) = \overleftarrow{\mathcal{F}}_{j \leftarrow i}^n$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j . Пусть $f_{ij}(\vec{C}_n) = f_{ij}^n$ – количество $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{j \leftarrow i}(\vec{C}_n)|$ всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершины i и j принадлежат одному дереву, сходящемуся к j .

Пусть $\overleftarrow{(i, j)} = \langle i, j \rangle$ – дуга из вершины j в вершину i . Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(i, j)}}^n$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, содержащих дугу $\overleftarrow{(i, j)}$. Пусть $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(i, j)}}^n|$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, содержащих дугу $\overleftarrow{(i, j)}$. Пусть $\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(i, j)}}^n$ – множество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(i, j)}$. Пусть $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(i, j)}}^n|$ – количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(i, j)}$.

А. Докажем, что $f^n = 2^n - 1$.

І. Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 3$, может быть получено как сумма всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, содержащих дугу $\overleftarrow{(n, 1)}$ и всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(n, 1)}$. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, содержащих дугу $\overleftarrow{(n, 1)}$, равно $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(n, 1)}}^n|$, и число всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(n, 1)}$, равно $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(n, 1)}}^n|$, то для любого $n \geq 3$,

$$f^n = |\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(n, 1)}}^n| + |\overleftarrow{\mathcal{F}}_{\overleftarrow{(n, 1)}}^n|. \quad (4)$$

II. Покажем, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(n, 1)}$, равно 2^{n-1} .

Действительно, каждый остовной сходящийся лес ориентированного цикла $\vec{C}_n$, который не содержит дугу $\overleftarrow{(n, 1)}$, является остовным сходящимся лесом ориентированного пути $\vec{P}_n$. Следовательно, количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, не содержащих дугу $\overleftarrow{(n, 1)}$, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, т.е. $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{(n,1)}^n| = f(\vec{P}_n)$.

Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, равно 2^{n-1} , из теоремы 1, то $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{(n,1)}^n| = f(\vec{P}_n) = 2^{n-1}$.

Таким образом,

$$|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{(n,1)}^n| = 2^{n-1}. \quad (5)$$

III. Покажем, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, содержащих дугу $\overleftarrow{(n, 1)}$, равно $2^{n-1} - 1$.

Действительно, для любого леса F из множества всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, содержащих дугу $\overleftarrow{(n, 1)}$, удаление дуги $\overleftarrow{(n, 1)}$ и обозначение вершины 1 в качестве корня дает остовной сходящийся лес ориентированного пути $\vec{P}_n$.

Так могут быть получены все остовные сходящиеся леса ориентированного пути $\vec{P}_n$, кроме всего ориентированного пути $\vec{P}_n$ с корнем 1.

Таким образом, количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, содержащих дугу $\overleftarrow{(n, 1)}$, равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n - 1$.

Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$, равно 2^{n-1} , из теоремы 1, то $|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{(n,1)}^n| = f(\vec{P}_n) - 1 = 2^{n-1} - 1$.

Таким образом,

$$|\overleftarrow{\mathcal{F}}_{(n,1)}^n| = 2^{n-1} - 1. \quad (6)$$

III. Докажем, что $f^n = 2^n - 1$.

Из соотношений (4), (5) и (6), получим что, $f^n = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$.

B. Докажем, что $f_{ii}^n = 2^{n-1}$, $1 \leq i \leq n$.

Действительно, биекция между множествами всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершина i принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же i и всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$ устанавливается путем удаления дуги $\overleftarrow{(n, 1)}$, склеивания корня $\mathbf{i}$ с вершиной $i - 1$ при удалении дуги, направленной от i к $i - 1$, в случае, если существует дуга от вершины 1 к вершине n . В случае, если не существует дуга от вершины 1 к вершине n в остовном сходящемся лесу, в котором вершина i принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же i , то это лес рассматривается как остовной сходящийся лес ориентированного пути $\vec{P}_n$.

Таким образом, могут быть получены все остовные сходящиеся леса ориентированного пути $\vec{P}_n$.

Следовательно, количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершина i принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же i , равно количеству всех остовных сходящихся лесов ориентированного пути $\vec{P}_n$.

Таким образом, $f_{ii}^n = f(\vec{P}_n) = 2^{n-1}$.

C. Докажем, что $f_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i-1}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n, \\ 2^{n+i-j}, & \text{если } 1 \leq j < i \leq n. \end{cases}$

I. Докажем, что $f_{i1}^n = 2^{n-i}, i = 2, 3, \dots, n$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершины 1 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершина 1 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 1. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершина 1 принадлежит одному дереву, сходящемуся к тому же 1, равно f_{11}^n , то $f_{21}^n = \frac{f_{11}^n}{2} = \frac{2^{n-1}}{2} = 2^{n-2}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершины 1 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершины 1 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершины 1 и 2 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, равно f_{21}^n , то $f_{31}^n = \frac{f_{21}^n}{2} = \frac{2^{n-2}}{2} = 2^{n-3}$.

Количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершины 1 и 4 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершины 1 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершины 1 и 3 принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, равно f_{31}^n , то $f_{41}^n = \frac{f_{31}^n}{2} = \frac{2^{n-3}}{2} = 2^{n-4}$.

Завершая рассуждения, заметим, что количество всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершины 1 и n принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, может быть получено как половина количества всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершины 1 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1. Поскольку число всех остовных сходящихся лесов ориентированного цикла $\vec{C}_n$, в которых вершины 1 и $n-1$ принадлежат одному дереву, сходящемуся к 1, равно $f_{n-1,1}^n$, то $f_{n1}^n = \frac{f_{n-1,1}^n}{2} = 2^{n-(n-1)} = 1 = 2^{n-n}$.

II. Докажем, что $f_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i-1}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq n, \\ 2^{n+i-j}, & \text{если } 1 \leq j < i \leq n. \end{cases}$

Данный результат следует из I с учетом изоморфности орграфа $\vec{C}_n$ и орграфа, полученного из $\vec{C}_n$ циклическим сдвигом всех вершин на единицу влево(вправо). Указанная изоморфность обеспечивает равенство $f_{ij} = f_{i+1,j+1}$; где нумерация индексов осуществляется по модулю n . Поскольку, по I, $f_{21} = 2^{n-2}$, то $f_{32} = f_{43} = \dots = f_{n,n-1} = f_{1,n} = 2^{n-2}$; поскольку $f_{31} = 2^{n-3}$, то $f_{42} = f_{53} = \dots = f_{n,n-2} = f_{1,n-1} = f_{2,n} = 2^{n-3}$; ... ; поскольку $f_{n1} = 1$, то $f_{12} = f_{23} = \dots = f_{n-1,n} = 1$. $\square$

Очевидно, что матрица относительной лесной доступности $\mathbb{F}$ ориентированного цикла $\vec{C}_n$, $n \geq 2$, не симметрична и является дважды стохастической, т.е. $\sum_{i=1}^n F_{ij} = 1$, для любого $j = 1, \dots, n$ и $\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$, для любого $i = 1, \dots, n$.

Напомним, что П.Ю. Чеботарев доказал ([7]), что матрица относительной лесной доступности для неориентированного цикла $C_n, n \geq 3$, связана с последовательностью $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$ чисел Фибоначчи.

Именно, в [7] было доказано, что для матрицы относительной лесной доступности $\frac{((f_{ij}))_{n \times n}}{f}$ неориентированного цикла $C_n, n \geq 3$, имеют место следующие соотношения: $f = \Phi_{2n-1} + \Phi_{2(n+1)-1} - 2$, в то время как $f_{ij} = \Phi_{2(|j-i|)} + \Phi_{2(n-|j-i|)}$.

Заключение

В статье представлен обзор теоретических оснований проблематики, подробно рассмотрен и проиллюстрирован на примерах "графовый" алгоритм построения матрицы относительной лесной доступности; получены общие результаты, связанные с матрицей относительной лесной доступности на ориентированных циклах и путях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деца Е.И., Мханна Б. О специальных свойствах некоторых квазиметрик // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, выпуск 1. С. 145 – 164.
2. Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П. Матричная теорема о лесах и лапласовские матрицы орграфов. – М.: LAP LAMBERT Academic publishing, 2011.
3. Basin S.L. The appearance of Fibonacci numbers and the Q matrix in electrical network theory // Math. Magazine. 1963. Vol. 36. P. 84 – 97.
4. Boesch F. T., Prodinger H. Spanning tree formulas and Chebyshev polynomials // Graphs Combin. 1986. Vol. 2. P. 191 – 200.
5. Chaiken S. A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1982. Vol. 3. P. 319 – 329.
6. Chebotarev P. Y., Shamis E. V. The matrix-forest theorem and measuring relations in small social groups // Automat. Remote Control. 1997. Vol. 58. P. 1505 – 1514.
7. Chebotarev P. Spanning forests and the golden ratio // Discrete Applied Mathematics. 2008. Vol. 156. P. 813 – 821.
8. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // Optimization Letters. 2020. Vol. 14. P. 291 – 307.
9. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // Linear Algebra and its Applications. 2002. Vol. 356. P. 253 – 274.
10. Chebotarev P.Y., Shamis E.V. On proximity measures for graph vertices // Automation and Remote Control. 1998. Vol. 59. P. 1443 – 1459.
11. Hilton A. J. W. Spanning trees and Fibonacci and Lucas numbers // Fibonacci Quart. 1974. Vol. 12. P. 259 – 262.
12. Koshy T. Fibonacci and Lucas Numbers // Wiley-Interscience. New York. 2001.
13. Merris R. Doubly stochastic graph matrices // Publikacije Elektrotehnickog Fakulteta Univerzitet U Beogradu. Serija. Matematika. 1997. Vol. 8. P. 64 – 71.
14. Merris R. Doubly stochastic graph matrices II // Linear and Multilinear Algebra. 1998. Vol. 45. P. 275 – 285.
15. Mowery V. O. Fibonacci numbers and Tchebycheff polynomials in ladder networks // IRE Trans. Circuit Theory. 1961. Vol. 8. P. 167 – 168.
16. Myers B. R. Number of spanning trees in a wheel // IEEE Trans. Circuit Theory. 1971. Vol. 18. P. 280 – 282.

17. Zhang X. D. A note on doubly stochastic graph matrices // *Linear Algebra Appl.* 2005. Vol. 407. P. 196 – 200.
18. Zhang X. D., Wu J. X. Doubly stochastic matrices of trees // *Appl. Math. Lett.* 2005. Vol. 18. P. 339 – 343.
19. Zhang Y., Yong X., Golin M.J. Chebyshev polynomials and spanning tree formulas for circulant and related graphs // *Discrete Math.* 2005. Vol. 298. P. 334 – 364.

REFERENCES

1. Deza, E., Mhanna, B. "On special properties of some special quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 21 (1), P. 145 – 164.
2. Chebotarev, P., Agaev, R. 2011, "Matrix forest theorem and Laplacian matrices of orgraphs", *M.: LAP LAMBERT Academic publishing*.
3. Basin, S.L. 1963, "The appearance of Fibonacci numbers and the Q matrix in electrical network theory", *Math. Magazine*, vol. 36, P. 84 – 97.
4. Boesch, F. T., Prodinger, H. 1986, "Spanning tree formulas and Chebyshev polynomials", *Graphs Combin.*, vol. 2, P. 191 – 200.
5. Chaiken, S. 1982, "A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem", *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, vol. 3, P. 319 – 329.
6. Chebotarev, P. Y., Shamis, E. V. 1997, "The matrix-forest theorem and measuring relations in small social groups", *Automat. Remote Control*, vol. 58, P. 1505 – 1514.
7. Chebotarev, P. 2008, "Spanning forests and the golden ratio", *Discrete Applied Mathematics*, vol. 156, P. 813 – 821.
8. Chebotarev, P., Deza, E. 2020, "Hitting time quasi-metric and its forest representation", *Optimization Letters*, Vol. 14, P. 291 – 307.
9. Chebotarev, P., Agaev, R. 2002, "Forest matrices around the Laplacian matrix", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 356, P. 253 – 274.
10. Chebotarev, P. Y., Shamis E. V. 1998, "On proximity measures for graph vertices", *Automation and Remote Control*, Vol. 59, P. 1443 – 1459.
11. Hilton, A. J. W. 1974, "Spanning trees and Fibonacci and Lucas numbers", *Fibonacci Quart.*, vol. 12, P. 259 – 262.
12. Koshy, T. 2001, "Fibonacci and Lucas Numbers", *Wiley-Interscience. New York*.
13. Merris, R. 1997, "Doubly stochastic graph matrices", *Publikacije Elektrotehnickog Fakulteta Univerziteta U Beogradu. Serija. Matematika*, vol. 8, P. 64 – 71.
14. Merris, R. 1998, "Doubly stochastic graph matrices II", *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 45, P. 275 – 285.
15. Mowery, V. O. 1961, "Fibonacci numbers and Tchebycheff polynomials in ladder networks", *IRE Trans. Circuit Theory*, vol. 8, P. 167 – 168.

-
16. Myers, B. R. 1971, "Number of spanning trees in a wheel", *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. 18, P. 280 – 282.
 17. Zhang, X. D. 2005, "A note on doubly stochastic graph matrices", *Linear Algebra Appl.*, vol. 407, P. 196 – 200.
 18. Zhang, X. D., Wu, J. X. 2005, "Doubly stochastic matrices of trees", *Appl. Math. Lett.*, vol. 18, P. 339 – 343.
 19. Zhang, Y., Yong, X. Golin, M. J. 2005, "Chebyshev polynomials and spanning tree formulas for circulant and related graphs", *Discrete Math.*, vol. 298, P. 334 – 364.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 519.766

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-202-235

Комбинаторика слов, фактординамика и нормальные формы

И. А. Решетников

Решетников Иван Андреевич — аспирант, Московский физико-технический институт (г. Москва).

e-mail: reshetnikov.ivan@phystech.edu

Аннотация

Методы символической динамики играют существенную роль в изучении комбинаторных свойств слов, задачах теории чисел и теории динамических систем. Работа посвящена задачам комбинаторики слов, её приложениям в алгебре и динамических системах. В разделе 2.1 рассматривается одномерный случай на ключевом примере слов Штурма. Дается доказательство критерия подстановочности палиндромов Штурма с помощью индукции Рози, рассматривается случай одномерной фактординамики. В разделе 2.2 рассматривается сдвиг тора и фрактал Рози, порождающий слово Трибоначчи. Рассказывается связь периодичности схем Рози и подстановочности слова, порождённого этой системой. Приводится реализация слова Трибоначчи через перекладывание отрезков. Намечается подход к гипотезе Пизо. В разделе 2.3 говорится об унитарных преобразованиях тора и бильярдах в многоугольниках.

В главе 3 рассказывается о нормальных формах и росте групп и алгебр. Глава 4 посвящена графам Рози, базисам Гребнера и ко-росту, а также алгебраическим приложениям. В разделе 4.1 говорится о результатах в комбинаторике полилинейных слов, разитой В. Н. Латышевым и поставленных им проблемах. В параграфе 4.2 говорится о конечно определённых объектах и проблемах контроля над определяющими их соотношениями. В разделе 4.3 описываются некоторые мономиальные алгебры в терминах равномерно рекуррентных слов.

Глава 5 посвящена проблеме о высоте и нормальным формам.

Ключевые слова: комбинаторика слов, слова Штурма, фактординамика, фракталы Рози, перекладывания отрезков, символическая динамика, теорема Ширшова о высоте, почти периодическая последовательность, теорема о высоте, непериодические мозаики, DOLL-системы, теоремы типа теоремы Вершика-Лившица, схемы Рози, определимость в структурах, базис Гребнера-Ширшова, n -разбиваемость, теоремы Дилуорса, проблемы бернсайдовского типа

Библиография: 143 названия.

Для цитирования:

И. А. Решетников. Комбинаторика слов, фактординамика и нормальные формы // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 202–235.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 519.766

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-202-235

Combinatorics on words, facordynamics and normal forms

I. A. Reshetnikov

Reshetnikov Ivan Andreevich — graduate student, Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).

e-mail: reshetnikov.ivan@phystech.edu

Abstract

Methods of symbolic dynamics play an essential role in the study of combinatorial properties of words, problems in number theory and the theory of dynamical systems. The paper is devoted to the problems of combinatorics on words, its applications in algebra and dynamical systems. Section 2.1 considers the one-dimensional case using the key example of Sturm's words. The proof of the criterion for substitutionality of Sturm palindromes using the Rauzy induction is given, the case of one-dimensional facordynamics is considered. Section 2.2 discusses the shift of the torus and the Rauzy fractal that generates the word Tribonacci. The relationship between the periodicity of Rauzy's schemes and the substitutionality of the word generated by this system is discussed. The implementation of the word Tribonacci through the rearrangement of line segments is given. An approach to the Pisot hypothesis is outlined. Section 2.3 talks about unipotent torus transformations and billiards in polygons.

Chapter 3 talks about normal forms and the growth of groups and algebras. Chapter 4 is devoted to Rosie graphs, Gröbner bases and co-growth, and algebraic applications. Section 4.1 discusses the results in the combinatorics of multilinear words developed by V. N. Latyshev and the problems he posed. Section 4.2 talks about finitely defined objects and the problems of controlling the relationships that define them. Section 4.3 describes some monomial algebras in terms of uniformly recurrent words.

Chapter 5 deals with the problem of height and normal forms.

Keywords: combinatorics of words, Sturm words, facordynamics, Rauzy fractals, interval exchangings, symbolic dynamics, Shirshov's height theorem, almost periodic sequence, height theorem, non-periodic mosaics, DOLL-systems, Vershik-Livshitz type theorems, Rauzy schemes, definability in structures, the Gröbner-Shirshov basi, n -splitability, Dilworth's theorems, Burnside type problems

Bibliography: 143 titles.

For citation:

I. A. Reshetnikov, 2021, "Combinatorics on words, facordynamics and normal forms", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 202–235.

Введение

Комбинаторика слов находит свое применение в самых разных разделах математики. Например, в алгебре при изучении базисов и нормальных форм, в алгебраической топологии, в символической динамике. Ряд проблем, относящихся к комбинаторике слов находится на стыке алгебры и теории динамических систем. Многие проблемы комбинаторики слов представляют самостоятельный интерес.

Комбинаторика слов и символическая динамика

Методы символической динамики играют существенную роль в изучении комбинаторных свойств слов, задачах теории чисел и теории динамических систем. Пусть M — компактное метрическое пространство, $U \subset M$ — его открытое подмножество, $f : M \rightarrow M$ — гомеоморфизм компакта в себя и $x \in M$ — начальная точка. По последовательности итераций можно построить бесконечное слово w над бинарным алфавитом $A = \{a, b\}$:

$$w_n = \begin{cases} a, & f^{(n)}(x_0) \in U \\ b, & f^{(n)}(x_0) \notin U, \end{cases}$$

которое называется *эволюцией* точки x_0 . Символическая динамика исследует взаимосвязь свойств динамической системы (M, f) и комбинаторных свойств слова w_n . Для слов над алфавитом, состоящим из большого числа символов, нужно рассмотреть несколько характеристических множеств: $U_1, \dots, U_n$.

Для того, чтобы легко разобраться со случаем, когда x_0 лежит на границе множества U введём понятие *существенной эволюции* точки x_0 . Конечное слово v называется *конечной существенной эволюцией* точки, если в любой окрестности Q точки x_0 найдётся открытое множество, все точки которого имеют конечную эволюцию v . Бесконечное слово w называется *существенной эволюцией* точки x_0 , если любое его начальное подслово — существенная конечная эволюция точки x_0 .

Под *прямой задачей* символической динамики понимается изучение комбинаторных свойств слов, порожденных данной динамической системой, *обратная задача* символической динамики изучает свойства динамической системы, то есть свойства компакта M и преобразования f по комбинаторным свойствам слова w .

Известно, что если слово w *равномерно-рекуррентно*, то полученная динамическая система минимальна, то есть не содержит нетривиальных замкнутых инвариантных траекторий. Свойство *единственности инвариантной меры* переводится на комбинаторный язык так. Пусть u есть подслово равномерно рекуррентного сверхслова w . Предположим, что для любого подслова u бесконечного слова w верхняя и нижняя плотности, с которыми оно встречается в слове w совпадают. Тогда соответствующая инвариантная мера единственная.

Можно сформулировать комбинаторные условия на то, что динамическая система является сдвигом тора, в терминах функции рассогласования. (В частности, это означает, что у нее дискретный спектр). Определим *функцию рассогласования* $\rho(U, V)$ как верхнюю плотность множества позиций в словах U, V в которых стоят разные символы.

Одномерный случай

Последовательности Штурма

В этом разделе речь идёт о словах над двухсимвольным алфавитом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Односторонне бесконечное слово (бесконечное слово) над алфавитом A — это отображение $\mathbb{N} \rightarrow A$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Двусторонне-бесконечное слово w — это отображение $\mathbb{Z} \rightarrow A$, где A — алфавит слова w . Будем обозначать $w(n)$ через w_n .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Слово w над алфавитом A называется сбалансированным, если для любого натурального n и любого $a \in A$ количество символов a в любых двух его подсловах длины n отличается не больше, чем на 1.*

Если для какого-нибудь n во всех словах длины n фиксированное число символов a , то слово очевидным образом получается периодическим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Обозначим через $T_n(w)$ функцию сложности слова w — количество подслов в слове w . Бесконечное слово w называется словом Штурма (Sturmian word), если для любого натурального $n \geq 1$ выполнено равенство $T_n(w) = n + 1$.

Слова Штурма имеют богатую комбинаторику. Даже для двухбуквенного алфавита мощность множества слов Штурма над алфавитом A несчётна.

Если для слова w для какого-то n $T_n(w) = T_{n+1}(w)$, то подслово длины n однозначно определяет следующий за ним символ. Всего подслов длины n конечное число. Докажем, что слово w периодическое. Рассмотрим n -ый граф Розы RG_n для слова w . $RG_n = (V, E)$, V — множество подслов длины n в слове w , две вершины v_1 и v_2 соединены ребром, если слово, получающееся приписыванием некоторой буквы к слову v_1 оканчивается на слово v_2 . Исходящая степень каждой вершины не меньше 1. Если $T_n(w) = T_{n+1}(w)$, то исходящая степень каждой вершины в точности равна 1, поэтому в графе найдётся цикл, из которого не выходит ребёр, значит, слово w циклично: если мы попали на подслово из цикла, то из цикла мы уже не выйдем. Это доказательство приведено для того, чтобы показать, как естественным образом возникают графы Розы в связи со словами Штурма.

Пусть есть символическая динамика (M, R_α, x_0, U) , где M — окружность, U — дуга угловой меры α , (α иррациональное), R_α — поворот на α относительно центра окружности (угловую меру всей окружности считаем единицей) — функция эволюции, x_0 — начальная точка — начало дуги α . Динамическая система (M, R_α) порождает некоторое бесконечное слово w , эволюцию точки x_0 . Такие слова называются механическими.

Теперь мы можем сформулировать теорему об эквивалентности ([129],[125]) следующим образом

ТЕОРЕМА 1. Эквивалентны следующие условия для слова w

1. Слово w является словом Штурма;
2. Слово w сбалансировано и непериодично.
3. Слово w порождается символической динамикой (M, R_α, x_0, U) , где угол поворота и дуги U α иррационален.
4. Слово w получается путем предельного перехода последовательности слов, каждое из которых получается из предыдущего путем подстановки вида $a^k b \rightarrow b, a^{k+1} b \rightarrow a$ либо подстановки вида $b^k a \rightarrow a, b^{k+1} a \rightarrow b$. Показатель k зависит от шага.
5. Бесконечное слово w равномерно рекуррентно и имеет последовательность графов Розы с одной входящей и одной исходящей развилкой.

Эта теорема связывает комбинаторные свойства слова w и геометрические свойства динамики (M, R_α, x_0, U) , что позволяет искать геометрические подходы к решению комбинаторных задач. Ярким примером геометрического подхода является метод индукции Розы.

При изложении результата про подстановочность некоторых палиндромов нам понадобятся несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Двусторонне-бесконечное слово w называется палиндромом, если $\forall n \in \mathbb{Z} : w_n = w_{-n}$ (палиндром, симметричный относительно буквы) или $\forall n \in \mathbb{Z} : w_n = w_{1-n}$ (палиндром, симметричный относительно междубуквия).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Правосторонне-бесконечное слово w над алфавитом A называется чисто подстановочным, если оно представляется в виде $w = \phi^\infty(a)$, где $a \in A$ — буква, а ϕ — подстановка, такая, что $\phi(a) = aU$, где $U \in A^*$, непустое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Слово w называется *подстановочным*, если получается из чисто подстановочного слова w' подстановкой h применённой к слову w' : $w = h(w')$.

Таким образом, в теореме 1 если последовательность подстановок периодична, то обозначив период за новую подстановку, получаем, что полученное слово w подстановочно.

Тогда $\phi(\phi(a)) = aU\phi(U)$, $\phi(\phi(\phi(a))) = aU\phi((U\phi(U)))$ и т.д. Предельным переходом получаем $w = \phi^\infty(a)$.

Понятия *подстановочности* и *чистой подстановочности* слов, бесконечных в обе стороны вводятся аналогично с той лишь разницей, что для двусторонне бесконечного подстановочного слова подстановка должна обладать свойством $\phi(a) = Ua$ и $\phi(b) = bW$. Тогда двусторонне бесконечное слово w будет конкатенацией левосторонне-бесконечного подстановочного слова (позиции от $-\infty$ до 0 включительно) и правосторонне-бесконечного подстановочного слова (позиции большие нуля) и будет представимо в виде $w = \phi^\infty(a|b)$.

Индукция Розы

Метод индукции Розы [133] позволяет перейти от изучения некоторых механических слов к изучению цепных дробей. Его можно сформулировать следующим образом.

Пусть есть символическая динамика (M, R_α, x_0, U) , где M — окружность, U — дуга угловой меры α , (α иррациональное), R_α — поворот на α относительно центра окружности (угловую меру всей окружности считаем единицей) — функция эволюции, x_0 — начальная точка — начало дуги α . Динамическая система (M, R_α) порождает некоторое бесконечное слово w , эволюцию точки x_0 .

Требование иррациональности числа α продиктовано периодичностью сдвигов на рациональный угол, этот тривиальный случай мы оставляем на разбор читателю.

Метод индукции Розы состоит в следующем. Мы преобразуем символическую динамику (M, R_α, x_0, U) в символическую динамику $(\tilde{M}, \tilde{R}_\alpha, \tilde{x}_0, \tilde{U})$ по следующим правилам.

1. Если $\alpha < \frac{1}{2}$, то в слове w после a всегда следует b . Поэтому слово w получается из слова $\tilde{w}$ заменой

$$\begin{aligned} a &\rightarrow ab \\ b &\rightarrow b. \end{aligned}$$

Возьмём $\tilde{M}$ — окружность длины $1 - \alpha$. Более наглядно, мы вырезаем из окружности M дугу длины α (следующую за выделенной дугой U). Тогда слово $\tilde{w}$ будет порождаться символической динамикой $(\tilde{M}, \tilde{R}_\alpha = R_\alpha, \tilde{x}_0 = x_0, U = \tilde{U})$.

2. Если же $\alpha > \frac{1}{2}$, то заменим a на b и наоборот. Для этого надо положить $\tilde{U} = M \setminus U$.

Можно заметить, что описанный алгоритм аналогичен алгоритму разложения α в цепную дробь. Таким образом, если α — квадратичная иррациональность (её цепная дробь периодична), то в какой-то мы получим символическую динамику, эквивалентную уже встречавшейся, а значит можем записать подстановку, с помощью которой можно вырастить слово w . Обозначим за φ композицию подстановок, образующих период, а за ψ композицию подстановок, образующих предпериод. Слово w представимо в виде $w = \psi \circ \varphi^\infty(a)$, то есть подстановочно. Если же предпериод отсутствует, то слово w чисто подстановочно.

Если же α — не квадратичная иррациональность, то процесс не заиклится, но в любом случае можно будет изучать свойства цепной дроби α и соотносить их со свойствами слова w .

Одномерная динамика и подстановочность

Пусть есть динамическая система (M, R_α, x_0, U) . Фактординамика получается отождествлением точек различающиеся на $\frac{m}{n}$, где n фиксировано, а $m \in \mathbb{N}$. Такая обобщённая точка будет правильным n -угольником. Тогда попаданий в выделенную дугу может быть либо

$$k = \left\lfloor \frac{\alpha}{1/n} \right\rfloor = [n\alpha],$$

либо на 1 больше для каждой обобщённой точки. Будем писать a , если их $k + 1$ и b иначе. Обозначим эту фактординамику через

$$(M/n, R_\alpha, x_0, U/n).$$

ТЕОРЕМА 2. *Если слово w , порождённое символической динамикой (M, R_α, x_0, U) подстановочное, то и слово w' , порождённое символической фактординамикой $(M/n, R_\alpha, x_0, U/n)$ тоже подстановочное.*

Заметим, что множество, получающееся факторизацией окружности по данному отношению эквивалентности, изоморфно окружности ω длины $\frac{1}{n}$. При этом точки, при попадании на которые мы пишем a (множество U') образуют дугу α' длины

$$\alpha' = \alpha - \frac{[n\alpha]}{n} = \alpha - \frac{k}{n}.$$

Поворот на угол α на окружности M отвечает повороту на угол $n\alpha$ на окружности ω . Увеличив длину окружности ω и длину дуги α' в n раз (сделав гомотегию) получим, соответственно, символическую динамику $(M, R_{n\alpha}, x_0, U')$. Угол $n\alpha$ отличается от угла α' несколькими оборотами вокруг окружности, поэтому поворот на угол $n\alpha$ совпадает с поворотом на угол α' . Таким образом мы получили стандартную символическую динамику поворотов окружности единичной длины на угол α' . Благодаря методу индукции Розы мы знаем, что слово является подстановочным тогда и только тогда, когда α — квадратичная иррациональность. Если слово w подстановочное, то α — квадратичная иррациональность, а значит, и α' — квадратичная иррациональность, поэтому слово w' также будет подстановочным.

Критерий подстановочности палиндромных слов Штурма

Всего есть три двусторонне бесконечных палиндрома, являющихся механическими словами параметра α . Это слова, отвечающие серединам дуг и слово, получающееся из точки, которая первым поворотом переходит в точку, симметричную ей относительно оси симметрии динамической системы. Палиндромы, получающиеся из середин дуг симметричны относительно своей буквы, а третий палиндром симметричен относительно междубуквия.

Аналог индукции Розы для палиндромов

В этом разделе мы докажем следующий критерий подстановочности палиндромов Штурма. Во всём разделе полагаем алфавит $A = \{0, 1\}$.

ТЕОРЕМА 3. *Символическая динамика (M, R_α, x_m, U) , где x_m — середина дуги U длины α на окружности M длины 1 порождает подстановочный двусторонне-бесконечный палиндром p тогда и только тогда, когда α — квадратичная иррациональность*

Так как наше преобразование окружности обратимо, то можно говорить и о двусторонне-бесконечных словах, порождаемых символической динамикой. В частности, о словах-палиндромах. Доказательство будет основано на сходстве некоторого алгоритма с индукцией Розы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону: если слово p является подстановочным, то α — квадратичная иррациональность. α — доля числа единиц. Пусть подстановка ϕ порождает слово p . Пусть при действии порождающей подстановки ϕ 0 переходит в слово с a нулями и b единицами, а 1 переходит в слово с c нулями и d единицами. Тогда, так как p — неподвижная точка подстановки ϕ , получаем квадратичное относительно α уравнение

$$\alpha = \frac{b(1 - \alpha) + d\alpha}{(a + b)(1 - \alpha) + (c + d)\alpha},$$

значит, α — квадратичная иррациональность.

В другую сторону, если α — квадратичная иррациональность, то p подстановочно. Пусть есть бесконечное слово Штурма p — палиндром над алфавитом $\{0, 1\}$. Пусть в нём доля единиц равна α . Если нулей меньше, чем единиц, то сделаем подстановку $E : 0 \leftrightarrow 1$. Остаётся расписать действия алгоритма при $\alpha < \frac{1}{2}$. Так как p является словом Штурма и $\alpha < \frac{1}{2}$ в нём не могут встретиться две единицы подряд. Возможны несколько случаев.

1. Слово p симметрично относительно 1. Будем относить эту 1 к левой половине слова p . Так как в слове p нулей больше, чем единиц, то перед каждой единицей идёт ноль. Значит, слово p получается подстановкой (обозначение согласовано с [126])

$$G : \begin{cases} 1 \rightarrow 01 \\ 0 \rightarrow 0 \end{cases}$$

из некоторого слова p' . Причём подстановка подобрана так, что левая и правая части слова p получаются из левой и правой части слова p' . Так как количество нулей в каждой группе нулей уменьшилось на 1, а больше ничего не произошло, то слово p' также является палиндромом, симметричным относительно 1.

2. Слово p симметрично относительно 0. Будем относить этот 0 к левой половине слова p . Так как в слове p нулей больше, чем единиц, то после каждой единицы идёт ноль. Значит, слово p получается подстановкой

$$\tilde{G} : \begin{cases} 1 \rightarrow 10 \\ 0 \rightarrow 0 \end{cases}$$

из некоторого слова p' . Левая и правая части слова p получаются соответственно из левой и правой частей слова p' . Количество нулей в каждой группе нулей уменьшилось на 1, поэтому слово p' также является палиндромом, но на этот раз симметричным относительно междубуквия.

3. Слово p симметрично относительно междубуквия. Тогда буквы w_0 и w_1 должны быть нулями. Тогда слово p получается подстановкой G из некоторого слова p' , при этом слово p' симметрично относительно нуля.

В нашем случае α — квадратичная иррациональность. При действии приведённого алгоритма α претерпевает такие же изменения, как и в индукции Розы, а значит, так как α — квадратичная иррациональность, то доля единиц α начиная с некоторого момента будет изменяться периодически. Для каждого α возможны лишь три варианта симметричности, три различных палиндрома. Поэтому возможно лишь конечное число пар (α, j) , где j — номер варианта симметричности. Для каждой пары однозначно определён переход согласно алгоритму к некоторой другой паре. Поэтому процесс и в общем также цикличен. Из цикличности процесса следует, что палиндром p подстановочен: как и в разделе 9. $\square$

Чистая подстановочность двусторонне-бесконечного палиндрома Фибоначчи-Штурма

Если мы предъявим подстановку ϕ , оставляющую на месте слово w , такую, что $\phi(a) = Ua$ и $\phi(b) = bW$ для каких-то непустых слов U и W , тогда двусторонне-бесконечное слово w будет являться чисто подстановочным.

ТЕОРЕМА 4. *Подстановка $\phi : 0 \rightarrow 00101, 1 \rightarrow 001$ оставляет на месте палиндром w и обладает свойством $\phi(a) = Ua$ и $\phi(b) = bW$, значит двусторонне-бесконечный палиндром w , симметричный относительно 1 для $\alpha = \phi$ (здесь ϕ — золотое сечение) растится этой подстановкой, т.е. $w = \phi^\infty(1|0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данная подстановка ϕ получается композицией двух подстановок $\phi = \psi_2 \circ \psi_1$, где $\psi_1 : 0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 1$ и $\psi_2 : 0 \rightarrow 001, 1 \rightarrow 01$, каждая из которых сохраняет отношение количества нулей и единиц в слове, в котором отношение нулей и единиц такое же, как в слове фибоначчи. При этом обе эти подстановки сохраняют свойство палиндромности. Первая подстановка увеличивает количество нулей в каждой группе нулей на 1, а значит сохраняет палиндромность. Вторая порождает группы нулей, симметричные относительно точки симметрии слова. ψ_1 слово, симметричное относительно 1, переводит в слово, симметричное относительно междубуквия, а ψ_2 слово, симметричное относительно междубуквия, переводит в слово, симметричное относительно 1. Так как такое сбалансированное слово только одно для данного отношения количеств нулей и единиц, то ϕ , переводящая слово, симметричное относительно 1 в слово, симметричное относительно 1, при этом оставляя неизменным отношение количеств 0 и 1, оставляет слово w без изменений. $\square$

Фракталы Розы

Напомним критерий того, что равномерно рекуррентное слово получается из сдвига тора. Итак, пусть W сверхслово, полученное сдвигом тора, T есть оператор сдвига. Тогда функции рассогласования между сдвигами W удовлетворяют следующим свойствам.

1. Существует последовательность $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\rho(T^{(n_i)}(W), W) \rightarrow 0$.
2. Существуют сколь угодно большие пары взаимно простых чисел (n_i, n_j) ; $n_i, n_j \rightarrow \infty$ из этой последовательности.

При этом интересно и важно исследовать такие слова, которые кроме того являются морфическими. Назовем соответствующую *doll*-систему *doll-системой евклидова типа*. В случае одномерного тора, по всей видимости, мы получим теорию слов Штурма. Типичным примером является слово Фибоначчи. Рассмотрим подстановку $\phi : 0 \rightarrow 001, 1 \rightarrow 01$. Слово Фибоначчи получается из символа 0 как $\phi^\infty(0)$. Оно является словом Штурма. Слово трибоначчи $\tau^\infty(0) = 01020100102010$ получается с помощью подстановки $\tau(0) = 01, \tau(1) = 02, \tau(2) = 0$.

В работе [130] G.Rauzy показал, что ему отвечает вращение 2-мерного тора $\mathbb{T}^2$, разбитого на три фрактальные области, именуемые *фракталами Розы* отвечающие символам 0, 1, 2. Теория фракталов Розы обобщается для так называемых *подстановок Пизо*.

Теория фракталов Розы дает другие образцы для исследования и обобщений, помимо теории последовательностей Штурма. В этой ситуации имеется очень красивое соответствие между арифметикой, теорией динамических систем и комбинаторики. Подробности см. [127].

Было бы интересно исследовать каким точкам фракталам Розы отвечают какие сверхслова, в частности какие HDOL-системы.

Фракталы Розы и перекладывания отрезков

Рассмотрение общего случая слов у которых графы Розы имеют большее число развилок (но все же их число конечно), т.е. слов с линейной функцией сложности приводит к изучению слов, порождаемых **перекладыванием отрезков**. Известно, что если перекладывание k отрезков *регулярно*, то есть траектория любого из концов отрезка перекладывания не попадает на конец другого отрезка, то слово, порождаемое данным перекладыванием, имеет функцию сложности $T(n) = n(k - 1) + 1$.

Перекладывания отрезков т.е. кусочно непрерывные преобразования одномерного комплекса естественным образом служат обобщением вращения. Эти преобразования были введены Оселедцом [45], следовавшим идее В. И. Арнольда [6], (см. также [30]). Розы [133] впервые показал, что связь между вращениями круга и последовательностями Штурма обобщается если рассматривать перекладывания отрезков. В связи с этим (в той же работе) он задал вопрос описания последовательностей, связанных с перекладываниями отрезков.

Такие последовательности являются еще одним естественным обобщением слов Штурма. В частном случае, для $k = 3$ отрезков, описание таких последовательностей было получено в работе [113], а работе [115] были изучены частные случаи последовательностей, порождаемых перекладыванием 4-х отрезков. Стоит также отметить работы [64, 65, 66]. В случае произвольного числа отрезков также получен ряд интересных результатов. В работе [114] получен комбинаторный критерий на порождаемость слов, получаемых симметричным перекладыванием отрезков, то есть перекладыванием, связанным с перестановкой $(1 \rightarrow k, 2 \rightarrow k - 1, \dots, k \rightarrow 1)$.

Комбинаторный критерий (для общего случая, не обязательно являющегося регулярным) того, что данное сверхслово является перекладыванием отрезков в терминах размеченных графов Розы описано в работе [99]. В этой работе показано следующее:

ТЕОРЕМА 5. *Равномерно-рекуррентное слово W порождается перекладыванием отрезков, тогда и только тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Розы и Порождается перекладыванием отрезков с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Розы.*

В работе [116] был независимо получен другой критерий порождаемости слов преобразованием перекладывания отрезков, для важного частного случая: при дополнительном условии: *траектория каждой концевой точки отрезка перекладывания не попадает на концевую отрезка перекладывания, в том числе сама на себя*. В этом случае, как не сложно видеть, слова будут иметь функцию сложности $T(n) = (k - 1)n + 1$.

Отметим, что задача о перекладывании отрезков возникает при изучении бильярда в многоугольнике, все углы которого суть рациональные кратные π . В этом случае множество направлений звеньев бильярдной траектории конечно и можно рассмотреть положения на сторонах многоугольника. Множества пар (точка на стороне, направление) задает систему отрезков, а переход к следующему такому состоянию – кусочно линейное их отображение. Инвариантная мера задает длину этих отрезков, так что получается перекладывание.

В связи с теоремой 5 возникают вопросы. Прежде всего, верно ли, что если слово получается из перекладывания отрезков и оно рекуррентно, то оно равномерно рекуррентно? Верно ли, что число типов слов возникающих из заданного перекладывания отрезков конечно? Т.е. верно ли что число существенно различных эволюций конечно?

Теория слов Штурма должна хорошо соотноситься с проблемами перекладывания отрезков. Некоторые факты переносятся, но есть и различия. Например, спектр уже не обязательно оказывается дискретным. S.Ferencí поставил задачу получения прямого комбинаторного доказательства того, что если длины отрезков имеют общее положение (с точностью до меры

нуль), и перекладывание не сводится к перекладыванию меньшего числа отрезков, то спектр не имеет дискретной компоненты.

Обратимся к условию (5) на последовательности Штурма. Случайному переключению развилки в графе Розы отвечает Гауссова мера на отрезке $[0, 1]$ инвариантная относительно преобразования $x \rightarrow \{x^{-1}\}$. Теорема 5 дает возможность аналогичным образом вводить меру на множестве перекладываний отрезков. Она должна соотноситься с системой представителей Тейхмюллера.

Далее. Теорию цепных дробей можно переносить на теорию перекладываний отрезков, в частности находить в терминах индукции Розы, моменты наилучшего приближения к данной точке.

Хотелось бы найти или доказать утверждение, что сдвиг окружности, управляемый *doll*-системой, связан с квадратичной иррациональностью. Существуют примеры *doll*-систем, связанной с перекладыванием отрезков и управляемых высшей иррациональностью. Эти примеры следует изучить (см. раздел 9).

Они приводят к исследованию фракталов в бильярдах с рациональными углами. Отметим, что внешний бильярд двойственен внутреннему и что компьютерные эксперименты обнаруживают фрактальную картину для случая правильного n -угольника. Ситуация однако, исследована при $n = 3, 4, 6$ (тривиальный случай), $n = 5, 8, 10$.

Схемы Розы и *doll*-системы

Графы Розы представляются комбинаторным языком, наиболее приспособленным для задания динамических систем. Другим комбинаторным языком является язык подстановок. Подстановочные динамические системы интенсивно исследовались рядом авторов. В этой связи следует обратиться к характеристике слов Штурма через свойство (4). Что можно сказать про динамические системы для произвольной системы подстановок? В частности, нас интересует случай периодичности системы подстановок. Для поворота окружности периодичность может наблюдаться только для случая ранга 2, т.е. для подстановок собственные значения соответствующей матрицы которых есть квадратичная иррациональность. Для перекладывания отрезков в общем случае возможно появление высших иррациональностей.

В этой связи важно уметь переводить свойство периодичности на язык графов Розы. Эту возможность предоставляет следующая теорема:

ТЕОРЕМА 6 ([81]). *Равномерно рекуррентное слово является образом инвариантного слова относительно некоторой подстановки при некотором морфизме тогда и только тогда, когда у него есть периодическая схема Розы.*

Из этой теоремы вытекает теорема Вершика-Лившица о периодичности диаграмм Брателли для марковских компактов, порожденных подстановочными системами [140, 141].

Доказательство теоремы Вершика-Лившица основано на явной конструкции. Доказательство теоремы 6 сложнее и явная конструкция нам не известна. Оно использует тонкие результаты Ж.Кассиня.

Теорема 6 вместе с техникой доказательства позволила решить проблемы об алгоритмической разрешимости проверки периодичности а также равномерной рекуррентности для *HDOL*-систем. Проблема периодичности была поставлена в 1980 году и была независимо решена И.Митрофановым и Ф.Дюрандом [78, 79, 42, 41]

Слово Трибоначчи

Слова Штурма соответствуют вращениям одномерного тора. Тесно связанными со словами Штурма оказываются подстановочные слова в трёхбуквенном алфавите. Простейший и очень важный пример — слово Трибоначчи, получающееся подстановкой

$$\tau : \begin{cases} 1 \rightarrow 12 \\ 2 \rightarrow 13 \\ 3 \rightarrow 1. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Бесконечное слово $\tau^\infty(0)$, получающееся бесконечным применением подстановки τ называется словом Трибоначчи.

В работе [130] G.Rauzy показал, что ему отвечает вращение 2-мерного тора $\mathbb{T}^2$, разбитого на три фрактальные области, именуемые *фракталами Рози*, отвечающие символам 1, 2, 3.

Рассмотрим ломаную $A_1 A_2 \dots$ в пространстве, построенную по следующему правилу. Вершина A_1 — это начало координат. Каждое ребро имеет длину 1 и параллельно одной из осей, в зависимости от знака в слове Трибоначчи на соответствующем месте. Причём вершины краются в цвет, соответствующий знаку. Так как матрица подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет три собственных значения: один вещественный, $\beta > 1$ и два комплексных, по модулю меньше 1. Таким образом β — число Пизо этой подстановки и существует предел отношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n(x)}{n} \right),$$

где $A_n(x)$ — количество символов x среди первых n символов слова Трибоначчи.

Эта ломаная есть целочисленное приближение прямой растягивающего направления $(1, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta^2})$, причём наилучшее [101]. Такие же конструкции диофантовых приближений есть и для случая размерности 2, с помощью последовательностей Штурма [101].

Спроецировав вершины вдоль собственного вектора на какую-нибудь плоскость получим разноцветную картинку. Из рекуррентности слова Трибоначчи следует фрактальность полученной картинки: маленькие части переходят внутрь больших, а большие при некотором сжимающем отображении (задаваемом двумя собственными векторами матрицы подстановки, меньшими 1) переходят в меньшие части. Эта картинка называется *фракталом Рози*.

Реализация слова Трибоначчи

В этом разделе мы обсудим, как с помощью перекладывания отрезков окружности получить слово Трибоначчи. Другими словами, построим пример символической динамики, порождающей слово Трибоначчи, основываясь на работе [101].

Случай перекладывания трёх отрезков. Всего возможно 5 перестановок трёх отрезков, отличных от тождественной (213), (132), (231), (312) и (321). Но в первых четырёх случаях есть два отрезка рядом, не поменявшие порядок, (с учётом того, что окружность можно вращать), что сводится к перекладыванию двух отрезков, а для двух это доказано [101]. Таким образом, остаётся только следующее перекладывание трёх отрезков окружности длин 1.

$$P(x) = \begin{cases} x + 1 - \alpha, & x \in [0, \alpha) \\ x + 1 - 2\alpha - \beta, & x \in [\alpha, \alpha + \beta) \\ x - \alpha - \beta, & x \in [\alpha + \beta, 1) \end{cases}$$

Это перекладывание отрезков отвечает перестановке (321) отрезков. Должны также выполняться следующие 3 условия для любых целых p и q :

$$1. \quad p\alpha + q\beta \neq p - q$$

$$2. \quad p\alpha + q\beta \neq p - q - 1$$

$$3. \quad p\alpha + q\beta \neq p - q + 1,$$

что отвечает бесконечности орбит особых точек (и эргодичности системы, соответственно). В этом случае возможно [101] применить индукцию Рози, чтобы свести этот случай к одному из других случаев перекладывания трёх отрезков, а значит и к случаю перекладывания двух отрезков, чтобы доказать, что T отвечает вращению тора $\mathbb{T}_2$.

Слово Трибоначчи перекладыванием отрезков

Рассмотрим символическую динамику Tx на окружности, являющуюся перекладыванием отрезков. Пусть $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = 1$

$$T(x) = \begin{cases} x + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{\alpha}{2}) \\ x - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, & x \in [\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha^2}{2}) \\ x + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{2}, & x \in [\alpha, \alpha + \frac{\alpha^2}{2}) \\ x - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{2}, & x \in [\alpha + \frac{\alpha^2}{2}, \alpha + \alpha^2) \\ x + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{2}, & x \in [\alpha + \alpha^2, \alpha + \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{2}) \\ x - \frac{\alpha^3}{2} + \frac{1}{2}, & x \in [\alpha + \alpha^2 + \frac{\alpha^3}{2}, 1) \end{cases}$$

Опишем это перекладывание отрезков словами. Вначале мы разбиваем окружность длины 1 на три части с такими длинами α , α^2 и α^3 . Затем каждую из трёх частей разрезаем на два равных куса и меняем куски каждой части между собой. Полученное перекладывание затем ещё вращаем на половину длины окружности. При этом когда мы попадаем в первую часть длины α , мы пишем 1, когда во вторую и третью части — 2 и 3, соответственно. Для обоих кусков каждой части мы пишем одно и то же.

В статье [61] доказано следующее

ТЕОРЕМА 7. *Символическая динамика $T(0)$ порождает слово Трибоначчи.*

О гипотезе Пизо

Теория фракталов Рози обобщается для так называемых *подстановок Пизо*. Доказано, что для подстановок Пизо фрактал Рози покрывает тор в несколько слоёв.

Если бы удалось доказать, что для любой подстановки ψ соответствующий фрактал Рози всегда покрывает тор в один слой (как в случае со словом Трибоначчи), то по теореме фон Неймана спектр соответствующего ψ сдвига тора дискретен. И тогда удалось бы доказать в общем случае гипотезу Пизо о том, что подстановочные системы обладают дискретным спектром. Здесь можно выделить работу Дюранда [80].

В тех случаях, когда фрактал Рози покрывает тор в несколько слоёв — непонятно. Это и есть мотивировка изучать фактординамику сдвигов тора.

В одномерном случае есть подстановочная система, она покрывает в несколько слоёв другую окружность. Хочется доказать, что полученная там система тоже подстановочна.

Теория фракталов Рози даёт другие образцы для исследования и обобщений, помимо теории последовательностей Штурма. В этой ситуации имеется очень красивое соответствие между арифметикой, теорией динамических систем и комбинаторики. Подробности см. [127].

Таким образом, изучая фракталы Рози, можно получить результаты, связанные с гипотезой Пизо, доказательство которой стало бы прорывом.

Например, можно изучать интересные точки на фрактале Рози. На окружности это концы дуг, середины дуг. На двумерном торе — точки схождения всех трёх областей фрактала.

Другие идеи, как подступиться к гипотезе Пизо — можно сформулировать комбинаторные условия на то, что динамическая система сопряжена сдвигу тора и имеет чисто дискретный спектр, в терминах функции рассогласования. Определим функцию рассогласования $\rho(u, v)$ как верхнюю плотность множества позиций в словах u, v в которых стоят разные символы. Её развитие остаётся за рамками данной работы.

Унипотентные преобразования тора

Отметим, что язык графов Рози хорошо описывает одномерные системы. Необходимы и другие модели. Обратные задачи символической динамики, связанные с унипотентным преобразованием тора, изучались в работе [14]. В частности, такие слова, получаются из взятия дробных частей многочленов со старшим иррациональным коэффициентом в целых точках.

Пусть $P(n)$ — многочлен, коэффициент при старшей степени которого иррациональное число. Слово w ($w = (w_n), n \in \mathbb{N}$) состоит из последовательности первых двоичных цифр $\{P(n)\}$ т.е. $w_n = [2\{P(n)\}]$. Обозначим через $T(k)$ число различных подслов длины k слова w . Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 8. *Существует многочлен $Q(k)$, зависящий только от степени многочлена P , такой, что при достаточно больших k выполнено равенство $T(k) = Q(k)$.*

Аналогичные вопросы исследовались в работе [63], [105]. Исследование бильярда с произвольными углами так же соотносится с теорией перекладывания отрезков, как повороты окружности с унипотентными преобразованиями тора. Возникает вопрос. Верно ли, что число слов растёт точно полиномиально? По всей видимости, ответ отрицателен ибо не каждый бильярд эргодичен.

Комбинаторика слов и нормальные формы

Исследование комбинаторных и асимптотических свойств алгебраических объектов имеет важные приложения. Можно выделить работы Фон Неймана, Дзя, Е. С. Голода и И. Р. Шафаревича, М. Громова, Вольфа, Фюрстенберга, Столинга. Функции роста к.п. групп введены независимо А. А. Шварцем и Дж. Милнором при исследовании накрытий римановых пространств (с неположительной кривизной) см. [16], [17], [18], [49], [119], [128]. С понятием канонической или *нормальной формы* тесно связано понятие *роста*, которое интенсивно изучается. С каждой алгеброй можно связать мономиальную алгебру с таким же нормальным базисом [10].

Функция роста конечно порожденного, но бесконечного объекта измеряет насколько он отличается от конечного. Функции роста интенсивно исследуются в разных разделах математики. Известен классический результат М.Громова, утверждающий что группа с полиномиальным ростом есть расширение нильпотентной группы с помощью конечной. Знаменитая проблема Дж.Милнора утверждает наличие групп промежуточного роста. Она была решена Р. И. Григорчуком. Фундаментальное понятие *голономного D -модуля* в теории дифференциальных операторов формулируется на языке функции роста. Известная конструкция Голода–Шафаревича позволяющая строить ненильпотентные конечно порожденные ниль-кольца основана на анализе рядов Гильберта. В дальнейшем прорыв в этой области был осуществлен А. Смоктунович. Если функция роста полиномиальна, то показатель степени есть *размерность Гельфанда–Кириллова*. Теорема И. Бернштейна утверждает, что размерность Гельфанда–Кириллова нетривиального модуля над алгеброй Вейля $W_n = C[x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n]$ не менее n , если же она равна n , то такой модуль называется *голономным*. Известно, что ряд Гильберта относительно свободной алгебры рационален ([11], [91]).

Функциям роста и проблемам рациональности посвящена обширная библиография. Подробный обзор – см. К. И. Бабенко [8]. Функции роста для мономиального случая а также в словах – см. [10]. Для бесконечно порожденного случая аналогом ряда Гильберта являются ряды ко-размерности, введенные А.Регевым, которые сейчас интенсивно изучаются.

Задание элемента в алгебре осуществляется с помощью линейной комбинации слов, поэтому наиболее “чистыми” вопросами являются вопросы, относящиеся к комбинаторике слов. К комбинаторике слов сводится изучение роста алгебр и рядов Гильберта. Эффекты, связанные с периодичностью, возникают при рассмотрении вопросов бернсайдовского типа, таких, как теорема Ширшова о высоте, теорема о независимости, нильпотентность радикала PI-алгебры и т.п.

Мономиальные алгебры – это алгебры, все определяющие соотношения которых задаются словами от образующих. Их исследование имеет своей целью выявление идей, необходимых для построения комбинаторной теории колец. Благодаря этому исследованию стала более понятной роль равномерно рекуррентных слов и связь комбинаторной теории колец с символической динамикой.

Комбинаторика слов используется при изучении произвольных алгебр, не обязательно мономиальных. Комбинаторные леммы хорошо работают при изучении канонических базисов алгебр, нормальной формы ее элементов, проблемах бернсайдовского типа.

Графы Розы, Базисы Гребнера и ко-рост

Одним из основных инструментов исследования нормальных форм в различных исчислениях является *базис Гребнера* (правильнее говорить *базис Гребнера-Ширшова*). Базисы Гребнера активно исследуются в частности Л. А. Бокутем и его школой. На основе вычисления базисов Гребнера работают многие программы компьютерной алгебры, им посвящена обширная литература.

Пусть A – алгебра с образующими $a_1, \dots, a_s$, I – идеал соотношений алгебры A . Порядок на образующих индуцирует порядок на множестве мономов (сперва по длине, потом лексикографически). Набор элементов $f_1, \dots, f_k \in I$ называется *базисом Гребнера идеала I* , если для любого $f \in I$ старший моном $\bar{f}$ содержит для некоторого i подмономом старший член $\bar{f}_i$ элемента f_i . Если при этом старшие члены $\bar{f}_i$ не сравнимы по включению, то базис Гребнера является *редуцированным*. Если вхождения $\bar{f}_i$ перекрываются, то это называется *зацеплением*. Известна так называемая Bergman Diamond-Lemma (на самом деле восходящая к А. И. Ширшову), что если все зацепления редуцируются к нулю, то набор $\{f_i\}$ является базисом Гребнера.

Благодаря конечности базиса Гребнера для D -модулей можно осуществлять переход в конечную характеристику, что привело к прогрессу в проблеме Якобиана [70]. Хотя в случае конечности базиса гребнера проблема равенства разрешима, проблема делителей нуля – вообще говоря, нет [29]. (В мономиальном случае однако она все же разрешима [10], [71].) В общем случае базис Гребнера бесконечен, и его вычисление является алгоритмически неразрешимой задачей. В этой связи представляет интерес исследование *корост* идеала соотношений или роста количества редуцируемых мономов степени n не содержащих редуцируемых подслов.

Поскольку степень композиции меньше суммы степеней зацепляющихся членов, в конечно определенном случае корост либо конечен, либо не менее чем логарифмичен. Это дает надежду построить рекурсивный нормальный базис, который не реализуется в конечно определенной алгебре. Естественным образом определяется корост в словах, в частности исследование кодлины периода длины n или минимального числа запретов, задающих периодическую последовательность. В работе [54] установлена нижняя логарифмическая оценка, и приведены примеры последовательностей периода n с кодлинной порядка логарифма. Точная константа была вычислена в работе П.Лаврова [25] и позднее в работе И.Богданова и Г.Челнокова [26]

несколько другим методом.

Эти примеры тесно связаны с последовательностями Штурма. В этой связи представляется интересным короста для равномерно рекуррентных слов а также морфических слов а также взаимосвязь функций роста и короста. Предполагается, что для равномерно рекуррентного слова W корост $K_W(n)$ не менее чем логарифмичен (в смысле верхнего предела), а для морфического равномерно рекуррентного слова он просто логарифмичен. Предполагается что оптимальная ситуация достигается в слове Фибоначчи. По всей видимости, для равномерно рекуррентного слова экспоненциальность роста влечет экспоненциальность короста. По всей видимости вообще говоря $\liminf \ln(K_W(n))/n$ и $\limsup \ln(K_W(n))/n$ могут быть различными величинами. В работе [21] установлено, что функция короста конечно представленной алгебры либо ограничена, либо по крайней мере логарифмична.

Такое исследование тесно связано с исследованием графов Рози. Функция короста оказывается тесно связана с перечислением биспециальных слов. Интересно также исследовать взаимосвязь функции роста и короста. Например, выяснить вопрос. Верно ли что промежуточность роста влечет промежуточность короста. Для автоматных мономиальных алгебр корост рационален. А.Кумок (в печати) осуществил оценку максимальной длины обструкции в зависимости от размера автомата для автоматной конечно определенной мономиальной алгебры.

Комбинаторика полилинейных слов

Значение понятия n -разбиваемости выходит за рамки проблематики, относящейся к проблемам бернсайдовского типа. Оно играет роль и при изучении полилинейных слов, в оценке их количества, где *полилинейным* называется слово, в которое каждая буква входит не более одного раз. В. Н. Латышев применил теорему Дилуорса для получения оценки числа не являющихся m -разбиваемыми полилинейных слов степени n , над алфавитом $\{a_1, \dots, a_n\}$. Эта оценка: $(m-1)^{2n}$ и она близка к реальности.

Из данной оценки следует выполнимость полилинейных тождеств, отвечающих неприводимому модулю, диаграмма Юнга которого содержит квадрат n^4 . Это в свою очередь, во-первых, позволило получить прозрачное доказательство теоремы Регева о том, что тензорное произведение PI-алгебр снова является PI-алгеброй, во-вторых, установить существование разреженного тождества в общем случае, а также тождества Капелли в конечно порожденном случае (тем самым, в частности, доказать теорему о нильпотентности радикала), и в-третьих, осуществить “супертрюк” А. Р. Кемера, сводящий изучение тождеств общих алгебр к изучению супер-тождеств конечно порожденных супералгебр в нулевой характеристике.

Вопросы, связанные с перечислением полилинейных слов, не являющихся n -разбиваемыми, имеют самостоятельный интерес. (Например, существует биекция между не 3-разбиваемыми словами и числами Каталана.) С одной стороны, это чисто комбинаторная задача, с другой стороны, она связана с рядом коразмерностей для алгебры общих матриц.

Исследование полилинейных слов представляется чрезвычайно важной. В. Н. Латышев (см. например [77]) поставил проблему конечной базированности множества старших полилинейных слов для T -идеала относительно взятия надслов и изотонных подстановок. Из этой проблемы вытекает проблема Шпехта для полилинейных многочленов, имеется тесная связь с проблемой слабой нетеровости групповой алгебры бесконечной финитарной симметрической группы над полем положительной характеристики (для нулевой характеристики это было установлено А. Залесским). Для решения проблемы Латышева надо уметь переводить свойства T -идеалов и их носителей на язык полилинейных слов. В работах [10, 12] была попытка осуществить программу перевода структурных свойств алгебр на язык комбинаторики слов. На язык полилинейных слов такой перевод осуществить проще, в дальнейшем можно получить информацию и о словах общего вида.

Для осуществления такого перевода необходимо исследовать случаи матриц второго и третьего порядка а также нематричных многообразий.

Есть основания для оптимизма. Ряд Гильберта относительно свободных алгебр рационален, а размерности однородных компонент в конечно порожденной относительно свободной алгебры (если число образующих достаточно велико) определяют кратности в последовательности ко-характеров [84], так что явные формулы для ряда коразмерностей существуют.

Перечисление не n -разбиваемых полилинейных слов осуществлено в работах см также

Исследования полилинейных слов связано с градуированной версией проблемы Шпехта. В работе [75] доказана локальная конечная базлируемость и локальная представимость многообразий алгебр градуированных конечной группой. При этом требовалось наличие обычного (неградуированного) тождества. По всей видимости, за счет анализа полилинейных слов это условие есть шанс снять. Кроме того, возможно обобщение результата [86].

Конечно определенные объекты

Проблема контроля над определяющими соотношениями и процедурами вывода является важной и актуальной проблемой современной алгебры и математической логики.

Непосредственным методом контроля является построение нормального базиса, но это не всегда возможно. Другим инструментом контроля служит базис Гребнера и *diamond-lemma*.

Задачи, связанные с доказательством алгоритмической неразрешимости, обычно решаются путем построения интерпретации машины Минского, при этом автоматная головка, осуществляющая вычислительный процесс, обычно только одна и локализована в определенном месте.

Более сложным и важным инструментом работы является теория малых сокращений в группах. Для решения многих проблем теории колец крайне желательно иметь аналог теории малых сокращений, т.е. понять что означает *малое зацепление*. К сожалению, мы сейчас далеки от понимания всего этого. Вопросы построения конечно определенной бесконечной ниль-полугруппы (проблема Шеврина), бесконечномерного конечно определенного ниль-кольца (проблема Латышева), или построения бесконечной конечно определенной периодической группы представляют собой способ говорить о проблеме контроля над соотношениями.

Групповая задача может быть исследована с помощью кольцевой, а для понимания кольцевой ситуации важны полугруппы.

А. Я. Белов и И. А. Иванов-Погодаев анонсировали решение проблемы Шеврина. Доказательство основано на следующих соображениях. Существуют законы примыкания плиток, которые может удовлетворить только непериодическая мозаика. Мозаику можно рассматривать как обобщение слова ибо слово есть расположение букв на отрезке прямой. Элемент полугруппы интерпретируется как путь на мозаике. Если соответствующие последовательности плиток локально определяют друг друга, то эти пути равны и один участок можно перебросить в другой. Если же нет локального продолжения, то соответствующий путь нулевой. Процедура вывода соотношений отвечает выкладыванию плиток, однако язык переброски путей является все же более слабым. Для того, чтобы он оказался достаточно сильным, необходимо чтобы существовало такое $\varepsilon > 0$ что для любого D любые две точки на расстоянии D соединялись семейством перетягиваемых друг в друга геодезических так что точки крайних геодезических находящиеся на расстоянии l от концов находились бы на расстоянии не менее чем $\varepsilon \cdot l$ друг от друга. Отметим, что такое пространство не может быть билиппшицево эквивалентно плоскости. Оно представляет собой достаточно сложный комплекс.

Алгебры и равномерно-рекуррентные слова

Использование сверхслов позволяет проводить неконструктивные комбинаторные рассуждения с помощью соображений компактности (из кусков бесконечного множества конечных слов можно составить одно бесконечное слово).

С этой точки зрения чрезвычайно важным является понятие *равномерно рекуррентного слова* W . Равномерно рекуррентные (р.р.) слова позволяют, к примеру, описать все *почти простые* мономиальные алгебры (т.е. алгебры, любой фактор которых нильпотентен): это алгебры вида A_W , где A — р.р. непериодическое сверхслово. (Через A_W обозначается мономиальная алгебра, все ненулевые слова которой являются подсловами сверхслова W .) Основой доказательства этого факта является лемма, представляющая собой аналог теоремы плотности: для любых двух подслов $u \neq v$ непериодического р.р. слова W существуют подслова $r, t \subset W$ такие, что $rut \subset W$, $rvt \not\subset W$.

Этот результат используется при доказательстве теоремы о совпадении нильрадикала мономиальной алгебры и радикала Джекобсона. Нильрадикал мономиальной алгебры оказывается равным пересечению идеалов, факторы по которым мономиально почти просты. (Мономиальная алгебра называется *мономиально почти простой*, если каждый ее фактор по идеалу, порожденному мономом, нильпотентен.) Мономиально почти простая алгебра — это алгебра вида A_W , где W — произвольное р.р. сверхслово.

С помощью сверхслов получается также описание слабо нетеровых мономиальных алгебр, короткие доказательства теоремы о независимости и теоремы о локальной нильпотентности алгебры Ли, порожденной сэндвичами, что является одним из ключевых шагов в решении проблем Бернсайдского типа для алгебр Ли. В терминах сверхслов естественно определяется порядок Уфнарковского — правые сверхслова образуют линейно упорядоченное множество.

Нормальные формы в алгебрах и теорема Ширшова о высоте.

Теоремы о высоте и о независимости а также теория представлений мономиальных алгебр оказываются тесно связанными, с одной стороны, с комбинаторикой слов и нормальных форм, а с другой — со свойствами первичных ассоциативных алгебр и комбинаторикой матричных единиц. Первым чисто комбинаторным результатом такого рода явилась

Теорема А. И. Ширшова о высоте. Пусть A — конечно-порожденная PI-алгебра. Тогда существует конечный набор элементов Y и число $H \in \mathbb{N}$ такие, что A линейно представима (т.е. порождается линейными комбинациями) множеством элементов вида

$$v_1^{k_1} v_2^{k_2} \dots v_h^{k_h}, \quad \text{где } h \leq H, v_i \in Y$$

В качестве Y можно взять набор слов степени не выше m . Такое Y называется базисом Ширшова алгебры A .

Из этой теоремы вытекает положительное решение проблемы Куроша, и других проблем бернсайдского типа для PI-колец. Ведь если Y — базис Ширшова, и все элементы из Y — алгебраичны, то алгебра A конечномерна. Тем самым теорема Ширшова дает явное указание множества элементов, алгебраичность которых ведет к конечномерности всей алгебры. Как следствие получается, что если A — PI-алгебра степени m и все слова от образующих A степени не выше m алгебраичны, то A — локально конечна а также если конечность размерности Гельфанда–Кириллова. В ряде случаев эти импликации можно обобщить. Вместо понятия *высоты* удобнее пользоваться близким понятием *существенной высоты*. Говоря неформально, любое длинное слово есть произведение периодических частей и “прокладок” ограниченной длины. Существенная высота есть число таких периодических кусков, а обычная еще учитывает “прокладки”.

В связи с теоремой о высоте возникли следующие вопросы:

1. На какие классы колец можно распространить теорему о высоте? Теорема о высоте была распространена на некоторые классы колец, близких к ассоциативным. С. В. Пчелинцев [46] доказал ее для альтернативного и $(-1, 1)$ случаев, С. П. Мищенко [40] получил аналог теоремы о высоте для алгебр Ли с разреженным тождеством. В работе автора [12] теорема о высоте была доказана для некоторого класса колец, асимптотически близких к ассоциативным, куда входят, в частности, альтернативные и йордановы PI-алгебры.
2. Над какими Y алгебра A имеет ограниченную высоту? Пусть A — PI-алгебра, и подмножество $M \subseteq A$ является ее s -базисом. Тогда, если все элементы множества M алгебраичны над K , то алгебра A конечномерна (проблема Куроша). Ограниченность существенной высоты над Y влечет “положительное решение проблемы Куроша над Y ”. Обратное утверждение значительно менее тривиально [10].
3. Как оценить высоту? Первоначальное доказательство А. И. Ширшова хотя и было чисто комбинаторным (оно основывалось на технике элиминации, развитой им в алгебрах Ли, в частности, в доказательстве теоремы о свободе), однако оно не давало разумных оценок на высоту. Позднее А. Т. Колотов [33] получил оценку на $ht(A) \leq s^{s^m}$ ($m = \deg(A)$, s — число образующих). Позднее Е. И. Зельманов [20] поставил вопрос о наличии экспоненциальной оценки, которая была получена автором [13]. В дальнейшем была получена субэкспоненциальная оценка.

ТЕОРЕМА 9 ([74]). *Высота множества не n -разбиваемых слов над l -буквенным алфавитом относительно множества слов длины меньше n не превышает $\Phi(n, l)$, где*

$$\Phi(n, l) = E_1 l \cdot n^{E_2 + 9(2e^2 + 1) \ln n},$$

где $E_1 = 12^{3(2e^2 + 1) \ln 12 + 3} + 1$, $E_2 = 9 + \ln 2 + 6(2e^2 + 1) \ln 12$.

Из данной теоремы путем некоторого огрубления и упрощения оценки получается, что при фиксированном l и $n \rightarrow \infty$

$$\Phi(n, l) < n^{9(1+2e^2)(1+o(1)) \ln n},$$

а при фиксированном n и $l \rightarrow \infty$

$$\Phi(n, l) < C(n)l.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Высота l -порождённой PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n не превышает $\Phi(n, l)$.*

Как следствие получаются субэкспоненциальные оценки на индекс нильпотентности l -порожденных ниль-алгебр степени n для произвольной характеристики.

В этой связи возникает естественный

Вопрос. *Можно ли получить полиномиальную оценку для высоты?*

4. Как устроен вектор степеней $(k_1, \dots, k_h)$? Прежде всего: какие множества компонент этого вектора являются существенными, т.е. какие наборы k_i могут быть одновременно неограниченными? Какова существенная высота?

5. Вопрос о более тонком устройстве множества векторов степеней. Верно ли что оно обладает теми или иными свойствами регулярности? Хотя в представимом случае размерность Гельфанда-Кириллова и существенная высота ведут себя хорошо. Тем не менее даже тогда множество векторов степеней может быть устроено плохо — а именно, может быть дополнением к множеству решений системы экспоненциально-полиномиальных дифферантовых уравнений. Поэтому существует пример представимой алгебры с трансцендентным рядом Гильберта. Однако для относительно свободной алгебры ряд Гильберта рационален.
6. Какие наборы слов можно взять в качестве $\{v_i\}$? Описание дает следующая теорема:

ТЕОРЕМА 10 (А. Я. Белов). *Множество слов Y является базисом Ширшова алгебры A тогда и только тогда, когда для любого слова u длины не выше $m = \text{Pid}(A)$ — сложности алгебры A — множество Y содержит слово, циклически сопряженное к некоторой степени слова u .*

Отметим, что число n является точной оценкой.

Гипотеза Шестакова была решена В. А. Уфнаровским [50] и Г. П. Чекану [52]. В дальнейшем было показано [12], что в качестве $\{v_i\}$ можно взять множество слов из гипотезы Шестакова. Этот результат был также анонсирован Г. П. Чекану [53]. Затем другое доказательство этого факта было получено В. Дренским.

Первоначальные доказательства теоремы о независимости были достаточно сложными. Применение методов символической динамики, связанных с бесконечными словами или *сверх-словами*, позволило сделать их прозрачными. Техника сверхслов оказалась довольно близкой по духу структурной теории. Ее роль не исчерпывается доказательством утверждений типа теоремы о независимости. С помощью сверхслов доказывалась теорема о высоте, нильпотентность алгебры Ли, порожденной сэндвичами [51], совпадение нильрадикала и радикала Джекобсона в мономиальных алгебрах, получается описание базисов алгебр с экстремальной функцией роста $V_A(n) = \frac{n(n+3)}{2}$ а также слабонетеровых, полупростых и полупервичных мономиальных алгебр [10] и получить ряд других комбинаторных результатов, относящихся к теории полугрупп и колец.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант № 17-11-01377.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.И. Адян. Проблема Бернсайда и тождества в группах // М., Наука, 1975.
2. Адян С. И., Разборов А. А. Периодические группы и алгебры Ли. // Успехи мат. наук, 1987, т. 42, по 2, стр. 2–68.
3. С. В. Алешин, Свободная группа конечных автоматов, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1983, № 4, 12–14
4. С.В. Алешин, О суперпозициях автоматных отображений // Кибернетика, Киев, 1975, [1, 29–34.
5. С.В. Алешин, Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. Заметки 11 (1972), 319–328.
6. В. И. Арнольд, Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике// Успехи Мат. Наук, 1963, 18:6(114), стр. 91Ц192

7. Ю.А. Бахтурин, Тождества в алгебрах Ли // Москва, Наука, 1985, 448 стр.
8. Бабенко И. К. *Проблемы роста и рациональности в алгебре и топологии.* // Успехи мат. наук, 1986, vol 41, no 2, pages 96–142.
9. А.Я.Белов, Классификация слабо нетеровых мономиальных алгеб // Фунд. и прикл. мат. – 1995.–1.,т1,|4, –С. 1085–1089.
10. А.Я.Белов, В.В.Борисенко, В.Н.Латышев, Мономиальные алгебры // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35–214.
11. Белов А. Я. *О рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр.* // Успехи мат. наук, 1997, т. 52, no 2, стр. 153–154.
12. Белов А. Я. *О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n .* // Мат. сб., 1988, т. 135, No 31, стр. 373–384.
13. Белов А. Я. *Теорема о высоте для йордановых и лиевых PI-алгебр.* // Сиб. школа по многообр. алгебраическим системам. Тезисы. — Барнаул, 1988, стр. 12–13.
14. А.Белов, Г.Кондаков, Обратные задачи символической динамики // Фундаментальная и прикладная математика, Т1, |1, 1995
15. Голод Е. С., Шафаревич И. Р. О башне полей классов. // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, no 2, стр. 261–272.
16. Голод Е. С. О нильалгебрах и финитно-аппроксимируемых p -группах. // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, no 2, стр. 273–276.
17. Григорчук Р. И. К проблеме Милнора о групповом росте. // Докл. АН СССР, 1983, т. 271, | 1, стр. 53–54.
18. Григорчук Р. И. Степени роста конечно порожденных групп и теория инвариантных средних. // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1984, т. 48, no 5, стр. 939–985.
19. Григорчук Р. И. О рядах Гильберта-Пуанкаре градуированных алгебр, ассоциированных с группами. // Мат. сб., 1989, т. 180, no 2, стр. 207–225.
20. *Днестровская тетрадь: оперативно-информац. сборник — 4-е изд.* — Новосибирск: изд. ин-та матем. СО АН СССР, 1993, 73 стр.
21. A. Kanel-Belov, I. Melnikov, I Mitrofanov, *On cogrowth function of algebras and its logarithmical gap,* // Comptes Rendus - Série Mathématique., 2021. (to appear)
22. М. И. Харитонов, *Оценки структуры кусочной периодичности в теореме Ширшова о высоте,* // Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика., 2013, № 1, 10–16 arXiv:1108.6295
23. М. И. Харитонов, *Двусторонние оценки существенной высоты в теореме Ширшова о высоте,* // Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика., 2, 2012, с. 24–28.
24. М. И. Харитонов, *Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте,* // диссертация, 2015
25. Petr Lavrov, *Number of restrictions required for periodic word in the finite alphabet.* // arXiv:1209.0220

26. Bogdanov, Ilya I.; Chelnokov, Grigory R. *The maximal length of the period of a periodic word defined by restrictions.*// arXiv:1305.0460
27. Mikhail Kharitonov, *Estimates on the number of partially ordered sets.*// arXiv:1307.1886
28. Каргаполов М.И. Мерзляков Ю.И. Основы теории групп, //(3е изд., Наука, 1982) 288стр.
29. И. А. Иванов-Погодаев. *Алгебра с конечным базисом Грёбнера и неразрешимой проблемой делителей нуля.* // Фундамент. и прикл. матем., 12:8 (2006), 79–96
30. А. Б. Каток, А. М. Степин, Аппроксимации в эргодической теории // Успехи Мат.Наук, 1967, 22:5(137), 81Ц106
31. А.Т. Колотов, Аперiodические последовательности и функции роста в алгебрах // Алгебра и логика, 20 (1981), 138–154, 250.
32. А.Т. Колотов, Алгебры и полугруппы с периодической функцией роста // Алгебра и логика, 19 (1980), 659–668, 745.
33. А. Г. Колотов *О верхней оценке высоты конечно-порожденной алгебры с тождественными соотношениями* // Сиб. мат. ж., 1982, т. 23, N 1, стр. 187–189.
34. Кострикин А. И. Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1986, 232 стр.
35. Курош А. Г. *Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах.*// Изв. АН СССР, сер. мат., 1941, т. 5, стр. 233–240.
36. В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, Введение в теорию автоматов — Москва, “Наука”, 1985. 320 стр.
37. В.Н. Латышев, К теореме Реева о тождествах тензорного произведения PI -алгебр // Успехи матем. наук, 1972, т. 27, | 4, стр. 213–214
38. Р.Линдон, П.Шупп, Комбинаторная теория групп — М., Мир, 1980.
39. Михалев А. А. Техника композиции А. И. Ширшова в супералгебрах Ли (некоммутативные базисы Гребнера).// Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1994, т. 18,
40. Мищенко С. П., Вариант теоремы о высоте для алгебр Ли.// Мат. заметки, 1990, ;7, по 4, стр. 83–89.
41. Ivan Mitrofanov *On uniform recurrence of HD0l systems*, arXiv:1111.1999 20 pages.
42. Ivan Mitrofanov, *A proof for the decidability of HD0L ultimate periodicity.* arXiv:1110.4780 33 pages.
43. Митрофанов И. В., *Алгоритмические проблемы, связанные с морфическими последовательностями*, диссертация 2017
44. Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. сер. Современ. алгебра. М.: Наука, 1989, 447 стр.
45. В.И.Оселедец, О спектре эргодических автоморфизмов // ДАН СССР, 1966, 168, 1009Ц1011.
46. Пчелинцев С. В. *Теорема о высоте для альтернативных алгебр.*// Мат. сб., 1984, т. 124, No 4, стр. 557–567.

47. Саломеа А. Жемчужины формальных языков. — М.: Мир, 1986, 159 стр.
48. Я.Г. Синай, Введение в эргодическую теорию // М.: ФАЗИС, 1996. 144 с.
49. Трофимов В. И. *Об одном признаке экспоненциального роста градуированных алгебр.* В кн.: Исследование алгебраических систем по свойствам их подсистем. — Свердловск, 1980, стр. 152–160.
50. Уфнаровский В. А. *Теорема о независимости и ее следствия.* Мат. сб., 1985, т. 128, по 1, стр. 124–132.
51. Уфнаровский В.А. Комбинат. и асимпт. методы в алгебре. // Итоги науки и тех. Серю Совр. Пробл. Мат. Фунд. направл. М. ВИНТИ. 1990- 57, стр 5–177. (РЖМат, 1990).
52. Чекану Г. П. *О локальной конечности алгебр.* Мат. исслед. (Кишинев), 1988, N 105, стр. 153–171.
53. Чекану Г. П. *К теореме Ширшова о высоте.* XIX Всес. алгебр. конф.: Тезисы сообщ. I. — Львов, 1987, стр. 306.
54. Г. Р. Челноков *О числе запретов, задающих периодическую последовательность* Моделирование и анализ информационных систем, Т.13, N3 (2007) 66–70
55. Ширшов А. И. О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах.// Мат. сб., 1957, т. 41, по 3, 381–394.
56. Ширшов А. И. О кольцах с тождественными соотношениями.// Мат. сб., 1957, т. 43, по 2, стр. 277–283.
57. Ширшов А. И. О свободных кольцах Ли.// Мат. сб., 1958, т. 45, по 2, стр. 113–122.
58. Ширшов А. И. О базах свободной алгебры Ли. //Алгебра и логика, 1962, т. 1, по 1, стр. 14–19.
59. A.Aberkane, Words whose complexity satisfies $\lim p(n)/n = 1$ // Theor. Comp. Sci., 307, (2003), 31-46.
60. P.Ambroz, L. Hákov ; E. Pelantová, Properties of 3iet preserving morphisms and their matrices // ProceedingsWORDS 2007, Eds. P. Arnoux, N. Bedaride, J. Cassaigne, (2007), 18–24.
61. P. Arnoux, *Un exemple de semi-conjugaison entre un échange d'intervalles et une translation sur le tore* // Bull. Soc. Math. France 116 (1988), 489–500.
62. P. Arnoux and G. Rauzy [1991], Representation geometrique des suites the complexite $2n + 1$ // Bull. Soc. Math. France 119, 199-215.
63. Arnoux, Pierre; Mauduit, Christian; Shiokawa, Iekata; Tamura, Jun-ichi. *Complexity of sequences defined by billiard in the cube.*// Bull. Soc. Math. France 122 (1994), no. 1, 1–12.
64. P.Balázi, Infinite Words Coding Three-Interval Exchange // diploma work CTU (2003).
65. P.Balázi, Substitution properties of ternary words coding 3- interval exchange, // Proceedings WORDS 2003, Eds. T. Harju and J. Karhumäki, (2003), 119-124.
66. P. Balázi, Z. Masáková, E. Pelantová, Characterization of substitution invariant 3iet words, submitted to Integers // arXiv:0709.2638, (2007).

67. A.Belov, T. Gateva-Ivanova, Radicals of monomial algebras // Proceedings of Taiwan-Moscow Algebra Workshop, – С. 159-169, 1994.
68. A. Belov. Some estimations for nilpotence of nil-algebras over a field of an arbitrary characteristic and height theorem // *Communications in algebra*, 20 (10):2919–2922, 1992.
69. Belov, A., Michailov R. *Free subalgebras of Lie algebras close to nilpotent.* // Groups, Geometry, and Dynamics, No 1, 2010, pp. 15–29.
70. Belov, A.; Kontsevich M.L. *Jacobian and Dixmier Conjectures are stably equivalent.* // Moscow Mathematical Journal. Vol. 7 (2007) (A special volume dedicated to the 60-th anniversary of A.G.Khovanskii), No 2, pp 209–218.
71. А. Я. Белов. *Линейные рекуррентные уравнения на дереве.* // Матем. заметки, 78:5 (2005), 643–651
72. Kanel–Belov A., M.Kharitonov. *Subexponential estimates in the height theorem and estimates on numbers of periodic parts of small periods.* //Fundam. Prikl. Mat. (Fundamental and Applied Mathematics), 2011/2012, Vol. 17, No 5, p. 21–54 ;
73. Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi *Full exposition of Specht’s problem.*// Serdica Math. J. 38 (2012), 313–370.
74. А. Я. Белов, М. И. Харитонов *Субэкспоненциальная оценка в теореме Ширшова о высоте.* //Матем. Сборник. 2012, vol. 203, N 4, p. 81–102.
75. Kanel–Belov A., Eli Aljadeff. *Representability and Specht problem for G-graded algebras.*// Adv. in Mat., vol. 225, No 5, 2010, pp. 2391–2428.
76. Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi *Structure of Zariski-closed algebras.*// Trans. Amer. Math.Soc., Vol.362, No 9, Pages 4695–4734.
77. В. Н. Латышев. *Комбинаторные порождающие полилинейных полиномиальных тождеств.*// Фундамент. и прикл. матем., 12:2 (2006), стр. 101–110
78. Durand, Fabien. *Decidability of uniform recurrence of morphic sequences.* arXiv:1204.5393
79. Durand, Fabien. *Decidability of the HD0L ultimate periodicity problem.* arXiv:1111.3268
80. Fabien Durand, Samuel Petite, *Unimodular pisot substitutions and domain exchanges.* arXiv: 1408.2110 [math.DS]
81. А.Белов, И.Митрофанов. Периодичность схем Рози и подстановочные системы // arXiv: 1107.0185
82. A.Ya.Belov, G.V.Kondakov, I.Mitrofanov. *Inverse problems of symbolic dynamics.*// Banach Center Publ. 94 (2011), 43–60.
83. Belov A. J., Ivanov I.A. *Construction of semigroups with some exotic properties.* //Acta Appl. Math. 85 (2005), no. 1-3, 49–56.
84. Berele, Allan. *Applications of Belov’s theorem to the cocharacter sequence of p.i. algebras.* // J. Algebra 298 (2006), no. 1, 208–214.
85. Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi *Full quivers of representations of algebras.* //Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), 5525–5569.

86. Kanel–Belov A., Eli Aljadeff. *Hilbert series of PI-relative free g-graded algebras are rational functions.* // Bull. London Math. Soc., (2012), 44(3): 520–532, doi:10.1112/blms/bdr116
87. Kanel–Belov A., Malev S., Rowen Louis H. *The images of non-commutative polynomials evaluated on 2×2 matrices.* // Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), 465–478 (posted in arxiv.:1005.0191v2).
88. Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi *Application of full quivers of representations of algebras, to polynomial identities.* // Comm. in Algebra, vol. 39: 4536–4551, 2011.
89. Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi *Normal bases of PI-algebras.* // Adv. in Appl. Math. 37 (2006), no. 3, 378–389.
90. Kanel–Belov A., Rowen Louis H. *Perspectives on Shirshov’s Height Theorem.* // in book: selected papers of A.I.Shirshov, Birkhäuser Verlag AG (2009), 3–20.
91. Kanel–Belov, Alexei; Rowen, Louis Halle *Combinatorial aspects in polynomial identities.* // Research Notes in Mathematics, 9. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2005. xxii+378
92. Belov, A. *Local finite basis property and local representability for varieties of associative rings.* // Doklady Akademii Nauk (Reports (CR) of Acad. of Sci. of Russia). 2010, v.432, No 6, pp. 727–731, (Doklady Mathematics), Engl. transl.: 2010, Vol. 81, No. 3, pp. 458–461.
93. Belov, A. *Local finite basis property and local representability of varieties of associative rings.* // Izvestia of Russian Academia of science, No 1, 2010, pp. 3–134. English transl.: Izvestiya: Mathematics, vol. 74, No 1, pp. 1–126.
94. A.L. Chernyat’ev, *Balanced Words and Dynamical Systems* // Fundamental and Applied Mathematics, 2007, vol. 13, No 5, pp. 213–224
95. A.L. Chernyat’ev, *Words with Minimal Growth Function* // Vestnik Mosk. Gos. Univ., 2008.
96. A.Ya. Belov and A.L. Chernyat’ev, *Describing Sturmian Words over an n-letter Alphabet* // Math. Met. Appl. IV, MGSU, 1999, pp 122–128.
97. Belov A. J. *About Non-Specht varieties.* // Fund. i prikl. matem., 1999, vol. 5, N 1, pp. 47–66.
98. Belov A. J. *Counterexamples to the Specht problem.* // Mat. sb., 1999, vol. 191, N 3, p.13–24. (Engl. transl. Sbornik: Mathematics 191:3, 329–340.)
99. A.Ya. Kanel-Belov, A.L. Chernyat’ev. *Describing the set of words generated by interval exchange transformation.* // Comm. in Algebra, Vol. 38, No 7, July 2010, pages 2588–2605.
100. G.M. Bergman, *A note on growth functions of algebras and semigroups* // Research Note, University of California, Berkeley, 1978.
101. V. Berthé, S. Ferenczi, L.Zamboni: *Interactions between dynamics, arithmetics and combinatorics: the good, the bad, and the ugly.* // AMS Contemporary Math. 385 (2005), p. 333-364.
102. J. Berstel, P. Séébold, *Sturmian words*, in: M. Lothaire (Ed.) // Algebraic Combinatorics on Words, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 (Chap. 2).
103. J.Berstel, *Recent results on Sturmian words* // Developments in language theory II, 13-24, World Scientific, 1996.

104. J.Cassaigne. *Special factors with linear subword complexity*. // Developments in language theory, II (Magdeburg, 1995), 25-34, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.
105. Cassaigne, J. (F-CNRS-IML); Hubert, P. [Hubert, Pascal] (F-CNRS-IML); Troubetzkoy, S. (F-CNRS-IML) *Complexity and growth for polygonal billiards*. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 52 (2002), no. 3, 835–847.
106. X. Droubay, G. Pirillo, Palindromes and sturmian word // Theoret. Comput. Sci., 223:73-85, 1999.
107. X.Droubay, J.Justin, G.Pirillo, Episturmian words and some construction of de Luca and Rauzy // Theoret. Comp. Sci.,(2001) 539–553.
108. Drensky V. *Codimensions of T -ideals and Hilbert series of relatively free algebras*.// J. Algebra, 1984, vol 91, no 1, pages 1–17.
109. Drensky V. *Free algebras and PI-algebras*. Springer, 2000, Pages 271.
110. H. Furstenberg. *Poincaré recurrence and number theory*.// Bull. Amer. Math. Soc., 5:211-234, 1981.
111. R. L. Graham, Covering the Positive Integers by disjoint sets of the form $\{[n\alpha + \beta] : n = 1, 2, \dots\}$ // J. Combin. Theory Ser A15 (1973) 354-358.
112. P. Hubert, Well balanced sequences // Theoret. Comput. Sci. 242 (2000) 91–108.
113. S. Ferenczi, C. Holton, L. Zamboni, The structure of three-interval exchange transformations II: a combinatorial description of the trajectories// J. Anal. Math. 89 (2003), p. 239-276.
114. Ferenczi, L. Zamboni, A new induction for symmetric k -interval exchange transformations and distances theorem, submitted, Available at: <http://iml.univ-mrs.fr/~ferenczi/fz1.pdf>
115. Ferenczi, L. Zamboni, Examples of 4-interval exchange transformations, preprint (2006), Available at: <http://iml.univ-mrs.fr/~ferenczi/fz2.pdf>
116. Ferenczi, L. Zamboni, Languages of k -interval exchange transformations, submitted, Available at: <http://iml.univ-mrs.fr/~ferenczi/fz3.pdf>
117. Giambruno A., Zaicev M. *Exponential Codimensional Growth of PI-algebras: an exact estimate*.// Adv.in Math., 1999, vol 142, pages 221–243.
118. Giambruno A., Zaicev M. *Minimal varieties of exponential growth*.// Adv.in Math., 142, 1999, vol 142, pages 221–243.
119. Gromov M. *Groups of polynomial growth and extending maps*. // Publ. Math. inst. hautes etud. sci., 1981, vol. 53, pages 53–73.
120. Kemer A. R. *Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p* .// Intern. J. of Algebra and Computations., 1995, vol 5, no 2, pages 189–197.
121. Krause, G.; Lenagan, T.H.: Growth of algebra and Gelfand-Kirillov dimension // Research Notes in Math., Pitman, London, 1985.
122. A. de Luca, Sturmian words: structure, combinatorics and their arithmetics // Theoret. Comp. Sci., 183, (1997), 45-82.

123. A. de Luca and S. Varricchio. Combinatorial properties of uniformly recurrent words and an application to semigroups. // *Inter. J. Algebra Comput.*, 1(2):227–246, 1991.MR 92h:20084.
124. *Application of Adic representations in the investigations of metric, spectral and topological properties of dynamical systems*. Sanct-Petersburg, 1995, 176 pages.
125. M. Lothaire, *Combinatorics on Words* // *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983, Vol. 17.
126. M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*. A collective work by Jean Berstel, Dominique Perrin, Patrice Seebold, Julien Cassaigne, Aldo De Luca, Steffano Varricchio, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, Jean-Yves Thibon, Veronique Bruyere, Christiane Frougny, Filippo Mignosi, Antonio Restivo, Christophe Reutenauer, Dominique Foata, Guo-Niu Han, Jacques Desarmenien, Volker Diekert, Tero Harju, Juhani Karhumaki and Wojciech Plandowski. With a preface by Berstel and Perrin. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 90. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, 504 pp.
127. Mauduit, C. *Substitutions, arithmetic and finite automata: an introduction*. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, 35-52, Lecture Notes in Math., 1794, Springer, Berlin, 2002, 37B10 (11B85) PDF Clipboard Series Chapter
128. Milnor J. *Problem 5603*. American Mathematical monthly, 1968, vol. 75, No 6, pages 675–686.
129. M. Morse and G. A. Hedlund [1940], Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories, // Amer. J. Math. 62, 1-42.
130. G. Rauzy, *Nombres algebriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France, 110 (1982), p. 147–178.
131. G. Rauzy, Mots infinis en arithmetique, in: Automata on Infinite Words // Ecole de Printemps d'Informatique Theorique, Le Mont Dore, May 1984, ed. M. Nivat and D. Perrin, Lecture Notes in Computer Science, vol. 192, Springer-Verlag, Berlin etc., pp. 165-171, 1985
132. G. Rauzy, Suites á termes dans un alphabet fini // In *Sémin. Théorie des Nombres*, p. 25-01-25-16, 1982-1983, Exposé No 25.
133. G. Rauzy, Échanges d'intervalles et transformations induites, //(in French), Acta Arith. 34 (1979), p. 315-328.
134. G. Rozenberg and A. Salomaa // *The Mathematical Theory of L Systems*, Academic Press, New York etc., 1980
135. G.Rote, Sequences with subword complexity $2n$ // J. Number Theory 46 (1994) 196–213.
136. R.Tijdeman, Decomposition of the integers as a direct sum of two subsets // in: Number Theory, ed. by S. David, Number Theory Seminar Paris 1992-93, Cambridge University Press, (1995), 261-276
137. R.Tijdeman, Fraenkel's conjecture for six sequences // Discrete Mathematics, Volume 222, Issue 1-3, 223 - 234, 2000
138. L. Vuillon, Balanced words // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 10 (2003), no. 5, 787-805
139. L.Vuillon, A characterization of Sturmian word by return words // European Journal of Combinatorics (2001) 22, 263-275.

140. Vershik, A. M. *The adic realizations of the ergodic actions with the homeomorphisms of the Markov compact and the ordered Bratteli diagrams.* //Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 223 (1995), Teor. Predstav. Din. Sistemy, Kombin. i Algoritm. Metody. I, 120–126, 338; translation in J. Math. Sci. (New York) 87 (1997), no. 6, 4054–4058.
141. Vershik, A. M.; Livshits, A. N. *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics. Representation theory and dynamical systems,* //185–204, Adv. Soviet Math., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
142. Belov A. J. *Rationality of Hilbert series with respect to free algebras.*, //Uspehi mat. nauk, 1997, vol. 55, N 2, p. 153–154. translation in Russian Math. Surveys 52, 1997, N 2, 394–395
143. H.Weyl, *Über der gleichverteilung von zahlen mod 1,* // Math. Ann., v. 77, 313–352, 1916.

REFERENCES

1. Adian S.I. *The Burnside problem and identities in groups,* (in Russian) Izdat. Nauka', Moscow, 1975. 335 pp.
2. Adian,S.I., Razborov A.A., *Periodic groups and Lie algebras,* Russian Mathematical Surveys (1987),42(2):1 Available at: <http://dx.doi.org/10.1070/RM1987v042n02ABEH001307>
3. Aleshin S.V., *Free group of finite automata,* Vestn. Moscow un. Ser. 1. Mat., Mekh., 1983, no. 4, pp12–14
4. Aleshin S.V., *On superpositions of automata mappings,* Cybernetics, Kiev, 1975, | 1, 29–34.
5. Aleshin S.V., *Finite automata and Burnside's problem for periodic groups,* Math. Notes, 11:3 (1972), 199–203
6. Arnol'd,V. I. *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics,* Russian Mathematical Surveys(1963),18(6):85 Available at: <http://dx.doi.org/10.1070/RM1963v018n06ABEH001143>
7. Yu. A. Bahturin, *Identities in the universal enveloping algebra for a Lie superalgebra,* Math. USSR-Sb., 55:2 (1986), 383–396
8. Babenko, I K. *Problems of growth and rationality in algebra and topology.* Russian Mathematical Surveys (1986), 41(2):117 Available at: <http://dx.doi.org/10.1070/RM1986v041n02ABEH003243>
9. Belov A.Ya., *Classification of Weakly Noetherian Monomial algebras* Fund. and app. mat. - 1995 .– 1., vol,1, | 4, –p. 1085–1089.
10. Belov, A.Ya., Borisenko, V.V. & Latyshev, V.N. *Monomial algebras.* J Math Sci 87, 3463–3575 (1997). Available at: <https://doi.org/10.1007/BF02355446>
11. Belov, A.Ya. *Rationality of Hilbert series with respect to free algebras,* Uspekhi Mat. Nauk 52 (1997), no. 2(314), 153–154 (Russian); English transl., Russian Math. Surveys 52 (1997), no. 2, 394–395. MR 1480146, <https://doi.org/10.1070/RM1997v052n02ABEH001786>
12. Belov, A.Ya. *On a Shirshov basis of relatively free algebras of complexity n,* Math. USSR-Sb., 63:2 (1989), 363–374

13. Belov, A.Ya. *Height theorem for Jordan and Lie PI -algebras*. (Russian) Sib. school for versatile algebraic systems. Abstracts. — Barnaul, 1988, pp. 12-13.
14. Belov, A. Ya., Kondakov, G. V.. *Inverse problems of symbolic dynamics*. (Russian) Fundamental and Applied Mathematics 1 (1995) : 71 – 79.
15. Golod E. S., Shafarevich I. R. *About the tower of class fields*. (Russian) Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. mat., 964, v. 28, no. 2, pp. 261-272.
16. Golod, E. S. *On nil-algebras and finitely approximable p-groups*. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 28 1964 273–276.
17. Grigorchuk R. I. *On the Milnor problem of group growth*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 271:1 (1983), 30–33
18. Grigorchuk, R. I. *Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means.*, Mathematics of the USSR-Izvestiya(1985),25(2):259
19. Grigorchuk, R. I. *On the Hilbert–Poincaré series of graded algebras associated with groups*, Math. USSR-Sb., 66:1 (1990), 211–229
20. *Dniester notebook: operational information. collection — 4th ed.* — Novosibirsk: ed. in - that mat. SO AN SSSR, 1993, 73 pages
21. A. Kanel-Belov, I. Melnikov, I Mitrofanov, *On cogrowth function of algebras and its logarithmical gap*, Comptes Rendus - Série Mathématique., 2021. (to appear)
22. Kharitonov, M.I. Piecewise periodicity structure estimates in Shirshov’s height theorem. Moscow Univ. Math. Bull. 68, 26–31 (2013). <https://doi.org/10.3103/S0027132213010051>
23. Kharitonov, M.I. Two-sided estimates for essential height in Shirshov’s Height Theorem. Moscow Univ. Math. Bull. 67, 64–68 (2012). <https://doi.org/10.3103/S0027132212020052>
24. Kharitonov, M.I., *Estimates in shirshov height theorem*, Candidate Sceince Thesis, 2015
25. Petr Lavrov, *Number of restrictions required for periodic word in the finite alphabet*. arXiv:1209.0220
26. Bogdanov, Ilya I.; Chelnokov, Grigory R. *The maximal length of the period of a periodic word defined by restrictions*. arXiv:1305.0460
27. Mikhail Kharitonov, *Estimates on the number of partially ordered sets*. arXiv:1307.1886
28. Kargapolov M.I. Yu.I. Merzlyakov *Foundations of group theory*, (russian) (3rd ed., Science, 1982) 288p.
29. Ivanov-Pogodaev, I.A. *Finite Gröbner basis algebra with unsolvable problem of zero divisors.*, J Math Sci 152, 191–202 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10958-008-9062-y>
30. Katok A. B., Stepin A.M., *Approximations in ergodic theory* Russian Mathematical Surveys (1967), 22(5):77
31. А.Т. Колотов, Апериодические последовательности и функции роста в алгебрах // Алгебра и логика, 20 (1981), 138–154, 250.
32. Kolotov A.T., *Algebras and semigroups with periodic growth function*, Algebra and Logic, 19 (1980), 659–668, 745.

33. Kolotov A.T. *On an upper bound for the height in finitely generated algebras with identities*. Sibirsk. mat. Zh., 1982, vol. 23, No. 1, p. 187–189.
34. Kostrikin A. I. *Around Burnside*. — М.: Nauka, 1986, 232 pp. (russian)
35. Kurosh A. G., *On Problems in ring theory which are related to the Burnside problem for periodic groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 5, 233–241 (1941).
36. Kudryavtse V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S., *Introduction to the Theory of Automata*, Moscow, Nauka, 1985. 320 pp.
37. Latyshev V. N., *On Regev's theorem on identities in a tensor product of PI-algebras*, Usp. Mat. Nauk, 27, 213–214 (1972).
38. R. Lindon and P. Schupp, *Combinatorial group theory*, Moscow, Mir, 1980.
39. Mikhalev A. A. A. I. *Shirshov's Composition Technique in Superalgebras Lie (non-commutative Gröbner bases)*. Tr. seminar tem. I. G. Petrovsky, 1994, vol. 18,
40. Mishchenko, S.P. *A variant of the height theorem for Lie algebras*. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR 47, 368–372 (1990). <https://doi.org/10.1007/BF01163820>
41. Ivan Mitrofanov *On uniform recurrence of HDOL systems*, arXiv:1111.1999 20 pages.
42. Ivan Mitrofanov, *A proof for the decidability of HDOL ultimate periodicity*. arXiv:1110.4780 33 pages.
43. Mitrofanov I. V., *Algorithmic problems associated with morphic sequences*, Candidate Science Thesis 2017
44. Olshansky A. Yu. *Geometry of defining relations in groups*. ser. Modern algebra. Moscow: Nauka, 1989, 447 pp.
45. V. I. Oseledec, *The spectrum of ergodic automorphisms*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 168 (1966), 1009–1011 (Russian) Math-Net.Ru MathSciNet ; English translation: Soviet Math. Dokl., 7 (1966), 776–779
46. Pchelintsev S. V., *A theorem on height for alternative algebras*, Math. USSR-Sb., 52:2 (1985), 541–551
47. A. Salomaa, *Jewels of Formal Language Theory*, Computer Science Press, Rockville (1981).
48. Sinai Ya.G., *Introduction to ergodic theory*, Moscow: FASIS, 1996. 144 p.
49. Trofimov V. I. *On one criterion of the exponential growth of graded algebras*. In the book: Investigation of algebraic systems by the properties of their subsystems. — Sverdlovsk, 1980, p. 152–160.
50. Ufnarovskii V. A., *An independence theorem and its consequences*, Math. USSR-Sb., 56:1 (1987), 121–129
51. Ufnarovskiy V.A. *Combine. and asymp. methods in algebra.*, Summary science and tech. Seryu Sovr. Probl. Mat. Fund. direction M. VINITI. 1990-57, pp. 5-177. (RZhMat, 1990).
52. Chekanu G. P. *On the local finiteness of algebras*. Mat. issled. (Kishinev), 1988, N 105, pp. 153–171.

53. Chekanu G. P. *On Shirshov's height theorem. XIX All algebras. Conf. : Abstracts I.* — Lviv, 1987, p. 306.
54. Chelnokov G. R. , *On the number of restrictions defining a periodic sequence.* Model and analysis of inform. systems, 14:2 (2007), 12–16, in Russian
55. Shirshov A. I., *On some nonassociative nil-rings and algebraic algebras*, Mat. Sb., 41, No. 3, 381–394 (1957).
56. Shirshov A. I., *On rings with identity relations*, Mat. Sb., 43, No. 2, 277–283 (1957).
57. Shirshov A. I., *O svobodnykh koltsakh Li*, Matem. sb., 45:2 (1958), 113–122
58. Shirshov A. I., *On bases of free Lie algebras*, Algebra Logika, 1:1 (1962), 14–19
59. A.Aberkane, *Words whose complexity satisfies $\lim p(n)/n = 1$* , Theor. Comp. Sci., 307, (2003), 31–46.
60. P.Ambroz, L. Hákov, E. Pelantová, *Properties of 3iet preserving morphisms and their matrices*, Proceedings WORDS 2007, Eds. P. Arnoux, N. Bedaride, J. Cassaigne, (2007), 18–24.
61. P. Arnoux, *Un exemple de semi-conjugaison entre un échange d'intervalles et une translation sur le tore*, Bull. Soc. Math. France 116 (1988), 489–500.
62. P. Arnoux and G. Rauzy [1991], *Representation geometrique des suites the complexite $2n + 1$* , Bull. Soc. Math. France 119, 199–215.
63. Arnoux, Pierre; Mauduit, Christian; Shiokawa, Iekata; Tamura, Jun-ichi. *Complexity of sequences defined by billiard in the cube.* Bull. Soc. Math. France 122 (1994), no. 1, 1–12.
64. P.Balázi, *Infinte Words Coding Three-Interval Exchange*, diploma work CTU (2003).
65. P.Balázi, *Substitution properties of ternary words coding 3- interval exchange*, Proceedings WORDS 2003, Eds. T. Harju and J. Karhumäki, (2003), 119–124.
66. P. Balázi, Z. Masáková, E. Pelantová, *Characterization of substitution invariant 3iet words*, submitted to Integers // arXiv:0709.2638, (2007).
67. A.Belov, T. Gateva-Ivanova, *Radicals of monomial algebras*, Proceedings of Taiwan-Moscow Algebra Workshop, – C. 159–169, 1994.
68. A. Belov. *Some estimations for nilpotence of nil-algebras over a field of an arbitrary characteristic and height theorem*, Communications in algebra, 20 (10):2919–2922, 1992.
69. Belov, A., Michailov R. *Free subalgebras of Lie algebras close to nilpotent.* Groups, Geometry, and Dynamics, No 1, 2010, pp. 15–29.
70. Belov, A.; Kontsevich M.L. *Jacobian and Dixmier Conjectures are stably equivalent.* Moscow Mathematical Journal. Vol. 7 (2007) (A special volume dedicated to the 60-th anniversary of A.G.Khovanskii), No 2, pp 209–218.
71. Belov, A.Y. *Linear Recurrence Equations on a Tree.* Math Notes 78, 603–609 (2005). <https://doi.org/10.1007/s11006-005-0163-3>
72. Kanel–Belov A., M.Kharitonov. *Subexponential estimates in the height theorem and estimates on numbers of periodic parts of small periods.* Fundam. Prikl. Mat. (Fundamental and Applied Mathematics), 2011/2012, Vol. 17, No 5, p. 21–54 ;

73. Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi *Full exposition of Specht’s problem*. Serdica Math. J. 38 (2012), 313–370.
74. Belov A. Ya., Kharitonov M. I., *Subexponential estimates in Shirshov’s theorem on height*, Sb. Math., 203:4 (2012), 534–553
75. Kanel–Belov A., Eli Aljadeff. *Representability and Specht problem for G -graded algebras*. Adv. in Mat., vol. 225, No 5, 2010, pp. 2391–2428.
76. Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi *Structure of Zariski-closed algebras*. Trans. Amer. Math.Soc., Vol.362, No 9, Pages 4695–4734.
77. Latyshev, V.N. *Combinatorial generators of the multilinear polynomial identities*. J Math Sci 149, 1107–1112 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10958-008-0049-5>
78. Durand, Fabien. *Decidability of uniform recurrence of morphic sequences*. arXiv:1204.5393
79. Durand, Fabien. *Decidability of the HD0L ultimate periodicity problem*. arXiv:1111.3268
80. Fabien Durand, Samuel Petite, *Unimodular pisot substitutions and domain exchanges*. arXiv: 1408.2110 [math.DS]
81. A.Ya. Belov, I. Mitrofanov *Periodicity of Rauzy scheme and substitutional systems*, arXiv: 1107.0185
82. A.Ya.Belov, G.V.Kondakov, I.Mitrofanov. *Inverse problems of symbolic dynamics*. Banach Center Publ. 94 (2011), 43–60.
83. Belov A. J., Ivanov I.A. *Construction of semigroups with some exotic properties*. Acta Appl. Math. 85 (2005), no. 1-3, 49–56.
84. Berele, Allan. *Applications of Belov’s theorem to the cocharacter sequence of p.i. algebras*. J. Algebra 298 (2006), no. 1, 208–214.
85. Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi *Full quivers of representations of algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), 5525–5569.
86. Kanel–Belov A., Eli Aljadeff. *Hilbert series of PI-relative free g -graded algebras are rational functions*. Bull. London Math. Soc., (2012), 44(3): 520–532, doi:10.1112/blms/bdr116
87. Kanel–Belov A., Malev S., Rowen Louis H. *The images of non-commutative polynomials evaluated on 2×2 matrices*. Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), 465–478 (posted in arxiv.:1005.0191v2).
88. Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi *Application of full quivers of representations of algebras, to polynomial identities*. Comm. in Algebra, vol. 39: 4536–4551, 2011.
89. Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi *Normal bases of PI-algebras*. Adv. in Appl. Math. 37 (2006), no. 3, 378–389.
90. Kanel–Belov A., Rowen Louis H. *Perspectives on Shirshov’s Height Theorem*. in book: selected papers of A.I.Shirshov, Birkhäuser Verlag AG (2009), 3–20.
91. Kanel–Belov, Alexei; Rowen, Louis Halle *Combinatorial aspects in polynomial identities*. Research Notes in Mathematics, 9. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2005. xxii+378

92. Belov, A. *Local finite basis property and local representability for varieties of associative rings*. Doklady Akademii Nauk (Reports (CR) of Acad. of Sci. of Russia). 2010, v.432, No 6, pp. 727–731, (Doklady Mathematics), Engl. transl.: 2010, Vol. 81, No. 3, pp. 458–461.
93. Belov, A. *Local finite basis property and local representability of varieties of associative rings*. Izvestia of Russian Academia of science, No 1, 2010, pp. 3–134. English transl.: Izvestiya: Mathematics, vol. 74, No 1, pp. 1–126.
94. A.L. Chernyat'ev, *Balanced Words and Dynamical Systems* // Fundamental and Applied Mathematics, 2007, vol. 13, No 5, pp. 213–224
95. A.L. Chernyat'ev, *Words with Minimal Growth Function* // Vestnik Mosk. Gos. Univ., 2008.
96. A.Ya. Belov and A.L. Chernyat'ev, *Describing Sturmian Words over an n -letter Alphabet* // Math. Met. Appl. IV, MGSU, 1999, pp 122–128.
97. Belov A. J. *About Non-Specht varieties*. Fund. i prikl. matem., 1999, vol. 5, N 1, pp. 47–66.
98. Belov A. J. *Counterexamples to the Specht problem*. Mat. sb., 1999, vol. 191, N 3, p.13–24. (Engl. transl. Sbornik: Mathematics 191:3, 329–340.)
99. A.Ya. Kanel-Belov, A.L. Chernyat'ev. *Describing the set of words generated by interval exchange transformation*. Comm. in Algebra, Vol. 38, No 7, July 2010, pages 2588–2605.
100. G.M. Bergman, *A note on growth functions of algebras and semigroups*, Research Note, University of California, Berkeley, 1978.
101. V. Berthé, S. Ferenczi, L.Zamboni *Interactions between dynamics, arithmetics and combinatorics: the good, the bad, and the ugly*, AMS Contemporary Math. 385 (2005), p. 333–364.
102. J. Berstel, P. Séébold, Sturmian words, in: M. Lothaire (Ed.) *Algebraic Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 (Chap. 2).
103. J.Berstel, *Recent results on Sturmian words*, Developments in language theory II, 13–24, World Scientific, 1996.
104. J.Cassaigne. *Special factors with linear subword complexity*. Developments in language theory, II (Magdeburg, 1995), 25–34, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.
105. Cassaigne, J. (F-CNRS-IML); Hubert, P. [Hubert, Pascal] (F-CNRS-IML); Troubetzkoy, S. (F-CNRS-IML) *Complexity and growth for polygonal billiards*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 52 (2002), no. 3, 835–847.
106. X. Droubay, G. Pirillo, *Palindromes and sturmian word*, Theoret. Comput. Sci., 223:73–85, 1999.
107. X.Droubay, J.Justin, G.Pirillo, *Episturmian words and some construction of de Luca and Rauzy*, Theoret. Comp. Sci.,(2001) 539–553.
108. Drensky V. *Codimensions of T -ideals and Hilbert series of relatively free algebras*. J. Algebra, 1984, vol 91, no 1, pages 1–17.
109. Drensky V. *Free algebras and PI-algebras*. Springer, 2000, Pages 271.
110. H. Furstenberg. *Poincaré recurrence and number theory*. Bull. Amer. Math. Soc., 5:211–234, 1981.

111. R. L. Graham, *Covering the Positive Integers by disjoint sets of the form $\{[n\alpha + \beta] : n = 1, 2, \dots\}$* , J. Combin. Theory Ser A15 (1973) 354-358.
112. P. Hubert, *Well balanced sequences*, Theoret. Comput. Sci. 242 (2000) 91-108.
113. S. Ferenczi, C. Holton, L. Zamboni, *The structure of three-interval exchange transformations II: a combinatorial description of the trajectories* J. Anal. Math. 89 (2003), p. 239-276.
114. Ferenczi, L. Zamboni, *A new induction for symmetric k -interval exchange transformations and distances theorem*, submitted, Available at: <http://iml.univ-mrs.fr/~ferenczi/fz1.pdf>
115. Ferenczi, L. Zamboni, *Examples of 4-interval exchange transformations*, preprint (2006), Available at: <http://iml.univ-mrs.fr/~ferenczi/fz2.pdf>
116. Ferenczi, L. Zamboni, *Languages of k -interval exchange transformations*, submitted, Available at: <http://iml.univ-mrs.fr/~ferenczi/fz3.pdf>
117. Giambruno A., Zaicev M. *Exponential Codimensional Growth of PI-algebras: an exact estimate*. Adv.in Math., 1999, vol 142, pages 221-243.
118. Giambruno A., Zaicev M. *Minimal varieties of exponential growth*. Adv.in Math., 142, 1999, vol 142, pages 221-243.
119. Gromov M. *Groups of polynomial growth and extending maps*. Publ. Math. inst. hautes etud. sci., 1981, vol. 53, pages 53-73.
120. Kemer A. R. *Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p* . Intern. J. of Algebra and Computations., 1995, vol 5, no 2, pages 189-197.
121. Krause, G.; Lenagan, T.H. *Growth of algebra and Gelfand-Kirillov dimension*, Research Notes in Math., Pitman, London, 1985.
122. A. de Luca, *Sturmian words: structure, combinatorics and their arithmetics*, Theoret. Comp. Sci., 183, (1997), 45-82.
123. A. de Luca and S. Varricchio. *Combinatorial properties of uniformly recurrent words and an application to semigroups*. // Inter. J. Algebra Comput., 1(2):227-246, 1991.MR 92h:20084.
124. *Application of Adic representations in the investigations of metric, spectral and topological properties of dynamical systems*. Sanct-Petersburg, 1995, 176 pages.
125. M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983, Vol. 17.
126. M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*. A collective work by Jean Berstel, Dominique Perrin, Patrice Seebold, Julien Cassaigne, Aldo De Luca, Steffano Varricchio, Alain Lascaux, Bernard Leclerc, Jean-Yves Thibon, Veronique Bruyere, Christiane Frougny, Filippo Mignosi, Antonio Restivo, Christophe Reutenauer, Dominique Foata, Guo-Niu Han, Jacques Desarmenien, Volker Diekert, Tero Harju, Juhani Karhumaki and Wojciech Plandowski. With a preface by Berstel and Perrin. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 90. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, 504 pp.
127. Mauduit, C. *Substitutions, arithmetic and finite automata: an introduction*. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, 35-52, Lecture Notes in Math., 1794, Springer, Berlin, 2002, 37B10 (11B85) PDF Clipboard Series Chapter

128. Milnor J. *Problem 5603*. American Mathematical monthly, 1968, vol. 75, No 6, pages 675–686.
129. M. Morse and G. A. Hedlund [1940], *Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories*, // Amer. J. Math. 62, 1-42.
130. G. Rauzy, *Nombres algebriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France, 110 (1982), p. 147–178.
131. G. Rauzy, *Mots infinis en arithmetique*, in: *Automata on Infinite Words*, Ecole de Printemps d'Informatique Theorique, Le Mont Dore, May 1984, ed. M. Nivat and D. Perrin, Lecture Notes in Computer Science, vol. 192, Springer-Verlag, Berlin etc., pp. 165-171, 1985
132. G. Rauzy, *Suites á termes dans un alphabet fini*, In *Sémin. Théorie des Nombres*, p. 25-01-25-16, 1982-1983, Exposé No 25.
133. G. Rauzy, *Échanges d'intervalles et transformations induites*, (in French), Acta Arith. 34 (1979), p. 315-328.
134. G. Rozenberg and A. Salomaa *The Mathematical Theory of L Systems*, Academic Press, New York etc., 1980
135. G. Rote, *Sequences with subword complexity $2n$* , J. Number Theory 46 (1994) 196–213.
136. R. Tijdeman, *Decomposition of the integers as a direct sum of two subsets* // in: Number Theory, ed. by S. David, Number Theory Seminar Paris 1992-93, Cambridge University Press, (1995), 261-276
137. R. Tijdeman, *Fraenkel's conjecture for six sequences*, Discrete Mathematics, Volume 222, Issue 1-3, 223 - 234, 2000
138. L. Vuillon, *Balanced words*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 10 (2003), no. 5, 787-805
139. L. Vuillon, *A characterization of Sturmian word by return words*, European Journal of Combinatorics (2001) 22, 263-275.
140. Vershik, A. M. *The adic realizations of the ergodic actions with the homeomorphisms of the Markov compact and the ordered Bratteli diagrams*. Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 223 (1995), Teor. Predstav. Din. Sistemy, Kombin. i Algoritm. Metody. I, 120–126, 338; translation in J. Math. Sci. (New York) 87 (1997), no. 6, 4054–4058.
141. Vershik, A. M.; Livshits, A. N. *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics. Representation theory and dynamical systems*, 185–204, Adv. Soviet Math., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
142. Belov A. J. *Rationality of Hilbert series with respect to free algebras.*, Uspehi mat. nauk, 1997, vol. 55, N 2, p. 153–154. translation in Russian Math. Surveys 52, 1997, N 2, 394–395
143. H. Weyl, *Über der gleichverteilung von zahlen mod 1*, Math. Ann., v. 77, 313-352, 1916.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.464

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-236-256

Арифметические свойства элементов прямых произведений
 p -адических полей, II

А. С. Самсонов

Самсонов Алексей Сергеевич — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы трансцендентности и алгебраической независимости, формулируются и доказываются теоремы для некоторых элементов прямых произведений p -адических полей. Пусть $\mathbb{Q}_p$ — пополнение $\mathbb{Q}$ по p -адической норме, поле Ω_p — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$, $g = p_1 p_2 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел, а пополнение $\mathbb{Q}$ по g -адической псевдонорме это кольцо $\mathbb{Q}_g$, иными словами $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$. Рассматривается кольцо $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$, содержащее $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца. Вопросы о трансцендентности и алгебраической независимости над $\mathbb{Q}_g$ элементов Ω_g привели к результатам полученным в статье. При соблюдении некоторых условий можно делать соответствующие выводы не только для чисел вида $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}$, где $a_k \in \mathbb{Z}_g$, а неотрицательные рациональные числа r_k образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \rightarrow +\infty$ последовательность. Но и для чисел вида $f(\alpha)$, где $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$. Кроме того, пусть $\widehat{\mathbb{Q}} \cong \prod_p \mathbb{Q}_p$ — кольцо полиадических чисел, тогда, рассматривая элементы кольца $\widehat{\Omega} = \prod_p \Omega_p$, можно делать аналогичные выводы для чисел вида $f(\alpha)$, где $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]]$, $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}$, $a_k \in \mathbb{Z}_g$, $g = (p_1, \dots, p_n, \dots)$.

Ключевые слова: p -адические числа, g -адические числа, полиадические числа, трансцендентность, алгебраическая независимость.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:

А. С. Самсонов. Арифметические свойства элементов прямых произведений p -адических полей, II // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 236–256.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 511.464

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-236-256

Arithmetic properties of direct product of p -adic fields elements, II

A. S. Samsonov

Samsonov Aleksei Sergeevich — graduate student, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Abstract

The article takes a look at transcendence and algebraic independence problems, introduces statements and proofs of theorems for some kinds of elements from direct product of p -adic fields and polynomial estimation theorem. Let $\mathbb{Q}_p$ be the p -adic completion of $\mathbb{Q}$, Ω_p be the completion of the algebraic closure of $\mathbb{Q}_p$, $g = p_1 p_2 \dots p_n$ be a composition of separate prime numbers, $\mathbb{Q}_g$ be the g -adic completion of $\mathbb{Q}$, in other words $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$. The ring $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$, a subring $\mathbb{Q}_g$, transcendence and algebraic independence over $\mathbb{Q}_g$ are under consideration. Here are appropriate theorems for numbers not only like $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j g^{r_j}$ where $a_j \in \mathbb{Z}_g$, and non-negative

rational numbers r_j increase strictly unbounded. But, for numbers $f(\alpha)$, where $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$.

Furthermore, let $\widehat{\mathbb{Q}} \cong \prod_p \mathbb{Q}_p$ be the ring of polyadic numbers, then, the article takes a look at

$\widehat{\Omega} = \prod_p \Omega_p$, there are similar results for numbers like $f(\alpha)$, where $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]]$,

$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}$, $a_k \in \mathbb{Z}_g$, $g = (p_1, \dots, p_n, \dots)$.

Keywords: p -adic numbers, g -adic numbers, polyadic numbers, transcendence, algebraic independence.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

A. S. Samsonov, 2021, "Arithmetic properties of direct product of p -adic fields elements, II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 236–256.

Введение

Используются следующие обозначения: p — простое число, $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p -адических чисел, $|x|_p = p^{-ord_p x}$ — p -адическая норма; $\mathbb{Q}_p$ — поле p -адических чисел, это пополнение поля рациональных чисел по p -адической норме; Ω_p , оно же $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$; $K[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из кольца K , например $\mathbb{Q}_p[x]$, $K[x_1, \dots, x_m]$ — кольцо многочленов от m переменных над кольцом K .

Для g -адических чисел используются следующие обозначения: $g = p_1 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел, $\mathbb{Z}_g$ — кольцо целых g -адических чисел, $|x|_g$ — g -адическая псевдонорма; $\mathbb{Q}_g$ — кольцо g -адических чисел, пополнение множества рациональных чисел по g -адической псевдонорме; построено кольцо Ω_g — расширение кольца $\mathbb{Q}_g$, $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$.

Для полиадических чисел используются следующие обозначения: все простые числа пронумерованы $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \dots$; $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ — кольцо целых полиадических чисел;

$\widehat{\mathbb{Q}} = \prod_p \mathbb{Q}_p$, $\widehat{\Omega} = \prod_p \Omega_p$.

Основные понятия и определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обозначим $\Phi : \mathbb{Q}_g \rightarrow \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ — прямой изоморфизм колец, а $\Psi : \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n} \rightarrow \mathbb{Q}_g$ — обратный.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Описание изоморфизма $\mathbb{Q}_g \cong \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ см. в [22], с. 59.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Множество $\Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$ — кольцо, которое содержит кольцо $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ в качестве подкольца.

Содержание этого утверждения очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пространство $\mathbb{Q}_g$ представляет из себя множество $\{\Psi(\beta_1, \dots, \beta_n)\}$, где $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ пробегает множество $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$.

Теперь мы построим пространство Ω_g . В силу предыдущего замечания, мы можем дополнить множество $\mathbb{Q}_g$ недостающими элементами и обозначить их $\Psi(\beta_1, \dots, \beta_n)$, где $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ пробегает множество $\Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$. Более того, продолжение изоморфизма Ψ , которое мы построим, будет отображать элементы $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ в $\Psi(\beta_1, \dots, \beta_n)$, поэтому совпадение обозначений не приведет к конфликту.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Omega_g = \{\Psi(\beta_1, \dots, \beta_n)\}$, где $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ пробегает $\Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$. Алгебраическую структуру заимствуем из кольца $\Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Кольцо Ω_g содержит $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца. Существует продолжение изоморфизма $\Psi : \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n} \rightarrow \Omega_g$ и продолжение обратного изоморфизма $\Phi : \Omega_g \rightarrow \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 2 и определения 2, очевидно, что кольцо Ω_g содержит $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца. Продолжение изоморфизма Ψ определим следующим образом, пусть Ψ отображает элемент $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ в $\Psi(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Такое отображение будет изоморфизмом в силу определения 2. Изоморфизм Φ продолжим, как обратный к Ψ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Далее, нет смысла упоминать названия изоморфизмов, они будут опущены, поскольку обозначения не вызывают разночтений. Если $\alpha \in \Omega_g$, то $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, где $\beta_k \in \Omega_{p_k}$. Аналогично, если $\alpha \in \mathbb{Q}_g$, то $\beta_k \in \mathbb{Q}_{p_k}$, если $\alpha \in \mathbb{Z}_g$, то $\beta_k \in \mathbb{Z}_{p_k}$. Любой многочлен $G \in \mathbb{Q}_g[x]$ можно представить в виде

$$G = (P_1, P_2, \dots, P_n), \text{ где } P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x]$$

и вычислить по формуле

$$G(\alpha) = (P_1(\beta_1), P_2(\beta_2), \dots, P_n(\beta_n)), \text{ где } \alpha \in \Omega_g, \alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Аналогично, если $G \in \mathbb{Q}_g[x_1, \dots, x_m]$, то $P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x_1, \dots, x_m]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обозначим $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ — кольцо целых полиадических чисел, $\widehat{\mathbb{Q}} = \prod_p \mathbb{Q}_p$, $\widehat{\Omega} = \prod_p \Omega_p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Кольцо $\widehat{\mathbb{Q}} \supset \widehat{\mathbb{Z}}$ содержит в себе кольцо целых полиадических чисел в качестве подкольца, а кольцо $\widehat{\Omega} \supset \widehat{\mathbb{Q}}$ содержит в себе кольцо $\widehat{\mathbb{Q}}$ в качестве подкольца.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если $\alpha \in \widehat{\Omega}$, то $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$, где $\beta_k \in \Omega_{p_k}$. Аналогично, если $\alpha \in \widehat{\mathbb{Q}}$, то $\beta_k \in \mathbb{Q}_{p_k}$, если $\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}}$, то $\beta_k \in \mathbb{Z}_{p_k}$. Любой многочлен $G \in \widehat{\mathbb{Q}}[x]$ можно представить в виде

$$G = (P_1, P_2, \dots, P_n, \dots), \text{ где } P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x]$$

и вычислить по формуле

$$G(\alpha) = (P_1(\beta_1), P_2(\beta_2), \dots, P_n(\beta_n), \dots), \text{ где } \alpha \in \widehat{\Omega}, \alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots).$$

Аналогично, если $G \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_m]$, то $P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x_1, \dots, x_m]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Обозначим $U_p := \{\beta \in \mathbb{Q}_p : |\beta|_p = 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Обозначим $\mathbb{Z}_g^* := \{\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \dots, n\}, \beta_k \neq 0\}$. Обозначим $\widehat{\mathbb{Z}}^* := \{\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots) \in \widehat{\mathbb{Z}} : \forall k \in \mathbb{N}, \beta_k \neq 0\}$.

Хотелось бы ввести обозначение $A \setminus \widehat{0}$, которое бы исключало из множества A , являющегося прямым произведением, все такие элементы, что хотя бы одна из компонент тождественно равна нулю, иными словами, исключить нули и делители нуля. Это обозначение представим в следующем виде.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. $\mathbb{Z}_g \setminus \widehat{0} := \mathbb{Z}_g^*$, $\widehat{\mathbb{Z}} \setminus \widehat{0} := \widehat{\mathbb{Z}}^*$, $\mathbb{Q}_g[x] \setminus \widehat{0} := \{G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] : \forall k \in \{1, \dots, n\}, P_k \neq 0\}$, $\widehat{\mathbb{Q}}[x] \setminus \widehat{0} := \{G = (P_1, P_2, \dots, P_n, \dots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x] : \forall k \in \mathbb{N}, P_k \neq 0\}$ и так далее.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Следующие определения раскрывают смысл глобального соотношения, которое говорит о наличии соответствующего соотношения для каждой компоненты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\alpha \in \Omega_g$, $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Будем называть α глобально трансцендентным над $\mathbb{Q}_g$ элементом Ω_g , если для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ и любого многочлена $G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] \setminus \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(\beta_k) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $\alpha_i \in \Omega_g$, $\alpha_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,n})$, $i = 1, \dots, t$. Будем называть α_i глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$ элементами Ω_g , если для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ и любого многочлена $G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \dots, x_m] \setminus \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(\beta_{1,k}, \dots, \beta_{t,k}) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $\alpha \in \widehat{\Omega}$, $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$. Будем называть α глобально трансцендентным над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементом $\widehat{\Omega}$, если для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого многочлена $G = (P_1, P_2, \dots, P_n, \dots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x] \setminus \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(\beta_k) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $\alpha_i \in \widehat{\Omega}$, $\alpha_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,n}, \dots)$, $i = 1, \dots, t$. Будем называть α_i глобально алгебраически независимыми над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементами $\widehat{\Omega}$, если для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого многочлена $G = (P_1, P_2, \dots, P_n, \dots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_m] \setminus \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(\beta_{1,k}, \dots, \beta_{t,k}) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Степенной ряд $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, будем называть глобально трансцендентным над $\mathbb{Q}_g$, если для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ и любого многочлена $G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] \setminus \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(f_k) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Степенные ряды $f_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$, $f_i = (f_{i,1}, \dots, f_{i,n})$, $i = 1, \dots, t$, будем называть глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$, если для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ и любого многочлена $G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \dots, x_m] \setminus \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(f_{1,k}, \dots, f_{t,k}) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Степенной ряд $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]]$, $f = (f_1, \dots, f_n, \dots)$, будем называть глобально трансцендентным над $\widehat{\mathbb{Q}}$, если для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого многочлена $G = (P_1, P_2, \dots, P_n, \dots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x] \setminus \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(f_k) \neq 0$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Степенные ряды $f_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]]$, $f_i = (f_{i,1}, \dots, f_{i,n}, \dots)$, $i = 1, \dots, t$, будем называть глобально алгебраически независимыми над $\widehat{\mathbb{Q}}$, если для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого многочлена $G = (P_1, P_2, \dots, P_n, \dots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_m] \setminus \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(f_{1,k}, \dots, f_{m,k}) \neq 0$.*

Формулировки теорем и сведение доказательств и рассуждений к p -адическому случаю

ЛЕММА 1. *Пусть*

- 1) *числа r_k и s_k , где $k = 1, 2, \dots$ являются неотрицательными и рациональными, $r_1, r_2, \dots$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ последовательность;*
- 2) *существует бесконечное множество номеров j таких, что число r_{j+1} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_1, \dots, r_j$ и чисел s_k ;*
- 3) *числа r'_k такие, что разность $r'_k - r_k$ является неотрицательным целым числом, аналогично для $s'_k - s_k$;*
- 4) *неубывающая последовательность t_k , где $k = 1, 2, \dots$ является упорядоченной r'_k .*

Тогда существует бесконечное множество номеров j таких, что число t_{j+1} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_1, \dots, t_j$ и чисел s'_k .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. *Последовательность r'_k стремится к $+\infty$, поэтому неубывающая t_k существует, а четвертый пункт условия является корректным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда множество подходящих номеров конечно. Пусть номер n_0 последний из таких, что число t_{n_0} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_1, \dots, t_{n_0-1}$ и чисел s'_k . Если нет ни одного подходящего номера, пусть $n_0 = 1$. Поскольку t_{n_0+1} является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_1, \dots, t_{n_0}$ и чисел s'_k . Получается, что t_{n_0+2} , как линейная комбинация с целыми коэффициентами чисел $1, t_1, \dots, t_{n_0+1}$ и чисел s'_k , является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_1, \dots, t_{n_0}$ и чисел s'_k . Таким образом, каждое следующее число в последовательности t_m , при $m > n_0$, является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_1, \dots, t_{n_0}$ и чисел s'_k .

Получается, что существует лишь конечное множество из чисел t_k таких, что их нельзя представить линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_1, \dots, t_{n_0}$ и чисел s'_k . Поскольку в распоряжении есть число 1, нету разницы в том, использовать ли числа t_k, s'_k или числа r_k, s_k , существование линейной комбинации от этого не зависит. Значит, существует лишь конечное множество из чисел r_k таких, что их нельзя представить линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, s_k$ и фиксированного конечного подмножества чисел r_k . Но это, очевидно, противоречит второму условию леммы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $g = p_1 \dots p_n$,*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]], \quad \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]] \setminus \widehat{0},$$

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}}, \quad \alpha_\mu \in \Omega_g, \quad a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть

- 1) для любого $\mu = 1, \dots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность;
- 2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$;
- 3) не существует номеров k, k', μ таких, что разность $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f(\alpha_\mu)$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда числа $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_m)$ не являются глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$ элементами Ω_g при некотором $m \geq 1$. При $m = 1$ подразумеваем, что число $f(\alpha_1)$ не является глобально трансцендентным над $\mathbb{Q}_g$ элементом Ω_g . Следовательно, считая $f = (f_1, \dots, f_n)$, $\alpha_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \dots, \alpha_{\mu,n})$, $f(\alpha_\mu) = (f_1(\alpha_{\mu,1}), \dots, f_n(\alpha_{\mu,n}))$, существуют $t \in \mathbb{N}$, $1 \leq t \leq n$, и $G = (G_1, \dots, G_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$ такие, что $G_t(f_t(\alpha_{1,t}), \dots, f_t(\alpha_{m,t})) = 0$. Значит, числа $f_t(\alpha_{\mu,t})$ представляют собой алгебраически зависимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t} . Пусть $a_{k,\mu} = (a_{k,\mu,1}, \dots, a_{k,\mu,n})$, тогда

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu,t} g^{r_{k,\mu}}, \quad \text{где } a_{k,\mu,t} \in \mathbb{Z}_{p_t}, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Поскольку $a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*$, воспользуемся тем, что $p_t = (p_t/g)g$, $(p_t/g) \in U_{p_t}$ и освободим коэффициенты от целых степеней p_t ,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} g^{r'_{k,\mu}}, \quad \text{где } a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t}, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Воспользуемся леммой 1 и упорядочим числа $r'_{k,\mu}$ отдельно для каждого $\mu = 1, \dots, m$, получим

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} g^{t_{k,\mu}}, \quad \text{где } a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t}, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Поскольку не существует номеров k, k', μ таких, что разность $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом, значит, для каждого $\mu = 1, \dots, m$ неотрицательные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность, и существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \dots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$. Таким образом доказательство сводится к следующему p -адическому случаю.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$f_t(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,t} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

где $c_{j,t} \neq 0$ хотя бы для одного $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} g^{t_{k,\mu}}, \quad \alpha_{\mu,t} \in \Omega_{p_t}, \quad a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t}, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть

- 1) для любого $\mu = 1, \dots, m$ положительные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность;
- 2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \dots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_t(\alpha_{\mu,t})$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет проведено позднее, в более удобных обозначениях.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $g = (p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]], \quad \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]] \setminus \widehat{0},$$

$$\alpha_{\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}}, \quad \alpha_{\mu} \in \widehat{\Omega}, \quad a_{k,\mu} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть

- 1) для любого $\mu = 1, \dots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность;
- 2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$;
- 3) не существует номеров k, k', μ таких, что разность $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f(\alpha_{\mu})$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементы $\widehat{\Omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет предыдущее, тем не менее, есть некоторые отличия, которые полезно представить в явном виде. Предположим противное, тогда числа $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_m)$ не являются глобально алгебраически независимыми над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементами $\widehat{\Omega}$ при некотором $m \geq 1$. При $m = 1$ подразумеваем, что число $f(\alpha_1)$ не является глобально трансцендентным над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементом $\widehat{\Omega}$. Следовательно, считая $f = (f_1, \dots, f_n, \dots)$, $\alpha_{\mu} = (\alpha_{\mu,1}, \dots, \alpha_{\mu,n}, \dots)$, $f(\alpha_{\mu}) = (f_1(\alpha_{\mu,1}), \dots, f_n(\alpha_{\mu,n}), \dots)$, существуют $t \in \mathbb{N}$ и $G = (G_1, \dots, G_n, \dots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_m] \setminus \widehat{0}$ такие, что $G_t(f_t(\alpha_{1,t}), \dots, f_t(\alpha_{m,t})) = 0$. Значит, числа $f_t(\alpha_{\mu,t})$ представляют собой алгебраически зависимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t} . Пусть $a_{k,\mu} = (a_{k,\mu,1}, \dots, a_{k,\mu,n}, \dots)$, тогда

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu,t} p_t^{r_{k,\mu}}, \quad \text{где } a_{k,\mu,t} \in \mathbb{Z}_{p_t}, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Поскольку $a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*$, освободим коэффициенты от целых степеней p_t ,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} p_t^{r'_{k,\mu}}, \quad \text{где } a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t}, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Воспользуемся леммой 1 и упорядочим числа $r'_{k,\mu}$ отдельно для каждого $\mu = 1, \dots, m$, получим

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} p_t^{t_{k,\mu}}, \quad \text{где } a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t}, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Поскольку не существует номеров k, k', μ таких, что разность $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом, значит, для каждого $\mu = 1, \dots, m$ неотрицательные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность, и существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \dots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$. Таким образом доказательство сводится к p -адическому случаю, который можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$f_t(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,t} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

где $c_{j,t} \neq 0$ хотя бы для одного $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} p_t^{t_{k,\mu}}, \quad \alpha_{\mu,t} \in \Omega_{p_t}, \quad a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t}, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть

- 1) для любого $\mu = 1, \dots, m$ положительные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность;
- 2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \dots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_t(\alpha_{\mu,t})$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это теорема 2, при $g = p_t$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $g = p_1 \dots p_n$, функции

$$f_{\lambda}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]], \quad \lambda = 1, \dots, l,$$

являются глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$.

$$\alpha_{\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}}, \quad \alpha_{\mu} \in \Omega_g, \quad a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть

- 1) для любого $\mu = 1, \dots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность;
- 2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu, \mu' = 1, \dots, m$;
- 3) не существует номеров k, k', μ таких, что разность $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f_{\lambda}(\alpha_{\mu})$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя ход рассуждений, использовавшихся для теоремы 1, предположим существование алгебраической зависимости

$$G_t(f_{1,t}(\alpha_{1,t}), \dots, f_{1,t}(\alpha_{m,t}); \dots; f_{l,t}(\alpha_{1,t}), \dots, f_{l,t}(\alpha_{m,t})) = 0,$$

и сведем к следующему p -адическому случаю.

ТЕОРЕМА 6. Пусть

$$f_{\lambda,t}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda,t} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]], \quad \lambda = 1, \dots, l,$$

являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} g^{t_{k,\mu}}, \quad \alpha_{\mu,t} \in \Omega_{p_t}, \quad a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t}, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть

- 1) для любого $\mu = 1, \dots, m$ положительные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность;
- 2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \dots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_{\lambda,t}(\alpha_{\mu,t})$, где индексы пробегают значения $\lambda = 1, \dots, l$, $\mu = 1, \dots, m$, представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет проведено позднее, в более удобных обозначениях.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $g = (p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$, функции

$$f_{\lambda}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]], \quad \lambda = 1, \dots, l,$$

являются глобально алгебраически независимыми над $\widehat{\mathbb{Q}}$.

$$\alpha_{\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}}, \quad \alpha_{\mu} \in \widehat{\Omega}, \quad a_{k,\mu} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть

- 1) для любого $\mu = 1, \dots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность;
- 2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$, $\mu' = 1, \dots, m$;
- 3) не существует номеров k, k', μ таких, что разность $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f_{\lambda}(\alpha_{\mu})$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементы $\widehat{\Omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя ход рассуждений, использовавшихся для теорем 3 и 5, учитывая отличия, сведем к p -адическому случаю, который можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 8. Пусть

$$f_{\lambda,t}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda,t} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]], \quad \lambda = 1, \dots, l,$$

являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} p_t^{t_{k,\mu}}, \quad \alpha_{\mu,t} \in \Omega_{p_t}, \quad a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t}, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \dots, t$ положительные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность;

2) для любого $\mu = 1, \dots, t$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \dots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_{\lambda,t}(\alpha_{\mu,t})$, где индексы пробегает значения $\lambda = 1, \dots, l$, $\mu = 1, \dots, t$, представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это теорема 6, при $g = p_t$.

Завершение доказательств, разбор p -адических случаев

Для начала сформулируем в удобных обозначениях теоремы 2 и 6, которые осталось доказать.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $g = p_1, \dots, p_\nu$ — произведение различных простых чисел, $\nu \geq 1$, простое число p является одним из членов этого произведения,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

где $c_j \neq 0$ хотя бы для одного $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}}, \quad \alpha_\mu \in \Omega_p, \quad a_{k,\mu} \in U_p, \quad \mu = 1, \dots, t.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \dots, t$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность;

2) для любого $\mu = 1, \dots, t$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f(\alpha_\mu)$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_p$ элементы Ω_p .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Условие $c_j \neq 0$ подразумевает, что степенной ряд $f(z)$, рассматриваемый как функция, отличается от константы. Положительность $r_{k,\mu}$ обеспечивает сходимость при вычислении значений $f(\alpha_\mu)$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $g = p_1, \dots, p_\nu$ — произведение различных простых чисел, $\nu \geq 1$, простое число p является одним из членов этого произведения, функции

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]], \quad \lambda = 1, \dots, l,$$

являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}}, \quad \alpha_\mu \in \Omega_p, \quad a_{k,\mu} \in U_p, \quad \mu = 1, \dots, t.$$

Пусть

- 1) для любого $\mu = 1, \dots, t$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность;
- 2) для любого $\mu = 1, \dots, t$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_p$ элементы Ω_p .

ЛЕММА 2. Пусть $L|K$ расширение некоторого поля K , степенные ряды $f_1, \dots, f_l \in K[[z]]$ являются алгебраически независимыми над L , тогда и только тогда, когда они являются алгебраически независимыми над K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого факта, по сути, но в частном случае, приведено у Шидловского [23], лемма 2 на 91 с. Очевидно, что из алгебраической независимости над L , следует алгебраическая независимость над K , остается показать, что при наличии алгебраической зависимости $P(f_1, \dots, f_l) = 0$, над L , существует многочлен P^* с коэффициентами из K такой, что $P^*(f_1, \dots, f_l) = 0$. Для этого, считая коэффициенты многочлена P неопределенными переменными, вычисляя и приравнявая к нулю коэффициенты перед степенями z , составим систему из счетного числа линейных однородных уравнений с коэффициентами из поля K . Из этой системы можно выбрать минимальную линейно независимую подсистему, и она имеет нетривиальное решение, в силу существования P . Поскольку система однородная, то можно выбрать решение из поля K , так мы получим коэффициенты многочлена P^* .

ЛЕММА 3. Пусть степенной ряд

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]]$$

такой, что $d_j \neq 0$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}, \quad \alpha \in \Omega_p, \quad a_k \in U_p.$$

Пусть

- 1) положительные рациональные числа r_k образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность;
- 2) существует бесконечное множество номеров k таких, что число r_{k+1} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_1, \dots, r_k$.

Тогда из $\varphi'(\alpha) \neq 0$ следует $\varphi(\alpha) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Есть некоторые очевидные соображения, но на них стоит обратить внимание, поскольку они неоднократно будут использоваться. Можно вычислить формальную производную

$$\varphi^{(i)}(z) = \sum_{j=i}^{\infty} j \dots (j-i+1) d_j z^{j-i}.$$

Поскольку

$$\left| \frac{j!}{i!(j-i)!} d_j \alpha^{j-i} \right|_p = \left| \binom{j}{i} d_j \alpha^{j-i} \right|_p \leq |\alpha|_p^{j-i}$$

и $|\alpha|_p < 1$, значит

$$\text{ord}_p \frac{\varphi^{(i)}(\alpha)}{i!} > 0,$$

это помогает увидеть сходимость рядов там, где она может быть не сразу очевидна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, пусть $\varphi'(\alpha) \neq 0$, но $\varphi(\alpha) = 0$. Положим

$$\alpha^{(n)} = \sum_{k=1}^n a_k g^{r_k}.$$

Тогда $\text{ord}_p(\alpha^{(n)} - \alpha) = r_{n+1}$, поскольку $\varphi(\alpha) = 0$, получим

$$\varphi(\alpha^{(n)}) = \varphi(\alpha + (\alpha^{(n)} - \alpha)) = \varphi'(\alpha)(\alpha^{(n)} - \alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(\alpha^{(n)} - \alpha)^2 + \dots$$

Для достаточно больших n

$$\text{ord}_p \varphi(\alpha^{(n)}) = \text{ord}_p(\varphi'(\alpha)(\alpha^{(n)} - \alpha)) = \text{ord}_p \varphi'(\alpha) + r_{n+1}.$$

Из этого равенства мы и получим противоречие, представляя $\text{ord}_p \varphi'(\alpha^{(n)})$, $\text{ord}_p \varphi(\alpha)$, а значит и r_{n+1} в виде линейных комбинаций чисел $1, r_1, \dots, r_n$.

Во-первых, число

$$\varphi'(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} j d_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k} \right)^{j-1}$$

отлично от нуля. Как конечная линейная комбинация, $\text{ord}_p \varphi'(\alpha) = u + u_1 r_1 + \dots + u_h r_h$, где $u, u_1, \dots, u_h$ — неотрицательные целые числа. Значит, достаточно выбрать $n \geq h$.

Во-вторых, каждое слагаемое из

$$\varphi(\alpha^{(n)}) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \left(\sum_{k=1}^n a_k g^{r_k} \right)^j$$

имеет порядок, являющийся линейной комбинацией чисел $1, r_1, \dots, r_n$ с неотрицательными коэффициентами.

Таким образом, для любого достаточно большого n , число r_{n+1} представляет собой линейную комбинацию чисел $1, r_1, \dots, r_n$ с целыми коэффициентами, что противоречит условиям леммы.

ЛЕММА 4. Пусть

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

где $c_j \neq 0$ хотя бы для одного $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}, \quad \alpha \in \Omega_p, \quad a_k \in U_p.$$

Тогда $f'(\alpha) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть натуральное число q минимальное из тех, что $f^{(q)}(\alpha) \neq 0$, в силу условий для f такое q должно существовать, в противном случае

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) + \dots = f(\alpha).$$

Предположим, что $q > 1$, определим

$$\varphi(z) = f^{(q-1)}(z) \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

значит $\varphi(\alpha) = 0$ и $\varphi'(\alpha) \neq 0$, но это противоречит лемме 3. Таким образом, $q = 1$, $f'(\alpha) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Мы показали, что при обращении в нуль всех производных в некоторой точке, ряд состоит только из первого слагаемого — константы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $f_1, \dots, f_l$ имеют вид

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]]$$

и являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}, \quad \alpha \in \Omega_p, \quad a_k \in U_p.$$

Тогда $f_1(\alpha), \dots, f_l(\alpha)$ являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_l]$ отличный от константы, определим $\varphi(z) = P(f_1(z), \dots, f_l(z))$. Тогда,

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

и достаточно показать, что $\varphi(\alpha) \neq 0$. Очевидно, существует такое $q \in \mathbb{N}$, что $\varphi^{(q)}(\alpha) \neq 0$, поскольку $\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \dots = 0$ означало бы, что φ является константой, $\varphi(z) = d_0$,

$$P(f_1(z), \dots, f_l(z)) = d_0,$$

это противоречит алгебраической независимости $f_1, \dots, f_l$ над $\mathbb{Q}_p$.

Рассмотрим функцию $\varphi^{(q-1)}(z)$, которая не может быть константой, а благодаря лемме 3 можно утверждать, что $\varphi^{(q-1)}(\alpha) \neq 0$. Если $q = 1$, тогда $\varphi(\alpha) \neq 0$, что эквивалентно $P(f_1(\alpha), \dots, f_l(\alpha)) \neq 0$. Если $q > 1$, повторим рассуждение и рассмотрим отличную от константы функцию $\varphi^{(q-2)}(z)$, причем $\varphi^{(q-2)}(\alpha) \neq 0$, и так далее, пока не получится, что $\varphi(\alpha) \neq 0$, а это и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Следующие две леммы нужны для доказательства теоремы 10, они немного обобщают и повторяют то, что уже было сказано.

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ удовлетворяют условиям теоремы 9.

Для каждого $\mu = 1, \dots, m$, пусть

$$\varphi_\mu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_{j,\mu} z^j,$$

где все $d_{j,\mu} \in \mathbb{Z}_p[[\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_m]]$, причем $d_{j,\mu} \neq 0$ хотя бы для одного $j = j(\mu) \in \mathbb{N}$. Тогда из $\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$ следует $\varphi_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда $\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, но $\varphi_\mu(\alpha_\mu) = 0$ для некоторого $\mu \in \{1, \dots, m\}$. Определяя $\alpha_\mu^{(n)}$ как n -ую частичную сумму

$$\alpha_\mu^{(n)} = \sum_{k=1}^n a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},$$

ряда для α_μ в теореме 9, получаем

$$\varphi(\alpha_\mu^{(n)}) = \varphi'_\mu(\alpha_\mu)(\alpha_\mu^{(n)} - \alpha_\mu) + \frac{\varphi''_\mu(\alpha_\mu)}{2!}(\alpha_\mu^{(n)} - \alpha_\mu)^2 + \dots$$

Поскольку $\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, значит порядок вхождения p в правую часть равенства равен $\text{ord}_p(\varphi'_\mu(\alpha_\mu)(\alpha_\mu^{(n)} - \alpha_\mu))$ для каждого достаточно большого $n \geq n_\mu$, значит

$$\text{ord}_p \varphi_\mu(\alpha_\mu^{(n)}) = \text{ord}_p \varphi'_\mu(\alpha_\mu) + r_{n+1,\mu}. \quad (1)$$

Для оценки $\text{ord}_p \varphi'_\mu(\alpha_\mu)$ заметим, что

$$\varphi'_\mu(\alpha_\mu) = \sum_{j=1}^{\infty} j d_{j,\mu} \alpha_\mu^{j-1}$$

$$d_{j,\mu} \in \mathbb{Z}_p[[\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_m]].$$

Определение для $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ в теореме 9 дает понять, что $\varphi'_\mu(\alpha_\mu)$ это сумма произведений элемента из U_p и рациональной степени g , которая получается как конечная линейная комбинация с целыми неотрицательными коэффициентами чисел 1 и $r_{k,\mu}$, где $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in \{1, \dots, m\}$. Тут надо заметить, что избавиться от натуральных степеней p в коэффициентах действительно возможно, поскольку $p = (p/g)g$, где $p/g \in U_p$. Таким образом $\text{ord}_p \varphi'_\mu(\alpha_\mu)$ является некоторой линейной комбинацией, которую можно зафиксировать. Обозначим k_μ самый большой из таких первых индексов k , что $r_{k,v}$ появляется для некоторого $v \in \{1, \dots, m\}$ с целым положительным коэффициентом в зафиксированной линейной комбинации.

Аналогичное рассмотрение и оценка значения $\text{ord}_p \varphi_\mu(\alpha_\mu^{(n)})$ позволяет сказать, что это значение является конечной линейной комбинацией с целыми неотрицательными коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{n,\mu}$ и $r_{k,\mu'}$, где $\mu' \in \{1, \dots, \mu-1, \mu+1, \dots, m\}$. Учитывая равенство (1), получается, что для каждого достаточно большого $n \geq \max\{n_\mu, k_\mu\}$, число $r_{n+1,\mu}$ является конечной линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{n,\mu}$ и некоторых $r_{k,\mu'}$, где $\mu' \neq \mu$. Но это противоречит предположению об элементах $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

ЛЕММА 6. Для $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ соответствующих условиям леммы 5,

$$\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$$

для $\mu = 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $\mu = 1, \dots, m$ существует минимальное $q_\mu \in \mathbb{N}$ такое, что $\varphi_\mu^{(q_\mu)}(\alpha_\mu) \neq 0$. Если $q_\mu = 1$, доказано. При $q_\mu > 1$ рассмотрим функцию

$$\psi_\mu(z) = \varphi_\mu^{(q_\mu-1)}(z) \in \mathbb{Z}_p[[\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_m]],$$

которая удовлетворяет условиям леммы 5. Если $\psi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, получается $\psi_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, значит $\varphi_\mu^{(q_\mu-1)}(\alpha_\mu) \neq 0$, что противоречит выбору q_μ , значит $q_\mu = 1$.

Далее докажем теорему 9 индукцией по m . Начнем с $m = 1$, напомним $\alpha = \alpha_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}$, как в лемме 3. Положим $\gamma = f(\alpha)$, и пусть $P \in \mathbb{Z}_p[X]$ является многочленом минимальной степени таким, что $P(\gamma) = 0$, предполагая противное, а именно, что γ является алгебраическим над $\mathbb{Q}_p$. Как и в доказательстве леммы 3, пусть $\alpha^{(n)}$ обозначает n -ую частичную сумму ряда для α , положим $\gamma^{(n)} = f(\alpha^{(n)})$.

Далее мы должны исследовать разницу $\gamma^{(n)} - \gamma$. Очевидно,

$$\gamma^{(n)} - \gamma = f(\alpha^{(n)}) - f(\alpha) = f'(\alpha)(\alpha^{(n)} - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\alpha^{(n)} - \alpha)^2 + \dots,$$

где, как мы знаем благодаря лемме 4, $f'(\alpha) \neq 0$. Таким образом,

$$\text{ord}_p(\gamma^{(n)} - \gamma) = \text{ord}_p f'(\alpha) + \text{ord}_p(\alpha^{(n)} - \alpha) \quad (2)$$

для любого достаточно большого n .

В силу выбора P

$$P(\gamma^{(n)}) = P'(\gamma)(\gamma^{(n)} - \gamma) + \frac{P''(\gamma)}{2!}(\gamma^{(n)} - \gamma)^2 + \dots = P'(\gamma)(\gamma^{(n)} - \gamma) + P^*(\gamma^{(n)} - \gamma), \quad (3)$$

где ряд $P^*(X) = \sum_{i=2}^{\infty} (P^{(i)}(\gamma)/i!)X^i \in \mathbb{C}_p[[X]]$ и $\text{ord}_p(P^{(i)}(\gamma)/i!) \geq 0$. Для достаточно больших n порядок правой части равенства (3) равен $\text{ord}_p(P'(\gamma)(\gamma^{(n)} - \gamma))$, учитывая равенство (2) и $P'(\gamma) \neq 0$, получается

$$\text{ord}_p P(\gamma^{(n)}) = \text{ord}_p P'(\gamma) + \text{ord}_p f'(\alpha) + \text{ord}_p(\alpha^{(n)} - \alpha) \quad (4)$$

для любого достаточно большого n .

Теперь попытаемся получить желаемое противоречие из равенства (4). Как и в доказательстве леммы 3, существует такое $h \in \mathbb{N}$, что

$$\text{ord}_p f'(\alpha) = u + u_1 r_1 + \dots + u_h r_h, \text{ord}_p P'(\gamma) = v + v_1 r_1 + \dots + v_h r_h,$$

где $u, u_1, \dots, u_h, v, v_1, \dots, v_h \in \mathbb{N}_0$. Очевидно, что $\text{ord}_p(\alpha^{(n)} - \alpha) = r_{n+1}$. Также, посмотрим на $\text{ord}_p P(\gamma^{(n)})$. Считая $e_0, \dots, e_J \in \mathbb{Z}_p$ это коэффициентами P , получим

$$P(\gamma^{(n)}) = \sum_{i=0}^J e_i f(\alpha^{(n)})^i = \sum_{i=0}^J e_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(\sum_{k=1}^n a_k g^{r_k} \right)^j \right)^i.$$

Следовательно, $\text{ord}_p P(\gamma^{(n)})$ является линейной комбинацией чисел $1, r_1, \dots, r_n$ с неотрицательными целыми коэффициентами. Как можно заключить из равенства (4), для любого достаточно большого числа $n \geq h$, число r_{n+1} представляется линейной комбинацией чисел $1, r_1, \dots, r_n$ с целыми коэффициентами, что противоречит условию теоремы 9.

Для осуществления шага индукции, определим

$$\gamma_\mu = f(\alpha_\mu), \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Мы предполагаем, что $m > 1$, а элементы $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$, но любые $m - 1$ элементов являются алгебраически независимыми. Пусть $P \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_m]$ это отличный от константы многочлен минимальной степени по совокупности переменных такой, что

$$P(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = 0. \quad (5)$$

Согласно предположению индукции, P зависит от каждой переменной X_μ и

$$\frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \neq 0, \quad \mu = 1, \dots, m, \quad (6)$$

в силу минимальности P . Тогда, из равенства (5)

$$P(X_1, \dots, X_m) = \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)(X_\mu - \gamma_\mu) + P^*(X_1 - \gamma_1, \dots, X_m - \gamma_m), \quad (7)$$

где каждый моном полинома P^* , выраженный через $X_1 - \gamma_1, \dots, X_m - \gamma_m$, имеет степень не ниже двух и коэффициент неотрицательного порядка.

Определим

$$\alpha_\mu^{(n)} = \sum_{k=1}^n a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}}, \quad A_\mu^{(n)} = \alpha_\mu^{(n)} - \alpha_\mu = - \sum_{k>n} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}}, \quad (8)$$

и

$$\gamma_\mu^{(n)} = f(\alpha_\mu^{(n)}), \quad (9)$$

тогда

$$\gamma_\mu^{(n)} - \gamma_\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!} (A_\mu^{(n)})^i. \quad (10)$$

Для некоторых $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}_0$, значения которых мы планируем уточнить позже, можно заключить из (7) и (10), что

$$\begin{aligned} P(\gamma_1^{(n_1)}, \dots, \gamma_m^{(n_m)}) &= \sum_{\mu=1}^m f'(\alpha_\mu) \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) A_\mu^{(n_\mu)} + \\ &+ \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!} (A_\mu^{(n_\mu)})^i + P^*(\gamma_1^{(n_1)} - \gamma_1, \dots, \gamma_m^{(n_m)} - \gamma_m). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (6) и леммы 4 получаем

$$B_\mu = f'(\alpha_\mu) \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \neq 0, \quad \mu = 1, \dots, m,$$

и определяя $b_\mu = \text{ord}_p B_\mu$, $\mu = 1, \dots, m$, не умаляя общности, можно предположить, что

$$b_1 \geq \dots \geq b_m. \quad (12)$$

Поскольку

$$f'(\alpha_\mu) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j \alpha_\mu^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}} \right)^{j-1},$$

p -адические порядки членов, которые не были взаимно уничтожены в правой части равенства, являются конечными линейными комбинациями с целыми неотрицательными коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, r_{2,\mu}, \dots$. Аналогично для членов в правой части равенства

$$\frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = \sum e_\mu(i_1, \dots, i_m) f(\alpha_1)^{i_1} \dots f(\alpha_m)^{i_m}, \quad e_\mu(\dots) \in \mathbb{Z}_p,$$

где сумма распространяется на конечное число комбинаций $(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}_0^m$ и имеет порядки, которые являются конечными линейными комбинациями с целыми неотрицательными коэффициентами чисел 1 и всех $r_{k,v}$, где $k \in \mathbb{N}$, $v = 1, \dots, m$. Поэтому, можно утверждать, что каждое b_μ является конечной линейной комбинацией с целыми неотрицательными коэффициентами чисел 1 и всех $r_{k,v}$. Для каждого $\mu = 1, \dots, m$, можно зафиксировать подобную линейную комбинацию для b_μ и среди всех $k \in \mathbb{N}$ выбрать максимальное значение из таких, что хотя бы одно из чисел $r_{k,v}$ встречается хотя бы в одной из m упомянутых линейных комбинаций, пусть n_0 будет этим максимальным.

Теперь выберем $n_1 > n_0$ согласно следующим условиям:

$$r_{n_1+1,1} > b_1, \quad (13)$$

$$\begin{cases} r_{n_1+1,1} \text{ не является конечной линейной комбинацией с целыми коэффициентами} \\ \text{чисел } 1, r_{1,1}, \dots, r_{n_1,1}, \text{ и чисел } r_{k,\mu'}, \text{ где } \mu' \in \{2, \dots, m\}. \end{cases} \quad (14)$$

Наконец, зафиксируем такие $n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}_0$, что

$$b_1 + r_{n_1+1,1} < \dots < b_m + r_{n_m+1,m}, \quad (15)$$

учитывая неравенство (12),

$$r_{n_1+1,1} < \dots < r_{n_m+1,m}. \quad (16)$$

Поскольку $\text{ord}_p A_\mu^{(n_\mu)} = r_{n_\mu+1,\mu}$, то для достаточно больших n_μ , учитывая равенства (8), предположения о последовательностях r и неравенство (15), можно получить

$$\text{ord}_p \left(\sum_{\mu=1}^m f'(\alpha_\mu) \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) A_\mu^{(n_\mu)} \right) = b_1 + r_{n_1+1,1}. \quad (17)$$

Остается изучить порядки второго и третьего выражений из правой части равенства (11). Понятно, что для любых $i \geq 2$, $\mu = 1, \dots, m$ получается

$$\text{ord}_p \left(\frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \frac{f^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!} (A_\mu^{(n_\mu)})^i \right) \geq 2r_{n_i+1,1} > b_1 + r_{n_1+1,1},$$

в силу неравенств (13) и (16). Как уже отмечалось, степени мономов для выражения $P^*(\gamma_1^{(n_1)} - \gamma_1, \dots, \gamma_m^{(n_m)} - \gamma_m)$ не ниже двух, значит порядки не меньше, чем $2r_{n_1+1,1} > b_1 + r_{n_1+1,1}$. Тогда, вместе с напомним о равенстве (17), можно заключить, что $P(\gamma_1^{(n_1)}, \dots, \gamma_m^{(n_m)})$ не обнуляется, поскольку

$$\text{ord}_p P(\gamma_1^{(n_1)}, \dots, \gamma_m^{(n_m)}) = b_1 + r_{n_1+1,1}. \quad (18)$$

С другой стороны, из равенств (8) и (9) видно, что

$$\gamma_\mu^{(n)} = f(\alpha_\mu^{(n)}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(\sum_{k=1}^n a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}} \right)^j,$$

таким образом, можно вычислить $\text{ord}_p P(\gamma_1^{(n_1)}, \dots, \gamma_m^{(n_m)})$ как линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами чисел $1, r_{1,1}, \dots, r_{n_1,1}, \dots, r_{1,m}, \dots, r_{n_m,m}$. Однако, учитывая равенство (18), получаем искомое противоречие с условиями $n_1 > n_0$ и (14). Теорема 9 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 10. Также, рассуждение индукцией по m . База индукции, при $m = 1$, уже была доказана в утверждении 3, теперь необходимо осуществить переход. Предположим, что $m > 1$, теорема уже доказана для каждого подмножества $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_m\}$, а требуется провести доказательство для $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. Предположим противное, а именно, пусть $l \cdot m$ чисел $f_\lambda(\alpha_\mu)$, $\lambda = 1, \dots, l$, $\mu = 1, \dots, m$, являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$. Пусть отличный от константы многочлен

$$P \in \mathbb{Z}_p[\underline{X}] = \mathbb{Z}_p[X_{1,1}, \dots, X_{1,m}; \dots; X_{l,1}, \dots, X_{l,m}] \quad (19)$$

такой, что

$$P(\underline{\gamma}) = P(\gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,m}; \dots; \gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,m}) = 0, \quad (20)$$

где $\gamma_{\lambda,\mu} = f_\lambda(\alpha_\mu)$. В силу предположения индукции, не может произойти такого, что для некоторого μ , многочлен P не зависит от набора переменных $(X_{1,\mu}, \dots, X_{l,\mu})$.

Из соотношений (19) и (20) получается, что

$$P(\underline{X}) = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\lambda=1}^l \frac{\partial P}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\underline{\gamma})(X_{\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda,\mu}) + P^*(\underline{X} - \underline{\gamma}), \quad (21)$$

где каждый моном полинома P^* , состоит из произведения разностей вида $X_{\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda,\mu}$, имеет степень не меньше двух и коэффициент неотрицательного порядка.

Пусть $\alpha_\mu^{(n)}$ и $A_\mu^{(n)}$ определены согласно соотношениям (8), а $\gamma_{\lambda,\mu}^{(n)} = f_\lambda(\alpha_\mu^{(n)})$. Перед тем, как подставить в соотношение (21) вместо переменных $X_{\lambda,\mu}$ значения $\gamma_{\lambda,\mu}^{(n)}$, сделаем предварительные вычисления:

$$\gamma_{\lambda,\mu}^{(n)} - \gamma_{\lambda,\mu} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_\lambda^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!} (A_\mu^{(n)})^i = f'_\lambda(\alpha_\mu) A_\mu^{(n)} + \sum_{i \geq 2} \dots \quad (22)$$

Считая, что n зависит от μ , будем записывать n_μ , из (21) и (22) получаем:

$$\begin{aligned} P(\gamma_{1,1}^{(n_1)}, \dots, \gamma_{1,m}^{(n_m)}; \dots; \gamma_{l,1}^{(n_1)}, \dots, \gamma_{l,m}^{(n_m)}) = \\ = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\lambda=1}^l f'_\lambda(\alpha_\mu) \frac{\partial P}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\underline{\gamma}) A_\mu^{(n_\mu)} + \sum_{\mu} \sum_{\lambda} \frac{\partial P}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\underline{\gamma}) \sum_{i \geq 2} \frac{f_\lambda^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!} (A_\mu^{(n_\mu)})^i + \\ + P^*(\gamma_{1,1}^{(n_1)} - \gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,m}^{(n_m)} - \gamma_{1,m}; \dots; \gamma_{l,1}^{(n_1)} - \gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,m}^{(n_m)} - \gamma_{l,m}) \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь докажем, что для каждого $\mu = 1, \dots, m$, сумма

$$B_\mu^* = \sum_{\lambda=1}^l f'_\lambda(\alpha_\mu) \frac{\partial P}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\underline{\gamma})$$

не обнуляется. Рассмотрим многочлен

$$Q_\mu(X_{1,\mu}, \dots, X_{l,\mu}) = P(\gamma_{1,1}, \dots, X_{1,\mu}, \dots, \gamma_{1,m}; \dots; \gamma_{l,1}, \dots, X_{l,\mu}, \dots, \gamma_{l,m}), \quad (24)$$

тут, если посмотреть на равенство (20), $X_{\lambda,\mu}$ заменяет $\gamma_{\lambda,\mu}$ для каждого $\lambda = 1, \dots, l$. Покажем, что $Q_\mu(X_{1,\mu}, \dots, X_{l,\mu}) \not\equiv 0$. В противном случае наличие решения $P(\underline{\gamma}) = 0$ говорит о том, что значения переменных $X_{1,\mu}, \dots, X_{l,\mu}$ можно изменить любым образом и получить новое решение. Понятно, что существует набор значений $X_{1,\mu}, \dots, X_{l,\mu} \in \mathbb{Z}_p$, при котором $P(\underline{X}) \not\equiv 0$, иначе очевидно, что многочлен не зависит от остальных переменных, а это противоречит предположению индукции. С другой стороны, подставляя такой набор значений $X_{1,\mu}, \dots, X_{l,\mu}$ в многочлен P , получится новый многочлен, который зависит лишь от оставшихся переменных и его существование противоречит предположению индукции. Значит, $Q_\mu(X_{1,\mu}, \dots, X_{l,\mu})$ отличный от константы многочлен с коэффициентами из

$$\mathbb{Z}_p[\gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,\mu-1}, \gamma_{1,\mu+1}, \dots, \gamma_{1,m}; \dots; \gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,\mu-1}, \gamma_{l,\mu+1}, \dots, \gamma_{l,m}].$$

Поскольку функции $f_1, \dots, f_l$ являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$, в силу леммы 2, функции являются алгебраически независимыми над $\mathbb{C}_p$, значит каждая функция

$$\varphi_\mu(z) = Q_\mu(f_1(z), \dots, f_l(z)), \quad \mu = 1, \dots, m \quad (25)$$

отлична от константы. Учитывая равенство (24), получаем:

$$\varphi'_\mu(\alpha_\mu) = \sum_{\lambda=1}^l f'_\lambda(\alpha_\mu) \frac{\partial Q_\mu}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\gamma_{1,\mu}, \dots, \gamma_{l,\mu}) = B_\mu^*. \quad (26)$$

С другой стороны, функции $\varphi_\mu(z)$, заданные соотношением (25), представляются степенными рядами, как в лемме 5, значит, благодаря лемме 6, мы знаем, что $\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, $\mu = 1, \dots, m$, а в силу (26), $B_\mu^* \neq 0$.

Определим $b_\mu^* = \text{ord}_p B_\mu^*$, не умаляя общности

$$b_1^* \geq \dots \geq b_m^*.$$

Опять же, каждое из b_μ^* представляет конечную линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами чисел 1 и $r_{k,v}$. При каждом $\mu = 1, \dots, m$ зафиксируем линейную комбинацию для b_μ^* . Далее, используя b_μ^* вместо b_μ , повторим ход рассуждения для теоремы 9, выберем новые $n_1, \dots, n_m$, достаточно большие, чтобы

$$\text{ord}_p \left(\sum_{\mu=1}^m B_\mu^* A_\mu^{(n_\mu)} \right) = b_1^* + r_{n_1+1,1}.$$

И так же, как при доказательстве теоремы 9, получаем противоречие, поскольку в силу выбора чисел n_μ , возвращаясь к равенству (23), порядок правой части равен $b_1^* + r_{n_1+1,1}$ и представляется недопустимой линейной комбинацией, которая получается при вычислении порядка в левой части равенства.

Заключение

Данная статья, как исследование, продолжает некоторые работы П. Бундшу и В.Г. Чирского. Доказанные теоремы обобщают некоторые результаты из [5], [6] в том смысле, что для частного случая $g = p$ уже были доказаны в соответствующих формулировках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adams W. Transcendental numbers in the p -adic domain // Amer. J. Math., 1966, V. 88, P. 279–307.
2. Amice Y. Les nombres p -adiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1975.
3. Bertrand D., Chirskii V.G., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse, 2004, V. XIII, №2, P. 241–260.
4. Борович З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. 3-е изд. доп. М.: Наука, 1985.
5. Bundschuh P., Chirskii V.G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I // Arch. Math., 2002, V. 79, P. 345–352.
6. Bundschuh P., Chirskii V.G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II // Acta Arithm., 2004, V. 113, №4, P. 309–326.
7. Bundschuh P., Chirskii V.G. Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$ // Moscow Journ. of Comb. and Number Th., 2015, V. 5, iss. 1-2, P. 14–20.
8. Чирский В.Г. Метод Зигеля-Шидловского в p -адической области. // Фундаментальная и прикладная математика. 2005, Т. 11, №6, С. 221–230.
9. Chirskii V.G. Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$ // Russian Journ. of Math. Physics, 2013, V. 20, №2, P. 149–154.
10. Чирский В.Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады академии наук, 2014, Т. 459, №6, С. 677–679.

11. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Изв. РАН. Сер. мат., 2014, Т. 78, №6, С. 193–210.
12. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Моск. ун-та, Сер.1, мат., мех., 2015, №1, С. 59–61.
13. Чирский В. Г. Арифметические свойства целых полиадических чисел // Чебышёвский сборник, 2015, Т. 16, вып. 1, С. 254–264.
14. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат., 2017, Т. 81, №2, С. 215–232.
15. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to their solutions in the works of Yu. V. Nesterenko // Russian Journ. of Math. Physics, 2017, V. 24, №2, P. 153–171.
16. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических f -рядов // Доклады академии наук, 2018, Т. 483, №3, С. 257–259.
17. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric f -series // Doklady Mathematics, 2018, V. 98, №3, P. 589–591.
18. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journ. of Math. Physics, 2019, V. 26, №3, P. 286–305.
19. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric series // Russian Journ. of Math. Physics, 2020, V. 27, №2, P. 175–184.
20. Коблиц Н. p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции; пер. с англ. В. В. Шокурова, под ред. Ю. И. Манина. М.: Мир, 1982.
21. Mahler K. Uber transzendente p -adische Zahlen // Compos. Math. 1935, V. 2, P. 259–275.
22. Mahler K. p -adic numbers and their functions; second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
23. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

REFERENCES

1. Adams W. 1966, “Transcendental numbers in the p -adic domain”, *Amer. J. Math.*, vol. 88, pp. 279–307.
2. Amice Y. 1975, *Les nombres p -adiques*. Presses Universitaires de France, Paris.
3. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. 2004, “Effective estimates for global relations on Euler-type series”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. XIII, no. 2, pp. 241–260.
4. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. 1985, *Teoriya Chisel*, [The theory of numbers], third edition. “Nauka”, Moscow.
5. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2002, “On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I”, *Arch. Math.*, vol. 79, pp. 345–352.
6. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2004, “On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II”, *Acta Arithm.*, vol. 113, no. 4, pp. 309–326.

7. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2015, “Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$ ”, *Moscow Journ. of Comb. and Number Th.*, vol. 5, iss. 1–2, pp. 14–20.
8. Chirskii V. G. 2005, “Siegel–Shidlovskii method in p -adic domain”, *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 11, no. 6, pp. 221–230.
9. Chirskii V. G. 2013, “Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$ ”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 20, no. 2, pp. 149–154.
10. Chirskii V. G. 2014, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients”, *Dokladi akademii nauk*, vol. 459, no. 6, pp. 677–679.
11. Chirskii V. G. 2014, “Arithmetic properties of hypergeometric series with irrational parameters”, *Izv. RAN. Ser. mat.*, vol. 78, no. 6, pp. 193–210.
12. Chirskii V. G. 2015, “On the arithmetic properties of Euler-type series”, *Vestnik Mosk. Univ. Ser.1, mat., mech.*, no. 1, pp. 59–61.
13. Chirskii V. G. 2015, “Arithmetic properties of polyadic integer numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 16, no. 1, pp. 254–264.
14. Chirskii V. G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients”, *Izv. RAN. Ser. mat.* vol. 81, no. 2, pp. 215–232.
15. Chirskii V. G. 2017, “Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to their solutions in the works of Yu.V. Nesterenko”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 24, no. 2, pp. 153–171.
16. Chirskii V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric f -series”, *Dokladi akademii nauk*, vol. 483, no. 3, pp. 257–259.
17. Chirskii V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric f -series”, *Dokladi Mathematics*, vol. 98, no. 3, pp. 589–591.
18. Chirskii V. G. 2019, “Product formula, global relations and polyadic integers”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 26, no. 3, pp. 286–305.
19. Chirskii V. G. 2020, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric series”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 27, no. 2, pp. 175–184.
20. Koblitz N. 1982, p -adic numbers, p -adic analysis, and zeta-functions, 2nd ed.
21. Mahler K. 1935, “Über transzendente p -adische Zahlen”, *Compos. Math.*, vol. 2, pp. 259–275.
22. Mahler K. 1981, p -adic numbers and their functions, second edition, Cambridge University Press, Cambridge.
23. Shidlovskii A. B. 1987, Transcendentnie chisla, [Transcendental numbers], “Nauka”, Moscow.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-257-270

Подпрямая неразложимость и атомы решеток конгруэнций алгебр с оператором и симметрической основной операцией

В. Л. Усольцев

Усольцев Вадим Леонидович — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).

e-mail: usl2004@mail.ru

Аннотация

В статье изучаются атомы решеток конгруэнций и подпрямая неразложимость алгебр с одним оператором и основной операцией меньшинства, определенной специальным образом и называемой симметрической. Операцией меньшинства называется тернарная операция $d(x, y, z)$, удовлетворяющая тождествам $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = x$. Алгебра подпрямая неразложима, если она имеет наименьшую ненулевую конгруэнцию. Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из двух непустых непересекающихся частей: основной, которая может содержать произвольные операции, и дополнительной, состоящей из операторов. Операторами называются унарные операции, действующие как эндоморфизмы относительно основных операций, то есть перестановочные с основными операциями. Решетка с нулем называется атомной, если любой ее элемент содержит некоторый атом. Решетка с нулем называется точечной (atomistic), если любой ее ненулевой элемент представляется как решеточное объединение некоторого множества атомов.

Показано, что решетка конгруэнций алгебр с одним оператором и основной симметрической операцией является атомной. Описано строение атомов в решетках конгруэнций алгебр данного класса. Получено полное описание подпрямых неразложимых алгебр в данном классе, а также алгебр, имеющих точечную решетку конгруэнций.

Ключевые слова: подпрямая неразложимая алгебра, решетка конгруэнций, атом решетки конгруэнций, атомная решетка, алгебра с операторами.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:

В. Л. Усольцев. Подпрямая неразложимость и атомы решеток конгруэнций алгебр с оператором и симметрической основной операцией // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 257–270.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 512.579

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-257-270

The subdirect irreducibility and the atoms of congruence lattices of algebras with one operator and the symmetric main operation

V. L. Usoltsev

Usoltsev Vadim Leonidovich — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Social-Pedagogical University (Volgograd).

e-mail: usl2004@mail.ru

Abstract

In that paper we study atoms of congruence lattices and subdirectly irreducibility of algebras with one operator and the main symmetric operation. A ternary operation $d(x, y, z)$ satisfying identities $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = x$ is called a minority operation. The symmetric operation is a minority operation defined by specific way. An algebra A is called subdirectly irreducible if A has the smallest nonzero congruence. An algebra with operators is an universal algebra whose signature consists of two nonempty non-intersectional parts: the main one which can contain arbitrary operations, and the additional one consisting of operators. The operators are unary operations that act as endomorphisms with respect to the main operations, i.e., one that permutable with main operations. A lattice L with zero is called atomic if any element of L contains some atom. A lattice L with zero is called atomistic if any nonzero element of L is a join of some atom set.

It shown that congruence lattices of algebras with one operator and main symmetric operation are atomic. The structure of atoms in the congruence lattices of algebras in given class is described. The full describe of subdirectly irreducible algebras and of algebras with an atomistic congruence lattice in given class is obtained.

Keywords: subdirectly irreducible algebra, congruence lattice, atom of congruence lattice, atomic lattice, algebra with operators.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

V. L. Usoltsev, 2021, "The subdirect irreducibility and the atoms of congruence lattices of algebras with one operator and the symmetric main operation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 257–270.

Введение

Подпрямо неразложимые алгебры играют важную роль в универсальной алгебре. Алгебра подпрямо неразложима, если она имеет наименьшую ненулевую конгруэнцию, называемую монолитом. Хорошо известно (см., например, [1]), что любая алгебра разлагается в подпрямое произведение подпрямо неразложимых алгебр, а любое многообразие алгебр вполне определяется своими подпрямо неразложимыми алгебрами. Известно также, что любая алгебра сигнатуры, содержащей не менее одной операции ариности большей либо равной двум, вложима в некоторую подпрямо неразложимую алгебру той же сигнатуры. Более того, в некоторых классах алгебр любая алгебра изоморфна фактор-алгебре некоторой подпрямо неразложимой

алгебры по ее монолиту [2]. В связи с изложенным выше, естественный интерес вызывает задача описания подпрямых неразложимых алгебр в различных классах алгебр (см. [3]–[9]).

В терминах теории решеток неоднородная алгебра подпрямая неразложима тогда и только тогда, когда решетка ее конгруэнций имеет атом, содержащийся во всех ненулевых конгруэнциях алгебры. Элемент a решетки $\langle L, \leq \rangle$ с нулем 0 называется атомом, если для любого $x \in L$ из $0 < x \leq a$ следует, что $x = a$. Решетка с нулем называется атомной, если любой ее элемент содержит некоторый атом. Таким образом, описание атомов и изучение условий атомарности решеток конгруэнций облегчает исследование подпрямых неразложимых алгебр. В [10] были описаны атомы в решетках конгруэнций унаров, то есть алгебр с одной унарной операцией. Там же были получены необходимые и достаточные условия, при которых решетка конгруэнций унара является точечной. Решетка с нулем называется точечной (atomistic), если любой ее ненулевой элемент представляется как решеточное объединение некоторого множества атомов.

В настоящей работе изучаются атомы решеток конгруэнций и подпрямые неразложимые алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f \rangle$ с оператором f и основной операцией меньшинства $s(x, y, z)$, определенной ниже. Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из двух непустых непересекающихся частей: основной, которая может содержать произвольные операции, и дополнительной, состоящей из операторов. Операторами называются унарные операции, действующие как эндоморфизмы относительно основных операций, то есть перестановочные с основными операциями. Свойства алгебр с дополнительной унарной операцией, связанные с подпрямой неразложимостью, рассматривались в [11]. Подпрямые неразложимые алгебры с операторами изучались в [6], [12].

Алгебры с операторами естественным образом связаны с унарами. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω , то унар $\langle A, f \rangle$ называется унарным редуктом алгебры $\langle A, \Omega \rangle$. Мы изучаем алгебры с операторами в терминах их унарных редуктов. Это позволяет с единых позиций рассматривать алгебры с операторами, имеющие различные основные сигнатуры.

Операцией меньшинства (см., например, [13]) называется тернарная операция $d(x, y, z)$, удовлетворяющая тождествам $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(y, x, y) = x$. Из определения следует, что операция меньшинства является мальцевской.

В [14] на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ задается тернарная операция $p(x, y, z)$, перестановочная с операцией f . Основные результаты, полученные при изучении свойств конгруэнций алгебр $\langle A, p, f \rangle$ с оператором f , приводятся в [15]. В [12] полностью описаны подпрямые неразложимые алгебры в классе алгебр $\langle A, p, f \rangle$. В [16] получено описание атомов решеток конгруэнций алгебр данного класса, а также алгебр этого класса, имеющих точечную решетку конгруэнций.

В [17] показано, что на любом унаре $\langle A, f \rangle$ можно так задать тернарную операцию $s(x, y, z)$, что алгебра $\langle A, s, f \rangle$ становится алгеброй с оператором f . Предложенная конструкция восходит к [14]. Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента z унара $\langle A, f \rangle$ через $f^n(z)$ обозначается результат n -кратного применения операции f к элементу z ; при этом $f^0(z) = z$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$s(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \quad (1)$$

Из (1) следует, что операция s удовлетворяет тождествам $s(x, y, y) = s(y, y, x) = s(y, x, y) = x$, то есть является операцией меньшинства. Таким образом, класс алгебр $\langle A, s, f \rangle$ содержится в многообразии, определенном тождествами операции меньшинства и тождеством перестановочности $f(s(x, y, z)) = s(f(x), f(y), f(z))$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что данный

класс является конгруэнц-модулярным.

Слабой операцией почти единогласия (WNU, weak near-unanimity operation) (см., например, [18]) называется идемпотентная n -арная операция d , где $n > 1$, для которой выполняются тождества $d(y, x, \dots, x) = d(x, y, \dots, x) = \dots = d(x, x, \dots, y)$. Алгебры, имеющие термальную слабую операцию почти единогласия находят применение в рамках алгебраического подхода [19] к исследованию вычислительной сложности ограничений задачи CSP (Constraint Satisfaction Problem) и в смежных областях алгебры. Поскольку $s(x, x, x) = x$ и $s(x, x, y) = s(x, y, x) = s(y, x, x)$ для любых x, y , то операция s является тернарной слабой операцией почти единогласия. В духе работы [18] операция s была названа в [17] симметрической. В [20] были описаны простые, абелевы и полиномиально полные алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f \rangle$, в [21] — гамильтоновы алгебры данного класса.

Основные определения и обозначения

Обозначим через $\text{Con } A$ решетку конгруэнций универсальной алгебры A , а через ∇_A и Δ_A — единичную и нулевую конгруэнции алгебры A соответственно. Класс конгруэнции θ , порожденный элементом x , обозначим через $[x]\theta$.

Для любых чисел $n > 0$, $m \geq 0$ положим $C_n^m = \langle a | f^m(a) = f^{m+n}(a) \rangle$. Унар C_n^0 называется циклом длины n . Элемент унара называется циклическим, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом; в противном случае будем называть элемент нециклическим. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \dots$, где $n > 0$ и $0 \leq t_1 < t_2 < \dots$. Элемент a унара называется периодическим, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geq 0$ и $n \geq 1$, и непериодическим в противном случае. Через $T(A)$ и $D(A)$ обозначаются множества всех периодических и непериодических элементов унара A соответственно. Унар $\langle A, f \rangle$ называется периодическим, если $A = T(A)$, и унаром без кручения, если $A = D(A)$. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t , для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geq 1$, называется глубиной элемента a и обозначается через $t(a)$. Глубиной $t(A)$ унара A называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, глубина унара принимается формально равной бесконечности. Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их суммой и обозначается через $B + C$. Унар $\langle A, f \rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ при некоторых $n \geq 0$, $m \geq 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется компонентой связности унара A . Элемент a унара называется узловым, если найдутся такие различные элементы b и c (возможно, циклические), отличные от a , что $f(b) = a = f(c)$. Элемент a унара $\langle A, f \rangle$ называется неподвижным, если $f(a) = a$. Связный унар с неподвижным элементом называется корнем. Корнем без нетривиальных узлов называется корень, не имеющий узловых элементов, кроме, может быть, неподвижного. Через $\langle a_1, \dots, a_n \rangle_f$ обозначается подунар унара $\langle A, f \rangle$, порожденный элементами $a_1, \dots, a_n \in A$. Если элементы a, b удовлетворяют условию $a \notin \langle b \rangle_f$, $b \notin \langle a \rangle_f$, то будем говорить, что они f -независимы.

Пусть B — подунар произвольного унара $\langle A, f \rangle$. Через θ_B обозначается конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$, определенная по правилу [3]: условие $x\theta_B y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in B$.

Пусть v — узловым элементом унара $\langle A, f \rangle$. Через θ_v обозначается конгруэнция унара $\langle A, f \rangle$, определенная по правилу [12]: условие $x\theta_v y$ для любых $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in f^{-1}(v)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Через σ_k обозначается конгруэнция $\text{Ker } f^k$ алгебры $\langle A, \Omega \cup \{f\} \rangle$ с оператором f и произвольной основной сигнатурой Ω . Положим также $\sigma_0 = \Delta_A$.

Атомы решеток конгруэнций алгебр $\langle A, s, f \rangle$

Далее везде через $\langle A, s, f \rangle$ обозначается алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1).

ЛЕММА 1. *Отношение θ_v на унаре $\langle A, f \rangle$, содержащем узловой элемент v , является атомарной конгруэнцией алгебры $\langle A, s, f \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что отношение θ_v стабильно относительно операции s .

Пусть $x_1\theta_v x_2, y_1\theta_v y_2, z_1\theta_v z_2$ для $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in A$. Отсюда, $f(x_1) = f(x_2)$, $f(y_1) = f(y_2)$ и $f(z_1) = f(z_2)$. Обозначим $a_1 = s(x_1, y_1, z_1)$, $a_2 = s(x_2, y_2, z_2)$. Предположим, что $(a_1, a_2) \notin \theta_v$. Тогда $a_1 \neq a_2$, причем $a_1 \notin f^{-1}(v)$ или $a_2 \notin f^{-1}(v)$. Учитывая перестановочность операций f и s , имеем $f(a_1) = f(s(x_1, y_1, z_1)) = s(f(x_1), f(y_1), f(z_1)) = s(f(x_2), f(y_2), f(z_2)) = f(s(x_2, y_2, z_2)) = f(a_2)$. Из полученного равенства следует, что утверждения $a_1 \notin f^{-1}(v)$ и $a_2 \notin f^{-1}(v)$ выполняются одновременно.

По определению (1), достаточно рассмотреть шесть случаев:

- 1) $s(x_1, y_1, z_1) = z_1, s(x_2, y_2, z_2) = y_2$;
- 2) $s(x_1, y_1, z_1) = z_1, s(x_2, y_2, z_2) = x_2$,
- 3) $s(x_1, y_1, z_1) = y_1, s(x_2, y_2, z_2) = z_2$;
- 4) $s(x_1, y_1, z_1) = y_1, s(x_2, y_2, z_2) = x_2$,
- 5) $s(x_1, y_1, z_1) = x_1, s(x_2, y_2, z_2) = z_2$;
- 6) $s(x_1, y_1, z_1) = x_1, s(x_2, y_2, z_2) = y_2$.

Рассмотрим случай 1). По предположению, $z_1 \neq y_2$ и, как показано выше, $z_1 \notin f^{-1}(v)$, $y_2 \notin f^{-1}(v)$. Последнее, по определению отношения θ_v , влечет $y_1 = y_2, z_1 = z_2$. При этом $x_1 \neq x_2$, так как $a_1 \neq a_2$. Тогда $f(x_1) = v = f(x_2)$. Из условий $s(x_1, y_1, z_1) = z_1, s(x_2, y_2, z_2) = y_2$ вытекают соотношения

$$k(x_1, y_1) < k(y_1, z_1), \quad k(x_2, y_1) = k(y_1, z_1). \quad (2)$$

Заметим, что поскольку $y_1 = y_2 \notin f^{-1}(v)$ и $x_1 \in f^{-1}(v)$, то $k(x_1, y_1) \neq 0, k(x_1, y_2) \neq 0$. Если $k(x_1, y_1) = \infty$, то получаем противоречие с (2). Утверждение $k(x_2, y_1) = \infty$ противоречит условию $f(a_1) = f(a_2)$.

Пусть $k(x_1, y_1) = n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f^n(y_1) = f^n(x_1) = f^{n-1}(v) = f^{n-1}(f(x_2)) = f^n(x_2)$, откуда $k(x_2, y_1) < \infty$ и, более того, $k(x_2, y_1) \leq k(x_1, y_1)$. Аналогично, если $k(x_2, y_1)$ конечно, то $k(x_1, y_1) < \infty$ и $k(x_1, y_1) \leq k(x_2, y_1)$. Таким образом, в случае конечности одного из чисел $k(x_1, y_1), k(x_2, y_1)$ имеем $k(x_1, y_1) = k(x_2, y_1)$, что снова противоречит (2).

Случаи 3), 4), 6) приводятся к противоречию аналогично случаю 1).

Рассмотрим случай 2). По предположению, $z_1 \neq x_2$ и $z_1 \notin f^{-1}(v), x_2 \notin f^{-1}(v)$. Из определения отношения θ_v получаем $x_1 = x_2, z_1 = z_2$. При этом $y_1 \neq y_2$, так как $a_1 \neq a_2$. Тогда $f(y_1) = v = f(y_2)$. Из условий $s(x_1, y_1, z_1) = z_1, s(x_2, y_2, z_2) = x_2$ вытекают соотношения

$$k(x_2, y_1) < k(y_1, z_2), \quad k(x_2, y_2) > k(y_2, z_2). \quad (3)$$

Используя условие $f(y_1) = v = f(y_2)$, по аналогии со случаем 1) получаем $k(x_2, y_1) = k(x_2, y_2)$ и $k(y_1, z_2) = k(y_2, z_2)$, что противоречит (3).

Случай 5) приводится к противоречию аналогично случаю 2).

Таким образом, $\theta_v \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$.

Теперь докажем, что θ_v — атом $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$. Предположим, что $\Delta_A < \gamma < \theta_v$ для некоторой конгруэнции $\gamma \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$. Тогда $(b, c) \in \theta_v$ для некоторой пары $(b, c) \notin \gamma$, откуда $b \neq c$ и $f(b) = v = f(c)$. Так как $\Delta_A < \gamma$, то $(d, e) \in \gamma$ для некоторых различных элементов $d, e \in A$. Из $\gamma < \theta_v$ следует $(d, e) \in \theta_v$, а значит $f(d) = v = f(e)$. Тогда $k(e, d) = 1$ и $f(b) = f(c) = f(e)$, откуда $k(b, e) \leq 1, k(c, e) \leq 1$.

Если $k(b, e) < 1$, то $b = e$. Отсюда, $d = s(b, e, d)\gamma s(b, d, d) = b$, то есть, $d\gamma b$. При $k(c, e) < 1$ получаем $c = e$, откуда $d = s(c, e, d)\gamma s(c, d, d) = c$. Тогда $b\gamma d\gamma c$, что противоречит выбору пары (b, c) . Если же $k(c, e) = 1$, то $e = s(c, e, d)\gamma s(c, d, d) = c$, откуда $b\gamma d\gamma e\gamma c$, что опять ведет к противоречию.

Если $k(b, e) = 1$, то $e = s(b, e, d)\gamma s(b, d, d) = b$. Если $k(c, e) < 1$, то есть, $e = c$, то получаем противоречие с выбором пары (b, c) . Если же $k(c, e) = 1$, то $e = s(c, e, d)\gamma s(c, d, d) = c$, что снова ведет к противоречию. $\square$

Из лемм 1 [22] и 11.2 [23] вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ содержит цикл неединичной длины, а θ — нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$. Тогда любой класс конгруэнции θ содержит не более одного циклического элемента унара $\langle A, f \rangle$.

ЛЕММА 3. Пусть $\langle A, f \rangle$ — связный периодический унар с единственным узловым элементом v , содержащий цикл неединичной длины h . Тогда любой неоднородный класс произвольной ненулевой конгруэнции θ алгебры $\langle A, s, f \rangle$ содержит циклический элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b, c \in A$ — различные нециклические элементы, причем $b\theta c$. Рассмотрим сначала случай, когда один из них выражается через другой с помощью операции f . Пусть, для определенности, $c = f^m(b)$ для некоторого $m > 0$. Отсюда, $b\theta f^{km}(b)$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда при подходящем l выполнится условие $lm > t(b)$, откуда $f^{lm}(b)$ — искомый циклический элемент.

Пусть теперь элементы b и c f -независимы. Положим сначала, что $t(b) = t(c) = p \in \mathbb{N}$. Разделим p на h с остатком: $p = dh + r$, где $d \geq 0$ и $0 \leq r < h$. Обозначим через a такой циклический элемент из A , что $f^r(a) = v$. Тогда $f^p(b) = v = f^{dh}(f^r(a)) = f^p(a)$. При этом, для любых $l < p$ имеем $f^l(a) \neq f^l(b)$, поскольку элемент $f^l(b)$ нециклический. Отсюда, $k(a, b) = p$. Из условия $t(b) = t(c) = p$ имеем $f^p(b) = f^p(c)$. Предположение, что $f^l(b) = f^l(c)$ для некоторого $l < p$ противоречит условию единственности узлового элемента. Отсюда, $k(b, c) = p = k(a, b)$. Тогда $s(a, b, c) = b$. С другой стороны, $s(a, b, b) = a$, откуда $a\theta b\theta c$.

Теперь положим $t(b) \neq t(c)$. Без ограничения общности примем, что $t(b) = t(c) + m$ для некоторого $m > 0$. Разделим m на h с остатком: $m = dh + r$, $d \geq 0$, $0 \leq r < h$. Из условия $b\theta c$ и леммы 11.2 [23] следует, что $f^p(b) = f^p(c)$ для некоторого p . Поскольку для всех $l < t(b)$ в силу единственности узлового элемента выполняется условие $f^l(b) \neq f^l(c)$, то $p \geq t(b)$. Запишем $p = t(b) + k$, $k \geq 0$. Тогда верны следующие равенства: $f^p(b) = f^{t(b)+k}(b) = f^k(v)$, $f^p(c) = f^{t(b)+k}(c) = f^{t(c)+m+k}(c) = f^{t(c)+dh+r+k}(c) = f^{dh+r+k}(v) = f^{r+k}(v)$, откуда получаем $f^k(v) = f^{r+k}(v)$. Так как $f^k(v)$ — циклический элемент, а $r < h$, то $r = 0$. Таким образом, $t(b) = t(c) + dh$, откуда $f^{t(b)}(b) = v = f^{t(c)+dh}(c) = f^{t(b)}(c)$ и, окончательно, $k(b, c) = t(b)$.

Разделим $t(b)$ на h с остатком: $t(b) = th + q$, где $t \geq 0$, $0 \leq q < h$. Обозначим через a циклический элемент $f^{h-q}(v)$. Тогда $v = f^q(a) = f^{q+th}(a)$. Отсюда, $k(a, b) = t(b) = k(b, c)$. Из последнего равенства, как и выше, получаем $a\theta c$. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $\langle A, f \rangle$ — связный периодический унар с единственным узловым элементом v , содержащий цикл неединичной длины h , θ — нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, s, f \rangle$, $x, a \in A$, где a — циклический элемент, x — нециклический элемент, для которого $|[x]\theta| > 1$, и r — остаток от деления $t(x)$ на h . Тогда условие $a\theta x$ выполняется в том и только в том случае, когда $a = f^{h-r}(v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $a\theta x$. По лемме 11.2 [23], $k(a, x) = p$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$, а значит, $f^p(a) = f^p(x)$ и, следовательно, элемент $f^p(x)$ — циклический. Тогда, по определению глубины элемента, $t(x) \leq p$, откуда $p = t(x) + m$ для некоторого $m \geq 0$. Отсюда, $f^p(a) = f^{t(x)+m}(x) = f^m(f^{t(x)}(x)) = f^m(v)$. Так как операция f на цикле инъективна,

то $f^{p-m}(a) = v$, откуда $f^{t(x)}(a) = v$. По условию, $t(x) = dh + r$ для некоторого $d \geq 0$. Тогда из $f^{dh+r}(a) = v$ следует $a = f^{h-r}(v)$.

Достаточность. Пусть $a = f^{h-r}(v)$. Так как $|[x]\theta| > 1$, то по лемме 3 найдется такой циклический элемент $z \in A$, что $z\theta x$. Тогда $f^{t(x)}(z)\theta f^{t(x)}(x) = v$. Так как $f^{t(x)}(z)$ и v — циклические элементы, то по лемме 2 имеем $f^{t(x)}(z) = v$. Поскольку по условию, $t(x) = dh + r$ для некоторого $d \geq 0$, то $v = f^{dh+r}(z) = f^r(z)$, откуда $z = f^{h-r}(v) = a$. $\square$

ЛЕММА 5. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ содержит собственный подунар B , изоморфный C_1^1 , причем для всех $x \in A \setminus B$ выполняется $f(x) \neq a$, где a — неподвижный элемент B . Тогда отношение θ_B — атом решетки $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В общем случае унар $\langle A, f \rangle$ можно представить как $E + D$, где E — компонента связности, содержащая подунар B , а D — либо произвольный подунар, либо $\emptyset$ (в случае связности $\langle A, f \rangle$).

Пусть $x_1\theta_B x_2$, $y_1\theta_B y_2$, $z_1\theta_B z_2$ для $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in A$. Обозначим $a_1 = s(x_1, y_1, z_1)$, $a_2 = s(x_2, y_2, z_2)$ и предположим, что $(a_1, a_2) \notin \theta_B$. Рассуждая как при доказательстве леммы 1, получаем, что $f(a_1) = f(a_2)$, условия $a_1 \notin B$, $a_2 \notin B$ выполняются одновременно, и без ограничения общности достаточно рассмотреть лишь два из возникающих случаев для значений a_1, a_2 , а именно, случаи $a_1 = x_1$, $a_2 = z_2$ и $a_1 = z_1$, $a_2 = y_2$.

Рассмотрим сначала случай, когда $a_1 = x_1$, $a_2 = z_2$. По предположению, $x_1 \neq z_2$, $x_1 \notin B$, $z_2 \notin B$. Тогда из $x_1\theta_B x_2$, $z_1\theta_B z_2$ следует, что $x_1 = x_2$, $z_1 = z_2$. Так как $a_1 \neq a_2$, то $y_1 \neq y_2$, а значит, $\{y_1, y_2\} = B$. Из условий $s(x_1, y_1, z_1) = x_1$, $s(x_2, y_2, z_2) = z_2$ вытекают соотношения

$$k(x_1, y_1) > k(y_1, z_1), \quad k(x_1, y_2) < k(y_2, z_1). \quad (4)$$

Так как $f(a_1) = f(a_2)$, то элементы x_1, z_2 лежат в одной компоненте связности.

Пусть $x_1, z_2 = z_1 \in E$. Тогда из $x_1, z_1 \notin B$ вытекает $t(x_1) > t(y_1)$, $t(x_1) > t(y_2)$, $t(z_1) > t(y_1)$, $t(z_1) > t(y_2)$ и, следовательно, по лемме 10 [24], $k(x_1, y_1) = t(x_1) = k(x_1, y_2)$ и $k(y_1, z_1) = t(z_1) = k(y_2, z_1)$, что противоречит (4). Пусть теперь $x_1, z_2 = z_1 \in D$ (в случае, если $\langle A, f \rangle$ несвязен). Тогда $k(x_1, y_1) = \infty = k(x_1, y_2)$ и $k(y_1, z_1) = \infty = k(y_2, z_1)$, что снова ведет к противоречию.

Теперь рассмотрим случай, когда $a_1 = z_1$, $a_2 = y_2$. По предположению, $z_1 \neq y_2$ и $z_1, y_2 \notin B$. Последнее, по определению отношения θ_B , влечет $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$. При этом $x_1 \neq x_2$, так как $a_1 \neq a_2$. Тогда $\{x_1, x_2\} = B$. Из условий $s(x_1, y_1, z_1) = z_1$, $s(x_2, y_2, z_2) = y_2$ вытекают соотношения

$$k(x_1, y_1) < k(y_1, z_1), \quad k(x_2, y_1) = k(y_1, z_1). \quad (5)$$

Пусть $y_1 \in E$. Из $y_1 \notin B$ вытекает $t(y_1) > t(x_1)$, $t(y_1) > t(x_2)$ и, следовательно, по лемме 10 [24], $k(x_1, y_1) = t(y_1) = k(x_2, y_1)$. Последнее равенство противоречит условию (5). Если $y_1 \in D$, то $k(x_1, y_1) = \infty = k(x_2, y_1)$, что также ведет к противоречию.

Атомарность конгруэнции $\theta_B \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$ следует из ее определения. $\square$

ЛЕММА 6. Пусть $\langle A, f \rangle$ — связный периодический унар с единственным узловым элементом v и циклом длины $h > 1$. Пусть также элементы $x, y \in A$ различны и не циклически, $t(x) \leq p$, $t(y) \leq p$ и $f^p(x) = f^p(y)$ для некоторого $p > 0$. Тогда $t(x) \equiv t(y)(h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $h > 1$, то $f^{t(x)}(x) = v = f^{t(y)}(y)$. Из условий $t(x) \leq p$, $t(y) \leq p$ следует, что $p = t(x) + l$, $p = t(y) + k$ для некоторых $l, k \geq 0$. Отсюда, $f^{t(x)+l}(x) = f^{t(y)+k}(y)$, $f^l(f^{t(x)}(x)) = f^k(f^{t(y)}(y))$ и $f^l(v) = f^k(v)$. Поскольку v — циклический элемент, то $l \equiv k(h)$, откуда, учитывая $t(x) + l = t(y) + k$, имеем $t(x) \equiv t(y)(h)$. $\square$

ТЕОРЕМА 1. Если $\langle A, s, f \rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1), то решетка конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ является атомной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если алгебра $\langle A, s, f \rangle$ проста, то утверждение теоремы очевидно, поэтому далее полагаем, что $\langle A, s, f \rangle$ имеет нетривиальную конгруэнцию.

Докажем сначала, что решетка $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ имеет хотя бы один атом. По теореме 9 [20], унар $\langle A, f \rangle$ неизоморфен корню глубины 1, а операция f неинъективна на A . Тогда найдутся такие различные элементы $u, w \in A$, что $f(u) = f(w)$. Если $f(u) \notin \{u, w\}$, то элемент $f(u)$ — узловой, и по лемме 1 решетка $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ имеет атом $\theta_{f(u)}$. В противном случае либо u , либо w является неподвижным элементом. Без ограничения общности положим, что $f(u) = u$. Если элемент u — узловой, то θ_u — атом. В противном случае $\{u, w\}$ — подунар унара $\langle A, f \rangle$, удовлетворяющий условиям леммы 5, и по этой лемме, конгруэнция $\theta_{\{u, w\}}$ — атом.

Очевидно, что единичная конгруэнция включает любой атом решетки $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$. Зафиксируем произвольную нетривиальную конгруэнцию $\varphi \in \text{Con}\langle A, s, f \rangle$ и докажем, что она содержит некоторый атом. Поскольку φ нетривиальна, то $a\varphi b$ для некоторых различных $a, b \in A$. Тогда либо эти элементы f -независимы, либо один выражается через другой с помощью операции f . Кроме того, по лемме 11.2 [23], $k(a, b) = p$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$, то есть $f^p(a) = f^p(b)$.

Случай 1. Пусть $a \notin \langle b \rangle_f$, $b \notin \langle a \rangle_f$.

Обозначим элемент $f^p(a)$ через v . Из определения $k(a, b)$ следует, что $f^{p-1}(a) \neq f^{p-1}(b)$. Пусть сначала элемент v не является неподвижным. Если $f^p(a) = f^{p-1}(a)$ или $f^p(a) = f^{p-1}(b)$, то либо $f^{p-1}(a)$, либо $f^{p-1}(b)$ — неподвижный, что противоречит предположению. Отсюда, элемент v — узловой, и тогда по лемме 1 конгруэнция θ_v — атом. Из условия $a\varphi b$ следует $f^{p-1}(a)\varphi f^{p-1}(b)$. С другой стороны, $f(f^{p-1}(a)) = v = f(f^{p-1}(b))$, откуда $f^{p-1}(a)\theta_v f^{p-1}(b)$. Тогда $\varphi \cap \theta_v \neq \Delta_A$, что влечет $\theta_v \subseteq \varphi$.

Пусть теперь $f(v) = v$. Тогда a, b — периодические элементы. Положим $t(a) = t(b)$. Тогда из условия $k(a, b) = p$ следует $t(a) = p = t(b)$ и $\langle a \rangle_f \cap \langle b \rangle_f = \{v\}$. Отсюда $|f^{p-1}(a), v, f^{p-1}(b)| = 3$ и $f^{p-1}(a)\theta_v f^{p-1}(b)$. Тогда, как и выше, $\theta_v \subseteq \varphi$.

Предположим теперь, что $t(a) \neq t(b)$ и без ограничения общности положим $t(a) > t(b)$. Поскольку $t(f(a)) = t(a) - 1$, $t(f(b)) = t(b) - 1$, то по лемме 10 [24], $k(f(a), f(b)) = t(a) - 1$ и $k(f(b), b) = t(b)$, откуда $k(f(a), f(b)) \geq k(f(b), b)$. Тогда $s(f(a), f(b), b) \in \{f(a), f(b)\}$. С другой стороны, $s(f(a), f(a), b) = b$. Так как $f(a)\varphi f(b)$, то $b\varphi f(b)$. Из последнего следует, что все элементы подунара $\langle a, b \rangle_f$ принадлежат классу $[v]\varphi$. Поскольку $a \neq b$ и $f^p(a) = f^p(b)$, то найдутся такие наименьшие числа $m \leq t(a)$, $q \leq t(b)$, что $f^m(a) = f^q(b)$. Обозначим элемент $f^m(a)$ через w . По условию случая 1 имеем $m > 0$, $q > 0$. Тогда $f^{m-1}(a) \neq f^{q-1}(b)$, то есть, элемент w — узловой. Отсюда, $(f^{m-1}(a), f^{q-1}(b)) \in \varphi \cap \theta_w$, что влечет $\theta_w \subseteq \varphi$.

Случай 2. Пусть, без ограничения общности, $b = f^k(a)$ для некоторого $k > 0$. Тогда $f^p(a) = f^k(f^p(a))$, то есть, элемент $f^p(a)$ — циклический, и $\langle a \rangle_f \cong C_h^t$ для некоторых $t \geq 0$, $h \geq 1$. По лемме 2, элементы a, b не могут быть циклическими одновременно. Отсюда элемент a — не циклический и $0 < t(a) \leq p$.

Пусть $h > 1$. Тогда подунар $\langle a \rangle_f$ имеет единственный узловой элемент $v = f^{t(a)}(a)$, и $t = t(a)$. Предположим сначала, что элемент b — циклический. В этом случае подунар $\langle a \rangle_f$ удовлетворяет условиям леммы 4, а значит, из $a\varphi b$ следует $b = f^{h-r}(v)$, где r — остаток от деления $t(a)$ на h . Отсюда $t(a) = dh + r$ для некоторого $d \geq 0$. При $r > 0$ имеем $f^{r-1}(b) = f^{h-1}(v)$. Тогда $f^{t(a)-1}(b) = f^{dh+r-1}(b) = f^{r-1}(b)$. Из $a\varphi b$ получаем $f^{t(a)-1}(a)\varphi f^{t(a)-1}(b) = f^{r-1}(b)$. В то же время, из $f(f^{t(a)-1}(a)) = v = f(f^{r-1}(b))$ следует $f^{t(a)-1}(a)\theta_v f^{r-1}(b)$, а значит, $\theta_v \subseteq \varphi$. Если же $r = 0$, то $b = f^h(v) = v$ и $f^{dh}(a) = b$. Тогда $(f^{dh-1}(a), f^{dh-1}(b)) \in \varphi \cap \theta_v$, и снова $\theta_v \subseteq \varphi$.

Пусть теперь элемент b — нециклический. Из $t(a) \leq p$ следует $t(b) \leq p$. Тогда по лемме 6, $t(a) \equiv t(b)(h)$, откуда $t = t(a) = t(b) + dh$ для некоторого $d > 0$. Отсюда $f^{t-1}(b) = f^{t(b)+dh-1}(b) = f^{dh-1}(v) = f^{h-1}(v)$. Учитывая $f(f^{t-1}(a)) = v = f(f^{h-1}(v))$, получаем $f^{t-1}(a)\theta_v f^{h-1}(v) = f^{t-1}(b)$. Тогда $(f^{t-1}(a), f^{t-1}(b)) \in \varphi \cap \theta_v$, что влечет $\theta_v \subseteq \varphi$.

Положим теперь $h = 1$. Тогда $\langle a \rangle_f$ содержит подунар $B \cong C_1^1$. Обозначим его неподвижный элемент через v и положим $B = \{c, v\}$, то есть, $f(c) = v$, откуда $f^{t(a)-1}(a) = c$. Так как

$b = f^k(a)$, то $t(a) = t(b) + k$. Отсюда, $f^{t(a)-1}(b) = f^{t(b)+k-1}(b) = f^{k-1}(v) = v$.

По условию, $f^{t(a)-1}(a)\varphi f^{t(a)-1}(b)$. Если элемент v — узловой, то $f^{t(a)-1}(a) = c\theta_v v = f^{t(a)-1}(b)$ и, следовательно, $\theta_v \subseteq \varphi$. В противном случае B , являющийся подунаром также и унара $\langle A, f \rangle$, удовлетворяет условиям леммы 5, и значит, θ_B — атом решетки $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$. Поскольку $f^{t(a)-1}(b) = v\theta_B c = f^{t(a)-1}(a)$, то получаем $\theta_B \subseteq \varphi$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Неодноэлементная алгебра $\langle A, s, f \rangle$ подпрямой неразложима тогда и только тогда, когда решетка $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ имеет единственный атом.*

Вытекает из следствия 19.3 [1, с. 71].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\langle A, s, f \rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Атомами решетки конгруэнций алгебры $\langle A, s, f \rangle$ являются те и только те конгруэнции, которые определены одним из следующих способов:*

- 1) ∇_A , если операция f инъективна на A , либо унар $\langle A, f \rangle$ является корнем глубины 1;
- 2) θ_v , если унар $\langle A, f \rangle$ не изоморфен корню глубины 1 и содержит узловой элемент v ;
- 3) θ_B , если унар $\langle A, f \rangle$ не изоморфен корню глубины 1 и имеет собственный подунар $B \cong C_1^1$, где для всех $x \in A \setminus B$ элемент $f(x)$ не совпадает с неподвижным элементом подунара B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* В случае 1) утверждение следует из теоремы 9 [20]. Для случаев 2) и 3) оно вытекает из лемм 1 и 5 соответственно.

Необходимость. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда алгебра $\langle A, s, f \rangle$ не проста. Тогда, по теореме 9 [20], операция f не инъективна на A , а унар $\langle A, f \rangle$ не изоморфен корню глубины 1. Пусть φ — атом решетки $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$. В силу нетривиальности φ найдутся такие различные $a, b \in A$, что $a\varphi b$. Рассуждая как в доказательстве теоремы 1, получаем, что во всех рассматриваемых случаях выполняется либо $\theta_v \subseteq \varphi$, либо $\theta_B \subseteq \varphi$, где элемент v и подунар B унара $\langle A, f \rangle$ удовлетворяют условиям случаев 2) и 3) соответственно. Учитывая атомарность φ , отсюда и из лемм 1, 5 имеем $\varphi = \theta_v$, либо $\varphi = \theta_B$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть алгебра $\langle A, s, f \rangle$ подпрямой неразложима. Тогда унар $\langle A, f \rangle$ имеет не более одного узлового элемента.*

Подпрямой неразложимые алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f \rangle$

ЛЕММА 7. *Пусть $\langle A, f \rangle$ — связный унар без кручения. Алгебра $\langle A, s, f \rangle$ подпрямой неразложима тогда и только тогда, когда $\langle A, f \rangle$ имеет единственный узловой элемент, либо операция f инъективна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть операция f не инъективна на A и $\langle A, f \rangle$ либо имеет более одного узлового элемента, либо не содержит узловых элементов. В первом случае по следствию 2 алгебра $\langle A, s, f \rangle$ не является подпрямой неразложимой. Предположим, что $\langle A, f \rangle$ не содержит узловых элементов. Поскольку f не инъективна, то $f(a) = f(b)$ для некоторых различных $a, b \in A$. По предположению, $f(a) \in \{a, b\}$, то есть, какой-то из элементов a, b является неподвижным, что противоречит условию.

Достаточность. Если f инъективна на A , то по теореме 9 [20] алгебра $\langle A, s, f \rangle$ проста. Если же $\langle A, f \rangle$ имеет единственный узловой элемент v , то из теоремы 9 [20], теоремы 2 и отсутствия периодических элементов в $\langle A, f \rangle$ следует, что θ_v — единственный атом $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$. Тогда, по следствию 1, $\langle A, s, f \rangle$ подпрямой неразложима. $\square$

ЛЕММА 8. *Пусть $\langle A, f \rangle$ — связный унар, содержащий собственный подунар $B \cong C_h^0$, $h > 1$. Алгебра $\langle A, s, f \rangle$ подпрямой неразложима тогда и только тогда, когда $\langle A, f \rangle$ имеет единственный узловой элемент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 9 [20] алгебра $\langle A, s, f \rangle$ не проста. Пусть $\langle A, f \rangle$ имеет единственный узловой элемент v . Поскольку $h > 1$, то $\langle A, f \rangle$ не содержит неподвижных элементов. Отсюда, по теореме 2 единственным атомом решетки $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ является θ_v . Обратно, поскольку подунар B — собственный и $h > 1$, то $\langle A, f \rangle$ имеет узловой элемент, а его единственность вытекает из следствия 2. $\square$

ЛЕММА 9. Пусть $\langle A, f \rangle$ — неодноэлементный корень с неподвижным элементом a . Алгебра $\langle A, s, f \rangle$ подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда $\langle A, f \rangle$ — корень без нетривиальных узлов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\langle A, f \rangle$ не изоморфен корню без нетривиальных узлов. Тогда он имеет узловой элемент $v \neq a$. Отсюда, $|A| > 3$ и $t(A) \geq 2$. Тогда найдется такой элемент $b \in A$, что $a = f(b)$. Обозначим $B = \{a, b\}$. Поскольку множество B замкнуто относительно операции f и $|A| > 3$, то B — собственный подунар унара $\langle A, f \rangle$. Если элемент a не узловой, то подунар B удовлетворяет условиям леммы 5 и значит, θ_B — атом решетки $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$. По теореме 2 конгруэнция θ_v также является атомом. Так как $\theta_v \neq \theta_B$, то по следствию 1 алгебра $\langle A, s, f \rangle$ не является подпрямо неразложимой. Если же элемент a узловой, то утверждение вытекает из следствия 2.

Достаточность. Пусть a — узловой элемент унара $\langle A, f \rangle$. По условию, он единственен. Если $t(A) = 1$, то по теореме 9 [20] алгебра $\langle A, s, f \rangle$ проста, а значит, и подпрямо неразложима. Если $t(A) > 1$, то по теореме 2 конгруэнция θ_a — неединичный атом. В силу связности унар $\langle A, f \rangle$ не содержит подунаров, удовлетворяющих условиям леммы 5. Тогда θ_a — единственный атом решетки $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$.

Пусть теперь унар $\langle A, f \rangle$ не содержит узловых элементов. Тогда он изоморфен C_1^t для некоторого $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и, следовательно, содержит подунар $B \cong C_1^1$. Если $B = A$, то по теореме 9 [20] алгебра $\langle A, s, f \rangle$ проста. Если же B — собственный подунар в $\langle A, f \rangle$, то $f(x) \neq a$ для всех $x \in A \setminus B$, то есть, B удовлетворяет условиям леммы 5. Так как унар $\langle A, f \rangle$ — связный, то он не содержит других таких подунаров. Отсюда θ_B — единственный атом решетки $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$. $\square$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\langle A, s, f \rangle$ — алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Алгебра $\langle A, s, f \rangle$ подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) $\langle A, f \rangle$ — унар с инъективной операцией;
- 2) $\langle A, f \rangle$ изоморфен C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
- 3) $\langle A, f \rangle$ — связный периодический унар, имеющий единственный узловой элемент, который является циклическим;
- 4) $\langle A, f \rangle$ — связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент;
- 5) $\langle A, f \rangle$ является суммой одной компоненты связности вида 2)–4) и произвольного числа компонент вида 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. В случае 1) утверждение следует из теоремы 9 [20]. Для случаев 2), 3) и 4) оно вытекает из лемм 9, 8 и 7 соответственно. В случае 5) оно следует из лемм 7–9 и леммы 11.8 [23].

Необходимость. По следствию 2 достаточно рассмотреть случай, когда унар $\langle A, f \rangle$ имеет не более одного узлового элемента. Положим сначала, что он имеет единственный узловой элемент v . Тогда $\langle A, f \rangle$ неизоморфен унарам из пунктов 1), 2) условия теоремы. Если $\langle A, f \rangle$ — связный, то по леммам 7–9 достаточно рассмотреть случай, когда он имеет неподвижный элемент a , не совпадающий с v . В этом случае элемент a не является узловым и $a = f(b)$ для некоторого $b \in A$. Обозначим подунар $\{a, b\}$ через B . По теореме 2, отношения θ_v и θ_B являются несовпадающими атомами решетки $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$, что противоречит следствию 1.

Если $\langle A, f \rangle$ несвязен, то его можно разложить в сумму компоненты D , содержащей элемент v , и подунара E . Предположим, что подунар D неизоморфен ни одному из унаров, перечисленных в пунктах 2)–4) условия теоремы, или операция f на подунаре E не инъективна. В первом из этих случаев, как и выше, $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ содержит более одного атома, то есть, по следствию 1, $\langle A, s, f \rangle$ не является подпрямой неразложимой. Во втором случае найдутся такие различные элементы $a, b \in E$, что $f(a) = f(b)$. В силу отсутствия в подунаре E узловых элементов, получаем, что $f(a) \in \{a, b\}$. Таким образом, унар $\langle A, f \rangle$ содержит собственный подунар B , изоморфный C_1^1 и удовлетворяющий условиям леммы 5. Поскольку $v \notin E$, то $\theta_v \neq \theta_B$, откуда $\langle A, s, f \rangle$ снова не будет подпрямой неразложимой.

Пусть теперь унар $\langle A, f \rangle$ не содержит узловых элементов. В этом случае любая его компонента связности либо изоморфна C_1^t , где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, либо операция f на ней инъективна. Если $\langle A, f \rangle$ неизоморфен унарам из условия теоремы, то он имеет более одной компоненты связности, изоморфной C_1^t . Тогда из леммы 5 вытекает, что $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ имеет более одного атома. $\square$

ЛЕММА 10. Пусть $\langle A, s, f \rangle$ — алгебра с неинъективным оператором f . Тогда решеточное объединение всех атомов $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ совпадает с конгруэнцией σ_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если алгебра $\langle A, s, f \rangle$ проста, то по теореме 9 [20], унар $\langle A, f \rangle$ изоморфен корню глубины 1. Тогда, по лемме 1 [24], $\sigma_1 = \nabla_A$.

Пусть теперь $\langle A, s, f \rangle$ не проста. Обозначим через $\{\varphi_j | j \in J\}$ совокупность всех атомов решетки $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$, а через π — решеточное объединение всех ее атомов.

Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$, $(x, y) \in \sigma_1$. Тогда $f(x) = f(y)$. Если $f(x) \notin \{x, y\}$, то $f(x)$ — узловой элемент, откуда $(x, y) \in \theta_{f(x)}$. По теореме 2, $\theta_{f(x)}$ — атом, следовательно, $(x, y) \in \pi$. Если же $f(x) \in \{x, y\}$, то без ограничения общности положим $f(x) = x$. Если элемент x — узловой, то рассуждения аналогичны приведенным выше. В ином случае $\{x, y\}$ является подунаром, удовлетворяющим условию леммы 5. Тогда $\theta_{\{x, y\}}$ — атом, и $(x, y) \in \theta_{\{x, y\}}$ влечет $(x, y) \in \pi$.

Пусть теперь $(x, y) \in \pi$. Тогда найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что $(x, y) \in \varphi_{j_1} \circ \varphi_{j_2} \circ \dots \circ \varphi_{j_k}$, где $j_i \in J$, $i = 1, \dots, k$. Отсюда $x\varphi_{j_1}z_1, z_1\varphi_{j_2}z_2, \dots, z_{k-1}\varphi_{j_k}y$ для некоторых $z_1, z_2, \dots, z_{k-1} \in A$. Так как $\langle A, s, f \rangle$ не проста, то из теоремы 2 следует, что для всех $a, b \in A$ и любого атома φ_j , $j \in J$ условие $a\varphi_jb$ влечет $f(a) = f(b)$. Отсюда, $f(x) = f(y)$, и значит, $(x, y) \in \sigma_1$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\langle A, s, f \rangle$ — неодноэлементная алгебра с оператором f и операцией $s(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Решетка $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ является точечной тогда и только тогда, когда $\langle A, f \rangle$ удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) операция f инъективна на A ;
- 2) унар $\langle A, f \rangle$ содержит такой элемент a , что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность следует из теоремы 9 [20]. Докажем необходимость утверждения.

Пусть $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$ — точечная решетка и операция f не инъективна на A . Поскольку $|A| > 1$, то $\nabla_A \neq \triangle_A$. Отсюда, ∇_A является решеточным объединением некоторого множества атомов $\text{Con}\langle A, s, f \rangle$. Тогда, по лемме 10, $\nabla_A \subseteq \sigma_1$, откуда $\nabla_A = \sigma_1$. Отсюда по лемме 1 [24] получаем, что унар $\langle A, f \rangle$ является корнем глубины 1, то есть на $\langle A, f \rangle$ выполняется условие 2) теоремы. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов Д. М. Многообразия алгебр. Новосибирск: ВО “Наука”, Сибирская издательская фирма, 1992. 205 с.

2. McKenzie R., Stanovský D. Every quasigroup is isomorphic to a subdirectly irreducible quasigroup modulo its monolith // *Acta Sci. Math. (Szeged)*. 2006. Vol. 72. P. 59–64.
3. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f \rangle$ // *Arch. Math. (Basel)* 1970. Vol. 21. P. 256–264.
4. Płonka J. Subdirectly irreducible groupoids in some varieties // *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. 1983. Vol. 24. № 4. P. 631–645.
5. Garcia P., Esteva F. On Ockham Algebras: Congruence Lattices and Subdirectly Irreducible Algebras // *Studia Logica*. 1995. Vol. 55. P. 319–346.
6. Celani S. A. Simple and subdirectly irreducibles bounded distributive lattices with unary operators // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Vol. 2006, Article ID 21835. P. 1–20.
7. Ésik Z., Imreh B. Subdirectly irreducible commutative automata // *Acta Cybernetica*. 1981. Vol. 5. № 3. P. 251–260.
8. Chajda I., Länger H. Subdirectly irreducible commutative multiplicatively idempotent semirings // *Algebra Universalis*. 2016. Vol. 76. P. 327–337.
9. Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. Характеризация подпрямо неразложимых полигонов // *Прикладная дискретная математика*. 2015. № 1(27). С. 5–16.
10. Berman J. On the congruence lattices of unary algebras // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1972. Vol. 36. P. 34–38.
11. Loi N. V., Wiegandt R. Subdirect irreducibility of algebras and acts with an additional unary operation // *Miskolc Mathematical Notes*. 2005. Vol. 6. № 2. P. 217–224.
12. Усольцев В. Л. О подпрямо неразложимых унарах с мальцевской операцией // *Изв. Волгоградского гос. пед. ун-та, сер. "Ест. и физ.-мат. науки"*. 2005. № 4(13). С. 17–24.
13. Szendrei A. Clones in universal algebra. Montréal: Les presses de l'Université de Montréal, 1986. 166 p.
14. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // *Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. докл. межд. семинара, посв. памяти проф. Л. А. Скорнякова*. Волгоград, Перемена, 1999. С. 31–32.
15. Усольцев В. Л. Унары с тернарной мальцевской операцией // *Успехи математических наук*. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 201–202.
16. Усольцев В. Л. Строение атомов в решетках конгруэнций алгебр одного класса унаров с мальцевской операцией // *Современные проблемы гуманитарных и естественных наук: Мат. XVIII Межд. научно-практ. конф. 26-27 марта 2014*. М.: Спецкнига, 2014. С. 39–44.
17. Усольцев В. Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p , заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // *Чебышевский сб.* 2011. Т. 12. Вып. 2(38). С. 127–134.
18. Maróti M., McKenzie R. Existence theorems for weakly symmetric operations // *Algebra Universalis*. 2008. Vol. 59. № 3-4. P. 463–489.
19. Bulatov A., Krokhin A., Jeavons P. The complexity of constraint satisfaction: An algebraic approach // *Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra*. Berlin: Springer-Verlag, 2005. P. 181–213.

20. Усольцев В. Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50). Ч. 2. С. 229–236.
21. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2014. Т. 15, вып. 3(51). С. 100–113.
22. Усольцев В. Л. О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // Научно-техн. вестник Поволжья. 2016. Вып. 2. С. 28–30.
23. Лата А. Н. О конгруэнц-когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 2(62). С. 154–172.
24. Usoltsev V. L. Simple and pseudosimple algebras with operators // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 164, № 2. P. 281–293.

REFERENCES

1. Smirnov, D. M. 1992, “Mnogoobraziya algebr” [“Varieties of algebras“], VO “Nauka“, Sibirskaya izdatel'skaya firma, Novosibirsk, 205 p. (Russian)
2. McKenzie, R. & Stanovský, D. 2006, “Every quasigroup is isomorphic to a subdirectly irreducible quasigroup modulo its monolith“, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, vol. 72, pp. 59–64.
3. Wenzel, G. H. 1970, “Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f \rangle$ “, *Archiv der Mathematik, Basel*, vol. 21, pp. 256–264. DOI: 10.1007/BF01220912
4. Płonka, J. 1983, “Subdirectly irreducible groupoids in some varieties“, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, vol. 24, no. 4, pp. 631–645.
5. Garcia, P. & Esteve, F. 1995, “On Ockham Algebras: Congruence Lattices and Subdirectly Irreducible Algebras“, *Studia Logica*, vol. 55, pp. 319–346. DOI: 10.1007/BF01061240
6. Celani, S. A. 2006, “Simple and subdirectly irreducibles bounded distributive lattices with unary operators“, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2006, Article ID 21835, pp. 1–20. DOI: 10.1155/IJMMS/2006/21835
7. Ésik, Z. & Imreh, B. 1981, “Subdirectly irreducible commutative automata“, *Acta Cybernetica*, vol. 5, no. 3, pp. 251–260.
8. Chajda, I. & Länger, H. 2016, “Subdirectly irreducible commutative multiplicatively idempotent semirings“, *Algebra Universalis*, vol. 76, pp. 327–337. DOI: 10.1007/s00012-016-0403-2
9. Kozhukhov, I. B. & Haliullina, A. R. 2015, “A characterization of subdirectly irreducible acts“, *Prikladnaya diskretnaya matematika*, vol. 1, pp. 5–16 (Russian).
10. Berman, J. 1972, “On the congruence lattices of unary algebras“, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 36, pp. 34–38. DOI: 10.1090/S0002-9939-1972-0309833-6
11. Loi, N. V. & Wiegandt, R. 2005, “Subdirect irreducibility of algebras and acts with an additional unary operation“, *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 6, no. 2, pp. 217–224.
12. Usoltsev, V. L. 2005, “On subdirectly irreducible unars with Mal'tsev operation“, *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya "Estestvennye i fiziko-matematicheskie nauki"*, vol. 4, pp. 17–24 (Russian).

13. Szendrei, A. 1986, "Clones in universal algebra", *Les presses de l'Université de Montréal*, Montréal, 166 p.
14. Kartashov, V.K. 1999, "On unars with Mal'tsev operation", *Universal'naya algebra i ee prilozheniya: Tezisy soobshcheniy uchastnikov mezhdunarodnogo seminara, posvyashchennogo pamyati prof. Mosk. gos. un-ta L.A. Skornyakova (Universal algebra and application: theses of Int. workshop dedicated memory of prof. L. A. Skornyakov)*, Volgograd, pp. 31–32. (Russian)
15. Usoltsev, V.L. 2008, "Unars with ternary Mal'tsev operation", *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 63, no. 5, pp. 201–202; translated in *Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, no. 5, pp. 986–987.
16. Usoltsev, V.L. 2014, "The structure of atoms in the congruence lattices of algebras in one class of unars with the Mal'tsev operation", *Sovremennye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk: Materialy XVIII mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii (Modern problems of humanitarian and natural sciences: Proc. XVIII Int. scientific-practical conf.)*, Moscow, pp. 39–44 (Russian).
17. Usoltsev, V.L. 2011, "Free algebras in the variety of unars with Mal'tsev operation that defined by identity $p(x, y, x) = y$ ", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 12, no. 2(38), pp. 127–134. (Russian)
18. Maróti M., McKenzie R. 2008, "Existence theorems for weakly symmetric operations", *Algebra Universalis*, vol. 59, no. 3-4, pp. 463–489.
19. Bulatov A., Krokhin A. & Jeavons P. 2005, "The complexity of constraint satisfaction: An algebraic approach", *Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra*, Berlin, Springer-Verlag, pp.181-213.
20. Usoltsev, V.L. 2012, "On polynomially complete and Abelian unars with Mal'tsev operation", *Uchenye Zapiski Orlovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, vol. 6(50), part 2, pp. 229–236. (Russian)
21. Usoltsev, V.L. 2014, "On Hamiltonian ternary algebras with operators", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 15, no. 3(51), pp. 100–113. (Russian)
22. Usoltsev, V.L. 2016, "On congruence lattices of algebras with one operator and basic near-unanimity operation", *Nauchno-tehnicheskiiy vestnik Povolzhya*, vol. 2, pp. 28–30 (Russian).
23. Lata, A.N. 2017, "On congruence coherent Rees algebras and algebras with an operator", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 18, no. 2(62), pp. 154–172. (Russian) DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-2-154-172
24. Usoltsev, V.L. 2010, "Simple and pseudosimple algebras with operators", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 164, no. 2, pp. 281–293. DOI: 10.1007/S1095800997306

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 512.573

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-271-287

**О рисовском замыкании в некоторых классах
алгебр с оператором**

В. Л. Усольцев

Усольцев Вадим Леонидович — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).

e-mail: usl2004@mail.ru

Аннотация

В работе вводится понятие рисовского замыкания для подалгебр универсальных алгебр. Обозначим через Δ_A отношение равенства на A . Подалгебра B алгебры A называется подалгеброй Риса, если бинарное отношение $B^2 \cup \Delta_A$ есть конгруэнция алгебры A . Конгруэнция θ алгебры A называется конгруэнцией Риса, если $\theta = B^2 \cup \Delta_A$ для некоторой подалгебры B алгебры A . Мы определяем оператор рисовского замыкания, ставя в соответствие произвольной подалгебре B алгебры A наименьшую по включению подалгебру Риса алгебры A , содержащую B . Показано, что в общем случае рисовское замыкание не коммутирует с операцией решеточного пересечения на решетке подалгебр универсальной алгебры. Как следствие, решетка подалгебр Риса в общем случае не является подрешеткой решетки подалгебр.

Неодноэлементная универсальная алгебра называется рисовски простой, если любая ее конгруэнция Риса является тривиальной. В работе дается характеристика рисовски простых алгебр в терминах рисовского замыкания.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов, то есть, унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций. Получено полное описание рисовски простых алгебр в некоторых подклассах класса алгебр с одним оператором и тернарной основной операцией. Для алгебр из этих классов описано строение решеток подалгебр Риса. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы решетка подалгебр Риса алгебр из данных классов являлась цепью.

Ключевые слова: рисовское замыкание, подалгебра Риса, конгруэнция Риса, рисовски простая алгебра, алгебра с операторами.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:

В. Л. Усольцев. О рисовском замыкании в некоторых классах алгебр с оператором // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 271–287.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 512.573

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-271-287

On Rees closure in some classes of algebras with an operator

V. L. Usoltsev

Usoltsev Vadim Leonidovich — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Social-Pedagogical University (Volgograd).

e-mail: usl2004@mail.ru

Abstract

In this paper we introduce the concept of Rees closure for subalgebras of universal algebras. We denote by $\triangle_A$ the identity relation on A . A subalgebra B of algebra A is called a Rees subalgebra whenever $B^2 \cup \triangle_A$ is a congruence on A . A congruence θ of algebra A is called a Rees congruence if $\theta = B^2 \cup \triangle_A$ for some subalgebra B of A . We define a Rees closure operator by mapping arbitrary subalgebra B of algebra A into the smallest Rees subalgebra that contains B . It is shown that in the general case the Rees closure does not commute with the operation $\wedge$ on the lattice of subalgebras of universal algebra. Consequently, in the general case, a lattice of Rees subalgebras is not a sublattice of lattice of subalgebras.

A non-one-element universal algebra A is called a Rees simple algebra if any Rees congruence on A is trivial. We characterize Rees simple algebras in terms of Rees closure.

Universal algebra is called an algebra with operators if it has an additional set of unary operations acting as endomorphisms with respect to basic operations. We described Rees simple algebras in some subclasses of the class of algebras with one operator and a ternary basic operation. For algebras from these classes, the structure of lattice of Rees subalgebras is described. Necessary and sufficient conditions for the lattice of Rees subalgebras of algebras from these classes to be a chain are obtained.

Keywords: Rees closure, Rees subalgebra, Rees congruence, Rees simple algebra, algebra with operators.

Bibliography: 29 titles.

For citation:

V. L. Usoltsev, 2021, "On Rees closure in some classes of algebras with an operator", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 271–287.

Введение

В последнее время в алгебре возрастает интерес к различным операторам замыкания, связанным с производными структурами универсальных алгебр (см. например, [1] – [3]). Обзор [4] дает представление о классических результатах в этой области. Операторы замыкания рассматриваются в нем с общих позиций — как Галуа-замыкания, в контексте соответствий Галуа, возникающих между операциями и отношениями на алгебрах.

В работе [1] А. Г. Пинус вводит понятие гамильтонова замыкания на универсальных алгебрах как оператора замыкания на решетке подалгебр, связанного со свойством гамильтоновости. Универсальная алгебра называется *гамильтоновой* [5], [6], если любая ее подалгебра является классом некоторой конгруэнции этой алгебры. Определяемый в [1] оператор ставит в соответствие произвольной подалгебре B алгебры A ее *гамильтоново замыкание* $\bar{B}$, то есть,

наименьшую по включению подалгебру алгебры A , содержащую B и являющуюся классом некоторой конгруэнции алгебры A . Тогда гамильтоновы алгебры можно рассматривать как алгебры, каждая подалгебра которых гамильтоново замкнута, то есть, совпадает со своим гамильтоновым замыканием.

В настоящей работе вводится близкое к рассмотренному выше понятие рисовского замыкания как оператора замыкания на решетке подалгебр произвольной универсальной алгебры, связанного с понятиями подалгебры Риса и конгруэнции Риса. Понятие конгруэнции Риса, первоначально введенное для полугрупп, в работе [7] обобщается на произвольные универсальные алгебры. Возникающие при этом определения, приведенные ниже, даны в формулировках монографии [8].

Обозначим через Δ_A нулевую конгруэнцию алгебры A . Конгруэнция θ алгебры A называется *конгруэнцией Риса*, если $\theta = B^2 \cup \Delta_A$ для некоторой подалгебры B алгебры A . Подалгебра B алгебры A называется *подалгеброй Риса*, если $B^2 \cup \Delta_A$ есть конгруэнция алгебры A . Алгебра A называется *алгеброй Риса*, если любая ее подалгебра является подалгеброй Риса. Класс алгебр называется *рисовским*, если каждая его алгебра является алгеброй Риса. Характеризация алгебр Риса и рисовских многообразий алгебр дается в [9], [10]. В [11] изучаются конгруэнции Риса, задаваемые на алгебрах идеалами в смысле А. Урсини (см., например, [12]). В [13] рассматриваются конгруэнции Риса на решетках. В монографии [8] также уделяется значительное внимание подалгебрам и конгруэнциям Риса.

Обозначим через $SubA$ решетку подалгебр универсальной алгебры A , а через $ConA$ — решетку ее конгруэнций. Положим $\emptyset \in SubA$. В [7] показано, что при этом условии совокупность всех подалгебр Риса алгебры A образует решетку Sub_RA относительно включения. Там же были изучены некоторые свойства решетки рисовских подалгебр. Отметим, что поскольку $\emptyset \in SubA$, то и совокупность всех конгруэнций Риса алгебры A образует полную решетку Con_RA относительно включения, нулем и единицей которой являются нулевая и единичная конгруэнции $\Delta_A = \emptyset^2 \cup \Delta_A$ и $\nabla_A = A^2 \cup \Delta_A$ алгебры A .

Пусть A — произвольная универсальная алгебра. Определим отображение C_R из решетки $SubA$ в $SubA$, поставив в соответствие произвольной подалгебре $B \in SubA$ наименьшую по включению подалгебру Риса $\overline{B}_R$ алгебры A , содержащую B . В работе показано, что отображение C_R является оператором замыкания на $SubA$, и что рисовское замыкание в общем случае не коммутирует с операцией решеточного пересечения на $SubA$. Дается также характеристика рисовски замкнутых подалгебр. Далее мы рассматриваем решетку подалгебр Риса Sub_RA как решетку рисовски замкнутых подалгебр алгебры A .

В [1] было введено понятие *гамильтоново простой алгебры*, как алгебры A , в которой гамильтоново замыкание любой ее неодноэлементной подалгебры совпадает с A . Рассматривая его аналог для рисовского замыкания, мы показываем, что он эквивалентен понятию *рисовски простой алгебры* [14], то есть, неодноэлементной алгебры, на которой любая конгруэнция Риса тривиальна. Естественный интерес в этом случае также представляет понятие, в некотором смысле противоположное рисовской простоте: *конгруэнц-алгеброй Риса* [14] называется алгебра, каждая конгруэнция которой является рисовской. Для гамильтонова замыкания противоположным к гамильтоновой простоте является свойство гамильтоновости. В случае же рисовского замыкания аналогом гамильтоновости выступает свойство быть алгеброй Риса, однако, понятия алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в общем случае достаточно сильно различаются. Так, например, любой унар является алгеброй Риса, но в то же время конгруэнц-алгебры Риса в классе унаров образуют достаточно узкий подкласс (см. [15]).

Далее в работе даются полное описание рисовски простых алгебр и описание строения решеток рисовских подалгебр в классах алгебр $\langle A, p, f \rangle$, $\langle A, s, f \rangle$, $\langle A, m, f \rangle$ с оператором f и тернарной основной операцией, определяемых ниже. *Алгеброй с операторами* называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ сигнатуры $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, Ω_1 произвольна и непуста, а Ω_2 состоит из *операторов* — унарных операций, перестановочных с любой операцией

из Ω_1 , то есть, действующих как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1 , называемых *основными*. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω , то унар $\langle A, f \rangle$ называется *унарным редуком* алгебры $\langle A, \Omega \rangle$.

В [16] на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ задается тернарная операция $p(x, y, z)$, перестановочная с операцией f . Эта операция определяется следующим образом. Через $f^n(z)$ обозначается результат n -кратного применения операции f к элементу z ; $f^0(z) = z$. Пусть $x, y \in A$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leq k(y, z) \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \quad (1)$$

Из (1) следует, что операция p удовлетворяет тождествам Пиксли $p(y, y, x) = p(x, y, y) = p(x, y, x) = x$ и, как следствие, является мальцевской. Основные результаты, полученные при изучении свойств алгебр $\langle A, p, f \rangle$, см. в [17] — [23].

На основе подхода, предложенного в [16], в работе [24] на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ определяется тернарная операция $s(x, y, z)$, названная *симметрической*, перестановочная с операцией f :

$$s(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) < k(y, z); \\ y, & \text{если } k(x, y) = k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \quad (2)$$

Из (2) вытекает, что операция s удовлетворяет тождествам $s(y, y, x) = s(x, y, y) = s(y, x, y) = x$. Как следствие, она также является мальцевской, и, кроме того, операцией меньшинства (см. [25]). В [21] были описаны простые, абелевы и полиномиально полные алгебры в классе алгебр $\langle A, s, f \rangle$, в [19] — гамильтоновы, а в [23] — конгруэнц-когерентные алгебры данного класса.

Операцией почти единогласия (near-unanimity operation) (см., напр., [26], [27]) называется n -арная операция φ , удовлетворяющая тождествам $\varphi(x, \dots, x, y) = \varphi(x, \dots, x, y, x) = \dots = \varphi(y, x, \dots, x) = x$ ($n \geq 3$). В тернарном случае φ называют *операцией большинства* (см. [25]).

В [28] на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$, также на основе подхода из [16], задается операция большинства $m(x, y, z)$, перестановочная с операцией f :

$$m(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \geq k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) < k(y, z). \end{cases} \quad (3)$$

В [28] описаны простые и строго простые алгебры в классе алгебр $\langle A, m, f \rangle$, в [19] — гамильтоновы алгебры данного класса.

В [29] на произвольном унаре $\langle A, f \rangle$ для $n \geq 3$ определяется n -арная операция почти единогласия $g^{(n)}$, перестановочная с операцией f , и при $n = 3$ совпадающая с операцией $m(x, y, z)$. Там же дается полное описание простых алгебр в классе алгебр $\langle A, g^{(n)}, f \rangle$. В [14] полностью описаны алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в данном классе.

Основные определения и конструкции

Под *тривиальными* подалгебрами алгебры A будем понимать $\emptyset$ и A . Все другие подалгебры алгебры A будем называть *нетривиальными*.

Алгебра называется *простой*, если она имеет в точности две конгруэнции (единичную ∇_A и нулевую Δ_A). Класс конгруэнции θ , порожденный элементом x , обозначается через $[x]\theta$.

Пусть $\langle A, f \rangle$ — произвольный унар. Для любых целых чисел $n > 0$, $m \geq 0$ положим

$$C_n^m = \langle a \mid f^m(a) = f^{m+n}(a) \rangle.$$

Унар C_n^0 называется *циклом длины n* .

Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geq 0$ и $n > 0$, и *непериодическим* в противном случае. Через $T(A)$ и $D(A)$ обозначаются, соответственно, множества периодических и непериодических элементов унара A . Унар $\langle A, f \rangle$ называется *периодическим*, если $A = T(A)$, и *унаром без кручения*, если $A = D(A)$. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t , для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geq 1$, называется *глубиной элемента a* и обозначается через $t(a)$. *Глубиной $t(A)$ унара A* называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, то говорят, что унар имеет бесконечную глубину.

Объединение двух непересекающихся унаров B и C называется их *суммой* и обозначается через $B + C$. Унар $\langle A, f \rangle$ называется *связным*, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n \geq 0, m \geq 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется *компонентой связности* унара A . Элемент a унара $\langle A, f \rangle$ называется *неподвижным*, если $f(a) = a$. Элемент a унара называется *узловым*, если найдутся такие различные элементы b и c , отличные от a , что $f(b) = a = f(c)$.

Связный унар с неподвижным элементом называется *корнем*. Через D_m обозначается подунар произвольного корня, состоящий из всех элементов с глубиной, не превосходящей m , где m удовлетворяет неравенству $0 \leq m \leq t(A)$, если $t(A)$ конечна, и неравенству $0 \leq m < t(A)$ в противном случае. *Корнем без нетривиальных узлов* называется связный унар $\langle A, f \rangle$ с неподвижным элементом a , в котором не существует узловых элементов, отличных от a .

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Через β_n обозначается бинарное отношение, заданное на корне $\langle A, f \rangle$ по правилу [18]: $x\beta_n y$ для $x, y \in A$ выполнено тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $t(x) \leq n, t(y) \leq n$.

Рисовское замыкание

Напомним, что отображение $C_R : SubA \rightarrow SubA$, где A — произвольная универсальная алгебра, любой подалгебре $B \in SubA$ ставит в соответствие наименьшую по включению подалгебру Риса $\overline{B}_R$ алгебры A , содержащую B .

Из определения подалгебры Риса следует, что пересечение произвольной совокупности подалгебр Риса алгебры A , содержащих некоторую подалгебру $B \in SubA$, также является подалгеброй Риса алгебры A , содержащей B . А поскольку совокупность подалгебр Риса, включающих в себя B , непуста (она содержит, например, алгебру A), то определение отображения C_R корректно. Далее из определения C_R вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A — произвольная универсальная алгебра. Тогда отображение $C_R : SubA \rightarrow SubA$, определенное выше, является оператором замыкания на решетке $SubA$.

Подалгебру $\overline{B}_R$ назовем *рисовским замыканием* подалгебры B . Будем называть подалгебру *рисовски замкнутой*, если она совпадает со своим рисовским замыканием. Очевидно, что рисовски замкнутыми подалгебрами алгебры A будут ее подалгебры Риса, и только они. Отсюда, решетка C_R -замкнутых подалгебр алгебры A есть в точности решетка $Sub_R A$ ее подалгебр Риса. Из предложения 1 следует, что решетка подалгебр Риса произвольной алгебры является полной.

Из определения подалгебры Риса, данного в [7], непосредственно вытекает следующая характеристика рисовски замкнутых подалгебр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть B — подалгебра универсальной алгебры $\langle A, \Omega \rangle$. Подалгебра B рисовски замкнута тогда и только тогда, когда для любой n -арной операции $f \in \Omega$ и любых

$a, b \in B$, $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$ выполняются следующие условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(a, x_1, \dots, x_{n-1}), f(b, x_1, \dots, x_{n-1}) \in B \quad \text{или} \quad f(a, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(b, x_1, \dots, x_{n-1}); \\ f(x_1, a, \dots, x_{n-1}), f(x_1, b, \dots, x_{n-1}) \in B \quad \text{или} \quad f(x_1, a, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, b, \dots, x_{n-1}); \\ \dots \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}, a), f(x_1, \dots, x_{n-1}, b) \in B \quad \text{или} \quad f(x_1, \dots, x_{n-1}, a) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, b). \end{array} \right.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Рисовское замыкание в общем случае не коммутирует с операцией решеточного пересечения на $SubA$.

Доказательство предложения 2 будет приведено в заключительной части работы, после доказательства необходимых утверждений. Непосредственно из предложения 2 получаем следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. Решетка $Sub_R A$ рисовских подалгебр произвольной алгебры A в общем случае не является подрешеткой решетки $SubA$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Универсальная алгебра A рисовски проста тогда и только тогда, когда рисовское замыкание любой ее непустой неоднородной подалгебры совпадает с A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть алгебра A рисовски проста. Тогда она неоднородна, и любая ее конгруэнция Риса тривиальна. Пусть B — непустая неоднородная подалгебра алгебры A . Так как $\overline{B}_R$ — подалгебра Риса в A , то отношение $\theta = \overline{B}_R^2 \cup \Delta_A$ является конгруэнцией Риса на A . По условию, конгруэнция θ тривиальна. Отсюда, имеем либо $\overline{B}_R^2 \subseteq \Delta_A$, либо $\overline{B}_R^2 = \nabla_A$. Первый случай ведет к противоречию. Действительно, поскольку подалгебра B неоднородна, то и $|\overline{B}_R| > 1$, откуда $\overline{B}_R^2 \not\subseteq \Delta_A$. Последний случай влечет $\overline{B}_R = A$.

Обратно, пусть теперь алгебра A такова, что рисовское замыкание любой ее непустой неоднородной подалгебры совпадает с A . Предположим, что найдется нетривиальная конгруэнция $\theta \in Con_R A$. Так как θ — конгруэнция Риса, то $\theta = B^2 \cup \Delta_A$ для некоторой подалгебры Риса $B \in Sub_R A$. Отсюда, $\overline{B}_R = B$. Поскольку $\theta \neq \Delta_A$, то $|B| > 1$. Тогда, по условию, $\overline{B}_R = A$, то есть, $B = A$, откуда $\theta = \nabla_A$, что противоречит предположению. $\square$

Рисовски простые алгебры

Далее везде через $\langle A, p, f \rangle$, $\langle A, s, f \rangle$, $\langle A, t, f \rangle$ будем обозначать алгебры с оператором f и операциями $p(x, y, z)$, $s(x, y, z)$, $t(x, y, z)$, определенными по правилам (1), (2), (3) соответственно. Заметим, что по определениям операций p , s , t , любой подунар унара $\langle A, f \rangle$ является подалгеброй алгебр $\langle A, p, f \rangle$, $\langle A, s, f \rangle$, $\langle A, t, f \rangle$.

ЛЕММА 1. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3). Если унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ несвязен, $\theta \in Con \langle A, d, f \rangle$ и $\theta \neq \nabla_A$, то любой класс конгруэнции θ содержится в некоторой компоненте связности унара $\langle A, f \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для алгебры $\langle A, p, f \rangle$ утверждение было доказано в лемме 3 [20].

Пусть K — произвольный класс конгруэнции θ . Обозначим его порождающий элемент через b . Тогда $b \in B$ для некоторой компоненты связности B унара $\langle A, f \rangle$. Если класс K одноэлементен, то утверждение леммы очевидно.

Пусть K неоднороден. Тогда он содержит такой элемент a , что $a \neq b$. Предположим, что $a \notin B$. Тогда a содержится в компоненте связности, отличной от B . Последнее влечет $k(a, b) = \infty$. По лемме 11 [23] для алгебры $\langle A, s, f \rangle$ и лемме 5 [14] для алгебры $\langle A, t, f \rangle$, имеем $(a, b) \notin \theta$, что противоречит условию $a, b \in K$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3). Если унар $\langle A, f \rangle$ несвязен, то рисовское замыкание любой подалгебры B алгебры $\langle A, d, f \rangle$, унарный редукт $\langle B, f \rangle$ которой также несвязен, совпадает с A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\overline{B}_R \neq A$. Тогда найдется такая неединичная конгруэнция Риса $\theta \in \text{Con}_R \langle A, d, f \rangle$, что $\theta = \overline{B}_R^2 \cup \Delta_A$. Так как $B \subseteq \overline{B}_R$, то унарный редукт подалгебры $\overline{B}_R$ несвязен. С другой стороны, по лемме 1, класс $\overline{B}_R$ конгруэнции θ содержится в некоторой компоненте связности унара $\langle A, f \rangle$, что ведет к противоречию. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть θ — ненулевая конгруэнция Риса алгебры $\langle A, d, f \rangle$ с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3). Если неодноэлементный класс B конгруэнции θ содержит элемент b , для которого $k(f(b), b) = \infty$, то $\theta = \nabla_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\theta \neq \nabla_A$. Так как $\theta \in \text{Con}_R \langle A, d, f \rangle$, то $\theta = B^2 \cup \Delta_A$ для некоторой подалгебры B алгебры $\langle A, d, f \rangle$. Пусть $b \in B$ и $k(f(b), b) = \infty$. Тогда $f(b) \in B$, откуда $b\theta f(b)$. Поскольку $\theta \neq \nabla_A$, то для алгебр $\langle A, p, f \rangle$, $\langle A, s, f \rangle$, $\langle A, t, f \rangle$ выполняются условия лемм 2 [20], 11 [23] и 5 [14] соответственно. Тогда из условия $b\theta f(b)$ следует неравенство $k(f(b), b) < \infty$, что ведет к противоречию. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. Если B — непустая неодноэлементная подалгебра алгебры $\langle A, d, f \rangle$, содержащая элемент b , для которого $k(f(b), b) = \infty$, то рисовское замыкание подалгебры B совпадает с A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\overline{B}_R \neq A$. Тогда найдется такая неединичная конгруэнция Риса $\theta \in \text{Con}_R \langle A, d, f \rangle$, что $\theta = \overline{B}_R^2 \cup \Delta_A$. Так как $B \subseteq \overline{B}_R$, то $|\overline{B}_R| > 1$ и, значит, $\theta \neq \Delta_A$. Тогда, по лемме 2, $\theta = \nabla_A$, что противоречит выбору θ . $\square$

ЛЕММА 3. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3). Если $\langle A, f \rangle$ — связный унар без кручения, то алгебра $\langle A, d, f \rangle$ рисовски проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B — произвольная непустая неодноэлементная подалгебра алгебры $\langle A, d, f \rangle$. Зафиксируем элемент $b \in B$. Поскольку $\langle A, f \rangle$ — унар без кручения, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $f^n(f(b)) \neq f^n(b)$, откуда $k(f(b), b) = \infty$. Отсюда, по следствию 3 из леммы 2, $\overline{B}_R = A$. Тогда, по предложению 3, алгебра $\langle A, d, f \rangle$ рисовски проста. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3). Если $\langle A, f \rangle$ — связный унар, содержащий подунар S , изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$, то алгебра $\langle A, d, f \rangle$ рисовски проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B — произвольная непустая неодноэлементная подалгебра алгебры $\langle A, d, f \rangle$. В силу связности $\langle A, f \rangle$ имеем $S \subseteq B$. Зафиксируем элемент $b \in S$. Так как $n > 1$, то $f(b) \neq b$. Предполагая, что $k(f(b), b) = t$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$, получаем $f^m(f(b)) = f^m(b)$, откуда $f(f^m(b)) = f^m(b)$, то есть, $n = 1$, что противоречит условию. Таким образом, $k(f(b), b) = \infty$. Тогда, как и выше, по следствию 3 из леммы 2 и предложению 3, алгебра $\langle A, d, f \rangle$ рисовски проста. $\square$

ЛЕММА 5. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3). Если $\langle A, f \rangle$ — несвязный унар, не содержащий неодноэлементных компонент связности, имеющих неподвижные элементы, то алгебра $\langle A, d, f \rangle$ рисовски проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что алгебра $\langle A, d, f \rangle$ имеет нетривиальную конгруэнцию Риса $\theta = B^2 \cup \Delta_A$ для некоторой своей подалгебры B . В силу нетривиальности θ , подалгебра B неоднородна. По лемме 1, класс B конгруэнции θ содержится в некоторой компоненте связности C унара $\langle A, f \rangle$. В силу своей связности, C является либо унаром без кручения, либо периодическим унаром.

В первом случае подунар $B \subseteq C$ — также унар без кручения. Тогда $k(f(b), b) = \infty$ для фиксированного элемента $b \in B$. Отсюда, по следствию 3 из леммы 2 и предложению 3, алгебра $\langle A, d, f \rangle$ рисовски проста, что противоречит предположению.

Во втором случае C имеет подунар S , изоморфный C_n^0 для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и содержащий в любом подунаре данной компоненты связности. Поскольку $B \subseteq C$, то C неоднородна. Так как по условию C не содержит неподвижного элемента, то $n > 1$. Тогда для фиксированного элемента $b \in S \subseteq B$ снова получаем $k(f(b), b) = \infty$, что опять ведет к противоречию. $\square$

ЛЕММА 6. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3), причем унар $\langle A, f \rangle$ является корнем. Конгруэнция β_n на $\langle A, f \rangle$ является конгруэнцией Риса на алгебре $\langle A, d, f \rangle$ при любом n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle A, f \rangle$ — корень. Обозначим через a его неподвижный элемент и зафиксируем произвольное число $n < t(A)$. По леммам 15 [18] и 9 [23], отношение β_n , заданное на $\langle A, f \rangle$, является конгруэнцией алгебры $\langle A, d, f \rangle$. По предложению 1 [20], подунар D_n унара $\langle A, f \rangle$ является подалгеброй в $\langle A, d, f \rangle$. Из определения конгруэнции β_n следует, что $D_n = [a]\beta_n$. Докажем, что все классы конгруэнции β_n , отличные от D_n , одноэлементны.

Пусть $b \in A \setminus D_n$. Тогда $t(b) > n$. Предположим, что найдется элемент $c \in A$, для которого $b \neq c$ и $b\beta_n c$. Отсюда, по определению конгруэнции β_n , имеем $t(b) \leq n$, что противоречит выбору элемента b . Таким образом, $[b]\beta_n = \{b\}$ для всех $b \in A \setminus D_n$. Отсюда, $\beta_n = D_n^2 \cup \Delta_A$.

В случае, когда $t(A) < \infty$ и $n = t(A)$, имеем $\beta_n = \nabla_A \in \text{Con}_R \langle A, d, f \rangle$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3). Если унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ является корнем, то подунар D_n унара $\langle A, f \rangle$ является собственной подалгеброй Риса алгебры $\langle A, d, f \rangle$ при любом $n < t(A)$.

ЛЕММА 7. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ несвязен и содержит неоднородную компоненту связности B , имеющую неподвижный элемент, а β_n — конгруэнция унара $\langle B, f \rangle$, определенная в конце раздела 2. Тогда бинарное отношение $\overline{\beta_n} = \beta_n \cup \Delta_A$ на A является конгруэнцией Риса алгебры $\langle A, d, f \rangle$ с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число n удовлетворяет неравенству $0 \leq n \leq t(B)$, если $t(B)$ конечна, и неравенству $0 \leq n < t(B)$ в противном случае. Из определений (1) — (3) следует, что подунар D_n унара $\langle B, f \rangle$ является подалгеброй в $\langle A, d, f \rangle$. Из равенства $\overline{\beta_n} = \beta_n \cup \Delta_A$ следует, что для любых $x, y \in A$ условие $x\overline{\beta_n}y$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $x, y \in D_n$, либо $x = y$, то есть, $\overline{\beta_n} = D_n^2 \cup \Delta_A$. Докажем, что $\overline{\beta_n}$ — конгруэнция алгебры $\langle A, d, f \rangle$.

Пусть $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in A$, $x_1\overline{\beta_n}y_1$, $x_2\overline{\beta_n}y_2$, $x_3\overline{\beta_n}y_3$. Если $x_i = y_i$ или $x_i, y_i \in D_n$ для $i = 1, 2, 3$, то $d(x_1, x_2, x_3)\overline{\beta_n}d(y_1, y_2, y_3)$. Рассмотрим другие возможные случаи.

Случай 1. $x_1, y_1 \in D_n$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$.

Пусть $x_2, x_3 \in B \setminus D_n$. Тогда $t(x_2) > n$, $t(x_3) > n$ и, значит, по лемме 10 [18], $k(x_1, x_2) = t(x_2) = k(y_1, x_2) = k(y_1, y_2)$. При этом, $k(x_2, x_3) = k(y_2, y_3)$. Отсюда, с учетом определений (1) — (3), имеем $d(x_1, x_2, x_3) = d(y_1, x_2, x_3) = d(y_1, y_2, y_3)$, то есть, $d(x_1, x_2, x_3)\overline{\beta_n}d(y_1, y_2, y_3)$.

Пусть теперь $x_2 \in B \setminus D_n$, $x_3 \notin B$. Тогда $k(x_2, x_3) = \infty$. В то же время, опять $k(x_1, x_2) = t(x_2) = k(y_1, x_2) = k(y_1, y_2)$. Из определений (1), (2) и условий $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ следует, что $p(x_1, x_2, x_3) = x_3 = p(y_1, y_2, y_3)$ и $s(x_1, x_2, x_3) = x_3 = s(y_1, y_2, y_3)$. По определению (3), $m(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{\beta_n} y_1 = m(y_1, y_2, y_3)$.

Пусть теперь $x_2 \notin B$, $x_3 \in B \setminus D_n$. Тогда, как и выше, $k(x_2, x_3) = \infty$. При этом, поскольку элемент x_2 и элементы x_1, y_1 лежат в разных компонентах связности, то $k(x_1, x_2) = \infty = k(y_1, x_2)$. Из определений (1), (3) вытекает, что $p(x_1, x_2, x_3) = x_3 = p(y_1, y_2, y_3)$ и $m(x_1, x_2, x_3) = x_3 = m(y_1, y_2, y_3)$. По определению (2), $s(x_1, x_2, x_3) = x_2 = s(y_1, y_2, y_3)$.

Пусть, наконец, $x_2, x_3 \notin B$. Тогда $k(x_1, x_2) = \infty = k(y_1, x_2)$, что исключает ситуацию $k(x_1, x_2) < k(x_2, x_3)$. По определению (3), $m(x_1, x_2, x_3) = x_3 = m(y_1, y_2, y_3)$. Если $k(x_1, x_2) > k(x_2, x_3)$, то $p(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{\beta_n} y_1 = p(y_1, y_2, y_3)$ и $s(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{\beta_n} y_1 = s(y_1, y_2, y_3)$. Если же $k(x_1, x_2) = k(x_2, x_3)$, то $p(x_1, x_2, x_3) = x_3 = p(y_1, y_2, y_3)$ и $s(x_1, x_2, x_3) = x_2 = s(y_1, y_2, y_3)$.

Случай 2. $x_2, y_2 \in D_n$, $x_1 = y_1$, $x_3 = y_3$.

Пусть $x_1, x_3 \in B \setminus D_n$. Тогда $t(x_1) > n$, $t(x_3) > n$. Отсюда, $k(x_1, x_2) = t(x_1) = k(x_1, y_2) = k(y_1, y_2)$, $k(x_2, x_3) = t(x_3) = k(y_2, x_3) = k(y_2, y_3)$ и, по определениям (1), (3), имеем $p(x_1, x_2, x_3) = p(y_1, y_2, y_3)$ и $m(x_1, x_2, x_3) = m(y_1, y_2, y_3)$. Из определения (2) получаем либо $s(x_1, x_2, x_3) = s(y_1, y_2, y_3)$, либо $s(x_1, x_2, x_3) = x_2 \overline{\beta_n} y_2 = s(y_1, y_2, y_3)$.

Пусть теперь $x_1 \in B \setminus D_n$, $x_3 \notin B$. Тогда $k(x_1, x_2) = t(x_1) = k(x_1, y_2)$ и $k(x_2, x_3) = \infty = k(y_2, x_3)$. Отсюда, $p(x_1, x_2, x_3) = x_3 = p(y_1, y_2, y_3)$, $s(x_1, x_2, x_3) = x_3 = s(y_1, y_2, y_3)$ и $m(x_1, x_2, x_3) = x_1 = m(y_1, y_2, y_3)$.

Пусть теперь $x_1 \notin B$, $x_3 \in B \setminus D_n$. Это влечет $k(x_1, x_2) = \infty = k(x_1, y_2)$ и $k(x_2, x_3) = t(x_3) = k(y_2, x_3)$. Отсюда, $p(x_1, x_2, x_3) = x_1 = p(y_1, y_2, y_3)$, $s(x_1, x_2, x_3) = x_1 = s(y_1, y_2, y_3)$ и $m(x_1, x_2, x_3) = x_3 = m(y_1, y_2, y_3)$.

Пусть, наконец, $x_1, x_3 \notin B$. Тогда $k(x_1, x_2) = \infty = k(x_1, y_2)$ и $k(x_2, x_3) = \infty = k(y_2, x_3)$. В этом случае $p(x_1, x_2, x_3) = x_3 = p(y_1, y_2, y_3)$, $m(x_1, x_2, x_3) = x_3 = m(y_1, y_2, y_3)$ и $s(x_1, x_2, x_3) = x_2 \overline{\beta_n} y_2 = s(y_1, y_2, y_3)$.

Случай 3. $x_3, y_3 \in D_n$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$.

Пусть $x_1, x_2 \in B \setminus D_n$. Тогда $t(x_1) > n$, $t(x_2) > n$. Отсюда, $k(x_2, x_3) = t(x_2) = k(x_2, y_3)$. С учетом этого, как и выше, имеем: либо $p(x_1, x_2, x_3) = x_1 = p(y_1, y_2, y_3)$, либо $p(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = p(y_1, y_2, y_3)$; либо $s(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = s(y_1, y_2, y_3)$, либо $s(x_1, x_2, x_3) = x_2 = s(y_1, y_2, y_3)$, либо $s(x_1, x_2, x_3) = x_1 = s(y_1, y_2, y_3)$; либо $m(x_1, x_2, x_3) = x_1 = m(y_1, y_2, y_3)$, либо $m(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = m(y_1, y_2, y_3)$.

Пусть теперь $x_1 \in B \setminus D_n$, $x_2 \notin B$. Тогда $k(x_1, x_2) = \infty = k(y_1, y_2)$ и $k(x_2, x_3) = \infty = k(x_2, y_3)$. Отсюда, $p(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = p(y_1, y_2, y_3)$, $s(x_1, x_2, x_3) = x_2 = s(y_1, y_2, y_3)$ и $m(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = m(y_1, y_2, y_3)$.

Пусть теперь $x_1 \notin B$, $x_2 \in B \setminus D_n$. Это влечет $k(x_1, x_2) = \infty$ и $k(x_2, x_3) = t(x_2) = k(x_2, y_3)$. Отсюда, $p(x_1, x_2, x_3) = x_1 = p(y_1, y_2, y_3)$, $s(x_1, x_2, x_3) = x_1 = s(y_1, y_2, y_3)$ и $m(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = m(y_1, y_2, y_3)$.

Пусть, наконец, $x_1, x_2 \notin B$. Тогда $k(x_2, x_3) = \infty = k(x_2, y_3)$. В этом случае $p(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = p(y_1, y_2, y_3)$, а для других операций либо $s(x_1, x_2, x_3) = x_2 = s(y_1, y_2, y_3)$, либо $s(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = s(y_1, y_2, y_3)$, и либо $m(x_1, x_2, x_3) = x_1 = m(y_1, y_2, y_3)$, либо $m(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = m(y_1, y_2, y_3)$.

Случай 4. $x_1, y_1, x_2, y_2 \in D_n$, $x_3 = y_3$.

Поскольку $t(x_1) \leq n$, $t(x_2) \leq n$, то $k(x_1, x_2) \leq n$. Аналогично, $k(y_1, y_2) \leq n$.

Пусть $x_3 \in B \setminus D_n$. Тогда $t(x_3) > n$ и, следовательно, $k(x_2, x_3) = t(x_3) = k(y_2, x_3) > n$. Если же $x_3 \notin B$, то $k(x_2, x_3) = \infty = k(y_2, x_3)$. И в том, и в другом случае из (1) – (3) получаем $p(x_1, x_2, x_3) = x_3 = p(y_1, y_2, y_3)$, $s(x_1, x_2, x_3) = x_3 = s(y_1, y_2, y_3)$ и $m(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{\beta_n} y_1 = m(y_1, y_2, y_3)$.

Случай 5. $x_2, y_2, x_3, y_3 \in D_n$, $x_1 = y_1$.

Аналогичен случаю 4.

Случай 6. $x_1, y_1, x_3, y_3 \in D_n, x_2 = y_2$.

Если $x_2 \in B \setminus D_n$, то $k(x_1, x_2) = t(x_2) = k(y_1, x_2)$ и $k(x_2, x_3) = t(x_2) = k(x_2, y_3)$. Если же $x_2 \notin B$, то $k(x_1, x_2) = \infty = k(y_1, x_2)$ и $k(x_2, x_3) = \infty = k(x_2, y_3)$. И в том, и в другом случае из (1) – (3) имеем $p(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = p(y_1, y_2, y_3)$, $s(x_1, x_2, x_3) = x_2 = s(y_1, y_2, y_3)$ и $m(x_1, x_2, x_3) = x_3 \overline{\beta_n} y_3 = m(y_1, y_2, y_3)$.

Таким образом, $\overline{\beta_n} \in \text{Con}\langle A, d, f \rangle$. Тогда, поскольку $\overline{\beta_n} = D_n^2 \cup \Delta_A$, то $\overline{\beta_n}$ – конгруэнция Риса алгебры $\langle A, d, f \rangle$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ несвязен и содержит неодноэлементную компоненту связности B , имеющую неподвижный элемент, а $\langle A, d, f \rangle$ – алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) – (3). Тогда при любом $n < t(B)$ подунар D_n компоненты связности B является собственной подалгеброй Риса алгебры $\langle A, d, f \rangle$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ несвязен, содержит неодноэлементную компоненту связности B , имеющую неподвижный элемент, и $t(B) = \infty$. Тогда бинарное отношение $\overline{\beta} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\beta_n}$ на A , где β_n – конгруэнция унара $\langle B, f \rangle$, является конгруэнцией Риса алгебры $\langle A, d, f \rangle$ с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) – (3).

Для доказательства достаточно заметить, что $B \in \text{Sub}\langle A, d, f \rangle$, $\overline{\beta}$ является конгруэнцией на $\langle A, d, f \rangle$, как объединение возрастающей цепочки конгруэнций, а из определения отношения $\overline{\beta_n}$ следует, что $\overline{\beta} = B^2 \cup \Delta_A$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ – алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) – (3). Алгебра $\langle A, d, f \rangle$ рисовски проста тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

- (1) $\langle A, f \rangle$ – связный унар без кручения;
- (2) $\langle A, f \rangle$ – связный унар, содержащий подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$;
- (3) $\langle A, f \rangle$ – неодноэлементный унар, содержащий такой элемент a , что $f(x) = a$ для любого $x \in A$;
- (4) $\langle A, f \rangle$ – несвязный унар, каждая компонента связности которого является либо унаром без кручения, либо одноэлементным унаром, либо унаром, содержащим подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если унар $\langle A, f \rangle$ одноэлементен, то алгебра $\langle A, d, f \rangle$ не является рисовски простой по определению. Пусть $\langle A, f \rangle$ – неодноэлементный связный унар, не удовлетворяющий условиям (1)–(3) теоремы. Тогда он периодичен, содержит подунар, изоморфный C_1^0 , и такой элемент $c \in A$, что $t(c) > 1$. Таким образом, $\langle A, f \rangle$ – корень, для которого $t(A) > 1$. Обозначим его неподвижный элемент через a . По лемме 6, отношение $\beta_1 \in \text{Con}\langle A, d, f \rangle$ является конгруэнцией Риса. Из условия $t(A) > 1$ и связности унара $\langle A, f \rangle$ следует, что найдется такой элемент $b \in A$, что $t(b) = 1$. Отсюда, $b \neq a$ и $a\beta_1 b$. Тогда $|[a]\beta_1| > 1$ и значит, $\beta_1 \neq \Delta_A$. С другой стороны, $\beta_1 \neq \nabla_A$, так как $t(A) > 1$. Таким образом, β_1 – нетривиальная конгруэнция Риса на $\langle A, d, f \rangle$.

Пусть теперь унар $\langle A, f \rangle$ несвязен и не удовлетворяет условию (4) теоремы. Тогда он содержит неодноэлементную компоненту связности B , имеющую неподвижный элемент b . Рассматривая конгруэнцию β_1 на $\langle B, f \rangle$, по лемме 7 получаем, что $\overline{\beta_1}$ – конгруэнция Риса алгебры $\langle A, d, f \rangle$. Так как $|B| > 1$, то $\overline{\beta_1} \neq \Delta_A$. Зафиксируем элемент $a \in A \setminus B$. Предполагая, что $\overline{\beta_1} = \nabla_A$, имеем $a\overline{\beta_1} b$, откуда $a \in B$, что противоречит выбору элемента a . Таким образом, $\overline{\beta_1}$ – нетривиальная конгруэнция Риса алгебры $\langle A, d, f \rangle$.

Достаточность. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ – связный. Если $\langle A, f \rangle$ – унар без кручения, то утверждение теоремы следует из леммы 3. В случае, когда $\langle A, f \rangle$ – унар, содержащий подунар S , изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$, оно вытекает из леммы 4. Пусть, наконец, $\langle A, f \rangle$ – неодноэлементный унар, содержащий такой элемент a , что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.

Тогда, по теоремам 2 [18], 9 [21] и 2 [28] алгебра $\langle A, d, f \rangle$ является простой, а, следовательно, и рисовски простой.

Пусть теперь унар $\langle A, f \rangle$ несвязен. Из условия (4) теоремы следует, что он не содержит одноэлементных компонент связности, имеющих неподвижные элементы. Отсюда, по лемме 5, алгебра $\langle A, d, f \rangle$ является рисовски простой. $\square$

Решетки подалгебр Риса

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$ и идемпотентными основными операциями. Если решетка $Sub_R \langle A, \Omega \rangle$ является цепью, то унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ содержит не более одного одноэлементного подунара.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть унар $\langle A, f \rangle$ содержит одноэлементные подунары B и C . Так как основные операции алгебры $\langle A, \Omega \rangle$ идемпотентны, то подунары B и C являются ее подалгебрами. Одноэлементные подалгебры рисовски замкнуты, то есть, являются подалгебрами Риса. При этом, B и C не сравнимы в $Sub_R \langle A, \Omega \rangle$, так как лежат в разных компонентах связности унара $\langle A, f \rangle$. $\square$

Опишем теперь строение решеток рисовских подалгебр в классах алгебр $\langle A, p, f \rangle$, $\langle A, s, f \rangle$, $\langle A, m, f \rangle$.

ЛЕММА 8. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3). Если унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ не содержит одноэлементных подунаров, то решетка $Sub_R \langle A, d, f \rangle$ является двухэлементной цепью $\{\emptyset, A\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как унар $\langle A, f \rangle$ не содержит одноэлементных подунаров, то и алгебра $\langle A, d, f \rangle$ не имеет одноэлементных подалгебр.

Если унар $\langle A, f \rangle$ связан, то, учитывая условия леммы, он либо является унаром без кручения, либо содержит подунар C_n^0 для некоторого $n > 1$. Если же унар $\langle A, f \rangle$ несвязен, то каждая его компонента связности является либо унаром без кручения, либо унаром, содержащим подунар, изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$.

По теореме 1, во всех перечисленных случаях алгебра $\langle A, d, f \rangle$ рисовски проста. Отсюда, по предложению 3, рисовское замыкание любой ее непустой подалгебры совпадает с A . $\square$

ЛЕММА 9. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3). Если унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ является корнем, то нетривиальными рисовски замкнутыми подалгебрами в $\langle A, d, f \rangle$ являются подалгебры вида D_m , где $0 \leq m < t(A)$, и только они.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу же заметим, что по следствию 4 из леммы 6, подунар D_n унара $\langle A, f \rangle$ является подалгеброй Риса алгебры $\langle A, d, f \rangle$ при любом неотрицательном $n < t(A)$. Другими словами, подалгебра D_n рисовски замкнута.

Пусть B — произвольная непустая подалгебра алгебры $\langle A, d, f \rangle$. Тогда $\langle B, f \rangle$ — подунар унара $\langle A, f \rangle$. В случае, когда $t(A) = 0$, алгебра $\langle A, d, f \rangle$ одноэлементна и утверждение леммы очевидно, поэтому далее полагаем, что $t(A) > 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $t(A)$ конечна. В силу данного условия, множество глубин элементов в любой системе порождающих подунара $\langle B, f \rangle$ ограничено сверху, а значит, имеет наибольший элемент. В ходе доказательства леммы 7 [20] показано, что в таком случае наибольшая глубина элементов во всех системах порождающих унара $\langle B, f \rangle$ одинакова. Обозначим ее через m и докажем, что рисовское замыкание подалгебры B алгебры $\langle A, d, f \rangle$ совпадает с D_m .

Так как $t(A) > 0$, то $m > 0$. Из определения подалгебры D_m следует, что $B \subseteq D_m \in \text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$. Отсюда, по определению рисовского замыкания, $\overline{B}_R \subseteq D_m$. Докажем обратное включение.

Пусть $x \in D_m$, откуда $t(x) \leq m$. По условию, найдется элемент $b \in B \subseteq \overline{B}_R$, для которого $t(b) = m$. Если $x = b$, то $x \in \overline{B}_R$. Пусть $x \neq b$. Поскольку $\overline{B}_R \in \text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$, то $f(b) \in \overline{B}_R$ и найдется конгруэнция $\theta \in \text{Con}\langle A, d, f \rangle$, для которой $\theta = \overline{B}_R^2 \cup \Delta_A$. Из условия $b, f(b) \in \overline{B}_R$ следует, что $b\theta f(b)$. Поскольку $m > 0$, то $b \neq f(b)$, откуда $t(f(b)) < t(b)$. Тогда, по лемме 10 [18], $k(b, f(b)) = t(b) = m$. Если $t(x) < m = t(b)$, то $k(x, b) = t(b)$. Если же $t(x) = m = t(b)$, то, по той же лемме 10 [18], $k(x, b) \leq t(b)$. Таким образом, в общем случае, $k(x, b) \leq k(b, f(b))$. Отсюда, по определению (1) имеем $p(x, b, f(b)) = f(b)$. Тогда $f(b) = p(x, b, f(b))\theta p(x, b, b) = x$ и, следовательно, $x\theta b$, то есть, $x \in \overline{B}_R$. Из определения (2) имеем $s(x, b, f(b)) \in \{b, f(b)\}$, откуда аналогично получаем $x \in \overline{B}_R$. И наконец, из определения (3) следует, что $x = m(f(b), b, x)\theta m(b, b, x) = b$, откуда снова $x \in \overline{B}_R$. Тогда $D_m \subseteq \overline{B}_R$ и, окончательно, $\overline{B}_R = D_m$.

Пусть теперь $t(A)$ бесконечна. Рассуждая как в случае ее конечности, получаем, что либо во всех системах порождающих подунара $\langle B, f \rangle$ множество глубин их элементов не ограничено, либо все его системы порождающих имеют одну и ту же наибольшую глубину элементов m . Во втором случае, аналогично доказанному выше, $\overline{B}_R = D_m$.

Допустим теперь, что множество глубин элементов в некоторой системе порождающих подунара $\langle B, f \rangle$ не ограничено и докажем, что тогда рисовское замыкание подалгебры B совпадает с A , то есть, является тривиальной подалгеброй. Предположим, что $\overline{B}_R \neq A$. Тогда найдутся элемент $c \in A \setminus \overline{B}_R$ и такая неединичная конгруэнция $\theta \in \text{Con}_R A$, что $\theta = \overline{B}_R^2 \cup \Delta_A$. По условию, существует также элемент $b \in B \subseteq \overline{B}_R$, для которого $t(b) > t(c)$. Из последнего неравенства, по лемме 10 [18], получаем $k(c, b) = t(b)$. Кроме того, $f(b) \in B \subseteq \overline{B}_R$, так как $B \in \text{Sub}\langle A, d, f \rangle$. Из условия $b, f(b) \in \overline{B}_R$ следует, что $b\theta f(b)$. Поскольку $t(b) > t(c)$, то $t(b) > 0$, откуда $b \neq f(b)$ и $t(f(b)) < t(b)$. Тогда, снова по лемме 10 [18], $k(b, f(b)) = t(b)$. Отсюда, $p(c, b, f(b)) = f(b)$. Учитывая равенство $p(c, b, b) = c$, получаем $f(b)\theta c$, что противоречит условию $c \notin \overline{B}_R$. Аналогично получаем противоречия из соотношений $b = s(c, b, f(b))\theta s(c, b, b) = c$ и $c = m(f(b), b, c)\theta m(b, b, c) = b$. Окончательно, $\overline{B}_R = A$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3), а унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ является корнем. Если $t(A)$ конечна, то решетка $\text{Sub}_R A$ является цепью длины $t(A) + 1$. Если же $t(A)$ бесконечна, то $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ изоморфна частично упорядоченному множеству $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \leq \rangle$ с присоединенной внешней единицей.

ЛЕММА 10. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3). Если унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ несвязен и содержит хотя бы один одноэлементный подунар, то решетка $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ изоморфна кардинальной сумме цепей, пополненной внешними нулем и единицей, где слагаемым суммы взаимно однозначно соответствуют компоненты связности унара $\langle A, f \rangle$, содержащие одноэлементный подунар. Для каждой компоненты связности E с одноэлементным подунаром, соответствующее ей слагаемое кардинальной суммы либо является цепью длины $t(E)$ (в случае, если $t(E)$ конечна), либо изоморфно цепи $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \leq \rangle$ с присоединенной внешней единицей (если $t(E)$ бесконечна).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 2 из леммы 1, рисовское замыкание любой подалгебры $B \in \text{Sub}\langle A, d, f \rangle$, имеющей несвязный унарный редукт, совпадает с A . Таким образом, далее достаточно рассмотреть подалгебры, унарные редукты которых содержатся в компонентах связности унара $\langle A, f \rangle$. Пусть B — подалгебра алгебры $\langle A, d, f \rangle$, унарный редукт $\langle B, f \rangle$ которой лежит в некоторой компоненте связности E унара $\langle A, f \rangle$.

Если компонента E не содержит одноэлементный подунар, она либо является унаром без кручения, либо имеет подунар S , изоморфный C_n^0 для некоторого $n > 1$. В первом случае B не содержит периодических элементов, а значит, $k(b, f(b)) = \infty$ для некоторого $b \in B$. Во втором случае $S \subseteq B$. Фиксируя $b \in S$, из условия $n > 1$ снова получаем $k(b, f(b)) = \infty$. При этом, из отсутствия одноэлементных подунаров в E следует, что $|B| > 1$. Тогда подалгебра B удовлетворяет условиям следствия 3 из леммы 2, откуда $\overline{B}_R = A$.

Пусть теперь E имеет одноэлементный подунар. Тогда, по следствию 5 из леммы 7, для любого $n < t(E)$ имеем $D_n \in \text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$, то есть, подалгебра D_n алгебры $\langle A, d, f \rangle$ рисовски замкнута. Если $t(E) = m < \infty$, то D_m совпадает с E . Так как по лемме 7, $\beta_{t(E)} \in \text{Con}_R\langle A, d, f \rangle$, то $\overline{E}_R = E$, то есть, подалгебра $D_{t(E)}$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ также рисовски замкнута. С другой стороны, рассуждая по аналогии с доказательством леммы 9, получаем, что $\overline{B}_R = D_k$ для некоторого $0 \leq k \leq m$. Отсюда, рисовские замыкания всех непустых подалгебр алгебры $\langle A, d, f \rangle$, содержащихся в E , образуют в решетке $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ цепь длины $t(E)$.

Пусть теперь $t(E) = \infty$. Как и выше, по следствию 5 из леммы 7, при любом $n < t(E)$ подалгебра D_n алгебры $\langle A, d, f \rangle$ рисовски замкнута. Сама подалгебра E также рисовски замкнута, что вытекает из следствия 6 из леммы 7. Далее, как и выше, $\overline{B}_R = D_k$ для некоторого $0 \leq k \leq m$. Таким образом, рисовские замыкания всех непустых подалгебр, содержащихся в E , образуют в решетке $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ цепь, изоморфную цепи $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \leq \rangle$, с присоединенной внешней единицей.

Поскольку компоненты связности унара не пересекаются, то частично упорядоченное множество всех нетривиальных рисовски замкнутых подалгебр алгебры $\langle A, d, f \rangle$ изоморфно кардинальной сумме цепей, откуда следует утверждение леммы. $\square$

Из лемм 8, 10 и следствия 7 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\langle A, d, f \rangle$ — алгебра с оператором f и тернарной операцией d , заданной по одному из правил (1) — (3). Справедливы следующие утверждения:

- (1) Если унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ не содержит одноэлементных подунаров, то решетка $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ является двухэлементной цепью $\{\emptyset, A\}$.
- (2) Пусть унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ является связным унаром с одноэлементным подунаром. Если $t(A)$ конечна, то решетка $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ является цепью длины $t(A) + 1$. Если же $t(A)$ бесконечна, то решетка $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ изоморфна цепи $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \leq \rangle$ с присоединенной внешней единицей.
- (3) Если унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ несвязен и содержит хотя бы один одноэлементный подунар, то решетка $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ изоморфна кардинальной сумме цепей, пополненной внешними нулем и единицей, где слагаемым суммы взаимно однозначно соответствуют компоненты связности унара $\langle A, f \rangle$, содержащие одноэлементный подунар. Для каждой компоненты связности E с одноэлементным подунаром, соответствующее ей слагаемое кардинальной суммы либо является цепью длины $t(E)$ (в случае, если $t(E)$ конечна), либо изоморфно цепи $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \leq \rangle$ с присоединенной внешней единицей (если $t(E)$ бесконечна).

СЛЕДСТВИЕ 8. Атомами решетки $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ являются либо одноэлементные подалгебры алгебры $\langle A, d, f \rangle$, либо, в случае отсутствия таких подалгебр, сама алгебра A . Других атомов в $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ нет.

СЛЕДСТВИЕ 9. Если унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ не содержит одноэлементных подунаров, то единственным коатомом решетки $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ является пустая подалгебра. В противном случае, если $\langle A, f \rangle$ связный, то решетка $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ имеет единственный коатом $D_{t(A)-1}$ только при условии $t(A) < \infty$; при $t(A) = \infty$ коатомов в $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ нет. Если же унар $\langle A, f \rangle$ несвязен, то коатомами $\text{Sub}_R\langle A, d, f \rangle$ являются его компоненты связности, содержащие одноэлементные подунары, и только они.

Следствия 8 и 9 вытекают непосредственно из теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 10. Решетка $Sub_R\langle A, d, f \rangle$ является цепью тогда и только тогда, когда унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, d, f \rangle$ содержит не более одного одноэлементного подунара.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость утверждения вытекает из предложения 4.

Пусть унар $\langle A, f \rangle$ содержит не более одного одноэлементного подунара. Тогда он либо не имеет одноэлементных подунаров, либо является корнем, либо изоморфен сумме корня и подунара, не содержащего неподвижных элементов. Во всех этих случаях, по теореме 2, $Sub_R\langle A, d, f \rangle$ является цепью. $\square$

Докажем теперь предложение 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим алгебру $\langle A, p, f \rangle$, где $A = \{a, b, c, d\}$ и $f(a) = a$, $f(b) = a$, $f(c) = a$, $f(d) = c$, а операция p задана по правилу (1). Непосредственно замечаем, что унарный редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\langle A, p, f \rangle$ является корнем, а множества $B = \{a, b\}$ и $C = \{a, c\}$ есть его подунары. Тогда, по определению (1), B и C являются подалгебрами алгебры $\langle A, p, f \rangle$. Так как $t(b) = t(c) = 1$, то, по лемме 9, $\overline{B}_R = D_1 = \overline{C}_R$, откуда $\overline{B}_R \wedge \overline{C}_R = D_1 = \{a, b, c\}$. С другой стороны, $B \wedge C = \{a\}$, а значит, $(\overline{B} \wedge \overline{C})_R = \{a\}$. Таким образом, $\overline{B}_R \wedge \overline{C}_R \neq (\overline{B} \wedge \overline{C})_R$. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пинус А. Г. Гамильтоново замыкание на универсальных алгебрах // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 3 (325). С. 610–616.
2. Пинус А. Г. О классическом Галуа-замыкании для универсальных алгебр // Известия вузов. Математика. 2014. № 2. С. 47–53.
3. Пинус А. Г. Об одном из логических замыканий на универсальных алгебрах // Сибирские электронные матем. известия. 2015. Т. 12. С. 698–703.
4. Pöschel R. Galois connections for operations and relations. In: Galois connections and applications. K. Denecke, M. Erné, S. L. Wismath (Eds). Dordrecht; Boston: Kluwer academic publishers, 2004. P. 231–258.
5. Csákány B. Abelian properties of primitive classes of universal algebras // Acta. Sci. Math. 1964. Vol. 25. P. 202–208.
6. Shoda K. Zur theorie der algebraischen erweiterungen // Osaka Math. Journal. 1952. Vol. 4. P. 133–143.
7. Tichy R. F. The Rees congruences in universal algebras // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1981. V. 29. P. 229–239.
8. Chajda I., Eigenthaler G., Langer H. Congruence classes in universal algebra. Vienna: Heldermann-Verl., 2003. 192 p.
9. Chajda I., Duda J. Rees algebras and their varieties // Publ. Math. (Debrecen). 1985. V. 32. P. 17–22.
10. Šešelja B., Tepavčević A. On a characterization of Rees varieties // Tatra Mountains Math. Publ. 1995. V. 5. P. 61–69.
11. Chajda I. Rees ideal algebras // Math. Bohem. 1997. V. 122, No. 2. P. 125–130.
12. Gumm P. H., Ursini A. Ideals in universal algebras // Algebra Universalis. 1984. Vol. 19. P. 45–54.

13. Szász G. Rees factor lattices. Publ. Math. 1968. Vol. 15. P. 259–266.
14. Усольцев В. Л. Алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 4(60). С. 157–166.
15. Усольцев В. Л. Конгруэнц-алгебры Риса в классах унаров и алгебр с операторами // Международная алгебраическая конференция, посв. 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша. Тез. докладов. М.: Издательство МГУ, 2018. С. 199–201.
16. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. докл. межд. семинара, посв. памяти проф. Л.А. Скорнякова. Волгоград, 1999. С. 31–32.
17. Усольцев В. Л. Унары с тернарной мальцевской операцией // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 201–202.
18. Usoltsev, V. L. Simple and pseudosimple algebras with operators // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 164, no. 2. P. 281–293.
19. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2014. Т. 15, вып. 3(51). С. 100–113.
20. Усольцев В. Л. О гамильтоновом замыкании на классе алгебр с одним оператором // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 4(56). С. 284–302.
21. Усольцев В. Л. О полиномиально полных и абелевых унарах с мальцевской операцией // Уч. зап. Орловского гос. ун-та. 2012. Т. 6(50). Ч. 2. С. 229–236.
22. Усольцев В. Л. О подпрямой неразложимых унарах с мальцевской операцией // Изв. Волгоградского гос. пед. ун-та, сер. "Ест. и физ.-мат. науки". 2005. № 4(13). С. 17–24.
23. Лата А. Н. О конгруэнц-когерентных алгебрах Риса и алгебрах с оператором // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 2(62). С. 154–172.
24. Усольцев В. Л. Свободные алгебры многообразия унаров с мальцевской операцией p , заданного тождеством $p(x, y, x) = y$ // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, вып. 2(38). С. 127–134.
25. Szendrei A. Clones in universal algebra. Montréal: Les presses de l'Université de Montréal, 1986. 166 p.
26. Baker K. A., Pixley A. Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems // Math. Zeitschrift. 1975. V. 143. P. 165–174.
27. Marković P., McKenzie R. Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms // Algebra Universalis. 2008. Vol. 58. P. 119–128.
28. Усольцев В. Л. О строго простых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, вып. 4(48). С. 196–204.
29. Усольцев В. Л. О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // Научно-техн. вестник Поволжья. 2016. Вып. 2. С. 28–30.

REFERENCES

1. Pinus, A. G. 2014, "Hamiltonian closure on universal algebras", *Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal*, vol. 55, no. 3(325), pp. 610–616 (Russian); translated in *Siberian Mathematical Journal*, vol. 55, no. 3(325), pp. 498–502. DOI: 10.1134/S0037446614030112
2. Pinus, A. G. 2014, "The classical Galois closure for universal algebras", *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, no. 2, pp. 47–53 (Russian); translated in *Russian Mathematics*, vol. 58, no. 2, pp. 39–44. DOI: 10.3103/S1066369X14020066
3. Pinus, A. G. 2015, "On some of logical closures on universal algebras", *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya (Siberian Electronic Mathematical Reports)*, vol. 12, pp. 698–703 (Russian). DOI: 10.17377/semi.2015.12.055
4. Pöschel, R. 2004, "Galois connections for operations and relations", pp. 231–258. In: Denecke, K., Ern , M. & Wismath, S. L. (Eds). 2004, "Galois connections and applications", *Kluwer academic publishers*, Dordrecht; Boston, 501 p.
5. Cs k ny, B. 1964, "Abelian properties of primitive classes of universal algebras", *Acta Scientiarum Mathematicarum*, vol. 25, pp. 202–208. (Russian)
6. Shoda, K. 1952, "Zur theorie der algebraischen erweiterungen", *Osaka Mathematical Journal*, vol. 4, pp. 133–143.
7. Tichy, R. F. 1981, "The Rees congruences in universal algebras", *Publications de l'Institut Mathematique (Beograd)*, vol. 29, pp. 229–239.
8. Chajda, I., Eigenthaler, G. & Langer, H. 2003, "Congruence classes in universal algebra", *Heldermann Verlag*, Vienna, 192 pp.
9. Chajda, I. & Duda, J. 1985, "Rees algebras and their varieties", *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, vol. 32, pp. 17–22.
10. Še elj , B. & Tepav evi , A. 1995, "On a characterization of Rees varieties", *Tatra Mountains Mathematical Publications*, vol. 5, pp. 61–69.
11. Chajda, I. 1997, "Rees ideal algebras", *Mathematica Bohemica*, vol. 122, no. 2, pp. 125–130.
12. Gumm, P. H. & Ursini, A. 1984, "Ideals in universal algebras", *Algebra Universalis*, vol. 19, pp. 45–54.
13. Sz sz, G. 1968, "Rees factor lattices", *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, vol. 15, pp. 259–266.
14. Usol'tsev, V. L. 2016, "Rees algebras and Rees congruence algebras of one class of algebras with operator and basic near-unanimity operation", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, issue 4(60), pp. 157–166. (Russian)
15. Usol'tsev, V. L. 2018, "Rees congruence algebras in classes of unars and algebras with operators", *Mezhdunarodnaya algebraicheskaya konferentsia posvyashchennaya 110-letiyu so dnya rozhdeniya professora A. G. Kurosha. Tezisy dokladov (International Algebraic Conference dedicated to the 110th anniversary of the birth of Professor A. G. Kurosh. Abstracts)*, Moscow State University Publishing House, Moscow, pp. 199–201. (Russian)

16. Kartashov, V.K. 1999, "On unars with Mal'tsev operation", *Universal'naya algebra i ee prilozheniya: Tezisy soobshcheniy uchastnikov mezhdunarodnogo seminara, posvyashchennogo pamyati prof. Mosk. gos. un-ta L.A. Skornyakova (Universal algebra and application: theses of International workshop dedicated memory of prof. L.A. Skornyakov)*, Volgograd, pp. 31–32. (Russian)
17. Usol'tsev, V.L. 2008, "Unars with ternary Mal'tsev operation", *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 63, no. 5, pp. 201–202 (Russian); translated in *Russian mathematical surveys*, 2008, vol. 63, no. 5, pp. 986–988. DOI: 10.1070/RM2008v063n05ABEH004572
18. Usol'tsev, V.L. 2010, "Simple and pseudosimple algebras with operators", *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 164, no. 2, pp. 281–293. DOI: 10.1007/S1095800997306
19. Usol'tsev, V.L. 2014, "On Hamiltonian ternary algebras with operators", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 15, issue 3(51), pp. 100–113. (Russian)
20. Usol'tsev, V.L. 2015, "On Hamiltonian closure on class of algebras with one operator", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, issue 4(56), pp. 284–302. (Russian)
21. Usol'tsev, V.L. 2012, "On polynomially complete and Abelian unars with Mal'tsev operation", *Uchenye Zapiski Orlovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, vol. 6(50), part 2, pp. 229–236. (Russian)
22. Usol'tsev, V.L. 2005, "On subdirect irreducible unars with Mal'tsev operation", *Izvestiya VGPU. Seriya "Estestvennye i fiziko-matematicheskie nauki"*, no. 4(13), pp. 17–24. (Russian)
23. Lata, A.N. 2017, "On congruence coherent Rees algebras and algebras with an operator", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, issue 2(62), pp. 154–172. (Russian)
24. Usol'tsev, V.L. 2011, "Free algebras in the variety of unars with Mal'tsev operation that defined by identity $p(x, y, x) = y$ ", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 12, issue 2(38), pp. 127–134. (Russian)
25. Szendrei, A. 1986, "Clones in universal algebra", *Les presses de l'Université de Montréal*, Montréal, 166 pp.
26. Baker, K.A. & Pixley, A. 1975, "Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 143, pp. 165–174. DOI: 10.1007/BF01187059
27. Marković, P. & McKenzie, R. 2008, "Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms", *Algebra Universalis*, vol. 58, pp. 119–128. DOI: 10.1007/s00012-008-2049-1
28. Usol'tsev, V.L. 2013, "On strictly simple ternary algebras with operators", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 14, issue 4(48), pp. 196–204. (Russian)
29. Usol'tsev, V.L. 2016, "On congruence lattices of algebras with one operator and basic near-unanimity operation", *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Povolzhya*, issue 2, pp. 28–30. (Russian)

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-288-303

Об одном линейном диофантовом уравнении и его приложениях¹

А. П. Фот, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, А. С. Подолян

Фот Андрей Петрович — доктор технических наук, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: fot@mail.osu.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Подолян Алёна Сергеевна — магистрант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

Аннотация

В работе рассмотрено линейное диофантово уравнение с шестью переменными. Построено его решение как сдвинутая неполная пятимерная целочисленная решётка в шестимерном пространстве. Построен базис этой решётки.

Дано алгоритмическое решение нахождения всех его решений из заданного шестимерного целочисленного параллелепипеда. Для этого был построен новый базис этой неполной пятимерной решётки, который позволил написать эффективную программу нахождения всех наборов, удовлетворяющих данному диофантову уравнению и принадлежащих заданному прямоугольному параллелепипеду.

В результате работы предложенного алгоритма, реализованного в системе Mathcad, было показано, что из общего количества 10182290760 целых точек, лежащих в заданном параллелепипеде, только 7822045 удовлетворяют заданному диофантову уравнению. Таким образом, полный перебор был сокращён в 1301,7 раза.

В статье рассмотрена связь сдвинутых решёток и задачи целочисленного программирования. Показано, как можно строить базисы неполных целочисленных решёток, которые позволяют сокращать полный перебор по точкам s -мерного прямоугольного параллелепипеда на перебор по точкам сдвинутой неполной решётки, лежащим в этом параллелепипеде.

Рассмотрены некоторые приложения этого диофантова уравнения в технических вопросах, связанных с решением одной прикладной задачи машиностроения в области проектирования мерительного инструмента, в частности, наборов концевых мер длины.

В статье отражён итерационный характер уточнения математической модели указанной прикладной задачи. После первой корректировки модели количество наборов уменьшилось ещё в 193,237 раза, а после второй корректировки модели общее сокращение наборов пригодных для последующей оптимизации стало в 581114,6 раза.

¹Работа выполнена по гранту РФФИ № 19-41-710004_p_a

В заключении указаны направления дальнейших исследований и возможное применение идей нейросетей Хопфилда и машинного обучения для реализации отбора оптимальных решений.

Ключевые слова: неполные целочисленные решётки, линейные диофантовы уравнения, мерительный инструмент, набор плоскопараллельных концевых мер длины.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. П. Фот, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, А. С. Подольян. Об одном линейном диофантовом уравнении и его приложениях // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, С. 288–303.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-288-303

On a linear Diophantine equation and its applications

A. P. Fot, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, A. S. Podolyan

Fot Andrey Petrovich — doctor of technical sciences, Orenburg State University (Orenburg).

e-mail: fot@mail.osu.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Podolyan Alyona Sergeevna — undergraduate, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

Abstract

The paper considers a linear Diophantine equation with six variables. Its solution is constructed as a shifted incomplete five-dimensional integer lattice in a six-dimensional space. The basis of this lattice is constructed.

An algorithmic solution for finding all its solutions from a given six-dimensional integer parallelepiped is given. For this purpose, a new basis for this incomplete five-dimensional lattice was constructed, which allowed us to write an effective program for finding all sets that satisfy a given Diophantine equation and belong to a given rectangular parallelepiped.

As a result of the proposed algorithm implemented in the Mathcad system, it was shown that out of the total number of 10182290760 integer points lying in a given parallelepiped, only 7822045 satisfy the given Diophantine equation. Thus, the total search was reduced by 1301.7 times.

The article considers the relationship between shifted lattices and integer programming problems. It is shown how it is possible to construct bases of incomplete integer lattices, which make it possible to reduce a complete search over the points of an s-dimensional

rectangular parallelepiped to a search over the points of a shifted incomplete lattice lying in this parallelepiped.

Some applications of this Diophantine equation in technical issues related to the solution of an applied mechanical engineering problem in the field of measuring tool design, in particular, sets of end length measures, are considered.

The article reflects the iterative nature of the refinement of the mathematical model of this applied problem. After the first model adjustment, the number of sets decreased by another 193.237 times, and after the second model adjustment, the total reduction of sets suitable for subsequent optimization became 581114.6 times.

In conclusion, the directions of further research and possible application of the ideas of Hopfield neural networks and machine learning for the implementation of the selection of optimal solutions are indicated.

Keywords: incomplete integer lattices, linear diophantine equations, measuring tool, a set of plane-parallel end-length measures.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. P. Fot, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, A. S. Podolyan, 2021, "On a linear Diophantine equation and its applications", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 288–303.

Введение

Рассмотрим линейное диофантово уравнение

$$9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = 10N + 990. \quad (1)$$

Такое диофантово уравнение возникает при решении одной прикладной задачи машиностроения в области проектирования мерительного инструмента, в частности, наборов плоскопараллельных концевых мер длины [6], [7], [9], [11], [14], [15].

Если рассмотреть однородное диофантово уравнение

$$9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = 10N, \quad (2)$$

то множеством его решений будет неполная целочисленная решётка Λ в $\mathbb{R}^6$.

Нетрудно видеть, что набор $k_1 = 120$, $k_2 = 18$, $k_3 = 20$, $k_4 = 10$, $k_5 = 10$, $N = 55$ является частным решением неоднородного диофантова уравнения (1). Если положить $\vec{k}_0 = (120, 18, 20, 10, 10)$, $N_0 = 55$, то общим решением уравнения (1) будет сдвинутая решётка

$$\Lambda + (\vec{k}_0, N_0) = \{(\vec{k}, N) | 9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = 10N + 990\}, \quad (3)$$

где неполная решётка Λ решений однородного диофантова уравнения (2) задана равенством

$$\Lambda = \{(\vec{k}, N) | 9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = 10N\}. \quad (4)$$

Заметим, что $9 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 = -1$, поэтому каждому набору целых чисел (k_3, k_4, k_5, N) соответствует целая точка

$$(9k_3 + 9k_4 + 10k_5 - 10N, -18k_3 - 18k_4 - 20k_5 + 20N, k_3, k_4, k_5, N) \in \Lambda.$$

Так как целая точка $(5k_2, -9k_2, 0, 0, 0, 0) \in \Lambda$, то неполная решётка Λ имеет вид

$$\Lambda = \{(5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 - 10N, -9k_2 - 18k_3 - 18k_4 - 20k_5 + 20N, k_3, k_4, k_5, N) | k_2, k_3, k_4, k_5, N \in \mathbb{Z}\}$$

и задается базисом из 5 векторов $\vec{\lambda}_1 = (5, -9, 0, 0, 0, 0)$, $\vec{\lambda}_2 = (9, -18, 1, 0, 0, 0)$, $\vec{\lambda}_3 = (9, -18, 0, 1, 0, 0)$, $\vec{\lambda}_4 = (10, -20, 0, 0, 1, 0)$, $\vec{\lambda}_5 = (-10, 20, 0, 0, 0, 1)$.

В приложениях нам требуется найти все натуральные решения, принадлежащие параллелепипеду $\Pi = [100; 200] \times [12; 62] \times [7; 57] \times [2; 52] \times [1; 10] \times [47; 122]$. Этот параллелепипед содержит $K = 101 \cdot 51 \cdot 51 \cdot 51 \cdot 10 \cdot 76 = 10182290760$ целых точек, что затрудняет выполнение полного перебора для нахождения всех точек сдвинутой решётки, принадлежащих данному параллелепипеду.

Цель данной работы — дать алгоритмическое решение нахождения всех решений диофантова уравнения (1), принадлежащих параллелепипеду Π , и подсчитать их количество. Кроме этого, в статье рассматриваются приложения данного диофантова уравнения к задачам машиностроения в области проектирования мерительного инструмента.

Алгоритмическое решение

Так как неполная решётка Λ имеет размерность 5 в шестимерном пространстве, то она задается 5 целочисленными параметрами. Обозначим их через t_1, t_2, t_3, t_4, t . Базис решётки Λ преобразуем, взяв вместо $\vec{\lambda}_2$ вектор $\vec{\lambda}'_2 = (-1, 0, 1, 0, 0, 0)$, и вместо $\vec{\lambda}_3 = (9, -18, 0, 1, 0, 0)$ вектор $\vec{\lambda}'_3 = (-1, 0, 0, 1, 0, 0)$. Переходя к новому базису, получим, что общее решение диофантова уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{cases} k_1 = 5t_1 - t_2 - t_3 + 10t_4 - 10t + 120 \\ k_2 = -9t_1 - 20t_4 + 20t + 18 \\ k_3 = t_2 + 20 \\ k_4 = t_3 + 10 \\ k_5 = t_4 + 10 \\ N = t + 55 \end{cases} \quad (5)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & 9k_1 + 5k_2 + 9k_3 + 9k_4 + 10k_5 = \\ & = 9(5t_1 - t_2 - t_3 + 10t_4 - 10t + 120) + 5(-9t_1 - 20t_4 + 20t + 18) + \\ & + 9(t_2 + 20) + 9(t_3 + 10) + 10(t_4 + 10) = 10(t + 55) + 990 = 10N + 990. \end{aligned}$$

Для определения всех точек сдвинутой неполной решётки Λ , лежащих в параллелепипеде Π , необходимо найти все целочисленные решения системы неравенств

$$\begin{cases} 100 \leq k_1 = 5t_1 - t_2 - t_3 + 10t_4 - 10t + 120 \leq 200 \\ 12 \leq k_2 = -9t_1 - 20t_4 + 20t + 18 \leq 62 \\ 7 \leq k_3 = t_2 + 20 \leq 57 \\ 2 \leq k_4 = t_3 + 10 \leq 52 \\ 1 \leq k_5 = t_4 + 10 \leq 10 \\ 47 \leq N = t + 55 \leq 122 \end{cases} \quad (6)$$

Исключим из системы (6) переменные t_2, t_3, t_4 , получим

$$\begin{cases} 100 \leq k_1 = 5t_1 - k_3 - k_4 + 10k_5 - 10N + 600 \leq 200 \\ 12 \leq k_2 = -9t_1 - 20k_5 + 20N - 882 \leq 62 \\ 7 \leq k_3 \leq 57 \\ 2 \leq k_4 \leq 52 \\ 1 \leq k_5 \leq 10 \\ 47 \leq N \leq 122 \end{cases} \quad (7)$$

Из первого и второго неравенств системы (7) получаем для t_1 диапазон изменения

$$\begin{aligned} \max \left(-100 + \frac{k_3 + k_4}{5} - 2k_5 + 2N, \frac{-20k_5 + 20N - 944}{9} \right) &\leq t_1 \leq \\ &\leq \min \left(-80 + \frac{k_3 + k_4}{5} - 2k_5 + 2N, \frac{-20k_5 + 20N - 894}{9} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Для последующих вычислений сделаем изменения в записи неравенств, которые уменьшат трудоемкость алгоритма:

$$\begin{aligned} -100 - 2k_5 + 2N + \max \left(\frac{k_3 + k_4}{5}, \frac{-2k_5 + 2N + 1}{9} - 5 \right) &\leq t_1 \leq \\ &\leq -80 - 2k_5 + 2N + \min \left(\frac{k_3 + k_4}{5}, \frac{-2k_5 + 2N + 6}{9} - 20 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Используя целую часть $[\cdot]$ и функцию потолок $\lceil \cdot \rceil$, определим функции $f_1(k_3, k_4) = \left\lceil \frac{k_3 + k_4}{5} \right\rceil$, $f_2(k_3, k_4) = \left\lfloor \frac{k_3 + k_4}{5} \right\rfloor$, $f_3(k_5, N) = \left\lceil \frac{-2k_5 + 2N + 1}{9} \right\rceil$, $f_4(k_5, N) = \left\lfloor \frac{-2k_5 + 2N + 6}{9} \right\rfloor$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} -100 - 2k_5 + 2N + \max(f_1(k_3, k_4), f_3(k_5, N) - 5) &\leq t_1 \leq \\ &\leq -80 - 2k_5 + 2N + \min(f_2(k_3, k_4), f_4(k_5, N) - 20). \end{aligned} \quad (10)$$

Ниже приведена программа, которая подсчитывает количество точек решения уравнения (1). Сами точки не сохранялись, так как их слишком много: 7822045.

```

Fot(p) :=
  T10,5 ← 0, j ← 0
  for N ∈ 47..122
    for k5 ∈ 1..10
      N1 ← 2(N - k5) - 100, N2 ← N1 + 20
      K ← 10(k5 - N), K2 ← -2K - 882, K ← K + 600
      r ←  $\frac{2(N - k_5) + 6}{9}$ , f4 ← floor(r)
      r ←  $\frac{2(N - k_5) + 1}{9}$ , f3 ← floor(r)
      f3 ← f3 + 1 if r ≠ f3
      for k4 ∈ 2..52
        for k3 ∈ 7..57
          K1 ← K - k3 - k4
          r ←  $\frac{k_3 + k_4}{5}$ , f2 ← floor(r), f1 ← f2
          f1 ← f1 + 1 if r ≠ f1
          m1 ← max(f1, f3 - 5), m2 ← min(f2, f4 - 20)
          m1 ← N1 + m1, m2 ← N2 + m2
          for t ∈ m1..m2 if m1 ≤ m2
            k1 ← 5t + K1, k2 ← -9t + K2
            j ← j + 1
  j

```

Fot(10000000) = 7822045

Другой вариант этой программы дает возможность по заданным N , k_5 , k_4 , k_3 находить все решения с указанными значениями этих переменных.

Заметим, что различных наборов N , k_5 , k_4 , k_3 , принадлежащих параллелепипеду Π , ровно 1976760. Анализ работы программы Fot показывает, что только для 369250 наборов из них (18,7% от общего числа) соответствующие точки сдвинутой неполной решётки не принадлежат параллелепипеду Π .

Сдвинутые решётки и задачи целочисленного программирования

Как известно (см. [1], с. 117), достаточно общее определение вещественной теоретико-числовой решётки в геометрии чисел следующее.

$$\begin{aligned}
\text{Fot1}(N, k5, k4, k3) := & \left[\begin{array}{l} T_{10,5} \leftarrow 0, j \leftarrow 0 \\ N1 \leftarrow 2(N - k5) - 100, N2 \leftarrow N1 + 20 \\ K \leftarrow 10(k5 - N), K2 \leftarrow -2K - 882, K \leftarrow K + 600 \\ r \leftarrow \frac{2(N - k5) + 6}{9}, f4 \leftarrow \text{floor}(r) \\ r \leftarrow \frac{2(N - k5) + 1}{9}, f3 \leftarrow \text{floor}(r) \\ f3 \leftarrow f3 + 1 \text{ if } r \neq f3 \\ K1 \leftarrow K - k3 - k4 \\ r \leftarrow \frac{k3 + k4}{5}, f2 \leftarrow \text{floor}(r), f1 \leftarrow f2 \\ f1 \leftarrow f1 + 1 \text{ if } r \neq f1 \\ m1 \leftarrow \max(f1, f3 - 5), m2 \leftarrow \min(f2, f4 - 20) \\ m1 \leftarrow N1 + m1, m2 \leftarrow N2 + m2 \\ \text{for } t \in m1..m2 \quad \text{if } m1 \leq \\ \quad \left[\begin{array}{l} k1 \leftarrow 5t + K1, k2 \leftarrow -9t + K2 \\ T_{j,0} \leftarrow k1, T_{j,1} \leftarrow k2, T_{j,2} \leftarrow k3, T_{j,3} \leftarrow k4, T_{j,4} \leftarrow k5, T_{j,5} \leftarrow N \\ j \leftarrow j + 1 \end{array} \right. \\ \text{submatrix}(T, 0, j - 1, 0, 5) \end{array} \right. \\
\text{Fot1}(55, 10, 10, 20) = & \begin{pmatrix} 100 & 54 & 20 & 10 & 10 & 55 \\ 105 & 45 & 20 & 10 & 10 & 55 \\ 110 & 36 & 20 & 10 & 10 & 55 \\ 115 & 27 & 20 & 10 & 10 & 55 \\ 120 & 18 & 20 & 10 & 10 & 55 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_m$, $m \leq s$ — линейно независимая система векторов вещественного арифметического пространства $\mathbb{R}^s$. Совокупность Λ всех векторов вида

$$a_1 \vec{\lambda}_1 + \dots + a_m \vec{\lambda}_m,$$

где a_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется m -мерной решёткой в $\mathbb{R}^s$, а сами векторы $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_m$ — базисом этой решётки.

Если $m = s$, то решётка называется полной, в противном случае — неполной. Множество всех s -мерных полных решёток из $\mathbb{R}^s$ будем обозначать через PR_s . Отметим, что в монографии [8] под решёткой понимается произвольная сдвинутая решётка, то есть множество вида $\Lambda + \vec{x}$, где $\Lambda \in PR_s$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$. Множество всех сдвинутых решёток $\Lambda + \vec{x}$ из $\mathbb{R}^s$ будем обозначать через CPR_s .

Очевидно, что $\mathbb{Z}^s$ — решётка, её ещё называют фундаментальной решёткой.

Решётка Λ называется целочисленной решёткой в $\mathbb{R}^s$, если Λ — подрешетка фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$, то есть

$$\Lambda = \{m_1 \vec{\lambda}_1 + \dots + m_s \vec{\lambda}_s | m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\}$$

и $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ — линейно независимая система целочисленных векторов.

Пусть $A = (A_1, \dots, A_s) \in \mathbb{Z}^s$, $B = (B_1, \dots, B_s) \in \mathbb{Z}^s$ и $\Pi(A, B)$ — прямоугольный параллелепипед с вершинами в точках A и B :

$$\Pi(A, B) = [A_1; B_1] \times \dots \times [A_s; B_s], \quad A_j \leq B_j \quad (j = 1, \dots, s).$$

Если $N(\Pi(A, B))$ — количество целых точек в этом параллелепипеде, то

$$N(\Pi(A, B)) = (B_1 - A_1 + 1) \cdot \dots \cdot (B_s - A_s + 1).$$

Достаточно общая задача целочисленного программирования звучит так: дана функция $F(X)$, где $X = (X_1, \dots, X_s)$ — произвольная целочисленная точка из параллелепипеда $\Pi(A, B)$. Требуется найти точку минимума, т. е. найти $X_0 \in \Pi(A, B)$ такую, что

$$F(X_0) = \min_{X \in \Pi(A, B)} F(X).$$

Ясно, что если про функцию $F(X)$ неизвестно никаких её свойств, то остается только алгоритм полного перебора, требующий вычисления $N(\Pi(A, B))$ значений функции $F(X)$.

Если нам известно, что переменные $X_1, \dots, X_s$ связаны диофантовым уравнением

$$c_1 X_1 + \dots + c_s X_s = c, \quad c, c_1, \dots, c_s \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

то, как показывает пример из предыдущего раздела, полный перебор может быть существенно сокращён. Остановимся на этом более подробно.

ЛЕММА 1. *Если $d = (c_1, \dots, c_s)$ — наибольший общий делитель коэффициентов и $d \nmid c$, то диофантово уравнение (11) не имеет решений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любых целых значений $X_1, \dots, X_s$ имеем:

$$d \mid c_1 X_1 + \dots + c_s X_s \implies d \mid c,$$

что противоречит условию. $\square$

Из элементарной теории чисел [2] хорошо известно, что алгоритм Евклида в сочетании с теорией цепных дробей [10] дает простой способ нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел $a \neq 0$ и $b \neq 0$:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n}}} = \frac{P_n}{Q_n}, \quad (a, b) = \frac{a}{P_n} = \frac{b}{Q_n} = (-1)^{n-1} (aQ_{n-1} - bP_{n-1}).$$

Определим следующие целые числа $d_1 = (c_1, c_2) = x_1 c_1 + y_1 c_2$, $d_2 = (d_1, c_3) = x_2 d_1 + y_2 c_3$, $\dots$, $d_{s-1} = (d_{s-2}, c_s) = x_{s-1} d_{s-2} + y_{s-1} c_s$.

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство $(c_1, \dots, c_s) = d_{s-1}$. Для целых чисел $X_1 = x_1 \cdot \dots \cdot x_{s-1}$, $X_2 = y_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{s-1}$, $X_3 = y_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{s-1}$, $\dots$, $X_{s-2} = y_{s-2} x_{s-1}$, $X_s = y_{s-1}$ справедливо равенство*

$$c_1 X_1 + \dots + c_s X_s = (c_1, \dots, c_s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рекуррентного равенства

$$(c_1, \dots, c_s) = ((c_1, \dots, c_{s-1}), c_s)$$

следует первое утверждение леммы.

Индукцией по s получим второе утверждение:

$$\begin{aligned} d_{s-2} &= (x_1 \cdot \dots \cdot x_{s-2}) c_1 + \dots + y_{s-2} c_{s-1}, \\ d_{s-1} &= x_{s-1} d_{s-2} + y_{s-1} c_s = (x_1 \cdot \dots \cdot x_{s-1}) c_1 + \dots + y_{s-2} x_{s-1} c_{s-1} + y_{s-1} c_s. \end{aligned}$$

$\square$

Из леммы 1 следует, что без ограничения общности можно считать, что $(c_1, \dots, c_s) = 1$. Из леммы 2 вытекает, что $X_1^0 = X_1 c, \dots, X_s^0 = X_s c$ будут частным решением диофантова уравнения (11).

Пусть $c_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, k$). Обозначим через $\Lambda(c_1, \dots, c_k)$ неполную целочисленную решётку в $\mathbb{R}^k$, определяемую диофантовым уравнением

$$c_1 X_1 + \dots + c_k X_k = 0. \quad (12)$$

Очевидно, что для любого целого $c \neq 0$ получаем вырожденный случай $\Lambda(c) = \{0\}$.

ЛЕММА 3. Решётка $\Lambda(c_1, c_2)$ имеет базис $\vec{\lambda} = \left(\frac{c_2}{(c_1, c_2)}, -\frac{c_1}{(c_1, c_2)} \right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $c'_1 = \frac{c_1}{(c_1, c_2)}$, $c'_2 = \frac{c_2}{(c_1, c_2)}$, тогда $(c'_1, c'_2) = 1$ и уравнение $c_1 X_1 + c_2 X_2 = 0$ равносильно уравнению $c'_1 X_1 + c'_2 X_2 = 0$. Отсюда следует, что $X_1 = t c'_2$, $X_2 = -t c'_1$, где t — любое целое число, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Для любого вектора $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ определим операции "подъёма размерности"

$$\vec{\lambda} \uparrow = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0)$$

и "опускания размерности"

$$\vec{\lambda} \downarrow = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}).$$

ЛЕММА 4. Пусть $k \geq 2$ и неполная решётка $\Lambda(c_1, \dots, c_k)$ имеет базис $\vec{\lambda}_j$ ($j = 1, \dots, k-1$), тогда неполная решётка $\Lambda(c_1, \dots, c_{k+1})$ имеет базис $\vec{\lambda}'_j = \vec{\lambda}_j \uparrow$ ($j = 1, \dots, k-1$),

$$\vec{\lambda}_k = \left(-\frac{c_{k+1} X_1}{d_k}, \dots, -\frac{c_{k+1} X_k}{d_k}, \frac{X_1 c_1 + \dots + X_k c_k}{d_k} \right),$$

где величины $X_1, \dots, X_k$ из леммы 2 с заменой s на k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}) \in \Lambda(c_1, \dots, c_{k+1})$ удовлетворяет условию, что λ_{k+1} наименьшая натуральная $k+1$ -ая координата вектора из неполной решётки $\Lambda(c_1, \dots, c_{k+1})$, а $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{k+1}) \in \Lambda(c_1, \dots, c_{k+1})$ — произвольный вектор. Разделим x_{k+1} на λ_{k+1} с остатком: $x_{k+1} = q \lambda_{k+1} + r$, $0 \leq r < \lambda_{k+1}$. Так как вектор $\vec{x} - q \vec{\lambda} = (x_1 - q \lambda_1, \dots, x_k - q \lambda_k, r) \in \Lambda(c_1, \dots, c_{k+1})$, то $r = 0$ в силу выбора вектора $\vec{\lambda}$. Но это означает, что $(\vec{x} - q \vec{\lambda}) \downarrow \in \Lambda(c_1, \dots, c_k)$. Отсюда следует утверждение леммы, так как в качестве вектора $\vec{\lambda}$ можно взять вектор $\vec{\lambda}_k$, заданный равенством

$$\vec{\lambda}_k = \left(-\frac{c_{k+1} X_1}{d_k}, \dots, -\frac{c_{k+1} X_k}{d_k}, \frac{X_1 c_1 + \dots + X_k c_k}{d_k} \right),$$

где величины $X_1, \dots, X_k$ из леммы 2 с заменой s на k . $\square$

Из доказанной леммы нетрудно видеть, что при $k \geq 2$ неполная решётка $\Lambda(c_1, \dots, c_k)$ имеет базис $\vec{\lambda}_j$ ($j = 1, \dots, k-1$), для которого базисная матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{k-1,1} & \lambda_{k-1,2} & \lambda_{k-1,3} & \lambda_{k-1,4} & \dots & \lambda_{k-1,k} \end{pmatrix}$$

$\lambda_{j,j+1} \neq 0$ ($j = 1, \dots, k-1$). Более того, можно утверждать, что найдётся базисная матрица с дополнительными свойствами $\lambda_{j,j+1} > 0$, $\lambda_{i,j+1} \geq 0$ ($i = j+1, \dots, k-1$), ($j = 1, \dots, k-1$).

Последние условия могут быть весьма полезными при реализации циклов перебора точек неполной решётки $\Lambda(c_1, \dots, c_s)$, попадающих в параллелепипед $\Pi(A, B)$.

Приложение диофантова уравнения к техническому объекту

Как указано в реферате к описанию изобретения по патенту [9]: "Изобретение относится к механическим средствам измерения и может быть использовано, в частности, при настройке измерительных приборов. Универсальный набор концевых мер состоит из пяти групп мер. Размеры мер подчинены зависимостям: $A_{1-m} = A_{n-(m-1)} + \delta_m$, $A_{nm-m} = A_{1-m} + (n_m - 1) \delta_m$, где

A_{1-m} — размер первой меры группы с номером m ; $A_{n-(m-1)}$ — размер последней меры группы с номером $m-1$; A_{nm-m,n_m} и δ_m — размер последней меры, количество мер и шаг размеров мер группы с номером m . Значения шагов $\delta_1, \dots, \delta_5$ размеров мер в группах определены рядом 1:10:20:200:2000 относительно размера шага мер в первой группе. Количество мер в группах подчинено зависимости $n_m = K_m - K(m-1)$, причем K_m и K_{m-1} — значения отношений размеров последних мер групп с номерами m и $m-1$ соответственно к значению шага размеров в группе с номером m , причем $K_1, \dots, K_5$ — целые натуральные числа в интервалах $100 \leq K_1 \leq 150$, $12 \leq K_2 \leq 62$, $7 \leq K_3 \leq 57$, $2 \leq K_4 \leq 52$, $1 \leq K_5 \leq 10$ для групп $1, \dots, 5$ соответственно, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^5 K_i = (N-1) + A_{1-1}(1/\delta_1 + 1/\delta_2 + 1/\delta_3 + 1/\delta_4 + 1/\delta_5) + (n_1-1)1/\delta_1(1/\delta_2 + 1/\delta_3 + 1/\delta_4 + 1/\delta_5) + n_2\delta_2(1/\delta_3 + 1/\delta_4 + 1/\delta_5) + n_3\delta_3(1/\delta_4 + 1/\delta_5) + n_4\delta_4/\delta_5,$$

где $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$.

Технический результат заключается в повышении эффективности набора за счет уменьшения количества мер и массы набора и расширении технологических возможностей."

Анализ исходного диофантова уравнения (1) и областей определения переменных в нём позволяет установить, что количество вариантов сочетаний значений 6-и переменных составляет более 10-и млрд.

Понятно, что для каждого значения N имеется большое количество вариантов сочетаний значений $K_1, \dots, K_5$ (в качестве примера приведём лишь одно из возможных решений для $N = 55$: $K_1 = 120$; $K_2 = 18$; $K_3 = 20$; $K_4 = 10$; $K_5 = 10$, кроме этого набора программа 2 находит ещё 4).

В первом приближении предлагаемый способ решения (1) позволяет уменьшить общее количество вариантов сочетаний $K_1, \dots, K_5$ для всех значений N до 7 822 045 вместо 10 182 290 760, что существенно сокращает объём дальнейших вычислений в 1301,7 раза.

Если решения (1) получены, то можно решить одну прикладную задачу машиностроения в области проектирования мерительного инструмента, в частности, наборов концевых мер длины. Традиционные универсальные наборы [3] концевых мер длины состоят, как правило, из пяти групп мер с определённым количеством мер в группе, в которых размеры мер возрастают с заданным шагом. Часто используемые шаги (начиная от первой и далее к пятой группе) — 0,005 мм, 0,01 мм, 0,05 мм, 0,1 мм, 0,5 мм, 1 мм и 10 мм (могут быть и другие шаги). К сожалению, изобретатель мерных плиток (концевых мер), шведский инженер Карл Иогансон не раскрыл секрета создания наборов, в связи с чем вопрос оптимальности их структуры до настоящего времени остаётся открытым.

Практическое приложение решения (1) в рассматриваемой области: обеспечивает возможность подготовки данных для формирования универсальных наборов концевых мер длины с заданным общим количеством мер в наборе, определение количества мер с заданным шагом в группах мер набора, определение размера каждой концевой меры набора. Окончательным итогом перечисленных работ является получение массива наборов для каждого N и выбор из этих массивов наиболее целесообразных по критериям заказчика набора (решение задачи оптимизации).

Как было установлено при анализе многих существующих наборов, количество мер $n_1, \dots, n_5$ в каждой из 5-и групп может быть найдено по полученным из (1) значениям $K_1, \dots, K_5$ (принятые значения шагов в группах: 0,005 мм, 0,05 мм, 0,1 мм, 1 мм и 10 мм) с использованием зависимостей (13):

$$\begin{aligned} n_1 &= (K_1 - 99); & n_2 &= (K_2 - 0,1K_1); & n_3 &= (K_3 - 0,5K_2); \\ n_4 &= (K_4 - 0,1K_3); & n_5 &= (K_5 - 0,1K_4). \end{aligned} \quad (13)$$

После нахождения $n_1, \dots, n_5$ можно получить массивы размеров мер A_{ij} для каждой группы набора (здесь i — номер меры в j -ой группе набора) по зависимостям (13) таблицы:

Таблица 1: Формулы (13) для нахождения значений A_{ij} для N_m .

№ группы J	A_{1j}	A_{2j}	A_{3j}	...	A_{n_1j}
1	$A_{11} = 0,500$	$A_{21} =$ $= A_{11} + 0,005$	$A_{31} =$ $= A_{11} + 2 \cdot 0,005$	...	$A_{n_11} = A_{11} +$ $+(n_1 - 1) \cdot 0,005$
2	$A_{12} = A_{n_11} +$ $+0,050$	$A_{22} = A_{12} +$ $+0,050$	$A_{32} = A_{12} +$ $+2 \cdot 0,050$	...	$A_{n_22} = A_{12} +$ $+(n_2 - 1) \cdot 0,050$
3	$A_{13} = A_{n_22} +$ $+0,100$	$A_{23} = A_{13} +$ $+0,100$	$A_{33} = A_{13} +$ $+2 \cdot 0,100$	...	$A_{n_33} = A_{13} +$ $+(n_3 - 1) \cdot 0,100$
4	$A_{14} = A_{n_33} +$ $+1,000$	$A_{24} = A_{14} +$ $+1,000$	$A_{34} = A_{14} +$ $+2 \cdot 1,000$	...	$A_{n_44} = A_{14} +$ $+(n_4 - 1) \cdot 1,000$
5	$A_{15} = A_{n_44} +$ $+10,000$	$A_{25} = A_{15} +$ $+10,000$	$A_{35} = A_{15} +$ $+2 \cdot 10,000$	...	$A_{n_55} = A_{15} +$ $+(n_5 - 1) \cdot 10,000$

Корректировка модели

Анализ результатов, полученных с помощью программы Fot1, показал, что в первоначальной модели, описываемой уравнением (1), не учтена связь между целочисленными значениями величин $n_1, \dots, n_5$ и значениями $K_1, \dots, K_5$. Анализируя формулы (13), мы видим, что K_1, K_3, K_4 должны быть кратны 10, а K_2 должно быть чётным.

Для получения новой модели введём новые целочисленные переменные $k_1^*, \dots, k_5^*$, заданные равенствами $k_1 = 10k_1^*, k_2 = 2k_2^*, k_3 = 10k_3^*, k_4 = 10k_4^*, k_5 = k_5^*, N = N^*$.

Диофантово уравнение (1) в новых переменных преобразуется к виду:

$$90k_1^* + 10k_2^* + 90k_3^* + 90k_4^* + 10k_5^* = 10N^* + 990. \quad (14)$$

После сокращения всех коэффициентов на 10, получаем более простые уравнения:

$$9k_1^* + k_2^* + 9k_3^* + 9k_4^* + k_5^* = N^* + 99, \quad (15)$$

$$9k_1^* + k_2^* + 9k_3^* + 9k_4^* + k_5^* = N^*. \quad (16)$$

Из набора $k_1 = 120, k_2 = 18, k_3 = 20, k_4 = 10, k_5 = 10, N = 55$, который является частным решением неоднородного диофантова уравнения (1), мы легко получаем частное решение неоднородного диофантова уравнения (15): $k_1^* = 12, k_2^* = 9, k_3^* = 2, k_4^* = 1, k_5^* = 10, N = 55$.

В новых переменных меняется параллелепипед

$$\Pi = [100; 200] \times [12; 62] \times [7; 57] \times [2; 52] \times [1; 10] \times [47; 122]$$

на параллелепипед $\Pi^* = [10; 20] \times [6; 31] \times [1; 5] \times [1; 5] \times [1; 10] \times [47; 122]$, который содержит $K^* = 11 \cdot 26 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 76 = 5434000$ целых точек, что в 1873,81 раз меньше количества целых точек в параллелепипеде Π .

Если положить $\vec{k}_0^* = (12, 9, 2, 1, 10)$, $N_0^* = 55$, то общим решением уравнения (15) будет сдвинутая решётка

$$\Lambda_1 + (\vec{k}_0^*, N_0^*) = \{(\vec{k}^*, N^*) | 9k_1^* + k_2^* + 9k_3^* + 9k_4^* + k_5^* = N^* + 99\}, \quad (17)$$

$\text{Fot3}(N) := \begin{array}{l} T_{35,5} \leftarrow 0, j \leftarrow 0, j1 \leftarrow 0 \\ \text{for } k5 \in -9..0 \\ \quad \text{for } k4 \in 0..4 \\ \quad \quad \text{for } k3 \in -1..3 \\ \quad \quad \quad \text{for } k1 \in -2..8 \\ \quad \quad \quad \quad k2 \leftarrow N - 55 - 9 \cdot (k1 + k3 + k4) - k5 \\ \quad \quad \quad \quad \text{if } (-3 \leq k2) \cdot (k2 \leq 22) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \begin{array}{l} T_{j,0} \leftarrow 10 \cdot k1 + 120, T_{j,1} \leftarrow 2 \cdot k2 + 18, T_{j,2} \leftarrow 10 \cdot k3 + 20 \\ T_{j,3} \leftarrow 10 \cdot k4 + 10, T_{j,4} \leftarrow k5 + 10, T_{j,5} \leftarrow N \\ j \leftarrow j + 1 \end{array} \end{array}$																																																																																							
T^T																																																																																							
<table> <tr><th></th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr> <tr><th>0</th><td>120</td><td>130</td><td>140</td><td>110</td><td>120</td><td>130</td><td>100</td><td>110</td><td>120</td><td>100</td></tr> <tr><th>1</th><td>54</td><td>36</td><td>18</td><td>54</td><td>36</td><td>18</td><td>54</td><td>36</td><td>18</td><td>36</td></tr> <tr><th>2</th><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>20</td><td>20</td><td>20</td><td>30</td><td>30</td><td>30</td><td>40</td></tr> <tr><th>3</th><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><th>4</th><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><th>5</th><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>...</td></tr> </table>												0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	120	130	140	110	120	130	100	110	120	100	1	54	36	18	54	36	18	54	36	18	36	2	10	10	10	20	20	20	30	30	30	40	3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	...
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																													
0	120	130	140	110	120	130	100	110	120	100																																																																													
1	54	36	18	54	36	18	54	36	18	36																																																																													
2	10	10	10	20	20	20	30	30	30	40																																																																													
3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10																																																																													
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1																																																																													
5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	...																																																																													
$\text{Fot3}(55) =$ <table> <tr><th></th><th>212</th><th>213</th><th>214</th><th>215</th><th>216</th><th>217</th><th>218</th><th>219</th><th>220</th><th>221</th></tr> <tr><th>0</th><td>100</td><td>110</td><td>100</td><td>100</td><td>110</td><td>120</td><td>130</td><td>100</td><td>110</td><td>120</td></tr> <tr><th>1</th><td>38</td><td>20</td><td>20</td><td>20</td><td>54</td><td>36</td><td>18</td><td>54</td><td>36</td><td>18</td></tr> <tr><th>2</th><td>10</td><td>10</td><td>20</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>20</td><td>20</td><td>20</td></tr> <tr><th>3</th><td>30</td><td>30</td><td>30</td><td>40</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><th>4</th><td>9</td><td>9</td><td>9</td><td>9</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><th>5</th><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td></tr> </table>												212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	0	100	110	100	100	110	120	130	100	110	120	1	38	20	20	20	54	36	18	54	36	18	2	10	10	20	10	10	10	10	20	20	20	3	30	30	30	40	10	10	10	10	10	10	4	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55
	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221																																																																													
0	100	110	100	100	110	120	130	100	110	120																																																																													
1	38	20	20	20	54	36	18	54	36	18																																																																													
2	10	10	20	10	10	10	10	20	20	20																																																																													
3	30	30	30	40	10	10	10	10	10	10																																																																													
4	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10																																																																													
5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55																																																																													
$\text{Fot3}(55) =$ <table> <tr><th></th><th>225</th><th>226</th><th>227</th><th>228</th><th>229</th><th>230</th><th>231</th><th>232</th><th>233</th><th>234</th></tr> <tr><th>0</th><td>100</td><td>110</td><td>120</td><td>100</td><td>110</td><td>100</td><td>100</td><td>110</td><td>100</td><td>100</td></tr> <tr><th>1</th><td>54</td><td>36</td><td>18</td><td>36</td><td>18</td><td>18</td><td>36</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td></tr> <tr><th>2</th><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>20</td><td>20</td><td>30</td><td>10</td><td>10</td><td>20</td><td>10</td></tr> <tr><th>3</th><td>20</td><td>20</td><td>20</td><td>20</td><td>20</td><td>20</td><td>30</td><td>30</td><td>30</td><td>40</td></tr> <tr><th>4</th><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><th>5</th><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>55</td><td>...</td></tr> </table>												225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	0	100	110	120	100	110	100	100	110	100	100	1	54	36	18	36	18	18	36	18	18	18	2	10	10	10	20	20	30	10	10	20	10	3	20	20	20	20	20	20	30	30	30	40	4	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	...
	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234																																																																													
0	100	110	120	100	110	100	100	110	100	100																																																																													
1	54	36	18	36	18	18	36	18	18	18																																																																													
2	10	10	10	20	20	30	10	10	20	10																																																																													
3	20	20	20	20	20	20	30	30	30	40																																																																													
4	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10																																																																													
5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	...																																																																													

что областью допустимых значений будет не параллелепипед Π^* , а некоторая более сложная многогранная фигура. Приступим к её нахождению.

Из условия (13), переписанного в терминах $k_1^*, \dots, k_5^*$, получим новые условия

$$10k_1^* \geq 100, \quad 2k_2^* - k_1^* \geq 1, \quad 10k_3^* - k_2^* \geq 1, \quad 10k_4^* - k_3^* \geq 1, \quad k_5^* - k_4^* \geq 1. \quad (20)$$

Новую область изменения величин $k_1^*, \dots, k_5^*$ перепишем как систему неравенств, в которой величины определяются сверху вниз:

$$\begin{cases} 1 \leq k_5^* \leq 10 \\ 1 \leq k_4^* \leq \min(k_5^* - 1, 5) \\ 1 \leq k_3^* \leq \min(10k_4^* - 1, 5) \\ 6 \leq k_2^* \leq \min(10k_3^* - 1, 31) \\ 10 \leq k_1^* \leq \min(2k_2^* - 1, 20) \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq k_5^* \leq 10 \\ 1 \leq k_4^* \leq \min(k_5^* - 1, 5) \\ 1 \leq k_3^* \leq 5 \\ 6 \leq k_2^* \leq \min(10k_3^* - 1, 31) \\ 10 \leq k_1^* \leq \min(2k_2^* - 1, 20) \end{cases} \quad (21)$$

Так как согласно (19) переменные $k_1^*, k_3^*, k_4^*, k_5^*$ — свободные, а k_2^* через них выражается, то (21) перепишем в новом виде:

$$\begin{cases} 2 \leq k_5^* \leq 10 \\ 1 \leq k_4^* \leq \min(k_5^* - 1, 5) \\ 1 \leq k_3^* \leq 5 \\ \max\left(6, \frac{k_1^* + 1}{2}\right) \leq k_2^* \leq \min(10k_3^* - 1, 31) \\ 10 \leq k_1^* \leq 20 \end{cases} \quad (22)$$

Теперь выпишем выражение для k_2^* с учетом, что это координата сдвинутой на вектор $(12, 9, 2, 1, 10)$ точки неполной решётки Λ_1 . Получим:


```

Fot5(N) :=
  T10,5 ← 0, j ← 0, j1 ← 0
  N1 ← N + 99
  for k5 ∈ 2..10
    k41 ← min(k5 - 1, 5)
    for k4 ∈ 1..k41
      for k3 ∈ 1..5
        for k1 ∈ 10..20
          k2 ← N1 - 9 · (k1 + k3 + k4) - k5
          if  $\left(\max\left(6, \frac{k1+1}{2}\right) \leq k2\right) \cdot (k2 \leq \min(31, 10k3 - 1))$ 
            Tj,0 ← 10·k1, Tj,1 ← 2·k2, Tj,2 ← 10·k3
            Tj,3 ← 10·k4, Tj,4 ← k5, Tj,5 ← N
            j ← j + 1
  TT

```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	140	120	130	100	110	120	100	110	100	120
1	16	34	16	52	34	16	34	16	16	32
2	10	20	20	30	30	30	40	40	50	20
3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	...

	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
0	100	110	100	120	100	110	100	110	100	100
1	36	18	18	18	36	18	18	18	18	18
2	30	30	40	10	20	20	30	10	20	10
3	10	10	10	20	20	20	20	30	30	40
4	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
5	55	55	55	55	55	55	55	55	55	...

необходимостью общения только по электронной почте, при этом необходимо отметить, что авторы из Тулы и Оренбурга не были знакомы лично и имели возможность только достаточно лаконичной переписки.

Специфика этого итерационного общения отразилась в структуре статьи. Мы посчитали такую форму представления результатов совместной работы уместной, так как она может послужить примером для молодых исследователей, как можно эффективно организовывать междисциплинарное общение представителей разных специальностей.

Подчеркнём, что необходимость привлечения для дальнейших исследований указанных выше соображений не отпала после корректировки модели, так как исследование 44959 возможных наборов для поиска оптимальных, когда нет формализованных критериев, превосходит возможности отдельного исследователя. И даже после второй корректировке, после которой осталось всего 17522 наборов, актуальность дальнейших исследований с помощью высказанных предположений не пропала.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борович З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.
2. Виноградов И. М. Основы теории чисел М.: Наука 1982
3. ГОСТ 9038-90. Меры длины концевые плоскопараллельные. Технические условия (с Изменением N 1). УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Государственного комитета СССР по управлению качеством продукции и стандартам от 25.01.90 №86.
4. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. — 420 с.
5. Г.Г. Малинецкий. Математические основы синергетики. Москва, URSS, 2009.
6. А. А. Муллабаев, А. П. Фот. Оптимизация наборов концевых мер и шупов // ВЕСТНИК ОГУ, 2005. — No 4. — С.152-153.

7. Св.-во гос. рег. прогр. для ЭВМ № 2016611967. Российская Федерация. Программа «Расчет набора концевых мер и его характеристик по универсальной функции и относительной металлоемкости» / А.П.Фот (RU), Р.М.Джалмухамедов (RU); правообладатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет». – № 2015663252; дата поступления 28.12.2015 г.; дата регистр. в Реестре программ для ЭВМ 15.02.2016 г. – Оpubл. 20.03.2016 г.
8. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
9. Патент RU №2629686 C1 МПК G01B5/02 (2006.01). Универсальный набор концевых мер /М. Ю. Тарова (РФ), А. П. Фот (РФ); Акционерное общество "Военно-промышленная корпорация "Научно-производственное объединение машиностроения" (RU) — № 2016107665 — Заявлено 02.03.2016 — Решение о выдаче патента от 14.07.2017 — Оpubл. 31.08.2017, Бюл. № 2.
10. Хинчин А. Я. Цепные дроби.– Харьков. 1956.
11. Фот, А. П. Об использовании математического моделирования в некоторых задачах машиностроения / А. А. Муллабаев, А. П. Фот, С. И. Павлов // Вестник ОГУ, 2006. — №2. — С. 75–82.
12. B.V.Kryzhanovsky, L.B.Litinskii, A.L.Mikaelian. «Vector-neuron models of associative memory», Proc. of Int. Joint Conference on Neural Networks IJCNN-04, Budapest-2004, pp. 909–1004.
13. B.V.Kryzhanovsky, B.M.Magomedov, A.L.Mikaelian. «A Domain model of neural network», Doklady Mathematics vol.71, pp. 310–314 (2005).
14. TESA Technology:
<https://technobearing.ru/d/877366/d/tesa2014-2015-compressed-206-221.pdf>
15. Mitutoyo Corporation:
<https://www.mitutoyo.co.jp/eng/products/gaugeblock/gaugeblock.html>

REFERENCES

1. Borevich Z. I., Shafarevich I. R., 1985, "Number Theory." Moscow: Nauka.
2. Vinogradov I. M., 1982, "Fundamentals of Number Theory." Moscow: Nauka.
3. GOST 9038-90. Length measures are plane-parallel end measures. Technical specifications (with Change N 1). APPROVED AND PUT INTO EFFECT BY the Resolution of the State Committee of the USSR on Product Quality Management and Standards of 25.01.90 No. 86.
4. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia. 420 p.
5. G. G. Malinetsky, 2009, "Mathematical foundations of synergetics." Moscow, URSS.
6. A. A. Mullabaev, A. P. Fot., 2005, "Optimization of sets of end measures and probes" *VESTNIK OSU*, . — No 4. — p. 152–153.

7. St.-vo state reg. program for computer No. 2016611967. Russian Federation. Program "Calculation of a set of end measures and its characteristics according to the universal function and relative metal capacity" / A. P. Fot(RU), R. M. Dzhal'mukhamedov(RU); copyright holder – Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Professional Education "Orenburg State University".- No. 2015663252; date of receipt 28.12.2015; date of registration. in the Register of Computer Programs 15.02.2016-Publ. 20.03.2016.
8. Sobolev S. L., 1974, "Introduction to the theory of cubature formulas." Moscow: Nauka, .
9. Patent RU No. 2629686 C1 IPC G01B5 / 02 (2006.01). Universal set of end measures / M. Yu. Tarova (RF), A. P. Fot (RF); Joint Stock Company "Military-Industrial Corporation "Scientific and Production Association of Mechanical Engineering" (RU) - - - No. 2016107665 - - - Declared 02.03.2016 - - - Decision to grant a patent dated 14.07.2017 - - - Publ. 31.08.2017, Byul. No. 2.
10. Khinchin A. Ya., 1956, "Chain fractions." — Kharkiv.
11. Fot, A. P., 2006, "On the use of mathematical modeling in some problems of mechanical engineering" / A. A. Mullabaev, A. P. Fot, S. I. Pavlov / / *Vestnik OSU*, . — №2. — P. 75–82.
12. B.V.Kryzhanovsky, L.B.Litinskii, A.L.Mikaelian. «Vector-neuron models of associative memory», Proc. of Int. Joint Conference on Neural Networks IJCNN-04, Budapest-2004, pp. 909–1004.
13. B.V.Kryzhanovsky, B.M.Magomedov, A.L.Mikaelian. «A Domain model of neural network», *Doklady Mathematics* vol.71, pp. 310–314 (2005).
14. TESA Technology:
<https://technobearing.ru/d/877366/d/tesa2014-2015-compressed-206-221.pdf>
15. Mitutoyo Corporation:
<https://www.mitutoyo.co.jp/eng/products/gaugeblock/gaugeblock.html>

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-304-312

**Арифметические свойства значений в полиадической
лиувиллевой точке рядов эйлера типа с полиадическим
лиувиллевым параметром**

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуется бесконечная линейная независимость полиадических чисел

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n \lambda^n,$$

где λ представляет собой некоторое полиадическое лиувиллево число. Как обычно, символ Похгаммера обозначается $(\gamma)_n$, по определению, $(\gamma)_0 = 1$, а при $n \geq 1$ имеем $(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)$. Рассматриваемые ряды сходятся в любом поле $\mathbb{Q}_p$. Результат является непосредственным продолжением проведенного автором исследования арифметических свойств полиадических чисел

$$f_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n, f_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n,$$

Значения обобщенных гипергеометрических рядов являются объектом исследования многочисленных работ. Если параметры рядов представляют собой рациональные числа, то такие ряды входят либо в класс E -функций (если эти ряды - целые функции), либо в класс G -функций (если они имеют конечный ненулевой радиус сходимости), либо в класс F -рядов (в случае нулевого радиуса сходимости в поле комплексных чисел, однако при этом они сходятся в полях p -адических чисел). Во всех перечисленных случаях применим метод Зигеля-Шидловского и его обобщения. Если среди параметров рядов содержатся алгебраические иррациональные числа, то исследование их арифметических свойств ведется на основе приближений Эрмита-Паде.

В рассматриваемом случае параметр - трансцендентное число. Следует отметить, что ранее А.И. Галочкин доказал алгебраическую независимость значений E -функций в точке, представляющей собой действительное число Лиувилля. Упомянем также поданные в печать работы Е.Ю. Юденковой о значениях F -рядов в полиадических лиувиллевых точках. Особенно отметим, что в этой работе рассматриваются значения в полиадической трансцендентной точке гипергеометрических рядов, параметр которых - полиадическое трансцендентное (лиувиллево) число.

Ключевые слова: полиадические числа Лиувилля, бесконечная линейная независимость.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

В. Г. Чирский. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 304–312.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-304-312

Arithmetic properties of values at polyadic Liouville points of Euler-type series with polyadic Liouville parameter

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grigorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We study infinite linear independence of polyadic numbers

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n \lambda^n,$$

where λ is a certain polyadic Liouville number. The series considered converge in any field $\mathbb{Q}_p$. Here $(\gamma)_n$ denotes Pochhammer symbol, i.e. $(\gamma)_0 = 1$, and for $n \geq 1$ we have $(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)$. The result extends the previous author's result on the polyadic numbers

$$f_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n, f_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n,$$

The values of generalized hypergeometric series are the subject of numerous studies. If the parameters of the series are rational numbers, then they come either in the class of E (if these series are entire functions) or the class of G functions (if they have a finite non-zero radius of convergence) or to the class of F –series (in the case of zero radius of convergence in the field of complex numbers, however, they converge in the fields of p –adic numbers). In all these cases, the Siegel-Shidlovsky method and its generalizations are applicable. If the parameters of the series contain algebraic irrational numbers, then the study of their arithmetic properties is based on the Hermite-Pade approximations.

In this case, the parameter is a transcendental number. It should be noted that earlier A. I. Galochkin proved the algebraic independence of the values of E –functions at a point that is a real Liouville number. We also mention the published works of E. Yu. Yudenkova on the values of F –series in polyadic Liouville points. We especially note that in this paper we consider the values in the polyadic transcendental point of hypergeometric series, the parameter of which is the polyadic transcendental (Liouville) number.

Note that earlier A.I. Galochkin proved the algebraic independence of values of E –functions at points which are real Liouville numbers. We also mention submitted papers (E.Yu. Yudenkova) about the arithmetic properties of values of F –series at polyadic Liouville numbers. It should be specially mentioned that here we study the values of hypergeometric series with a parameter which is a polyadic Liouville number.

Keywords: polyadic Liouville number, infinite linear independence.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

V. G. Chirskii, 2021, "Arithmetic properties of values at polyadic Liouville points of Euler-type series with polyadic Liouville parameter", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 304–312.

Введение

Исследование арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических рядов имеет долгую историю. Описание работ Линдемана, Вейерштрасса, Мейера, Зигеля можно найти в знаменитой книге А.Б. Шидловского "Трансцендентные числа"[1]. Там же приведены ссылки на работы В.А. Олейникова, И.И. Белогривова, А.И. Галочкина, А.Н. Коробова, П.Л. Иванкова. Особенно следует отметить работы В.Х. Салихова[2],[3], давшие близкое к окончательному описание свойств значений обобщенных гипергеометрических E – функций. Важные результаты были получены Бейкерсом, Браунвеллом и Хекманом [4]. Значения G – функций исследовались в работах А.И. Галочкина, Г.В. Чудновского [5], Э. Бомбьери [6]. В работе [6] было введено понятие глобального соотношения, позволившее применить метод Зигеля-Шидловского к еще одному классу рядов, к F – рядам. См. [7]-[14]. Отметим, что применение метода Зигеля-Шидловского давало результаты только для гипергеометрических рядов с рациональными параметрами. Случай алгебраических иррациональных параметров исследовался с помощью построения точных приближающих форм с использованием аппроксимаций Эрмита-Паде.

Случай трансцендентного параметра рассмотрен в работе [15], где была установлена бесконечная линейная независимость полиадических чисел

$$f_0(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n, f_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n.$$

Напомним, что кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p – адических чисел по всем простым числам p . Элементы θ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых по соответствующему кольцу целых p – адических чисел обозначаем $\theta^{(p)}$. Бесконечная линейная независимость полиадических чисел $\theta_1, \dots, \theta_m$ означает, что для любой ненулевой линейной формы $h_1x_1 + \dots + h_mx_m$ с целыми коэффициентами $h_1, \dots, h_m$ существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство

$$h_1\theta_1^{(p)} + \dots + h_m\theta_m^{(p)} \neq 0.$$

Каноническое представление элемента θ кольца целых полиадических чисел имеет вид ряда

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Разумеется, ряд, члены которого – целые числа, сходящийся во всех полях p – адических чисел, представляет собой целое полиадическое число. Будем называть полиадическое число θ полиадическим числом Лиувилля (или лиувиллевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует натуральное число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\theta - A|_p < A^{-n}.$$

Настоящая работа продолжает развитие заложенной в [15] основной идеи. В работе [16] А.И. Галочкин доказал алгебраическую независимость значений E – функций в точке, представляющей собой действительное число Лиувилля. Здесь будет доказана бесконечная линейная независимость полиадических чисел

$$f_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \lambda^n, f_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n \lambda^n.$$

Важным аппаратом получения этого результата являются построенные в работе Ю. В. Нестеренко [17] аппроксимации Эрмита–Паде обобщенных гипергеометрических функций.

Формулировка основного результата

Пусть $\lambda_0 = 0$, пусть μ_0 -произвольное натуральное число. Положим

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \mu_0, s_1 = \exp(\lambda_1)$$

Пусть μ_1 -произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию: для любого простого числа $p \leq s_1 + \lambda_1 + 1$ выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \mu_1 \geq 2s_1 \ln s_1$$

При $k \geq 2$ положим

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \mu_{k-1}, s_k = \exp \lambda_k \quad (1)$$

и пусть натуральное число μ_k выбрано так, что для любого простого $p \leq s_k + \lambda_k + 1$ выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \mu_k \geq 2s_k \ln s_k. \quad (2)$$

Пусть

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \quad (3)$$

Ряд (3) сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$ согласно (1), (2) и его сумма в этом поле представляет собой целое p -адическое число. Более того, этот ряд представляет собой полиадическое число Лиувилля, так как

$$|\lambda - \lambda_k|_p < p^{-2s_k \ln s_k} < \lambda_k^{-2s_k}.$$

для любого простого числа $p \leq s_k + \lambda_k + 1$.

Будем рассматривать ряды

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, \quad (4)$$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n z^n, \quad (5)$$

где λ определено равенством (3). Ряды (4) и (5) сходятся в любом поле $\mathbb{Q}_p$ при $|z|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$.

Нам потребуются вспомогательные ряды. При всех k положим

$$f_{0,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_k)_n z^n, \quad (6)$$

$$f_{1,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_k + 1)_n z^n. \quad (7)$$

Коэффициенты этих рядов - натуральные числа, поэтому в любом поле $\mathbb{Q}_p$ они сходятся при $|z|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$.

ТЕОРЕМА. Для любых целых чисел h_0, h_1 , не равных нулю одновременно, существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство

$$|L(\lambda)|_p = |h_0 f_0(\lambda) + h_1 f_1(\lambda)|_p > 0. \quad (8)$$

Схема доказательства теоремы

Следуя работе Ю.В. Нестеренко [17], обозначим

$$\alpha_{1,k} = \lambda_k, \alpha_{2,k} = 1$$

и для $N = 2s + r$, где $r = 1$ или $r = 2$ полагаем $\alpha_{N,k} = \alpha_{r,k} + s$, иными словами,

$$\alpha_{2s+1,k} = \lambda_k + s, \alpha_{2s+2,k} = 1 + s. \quad (9)$$

Используя обычное обозначение

$$F(\alpha, \beta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!} z^n$$

положим

$$f_{N,k}(z) = F(\alpha_{N+1,k}, \alpha_{N+2,k} z).$$

Обозначим, далее,

$$u_{0,k}(z) = f_{0,k}(z), u_{1,k}(z) = \alpha_{1,k} f_{1,k}(z)$$

и для любого N положим

$$u_{N,k}(z) = \alpha_{1,k} \dots \alpha_{N,k} z^{N-1} f_{N,k}(z).$$

В упомянутой выше статье Ю.В. Нестеренко установлено, что для любого N существуют многочлены $P_{N,i,k}(z), i = 0, 1$ такие, что выполняется равенство

$$u_{N,k}(z) = P_{N,0,k}(z) u_{0,k}(z) + P_{N,1,k}(z) u_{1,k}(z).$$

При этом

$$P_{0,0,k}(z) = 1, P_{0,1,k}(z) = 0, P_{1,0,k}(z) = 0, P_{1,1,k}(z) = 1.$$

В той же работе установлено, что при всех N справедливо равенство

$$u_{N+2,k}(z) = u_{N+1,k}(z) - \alpha_{N+1,k} z u_{N,k}(z)$$

и вытекающие из него соотношения

$$P_{N+2,i,k}(z) = P_{N+1,i,k}(z) - \alpha_{N+1,k} z P_{N,i,k}(z), i = 0, 1. \quad (10)$$

Пусть $K_i, i = 1, 2, \dots$ обозначают натуральные числа. Пусть $C_i, i = 1, 2, \dots$ обозначают положительные постоянные. Символом $[a]$ обозначаем целую часть числа a .

По индукции, используя (9) и (10), доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 1. Существует $K_1 \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $k \in \mathbb{N}, k \geq K_1$, при $s = [s_k] + 1$ для многочленов $P_{N,i,k}(z)$, $N = 2s + 1$ или $N = 2s + 2, i = 0, 1$ выполняются неравенства

$$|P_{N,i,k}(\lambda_k)| \leq \exp(s_k \ln s_k + C_1 s_k \sqrt{\ln s_k})$$

и эти неравенства останутся верными при замене числа N числом $N + 1$.

ЛЕММА 2. Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq K_2$, где K_2 — эффективная постоянная, $s \in \mathbb{N}$, причем $s = [s_k] + 1$. Тогда для $N = 2s + 1$ или $N = 2s + 2$ справедливы неравенства

$$\prod_p |u_{N,k}(\lambda_k)|_p \leq \exp(-2s_k \ln s_k + C_3 s_k \sqrt{\ln s_k}),$$

где произведение в левой части этого неравенства взято по всем простым числам p , удовлетворяющим неравенствам

$$\exp(\sqrt{\ln s_k}) \leq p \leq s_k + \lambda_k + 1. \quad (11)$$

Рассмотрим линейную форму

$$L_k(\lambda_k) = h_0 f_{0,k}(\lambda_k) + h_1 f_{1,k}(\lambda_k)$$

с целыми коэффициентами $h_0, h_1, \max(|h_0|, |h_1|) = h$.

Все выбираемые далее постоянные K_i будут зависеть от h .

ЛЕММА 3. Пусть $\delta > 0, k \in \mathbb{N}, k \geq K_3$. Тогда существует простое число p_k , удовлетворяющее неравенствам (11), для которого справедлива оценка

$$|L_k(\lambda_k)|_{p_k} \geq \exp(-s_k \ln s_k - C_{13} s_k \sqrt{\ln s_k}) \quad (12)$$

Рассмотрим линейную форму

$$L(\lambda) = h_0 f_0(\lambda) + h_1 f_1(\lambda).$$

Она представляет собой целое p_k -адическое число, поэтому разность форм

$$\begin{aligned} L(\lambda) - L_k(\lambda_k) &= L(\lambda) - L(\lambda_k) + L(\lambda_k) - L_k(\lambda_k) = h_0 f_0(\lambda) + h_1 f_1(\lambda) - \\ & - (h_0 f_0(\lambda_k) + h_1 f_1(\lambda_k)) + (h_0 f_0(\lambda_k) + h_1 f_1(\lambda_k)) - (h_0 f_{0,k}(\lambda_k) + h_1 f_{1,k}(\lambda_k)) \\ &= h_0 (f_0(\lambda) - f_0(\lambda_k) + f_0(\lambda_k) - f_{0,k}(\lambda_k)) + h_1 (f_1(\lambda) - f_1(\lambda_k) + f_1(\lambda_k) - f_{1,k}(\lambda_k)) \end{aligned}$$

тоже представляет собой целое p_k -адическое число. Согласно равенствам (4)–(7)

$$\begin{aligned} f_0(\lambda) - f_0(\lambda_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n (\lambda^n - \lambda_k^n), f_1(\lambda) - f_1(\lambda_k) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n (\lambda^n - \lambda_k^n) \\ f_0(\lambda_k) - f_{0,k}(\lambda_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda)_n - (\lambda_k)_n) \lambda_k^n, f_1(\lambda_k) - f_{1,k}(\lambda_k) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda + 1)_n - (\lambda_k + 1)_n) \lambda_k^n \end{aligned}$$

Обозначим $\Lambda_k = \lambda - \lambda_k$. При $n \geq 1$ все эти разности являются целыми p_k -адическими числами, членами сходящегося в $\mathbb{Q}_{p_k}$ ряда. Каждое из этих чисел можно представить в виде произведения Λ_k на целое p_k -адическое число, член сходящегося в $\mathbb{Q}_{p_k}$ ряда. Из равенств (1) и неравенства (2) вытекает, что

$$|\Lambda_k|_{p_k} = |\mu_k|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k}.$$

Это означает, что

$$|f_i(\lambda) - f_i(\lambda_k)|_{p_k} \leq |\Lambda_k|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k}$$

и

$$|f_i(\lambda_k) - f_{i,k}(\lambda_k)|_{p_k} \leq |\Lambda_k|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k}.$$

Следовательно,

$$|L(\lambda) - L_k(\lambda_k)|_{p_k} \leq p_k^{-2s_k \ln s_k} \quad (13)$$

Неравенства (12), (13) означают, что при $k \geq K_4$ получаем:

$$|L(\lambda) - L_k(\lambda_k)|_{p_k} < |L_k|_{p_k}.$$

Поэтому

$$|L(\lambda)|_{p_k} = |L_k(\lambda_k)|_{p_k} > 0,$$

то есть доказываемое неравенство (8).

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что при $k \geq K_5$ справедливо неравенство $p_k < p_{k+1}$.

Заключение.

Этот результат можно считать первым в ряду подобных ему. Можно применить идеи этой работы к гипергеометрическим рядам более общего вида и использовать приближения Эрмита-Паде из работы Ю.В. Нестеренко [17]. Возможна попытка уточнения результата с использованием подхода из работы [12].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа.-М.: «Наука».-1987.-448 с.(Английский перевод:[3] Andrei B.Shidlovskii. Transcendental Numbers. W.de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467pp.).
2. Салихов В.Х. Критерий алгебраической независимости одного класса гипергеометрических E – функций. // Матем. сб. -1990.-т.181.-№2.-с.189-211.
3. Салихов В.Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E – функций. // Acta Arithm.-1990.-v.53.- p.453-471.
4. Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G. Siegel normality // Ann.Math.-1988.-Ser.127.-p.279-308.
5. Chudnovsky G. V. On application of Diophantine approximations // Proc.Natl.Acad.Sci.USA.-1985.-V.81.-p.7261-7265.
6. Bombieri E. On G -functions // Recent Progress in Analytic Number Theory.v.2. London: Academic Press, 1981.-p.1-68.
7. Bertrand D., Chiskii V., Yebbou J.. Effective estimates for global relations on Euler-type series. // Ann. Fac. Sci. Toulouse, v.13,no.2,2004,pp.241-260.
8. Матвеев В.Ю., Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов, Чебышевский сборник, том 17, выпуск 3, с. 156 – 167

9. Чирский В.Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами. // Доклады Академии наук, сер. матем.т.459, no. 6, 677-678.(Английский перевод Chiskii V. G., Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients. Dokl. Math. 90(3), pp. 766–768(2014))
10. Чирский В.Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F -рядов. // Доклады Академии наук, сер. матем.т.483, no. 3, 257-258.(Английский перевод V.G. Chiskii, Arithmetic properties of generalized hypergeometric F - series. Dokl. Math. 98:3, 589–591 (2018).)
11. Matala-aho T., Zudilin W., Euler factorial series and global relations, J. Number Theory 186 (2018), 202-210.
12. Ernvall-Hytonen A. M., Matala-aho T., Seppela L., Euler’s divergent series in arithmetic progressions. // arXiv:1809.03859v1math.NT11 Sep 2018.
13. Chirskii V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers. // Russ. J. Math. Phys. 2019.- v.26, no.3, pp.286-305.
14. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric F - series. // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, no.2, pp.175-184.
15. Чирский В.Г. Арифметические свойства рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром. // Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.т.494, с. 69-70.(Английский перевод Chiskii V. G., Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter. Dokl. Math. 2020.-v.102,no.2. pp.412-413.)
16. Галочкин А. И. Об алгебраической независимости значений E -функций в некоторых трансцендентных точках. // Вестник МГУ. Сер.1, матем.,механ.-1970.-no.5.С.58-63.(Английский перевод А.И. Galochkin.The algebraic independence of values of E -functions at certain transcendental points. // Mosc. Univ. Math. Bull. 25.-n0.5.-pp.41-45)
17. Нестеренко Ю.В. Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций. // Матем. сб.-1994.-т.185.-no.3.-с.39-72.(Англий перевод Nesterenko Yu. V.. Hermite-Pade approximants of generalized hypergeometric functions. // Russ.Acad.Sci.Sb.Math. -1995.-83.-189-219)

REFERENCES

1. Shidlovskii, A. B.1989.“ Transcendental Numbers“, *W.de Gruyter.-Berlin.-New York*.467pp.
2. Salikhov. V.Kh.1990.“A criterion for the algebraic independence of the values of a class of hypergeometric E -functions“, *Math.USSR,Sb.*, Vol, 69, pp. 203-226.
3. Salikhov. V. Kh. “ Irreducibility of hypergeometric equations and algebraic independence of class of E -functions“, *Acta Arith.*,Vol. 53, pp. 453-471.
4. Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G.1988.“ Siegel normality“, *Ann.Math.*, Ser.127, pp. 279-308.
5. Chudnovsky G. V. 1985. On application of Diophantine approximations“, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* Vol.81, pp. 7261-7265.
6. Bombieri E. 1981 “On G -functions“, *Recent Progress in Analytic Number Theory.. London: Academic Press*“, Vol.2, pp. 1-68.

7. Bertrand D., Chiskii V. G., Yebbou J. 2004. “ Effective estimates for global relations on Euler-type series“, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Vol.13,no.2, pp. 241-260.
8. Matveev V. Yu. 2018 “ Algebraic independence of certain almost polyadic series“, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 17, no.3, pp. 156-167.
9. Chiskii V. G. 2014. “ Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Dokl. Math.* Vol. 90, no.3, pp. 766–768.
10. Chiskii V. G. 2018. “ Arithmetic properties of generalized hypergeometric F – series“, *Dokl. Math.* Vol. 98, no.3, pp. 589–591.
11. Matala-aho T. , Zudilin W.V.2018. “Euler factorial series and global relations“, *J. Number Theory* Vol. 186, pp. 202-210.
12. Ernvall-Hytonen A-M., Matala-aho T.,Seppela L.,2018. “ Euler’s divergent series in arithmetic progressions“, *arXiv:1809.03859v1math.NT11 Sep 2018*
13. Chirskii V. G. 2019, “Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers“, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, no.3, pp. 286-305.
14. Chirskii V. G.2020. “ Arithmetic properties of generalized hypergeometric F – series“, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, no.2, pp. 175-184.
15. Chiskii V. G., “Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter“, *Dokl. Math.*, Vol.102,no.2. pp. 412-413.
16. Galochkin A.I.1970. “The algebraic independence of values of E-functions at certain transcendental points“, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, Vol. 25.n0.5.pp. 41-45.
17. Nesterenko Yu. V. 1995. “Hermite-Pade approximants of generalized hypergeometric functions“, *Russ.Acad.Sci.Sb.Math.*,Vol83. pp. 189-219.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-313-333

Обобщенные разбиения Розы и линейные рекуррентные последовательности¹

А. В. Шутов

Шутов Антон Владимирович — кандидат физико-математических наук, Хабаровское отделение института прикладной математики ДВО РАН (г. Владимир).

e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Розы ввел фрактальное множество, связанное со сдвигом двумерного тора на вектор (β^{-1}, β^{-2}) , где β — действительный корень уравнения $\beta^3 = \beta^2 + \beta + 1$, и показал, что данный фрактал разбивается на три фрактала, являющихся множествами ограниченного остатка относительно данного сдвига тора. Введенное множество получило название фрактала Розы и нашло многочисленные применения в комбинаторике слов, геометрии, теории динамических систем и теории чисел.

Позднее была введена бесконечная последовательность разбиений d — 1-мерных фракталов Розы, связанных с алгебраическими единицами Пизо степени d , на фрактальные множества d типов. Каждое следующее разбиение последовательности является подразбиением предыдущего. Эти разбиения оказались тесно связанными с некоторыми иррациональными сдвигами тора и позволили построить новые примеры множеств ограниченного остатка для этих сдвигов, а также получить результаты о самоподобии орбит сдвигов.

В настоящей работе продолжается изучение обобщенных разбиений Розы, связанных с числами Пизо. Предложен новый подход к определению фракталов и разбиений Розы на основе разложений натуральных чисел по линейным рекуррентным последовательностям. Это позволило улучшить результаты о связи разбиений Розы и множеств ограниченного остатка, показав, что соответствующая оценка остаточного члена не зависит от номера разбиения.

Доказана теорема геометризации, показывающая, что натуральное число имеет заданное окончание жадного разложения по линейной рекуррентной последовательности тогда и только тогда, когда соответствующая точка орбиты сдвига тора попадает в некоторое множество, являющееся объединением тайлов разбиения Розы. Получен ряд теоретико-числовых приложений этого результата.

В заключении сформулирован ряд открытых проблем, связанных с обобщенными разбиениями Розы.

Ключевые слова: разбиения Розы, фракталы Розы, числа Пизо, линейные рекуррентные последовательности, множества ограниченного остатка.

Библиография: 32 названия.

Для цитирования:

А. В. Шутов. Обобщенные разбиения Розы и линейные рекуррентные последовательности // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 313–333.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00065)

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-313-333

Generalized Rauzy tilings and linear recurrence sequences

A. V. Shutov

Shutov Anton Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (Vladimir).

e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

Rauzy introduced a fractal set associated with the two-dimensional toric shift by the vector (β^{-1}, β^{-2}) , where β is the real root of the equation $\beta^3 = \beta^2 + \beta + 1$ and showed that this fractal is divided into three fractals that are bounded remainder sets with respect to a given toric shift. The introduced set was named as Rauzy fractal. It obtains many applications in the combinatorics of words, geometry, theory of dynamical systems and number theory.

Later, an infinite sequence of tilings of $d - 1$ -dimensional Rauzy fractals associated with algebraic Pisot units of the degree d into fractal sets of d types were introduced. Each subsequent tiling is a subdivision of the previous one. These tilings are closely related to some irrational toric shifts and allowed to obtain new examples of bounded remainder sets for these shifts, and also to get some results on self-similarity of shift orbits.

In this paper, we continue the study of generalized Rauzy tilings related to Pisot numbers. A new approach to definition of Rauzy fractals and Rauzy tilings based on expansions of natural numbers on linear recurrence sequences is proposed. This allows to improve the results on the connection of Rauzy tilings and bounded remainder sets and to show that the corresponding estimate of the remainder term is independent on the tiling order.

The geometrization theorem for linear recurrence sequences is proved. It states that the natural number has a given endpoint of the greedy expansion on the linear recurrence sequence if and only if the corresponding point of the orbit of toric shift belongs to some set, which is the union of the tiles of the Rauzy tiling. Some number-theoretic applications of this result is obtained.

In conclusion, some open problems related to generalized Rauzy tilings are formulated.

Keywords: Rauzy tilings, Rauzy fractals, Pisot numbers, linear recurrence sequences, bounded remainder sets.

Bibliography: 32 titles.

For citation:

A. V. Shutov, 2021, “Generalized Rauzy tilings and linear recurrence sequences”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 313–333.

Введение

В 1982 году французский математик Жерар Рози [1] ввел фрактальное множество, ассоциированное с подстановкой

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 12 \\ 2 &\rightarrow 13, \\ 3 &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

числом Пизо β , являющимся корнем уравнения

$$\beta^3 = \beta^2 + \beta + 1,$$

а также линейной рекуррентной последовательностью $\{T_n\}$, заданной соотношением

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

и начальными условиями

$$T_0 = 1, T_1 = 2, T_2 = 4.$$

Даная последовательность известна как последовательность трибоначчи.

В дальнейшем работа Рози породила целое направление исследований на стыке комбинаторики слов, геометрии, теории динамических систем и теории чисел, а введенное им множество получило название фрактала Рози. Некоторый обзор результатов в этом направлении и дальнейшая библиография могут быть найдены в [2]–[5].

С точки зрения теории чисел исходный фрактал Рози интересен тем, что он тесно связан со сдвигом тора на вектор (β^{-1}, β^{-2}) и геометрия фрактала Рози оказывается полезной при изучении арифметики этого сдвига. В частности, в исходной работе Рози [1] эта связь была использована для построения новых примеров множеств ограниченного остатка для этого сдвига.

В работе [6] В.Г.Журавлев построил бесконечное семейство разбиений классического фрактала Рози на подобные ему фракталы, названное семейством разбиений Рози. На основе этого результата им были построены новые семейства множеств ограниченного остатка для рассматриваемого сдвига тора, а также были получены результаты о самоподобии этого сдвига.

В работе [7] были введены аналоги разбиений Рози для семейства фракталов, связанных с единицами Пизо, являющимися корнями уравнений

$$\beta^d = a_1\beta^{d-1} + \dots + a_{d-1}\beta + a_d \quad (1)$$

с дополнительным условием на коэффициенты

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{d-1} \geq a_d = 1. \quad (2)$$

Подобные фракталы были впервые введены Терстоном [8] и активно изучались в [9]–[13]. В [7] было показано, что построенные обобщенные разбиения Рози порождают множества ограниченного остатка относительно сдвига $d - 1$ -мерного тора на вектор $(\beta^{-1}, \dots, \beta^{-d+1})$, а также была доказана теорема самоподобия для этого сдвига.

Отметим, что все существующие подходы к обобщению фрактала Рози не использовали линейных рекуррентных последовательностей. Одним из немногих исключений является работа [14], но в ней рассматривается только случай $d = 3$, причем полученный фрактал не совпадает с классическим фракталом Рози.

В настоящей работе мы строим линейные рекуррентные последовательности $\{T_n\}$, связанные с единицами Пизо, удовлетворяющими уравнению (1) с условиями на коэффициенты (2) и даем новое определение обобщенных фракталов Рози в терминах этой последовательности. Далее мы используем это определение, чтобы найти числа и меры тайлов, входящих в разбиения Рози. После этого мы возвращаемся к изучению задачи о множествах ограниченного остатка и уточняем основной результат из [7], показывая, что константа в оценке остаточного члена является абсолютной.

После этого мы показываем, каким образом фракталы Рози могут быть применены для изучения разложений натуральных чисел по последовательности $\{T_n\}$. Главным результатом здесь является теорема геометризации, показывающая что натуральное число N имеет заданное окончание жадного разложения по линейной рекуррентной последовательности $\{T_n\}$ тогда

и только тогда, когда $(\{N\beta^{-1}\}, \dots, \{N\beta^{-d+1}\})$ принадлежит некоторому явно определяемому линейно связному множеству, зависящему от окончания разложения. Далее мы показываем, как эта теорема может быть применена к изучению теоретико-числовых свойств чисел с заданным окончанием жадного разложения, получая асимптотические формулы для количества таких чисел, их распределения по прогрессиям, а также для распределения простых среди них.

Фрактал Розы

В данном разделе мы приводим основные предварительные сведения о фракталах Розы. Подробности могут быть найдены в [7] и [9]–[13].

Пусть β – корень уравнения (1) с условиями на коэффициенты (2). В [15] доказано, что в этом случае β является единицей Пизо.

С каждым действительным x можно связать его β -разложение вида [16]

$$x = \sum_{k=k(x)}^{m(x)} \varepsilon_k(x) \beta^k, \quad (3)$$

получаемое по так называемому жадному алгоритму. Здесь $k(x) \geq -\infty$, $m(x) < \infty$. Жадность разложения (3) означает, что для любого $m_1 \leq m(x)$ выполняются неравенства

$$0 \leq x - \sum_{k=m_1}^{m(x)} \varepsilon_k(x) \beta^k < \beta^{m_1}.$$

Пусть $\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(r_1)}$ – действительные сопряженные, $\beta^{(r_1+1)}, \overline{\beta^{(r_1+1)}}, \dots, \beta^{(r_1+r_2)}, \overline{\beta^{(r_1+r_2)}}$ – комплексные сопряженные к β . Ясно, что $r_1 + 2r_2 = d - 1$. Кроме того, из определения числа Пизо вытекает, что $|\beta| > 1$, $|\beta^{(k)}| < 1$.

Рассмотрим множество $\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \subset \mathbb{Q}(\beta)$, определяемое условием

$$\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} = \{x : k(x) \geq 0\}.$$

Разложение (3) позволяет определить отображение

$$\Phi : \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$$

по правилу

$$\Phi(x) = (x^{(1)}, \dots, x^{(r_1)}, \operatorname{Re} x^{(r_1+1)}, \operatorname{Im} x^{(r_1+1)}, \dots, \operatorname{Re} x^{(r_1+r_2)}, \operatorname{Im} x^{(r_1+r_2)}),$$

где

$$x^{(j)} = \sum_{k=k(x)}^{m(x)} \varepsilon_k(x) (\beta^{(j)})^k.$$

Множество

$$\mathcal{T} = \overline{\Phi(\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0})} \quad (4)$$

будем называть фракталом Розы. Здесь и далее черта сверху обозначает замыкание множества.

ТЕОРЕМА 1. *$\mathcal{T}$ – линейно связное ограниченное множество и мера границы $\partial\mathcal{T}$ равна 0. При этом имеет место решетчатое разбиение пространства $\mathbb{R}^{d-1}$ при помощи копий фрактала Розы $\mathcal{T}$:*

$$\mathbb{R}^{d-1} = \mathcal{T} + \Phi(r_1)\mathbb{Z} + \dots + \Phi(r_{d-1})\mathbb{Z}.$$

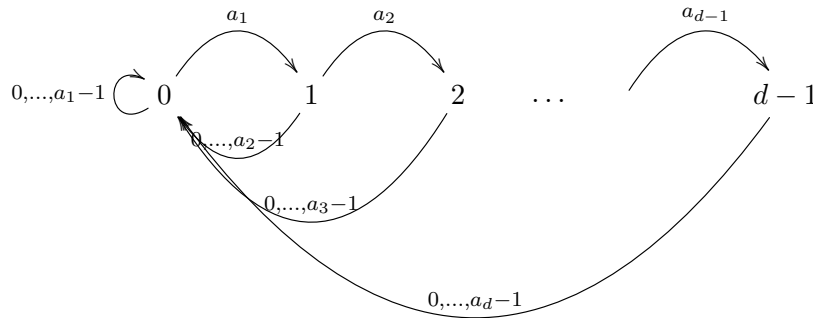
Здесь $r_k = 1 - T_\beta^k(1)$.

Далее нам потребуется еще одно определение фрактала Розы $\mathcal{T}$, основанное на комбинаторике слов.

Граф допустимости представляет собой ориентированный граф с кратными ребрами и петлями. В случае рассматриваемого нами класса чисел Пизо данный граф содержит d вершин, помеченных числами $0, 1, \dots, d-1$. Ребра графа имеют следующий вид:

- 1) a_1 ориентированных петель в вершине 0, помеченных числами от 0 до $a_1 - 1$;
- 2) ориентированные ребра из вершины i в вершину $i+1$, помеченные числами a_i ;
- 3) a_{i+1} ориентированных ребер из вершины i в вершину 0, помеченные числами от 0 до $a_{i+1} - 1$.

Обозначим граф допустимости через $G(\beta)$. Он имеет следующий вид.



Каждому конечному пути $v_0 \xrightarrow{c_0} v_1 \xrightarrow{c_1} \dots \xrightarrow{c_{m-1}} v_m$ в графе $G(\beta)$ можно сопоставить слово $c_0 c_1 \dots c_{m-1}$, составленное из меток ребер пути. В случае $v_0 = 0$ полученные слова будем называть допустимыми.

Пусть Adm – множество допустимых слов. Определим отображение $\Phi_{Adm} : Adm \rightarrow \mathcal{T}$ равенством

$$\Phi_{Adm}(c_0 c_1 \dots c_{m-1}) = \Phi\left(\sum_{k=0}^{m-1} c_{m-1-k} \beta^k\right).$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{T} = \overline{\Phi_{Adm}(Adm)}.$$

Пусть теперь $Adm(j)$ – множество допустимых слов, для которых пути в графе $G(\beta)$ заканчиваются в вершине j . Определим множества

$$\mathcal{R}_j = \overline{\Phi_{Adm}(Adm(j))}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Каждое множество $\mathcal{R}_j$ представляет собой линейно связное ограниченное множество и мера границы $\partial \mathcal{R}_j$ равна 0. Кроме того, различные множества $\mathcal{R}_j$ не имеют общих внутренних точек.*

Таким образом, мы получили разбиение

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}_0 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{R}_{d-1},$$

называемое разбиением Розы порядка 0.

В силу теоремы 1 фрактал Розы $\mathcal{T}$ является фундаментальной областью решетки $L = \sum_{k=1}^{d-1} \Phi(r_k) \mathbb{Z}$. Поэтому существует естественная проекция π из $\mathcal{T}$ в $d-1$ -мерный тор $\mathbb{T}^{d-1} = \mathbb{R}^{d-1}/L$.

Определим отображение $S : \mathbb{T}^{d-1} \rightarrow \mathbb{T}^{d-1}$ равенством

$$S(x) = x + \Phi(1) \pmod{L}.$$

Далее определим перекладывание $S_{\mathcal{T}}$ областей $\mathcal{R}_j$ равенством $S_{\mathcal{T}}(x) = x + \Phi(T_{\beta}^j(1))$, если $x \in \mathcal{R}_j$. Также для допустимого слова $a \in \text{Adm}$ обозначим через $S_{\text{Adm}}(a)$ лексикографически следующее за a слово из Adm . S_{Adm} можно рассматривать как отображение $\text{Adm} \rightarrow \text{Adm}$.

ТЕОРЕМА 4. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \text{Adm} & \xrightarrow{S_{\text{Adm}}} & \text{Adm} \\ \downarrow \Phi_{\text{Adm}} & & \downarrow \Phi_{\text{Adm}} \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{S_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^{d-1} & \xrightarrow{S} & \mathbb{T}^{d-1} \end{array}$$

Теорема 4 неформально означает, что у нас есть три эквивалентных языка: комбинаторика допустимых слов Adm , β -разложения действительных чисел и геометрия фрактала Розы, арифметика сдвига S тора $\mathbb{T}^{d-1}$. Наша цель – добавить четвертый язык, связанный с разложениями натуральных чисел по линейным рекуррентным последовательностям.

REMARK 2. *Можно дополнительно рассмотреть аффинное преобразование, переводящее решетку L в $\mathbb{Z}^{d-1}$. При этом тору $\mathbb{T}^{d-1}$ будет соответствовать новый тор $\mathbb{R}^{d-1}/\mathbb{Z}^{d-1}$. Преобразованию S будет соответствовать преобразование*

$$(x_1, x_2, \dots, x_{d-1}) \rightarrow (\{x_1 + \beta^{-1}\}, \{x_2 + \beta^{-2}\}, \dots, \{x_{d-1} + \beta^{-d+1}\}),$$

где $\{\cdot\}$ – дробная доля числа. Этот факт позволяет переформулировать результаты об орбите $\{S^k(0)\}_{k=0}^{\infty}$ на языке дробных долей $(\{k\beta^{-1}\}, \{k\beta^{-2}\}, \dots, \{k\beta^{-d+1}\})$.

Линейные рекуррентные последовательности

Пусть Adm_n – множество допустимых слов длины n и $\text{Adm}_n(j) = \text{Adm}_n \cap \text{Adm}(j)$. Пусть T_n – число слов в Adm_n . Ясно, что $T_n = 0$ при $n < 0$. Кроме того, поскольку пустое слово допустимо, имеем $T_0 = 1$. Наша первая задача состоит в нахождении линейного рекуррентного соотношения и начальных условий для последовательности $\{T_n\}$.

ТЕОРЕМА 5. *При $n \geq d$ справедливо соотношение*

$$T_n = a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \dots + a_d T_{n-d}.$$

При $n < d$ имеем

$$T_n = 1 + a_1 T_{n-1} + a_2 T_{n-2} + \dots + a_n T_0.$$

Любой путь длины $\geq d$ в графе допустимости начинается с цикла длины $< d$ с началом в вершине 0. Выделение этого цикла позволяет разбить допустимое слово на два подслова.

Точнее, при $n \geq d$ любое допустимое слово x из Adm_n может быть представлено либо в виде cx' , $c \in \{0, 1, \dots, a_1 - 1\}$, $x' \in \text{Adm}_{n-1}$ (цикл $0 \rightarrow 0$), либо в виде $a_1 a_2 \dots a_j cx'$, $c \in \{0, 1, \dots, a_{j+1} - 1\}$, $x' \in \text{Adm}_{n-j-1}(j)$ для некоторого j , $1 \leq j \leq d-1$ (цикл $0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow j \rightarrow 0$).

Объединяя эти два представления, получаем

$$\text{Adm}_n = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \bigsqcup_{c=0}^{a_{j+1}-1} \bigsqcup_{x' \in \text{Adm}_{n-j-1}} x_j c x', \quad (5)$$

где слово x_0 - пусто, а при $1 \leq j \leq d-1$ $x_j = a_1 a_2 \dots a_j$. Переходя к мощностям множеств, получаем

$$T_n = \sum_{j=0}^{d-1} a_{j+1} T_{n-j-1}.$$

Меня нумерацию индексов, перепишем последнее соотношение в виде

$$T_n = \sum_{j=1}^d a_j T_{n-j},$$

что и требовалось доказать.

В случае $n < d$ значение j не может превосходить $n-1$. Кроме того, появляется дополнительное слово $a_1 a_2 \dots a_n$, соответствующее пути $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$ в графе допустимости $G(\beta)$ (данный путь не является циклом). Таким образом, аналог (5) в данном случае имеет вид

$$Adm_n = a_1 a_2 \dots a_n \sqcup \bigsqcup_{j=0}^{n-1} \bigsqcup_{c=0}^{a_{j+1}-1} \bigsqcup_{x' \in Adm_{n-j-1}} x_j c x'.$$

Переходя к мощностям и меняя нумерацию индексов, находим

$$T_n = 1 + \sum_{j=1}^n a_j T_{n-j},$$

что и доказывает вторую часть теоремы 5.

Из теоремы 5 вытекает [16], что любое натуральное N имеет жадное разложение по последовательности $\{T_n\}$:

$$N = \sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N) T_k \quad (6)$$

Жадность разложения (6) означает, что для любого $m_1 < m(N)$ выполняются неравенства $0 \leq N - \sum_{k=m_1}^{m(N)} \varepsilon_k(N) T_k < T_{m_1}$.

Пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Определим отображение ε из множества чисел $\mathbb{N}_0$ в множество слов над алфавитом $\{0, 1, \dots, a_1\}$ следующим образом:

$$\varepsilon(N) = \varepsilon_{m(N)}(N) \dots \varepsilon_0(N).$$

Ясно, что отображение ε инъективно, то есть переводит разные целые неотрицательные числа в разные слова. Кроме того, из $N_1 < N_2$ вытекает, что $\varepsilon(N_1) <_{lex} \varepsilon(N_2)$, где $<_{lex}$ означает лексикографический порядок на множестве слов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение ε является биекцией между множествами $\mathbb{N}$ и Adm .*

Из определения разложения (6) вытекает, что для любого целого неотрицательного N каждое подслово слова $\varepsilon(N)$ лексикографически меньше слова $a_1 a_2 \dots a_{d-1} 1$. С другой стороны, известно [10], что слово допустимо тогда и только тогда, когда каждое его подслово меньше так называемого разложения Реньи единицы $d(1; \beta)$, определенного в [17]. В случае β , рассматриваемых в данной работе $d(1; \beta)$ вычислено в [15] и имеет вид $d(1; \beta) = a_1 a_2 \dots a_{d-1} 1$. Таким образом, каждое слово $\varepsilon(N)$ допустимо и

$$\varepsilon(\mathbb{N}_0) \subseteq Adm.$$

Далее, нам требуется доказать, что для любого допустимого слова x существует целое неотрицательное N_x такое, что $\varepsilon(N_x) = x$. Пусть $n = |x|$ – длина слова x . Поскольку для любого целого неотрицательного $N < T_n$ длина слова $\varepsilon(N)$ не превосходит n , можно для $0 \leq N < T_n$ определить отображение

$$\varepsilon^{(n)}(N) = 0^{n-|\varepsilon(N)|}\varepsilon(N),$$

где 0^k означает k -кратное повторение символа 0. Тогда

$$\varepsilon^{(n)}(\{N : 0 \leq n < T_n\}) \subseteq \text{Adm}_n \quad (7)$$

и отображение $\varepsilon^{(n)}$ по-прежнему инъективно. Поскольку мощности множеств, стоящих в левой и правой части (7) совпадают, получаем

$$\varepsilon^{(n)}(\{N : 0 \leq n < T_n\}) = \text{Adm}_n$$

и отображение $\varepsilon^{(n)}$ является биекцией. Используя обратное отображение, получаем требуемое натуральное число N_x , соответствующее заданному допустимому слову x , что завершает доказательство предложения 1.

Введем отображение $\Phi_{\mathbb{N}}$, заданное формулой

$$\Phi_{\mathbb{N}}(N) = \Phi(\varepsilon^{-1}(N)) = \Phi\left(\sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N)\beta^k\right).$$

Тогда, объединяя предложение 1 с теоремой 2, немедленно получаем следующий результат, дающий нам новое определение фрактала Рози.

ТЕОРЕМА 6. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{T} = \overline{\Phi_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}_0)}.$$

На множестве $\mathbb{N}_0$ рассмотрим отображение $S_{\mathbb{N}} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, задаваемое равенством

$$S_{\mathbb{N}}(N) = N + 1.$$

Из того, что отображение ε является биекцией и сохраняет порядок, немедленно вытекает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \xrightarrow{S_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N}_0 \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\ \text{Adm} & \xrightarrow{S_{\text{Adm}}} & \text{Adm} \end{array}$$

коммутативна.

Объединяя с теоремой 4, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \xrightarrow{S_{\mathbb{N}}} & \mathbb{N}_0 \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon \\ \text{Adm} & \xrightarrow{S_{\text{Adm}}} & \text{Adm} \\ \downarrow \Phi_{\text{Adm}} & & \downarrow \Phi_{\text{Adm}} \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{S_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^{d-1} & \xrightarrow{S} & \mathbb{T}^{d-1} \end{array}$$

коммутативна.

Разбиения Рози порядка n

Пусть Adm_n – множество допустимых слов длины n и $Adm_n(j) = Adm_n \cap Adm(j)$.

Выберем некоторое слово $u \in Adm_{d-1}(j)$. Пусть $\tilde{A}_n(j)$ – множество слов w длины n , для которых слово $uw \in Adm$. Определение множества $\tilde{A}_n(j)$ не зависит от выбора u , так как замена слова u не меняет начальную вершину j пути графа $G(\beta)$, соответствующего слову w . Другими словами, $\tilde{A}_n(j)$ – множество слов, соответствующая путям графа $G(\beta)$ длины n , начинающимся в вершине j . Пусть $w \in \tilde{A}_n(j)$. Для $u \in Adm$ обозначим через $Adm(u)$ множество допустимых слов, заканчивающихся на слово u .

Рассмотрим множества

$$\mathcal{R}_{n,j}(w) = \overline{\Phi_{Adm} \left(\bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw) \right)}.$$

В [7] доказаны следующие результаты.

ТЕОРЕМА 8. *Имеет место разбиение*

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \bigsqcup_{w \in \tilde{A}_n(j)} \mathcal{R}_{n,j}(w) \quad (8)$$

фрактала Рози $\mathcal{T}$ на множества $\mathcal{R}_{n,j}(w)$, не имеющие общих внутренних точек. Каждое из множеств $\mathcal{R}_{n,j}(w)$ линейно связно и имеет границу нулевой меры.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть $w_{\max}(n, j)$ – лексикографически максимальное слово из $\tilde{A}_n(j)$. Тогда для любого слова $w \in \tilde{A}_n(j)$, $w \neq w_{\max}(n, j)$ найдется слово $w' \in \tilde{A}_n(j)$, такое, что*

$$S_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}_{n,j}(w)) = \mathcal{R}_{n,j}(w').$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\bigsqcup_{j=0}^{d-1} S_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}_{n,j}(w_{\max}(n, j))) = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \mathcal{R}_{n,j}(0^n).$$

Разбиение, определенное в теореме 8 называется разбиением Рози порядка n . Из теоремы 9 вытекает, что это разбиение состоит из множеств d различных типов (относительно сдвига тора S). Найдем меры и количества множеств каждого типа.

ТЕОРЕМА 10. *Справедливо равенство*

$$mes \mathcal{R}_{n,j}(w) = \frac{\beta^{d-1-j-n}}{\sum_{k=0}^{d-1} \beta^k} mes \mathcal{T}.$$

Вначале рассмотрим случай $d = 0$. В этом случае нам нужно показать, что

$$mes \mathcal{R}_j = \frac{\beta^{d-1-j}}{\sum_{k=0}^{d-1} \beta^k} mes \mathcal{T}. \quad (9)$$

Поскольку S – иррациональный сдвиг тора, последовательность $\{S^k(0)\}$ равномерно распределена на торе $\mathbb{T}^{d-1}$, то есть

$$\frac{mes \mathcal{R}_j}{mes \mathbb{T}^{d-1}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{k : 0 \leq k < N, S^k(0) \in \mathcal{R}_j\}}{N}.$$

Заметим, что $mes\mathbb{T}^{d-1} = mes\mathcal{T}$, после чего осуществим предельный переход не по всем натуральным N , а по подпоследовательности $\{T_k\}$, после чего, воспользовавшись коммутативной диаграммой из теоремы 7, перейдем к языку допустимых слов. В результате получим

$$\frac{mes\mathcal{R}_j}{mes\mathcal{T}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sharp Adm_k(j)}{\sharp Adm_k} = \frac{\sharp Adm_k(j)}{T_k}. \quad (10)$$

Найдем рекуррентные соотношения для $\sharp Adm_j(k)$.

Заметим, что $\sharp Adm_j(k)$ можно интерпретировать как число путей длины k в графе $G(\beta)$, начинающихся в вершине 0 и заканчивающихся в вершине j . Для $j > 0$, очевидно, имеем

$$\sharp Adm_k(j) = \sharp Adm_{k-1}(j-1). \quad (11)$$

Для $j = 0$ рассмотрение графа допустимости $G(\beta)$ дает

$$\sharp Adm_k(0) = a_1 \sharp Adm_{k-1}(0) + a_2 \sharp Adm_{k-1}(1) + \dots + a_d \sharp Adm_{k-1}(d-1). \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12), находим

$$\sharp Adm_k(0) = a_1 \sharp Adm_{k-1}(0) + a_2 \sharp Adm_{k-2}(0) + \dots + a_d \sharp Adm_{k-d}(0). \quad (13)$$

Равенства (13) и (11) показывают, что последовательности $\{\sharp Adm_k(j)\}$ удовлетворяют тому же самому линейному рекуррентному соотношению, что и последовательность $\{T_k\}$. Поскольку β – число Пизо, это дает нам асимптотики

$$T_k = c\beta^k + o(1),$$

$$\sharp Adm_k(j) = c_j\beta^k + o(1)$$

с некоторыми $c, c_j > 0$. При этом из (12) следует, что

$$c_j = c_0\beta^{-j}.$$

Подставляя найденные результаты в (10), имеем

$$\frac{mes\mathcal{R}_j}{mes\mathcal{T}} = \frac{c_0}{c}\beta^{-j}.$$

При этом условие

$$\sum_{j=0}^{d-1} \frac{\mathcal{R}_j}{mes\mathcal{T}} = 1$$

дает нам уравнение на $\frac{c_j}{c}$, решая которое получаем (9).

Перейдем теперь к рассмотрению случая произвольного n . Определим также отображение $B : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ при помощи коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} & \xrightarrow{\times\beta} & \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{B} & \mathcal{T} \end{array}$$

где верхняя стрелка обозначает умножение на β . Легко видеть, что B представляет собой аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^{d-1}$. В [7] было доказано равенство

$$\mathcal{R}_{n,j}(w) = B^n \mathcal{R}_j + \Phi_{Adm}(w).$$

Тогда имеем

$$mes\mathcal{R}_{n,j}(w) = |\det B|^n \frac{\beta^{d-1-j}}{\sum_{k=0}^{d-1} \beta^k} mes\mathcal{T}$$

и нам остается доказать, что

$$|\det B| = \beta^{-1}.$$

Пусть $\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(r_1)}$ – действительные сопряженные, $\beta^{(r_1+1)}, \overline{\beta^{(r_1+1)}}, \dots, \beta^{(r_1+r_2)}, \overline{\beta^{(r_1+r_2)}}$ – комплексные сопряженные к β . Из определения отображения Φ вытекает, что матрица B имеет блочную структуру:

$$B = \bigoplus_{k=2}^{r_1+r_2} B_k,$$

где

$$B_k = (\beta^{(k)})$$

для $2 \leq k \leq r_1$ и

$$B_k = |\beta^{(k)}| \begin{pmatrix} \cos \arg \beta^{(k)} & -\sin \arg \beta^{(k)} \\ \sin \arg \beta^{(k)} & \cos \arg \beta^{(k)} \end{pmatrix}$$

для $r_1 + 1 \leq k \leq r_1 + r_2$. Вычисление определителя дает

$$|\det B| = \prod_{k=2}^{r_1+r_2} |\det B_k| = \prod_{k=2}^{r_1} \beta^{(k)} \prod_{k=r_1+1}^{r_1+r_2} |\beta^{(k)}|^2.$$

Последнее произведение представляет собой произведение модулей всех корней уравнения (1), кроме β . Учитывая, что согласно теореме Виета произведение всех корней этого уравнение равно $a_d = 1$, получаем требуемый результат.

Пусть теперь $R_{n,j}$ – число тайлов вида $\mathcal{R}_{n,j}(w)$.

ТЕОРЕМА 11. *Справедливы равенства*

$$R_{n,0} = T_n$$

и

$$R_{n,j} = \sum_{r=0}^{d-j-1} a_{r+j+1} T_{n-r-1}$$

для $1 \leq j \leq d-1$.

Из теоремы 8 немедленно вытекает равенство

$$R_{n,j} = \sharp \tilde{A}_n(j). \quad (14)$$

Заметим, что $\sharp \tilde{A}_n(j)$ можно интерпретировать как число путей длины n в графе $G(\beta)$, начинающихся в вершине j .

Для $j = 0$ очевидно

$$\tilde{A}_n(0) = Adm_n$$

и, следовательно,

$$\sharp \tilde{A}_n(0) = T_n.$$

Для $j > 0$ любое слово $x \in \tilde{A}_n(j)$ представимо в виде $x = ux'$, где слово u соответствует пути в графе $G(\beta)$ из вершины j в вершину 0, не содержащему 0 в качестве промежуточной вершины, а x' – допустимое слово. Интересующие нас пути имеют вид

$$j \rightarrow j+1 \rightarrow \dots \rightarrow r \rightarrow 0,$$

где $r \leq j \leq d-1$. Им соответствуют слова вида

$$a_{j+1}a_{j+2} \dots a_r u',$$

где $u' \in \{0, 1, \dots, a_{r+1} - 1\}$. Поэтому при $j > 1$ имеет место разложение

$$\tilde{A}_n(j) = \bigsqcup_{r=j}^{d-1} \bigsqcup_{u'=0}^{a_{r+1}-1} \bigsqcup_{x' \in \text{Adm}_{n-r+j-1}} a_{j+1}a_{j+2} \dots a_r u' x'.$$

Переходя к мощностям множеств, получаем

$$\sharp \tilde{A}_n(j) = \sum_{r=j}^{d-1} \sum_{u'=0}^{a_{r+1}-1} T_{n-r+j-1} = \sum_{r=j}^{d-1} a_{r+1} T_{n-r+j-1}.$$

Меняя нумерацию индекса суммирования и используя (14), получаем требуемый результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существуют постоянные $C_j > 0$ такие, что*

$$R_{n,j} = C_j \beta^n + o(1).$$

Множества ограниченного остатка

Множество $X \subseteq \mathbb{T}^{d-1}$ будем называть множеством ограниченного остатка, если имеет место асимптотика

$$\sharp\{k : 0 \leq k < N, S^k(0) \in X\} = \frac{\text{mes} X}{\text{mes} \mathbb{T}^{d-1}} N + O(1). \quad (15)$$

REMARK 3. *Отметим, что из иррациональности сдвига тора S и теоремы Вейля о равномерном распределении немедленно вытекает, что для произвольного множества X справедлив аналог асимптотики (15) с остаточным членом $o(n)$.*

Множества ограниченного остатка были введены Гекке в одномерном случае [18]. Обзор современного состояния задачи о многомерных множествах ограниченного остатка можно найти в [19]–[20].

В [7] было показано, что все множества $\pi(\mathcal{R}_{n,j}(w))$ являются множествами ограниченного остатка. Здесь мы усиливаем этот результат.

ТЕОРЕМА 12. *Существует постоянная C , зависящая от β , но не зависящая от n , j и w такая, что для всех N выполняется неравенство*

$$\left| \sharp\{k : 0 \leq k < N, S^k(0) \in \pi(\mathcal{R}_{n,j}(w))\} - \frac{\text{mes} \pi(\mathcal{R}_{n,j}(w))}{\text{mes} \mathbb{T}^{d-1}} N \right| \leq C.$$

Для доказательства нам потребуется ряд вспомогательных результатов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существуют постоянные c , C_1 , γ зависящие только от β , такие, что $0 < \gamma < 1$ и для всех n выполняется неравенство*

$$|T_n - c\beta^n| < C_1 \gamma^n. \quad (16)$$

Доказательство легко получается из общей теории линейных рекуррентных соотношений и того, что β является числом Пизо, то есть все сопряженные к β по модулю меньше 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для всех n, k выполняется неравенство

$$|T_n \beta^{-k} - T_{n-k}| < 2C_1 \gamma^{n-k}. \quad (17)$$

Используя неравенство треугольника, запишем

$$|T_n \beta^{-k} - T_{n-k}| \leq |T_n \beta^{-k} - c \beta^n \beta^{-k}| + |T_{n-k} - c \beta^{n-k}|.$$

Далее, используя два раза оценку (16), получим

$$|T_n \beta^{-k} - T_{n-k}| < C_1 \gamma^n \beta^{-k} + C_1 \gamma^{n-k} = C_1 \gamma^{n-k} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^k + 1.$$

Поскольку $0 < \frac{\gamma}{\beta} < 1$, имеем,

$$\left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^k + 1 < 2$$

для любого k , что и дает нам (17).

При помощи разложения (6)

$$N = \sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N) T_k$$

для каждого $N \in \mathbb{N}_0$ определим его m -сдвиг

$$\overleftarrow{N}^m = \sum_{k=0}^{m(N)-m} \varepsilon_{k+m}(N) T_k.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Существуют постоянная C_2 зависящая только от β , такая, что для всех N, m выполняется неравенство

$$|N \beta^{-m} - \overleftarrow{N}^m| < C_2. \quad (18)$$

Подставляя в левую часть (18) вместо N и $\overleftarrow{N}^m$ их разложения по последовательности $\{T_n\}$ и учитывая, что $0 \leq \varepsilon_k(N) \leq a_1$, получаем,

$$\begin{aligned} |N \beta^{-m} - \overleftarrow{N}^m| &= \left| \sum_{k=0}^{m(N)} \varepsilon_k(N) T_k \beta^{-m} - \sum_{k=0}^{m(N)-m} \varepsilon_{k+m}(N) T_k \right| \leq \\ &\leq a_1 \left| \sum_{k=0}^{m(N)} T_k \beta^{-m} - \sum_{k=0}^{m(N)-m} T_k \right| \leq a_1 |\Sigma_1| + |\Sigma_2|, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{k=0}^{m-1} T_k \beta^{-m}, \\ \Sigma_2 &= \sum_{k=m}^{m(N)} (T_k \beta^{-m} - T_{k-m}). \end{aligned}$$

С учетом (16), сумма σ_1 оценивается следующим образом

$$|\Sigma_1| \leq \beta^{-m} \sum_{k=0}^{m-1} |T_k - c \beta^k| + \sum_{k=0}^{m-1} c \beta^{k-m} <$$

$$\begin{aligned}
&< 2C_1\beta^{-m} \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^k + c \sum_{k=1}^m \beta^{-k} < \\
&< 2C_1\beta^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k + c \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k < C_3
\end{aligned}$$

с константой C_3 , зависящей только от β , поскольку $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \beta^k$ представляют собой суммы бесконечных геометрических прогрессий со знаменателями, меньшими единицы.

Для оценки Σ_2 воспользуемся неравенством (17):

$$\begin{aligned}
|\Sigma_2| &< \left| \sum_{k=m}^{m(n)} (T_k \beta^{-m} - T_{k-m}) \right| < \sum_{k=m}^{m(N)} 2C_1 \gamma^{k-m} < \\
&< 2C_1 \gamma^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k < C_4
\end{aligned}$$

с константой C_4 , зависящей только от β , поскольку последнее выражение представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем, модуль которого меньше единицы.

Отсюда, выбирая $C_2 = a_1(C_3 + C_4)$, получаем требуемый результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Справедливы неравенства*

$$|\#\{k : 0 \leq k < N, S^k(0) \in \pi(\mathcal{R}_{n,j}(w))\} - \#\{k : 0 \leq k < \overleftarrow{N}^n, S^k(0) \in \pi(\mathcal{R}_j)\}| \leq 1.$$

В силу теоремы 7, достаточно показать, что

$$|\#\{k : 0 \leq k < N, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_{n,j}(w)\} - \#\{k : 0 \leq k < \overleftarrow{N}^n, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_j\}| \leq 1.$$

Заметим, что если $S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_j$, то слово $\varepsilon(k) \in \text{Adm}(j)$. При этом слово $\varepsilon(k)w$ является допустимым и для $k' = \varepsilon^{-1}(\varepsilon(k)w)$ $S_{\mathcal{T}}^{k'}(0) \in \mathcal{R}_{n,j}(w)$.

Пусть $x_1, \dots, x_l$ — слова, являющиеся образами натуральных чисел из множества $\{k : 0 \leq k < \overleftarrow{N}^n, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_j\}$ под действием отображения ε . Тогда при $r < l$ имеем

$$x_r w <_{\text{lex}} x_l 0^n \leq_{\text{lex}} \varepsilon(N).$$

Отсюда получаем, что при $r < l$

$$\varepsilon^{-1}(x_r w) \in \{k : 0 \leq k < N, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_{n,j}(w)\}$$

и, следовательно,

$$\#\{k : 0 \leq k < N, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_{n,j}(w)\} \geq \#\{k : 0 \leq k < \overleftarrow{N}^n, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_j\} - 1. \quad (19)$$

Пусть теперь $k \in \{k : 0 \leq k < N, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_{n,j}(w)\}$. Слово $\varepsilon(k)$ может быть представлено в виде xw , причем $x \in \text{Adm}(j)$. Тогда $\varepsilon^{-1}(x) = \overleftarrow{k}^n \in \{k : 0 \leq k < \overleftarrow{N}^n, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_j\}$, откуда получаем

$$\#\{k : 0 \leq k < N, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_{n,j}(w)\} \leq \#\{k : 0 \leq k < \overleftarrow{N}^n, S_{\mathcal{T}}^k(0) \in \mathcal{R}_j\}. \quad (20)$$

Объединяя (19) и (20), получаем требуемый результат.

Теорема 12 немедленно следует из предложений 3 и 4 и того, что все множества $\mathcal{R}_j$ являются множествами ограниченного остатка.

РЕМАРКА 4. *Альтернативное доказательство теоремы 12 можно получить методом работы [21], используя теорему 9 (фактически утверждающую, что разбиения Розы являются обобщенными переключивающимися разбиениями тора в смысле [21]) и следствие 1.*

Теорема геометризации

Пусть $w \in \text{Adm}$ – допустимое слово. Рассмотрим множества

$$\mathbb{N}(w) = \varepsilon(\text{Adm}(w))$$

и

$$\mathcal{T}(w) = \overline{\Phi_{\text{Adm}}(\text{Adm}(w))}.$$

Множество $\mathbb{N}(w)$ представляет собой множество всех целых неотрицательных чисел с заданным окончанием жадного разложения по линейной рекуррентной последовательности $\{T_n\}$. В случае последовательностей второго порядка такие множества рассматривались ранее в [22]–[24]. Отметим также, что в [25] была доказана линейная связность множеств $\mathcal{T}(w)$.

Из теоремы 7 и того, что

$$N = S_{\mathbb{N}}^N(0)$$

немедленно вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 13. *Для любого допустимого слова w $N \in \mathbb{N}(w)$ тогда и только тогда, когда $S^N(0) \in \pi(\mathcal{T}(w))$.*

Аналогичный результат для $d = 2$ доказан в [24]. Наша следующая задача – связать множества $\mathcal{T}(w)$ с тайлами разбиений Розы.

Пусть $J(w)$ – множество вершин графа $G(\beta)$, из которых выходит путь, порождающий слово w .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Справедливо равенство*

$$\text{Adm}(w) = \bigsqcup_{j \in J(w)} \bigsqcup_{u \in \text{Adm}_{d-1}(j)} \text{Adm}(uw). \quad (21)$$

Вначале покажем, что правая часть равенства (21) определена корректно, то есть все слова uw в нем являются допустимыми. Действительно, рассмотрим слово uw , $u \in \text{Adm}_{d-1}(j)$. Тогда путь в графе $G(\beta)$, соответствующий слову u , начинается в вершине 0 и заканчивается в вершине j . Поэтому слово uw является допустимым тогда и только тогда, когда в вершине j графа $G(\beta)$ имеется путь, эквивалентный w , то есть тогда и только тогда, когда $j \in J(w)$. Кроме того, очевидно, что все множества, входящие в правую часть (21) попарно не пересекаются.

Пусть $w \in \text{Adm}(w)$. Тогда слово v представимо в виде $v = xw$, где x – некоторое допустимое слово. Представим x в виде $x'u$, где u представляет собой $d-1$ последних символов слова x (если длина $|x|$ слова x меньше $d-1$, допишем к x слева необходимое количество нулей). Слово u допустимо как подслово некоторого допустимого слова. Поэтому $u \in \text{Adm}_{d-1}(j)$ при некотором j , причем в силу допустимости слова uw (также являющегося подсловом x), $j \in J(w)$. Таким образом, $\text{Adm}(w) \subseteq \bigsqcup_{j \in J(w)} \bigsqcup_{u \in \text{Adm}_{d-1}(j)} \text{Adm}(uw)$.

Докажем обратное включение. Пусть $v \in \bigsqcup_{j \in J(w)} \bigsqcup_{u \in \text{Adm}_{d-1}(j)} \text{Adm}(uw)$. Тогда $v = xuw \in \text{Adm}$. При этом слово v заканчивается на w , поэтому $v \in \text{Adm}(w)$, что и требовалось доказать.

Переходя при помощи теоремы 7 к множествам $\mathcal{T}(w)$, немедленно получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 14. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{T}(w) = \bigsqcup_{j \in J(w)} \mathcal{R}_{|w|,j}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Множества $\pi(\mathcal{T}(w))$ являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига S . Более того, существует постоянная C , зависящая только от β и такая, что для всех N выполняется неравенство

$$|\#\{k : 0 \leq k < N, S^k(0) \in \pi(\mathcal{T}(w))\} - \frac{\text{mes}\pi(\mathcal{T}(w))}{\text{mes}\mathbb{T}^{d-1}}N| \leq C.$$

Доказательство получается простым комбинированием теорем 12 и 14.

Переформулируя следствие 2 на языке множеств $\mathbb{N}(w)$, получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $N_w(N)$ – количество чисел из $\mathbb{N}(w)$, меньших N . Тогда

$$N_w(n) = \nu(w)N + O(1),$$

где

$$\nu(w) = \frac{\text{mes}\mathcal{T}(w)}{\text{mes}\mathcal{T}}.$$

При этом константа в $O(1)$ не зависит от выбора слова w .

ТЕОРЕМА 15. Пусть $|w|$ – длина слова w . Тогда при любом n множество $\{\nu(w) : |w| = n\}$ содержит не более 2^{d-1} элементов.

Из теоремы 14 вытекает, что

$$\nu(w) = \frac{\sum_{j \in J(w)} \text{mes}\mathcal{R}_{n,j}(w)}{\text{mes}\mathcal{T}}.$$

При этом из теоремы 10 следует, что $\mathcal{R}_{n,j}(w)$ не зависит от w . Поэтому мощность множества $\{\nu(w) : |w| = n\}$ не превосходит числа возможных множеств $J(w)$. Из определения $J(w)$ вытекает, что $0 \in J(w)$ и $J(w) \subseteq \{0, 1, \dots, d-1\}$, откуда и следует требуемый результат.

ТЕОРЕМА 16. Пусть $N_{w,l,q}(N)$ – количество чисел из $\mathbb{N}(w)$, меньших N и сравнимых с q по модулю l . Тогда

$$N_{w,l,q} \sim \frac{\nu(w)}{l}N.$$

В силу теорем 7 и 14, имеем

$$N_{w,l,q} = \#\{k : 0 \leq k < N, k \equiv q \pmod{l}, S^k(0) \in \pi(\mathcal{T}(w))\}.$$

Вводя новый сдвиг $S_1 = S^l$ и точку $a = S^q(0)$, перепишем последнее равенство в виде

$$N_{w,l,q} = \#\{k : 0 \leq k < N', S_1^k(a) \in \pi(\mathcal{T}(w))\},$$

где N' – максимальное целое k такое, что $lk + q < N$, то есть

$$N' = \frac{N}{l} + O(1).$$

Константа в $O(1)$ разумеется зависит от l . Множество $\pi(\mathcal{T}(w))$ относительно сдвига S_1 уже не обязано быть множеством ограниченного остатка. Тем не менее, из иррациональности сдвига S вытекает иррациональность сдвига S_1 . Поэтому точки орбиты $\{S_1^k(a)\}$ равномерно распределены на торе $\mathbb{T}^{d-1}$ и

$$\#\{k : 0 \leq k < N', S_1^k(a) \in \pi(\mathcal{T}(w))\} \sim \frac{\text{mes}\pi(\mathcal{T}(w))}{\text{mes}\mathbb{T}^{d-1}}N',$$

что и дает нам, с учетом предыдущего, требуемый результат.

ТЕОРЕМА 17. Множество $\mathbb{N}(w)$ содержит бесконечно много простых чисел. Более того, для количества $\pi_w(N)$ простых чисел из $\mathbb{N}(w)$, меньших N , имеет место асимптотика

$$\pi_w(N) \sim \nu(w)\pi(N),$$

где $\pi(N)$ – количество простых, меньших n .

С учетом теоремы 13 и иррациональности сдвига S достаточно показать, что для любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{d-1}$, линейно независимых над $\mathbb{Z}$ вместе с единицей, последовательность многомерных дробных долей $(\{p_n\alpha_1\}, \{p_n\alpha_2\}, \dots, \{p_n\alpha_{d-1}\})$, где p_n – n -ое простое число, равномерно распределена на $[0; 1)^{d-1}$.

Согласно критерию Вейля [26], для этого достаточно показать, что для любых целых $h_1, h_2, \dots, h_{d-1}$ с $\sum_{k=1}^{d-1} h_k^2 \neq 0$ имеет место оценка

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i \sum_{j=1}^{d-1} h_j p_n \alpha_j} \right| = o(n).$$

Последняя сумма может быть переписана в виде

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i p_n \alpha}$$

с иррациональным

$$\alpha = \sum_{j=1}^{d-1} h_j \alpha_j$$

и требуемая оценка следует из классического результата И.М.Виноградова [27].

Заключение

В работе продолжено изучение обобщенных разбиений Розы произвольных порядков, связанных с алгебраическими единицами Пизо. Дано новое определение таких разбиений в терминах разложений натуральных чисел по линейным рекуррентным последовательностям.

Данное определение позволило вычислить числа и меры тайлов разбиения Розы, а также получить новые результаты о связи разбиений Розы с классической теоретико-числовой задачей о множествах ограниченного остатка.

Кроме того, доказанная теорема геометризации позволила начать теоретико-числовое изучение множеств, имеющих заданное окончание жадного разложения по линейной рекуррентной последовательности.

Приведенные результаты не исчерпывают возможные теоретико-числовые приложения разбиений Розы. Некоторые дальнейшие результаты анонсированы в [28].

В заключение сформулируем ряд открытых проблем.

1. В [2] предложен способ определения фрактала Розы при помощи так называемой теории геометрических подстановок. В [21] дано определение обобщенного разбиения Розы произвольного порядка в этом случае. Какая система счисления соответствует этим разбиениям? Возможный кандидат на эту роль имеется в работе [29].

2. Еще одно определение фрактала Розы в [2] основано на проектировании дискретной прямой. Как определить обобщенные разбиения Розы в этом случае?

3. В случае $d = 2$ фрактал Розы вырождается в отрезок. Для $a_1 = a_2 = 1$ можно показать, что построенная в настоящей работе теория эквивалентна теории из [23] (с точностью до аффинного преобразования разбиений). Однако, в случае произвольного $a_2 > 1$ построенное в

настоящей работе семейство обобщенных разбиений Розы оказывается лишь подмножеством семейства разбиений, определенных в [24]. Как определить остальные разбиения в общем случае?

4. В работе [30] определен некоторый одномерный аналог результатов настоящей работы, связанный с разложениями по знаменателям подходящих дробей к произвольному иррациональному α . Можно ли получить многомерные аналоги этих результатов? В частности, как определить фрактал Розы, связанный с произвольным иррациональным вектором? Очевидная сложность связана с отсутствием полноценного аналога цепных дробей в многомерном случае. Тем не менее, некоторые результаты в этом направлении (связанные, в первую очередь с модифицированным алгоритмом Якоби-Перрона и алгоритмом Бруна) можно найти в [31]–[32].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. Vol. 110. P. 147–178.
2. Pytheas Fogg N. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. Springer. 2001.
3. Combinatorics, Automata and Number Theory. Edited by V. Berthe, M. Rigo. Cambridge University Press, 2010.
4. Siegel A., Thuswaldner J. Topological properties of Rauzy fractals. Memoires de la SMF. Vol. 118. 2009.
5. Shutov A. V., Maleev A. V. Generalized Rauzy fractals and quasiperiodic tilings // Classification and Application of Fractals: New Reserch. Nova Publishers. 2012. P. 55–111.
6. Журавлев В. Г. Разбиения Розы и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2005. Т. 322. С. 83–106.
7. Шутов А. В. Обобщенные разбиения Розы и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 3. С. 372–389.
8. Thurston W. P. Groups, Tilings, and Finite State Automata. (Am. Math. Soc., Colloq. Lect.). Providence, RI: Am. Math. Soc. 1989.
9. Akiyama S. Self affine tiling and Pisot numeration system // Number Theory and its Applications. Kanemitsu: Kluwer. 1999. P. 7–17.
10. Akiyama S., Barat G., Berthe V., Siegel A. Boundary of central tiles associated with Pisot beta-numeration and purely periodic expansions // Monatshefte fur Mathematik. 2008. Vol. 155, № 3. P. 377–419.
11. Akiyama S. On the boundary of self-affine tilings generated by Pisot numbers // Journal of Math. Soc. Japan. 2002. Vol. 54, № 2. P. 283–308.
12. Akiyama S. Pisot number system and its dual tiling // Physics and Theoretical Computer Science. IOS Press. 2007. P. 133–154.
13. Berthe V., Siegel A. Tilings associated with beta-numeration and substitution // Integers: Electronic journal of combinatorial number theory. 2005. Vol. 5, № 3. #A02.
14. Hubert P., Messaoudi A. Best simultaneous diophantine approximation of Pisot numbers and Rauzy fractals // Acta Arithmetica. 2006. Vol. 124, № 1. P. 1–15.

15. Frougny C., Solomyak B. Finite beta-expansions // *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 1992. Vol. 12, № 4. P. 713–723.
16. Parry W. On the β -expansions of real numbers // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1960. Vol. 11, № 3. P. 401–416.
17. Renyi A. Representations for real numbers and their ergodic properties // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1957. Vol. 8, № 3. P. 477–493.
18. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // *Math. Sem. Hamburg Univ.* 1921. Vol. 5. P. 54–76.
19. Grepstad S., Lev N. Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation // *Geometric and Functional Analysis*. 2015. Vol. 25, № 1. P. 87–133.
20. Журавлев В. Г. Множества ограниченного остатка // *Записки научных семинаров ПОМИ*. 2016. Т. 445. С. 585–640.
21. Шутов А. В. Подстановки и множества ограниченного остатка // *Чебышевский сборник*. 2018. Т. 19, Вып. 2. С. 501–522.
22. Журавлев В. Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распределение по прогрессиям и спектр // *Алгебра и анализ*. 2008. Т. 20, № 3. С. 18–46.
23. Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В. Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // *Алгебра и анализ*. 2013. Т. 25, № 6. С. 1–23.
24. Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В. Геометризация обобщенных систем счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // *Чебышевский сборник*. 2016. Т. 17, Вып. 2. С. 88–112.
25. Akiyama S., Gjini N. // Connectedness of number theoretic tilings // *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*. 2005. Vol. 7, № 1. P. 269–312.
26. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // *Mathematische Annalen*. 1916. Vol. 77, № 3. P. 313–352.
27. Vinogradov I. M. Some theorems concerning the theory of primes // *Математический сборник*. 1937. Т. 44, № 2. С. 179–195.
28. Шутов А. В. Фракталы Розы и их теоретико-числовые приложения // *Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. 2019. Т. 166. С. 110–119.
29. Dumont J.-M., Thomas A. Systemes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions // *Theoretical computer science*. 1989. Vol. 65, № 2. P. 153–169.
30. Жукова А. А., Шутов А. В. Геометризация систем счисления // *Чебышевский сборник*. 2017. Т. 18, Вып. 4. С. 222–245.
31. Ito S., Ohtsuki M. Modified Jacobi-Perron Algorithm and Generating Markov Partitions for Special Hyperbolic Toral Automorphisms // *Tokio Journal Mathematics*. 1993. Vol. 16, № 2. P. 441–472.
32. Berthe V., Bourdon J., Jolivet T., Siegel A. A combinatorial approach to products of Pisot substitutions // *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 2016. Vol. 36, № 6. P. 1757–1794.

REFERENCES

1. Rauzy, G. 1982, “Nombres algébriques et substitutions“, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 110, pp. 147–178.
2. Pytheas Fogg, N. 2001, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Springer.
3. *Combinatorics, Automata and Number Theory* 2010, Edited by V. Berthe & M. Rigo. Cambridge University Press.
4. Siegel, A. & Thuswaldner, J. 2009, “Topological properties of Rauzy fractals“, *Memoires de la SMF*, vol. 118.
5. Shutov, A. V. & Maleev A. V. 2012, “Generalized Rauzy fractals and quasiperiodic tilings“, *Classification and Application of Fractals: New Research*, Nova Publishers, pp. 55–111.
6. Zhuravlev, V. G. 2006, “Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus“, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 137, no 2, pp. 4658–4672. doi:10.1007/s10958-006-0262-z.
7. Shutov, A. V. 2018. “Generalized Rauzy tilings and bounded remainder sets“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol 20, no. 3, pp 372–389. doi:10.22405/2226-8383-2018-20-3-372-389
8. Thurston, W. P. 1989, “Groups, Tilings, and Finite State Automata“, *Am. Math. Soc., Colloq. Lect.*, Providence, RI: Am. Math. Soc.
9. Akiyama, S. 1999, “Self affine tiling and Pisot numeration system“, *Number Theory and its Applications*, Kluwer, Kanemitsu, pp. 7–17.
10. Akiyama, S., Barat, G., Berthe, V. & Siegel, A. 2008, “Boundary of central tiles associated with Pisot beta-numeration and purely periodic expansions“, *Monatshefte für Mathematik*, vol. 155, no. 3, pp. 377–419. doi:10.1007/s00605-008-0009-7.
11. Akiyama, S. 2002, “On the boundary of self-affine tilings generated by Pisot numbers“, *Journal of Math. Soc. Japan*, vol. 54, no. 2, pp. 283–308. doi:10.2969/jmsj/05420283.
12. Akiyama, S. 2007, “Pisot number system and its dual tiling“, *Physics and Theoretical Computer Science*, IOS Press, pp. 133–154.
13. Berthe, V. & Siegel A. 2005, “Tilings associated with beta-numeration and substitution“, *Integers: Electronic journal of combinatorial number theory*, vol. 5, no. 3, #A02.
14. Hubert, P. & Messaoudi, A. 2006, “Best simultaneous diophantine approximation of Pisot numbers and Rauzy fractals“, *Acta Arithmetica*, vol. 124, no. 1, pp. 1–15. doi:10.4064/aa124-1-1.
15. Frougny, C. & Solomyak, B. 1992, “Finite beta-expansions“, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, vol. 12. no. 4, pp. 713–723. doi:10.1017/S0143385700007057.
16. Parry, W. 1950, “On the β -expansions of real numbers“, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 11, no. 3, pp. 401–416. doi:10.1007/BF02020954.
17. Renyi, A. 1957, “Representations for real numbers and their ergodic properties“, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 8, no.3, pp. 477–493. doi:10.1007/BF02020331.
18. Hecke, E. 1921, “Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins“, *Math.Sem.Hamburg Univ.*, vol. 5, pp. 54–76. doi: 10.1007/BF02940580.

19. Grepstad, S. & Lev, N. 2015, "Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation", *Geometric and Functional Analysis*, vol. 25, no 1, pp. 87–133. doi:10.1007/s00039-015-0313-z.
20. Zhuravlev, V. G. 2017, "Bounded remainder sets", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 222, pp. 585–640. doi:10.1007/s10958-017-3322-7.
21. Shutov, A. V. 2018, "Substitutions and bounded remainder sets", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 499–520. doi:10.22405/2226-8383-2018-19-2-499-520.
22. Zhuravlev, V. G. 2009, "Fibonacci-even numbers: Binary additive problem, distribution over progressions, and spectrum", *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 20, no 3, pp. 18–46. doi:10.1090/S1061-0022-09-01051-6.
23. Davlet'yarova, E. P., Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2013, "Geometrization of the Fibonacci numeration system, with applications to number theory", *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 25, no. 6., pp. 1–23. doi:10.1090/S1061-0022-2014-01321-0.
24. Davlet'yarova, E. P., Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2016, "Geometrization of the generalized Fibonacci numeration system with applications to number theory", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, no. 2, pp. 88–112. doi:10.22405/2226-8383-2016-17-2-88-112.
25. Akiyama, S. & Gjini, N. 2005, "Connectedness of number theoretic tilings", *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol. 7, no. 1, pp. 269–312.
26. Weyl, H. 1916, "Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins", *Math. Ann.*, vol. 7, no. 3, pp. 313–352. doi:10.1007/BF01475864.
27. Vinogradov, I. M. "Some theorems concerning the theory of primes", *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 44, no. 2, pp. 179–195.
28. Shutov, A. B. 2019, "Rauzy fractals and their number-theoretic applications", *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, vol 166, pp. 110–119. doi:10.36535/0233-6723-2019-166-110-119.
29. Dumont, J.-M. & Thomas, A. 1989, "Systemes de numeration et fonctions fractales relatifs aux substitutions", *Theoretical computer science*, vol. 65, no. 2, pp. 153–169. doi:10.1016/0304-3975(89)90041-8.
30. Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2017, "Geometrization of numeration systems", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 222–245. doi:10.22405/2226-8383-2017-18-4-221-244.
31. Ito, S. & Ohtsuki, M. 1993, "Modified Jacobi-Perron Algorithm and Generating Markov Partitions for Special Hyperbolic Toral Automorphisms", *Tokio Journal Mathematics*, vol. 16, no. 2, pp. 441–472. doi:10.3836/tjm/1270128497.
32. Berthe, V., Bourdon, J., Jolivet, T. & Siegel, A. 2016, "A combinatorial approach to products of Pisot substitutions", *Ergodic Theory and Dynamical Systems* vol. 36, no. 6, pp. 1757–1794. doi:10.1017/etds.2014.141.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-334-346

Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F -рядов в полиадических лиувиллевых точках

Е. Ю. Юденкова

Юденкова Екатерина Юрьевна — аспирант, Московский педагогический государственный университет; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (г. Москва).

e-mail: yudenkovaey@gmail.com

Аннотация

В настоящей работе доказывается бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F -рядов в полиадических лиувиллевых точках. Используется модификация обобщенного метода Зигеля-Шидловского. F -ряд — это ряд вида $f_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$, коэффициенты которого a_n удовлетворяют некоторым арифметическим свойствам. Эти ряды сходятся в поле $\mathbb{Q}_p$ — p -адических чисел и их алгебраических расширений $\mathbb{K}_v$. Полиадическое число — это ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$, $a_n \in \mathbb{Z}$. Лиувиллево число — это вещественное число x такое, что для всех положительных целых чисел n существует бесконечное число пар целых чисел (p, q) , $q > 1$ таких, что $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$. Полиадическое лиувиллево число α обладает тем свойством, что для любых чисел P, D существует целое число $|A|$ такое, что для всех простых чисел $p \leq P$ выполняется неравенство $|\alpha - A|_p < A^{-D}$. Бесконечная линейная (алгебраическая) независимость означает, что для любой ненулевой линейной формы (любого ненулевого многочлена) существует бесконечно много простых чисел p и нормирований v , продолжающих p -адическое нормирование на алгебраическое числовое поле $\mathbb{K}$, со следующим свойством: результат подстановки в рассматриваемую линейную форму (многочлен) значений F -рядов вместо переменных является отличным от нуля элементом поля $\mathbb{K}_v$.

Ранее было доказано лишь существование хотя бы одного простого числа p с перечисленными выше свойствами.

Ключевые слова: Метод Зигеля-Шидловского, F -ряды, полиадические лиувиллевы точки.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Е. Ю. Юденкова. Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F -рядов в полиадических лиувиллевых точках // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 334–346.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-334-346

Infinite linear and algebraic independence of values of F -series at polyadic Liouvillea points

E. Yu. Yudenkova

Yudenkova Ekaterina Yurievna — graduate student, Moscow Pedagogical State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: yudenkovaey@gmail.com

Abstract

This paper proves infinite linear and algebraic independence of the values of F -series at polyadic Liouville points using a modification of the generalised Siegel-Shidlovskii method. F -series have form $f_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$ whose coefficients a_n satisfy some arithmetic properties. These series converge in the field $\mathbb{Q}_p$ of p -adic numbers and their algebraic extensions $\mathbb{K}_v$. Polyadic number is a series of the form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$, $a_n \in \mathbb{Z}$. Liouville number is a real number x with the property that, for every positive integer n , there exist infinitely many pairs of integers (p, q) with $q > 1$ such that $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$. The polyadic Liouville number α has the property that for any numbers P, D there exists an integer $|A|$ such that for all primes $p \leq P$ the inequality $|\alpha - A|_p < A^{-D}$. Infinite linear (algebraic) independence means that for any nonzero linear form (any nonzero polynomial) there are infinitely many primes p and valuations v extending p -adic valuation to an algebraic number field $\mathbb{K}$ with the following property: the result of substitution in the considered linear form (polynomial) of the values of F - of series instead of variables is a nonzero element of the field.

Previously, only the existence of at least one prime number p with the properties listed above was proved.

Keywords: Method by Siegel–Shidlovskii, F -series, polyadic Liouville numbers.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

E. Yu. Yudenkova, 2021, “Infinite linear and algebraic independence of values of F -series at polyadic Liouvillea points”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 334–346.

Введение и формулировки результатов

Цель настоящей работы – доказательство бесконечной линейной и алгебраической независимости значений F – рядов в Лиувиллевых полиадических точках. Классический метод Зигеля – Шидловского был использован для E и G функций Зигеля, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, коэффициенты которых обладают определенными арифметическими свойствами.

Дадим точное определение F – ряда

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$$

принадлежит классу $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, если его коэффициенты принадлежат полю $\mathbb{K}$ и удовлетворяют условиям

1. $|\overline{\alpha_n}| = O(\exp(c_1 n)), n \rightarrow \infty$ (где для алгебраического числа α символ $|\overline{\alpha_n}|$ обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраически сопряжённых с α чисел);
2. существует последовательность натуральных чисел $d_n = q^n d_{0,n}$, где $q \in \mathbb{N}$, такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, n = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, n$.

При этом $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p , не большие $c_2 n$, причём

$$\text{ord}_p d_{0,n} \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Полиадическое лиувиллево число α обладает тем свойством, что для любых чисел P, D существует целое число $|A|$ такое, что для всех простых чисел $p \leq P$ выполняется неравенство

$$|\alpha - A|_p < A^{-D}.$$

Настоящая работа развивает результаты В.Г.Чирского, из которых следует, что для любой ненулевой линейной формы и многочлена существует хотя бы одно простое число p такое, что в поле p – адических чисел результат подстановки значений F – рядов в полиадической лиувиллевой точке вместо переменных отличных от 0. В предлагаемой работе этот результат усиливается и доказывается существование бесконечного множества простых чисел с таким свойством.

Перейдем к формулировкам утверждений. Предположим, что рассматриваемые ряды $f_i(z), i = 1, \dots, m$ составляют (формальное) решение системы дифференциальных уравнений

$$y'(z) = \sum_{j=1}^m Q_{j,i}(z) y_j(z), i = 1, \dots, m, Q_{j,i}(z) \in \mathbb{K}(z), i, j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Пусть $T = T(z)$ – многочлен с целыми коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ такой, что

$$T(z) Q_{j,i}(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], j, i = 1, \dots, m.$$

В работе [1] А.И. Галочкин доказал теорему об алгебраической независимости значений E – функций в трансцендентных точках, допускающих высокий порядок приближения алгебраическими числами.

Э.Бомбиери в своей работе [2] в 1981 г. ввел понятие глобального соотношения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $P(y_1, \dots, y_m)$ – многочлен с коэффициентами из $\mathbb{K}$, степенные ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}$. Соотношение

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0 \quad (2)$$

называется глобальным, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, где сходятся все ряды $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$. Назовем глобальное соотношение (2) тривиальным, если оно получается в результате подстановки $z = \xi$ в алгебраическое уравнение, связывающее $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ над $\mathbb{K}(z)$ и нетривиальным в противном случае.

Сформулированное выше понятие глобального соотношения допускает следующее обобщение. Пусть

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k, \quad (3)$$

где $\theta_k \in \mathbb{K}$, причему этот ряд сходится во всех полях $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Примеры таких рядов и описание их свойств будут приведены в конце второго параграфа.

Тогда в определениях глобального соотношения и нетривиального глобального соотношения можно рассматривать такую точку ξ вместо точки ξ из поля $\mathbb{K}$.

Обозначим $\Theta_n = \sum_{k=0}^n \theta_k$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – ряды $f_1 \equiv 1, f_2, \dots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений (1) и линейно независимы над полем $\mathbb{K}$. Пусть ξ – ряд (3), где θ_k – целые числа из поля $\mathbb{K}$, сходящийся во всех полях $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Пусть $\epsilon > 0, 0 < \delta < 1$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству

$$p \leq m \exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \quad (4)$$

и любого нормирования v , продолжающего p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполняется неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(m-1+\delta)(\exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|)). \quad (5)$$

Тогда для любой линейной форму $L(y_1, \dots, y_m)$, коэффициенты которой – целые числа из поля $\mathbb{K}$, не все равные нулю, существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v , продолжающих p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$ такие, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

$$|L(\xi)|_v = |L(1, f_2(\xi), \dots, f_m(\xi))|_v > 0. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – ряды $f_1, f_2, \dots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений

$$\begin{aligned} y'_i(z) &= Q_{0,i}(z) \sum_{j=1}^m Q_{j,i}(z) y_j(z), i = 1, \dots, m, \\ Q_{j,i}(z) &\in \mathbb{K}(z), i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (7)$$

и алгебраически независимы над полем $\mathbb{K}(z)$. Пусть ξ – ряд (3), где θ_k – целые числа из поля $\mathbb{K}$, сходящийся во всех полях $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Пусть $\epsilon > 0, 0 < \delta < 1$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству

$$p \leq m \exp(\ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \quad (8)$$

и любого нормирования v , продолжающего p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполняется неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(\exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta_n}|), |\Theta_n| > \exp(\ln^{2+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \quad (9)$$

Тогда для любого многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$, коэффициенты которого – целые числа из поля $\mathbb{K}$, не все равные нулю, существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v , продолжающих p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$ такие, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

$$|P(\xi)|_v = |P(f_1(\xi), f_2(\xi), \dots, f_m(\xi))|_v > 0.$$

Доказательство теорем 1 и 2

В формулируемых утверждениях положительные постоянные $c_i, i = 4, 5, \dots$ зависят от параметров класса, которому принадлежат рассматриваемые F – ряды, от системы (1) и от числа m .

Определим соответствующий системе (1) дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m Q_{k,i}(z) y_i \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Пусть $y_1, \dots, y_m, m \geq 2$ представляют собой степенные ряды, составляющие формальное решение системы уравнений (1). Подставляя их в форму

$$\sum_{i=1}^m P_i(z)y_i$$

вместо переменных, получаем формальный степенной ряд $R(z)$ по степеням z . Формальная производная ряда $R(z)$ по z является линейной формой от рядов $y_1, \dots, y_m$ и их формальных производных. После замены $y'_1, \dots, y'_m$ на правые части соответствующих дифференциальных уравнений и умножения на многочлен $T = T(z)$ получим линейную форму от $y_1, \dots, y_m$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$, т.е. для решений этой системы $TDR = TR'$. Таким образом, начав с произвольной формы

$$R_1 = \sum_{i=1}^m P_{1,i}(z)y_i, P_{1,i} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], i = 1, \dots, m, \quad (10)$$

положим

$$R_k = TDR_{k-1}, k = 2, 3, \dots \quad (11)$$

Согласно сказанному выше, R_k представляет собой линейную форму от $y_1, \dots, y_m$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$, т.е.

$$R_k = \sum_{i=1}^m P_{k,i}y_i, P_{k,i} = P_{k,i}(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]. \quad (12)$$

Коэффициенты этой формы удовлетворяют равенствам

$$P_{k,i} = T \left(P'_{k-1,i} + \sum_{j=1}^m P_{k-1,j}Q_{j,i} \right), i = 1, \dots, m, k = 2, 3, \dots \quad (13)$$

ЛЕММА 1. (Лемма 10 [3], с. 106). Пусть F – ряды $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений (1) и линейно независимы над полем $\mathbb{K}$. Пусть

$$\rho = \min_{1 \leq i \leq m} \text{ord}_{z=0} f_i(z),$$

$$\sigma = \max(\deg T, \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} \deg TQ_{j,i}).$$

Пусть N – натуральное число, R_1 – отличная от нуля линейная форма

$$R_1 = \sum_{i=1}^m P_{1,i}(z)y_i, P_{1,i} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], i = 1, \dots, m,$$

причем $\deg P_{1,i}(z) \leq N$, пусть ряд $R_1(z)$ получается из формы R_1 в результате подстановки $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ вместо $y_1, \dots, y_m$ и пусть

$$\text{ord}_{z=0} R_1(z) \geq m(N+1) - s - 1, s \in \mathbb{N}, 0 \leq s \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor.$$

Тогда при $N \geq N_0$ (где N_0 – постоянная, для которой в [19] дана оценка сверху, выраженная через параметры рассматриваемого класса рядов и системы дифференциальных уравнений) формы $R_1, \dots, R_m$ линейно независимы и их определитель $\Delta(z)$ имеет вид

$$\Delta(z) = z^{mn-s-\rho} \Delta_1(z),$$

где многочлен $\Delta_1(z)$ имеет степень $t_1, 0 \leq t_1 \leq t$, а $t = \sigma \frac{m(m-1)}{2} + s + \rho$.

ЛЕММА 2. (Лемма 11 [3], с. 107). Пусть F – ряды $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений (1) и линейно независимы над полем $\mathbb{K}$, числа ρ, σ, N_0, s, t – те же, что и в предыдущей лемме. Пусть R_1 – отличная от нуля линейная форма, определенная в предыдущей лемме такая, что

$$\text{ord}_{z=0} R_1(z) \geq m(N+1) - s - 1.$$

Тогда при $N \geq N_0$ для любого целого числа $\Theta \in \mathbb{K}$, $\Theta T(\Theta) \neq 0$, матрица

$$||P_{k,i}(\Theta)||_{i=1,\dots,m,k=1,\dots,m+t} \quad (14)$$

имеет ранг m .

ЛЕММА 3. Пусть ряды

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n} n! z^n, i = 1, \dots, m$$

принадлежат классу $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$. Тогда для любого натурального числа N существуют многочлены

$$P_i(z) = \sum_{n=0}^N B_{i,n} n! z^n, i = 1, \dots, m$$

такие, что их коэффициенты $B_{i,n}, n = 0, \dots, N, i = 1, \dots, m$ являются целыми числами из поля $\mathbb{K}$, удовлетворяющими неравенству

$$|\overline{B_{i,n}}| \leq \exp(c_4 N \sqrt{\ln N}). \quad (15)$$

При этом линейная форма

$$R(z) = \sum_{i=1}^m P_i(z) f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n n! z^n$$

имеет при $z = 0$ порядок нуля не ниже, чем $u(N) + 1$, где

$$u(N) = m(N+1) - \left\lceil \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rceil \quad (16)$$

и для любого простого числа $p, c_5 \leq p \leq u(N)$ и любого $v|p$, для любой точки $\xi \in \mathbb{K}_v$, удовлетворяющей условию $|\xi|_v \leq 1$, справедливо неравенство

$$|R(\xi)|_v \leq |(u(N))!|_v \exp \left(\frac{\kappa_v}{\kappa} \left(c_6 \log_p N + c_7 \frac{N}{p^2} \right) \right).$$

Эта лемма вполне аналогична леммам, приведенным в лемме 14 в [3], с. 113 или [4], с. 7. Ее подробное доказательство опущено. Следующая лемма также аналогичная лемме 15 [3], с. 116.

ЛЕММА 4. Пусть ряды $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ принадлежат классу $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, составляют решение системы уравнений (1) и линейно независимы над $\mathbb{K}(z)$, линейная форма (10) $R_1(z) = R(z)$ построена по лемме 3, формы R_k и их коэффициенты $P_{k,i}$ определены равенствами (11) – (13), $\Theta \in \mathbb{K}, \Theta T(\Theta) \neq 0$. Число σ определено в лемме 1. Тогда $\deg P_{k,i}(z) \leq N + (k-1)\sigma$,

$$|\overline{P_{k,i}(\Theta)}| \leq \left(\prod_{n=0}^{k-1} (n\sigma + m + N) \right).$$

$$\cdot \exp(N \ln N + c_8 N \sqrt{N \ln N} + c_9 k) |\overline{\Theta}|^{N + \sigma \frac{m(m-1)}{2} + [\frac{N}{\sqrt{\ln N}}]}. \quad (17)$$

Кроме того, для любого простого числа p , $c_5 \leq p \leq u(N)$ и любого $v|p$, для любой точки $\xi \in \mathbb{K}_v$, удовлетворяющей условию $|\xi|_v \leq 1$, справедливо неравенство

$$|R_k(\xi)|_v \leq |(u(N))!|_v \exp\left(\frac{\kappa_v}{\kappa} \left(c_6 \log_p N + c_7 \frac{N}{p^2}\right)\right). \quad (18)$$

Перейдем к доказательству теоремы 1. Определим число $N = N(n)$ равенством

$$N = N(n) = [\exp \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta}_n|]. \quad (19)$$

Пусть $N \geq N_0$. Положим $s = [\frac{N}{\sqrt{\ln N}}]$, $t = \sigma \frac{m(m-1)}{2} + [\frac{N}{\sqrt{\ln N}}]$ и применим лемму 2. Матрица (14) имеет ранг m , поэтому среди ее строк есть $m-1$ строк, линейно независимых со строкой коэффициентов формы L . Обозначим номера этих строк $k_2, \dots, k_m$ и рассмотрим определитель

$$\Delta(\Theta_n) = \begin{vmatrix} h_1 & \cdots & h_m \\ P_{1,k_2}(\Theta_n) & \cdots & P_{m,k_2}(\Theta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{1,k_m}(\Theta_n) & \cdots & P_{m,k_m}(\Theta_n) \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Он представляет собой отличное от нуля целое число из поля $\mathbb{K}$. Его можно рассматривать как значение многочлена

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} h_1 & \cdots & h_m \\ P_{1,k_2}(z) & \cdots & P_{m,k_2}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{1,k_m}(z) & \cdots & P_{m,k_m}(z) \end{vmatrix} \quad (21)$$

в точке $z = \Theta_n$. Поскольку $k_i \leq m + t$,

$$\prod_{n=0}^{k-1} (n\sigma + m + N) \leq \exp(c_{10} N \sqrt{\ln N})$$

и из леммы 4 следуют неравенства $\deg P_{k_i,j}(z) \leq N + c_{11} [\frac{N}{\ln N}]$,

$$|\overline{P_{k_i,j}(\Theta_n)}| \leq \exp(N \ln N + c_{12} N \sqrt{N \ln N}) |\overline{\Theta}_n|^{N + m + \sigma \frac{m(m-1)}{2} + [\frac{N}{\sqrt{\ln N}}]},$$

выполняющиеся для всех $i, j = 1, \dots, m$. Обозначим

$$h = \max_{i=1, \dots, m} |\overline{h_i}|.$$

Тогда

$$|\overline{\Delta(\Theta_n)}| \leq (m-1)! h \exp((m-1)N \ln N + c_{13} N \sqrt{N \ln N}) |\overline{\Theta}_n|^{(m-1)(N + m + \sigma \frac{m(m-1)}{2} + [\frac{N}{\sqrt{\ln N}}])},$$

и из (19) получаем

$$|\overline{\Delta(\Theta_n)}| \leq (m-1)! h \exp((m-1)N \ln N + c_{14} N \sqrt{\ln N} + c_{15} N (\ln N)^{\frac{1}{1+\epsilon}}). \quad (22)$$

Подставим $z = \xi$ в $\Delta(z)$ и рассмотрим полученные элементы полей $\mathbb{K}_v$, где $v|p$.

ЛЕММА 5. При $N \geq N_0$ для любого простого числа p , $c_5 \leq p \leq u(N)$ и $v|p$ в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется равенство $|\Delta(\xi)|_v = |\Delta(\Theta_n)|_v$.

Для доказательства леммы используем равенство, справедливое в каждом из рассматриваемых полей $\mathbb{K}_v$:

$$\Delta(\xi) = \Delta(\Theta_n + (\xi - \Theta_n)) = \Delta(\Theta_n) + (\xi - \Theta_n)\Delta_1(\xi, \Theta_n), \quad (23)$$

где $\Delta_1(\xi, \Theta_n)$ – многочлен от ξ, Θ_n с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$. Следовательно, согласно (5)

$$|(\xi - \Theta_n)\Delta_1(\xi, \Theta_n)|_v \leq |(\xi - \Theta_n)|_v \leq \exp(-(m-1+\delta)(\exp \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|),$$

откуда, ввиду (19),

$$|(\xi - \Theta_n)\Delta_1(\xi, \Theta_n)|_v \leq \exp(-(m-1+\delta)N \ln N).$$

С другой стороны, $\Delta(\Theta_n)$ – отличное от 0 целое число из поля $\mathbb{K}$, следовательно, согласно (22),

$$|\Delta(\Theta_n)|_v \geq |\overline{\Delta(\Theta_n)}| \geq \exp(-(m-1)N \ln N - c_{14}N\sqrt{\ln N} - c_{15}N(\ln N)^{\frac{1}{1+\epsilon}}).$$

Если число n , а, значит, и число N , выбрано достаточно большим, то

$$\exp(-(m-1)N \ln N - c_{14}N\sqrt{\ln N} - c_{15}N(\ln N)^{\frac{1}{1+\epsilon}}) > \exp(-(m-1+\delta)N \ln N),$$

поэтому из равенства (23) следует, что

$$|\Delta(\xi)|_v = |\Delta(\Theta_n)|_v \geq \exp(-(m-1)N \ln N - c_{14}N\sqrt{\ln N} - c_{15}N(\ln N)^{\frac{1}{1+\epsilon}}). \quad (24)$$

Лемма доказана.

В каждом из рассматриваемых полей $\mathbb{K}_v$ умножим первый столбец определителя $\Delta(\xi)$ на 1, второй столбец – на $f_2(\xi)$ и так далее, столбец с номером m на $f_m(\xi)$ и прибавим получившиеся столбцы к первому. Отметим, что $|\xi|_v \leq 1$ и все ряды $f_2(\xi), \dots, f_m(\xi)$ сходятся. Согласно (9) и (12), элементами первого столбца будут величины

$$L(\xi) = L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)), L_i(\xi) = R_{k_i}(\xi), i = 2, \dots, m$$

в указанном порядке. Поэтому

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} L(\xi) & h_2 & \cdots & h_m \\ L_2(\xi) & P_{2,k_2}(\xi) & \cdots & P_{m,k_2}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_m(\xi) & P_{2,k_m}(\xi) & \cdots & P_{m,k_m}(\xi) \end{vmatrix}.$$

Обозначим алгебраически дополнения элементов первого столбца этого определителя $\delta_1, \dots, \delta_m$ соответственно, и разложим его по первому столбцу:

$$\Delta(\xi) = \sum_{j=2}^m L_j(\xi) \delta_j + L(\xi) \delta_1. \quad (25)$$

Из (18) следует, что для любого простого числа p , $c_5 \leq p \leq u(N)$ и $v|p$

$$\left| \sum_{j=2}^m L_j(\xi) \delta_j \right|_v \leq \max_{i=2, \dots, m} |L_i(\xi) \delta_i|_v \leq |L_i(\xi)|_v \leq |u(N)|_v \exp \left(\frac{\kappa_v}{\kappa} \left(c_6 \log_p N + c_7 \frac{N}{p^2} \right) \right), i = 2, \dots, m.$$

Обозначим $l(N) = \exp \sqrt{\ln N}$. Тогда

$$\prod_{l(N) \leq p \leq u(N), v|p} \left| \sum_{i=2}^m L_i(\xi) \delta_i \right|_v \leq \prod_{l(N) \leq p \leq u(N), v|p} \left| \sum_{i=2}^m L_i(\xi) \right|_v \leq$$

$$\prod_{l(N) \leq p \leq u(N), v|p} \max_{i=2, \dots, m} |L_i(\xi)|_v \leq \prod_{l(N) \leq p \leq u(N), v|p} |(u(N))!|_v \exp \left(\frac{\kappa_v}{\kappa} \left(c_6 \log_p N + c_7 \frac{N}{p^2} \right) \right).$$

так как δ_i – целые числа.

Используя известные неравенства для количества простых чисел в заданном интервале, получаем

$$\prod_{l(N) \leq p \leq u(N), v|p} \exp(c_6 \log_p N) \leq \exp \left(c_6 \frac{\ln N}{\ln p} \times c_{16} \frac{u(N)}{\ln u(N)} \right) \leq \exp(c_{17} N),$$

$$\prod_{l(N) \leq p \leq u(N), v|p} \exp \left(c_7 \frac{N}{p^2} \right) = \exp \left(N \sum_{l(N) \leq p \leq u(N), v|p} \frac{c_7}{p^2} \right) \leq \exp(c_{18} N)$$

Однако

$$\prod_{l(N) \leq p \leq u(N)} |(u(N))!|_p = \frac{\prod_{p \leq u(N)} |(u(N))!|_p}{\prod_{p \leq l(N)} |(u(N))!|_p}.$$

Для $\prod_{p \leq u(N)} |(u(N))!|_p$ выполнено равенство

$$\prod_{p \leq u(N)} |(u(N))!|_p = \frac{1}{(u(N))!}.$$

Для $\prod_{p \leq l(N)} |(u(N))!|_p$ имеем оценку снизу, полученную следующим образом

$$\prod_{p \leq l(N)} |(u(N))!|_p = \prod_{p \leq l(N)} p^{-\frac{u(N)}{p-1} + \frac{Su(N)}{p-1}} \geq \exp \left(-u(N) \sum_{p \leq l(N)} \frac{\ln p}{p-1} \right).$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p-1} = \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} + \sum_{p \leq x} \ln p \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} + \sum_{p \leq x} \left(\frac{\ln p}{p(p-1)} \right).$$

Вторая сумма – сходящийся ряд и его оценим константой C . Первая сумма есть

$$\ln x + O(1), x \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$-u(N) \sum_{p < l(N)} \frac{\ln p}{p-1} \geq -u(N) \ln l(N) \geq -m(N+1) \sqrt{\ln N}.$$

Тогда

$$\prod_{l(N) \leq p \leq u(N)} |(u(N))!|_p \leq \left(\left(m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor \right)! \right)^{-1} \exp(-m(N+1) \sqrt{\ln N}) \leq$$

$$\leq \exp(-mN \ln N + CN \sqrt{\ln N}).$$

Следовательно,

$$\prod_{l(N) \leq p \leq u(N)} |L_i(\xi)\delta_i|_v \leq \exp(-mN \ln N + CN\sqrt{\ln N}). \quad (26)$$

С другой стороны, из неравенства (24) следует, что

$$\prod_{l(N) \leq p \leq u(N), v|p} |\Delta(\xi)|_v = \prod_{l(N) \leq p \leq u(N), v|p} |\Delta(\Theta_n)|_v \geq \exp(-(m-1)N \ln N - c_{14}N\sqrt{\ln N} - c_{15}N(\ln N)^{\frac{1}{1+\epsilon}}). \quad (27)$$

Из неравенств (26), (27) и равенства (16) сразу следует, что

$$\prod_{l(N) \leq p \leq u(N), v|p} |\Delta(\xi)|_v \leq \prod_{l(N) \leq p \leq u(N), v|p} \left| \sum_{i=2}^m L_i(\xi)\delta_i \right|_v,$$

тогда из (25) получаем, что существует $p, l(N) \leq p \leq u(N)$ и $v|p$ такие, что в $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

$$|L(\xi)|_v \geq |\Delta(\xi)|_v.$$

Для завершения доказательства достаточно получить неравенство $l(N(n+1)) > u(N(n))$, т.е.

$$\exp \sqrt{\ln N(n+1)} > m(N(n)+1),$$

так как

$$\begin{aligned} N(n+1) &= \exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \\ \ln N(n+1) &= \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}| \\ \sqrt{\ln N(n+1)} &= \ln^{\frac{1+\epsilon}{2}} |\overline{\Theta_n}| \\ \exp\left(\ln^{\frac{1+\epsilon}{2}} |\overline{\Theta_{n+1}}|\right) &> m \exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) = \exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}| + \ln m) \\ \ln^{\frac{1+\epsilon}{2}} |\overline{\Theta_{n+1}}| &> \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}| + \ln m \\ |\overline{\Theta_{n+1}}| &> \exp(\ln^{2+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|). \end{aligned}$$

Из этого условия следует, что при переходе от n к $n+1$ для соответствующих чисел N будет выполняться неравенство

$$l(N(n+1)) > u(N(n)).$$

Следовательно, интервалы $(l(N(n)), u(N(n)))$ и $(l(N(n+1)), u(N(n+1)))$ не будут пересекаться, а в каждом из них есть простое число p , для которого $L(\xi) \neq 0$ в $\mathbb{Q}_p$.

Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть d – степень многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$ по совокупности переменных $y_1, \dots, y_m$. Тогда его можно рассматривать как линейную форму от $M = C_{m+d}^m$ произведений степеней переменных $y_1^{k_1}, \dots, y_m^{k_m}$, где $k_1 + \dots + k_m \leq d$, $k_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$.

ЛЕММА 6. Пусть ряды $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ удовлетворяют условиям леммы 2. Тогда их произведение степеней

$$f_1^{k_1}(z) \cdots f_m^{k_m}(z), k_1 + \dots + k_m \leq d, k_i \geq 0, i = 1, \dots, m,$$

составляют решение системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой являются целочисленными линейными комбинациями коэффициентов исходной системы (1). Кроме того, они принадлежат классу $F(\mathbb{K}, C_1, C_2, C_3, \tilde{q})$, где

$$C_1 = c_1 + \ln 2, \quad C_2 = c_2, \quad C_3 = (c_3 + 1)d, \quad \tilde{q} = q^{1+\lfloor \ln d \rfloor}.$$

Доказательство леммы вполне аналогично доказательствам леммы 18 из [3], с. 122.

Эти произведения степеней линейно независимо вследствие алгебраической независимости $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$. Из неравенств (8) и (9) при достаточно больших n следуют неравенства

$$p \leq M \exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta}_n|)$$

и

$$|\xi - \Theta_n| < \exp(-(M - 1 + \delta)(\exp \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta}_n|) \ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta}_n|),$$

представляющие собой неравенства (4) и (5), в которых m заменено на M . Применение теоремы 1 завершает доказательство теоремы 2.

Заключение

В настоящей работе была доказана бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F -рядов в полиадических лиувиллевых точках с использованием модификации обобщенного метода Зигеля-Шидловского.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галочкин А. И. Об алгебраической независимости значений E – функций в некоторых трансцендентных точках // Вестн. Московского университета. Сер. 1, Математика, механика. 1970. № 5. С. 58-63.
2. Bombieri E. On G – functions // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 2. London: Academic Press, 1981. P. 1-68.
3. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа // М. Наука. 1987.
4. Chirskii V.G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2019, vol. 26, no. 2, pp. 175-184.
5. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика, механика. — Изд-во Моск. университета (М), 2015. № 1. С. 59-61.
6. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая, 2017. Том 81, № 1. С. 215-232 DOI.
7. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F -рядов // Доклады Академии наук. — Изд-во Наука (М), 2018. Том 483, № 1. С. 257-259.
8. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук. — Изд-во Наука (М), 2014. Том 459, № 6. С. 677-679.
9. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая, 2014. Том 78, № 6. С. 193-210
10. Чирский В. Г. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2011. Том 12, № 4. С. 129-133.
11. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Мат. заметки. 1990. Том 48, № 2. С. 123-127.

12. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук, математика. Наука (М). 2014. Том 459, № 6. С. 677-679.
13. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая. 2017. Том 81, выпуск 2. С. 215-232.
14. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей // Чебышевский сборник. 2016. Том 17, № 3. С. 180-185.
15. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, № 1. С. 254-264.
16. André Y. Séries Gevrey de type arithmétique. // Inst. Math., Jussieu.
17. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175-184.
18. Matala-Aho T., Zudilin W. Euler factorial series and global relations. // J. Number Theory. 2018. 186, pp.202-210.
19. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. Vol. XIII, №2. pp. 241-260.

REFERENCES

1. Galochkin A. I. 1970, "On algebraic independence of the values of E – functions at certain transcendental points", *Moscow University Mathematics Bulletin*, iss. 1, no. 5, pp. 58-63.
2. Bombieri E., 1981, "On G – functions", *Recent Progress in Analytic Number Theory*, Academic Press (London), vol. 2, pp. 1-68.
3. Shidlovskii, A. B. 1989, "Transcendental numbers", *Studies in mathematics*, Walter de Gruyter (Berlin, New York), vol. 12
4. Chirskii V. G. 2019, "Product formula, global relations and polyadic integers", *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 26, no. 2, pp. 175-184.
5. Chirskii, V. G. 2015, "Arithmetic properties of Euler series", *Moscow University Mathematics Bulletin*, Allerton Press Inc.(United States), vol. 70, no. 1, pp. 41-43.
6. Chirskii, V. G. 2017, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), vol. 81, no. 2, pp. 444-461.
7. Chirskii, V. G. 2018, "Arithmetic properties of generalized hypergeometric F -series", *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 98, no. 3, pp. 589-591.
8. Chirskii, V. G. 2014, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 90, no. 3, pp. 766-768.

9. Chirskii, V. G. 2014, “On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), vol. 78, no. 6, pp. 1244-1260.
10. Chirskii, V. G. 2011, “Estimates of linear forms and polynomials in polyadic numbers“, *Chebyshevskii Sb.*, 12:4, pp.129-133.
11. Chirskii, V. G. 1990, “Global relations“, *Mat. Zametki*, vol. 48, no. 2, pp. 123–127
12. Chirskii, V. G. 2014, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 90, no. 3, pp. 766-768.
13. Chirskii, V.,G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), vol. 81, no. 2, pp. 444-461.
14. Chirskii, V. G. 2016, “On transformations of periodic sequences“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 17, no. 3, pp. 191–196.
15. Chirskii, V. G. 2015, “Arithmetic properties of polyadic integers“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 1, pp. 254–264.
16. André Y. 2000, “Séries Gevrey de type arithmétique“, *Annals of Mathematics*, vol. 151, pp. 705-740
17. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175-184.
18. Matala-Aho T. & Zudilin W. 2018, “Euler factorial series and global relations“, *J. Number Theory*, vol. 186, pp. 202-210.
19. Bertrand, D., Chirskii, V. G. & Yebbou, Y. 2004, “Effective estimates for global relations on Euler-type series“, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. XIII, no. 2, pp. 241-260.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 51(092);512.54;512.55

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-347-365

**Александр Юрьевич Ольшанский
(к 75-летию)**

К. К. Андреев, Г. Н. Аржанцева, В. А. Артамонов, В. С. Атабекян, И. Н. Балаба,
Н. В. Безверхний, А. А. Вдовина, В. С. Губа, А. Э. Гутерман, Г. С. Дерябина,
Н. М. Добровольский, М. В. Зайцев, А. Л. Канунников, А. А. Клячко, О. В. Куликова,
О. В. Маркова, В. Г. Микаелян, М. В. Милентьева, А. Э. Минасян, К. В. Михайловский,
А. В. Михалёв, А. Е. Панкратьев, Ю. Г. Прохоров, Ю. С. Семёнов, Д. А. Тимашёв,
В. Н. Чубариков, И. А. Чубаров, Е. Е. Ширшова

Аннотация

В статье, посвященной 75-летию Александра Юрьевича Ольшанского, коллеги, друзья и ученики отразили биографические данные о юбиляре, сведения о его студенческой жизни, учебе в аспирантуре, привели краткие сведения о его научной и педагогической деятельности, об участии в математической жизни мирового сообщества.

Ключевые слова: комбинаторная теория групп, геометрические методы в теории групп, многообразия групп и колец.

Библиография: 106 названий.

Для цитирования:

К. К. Андреев, Г. Н. Аржанцева, В. А. Артамонов, В. С. Атабекян, И. Н. Балаба, Н. В. Безверхний, А. А. Вдовина, В. С. Губа, А. Э. Гутерман, Г. С. Дерябина, Н. М. Добровольский, М. В. Зайцев, А. Л. Канунников, А. А. Клячко, О. В. Куликова, О. В. Маркова, В. Г. Микаелян, М. В. Милентьева, А. Э. Минасян, К. В. Михайловский, А. В. Михалёв, А. Е. Панкратьев, Ю. Г. Прохоров, Ю. С. Семёнов, Д. А. Тимашёв, В. Н. Чубариков, И. А. Чубаров, Е. Е. Ширшова. Александр Юрьевич Ольшанский (к 75-летию) // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 347–365.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 51(092);512.54;512.55

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-347-365

**Alexander Yuryevich Olshanskii
(to the 75th anniversary)**

K. K. Andreev, G. N. Arzhantseva, V. A. Artamonov, V. S. Atabekyan, I. N. Balaba,
N. V. Bezverkhny, A. A. Vdovina, V. S. Guba, A. E. Guterman, G. S. Deryabina,
N. M. Dobrovolsky, M. V. Zaicev, A. L. Kanunnikov, A. A. Klyachko, O. V. Kulikova,
O. V. Markova, V. G. Mikaelyan, M. V. Milentyeva, A. E. Minasyan, K. V. Mikhailovsky,
A. V. Mikhalev, A. E. Pankratiev, Yu. G. Prokhorov, Yu. S. Semenov, D. A. Timashev,
V. N. Chubarikov, I. A. Chubarov, E. E. Shirshova

Abstract

In the article dedicated to the 75th anniversary of Alexander Olshanskii, colleagues, friends and students reflected biographical information about the hero of the day, information about his student life, studies in graduate school, gave brief information about his scientific and pedagogical activities, about participation in the mathematical life of the world community.

Keywords: combinatorial group theory, geometric methods in group theory, varieties of groups and rings.

Bibliography: 106 titles.

For citation:

K. K. Andreev, G. N. Arzhantseva, V. A. Artamonov, V. S. Atabekyan, I. N. Balaba,
N. V. Bezverkhny, A. A. Vdovina, V. S. Guba, A. E. Guterman, G. S. Deryabina,
N. M. Dobrovolsky, M. V. Zaicev, A. L. Kanunnikov, A. A. Klyachko, O. V. Kulikova,
O. V. Markova, V. G. Mikaelyan, M. V. Milentyeva, A. E. Minasyan, K. V. Mikhailovsky,
A. V. Mikhalev, A. E. Pankratiev, Yu. G. Prokhorov, Yu. S. Semenov, D. A. Timashev,
V. N. Chubarikov, I. A. Chubarov, E. E. Shirshova, 2021, "Alexander Yuryevich Olshanskii (to the 75th anniversary of his birth)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 347–365.

Введение

19 января 2021 года исполнилось 75 лет Александру Юрьевичу Ольшанскому, математику с мировым именем, лауреату множества наград, в том числе премии Московского математического общества, премии Мальцева и премии Каргаполова, приглашённому докладчику на Международном математическом конгрессе (1982), почётному члену Американского математического общества (*Fellow of the AMS*).

Родители Александра Юрьевича родились в один год, весной 1920, в простых семьях. Отец воспитывался только своей матерью, которая была закройщицей, портнихой. Мать Александра Юрьевича выросла в семье плотника. Тем не менее родители Ольшанского поступили



Александр Юрьевич на конференции в Туле

в Саратовский университет. В 1941 году отец заканчивал четвёртый курс и писал курсовую работу под руководством известного специалиста по теории чисел Н. Г. Чудакова. Их курс должен был учиться еще год, но летом состоялся ускоренный выпуск и всех парней отправили в Москву учиться в Академии имени Н. Е. Жуковского. Так отец Александра Юрьевича стал военным инженером в области авиационного вооружения.

Когда Александр Юрьевич должен был родиться, его семья жила в Ногинске. Родился Александр Юрьевич в Саратове, но уже через два месяца он с мамой вернулся в Ногинск. В Ногинске юный Ольшанский пошёл в школу, однако, начиная со второго класса и до окончания школы, он уже жил и учился в Энгельсе, куда перевели воинскую часть отца.

Родители дали своему сыну первые книжки по математике: «Математическую смекалку» и «Занимательную математику». Будучи школьником, Александр Юрьевич посещал математический кружок в Саратове, что было непросто — город Энгельс находится совсем рядом с Саратовом, но на другом берегу Волги; сейчас эти города соединяет мост, но в те времена моста не было, и зимой юный Александр Юрьевич переходил Волгу по льду (а летом приходилось ездить на поезде, который делал большой крюк до ближайшего моста). Руководил кружком Вячеслав Николаевич Салий (в то время аспирант), он же возил команду Саратовской области в Москву на всесоюзные туры математической олимпиады. Будучи школьником Александр дважды посещал Москву в составе такой команды.

Студенческие годы и аспирантура

В 1963 году, после окончания школы Александр Юрьевич поступил на механико-математический факультет МГУ. К своему будущему научному руководителю Альфреду Львовичу Шмелькину студент Александр Ольшанский пришел в начале второго курса, на просеминар. Альфред Львович вел занятия интересно, доступно, ориентируясь на второкурсников, давал интересные тренировочные задачи, так что в конце второго курса семь человек, включая Александра Ольшанского, выбрали в качестве научного руководителя А. Л. Шмелькина (тогда ещё очень молодого человека).

На третьем курсе Альфред Львович предлагал своему ученику Александру Ольшанскому разные задачи. Александр Юрьевич признаётся, что сменилось несколько задач, прежде чем ему удалось одолеть одну из них. Так началось становление выдающегося математика Ольшанского, известного сейчас во всем мире как ученого, решившего множество открытых проблем, перед которым, кажется, не устоит ни одна задача.

Уже в студенческие годы Александр Ольшанский получает весьма нетривиальные математические результаты и пишет свои первые статьи. В частности, Александр Юрьевич решает несколько проблем из только что вышедшей книги Ханны Нейман «Многообразия групп».

В 1968 году Александр Юрьевич заканчивает механико-математический факультет и поступает в аспирантуру. В 1970 году выходит работа аспиранта Ольшанского, в которой он решает проблему конечной базированности для многообразий групп, поставленную Б. Нейманом в 1937 году. Он доказывает континуальность множества многообразий групп и тем самым существование бесконечной системы групповых тождеств, не эквивалентной никакой конечной системе. В 1970 году Александр Юрьевич защищает кандидатскую диссертацию «Некоторые вопросы теории многообразий групп» и остаётся работать на кафедре высшей алгебры МГУ.

Геометрический метод Ольшанского

Одновременно с подготовкой докторской диссертации «Исследования по локально конечным многообразиям групп» и её защитой в 1979 году, Александр Юрьевич начинает активно работать в новой для себя области. На основе диаграмм ван Кампена, наглядно отражающих процесс выводимости одного соотношения в группе из других, он развивает свой метод, использующий градуированные диаграммы ван Кампена.

Про истоки того, что впоследствии назовут *геометрическим подходом Ольшанского*, сам Александр Юрьевич пишет в своей монографии так:

«Толчком к работе в новом направлении оказалось для автора общение с Э. Б. Винбергом, который пригласил его в 1975/76 учебном году стать соруководителем семинара «Геометрия и группы» для студентов МГУ.»

В 1979 году выходит работа Александра Юрьевича, в которой он строит нётерову группу (то есть группу, в которой все подгруппы конечно порождены), не являющуюся почти полициклической, отвечая тем самым на известный вопрос Р. Бэра (1956). После этого Александр Юрьевич строит очень много групп с удивительными свойствами и решает очень много известных проблем. Одним из наиболее впечатляющих примеров таких групп является так называемый *монстр Тарского*, то есть бесконечная группа, все собственные неединичные подгруппы которой циклические одинакового порядка. Построение Ольшанским в 1982 году такой группы во многом изменило имевшееся в то время представление о бесконечных группах и решило сразу несколько открытых проблем, а именно, построенная им группа — это:

- неабелева бесконечная группа, все собственные подгруппы которой конечны (ответ на вопрос О. Ю. Шмидта, 1938);¹

¹На самом деле, первый пример бесконечной неабелевой группы, все собственные подгруппы которой ко-

- бесконечная простая p -группа (ответ на вопрос А. Тарского);
- нётерова не почти полициклическая группа (ответ на упомянутый выше вопрос Р. Бэра, 1956);
- артинова не почти абелева группа (ответ на вопрос С. Н. Черникова, 1947);
- артинова не локально конечная группа (ответ на вопрос А. Г. Куроша и С. Н. Черникова, 1947).

В качестве еще одного примера применения разработанного Ольшанским геометрического подхода приведем доказанное им (в 1980 году) существование неаменабельной группы, все собственные подгруппы которой циклические, что решает старую проблему фон Неймана–Дэя.

В 1982 году Ольшанский придумал новое геометрическое решение ограниченной проблемы Бернсайда для достаточно больших нечетных показателей, то есть передоказал теорему Новикова–Адяна (1968), причём новое геометрическое доказательство оказалось, кроме всего прочего, в несколько раз короче оригинального.

Метод Ольшанского позволил Александру Юрьевичу и его ученикам ответить на множество известных вопросов. Многие из этих результатов собраны в замечательной книге А. Ю. Ольшанского «Геометрия определяющих соотношений в группах».

Позже, в начале девяностых годов, Ольшанский распространил свой метод на гиперболические группы и разработал для этих групп технику малых сокращений, что позволило строить новые конструкции и исследовать факторгруппы гиперболических групп.

Научные интересы последних лет

Научные интересы Александра Юрьевича были и остаются разнообразными. Это комбинаторная теория групп, геометрические методы в теории групп, многообразия групп и колец. Ему принадлежат и очень нетривиальные и известные результаты о конечных группах и о кольцах Ли.

Приведем несколько недавних результатов Ольшанского.

Александр Юрьевич доказал, что функция $n \mapsto n^a$, где $a > 2$ — вещественное алгебраическое число, эквивалентна функции Дэна некоторой конечно определенной группы.

В совместной работе 2019 года Александра Юрьевича с Марком Валентиновичем Сапиром была построена конечно определенная группа с квадратичной функцией Дэна и неразрешимой проблемой сопряженности, что решило проблему Рипса (1992).

В другой совместной работе (2020) Александра Юрьевича с Марком Валентиновичем были построены группы с неразрешимой проблемой сопряженности, но разрешимой проблемой степенной сопряженности (причём эти группы имеют квадратичную функцию Дэна).

Особенности педагогической деятельности и ученики

В 1999 году Ольшанский стал профессором университета Вандербильта. Сейчас этот американский университет является основным местом работы Александра Юрьевича. Однако он остаётся профессором мехмата МГУ (по совместительству), регулярно бывает в Москве, участвует в жизни кафедры алгебры (в том числе, принимает экзамены, руководит вместе с коллегами семинаром «Теория групп»).

нечны, был построен Александром Юрьевичем чуть раньше — в работе 1980 года.

Трудно переоценить то влияние, которое научный авторитет Александра Юрьевича оказал и оказывает на развитие теории групп в разных странах. Много сил он отдаёт воспитанию молодых учёных.

Вот список учеников Александра Юрьевича, защитившихся под его руководством:

А. Н. Фёдоров, Т. В. Дубровина, Г. С. Дерябина, В. С. Атабекян, С. В. Иванов, В. С. Губа, К. И. Лоссов, В. Н. Образцов, А. М. Сторожев, Нгуен Хунг Шон, В. Г. Микаелян, А. А. Клячко, Ю. С. Семёнов, К. В. Михайловский, А. А. Вдовина, Г. Н. Аржанцева, Н. В. Безверхний, Д. В. Осин, П. А. Кожевников, А. Е. Панкратьев, А. Э. Минасян, Д. Сонкин, А. Муранов, М. В. Милентьева, О. В. Куликова, Tara Davis, В. Чайников, Nicholas Boatman, А. Дарбинян, Krishnendu Khan.

Многие из этих людей стали известными математиками.

Редколлегии журналов и международные конференции

О высоком научном признании Александра Юрьевича говорит тот факт, что в 1983 году он был приглашённым докладчиком XIX Международного конгресса математиков в Варшаве.

Александр Юрьевич Ольшанский член редколлегий нескольких международных журналов:

- с 1 января 2006 Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences издательство American Mathematical Society (United States);
- с 1 октября 2002 Algebra and Discrete Mathematics;
- с 1 января 1998 Journal of Group Theory издательство Walter de Gruyter GmbH & Co. KG (Germany);
- с 1 января 1992 Communications in Algebra издательство Marcel Dekker Inc. (United States);
- с 1 января 1990 International Journal of Algebra and Computation издательство World Scientific Publishing Co (Singapore).

Александр Юрьевич вносит активный вклад в издание Чебышевского сборника, рецензируя работы по своей научной тематике.

Александр Юрьевич Ольшанский принимает активное участие в математической жизни, входя в программные комитеты различных международных конференций. В частности:

- 11-15 июля 2011 8th International Algebraic Conference in Ukraine Член программного комитета. Луганск, Украина;
- 8-13 июля 2013 9th International algebraic conference in Ukraine Член программного комитета L'viv;
- XII Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная восьмидесятилетию профессора Виктора Николаевича Латышева [Тула, 21–25 апреля 2014 г.] Член программного комитета;
- XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова [Тула, 25-30 мая 2015 г.] Член программного комитета;

- XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича [Тула, 28-31 мая 2018 года] Член программного комитета;
- XVI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза [Тула, 13-18 мая 2019 г.] Член программного комитета;
- XVII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная столетию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и девяностолетию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко [Тула, 23-28 сентября 2019 г.] Член программного комитета;
- XVIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина [Тула, 23-26 сентября 2020 г.] Член программного комитета;
- XIX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышева [Тула, май 2021 г.] Член программного комитета.

Пожелания

Кафедра алгебры МГУ, участники семинара «Теория групп», ученики, редакция Чебышевского сборника и кафедра алгебры, математического анализа и геометрии ТГПУ им. Л. Н. Толстого желают Александру Юрьевичу дальнейших научных достижений, крепкого здоровья и счастья!

СПИСОК ИЗБРАННЫХ ТРУДОВ А. Ю. ОЛЬШАНСКОГО

1. К. К. Андреев, А. Ю. Ольшанский. Об аппроксимации групп. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, 23(2):60–62, 1968.
2. А. Ю. Ольшанский. Об одной задаче Ханна Нейманн. *Математический сборник*, 76:449–453, 1968.
3. А. Ю. Ольшанский. Многообразия финитно аппроксимируемых групп. *Известия АН СССР. Серия математическая*, 33:915–927, 1969.
4. А. Ю. Ольшанский. Проблема конечного базиса тождеств в группах. *Известия АН СССР. Серия математическая*, 34:376–384, 1970.
5. А. Ю. Ольшанский. Два замечания о многообразиях групп. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, 26(2):58–63, 1971.
6. А. Ю. Ольшанский. Разрешимые почти-кроссовы многообразия групп. *Математический сборник*, 85(5):115–131, 1971.

7. А. Ю. Ольшанский. О порядках свободных групп локально конечных многообразий. *Известия АН СССР. Серия математическая*, 37(1):89–94, 1973.
8. А. Ю. Ольшанский. О характеристических подгруппах свободных групп. *Успехи математических наук*, 29(1(175)):179–180, 1974.
9. А. Ю. Ольшанский. Условные тождества в конечных группах. *Сибирский математический журнал*, 15:1409–1413, 1974.
10. Ю. А. Бахтурин, А. Ю. Ольшанский. Тождества в конечных кольцах Ли. *Математический сборник*, 96(4):543–559, 1975.
11. Ю. А. Бахтурин, А. Ю. Ольшанский. Аппроксимация и характеристические подалгебры в свободных алгебрах Ли. *Труды семинара имени И.Г.Петровского*, 2:145–150, 1976.
12. Ю. А. Бахтурин, А. Ю. Ольшанский. Разрешимые почти кроссовы многообразия колец Ли. *Математический сборник*, 100(3):384–399, 1976.
13. А. Ю. Ольшанский. К вопросу о порядках и числе порождающих абелевых подгрупп конечных p -групп. *Математические заметки*, 23(3):337–341, 1978.
14. А. Ю. Ольшанский. О некоторых бесконечных системах тождеств. *Труды семинара им. И.Г. Петровского*, 3:139–146, 1978.
15. А. Ю. Ольшанский. Бесконечные группы с циклическими подгруппами. *Доклады Академии наук*, 245(4):785–787, 1979.
16. А. Ю. Ольшанский. Группы с циклическими подгруппами. *Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences*, 32(9):1165–1166, 1979.
17. А. Ю. Ольшанский. О бесконечных простых нётеровых группах без кручения. *Известия АН СССР. Серия математическая*, 43(6):1328–1393, 1979.
18. А. Ю. Ольшанский. Замечание о счетной нетопологизируемой группе. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, (3):103–103, 1980.
19. А. Ю. Ольшанский. К вопросу о существовании инвариантного среднего на группе. *Успехи математических наук*, 35(4(214)):199–200, 1980.
20. А. Ю. Ольшанский. О бесконечных группах с подгруппами простых порядков. *Известия АН СССР. Серия математическая*, 44(2):309–321, 1980.
21. А. Ю. Ольшанский. Группы ограниченного периода с подгруппами простого порядка. *Алгебра и логика*, 21(5):553–618, 1982.
22. А. Ю. Ольшанский. О теореме Новикова – Адяна. *Математический сборник*, 118(2):203–235, 1982.
23. A. Yu. Olshanskii. On a geometric method in the combinatorial group theory. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983)*, pages 415–424. PWN, Warsaw, 1984.
24. И. С. Ашманов, А. Ю. Ольшанский. Об абелевых и центральных расширениях асферических групп. *Известия высших учебных заведений. Математика*, (11):48–60, 1985.
25. А. Ю. Ольшанский. Многообразия, в которых все конечные группы абелевы. *Математический сборник*, 126(1):59–82, 1985.

26. Г. С. Дерябина, А. Ю. Ольшанский. Подгруппы квазиконечных групп. *Успехи математических наук*, 41(6(252)):169–170, 1986.
27. А. Ю. Ольшанский. О теореме Нейманнов–Шмелькина. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, (6):61–64, 1986.
28. Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. Тождества. В *Алгебра – 2*, т. 18 of *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления*, стр. 117–240. ВИНТИ, 1988.
29. S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii. Some applications of graded diagrams in combinatorial group theory. In *Groups-St. Andrews 1989, Vol. 2*, volume 160 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 258–308. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
30. A. Yu. Olshanskij, A. L. Shmelkin. Infinite groups. In *Algebra, IV*, volume 37 of *Encyclopaedia Math. Sci*, pages 1–95. Springer, Berlin, 1989.
31. А. Ю. Ольшанский. Диаграммы гомоморфизмов групп поверхностей. *Сибирский математический журнал*, 30(6):150–171, 1989.
32. А. Ю. Ольшанский. Проблема Мальцева об операциях над группами. *Труды семинара им. И.Г. Петровского*, (14):225–249, 1989.
33. А. Ю. Ольшанский. Экономные вложения счетных групп. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, (2):28–34, 1989.
34. А. Ю. Ольшанский, Шмелькин А. Л. Бесконечные группы. В *Алгебра – 4*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, стр. 5–113. ВИНТИ, 1989.
35. А. Ю. Ольшанский. Замечание к моей статье "Диаграммы гомоморфизмов групп поверхностей" [Сибирский Математический Журнал, 30 (1989), №6, 150-171]. *Сибирский математический журнал*, 31(2):222–222, 1990.
36. A. Yu. Olshanskii. Hyperbolicity of groups with subquadratic isoperimetric inequality. *International Journal of Algebra and Computation*, 1(3):281–289, 1991.
37. А. Ю. Ольшанский. Вложение счетных периодических групп в простые 2-порожденные периодические группы. *Украинский математический журнал*, 43(7-8):980–986, 1991.
38. А. Ю. Ольшанский. Периодические фактор-группы гиперболических групп. *Математический сборник*, 182(4):543–567, 1991.
39. S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii. On two problems of H. Neumann and J. Wiegold about linked products of groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 46(2):311–315, 1992.
40. A. Yu. Olshanskii. Addition to my talk at the conference. In *Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 1 (Novosibirsk, 1989)*, volume 131 of *Contemp. Math*, pages 493–497. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
41. A. Yu. Olshanskii. Almost every group is hyperbolic. *International Journal of Algebra and Computation*, 2(1):1–17, 1992.
42. А. Ю. Ольшанский. Вложение периодических групп в простые периодические группы. *Украинский математический журнал*, 44(6):845–847, 1992.
43. A. Yu. Olshanskii. On calculation of width in free groups. In *Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993)*, volume 204 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 255–258. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

44. A. Yu. Olshanskii. On residualizing homomorphisms and G -subgroups of hyperbolic groups. *International Journal of Algebra and Computation*, 3(4):365–409, 1993.
45. K. V. Mikhajlovskii, A. Yu. Olshanskii. Some constructions relating to hyperbolic groups. In *Geometry and cohomology in group theory (Durham, 1994)*, volume 252 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 263–290. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
46. А. Ю. Ольшанский. SQ-универсальность гиперболических групп. *Математический сборник*, 186(8):119–132, 1995.
47. S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii. Hyperbolic groups and their quotients of bounded exponents. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(6):2091–2138, 1996.
48. A. Yu. Olshanskii. Distortion functions for subgroups. In *Geometric group theory down under (Canberra, 1996)*, pages 281–291. de Gruyter, Berlin, 1996.
49. A. Yu. Olshanskii, A. Storozhev. A group variety defined by a semigroup law. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 60(2):255–259, 1996.
50. Г. Н. Аржанцева, А. Ю. Ольшанский. Общность класса групп, в которых подгруппы с меньшим числом порождающих свободны. *Математические заметки*, 59(4):489–496, 1996.
51. S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii. On finite and locally finite subgroups of free Burnside groups of large even exponents. *Journal of Algebra*, 195(1):241–284, 1997.
52. A. Yu. Olshanskii. The growth of finite subgroups in p -groups. In *Groups St. Andrews 1997 in Bath, II*, volume 261 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 579–595. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
53. А. Ю. Ольшанский. Об искривлении подгрупп в конечно-определённых группах. *Математический сборник*, 188(11):51–98, 1997.
54. A. Yu. Olshanskii. A simplification of Golod’s example. In *Groups-Korea ’98 (Pusan)*, pages 263–265. de Gruyter, Berlin, 1998.
55. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Length functions on subgroups in finitely presented groups. In *Groups-Korea ’98 (Pusan)*, pages 297–304. de Gruyter, Berlin, 1998.
56. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Embeddings of relatively free groups into finitely presented groups. In *Combinatorial and computational algebra (Hong Kong, 1999)*, volume 264 of *Contemp. Math*, pages 23–47. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
57. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Quadratic isometric functions of the Heisenberg groups. A combinatorial proof. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 93(6):921–927, 1999.
58. A. Yu. Olshanskii. On the Bass-Lubotzky question about quotients of hyperbolic groups. *Journal of Algebra*, 226(2):807–817, 2000.
59. A. Yu. Olshanskii. Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups. In *Groups, rings, Lie and Hopf algebras (St. John’s, NF, 2001)*, volume 555 of *Math. Appl*, pages 179–187. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.
60. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Length and area functions on groups and quasi-isometric Higman embeddings. *International Journal of Algebra and Computation*, 11(2):137–170, 2001.

-
61. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 7:63–71, 2001.
 62. A. Yu. Olshanskii, A. L. Shmelkin. Comparison of products of the varieties of Lie algebras. *Communications in Algebra*, 29(9):4267–4275, 2001.
 63. J. C. Birget, A. Yu. Olshanskii, E. Rips, M. V. Sapir. Isoperimetric functions of groups and computational complexity of the word problem. *Annals of Mathematics*, 156(2):467–518, 2002.
 64. A. Yu. Olshanskii, Mark V. Sapir. Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (96):43–169(2003), 2002.
 65. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. The conjugacy problem for groups, and Higman embeddings. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 9:40–50, 2003.
 66. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. The conjugacy problem and Higman embeddings. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 170(804):viii+133, 2004.
 67. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Groups with non-simply connected asymptotic cones. In *Topological and asymptotic aspects of group theory*, volume 394 of *Contemp. Math.*, pages 203–208. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
 68. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Subgroups of finitely presented groups with solvable conjugacy problem. *International Journal of Algebra and Computation*, 15(5-6):1075–1084, 2005.
 69. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Groups with small Dehn functions and bipartite chord diagrams. *Geometric and Functional Analysis*, 16(6):1324–1376, 2006.
 70. О. В. Куликова, А. Ю. Ольшанский. О конечной представимости групп $F/[M, N]$. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, (6):19–21, 2006.
 71. Yu. Bahturin, A. Olshanskii. Large restricted Lie algebras. *Journal of Algebra*, 310(1):413–427, 2007.
 72. A. Yu. Olshanskii. Linear automorphism groups of relatively free groups. *Turkish Journal of Mathematics*, 31(suppl.):105–111, 2007.
 73. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. A 2-generated 2-related group with no non-trivial finite quotients. *Algebra and Discrete Mathematics*, (2):111–114, 2007.
 74. Alexander Yu. Olshanskii. Groups with quadratic-non-quadratic Dehn functions. *International Journal of Algebra and Computation*, 17(2):401–419, 2007.
 75. A. Yu. Olshanskii and M. V. Sapir. A finitely presented group with two non-homeomorphic asymptotic cones. *International Journal of Algebra and Computation*, 17(2):421–426, 2007.
 76. A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin. Large groups and their periodic quotients. *Proceedings of the American Mathematical Society. American Mathematical Society*, 136(3):753–759, 2008.
 77. Yu. Bahturin, A. Olshanskii. Schreier rewriting beyond the classical setting. *Sci. China Ser. A*, 52(2):231–243, 2009.
 78. A. Minasyan, A. Yu. Olshanskii, D. Sonkin. Periodic quotients of hyperbolic and large groups. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 3(3):423–452, 2009.
 79. A. Yu. Olshanskii. On products of T -ideals in free algebras and free group algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 213(2):259–263, 2009.

80. A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin, M. V. Sapir. Lacunary hyperbolic groups. *Geometry and Topology*, 13(4):2051–2140, 2009.
81. А. Ю. Ольшанский, М. В. Сапир. О группах типа F_k . *Алгебра и логика*, 48(2):245–257, 2009.
82. Yu. Bahturin, A. Olshanskii. Actions of maximal growth. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 101(1):27–72, 2010.
83. Yu.A. Bahturin, A. Yu. Olshanskii. Filtrations and distortion in infinite-dimensional algebras. *Journal of Algebra*, 327:251–291, 2011.
84. Davis T., Olshanskii A. Subgroup distortion in wreath products of cyclic groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 215:2987–3004, 2011.
85. A. Yu. Olshanskii. Groups with undecidable word problem and almost quadratic Dehn function. *Journal of Topology*, 5(4):785–886, 2012.
86. A. Yu. Olshanskii. Space functions of groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364:4937–4985, 2012.
87. A. A. Klyachko, A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin. On topologizable and non-topologizable groups. *Topology and its Applications*, 160(16):2104–2120, 2013.
88. V. H. Mikaelian, A. Yu. Olshanskii. On abelian subgroups of finitely generated metabelian groups. *Journal of Group Theory*, 16(5):695–705, 2013.
89. A. Yu. Olshanskii. Space functions and space complexity of the word problem in semigroups. *Computational Complexity*, 22(4):771–830, 2013.
90. A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin. A quasi-isometric embedding theorem for groups. *Duke Mathematical Journal*, 162(9):1621–1648, 2013.
91. A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin. C^* -simple groups without free subgroups. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 8:933–983, 2014.
92. Yu. A. Bahturin, A. Yu. Olshanskii. Growth of subalgebras and subideals in free Lie algebras. *Journal of Algebra*, 422:277–305, 2015.
93. N. S. Boatman, A. Yu. Olshanskii. On identities in the products of group varieties. *International Journal of Algebra and Computation*, 25(3):531–540, 2015.
94. T. Davis, A. Olshanskii. Relative subgroup growth and subgroup distortion. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 9(1):237–273, 2015.
95. I. B. Kozhukhov, A. Yu. Olshanskii. Diagonal bi-acts over semigroups with finiteness conditions. *Semigroup Forum*, 91(2):538–542, 2015.
96. A. Yu. Olshanskii. On pairs of finitely generated subgroups in free groups. *Proceedings of the American Mathematical Society. American Mathematical Society*, 143:4177–4188, 2015.
97. В. Д. Мазуров, А. Ю. Ольшанский, А. И. Созутов. О бесконечных группах конечного периода. *Алгебра и логика*, 54(2):243–251, 2015.
98. A. Yu. Olshanskii. Embedding construction based on amalgamations of group relators. *Journal of Topology and Analysis*, 8:1–24, 2016.

99. A. Yu. Olshanskii. Subnormal subgroups in free groups, their growth and co-growth. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 163:499–531, 2017.
100. A. Yu. Olshanskii. Polynomially-bounded Dehn functions of groups. *Journal of Combinatorial Algebra*, 2:311–433, 2018.
101. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. On flat submaps of maps of nonpositive curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, 371(7):4869–4894, 2019.
102. Куликова О. В., Ольшанский А. Ю. О мощностях множества определяющих соотношений группы. *Фундаментальная и прикладная математика*, 22(4):129–136, 2019.
103. A. Yu. Olshanskii. Groups finitely presented in Burnside varieties. *Journal of Algebra*, 560:960–1052, 2020.
104. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Conjugacy problem in groups with quadratic Dehn function. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 10(1):1950023, 2020.
105. A. Yu. Olshanskii. *Geometry of defining relations in groups*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.
106. А. Ю. Ольшанский. *Геометрия определяющих соотношений в группах*. Наука М, 1989.

LIST OF SELECTED WORKS BY A. YU. OLSHANSKII

1. К. К. Андреев, А. Ю. Ольшанский. On the residual property of groups. *Vestnik Mosk. Univ., Ser. Matem.*, 23(2):60–62, 1968. (in Russian)
2. A. Yu. Olshanskii. On a Hanna Neumann’s problem. *Matem. Sborni*, 76:449–453, 1968.(in Russian)
3. A. Yu. Olshanskii. Varieties of residually finite groups. *Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.*, 33:915–927, 1969.(in Russian)
4. A. Yu. Olshanskii. On the problem of a finite basis of identities for groups. *Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.*, 34:376–384, 1970.(in Russian)
5. A. Yu. Olshanskii. Two remarks on varieties of groups. *Vestnik Mosk. Univ., Ser. Matem.*, 26(2):58–63, 1971.(in Russian)
6. A. Yu. Olshanskii. Solvable just-non-Cross varieties of groups. *Matem. Sbornik*, 85(5):115–131, 1971.(in Russian)
7. A. Yu. Olshanskii. On orders of relatively free groups of locally finite varieties. *Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.*, 37(1):89–94, 1973.(in Russian)
8. A. Yu. Olshanskii.. On characteristic subgroups of free groups *Uspekhi Matem. Nauk*, 29(1(175)):179–180, 1974.(in Russian)
9. A. Yu. Olshanskii.. Quasiidentities in finite groups. *Sibirsk. Matem. J.*, 15:1409–1413, 1974.(in Russian)
10. Yu. A. Bakhturin, A. Yu. Olshanskii. Identical relations in finite Lie rings. *Matem. Sbornik*, 96(4):543–559, 1975.(in Russian)

11. Yu. A. Bakhturin, A. Yu. Olshanskii. On residual property and characteristic subalgebras of free Lie algebras *Trudy Sem. im. I. G. Petrovskogo*, 2:145–150, 1976. (in Russian)
12. Yu. A. Bakhturin, A. Yu. Olshanskii. Solvable just-non-Cross varieties of Lie rings. *Matem. Sbornik*, 100(3):384–399, 1976. (in Russian)
13. A. Yu. Olshanskii. To the questions on the number of generators and orders of abelian subgroups of finite p-groups. *Matem. Zametki*, 23(3):337–341, 1978. (in Russian)
14. A. Yu. Olshanskii. On some infinite sets of identities. *Trudy Sem. im. I. G. Petrovskogo*, 3:139–146, 1978. (in Russian)
15. A. Yu. Olshanskii. Infinite groups with cyclic subgroups. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 245(4):785–787, 1979. (in Russian)
16. A. Yu. Olshansky On groups with cyclic subgroups, *Doklady Bulg. Akad. Nauk*, 32(9):1165–1166, 1979. (in Russian)
17. A. Yu. Olshansky An infinite simple Noetherian torsion free group. *Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.*, 43(6):1328–1393, 1979. (in Russian)
18. A. Yu. Olshansky Remark on a countable non-topologizable group. *Vestnik Mosk. Univ., Ser. Matem.*, (3):103–103, 1980. (in Russian)
19. A. Yu. Olshansky To the question on the existence of an invariant mean on a group. *Uspekhi Matem. Nauk*, 35(4(214)):199–200, 1980. (in Russian)
20. A. Yu. Olshansky An infinite group with subgroups of prime orders. *Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.*, 44(2):309–321, 1980. (in Russian)
21. A. Yu. Olshansky Groups of bounded period with subgroups of simple order. *Algebra and Logika*, 21(5):553–618, 1982. (in Russian)
22. A. Yu. Olshansky On Novikov - Adian's theorem. *Matem. Sbornik*, 118(2):203–235, 1982. (in Russian)
23. A. Yu. Olshanskii. On a geometric method in the combinatorial group theory. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983)*, pages 415–424. PWN, Warsaw, 1984.
24. I. S. Ashmanov, A. Yu. Olshansky. On abelian and central extensions of aspherical groups, *Izvestia Vuzov, Matem.*, (11):48–60, 1985. (in Russian)
25. A. Yu. Olshansky. Varieties in which all finite groups are abelian. *Matem. Sbornik*, 126(1):59–82, 1985. (in Russian)
26. G. S. Deryabina, A. Yu. Olshansky. Subgroups of quasifinite groups. *Uspekhi Matem. Nauk*, 41(6(252)):169–170, 1986. (in Russian)
27. A. Yu. Olshansky. The Neumanns - Shmel'kin's theorem. *Vestnik Mosk. Univ., Ser. Matem.*, (6):61–64, 1986. (in Russian)
28. Yu. A. Bahturin, A. Yu. Olshanskii Identities *Algebra – 2*, V. 18 of *VINITI, Moscow*, . 117–240. VINITI, Moscow, 1988.

29. S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii. Some applications of graded diagrams in combinatorial group theory. In *Groups-St. Andrews 1989, Vol. 2*, volume 160 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 258–308. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
30. A. Yu. Olshanskij, A. L. Shmelkin. Infinite groups. In *Algebra, IV*, volume 37 of *Encyclopaedia Math. Sci*, pages 1–95. Springer, Berlin, 1989.
31. A. Yu. Olshanskii. Diagrams of homomorphisms of surface groups. *Sibirsk. Matem. J.*, 30(6):150–171, 1989.(in Russian).
32. A. Yu. Olshanskii. The Mal'tsev problem on operations on groups. *Trudy Sem. im. I. G. Petrovskogo*, (14):225–249, 1989.(in Russian).
33. A. Yu. Olshanskii. Thrifty embeddings of countable groups *Vestnik Mosk. Univ., Ser. Matem.*, (2):28–34, 1989.(in Russian).
34. A. Yu. Olshanskii, A. L. Shmelkin. Infinite groups. В *Algebra – 4*, Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremen. problemy matem., Fundament. napravln., стр. 5–113. VINITI AN SSSR, 1989.(in Russian).
35. A. Yu. Olshanskii. Замечание к моей статье "Diagrams of homomorphisms of surface groups" [*Sibirsk. Matem. J.*, 30 (1989), №6, 150–171]. *Sibirsk. Matem. J.*, 31(2):222–222, 1990.(in Russian).(in Russian).(in Russian).
36. A. Yu. Olshanskii. Hyperbolicity of groups with subquadratic isoperimetric inequality. *International Journal of Algebra and Computation*, 1(3):281–289, 1991.
37. A. Yu. Olshanskii. Embedding of countable periodic groups into 2-generator simple periodic groups. *Ukrain. Matem. J.*, 43(7-8):980–986, 1991.
38. A. Yu. Olshanskii. Periodic quotients of hyperbolic groups. *Matem. Sbornik.*, 182(4):543–567, 1991.
39. S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii. On two problems of H. Neumann and J. Wiegold about linked products of groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 46(2):311–315, 1992.
40. A. Yu. Olshanskii. Addition to my talk at the conference. In *Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 1 (Novosibirsk, 1989)*, volume 131 of *Contemp. Math*, pages 493–497. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
41. A. Yu. Olshanskii. Almost every group is hyperbolic. *International Journal of Algebra and Computation*, 2(1):1–17, 1992.
42. A. Yu. Olshanskii. Embedding of periodic groups into simple periodic groups. *Ukrain. Matem. J.*, 44(6):845–847, 1992.(in Russian).
43. A. Yu. Olshanskii. On calculation of width in free groups. In *Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993)*, volume 204 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 255–258. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
44. A. Yu. Olshanskii. On residuating homomorphisms and G -subgroups of hyperbolic groups. *International Journal of Algebra and Computation*, 3(4):365–409, 1993.
45. K. V. Mikhajlovskii, A. Yu. Olshanskii. Some constructions relating to hyperbolic groups. In *Geometry and cohomology in group theory (Durham, 1994)*, volume 252 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 263–290. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

46. A. Yu. Olshanskii SQ-universality of hyperbolic groups *Matem. Sbornik*, 186(8):119–132, 1995.(in Russian)
47. S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii. Hyperbolic groups and their quotients of bounded exponents. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(6):2091–2138, 1996.
48. A. Yu. Olshanskii. Distortion functions for subgroups. In *Geometric group theory down under (Canberra, 1996)*, pages 281–291. de Gruyter, Berlin, 1996.
49. A. Yu. Olshanskii, A. Storozhev. A group variety defined by a semigroup law. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 60(2):255–259, 1996.
50. G. N. Arzhantseva, A. Yu. Olshanskii Genericity of the class of groups in which subgroups with fewer number of generators are free *Matem. Zametki*, 59(4):489–496, 1996.(in Russian)
51. S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii. On finite and locally finite subgroups of free Burnside groups of large even exponents. *Journal of Algebra*, 195(1):241–284, 1997.
52. A. Yu. Olshanskii. The growth of finite subgroups in p -groups. In *Groups St. Andrews 1997 in Bath, II*, volume 261 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 579–595. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
53. A. Yu. Olshanskii On the subgroup distortion in finitely presented groups *Matem. Sbornik*, 188(11):51–98, 1997.(in Russian).
54. A. Yu. Olshanskii. A simplification of Golod’s example. In *Groups-Korea ’98 (Pusan)*, pages 263–265. de Gruyter, Berlin, 1998.
55. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Length functions on subgroups in finitely presented groups. In *Groups-Korea ’98 (Pusan)*, pages 297–304. de Gruyter, Berlin, 1998.
56. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Embeddings of relatively free groups into finitely presented groups. In *Combinatorial and computational algebra (Hong Kong, 1999)*, volume 264 of *Contemp. Math*, pages 23–47. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
57. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Quadratic isometric functions of the Heisenberg groups. A combinatorial proof. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 93(6):921–927, 1999.
58. A. Yu. Olshanskii. On the Bass-Lubotzky question about quotients of hyperbolic groups. *Journal of Algebra*, 226(2):807–817, 2000.
59. A. Yu. Olshanskii. Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups. In *Groups, rings, Lie and Hopf algebras (St. John’s, NF, 2001)*, volume 555 of *Math. Appl*, pages 179–187. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.
60. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Length and area functions on groups and quasi-isometric Higman embeddings. *International Journal of Algebra and Computation*, 11(2):137–170, 2001.
61. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 7:63–71, 2001.
62. A. Yu. Olshanskii, A. L. Shmelkin. Comparison of products of the varieties of Lie algebras. *Communications in Algebra*, 29(9):4267–4275, 2001.
63. J. C. Birget, A. Yu. Olshanskii, E. Rips, M. V. Sapir. Isoperimetric functions of groups and computational complexity of the word problem. *Annals of Mathematics*, 156(2):467–518, 2002.

-
64. A. Yu. Olshanskii, Mark V. Sapir. Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (96):43–169(2003), 2002.
 65. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. The conjugacy problem for groups, and Higman embeddings. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 9:40–50, 2003.
 66. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. The conjugacy problem and Higman embeddings. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 170(804):viii+133, 2004.
 67. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Groups with non-simply connected asymptotic cones. In *Topological and asymptotic aspects of group theory*, volume 394 of *Contemp. Math*, pages 203–208. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
 68. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Subgroups of finitely presented groups with solvable conjugacy problem. *International Journal of Algebra and Computation*, 15(5-6):1075–1084, 2005.
 69. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Groups with small Dehn functions and bipartite chord diagrams. *Geometric and Functional Analysis*, 16(6):1324–1376, 2006.
 70. O.V.Kulikova, A. Yu. Olshanskii On finite definability of groups $F/[M,N]$. *Vestnik Moskovskogo Uni- versiteta Ser. 1*, (6):19–21, 2006.
 71. Yu. Bahturin, A. Olshanskii. Large restricted Lie algebras. *Journal of Algebra*, 310(1):413–427, 2007.
 72. A. Yu. Olshanskii. Linear automorphism groups of relatively free groups. *Turkish Journal of Mathematics*, 31(suppl.):105–111, 2007.
 73. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. A 2-generated 2-related group with no non-trivial finite quotients. *Algebra and Discrete Mathematics*, (2):111–114, 2007.
 74. Alexander Yu. Olshanskii. Groups with quadratic-non-quadratic Dehn functions. *International Journal of Algebra and Computation*, 17(2):401–419, 2007.
 75. A. Yu. Olshanskii and M. V. Sapir. A finitely presented group with two non-homeomorphic asymptotic cones. *International Journal of Algebra and Computation*, 17(2):421–426, 2007.
 76. A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin. Large groups and their periodic quotients. *Proceedings of the American Mathematical Society. American Mathematical Society*, 136(3):753–759, 2008.
 77. Yu. Bahturin, A. Olshanskii. Schreier rewriting beyond the classical setting. *Sci. China Ser. A*, 52(2):231–243, 2009.
 78. A. Minasyan, A. Yu. Olshanskii, D. Sonkin. Periodic quotients of hyperbolic and large groups. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 3(3):423–452, 2009.
 79. A. Yu. Olshanskii. On products of T -ideals in free algebras and free group algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 213(2):259–263, 2009.
 80. A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin, M. V. Sapir. Lacunary hyperbolic groups. *Geometry and Topology*, 13(4):2051–2140, 2009.
 81. A. Yu. Olshanskii, M.V.Sapir. On F_k -like groups. *Algebra and Logic*, 48(2):245–257, 2009.
 82. Yu. Bahturin, A. Olshanskii. Actions of maximal growth. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 101(1):27–72, 2010.

83. Yu.A. Bahturin, A. Yu. Olshanskii. Filtrations and distortion in infinite-dimensional algebras. *Journal of Algebra*, 327:251–291, 2011.
84. Davis T., Olshanskii A. Subgroup distortion in wreath products of cyclic groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 215:2987–3004, 2011.
85. A. Yu. Olshanskii. Groups with undecidable word problem and almost quadratic Dehn function. *Journal of Topology*, 5(4):785–886, 2012.
86. A. Yu. Olshanskii. Space functions of groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364:4937–4985, 2012.
87. A. A. Klyachko, A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin. On topologizable and non-topologizable groups. *Topology and its Applications*, 160(16):2104–2120, 2013.
88. V. H. Mikaelian, A. Yu. Olshanskii. On abelian subgroups of finitely generated metabelian groups. *Journal of Group Theory*, 16(5):695–705, 2013.
89. A. Yu. Olshanskii. Space functions and space complexity of the word problem in semigroups. *Computational Complexity*, 22(4):771–830, 2013.
90. A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin. A quasi-isometric embedding theorem for groups. *Duke Mathematical Journal*, 162(9):1621–1648, 2013.
91. A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin. C^* -simple groups without free subgroups. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 8:933–983, 2014.
92. Yu. A. Bahturin, A. Yu. Olshanskii. Growth of subalgebras and subideals in free Lie algebras. *Journal of Algebra*, 422:277–305, 2015.
93. N. S. Boatman, A. Yu. Olshanskii. On identities in the products of group varieties. *International Journal of Algebra and Computation*, 25(3):531–540, 2015.
94. T. Davis, A. Olshanskii. Relative subgroup growth and subgroup distortion. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 9(1):237–273, 2015.
95. I. B. Kozhukhov, A. Yu. Olshanskii. Diagonal bi-acts over semigroups with finiteness conditions. *Semigroup Forum*, 91(2):538–542, 2015.
96. A. Yu. Olshanskii. On pairs of finitely generated subgroups in free groups. *Proceedings of the American Mathematical Society. American Mathematical Society*, 143:4177–4188, 2015.
97. V.D. Mazurov, A. Yu. Olshanskii, A.I. Sozutov. On infinite groups of finite exponent. *Algebra and Logica*, 54(2):243–251, 2015. in Russian, English translation in *Algebra and Logic: Volume 54, Issue 2 (2015)*
98. A. Yu. Olshanskii. Embedding construction based on amalgamations of group relators. *Journal of Topology and Analysis*, 8:1–24, 2016.
99. A. Yu. Olshanskii. Subnormal subgroups in free groups, their growth and co-growth. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 163:499–531, 2017.
100. A. Yu. Olshanskii. Polynomially-bounded Dehn functions of groups. *Journal of Combinatorial Algebra*, 2:311–433, 2018.
101. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. On flat submaps of maps of nonpositive curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, 371(7):4869–4894, 2019.

-
102. O. V. Kulikova, A. Yu. Olshanskii On the cardinality of relator sets of groups $\prod_{i,j}^F [N_i, N_j]$ *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, 22(4):129–136, 2019.
103. A. Yu. Olshanskii. Groups finitely presented in Burnside varieties. *Journal of Algebra*, 560:960–1052, 2020.
104. A. Yu. Olshanskii, M. V. Sapir. Conjugacy problem in groups with quadratic Dehn function. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 10(1):1950023, 2020.
105. A. Yu. Olshanskii. *Geometry of defining relations in groups*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.
106. A. Yu. Olshanskii. *Geometry of defining relations in groups*. Moscow, Nauka, 1989.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 53(092);538.9

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-366-372

Юрий Филиппович Головнёв
(к 80-летию)

Ю. В. Бобылев, Н. М. Добровольский, В. А. Панин, А. П. Плотников, И. Ю. Реброва,
Д. А. Нургулеев, Н. Н. Добровольский

Бобылев Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула)

e-mail: bobylev.yu@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: panin@tspu.tula.ru

Плотников Александр Прокопьевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: tspu_aplot@mail.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Нургулеев Дамир Абдулганович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dan@tspu.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

В статье, посвященной 80-летию Юрия Филипповича Головнёва, коллеги, друзья и ученики отразили биографические данные о юбиляре, сведения об учебе в аспирантуре, привели краткие сведения о его научной и педагогической деятельности, об участии в научных конференциях.

Ключевые слова: Ферромагнитные пленки, гетероструктуры, сверхрешетки, халькогениды европия, нанотехнологии, спинтроника, экситоны.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

Ю. В. Бобылев, Н. М. Добровольский, В. А. Панин, А. П. Плотников, И. Ю. Реброва, Д. А. Нургулеев, Н. Н. Добровольский. Юрий Филиппович Головнёв (к 80-летию) // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 366–372.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 53(092);538.9

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-366-372

**Yuri Filippovich Golovnev
(to the 80th anniversary)**

Yu. V. Bobylev, N. M. Dobrovol'skii, V. A. Panin, A. P. Plotnikov, I. Yu. Rebrova,
D. A. Nurguleyev, N. N. Dobrovol'skii

Bobylev Yuriy Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: bobylev.yu@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Panin Vladimir Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: panin@tspu.tula.ru

Plotnikov Alexander Prokopyevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: tspu_aplot@mail.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Nurguleyev Damir Abdulganovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dan@tspu.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

In the article dedicated to the 80th anniversary of Yuri Filippovich Golovnev, colleagues, friends and students reflected biographical information about the hero of the day, information about studies in graduate school, gave brief information about his scientific and pedagogical activities, about participation in scientific conferences.

Keywords: Ferromagnetic films, heterostructures, superlattices, europium chalcogenides, nanotechnology, spintronics, excitons.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

Yu. V. Bobylev, N. M. Dobrovol'skii, V. A. Panin, A. P. Plotnikov, I. Yu. Rebrova, D. A. Nurguleyev, N. N. Dobrovol'skii, 2021, "Yuri Filippovich Golovnev (to the 80th anniversary)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 366–372.

Введение

Головнёв Юрий Филиппович, родился 17 апреля 1941 года.

В 1964 году с отличием окончил Бурятский государственный педагогический институт им. Д. Банзарова с присуждением квалификации учитель физики и химии.



Юрий Филиппович Головнёв

В 1967 году решением диссертационного совета при Красноярском государственном педагогическом институте ему присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук; кандидатская диссертация на тему «Взаимодействие и перемagnичивание слоев в двойных ферромагнитных пленках». Научные руководитель диссертации Головнёва Ю. Ф. на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук — с.н.с. лаборатории физики магнитных явлений Института физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Академии наук СССР, канд. физ.-мат. наук Михаил Кириллович Савченко.

В 1992 году решением Министерства образования Российской Федерации Ю. Ф. Головнёву присвоено ученое звание профессора по кафедре теоретической физики.

В 2008 году решением диссертационного совета при Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана по (двум!) специальностям 01.04.07 — Физика конденсированного состояния, 01.04.10 — Физика полупроводников Юрию Филипповичу присуждена ученая степень доктора физико-математических наук. Докторская диссертация на тему «Наноразмерные гетеросистемы на основе ферромагнитных металлов и полупроводников».

В 1973 году за плодотворную научно-педагогическую деятельность Министерством просвещения СССР Ю. Ф. Головнёву присвоено почетное звание «Отличник народного просвещения».

В 2000 году за многолетнюю плодотворную научно-педагогическую деятельность Министерством образования Российской Федерации профессору Ю. Ф. Головнёву присвоено почетное звание «Отличник высшей школы».

В 2001 году за многолетний труд по подготовке высокопрофессиональных педагогических кадров Министерством образования Российской Федерации Юрий Филиппович награжден Нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования РФ».

В 2009 году за успехи в научно-исследовательской деятельности Российским химическим обществом им. Д. И. Менделеева профессор Ю. Ф. Головнёв награжден Знаком Менделеевского общества.

В 1998 году за многолетнюю плодотворную научно-педагогическую деятельность, большой вклад в подготовку высококвалифицированных специалистов и достижения в работе Министерством общего и профессионального образования РФ Юрию Филипповичу объявлена благодарность.

В 2013 году за добросовестный труд, инициативность, высокие показатели в работе Министерством образования и культуры Тульской области профессор Ю. Ф. Головнёв награжден Почетной грамотой.

С 2016 года он является экспертом РАН (распоряжение Президиума РАН от 27.07.2016 № 10108-509).

У активного члена профсоюза с 1959 профессора Ю. Ф. Головнёва общий научно-педагогический стаж работы в вузах — 51 год, в том числе в ТГПУ им. Л. Н. Толстого — 41 год.

Трудовая деятельность

Трудовую деятельность Головнёв Ю. Ф. начал в 1968 году, и сразу молодой кандидат наук занял должность проректора по НИР БГПИ им. Д. Банзарова (был самым молодым проректором по НИР).

С 17 ноября 1978 года Головнёв Ю. Ф. работал в ТГПУ (ранее ТГПИ) им. Л. Н. Толстого в должностях заведующего кафедрой теоретической физики (с 1978 по 1979 гг., с 1981 по 1987 гг., с 1989 по 1991 гг., с 2006 по 2008 гг.), проректора по учебной работе (с 1979 по 1981 гг.), декана физического факультета (с 1987 по 1989 гг., с 1991 по 2006 гг.), заведующего кафедрой общей и теоретической физики (с 2008 по 2013 гг.), с 2013 по 2020 гг. в должности профессора этой кафедры.

Научная деятельность

Научные исследования в области, которая позже получила название «Нанотехнологии и наноматериалы» профессор Головнёв начал в 1964 году. Вначале он теоретически анализировал процессы перемагничивания двухслойных ферромагнитных пленок с учетом влияния на эти процессы неелевской связи, а затем провел экспериментальную проверку своих результатов. Они изложены в статье [1]. Приемы расчета получили название «Метод вращающихся астронид». Далее был дан теоретический анализ влияния энергии связи и ее измерения в двухслойных наноразмерных ферромагнитных пленках. Этот материал был опубликован в журнале Известия АН СССР. Серия Физика [2].

Начатая ещё в 1964 году Юрием Филиповичем Головнёвым исследовательская работа, ведется в области сверхрешеток на основе ферромагнитных полупроводников, таких как EuO, EuS. Анализируются транспортные свойства этих материалов с учетом влияния обменного взаимодействия между электронами проводимости и ионами европия (s-f-взаимодействия), что лежит в основе новой развивающейся науки «спинтроники». В таких системах нанослой ферромагнитных полупроводников фильтруют определенное направление спинов у туннелирующих электронов проводимости. Это отражено в статьях [5], [6] и др.

Много внимания в этот период реализации перспективных фундаментальных направлений в физике ферромагнитных полупроводников уделяется исследованиям экситонных свойств коллективных образований в сверхрешетках типа EuS-PbS, EuO-SrO. Особое внимание уделяется вопросам бозе-эйнштейновской конденсации триплетных экситонов в наноразмерных гетероструктурах на основе ферромагнитных полупроводников. Эти материалы опубликованы в ряде статей: [7]–[9].

Юрием Филиповичем опубликовано 4 монографии: в 2007 году – «Наноразмерные ферромагнитные гетеросистемы» (262 с.) [4], в 2012 году – «Оптика ферромагнитных наносистем» (272 с.) [10], в 2014 году – «Магнитный экситон» (207 с.) [11] и в 2018 году – «Спинполяризованные электроны» (231 с.) [12].

К настоящему времени им написано и опубликовано около 300 научных работ.

Заметная часть исследований Головнёвым Ю. Ф. и его сотрудниками в XXI столетии проведена по грантам на сумму около 1 млн. руб.

Юрий Филипович является членом оргкомитетов конференций в Москве, Туле, в т.ч. является одним из главных организаторов серии международных конференций «Многомасштабное моделирование структур, строение вещества, наноматериалы и нанотехнологии», проводимых в Туле с 2011 года.

Педагогическая деятельность

Параллельно с научной работой Юрий Филиппович Головнёв руководил научной работой аспирантов. Первый аспирант Головнёва Ю. Ф. был старше его по возрасту. Среди них успешно защитили кандидатские диссертации Левенко В. В., Кудряшева И. Я., Прохорова Т. А., Парамонов А. В., Никольская Л. В., Ермолов А. В., Лаковцев А. Б., Нургулеев Д. А., Сомова Н. Ю.

Юрием Филипповичем основана научная школа «Наноразмерные гетеросистемы», в которую входят 15 сотрудников университета.

В 2011 г. Юрий Филиппович организовал подготовку магистров по профессионально-образовательной программе «Теория и методика обучения нанотехнологии». Осуществлял научное руководство по написанию трех магистерских диссертаций, которые были на «отлично» защищены в 2013 году. Каждый из магистрантов предварительно подготовил и опубликовал по три научно-методические статьи в области нанотехнологий.

Научные связи

Научные связи Юрия Филипповича с научными центрами и научно-образовательными организациями имеют достаточно широкую географию:

- Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
- Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе;
- Институт радиоэлектроники РАН им. В. А. Котельникова;
- Институт химии и технологии редких элементов и минерального сырья им. И. В. Тананаева Кольского научного центра Российской академии наук;
- Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
- Московский государственный институт стали и сплавов (технологический университет);
- Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»;
- Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского;
- Юго-Западный государственный университет;
- Ульяновский государственный университет;
- Башкирский государственный университет;
- Иркутский государственный университет;
- Тульский государственный университет;
- Государственное научно-производственное объединение «Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению».

Заключение

Ректорат ТГПУ им. Л. Н. Толстого, факультет математики, физики и информатики, кафедра общей и теоретической физики, кафедра алгебры, математического анализа и геометрии, ученики желают Юрию Филипповичу дальнейших научных достижений, крепкого здоровья и счастья!

СПИСОК ИЗБРАННЫХ ТРУДОВ Ю. Ф. ГОЛОВНЁВА

1. Ю. Ф. Головнёв. Анализ квазистатического перемагничивания двухслойных пленок с учетом влияния поверхностной энергии связи // Известия вузов. Серия Физика. 1967. В. 6. С. 18–23.
2. Ю.Ф. Головнёв, И.Я. Ганжа, М.К. Савченко и др. Об измерении энергии связи в двухслойных ферромагнитных пленках // Известия АН СССР. Серия Физика. 1967. Т. 31, в. 5. С. 779–782.
3. Ю. Ф. Головнёв. Прямые и межъямные экситоны в магнитных наноструктурах» // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2007. Т. 71, № 11. С. 1664–1666.
4. Головнёв Ю. Ф. Наноразмерные ферромагнитные гетеросистемы, Тула, Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2007, 262 с.
5. Ю. Ф. Головнёв. Влияние инверсионных состояний на энергетический спектр гетероструктур PbS-EuS // Труды МФТИ, 2008, ч. VIII. С. 106–110.
6. Ю. Ф. Головнёв. Резонансный транспорт тока в гетероструктурах на основе ферромагнитных полупроводников // Труды МФТИ. 2010. Т. 2, № 1. С. 28–33.
7. Ю. Ф. Головнёв, А. Б. Лаковцев. Коллективные свойства триплетных экситонов в гетероструктурах на основе ферромагнитных полупроводников // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2011. Т. 75, № 2. С. 194–196.
8. Ю. Ф. Головнёв. Excitons in superlattices on the basis of ferromagnetic semiconductors: Rules of selection // Europium: Compounds, Production and Applications. New York, 2011. P. 281–283.
9. Ю. Ф. Головнёв. Inelastic channels resonant tunneling in heterostructures EuS/PbS // Europium: Compounds, Production and Applications. New York, 2011. P. 277–280.
10. Головнёв Ю. Ф., Лаковцев А. Б. Оптика ферромагнитных наносистем. Изд-во: Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. 272 с.
11. Головнёв Ю. Ф., Сомова Н. Ю. Магнитный экситон: Моногр. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. 207 с.
12. Ю. Ф. Головнёв. Спин-поляризованные электроны: Моногр. / Ю. Ф. Головнёв, Я. В. Власова [Электронный ресурс]. — Электрон. дан. — Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2018. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). — Минимальные систем. требования: Intel Celeron 1700 Mhz и выше, 128 Мб RAM, 300 Мб на винчестере, ОС Microsoft Windows XP, Vista; дисковод CD-ROM 2x и выше, SVGA 64 Mb; мышь. — Загл. с этикетки диска. — ISBN 978-5-6040489-7-9. 218. 231 с.

LIST OF SELECTED WORKS BY YU. F. GOLOVNEV

1. Yu. F. Golovnev, 1967, "Analysis of the quasi-static remagnetization of two-layer films taking into account the influence of the surface binding energy". *Izvestiya vuzov. Physics series*. V. 6. p. 18–23.
2. Yu. F. Golovnev, I. Ya. Ganzha, M. K. Savchenko, etc. , 1967, "On the measurement of the binding energy in two-layer ferromagnetic films", *Izvestiya AN SSSR. Physics series*. Vol. 31, V. 5. pp. 779–782.

3. Yu. F. Golovnev, 2007, "Direct and inter-well excitons in magnetic nanostructures", *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. The series is physical*. Vol. 71, No. 11. pp. 1664–1666.
4. Yu. F. Golovnev, 2007, "Nanoscale ferromagnetic heterosystems", 262 p.
5. Yu. F. Golovnev, 2008, "Effect of inversion states on the energy spectrum of PBS-EUs heterostructures", *Proceedings of the MIPT*, part VIII. pp. 106–110.
6. Yu. F. Golovnev, 2010, "Resonant current transport in heterostructures based on ferromagnetic semiconductors", *Proceedings of the MIPT*, Vol. 2, no. 1. pp. 28–33.
7. Yu. F. Golovnev, A. B. Lakovtsev, 2011, "Collective properties of triplet excitons in ferromagnetic semiconductor-based heterostructures", *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. The series is physical*, Vol. 75, no. 2. pp. 194–196.
8. Yu. F. Golovnev, 2011, "Excitons in superlattices on the basis of ferromagnetic semiconductors: Rules of selection", *Europium: Compounds, Production and Applications*. New York, P. 281–283.
9. Yu. F. Golovnev, 2011, "Inelastic channels resonant tunneling in heterostructures EuS/PbS", *Europium: Compounds, Production and Applications*. New York, P. 277–280.
10. Yu. F. Golovnev, 2012, "Optics of ferromagnetic nanosystems". 272 p.
11. Yu. F. Golovnev, 2014, "Magnetic exciton". 207 p.
12. Yu. F. Golovnev, 2018, "Spin-polarized electrons". 231 p.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 378 (372)

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-373-388

Информатика, математика и логика в аспекте межпредметной и метапредметной образовательной связи

М. М. Абдуразаков, О. Ю. Лягинова, О. Н. Цветкова

Абдуразаков Магомед Мусаевич — доктор педагогических наук, доцент, Российская академия образования (г. Москва).

e-mail: abdurazakov@inbox.ru

Лягинова Ольга Юрьевна — кандидат педагогических наук, доцент, Череповецкий государственный университет (г. Череповец).

e-mail: oiuliaginova@chsu.ru

Цветкова Ольга Николаевна — кандидат педагогических наук, Финансовый университет при Правительстве РФ, (г. Москва).

e-mail: OChvetkova@fa.ru

Аннотация

В статье рассматривается проблема обучения информатике, математике и логике в современном образовании, в частности, в средней общеобразовательной школе в качестве наследуемых от проблем сложившихся соотношений наук информатики и математики, а также порождённых сложившимися формами и практикой обучения в системе общего образования.

Рассматриваются методологические аспекты обучения информатике, математике и логике свойственные им и применяемые к ним в дифференцированной форме:

- *содержательный* подход, свойственный информатике и применяемый в математике и логике;

- *формальный* подход, свойственный математике и применяемый в информатике и логике;

- *социокультурный* подход, свойственный триаде "информатика-математика-логика".

На фоне имеющегося соответствия выделенных подходов (или меры этого соответствия) каждому локальному и независимому элементу триады предполагается наличие идентификации закономерных отношений предмета и субъекта образования, принципов организации процессов реализации методологических знаний на основании этих закономерностей.

Для нашего исследования важно то, что методология и методика каждой дифференцированной системы триады должна содержать все то, что "необходимо и достаточно" для функционирования образовательной системы соответствующего уровня. В этом аспекте в статье отмечается, что математика изучает форму, информатика – форму и содержание. Изучение объектов только по форме ведет к *формализму* в информационной сфере (что недопустимо), поэтому возможная интеграция должна сочетаться с необходимой *дифференциацией*.

Поскольку процессы развития знаний науки, ее методология и методика обучения взаимосвязаны и взаимообусловлены, то представляет безусловно интересным раскрытие потенциала (возможности) межпредметных и метапредметных связей и отношений рассматриваемой триады как близких, но не однородных образовательных систем, имеющих свою предметную специфику содержания, методов и форм обучения. В этом ракурсе предложены возможные пути решения возникших проблем в условиях изменений в школьных программах содержания информатического и математического образования под влиянием требований новых ФГОС и структура предметного обучения информатике и математике, обеспечивающая их эффективность и результативность.

Ключевые слова: информатика, математика, логика, модальность, обучение, форма, содержание, межпредметные связи и отношения.

Библиография: 24 названий.

Для цитирования:

М. М. Абдуразаков, О. Ю. Лягинова, О. Н. Цветкова. Информатика, математика и логика в аспекте межпредметной и метапредметной образовательной связи // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 373–388.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 378 (372)

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-373-388

Computer science, Mathematics and Logic in the aspect of interdisciplinary and metasubject educational communication

M. M. Abdurazakov, O. Yu. Lyaginova, O. N. Tsvetkova

Abdurazakov Magomed Musaevich — doctor of pedagogical sciences, associate professor, Russian Academy of Education (Moscow).

e-mail: abdurazakov@inbox.ru

Lyaginova Olga Yuiryevna — candidate of pedagogical sciences, Cherepovets State University (Cherepovets).

e-mail: s.agayan@gcras.ru

Tsvetkova Olga Nikolaevna — candidate of pedagogical sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).

e-mail: OChvetkova@fa.ru

Abstract

The article discusses the problem of teaching computer science, mathematics and logic in modern education, in particular, in a secondary general education school as inherited from the problems of the existing relationships between the sciences of computer science and mathematics, as well as generated by the prevailing forms and practice of teaching in the system of general education.

The methodological aspects of teaching computer science, mathematics and logic are considered inherent in them and applied to them in a differentiated form:

- a *meaningful* approach inherent in computer science and applied in mathematics and logic;
- a *formal* approach inherent in mathematics and used in computer science and logic;
- a *socio-cultural* approach characteristic of the triad "computer science-mathematics-logic".

Against the background of the existing correspondence of the selected approaches (or the measure of this correspondence) to each local and independent element of the triad, it is assumed that there is an identification of the regular relations between the subject and the subject of education, the principles of organizing the processes of implementing methodological knowledge based on these regularities.

For our study, it is important that the methodology and methodology of each differentiated system of the triad should contain everything that is "necessary and sufficient" for the functioning of the educational system of the corresponding level. In this aspect, the article notes that mathematics studies form, computer science - form and content. The study of objects only in form leads to *formalism* in the information sphere (which is unacceptable), therefore, possible integration must be combined with the necessary *differentiation*.

Since the processes of the development of knowledge of science, its methodology and teaching methods are interrelated and interdependent, it is unconditionally interesting to reveal the potential (possibilities) of intersubject and metasubject connections and relations of the triad under consideration as close, but not homogeneous educational systems that have their own subject. specificity of the content, methods and forms of training. In this perspective, possible ways of solving the problems that have arisen are proposed in the context of changes in the school curricula of the content of information and mathematics education under the influence of the requirements of the new federal state educational standards and the structure of subject teaching in computer science and mathematics, ensuring their efficiency and effectiveness.

Keywords: informatics, mathematics, logic, modality, teaching, form, content, intersubject connections and relations.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

M. M. Abdurazakov, O. Yu. Lyaginova, O. N. Tsvetkova, 2021, "Computer science, Mathematics and Logic in the aspect of interdisciplinary and metasubject educational communication", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 373–388.

Введение

Из выступления В. И. Арнольда на Всероссийской конференции "Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков" в Дубне 21 сентября 2000 года: "Новое поколение детей приходит, которые ничего не знают: ни таблицы умножения, ни евклидовой геометрии — ничего не знают, не понимают и не хотят знать. Они только хотят нажимать на кнопки компьютера, и больше ничего. Что делать, как тут быть?" [1, с. 5]

Информатика, появившаяся в российских школьных программах 35 лет назад, по выражению Ю. И. Журавлева, "остается наиболее изменчивой образовательной областью [2, с. 192], автор также отмечает "фундаментальную важность информатики как части российского школьного образования".

В чистой математике наиболее радикальное изменение состояло в том, что математика включила в сферу своего изучения информационные объекты и процессы; чрезвычайно расширилась область, относящаяся к изучению математическими средствами человеческого мышления, коммуникации и формализованной деятельности, однако, "цели изучения математики в общем плане не изменились, изменились объекты и методы «взрослой» математики" [3]. Именно такое, «компьютерное», развитие математики должно стать основным направлением развития математического образования в ближайшие годы. По мнению ряда авторитетных ученых Ю. И. Журавлева, А. Л. Семенова, И. Г. Семакин, Е. К. Хеннера и других основные вопросы математики, которые целесообразно включить в курс информатики таковы: полнота формализации вычислимости; универсальная вычислимая функция; невычислимость; время вычисления; сложность объектов; игры; отдельные математические алгоритмы и структуры данных [4].

Труды В. И. Арнольда, И. К. Журавлева, Я. И. Хинчина и других ученых убедительно показывают, что прикладная математика не вовсе предметно-ориентированная математика, а область со своими принципами и методами, отличным и от принципов абстрактной математики. Так, например, В. А. Тестов подчеркивает, что по своему содержанию элементы прикладной математики относятся к другим областям сферы познания, и именно "они являются объектами межпредметных отношений математики, привнося в неё не только новые специфические формы, но и содержание среды вместе с содержательным подходом к исследованию" [5].

Проблемам обучения предметов математики и информатики, как и их межпредметной связи, посвящено много исследований с различными подходами, выражением различных взглядов на сами науки математики и информатики и развитие межпредметных отношений в обучении им. в эпоху *цифровизации* в математике появилось множество прикладных систем, порождающих новые межпредметные связи. При этом в обучении информатике осуществляется применение математических компетентностей, в обучении математике – их развитие. Картина несколько исказилась, когда согласно ФГОС предметы математики и информатики оказались в одной образовательной области: к тому времени эти науки уже стали существенно различными дифференцированными системами с разными объектами исследования и концептуальными подходами к нему. Потребовалась совершенно новая концепция межпредметной связи в обучении информатике и математике в контексте предметной дифференциации и системно выраженной интеграции.

Постановка проблемы исследования

В соответствии с ФГОС математика и информатика оказались в одной образовательной области, тем самым обострив проблему их соответствия по содержанию и формам обучения. На самом деле, информатика и математика действительно имеют много общего, дополняя друг друга в своей предметной и методологической части научного познания, порождая и реализуя множество межпредметных связей. Однако они неоднородны, поэтому взаимосвязь их, и, следовательно, одноимённых предметов обучения не линейная. Тема этой взаимосвязи оказалась малоизученной, соответственно, система общего образования оказалась не готова к такому объединению предметов. Поэтому тема данной статьи представляется актуальной, а предлагаемые обсуждению проблемы – полезными для дискуссии.

Цель исследования

Целью данной работы являются:

- 1) Описание информатики, математики и логики как научных систем, имеющих потенциал межнаучной связи.
- 2) Методологическое и содержательное описание систем обучения информатике, математике и логике в контексте их взаимообусловленности и взаимовыражения, и в аспекте реализации имеющегося в них потенциала межпредметности и метапредметности.

Исследовательская методика

Основными **методологическими** подходами, используемыми в данной работе, являются: *Содержательный подход*, направленный на адекватное выражение содержания образования и структуры межпредметного взаимодействия триады.

Формальный подход, направленный на определение оптимальных формальных и логических средств представления межпредметных связей.

Социокультурный подход, направленный на представление компонентов, развитие личной информационной и математической культуры, знаний в процессе реализации и развитии межпредметных связей.

Основу **теоретической базы** настоящего исследования составила научные положения и выводы, представленные в трудах отечественных ученых, занимавшихся вопросами интеграции и дифференциации образования, проблемой осуществления межпредметных и метапредметных связей в обучении, а также нормативные документы в области образования в средней и высшей школах.

Методами, реализующими данные подходы, являются методы систематизации, логического моделирования, выражения явлений социокультуры.

Результаты исследования

Обучение информатике и математике в современной образовательной среде столкнулось с множеством проблем, в настоящее время не только не решённых, но и, видимо, неразрешимых. Это в значительной степени мешает их нормальному становлению и развитию как одних из самых важных и необходимых образовательных предметов в современной информационно-познавательной сфере. На самом деле, данная проблема ещё шире и глубже, упирается в проблему соответствия, вернее, существующего несоответствия информатики и математики как дифференцированных научных систем. Дело в том, что сложилось несколько искажённое представление об этих науках: с одной стороны, своеобразная *информатизация математики*, а с другой стороны, *математизация информатики*. Нарушился естественный процесс развития каждой из этих систем обучения, а новый не сложился и не складывается. Впрочем, у этих систем и своих внутренних проблем предостаточно, просто их стало больше.

С другой стороны, математика и информатика – родственные науки, и это «родство» должно наследоваться системами обучения им. То есть между ними возможна и, следовательно, необходима определённая взаимосвязь, выражаемая и реализуемая в межпредметных отношениях. Но эта связь должна проявляться не механически на формальном уровне, а дифференцированно на уровне межпредметной связи двух самостоятельных автономных систем.

В математике и информатике в последние десятилетия набирает силу тенденция к междисциплинарному синтезу при полном сохранении статуса отдельных дисциплин. Попытки найти общее основание для понятий информатики и математики не увенчались успехом. По мнению Л. Г. Кузнецовой, возможно выделение нескольких уровней этих связей: на уровне инструментов познания, на понятийном уровне, на уровне научных парадигм, "при котором каждый из этих предметов сохранил бы свое концептуальное ядро, понятийный аппарат и инструментарий. При этом их взаимодействие позволило бы повысить эффективность обучения, как информатике, так и математике" [6, с. 32].

Другими словами, связи математики и информатики в научно-образовательной сфере должны формироваться и развиваться на уровне *межсистемной дифференцированной интеграции*, или *интегрированной дифференциации*. Общий инструмент решения разнообразных задач – компьютер не повод объединить информатику и математику.

Математика – это одна из древнейших наук, изучающая мир и его явления, объекты, процессы формальными средствами (по форме), абстрагируясь от содержания. Её объектом исследования является абстрактная информация, представленная в виде элементов и содержащих их множеств, формальные отношения между ними. Предметом математики являются закономерные отношения, выраженные на языке элементарных отношений, в том числе, алгебраических операций. Математика представляется сбалансированной целостной системой, развиваемой по своим, свойственным ей и только ей, законам.

Математика является универсальным языком аналитического исследования. Базовым методологическим подходом математики является формальный подход, реализующий, как и все другие научные методологические подходы, фундаментальный подход научного познания – системный подход.

Формальный подход позволяет вскрывать устойчивые связи между элементами рассматриваемого процесса или явления [7]. То есть, исследование исходит из формы или опоры на форму, определения и использования знаний о ней. Часто педагоги и другие исследователи придают ему негативный аспект как к проявлению формализма. Однако это не верно: применение формального подхода объективно необходимо. Но, при этом это применение должно

быть дифференцированным, продиктовано прагматической целесообразностью и подчинено принципам системного подхода. Форма не может и не должна быть самодостаточной. Поэтому математике, хотя бы в опосредованной форме свойствен и *содержательный подход*.

Изучение математики в школе, да и в ВУЗе тоже, охватывает лишь малую толику её предмета и знаний. Выбирается то, что представляется самым необходимым для развития обучаемых и адаптации их в научно-образовательной и практической сферах. Ведь по выражению великого М. В. Ломоносова математика не только даёт знания, но и *ум в порядок приводит*. Поэтому содержание обучения математики должно удовлетворять соответствующим требованиям: быть последовательным, упорядоченным и способствовать упорядочению мышления и знаний обучаемого, быть доступным его восприятию, соответствовать его возрастному уровню, психологическим признакам.

Необходимо формирование определённого уровня *математической культуры* обучаемого [8, 9], без наличия которой дальнейшее обучение математики становится бессмысленным или малоэффективным. Согласно мнению И. В. Бернатович «формирование математической культуры – это не просто передача определенной порции знаний, умений и навыков, приобретенных человечеством, но и участие в формировании мировоззрения человека» [8]. Например, формирование математической культуры учителя, по мнению М. С. Мирзоева, «предполагает наличие научного мировоззрения, умения с минимальным количеством признаков находить аналогию с другими областями математики, легко усматривать новые формулировки задач, на другом языке находить разные модели задачи, в том числе более простые, более наглядные [10, с. 59].

Исходя из анализа сути принципа культуросообразности применительно к математическому образованию, авторы показывают, что та ступень современной «всечеловеческой» математической культуры, на которой мы находимся в данное время, предъявляет к нам требование, чтобы мы действовали сообразно с ней, если только хотим добиться положительных результатов математического образования [11].

Уместно отметить, что математическая культура содержит элементы этической и эстетической социокультуры [например, см.: Дж. Фон Нейман, Ж. Адамар, В.Г. Болтянский, Е. А. Перминов и др.], получающей отражение в исследовании математики и его результатах.

Личная математическая культура – это личностное выражение общей математической культуры в процессе математического образования и саморазвития личности.

Следовательно, математическая культура – составная часть социокультуры общества, а формирование и развитие личной математической культуры предполагает опору на социокультурный подход.

Нарушение упорядоченности и преемственности в содержании обучения математики может превратить его в хаотическое множество полезного, но не очень понятного материала, нечто вроде «лоскутного одеяла из отдельных» (*выд. авторами*), не очень согласующихся между собой фрагментов. В результате такого подхода к обучению человек не получит полноценных знаний и умений (математической компетентности), а само обучение не решит вторую свою задачу – *ум в порядок приводить*. Следует сосредоточить обучение не на преобразовании математических выражений, которые раньше называли «примерами», а на решении логических задач.

В отличие от безликих «примеров», логические задачи имеют *содержание*, а именно:

1. *семантику*, заключённую в текстовую форму и выражаемую в известных учащимся понятиях и количественных показателях, известных из условия задачи и неизвестных, которые требуется определить;
2. *прагматику*, выражаемую действиями и их результатов, указываемыми в условии задачи.

Для решения такой задачи необходимо установить связи между семантикой и прагматикой, выразив их в математической форме и в уравнениях, если это предусмотрено условием задачи, то есть необходимо достроить *синтаксис* в содержании задачи и применить его для получения искомых результатов.

Следовательно, логическая задача является не только математической, но и *информационной*. Она развивает не только логико-аналитическое мышление, но и *синтетическое* [выделено авт.].

Более того «пример» действительно является конкретным примером действия математического закона (арифметического, алгебраического, геометрического), выраженного в количественной форме, числовой или символьной. То есть решение «примеров» – это работа с *данными*, когда как решение логических задач – это работа со *знанием* и, значит, развитие личных знаний.

Таким образом, предмет математики становится в центре *межпредметной связи* в сфере образования, а сами математические знания и умения приобретают характер *метапредметных и общеобразовательных*.

Как известно, «межпредметные связи в образовательном процессе являются выражением интеграционных процессов, происходящих в науке и в жизни общества» [12], которые играют важную роль в повышении практической и научно-теоретической подготовки обучающихся, способствуют активизации их познавательной деятельности. Поскольку, «процесс обучения математике традиционно включает реализацию связей с различными дисциплинами, а с внедрением ИКТ появляются новые возможности для реализации этих связей» [13], то осуществление межпредметных связей в образовательном процессе накладывает серьёзные требования к педагогам, поскольку перед ними в такой ситуации ставится задача – не только «иметь знания из смежных дисциплин», но и «владеть методологией других дисциплин» [14].

С одной стороны, математическое образование расширяется и углубляется, поскольку получается теперь не только в предмете математики, но и в других образовательных предметах, в частности, в *информатике*. С другой стороны, это накладывает дополнительные требования к обучению математике, к его систематичности, глубине, к *актуальности* содержания. Тогда обучение должно оставаться базовым, применимым ко всему общему образованию и, следовательно, обладать необходимой полнотой.

Информатика – наука молодая, сложившаяся во второй половине прошлого века, ещё не до конца сформировавшаяся и не признанная официально (её нет в номенклатуре наук). До сих пор бытует двойственность её определения, понимания как прикладной системы на стыке теории информации и автоматизации и понимания в качестве *научной системы фундаментального исследования информации и информационной сферы*. В настоящее время преобладает второе из них: информатика является именно теоретической наукой об информации и образуемой ею сфере, развивающейся и исследующей своими средствами и методами информационный мир человека.

Информатика является бурно развивающейся наукой, и многие её базовые понятия уже стали *общенаучными концепциями*, переходящими на уровень философских, универсальных понятий познания.

Информатика – это *метаязык* науки, язык выражения содержания информации посредством формы, метапредметных понятий и отношений.

Целью информатики является определение общих закономерностей информационной сферы, образуемой информацией, целенаправленными информационными процессами и взаимодействием, а также определение закономерностей её базовых компонентов – информации, процессов, отношений, информационного взаимодействия.

Образовавшись в качестве раздела математики, фундаментальная информатика наследует её формальные методы в процессах формализации, моделирования, алгоритмизации. Но в своём развитии информатика далеко ушла от количественных понятий *К. Шеннона*, где

информация фактически отождествлялась с её формой. В таком понимании информации количество информации в хаотического множестве знаков и в книге «Война и мир» Л. Н. Толстого могло быть одинаковым. Поэтому предметы исследования информатики и математики являются в настоящее время не только различными, но и разнородными и, следовательно, *не могут составлять ни единую научную сферу, ни единую образовательную область*. Зато, именно по этой причине, они могут дополнять друг друга на научном и образовательном поле, образуя и реализуя великое множество межпредметных связей и отношений на основе продуктивного межсистемного взаимодействия.

В отличие от математики, *информатика изучает свой предмет и по форме, и по содержанию*. Объектом её исследования является информация, определяемая в неразделимом единстве *формы и содержания*.

Авторы статьи исходят из того, что информатика является единственной наукой, для которой одинаково важны форма и содержание. Поэтому информатике действительно свойственны формализация и абстрактное представление, а, следовательно, привлечение математических средств и методов, применение формального методологического подхода.

Однако главной составляющей информации является содержание: форма нужна для его выражения, формализация – для оптимального выражения и, следовательно, информатике, как науке об информации, наряду с наследуемым ею от математики формальным подходом свойствен *содержательный методологический подход*.

Содержательный подход предусматривает исследование содержания явлений, информации, процессов, свойств их элементов и отношений между ними, получения знаний о них посредством абстракции, анализа компонентов содержания и синтеза заключений и выводов [7]. Следовательно, содержательный подход в исследовании реализуется в сочетании с формальным подходом, а *формальный вне связи с содержательным подходом ведет к формализации*:

1. формальный подход позволяет выразить содержательные свойства исследуемого объекта через формальные связи, отношения;
2. содержательный подход позволяет изучать форму исследуемого объекта через проявление выражаемой ею содержания.

Таким образом, информатика изучает информационную сферу в качестве своего объекта исследования *в сочетании формального и содержательного методологических подходов*, которые, несмотря на кажущуюся альтернативность, не противопоставляются друг другу, а являются взаимодополняемыми. В информатике оба подхода предполагают наличие друг друга.

Кроме того, информатике и, соответственно, исследованию информационной сферы свойствен *социокультурный методологический подход*, сущность которого состоит в рассмотрении общества и человека в единстве культуры и социальности, образуемого и преобразуемого их деятельностью.

Социокультурный подход ориентирует не только на социальные аспекты познавательной деятельности, но и на ее *экологические аспекты, аспекты информационной безопасности мира и общества, на сохранение единства с природой*, ориентирует также на противодействие проявлениям формализма в области познания, технологизации мышления человека, негативным информационно-психологическим воздействиям, на развитие общего и личного *мировоззрения*.

Вышеизложенное означает, что однородности дифференцированных наук информатики и математики (в средствах, формах, методах исследования) нет и быть не может. Всякая попытка создания их искусственной однородности ведёт либо к математизации информатики с явным превалированием формализации и формального подхода в области её исследования,

либо к подмене математики как фундаментальной научной системы её проективным образом в информационной сфере. На наш взгляд, это ведет к научному исследованию в интегрированной информационно-математической сфере в условиях фактической неопределенности относительно применяемых методологических подходов. Но должно быть иначе. Здесь речь не идет о каком-либо противостоянии информатики и математики, что они совсем разные научные системы, и у них нет ничего общего.

Еще в 1986 году А. П. Ершов писал: «Как самостоятельная наука информатика вступает в свои права тогда, когда в рамках соответствующей частной науки строится информационная модель того или иного фрагмента действительности, – в информатике рассматриваются методические принципы построения таких моделей и манипулирования ими» [15].

В работе [16] дается определение «Информационная модель – это то сопряжение, через которое информатика вступает в отношение с частными науками, не сливаясь с ними, и в то же время не вбирая их в себя», "...это методологическая и научная значимость изучения понятия «информационная модель» в курсе информатики. Но весьма важен и прагматический аспект» [17]

Информационный объект представляет собой упорядоченное, структурированное множество элементов и отношений, поэтому *универсальная теория математики, алгебры, формальной логики востребована в информатике и её предмете*. Поэтому здесь либо присутствует определённая преемственность в исследовании, либо осуществляется необходимая интеграция методов и средств математики и информации. В любом случае происходит расширение их *межпредметных связей*, межнаучного взаимодействия.

На основании расширяющихся межпредметных связей математики и информатики, их реализации в интегрированной среде возникают новые дифференцированные научные системы, образуемые на стыке этих наук. Одним из примеров таких систем является **компьютерная алгебра** [9, 18], развиваемая в контексте межпредметной связи информатики (теоретической и прикладной) и математики. Компьютерная алгебра является теоретической наукой, осуществляющей прямой выход на практику. Основным предмет её исследования – знания и абстрактные модели. Знания компьютерной алгебры являются универсальными, общенаучными и общеобразовательными, применимыми в различных научных и прикладных сферах.

Все вышеуказанные внутренние и внешние противоречия информатики как научной системы получили отражение в **обучении** информатике и ИКТ, в содержании и формах этого обучения. В первую очередь, это создание так называемой единой образовательной области, включающей обучение математике и информатике. По сути дела, один из самых необходимых в эпоху глобальной информатизации образовательных предметов – информатика и ИКТ - перестал существовать. Эта очень большая ошибка, к сожалению, закреплённая в новом государственном стандарте. Субъекты образования не смогут получать полноценные знания, необходимые для адаптации в современной информационной сфере, не будет системного формирования личной информационной культуры, соответствующей информационному обществу, культуры информационной безопасности, медиакультуры. Любая учебно-образовательная компетентность может быть сформирована только на базе *знания*. Компетентность – это система, для её формирования и развития недостаточно отдельных данных и сведений. Для этого нужна соответствующая информационная система, и, следовательно, нужны личные знания.

Обучение математики, при этом, ничего не выиграло, не получив от объединения с информатикой никаких преимуществ. Изучение теории информации может быть полезно субъекту математического образования только при наличии базовых знаний математики, тогда, когда он может применить эти знания в процессах этого изучения, реализации межпредметных связей. Но это затруднено, ввиду сложности структуры содержания обучения и недостаточности учебного времени.

Перенасыщенная информатизация и компьютеризация математического образования затрудняет решение второй не менее важной задачи обучения математики: *развитие мышления*

субъекта, аналитического, логического, синтетического, формирование личной *математической культуры* в качестве составной части социокультуры субъекта.

а) без компьютера, смартфона, калькулятора обладатель такого математического образования становится беспомощным;

б) если раньше обучение математике и информатике осуществлялось параллельно, но взаимосвязано, дополняя друг друга и составляя взаимную опору, то теперь это две логически не связанные части предметного обучения, не составляющие единое системное целое.

Необходимо возвращение к прежней структуры предметного обучения, восстановление информатики в качестве отдельного дифференцированного образовательного предмета, и, вместе с этим, восстановление в прежнем виде образовательного предмета математики; создать возможность полноценного ее развития в реализации естественных межпредметных связей, учебно-образовательного взаимодействия, взаимовоздействия, взаимопоры. В учебном времени в современном образовании, в частности, в средней школе ощущается явный дефицит, который возрастает и будет дальше возрастать. Однако экономия учебного времени для одного важного предмета за счёт другого ничего хорошего не даст. Экономия следует искать в другом месте, например, необязательно изучать два иностранных языков в школах РФ!

Необходимо очищение содержания образовательных предметов от сравнительно менее важной информации, статистических данных, сведений. Необходима направленность на знания и сведения, *ведущие к этим знаниям*, дающим им непосредственное описание. Требуется не запоминание информации (сведений, данных), а понимание её, знание, где она хранится, как её найти и получить. С другой стороны, хорошо запоминается то, что востребовано, часто используется, т.е. *знания*. Память субъекта обучения должна заполняться базовыми *знаниями*, и *элементами социокультуры*, необходимыми ему для личного развития и саморазвития при умении ориентации в познавательной среде.

В обучении каждому образовательному предмету имеется *теория и практика*. Обычно практика предполагает применение теории и закрепление получаемых в ней знаний на практических примерах и задачах. В предмете информатики они составляют особое сочетание. Практика в обучении информатике и ИКТ – это деятельность в прикладной области информатики как научной системы, т.е. в информационной сфере. Поскольку эта деятельность основана на применении компьютерной техники и информационно-компьютерных технологий, ИКТ, предполагающей наличие эффективности, рациональности, а также безопасности, то необходимо приобретение субъектом обучения соответствующих умений и навыков, формирование предметной компетентности. То есть обучение информатике в общем образовании, в средней школе предусматривает освоение комплекса ИКТ, *необходимого и достаточного* для начала работы и конструктивного взаимодействия в информационной среде. Развивающейся личности субъекта обучения информатике требуются:

1. *информационная компетентность*, интеллектуальные возможности адаптации в информационной среде, сфере информатизации;
2. *информационная субкультура*, определяющая устойчивую (инвариантную) способность субъекта к адаптации в социально-информационной среде, к развитию и саморазвитию, к познанию и самообразованию [19].

ИКТ-компетентность необходима в учёбе, в работе, в быту, в социальном взаимодействии. В информационном обществе она жизненно необходима каждому человеку. Поэтому она более мотивирована на всех уровнях общего образования, включая самих субъектов образования. Видимо, на этом основании посчитали, что практика, освоение ИКТ более необходима субъекту образования, чем теория, по крайней мере, многие её темы. Однако это путь, ведущий в тупик. Полноценная адаптация человека в современной информационной сфере возможна

лишь при наличии сбалансированного сочетания его знаний о ней, информационной компетентности, личной информационной культуры, включающей культуру информационной безопасности, способности к информационно-правовому саморегулированию и саморазвитию как субъекта этой сферы. Приобретаемую в школе информационную компетентность необходимо развивать, наверное, всю жизнь. Необходимое и достаточное сегодня завтра может оказаться и ни тем, и ни другим, физически и морально устаревшим. Поэтому субъекту образования нужны базовая информационная подготовка и готовность к информационному самообразованию.

Поскольку все прикладные системы (информационные средства, технологии, ресурсы) составляют предмет прикладной информатики, то и практика обучения информатике в современном образовании должна рассматриваться *в аспекте прикладной информатики*. То есть практика обучения информатике может получить следующее представление:

1. теоретическая часть данного обучения, содержание которого составляет некоторое проективное представление теории прикладной информатики, её знаний и систематизированных сведений;
2. практическая часть данного обучения как деятельностное представление системы конструктивного (продуктивного, эффективного, безопасного) взаимодействия с информационными системами и технологиями, составляющими предмет прикладной информатики.

Как видим, между их содержаниями обучения математики и информатики есть много общего, хотя они отнюдь не однородны, «взаимосвязь между информатикой и математикой приобретает более сложные формы. Информатика с её методами и средствами позволяет качественно изменить подход к обучению математики» [13]. Оптимальным представляется обучение этим предметам на принципах преемственности и взаимного дополнения:

1. там, где превалирует форма или она имеет больший приоритет, и соответственно, превалирует формальный подход, более естественным является сфера обучения математики.
2. там, где превалирует содержание или оно имеет больший приоритет, и соответственно, превалирует содержательный подход, более естественным является сфера обучения информатики.

Совместное планирование содержания обучения математике и информатике поможет избежать излишнего дублирования и взаимоиспользования временных и прочих затрат. Например, формальная *алгоритмика* более близка математике, тогда как к информатике относится её соответствующая специфика, связанная с программированием.

Поскольку межпредметные связи математики и информатики получают "достаточно хорошее" *выражение в компьютерной алгебре*, в равной степени необходимой каждой из этих научных систем, то и межпредметные связи их систем обучения следует реализовывать опосредовано через включения отдельных тем в основное содержание предметного обучения, введением специальных курсов, спецсеминаров, организацией специальных *интегрированных уроков*: «Интегрированный урок – это специально организованный урок, цель которого может быть достигнута лишь при объединении знаний из разных предметов, направленный на рассмотрение и решение какой-либо пограничной проблемы» [20].

То есть необходимо более активное *включение содержания компьютерной алгебры в содержание информационно-математического образования*. Это в значительной степени может сделать «возможным формирование специалистов качественно нового уровня – людей, способных интегрировать знания математики и информатики» [21].

Логика является связующим звеном между математикой информатикой, помогая им в реализации их межпредметных связей и участвуя сама в межпредметных связях с ними. То есть парадигма *математика – логика – информатика* порождает множество межпредметных связей, реализуемых ими в их различных сочетаниях.

Логика – это *язык логического вывода и логической оценки суждений человека*, который имеет формальные и содержательные элементы, применяемые в зависимости от целей оценки и вывода.

Математике свойственна *формальная логика*, образующая в ней научную подсистему. Это бинарная *булева алгебра* с двумя логическими значениями: «Истина» и «Ложь».

Информатика тоже использует булеву алгебру, но с учётом своей специфики: с опорой не только на форму (формальный вывод), но и на содержание. То есть предполагается использование, реализация всех семантических и прагматических связей между различными логическими суждениями и выражающими их элементами для максимально возможного упрощения логического вывода. Часто решение логической задачи на этом и заканчивается. Более того, многие логические (и не только логические) задачи как раз и рассчитаны на сообразительность, синтетическое восприятие решающих их, на умение увидеть главное, основное звено – достаточно дёрнуть за «ниточку», и «узелок» сам развязывается.

При этом, опора на содержание свойственна и математике. Каждая логическая задача конкретна, имеет вполне определённое семантическое и прагматическое выражение, т.е. является информационной. Поэтому применение только формального подхода здесь не всегда рационально, надо применять и *содержательный*.

Следовательно, в содержании обучения и математике, и информатике должны присутствовать элементы логики и логического вывода, их применение при решении конкретных задач. При этом не должно быть увлечения формальным выводом, следует опираться на содержание, надо учить учащихся использованию существующих семантических и прагматических связей.

По мнению многих исследователей, в частности китайского учёного *Лю Гана* [22], современному киберпространству, в том числе образовательному киберпространству более соответствует *модальная логика* с определённым набором модальностей типа «Необходимо», «Возможно» вместе с их противоположностями. То есть *модальная логика – это логика необходимого и возможного*, где необходимость выражает внутренний потенциал системы, а возможность – условия среды и требования *социокультуры* в аспекте этики и безопасности отношений (устранения «новых опасностей» киберпространства [23].

Поскольку киберпространство и образовательное киберпространство представляют объективную реальность и весьма востребованы, то субъект образования для продуктивного, рационального и безопасного взаимодействия с ними должен иметь определённые представления о их логике, т.е. о модальной логике, модальностях, их семантике. Эти знания, соответствующие умения, медиакультуру учащиеся также могут получить и сформировать за счёт внедрения содержания компьютерной алгебры в обучение математике и информатике. Как отмечено в [24], «медиакультура рассматривается нами как феномен с разновекторной *модальностью*, которая констатирует "... медиакультуру как искусство возможного в поле человеческой субъективности в эпоху медиа».

Математика даёт формальное описание модальной логики. При этом модальная логика по определению является содержательной и, следовательно, *информационной*. То есть модальная логика является также предметом информатики и компьютерной алгебры, стоит *в центре их межпредметных связей*. В этом качестве она может быть и в центре межпредметной и метапредметной связи образовательных предметов математики и информатики.

Заключение

Поскольку математика и информатика имеют различные базовые методологические подходы, то они сами и соответствующие им образовательные предметы не могут быть однородными и составлять части единого целого в общей образовательной области. Это искусственное образование: они могут развиваться только на системной (межсистемной) основе на принципах межпредметной связи. Имеющийся потенциал их межнаучных отношений и межпредметных связей поможет информатике и математике преодолеть возникающие трудности и успешно развиваться в новых условиях. Необходимо наличие соответствующего *методологического обоснования*, педагогического исследования с отражением в методике и содержании предметного обучения на уровне примерных программ. На уровне конкретных систем обучения необходимы методика реализации межпредметных отношений, соответствующие учебно-методическое обеспечение для дидактически обоснованного развития и реализации их межпредметных связей.

Логика стоит в центре межпредметных отношений математики и информатики, участвуя в их реализации и формировании новых. Развитие киберпространства, образовательного киберпространства предполагает переход к модальной логике, *логике необходимого и возможного*, который в системе межпредметного обучения математике и информатике также можно осуществить через посредство компьютерной алгебры, т.е. через внедрение её элементов в межпредметное содержание этого обучения.

Авторы благодарят анонимных рецензентов, ознакомившихся со статьей и сделавших ценные замечания, позволившие улучшить ее качество.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Нужна ли в школе математика? Стенограмма пленарного доклада (Дубна, 21 сентября 2000 г.). М.: МЦНМО, 2004. - 32 с.
2. Журавлев Ю.И. Фундаментально-математический и общекультурный аспекты школьной информатики // Вопросы образования. 2005. №3. С. 192-200.
3. Семенов А.Л. Современный курс математики и информатики в школе. Вопросы образования. 200. № 1. С. 103–118.
4. Информатика в школе: прошлое, настоящее и будущее: материалы Всеросс. науч.-метод. конф. по вопросам применения ИКТ в образовании, 6–7 февраля 2014 г. / отв. за вып. Ю.А. Аляев, И.Г. Семакин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2014.– 282 с.
5. Тестов В.А. Образование в информационном обществе: переход к новой парадигме [Текст]: монография / В. А. Тестов, О. Б. Голубев ; М-во образования и науки Российской Федерации, Вологодский гос. пед. ун-т. - Вологда : Вологодский гос. пед. ун-т, 2016. - 175 с.
6. Кузнецова Л.Г. Проблемы теории и практики обучения студентов информатике и математике. // Инновационное образование и экономика. №12(1), 2007. – С. 27-38.
7. Коротенков Ю.Г. Информациология как методология познания мира. – М: «Перо», 2017. – 170 с.
8. Бернатович И.В. Математическая культура. Электронный журнал «Педагогика online». – 2016. <http://aneks.spb.ru/metodicheskie-razrabotki-i-posobiia-po-matematike/matematicheskaia-kultura.html>.

9. Коротенков Ю.Г. Абстрактная компьютерная алгебра. Монография. Учебное пособие. Palmarium Academic Publishing, Searbrücken, Германия, 2012. С. 428.
10. Мирзоев М.С. Формирование математической культуры будущего учителя информатики в условиях реализации школьных образовательных стандартов 2-го поколения : Монография / М. С. Мирзоев. – Москва : МПГУ, 2014. – 252 с.
11. Перминов Е.А., Гаджиев Д.Д., Абдуразаков М.М. Об актуальности фундаментализации математической подготовки студентов педагогических направлений в цифровую эпоху. [Текст]. // *Образование и наука*. 2019. Т. 21, № 5. С. 87–112. DOI: 10.17853/1994-5639-2019-5-87-112.
12. Дмитрук И.К. Реализация межпредметных связей предметов естественнонаучного цикла, математики и информатики [Электронный ресурс]. URL: <https://refdb.ru/look/1876453.html>. (Дата обращения 28.08.2020).
13. Носков М.В., Попова В.В. Реализация межпредметных связей математики и информатики в современном учебном процессе // *Вестник КГПУ им. В. П. Астафьева*. – 2015. – № 1 (31). – С. 65–68. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_23099043_51232736.pdf.
14. Копров В.М., Сапир Е.В. Интеграционные процессы в инновационной среде высшей школы // *Интеграция образования*. – 2016. – Т. 20. – № 3 (84). – С. 382–392. DOI: 10.15507/1991-9468.084.020.201603.382-392. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_26693436_84120309.pdf
15. Ершов А.П. Информатика: предмет и понятие // *Кибернетика. Становление информатики*. – М.: Наука, 1986. – С. 28–31.
16. Ершов А.П. О предмете информатики // *Извест. АН СССР*. – 1984. – №2. – С. 113.
17. Гейн А.Г. Ожидания информатики. // *Информатика в школе: прошлое, настоящее и будущее: материалы Всеросс. науч.-метод. конф. по вопросам применения ИКТ в образовании, 6–7 февраля 2014 г.* / отв. за вып. Ю. А. Аляев, И. Г. Семакин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2014. – 282 с. [С. 5-10].
18. Зюзьков В. М. Компьютерная алгебра. Издательство Томского университета 2014. – 121 с.
19. Abdurazakov M.M., Aziyev R.A.S., Muhidinov M.G. The principles of constructing a methodical system for teaching computer science in general educational school. *Espacios*. 2017. Т. 38. № 40. С. 2.
20. ОриентМикс. Межпредметные связи информатики. <https://pandia.ru/text/78/075/42223.php>.
21. Витухновская А.А, Марченко Т.С. Математика и информатика: межпредметные связи. <https://gazeta-licey.ru/flight-scientific-and-pedagogical-gazette/ict-distant-education/czifrovye-resursy-v-obrazovanii/3771-matematika-i-informatika-mezhpredmetnye-svyazi>.
22. Лю Ган. Философия информации и основы будущей китайской философии науки и техники. // *Вопросы философии*. 5 (2007).
23. Шапинская Е.Н. Ескапизм в киберпространстве: безграничные возможности и новые опасности. *Науки о культуре в перспективе «digital humanities»*, Санкт-Петербург. Материалы Международной конференции – СПб: Астерион, 2013.

24. Шайхитдинова С.К. Медиакультура: от «медийной социальности» — к её преодолению. Науки о культуре в перспективе «digital humanities», Санкт-Петербург. Материалы Международной конференции — СПб: Астерион, 2013.

REFERENCES

1. Arnold V.I. Do you need mathematics at school? Transcript of the ple-narrative report (Dubna, September 21, 2000). M., 2004. - 32 p.
2. Zhuravlev Yu.I. Fundamental-mathematical and general cultural aspects of school informatics // Education Issues. 2005. No. 3. p. 192-200.
3. Semenov A.L. Modern course of mathematics and computer science at school. Educational issues. 200. No. 1. p. 103–118.
4. Computer science at school: past, present and future: materials All-Russian. scientific method. conf. on the application of ICT in education, February 6-7, 2014 / otv. for issue. Yu.A. Alyaev, I.G. Semakin; Perm. state nat. issled. un-t. - Perm, 2014. - 282 p.
5. Testov V.A. Education in the information society: transition to a new paradigm [Text]: monograph / V.A. Testov, O.B. Golubev; Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Vologda State ped. un-t. - Vologda: Vo-logodsky state. ped. un-t, 2016 . - 175 p.
6. Kuznetsova L.G. Problems of theory and practice of teaching students computer science and mathematics. // Innovative education and economics. No. 12 (1), 2007. p. 27-38.
7. Korotenko Yu.G. Informationology as a methodology for understanding the world. -M: "Pero", 2017. - 170 p.
8. Bernatovich I.V. Mathematical culture. Electronic journal "Pedagogy online" - 2016. <http://aneks.spb.ru/metodicheskie-razrabotki-i-posobiia-po-matematike/matematicheskaia-kultura.html>.
9. Korotenko Yu.G. Abstract computer algebra. Monograph. Tutorial. Palmarium Academic Publishing, Searbrücken, Germany, 2012. p. 428.
10. Mirzoev M.S. Formation of the mathematical culture of the future teacher of informatics in the context of the implementation of school educational standards of the 2nd generation: Monograph / M.S. Mirzoev. - Moscow: Moscow State Pedagogical University, 2014. - 252 p.
11. Perminov E.A., Gadzhiev D.D., Abdurazakov M.M. On the relevance of the fundamentalization of the mathematical training of students in pedagogical areas in the digital era. // Education and Science. 2019. Vol. 21, No. 5. P. 87–112. DOI: 10.17853/1994-5639-2019-5-87-112.
12. Dmitruk I.K. Realization of intersubject connections of subjects of natural science cycle, mathematics and informatics [Electronic resource]. URL: <https://refdb.ru/look/1876453.html>. (Date of treatment 08/28/2020).
13. Noskov M.V., Popova V.V. Implementation of interdisciplinary connections of mathematics and informatics in the modern educational process. Bulletin of KSPU im. V.P. Astafieva. 2015. No. 1 (31). p. 65–68. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_23099043_51232736.pdf.

14. Koprov V.M., Sapir E.V. Integration processes in the innovative environment of higher education // Integration of education. - 2016. T. 20. - No. 3 (84). p. 382–392. DOI: 10.15507/1991-9468.084.020.201603.382-392. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_26693436_84120309.pdf
15. Ershov A.P. Informatics: subject and concept // Cybernetics. Formation of informatics. - Moscow: Nauka, 1986. p. 28–31.
16. Ershov A.P. On the subject of informatics // Izvestiya. Academy of Sciences of the USSR. - 1984. - No. 2. p. 113.
17. Gein A.G. Informatics expectations. // Computer science at school: past, present and future: materials of the All-Russian. scientific method. conf. on the application of ICT in education, February 6-7, 2014 / otv. for issue. Yu. A. Alyaev, I. G. Semakin; Perm. state nat. issled. un-t. - Perm, 2014. p. 5-10.
18. Zyuzkov V.M. Computer algebra. Tomsk University Publishing House 2014. - 121 p.
19. Abdurazakov M.M., Aziyev R.A-S., Muhidinov M.G. The principles of constructing a methodical system for teaching computer science in general educational school. Espacios. 2017. Vol. 38. No. 40. P. 2.
20. OrientMix. Interdisciplinary communication of informatics. <https://pandia.ru/text/78/075/42223.php>.
21. Vitukhnovskaya A.A., Marchenko T.S. Mathematics and computer science: interdisciplinary connections. <https://gazeta-licey.ru/flight-scientific-and-pedagogical-gazette/ict-distant-education/czifrovye-resursy-v-obrazovanii/3771-matematika-i-informatika-mezhpredmetnye-svyazi>.
22. Liu Gang. Philosophy of information and the foundations of the future Chinese philosophy of science and technology. // Questions of philosophy. 5 (2007).
23. Shapinskaya E.N. Aescapism in Cyberspace: Endless Possibilities and New Dangers. Cultural sciences in perspective "digital humanites", St. Petersburg. Materials of the International Conference - St. Petersburg: Asterion, 2013.
24. Shaikhidinova S.K. Media culture: from "media sociality" to overcoming it. Cultural sciences in perspective "digital humanites", St. Petersburg. Materials of the International Conference - St. Petersburg: Asterion, 2013.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 621.762.227

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-389-401

Математическая оптимизация процесса электродиспергирования отходов сплава ВНЖ ¹

Е. В. Агеева, Е. В. Агеев, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев

Агеева Екатерина Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

e-mail: ageeva-ev@yandex.ru

Агеев Евгений Викторович — доктор технических наук, профессор, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

e-mail: ageev_ev@mail.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Аннотация

В работе определены оптимальных параметров работы установки ЭЭД методом постановкой полного факторного эксперимента по среднему размеру частиц получаемых электроэрозионных материалов. В качестве факторов были выбраны параметры работы установки ЭЭД: напряжение на электродах, ёмкость разрядных конденсаторов и частота следования импульсов. Оптимальные параметры работы установки определяли для двух рабочих сред: воды дистиллированной и керосина осветительного. Согласно проведенной серии опытов определены предельные значения параметра оптимизации по среднему размеру электроэрозионных частиц, которые составили: для воды — 51,38 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 210 В, частоте следования импульсов 230 Гц; для керосина — 61,73 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 160 В и частоте следования импульсов 205 Гц..

Ключевые слова: отходы сплава ВНЖ, электродиспергирование, оптимизация процесса.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:

Е. В. Агеева, Е. В. Агеев, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев. Математическая оптимизация процесса электродиспергирования отходов сплава ВНЖ // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 389–401.

¹Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (НШ-2564.2020.8).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 621.762.227

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-389-401

Mathematical optimization of the process of electrodispergation of the waste of the alloy of the residence permit

E. V. Ageeva, E. V. Ageev, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev

Ageeva Ekaterina Vladimirovna — candidate of technical sciences, associate professor, Southwestern state University (Kursk).

e-mail: ageeva-ev@yandex.ru

Ageev Yevgeniy Viktorovich — doctor of technical sciences, professor, Southwestern state University (Kursk).

e-mail: ageev_ev@mail.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, associate professor, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Gvozdev Alexandr Evgenievich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

Abstract

In this paper, the optimal parameters of the EED installation operation are determined by setting up a complete factor experiment on the average particle size of the obtained electroerosive materials. The parameters of the EED system operation were selected as factors: the voltage at the electrodes, the capacity of the discharge capacitors, and the pulse repetition rate. The optimal parameters of the installation were determined for two working media: distilled water and lighting kerosene. According to a series of experiments to determine the maximum value of the parameter optimization in EDM average size of the particles that made up: for water — 51,38 μm when capacity bit of 65.5 μf capacitors, the voltage across the electrodes 210, the pulse repetition frequency of 230 Hz; for kerosene — 61,73 μm when capacity bit of 65.5 μf capacitors, the voltage across the electrodes 160 and the pulse repetition frequency of 205 Hz.

Keywords: permit alloy, electrodispersion, process optimization.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

E. V. Ageeva, E. V. Ageev, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, 2021, “Mathematical optimization of the process of electrodispergation of the waste of the alloy of the residence permit”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 389–401.

Введение

Существующие промышленные технологии измельчения таких сплавов отличаются крупнотоннажностью, высокими затратами энергии и экологическими проблемами. Поиск новых экологически чистых технологий переработки отходов тяжелых сплавов вольфрама, в том числе сплавов ВНЖ, является актуальным и необходимым [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

Одним из перспективных и промышленно неприменяемых способов измельчения любого электропроводного материала является электроэрозионный способ. К настоящему времени

отсутствуют научно-технические разработки по использованию диспергированных электроэрозией частиц сплава ВНЖ в качестве шихты для производства тяжелых вольфрамовых псевдосплавов и изделий из них. Для этих целей требуется проведение комплексных теоретических и экспериментальных исследований [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20].

Проведение намеченных мероприятий позволит решить проблему переработки отходов тяжелых вольфрамовых сплавов, экономии дорогостоящего вольфрама и повторное его использование.

Требования к шихте для получения изделий заключается в технологичности, поэтому задача сводится к получению частиц необходимой дисперсности — от 40 мкм до 60 мкм. Однако, по результатам проведенных предварительных исследований необходимые значения среднего размера частиц получены не были.

Для прогнозирования высоких физико-механических свойств изделий из полученной шихты требуется провести оптимизацию режимов получения электроэрозионных материалов отходов ВНЖ методом планирования эксперимента [21, 22, 23, 24, 25, 26].

Основной текст статьи

Для шихты одним из основных технологических свойств является оптимальная дисперсность, поэтому оптимизацию процесса получения шихты для производства тяжелых вольфрамовых псевдосплавов (электродиспергирования отходов сплава марки ВНЖ 95) проводили по среднему размеру частиц путем проведения полного факторного эксперимента типа 2^3 .

Регулируя параметры работы установки, в частности напряжение на электродах, емкость разрядных конденсаторов и частоту следования импульсов, можно регулировать массовую производительность процесса. Масса электроэрозионных материалов находится в прямой зависимости от средней массы всех частиц, которая, в свою очередь, находится в зависимости со средним размером частиц и их количеством.

Определение оптимальных параметров работы установки ЭЭД проводили постановкой полного факторного эксперимента (ПФЭ) по среднему размеру частиц получаемых электроэрозионных материалов. В качестве факторов были выбраны параметры работы установки ЭЭД: напряжение на электродах, емкость разрядных конденсаторов и частота следования импульсов.

Оптимальные параметры работы установки определяли для двух рабочих сред: воды дистиллированной и керосина осветительного.

Результаты и их обсуждение

Для оценки влияния указанных факторов и математического описания процесса получения электроэрозионных частиц использована модель первого порядка вида

$$\hat{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + B_{123}X_1X_2X_3, \quad (1)$$

где X_1, X_2, X_3 — факторы;

y — исследуемая величина (средний размер электроэрозионных частиц).

Рассматриваемый пример — полный факторный эксперимент типа 2^3 .

Значения выбранных уровней варьируемых факторов даны в таблице 1.

Таблица 1: Уровни и интервалы варьирования

Уровень варьируемых факторов	Обозначение кодовое	U , В	ν , Гц	C , мкФ
		X_1	X_2	X_3
Основной уровень	0	125	150	44,75
Интервал варьирования	Δx_i	25	50	20,75
Верхний уровень	+1	150	200	65,5
Нижний уровень	-1	100	100	24

Каждый опыт проводили трижды. Размерный анализ электроэрозионных материалов, полученных из отходов псевдосплава ВНЖ, проведен на лазерном анализаторе размеров частиц Analysette 22 NanoТес Матрица планирования эксперимента и результаты испытаний представлены в таблице 2.

Таблица 2: Матрица планирования эксперимента

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}_i$	$S^2_{\text{воспр}}$
1	+	-	-	-	+	+	+	-	4,15	4,12	3,97	4,08	0,0093
									10,4	10,9	10,8	10,7	0,07
2	+	+	-	-	-	-	+	+	22,9	23,5	23,8	23,4	0,21
									26,57	26,80	27,33	26,9	0,05945
3	+	-	+	-	-	+	-	+	4,08	5,6	6,31	5,33	1,2979
									13,25	14,33	13,82	13,8	0,2919
4	+	+	+	-	+	-	-	-	28,1	27,6	27,7	27,8	0,07
									32,57	32,41	32,22	32,4	0,0307
5	+	-	-	+	+	-	-	+	24,7	22,2	22,7	23,2	1,75
									27,51	27,12	27,27	27,3	0,0387
6	+	+	-	+	-	+	-	-	48,2	47,7	47,5	47,8	0,13
									56,45	57,0	55,75	56,4	0,3925
7	+	-	+	+	-	-	+	-	42,8	42,9	44,8	43,5	1,27
									59,12	58,55	58,13	58,6	0,2469
8	+	+	+	+	+	+	+	+	54,4	53,7	52,7	53,6	0,73
									60,87	61,85	61,38	61,2	0,0819

Среднее значение параметра оптимизации по параллельным опытам определяем, например, для первого опыта (вода и керосин соответственно):

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij} = \frac{4,15 + 4,12 + 3,97}{3} = 4,08$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij} = \frac{10,4 + 10,9 + 10,9}{3} = 10,7.$$

Для всех остальных аналогично. Результаты заносим в таблицу 2.

Определяем дисперсию параллельных опытов, например, для первого опыта (вода и керосин соответственно):

$$S^2_{\text{воспр}_i} = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \frac{1}{2} [(4,15 - 4,08)^2 + (4,12 - 4,08)^2 + (3,97 - 4,08)^2] = 0,0093$$

$$S^2_{\text{воспр}_i} = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \frac{1}{2} [(10,4 - 10,7)^2 + (10,9 - 10,7)^2 + (10,8 - 10,7)^2] = 0,07.$$

Для всех остальных аналогично. Результаты заносим в таблицу 2.

Вычисляем сумму дисперсии воспроизводимости для всех опытов (вода и керосин соответственно):

$$\sum_{i=1}^8 S_{\text{воспр}_i}^2 = 0,0093 + 0,21 + 1,2979 + 0,07 + 1,75 + 0,13 + 1,27 + 0,73 = 5,4672$$

$$\sum_{i=1}^8 S_{\text{воспр}_i}^2 = 0,07 + 0,05945 + 0,2919 + 0,0307 + 0,0387 + 0,3925 + 0,2469 + 0,0819 = 1,21205.$$

Из таблицы видно, что для 5 опыта (вода) и 6 опыта (керосин) величина дисперсии гораздо больше остальных. Поэтому осуществляем проверку дисперсий с использованием критерия Кохрена $G_{\text{расч}} < G_{\text{табл}}$ (вода и керосин соответственно):

$$G_{\text{расч}} = \frac{S_{\text{max}}^2}{\sum_{i=1}^n S_{\text{воспр}_i}} = \frac{1,75}{5,4672} = 0,32$$

$$G_{\text{расч}} = \frac{S_{\text{max}}^2}{\sum_{i=1}^n S_{\text{воспр}_i}} = \frac{0,3925}{1,21205} = 0,3238.$$

Табличное значение критерия Кохрена $G_{\text{табл}}$ (при $N = 8, f = m - 1 = 3 - 1 = 2$), равно 0,5157. Так как выполняется условие $G_{\text{расч}} < G_{\text{табл}}$ ($0,32 < 0,5157, 0,3238 < 0,5157$), то принимаем гипотезу об однородности дисперсий.

Вычисляем дисперсию воспроизводимости для всех экспериментов (вода и керосин соответственно):

$$S_{\text{воспр}}^2 = S_{(y)}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{\text{воспр}_i}^2 = \frac{5,4672}{8} = 0,6834$$

$$S_{\text{воспр}}^2 = S_{(y)}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{\text{воспр}_i}^2 = \frac{1,21205}{8} = 0,1515.$$

Вычисляем ошибку всего эксперимента (вода и керосин соответственно):

$$S(y) = \sqrt{S_{(y)}^2} = \sqrt{0,6834} \approx 0,83$$

$$S(y) = \sqrt{S_{(y)}^2} = \sqrt{0,1515} \approx 0,39.$$

Рассчитываем коэффициенты уравнения (вода и керосин соответственно).

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_1^N X_{in} \bar{y}_i, \quad b_0 = \frac{1}{N} \sum_1^N \bar{y}_i, \quad b_{ij} = \frac{1}{N} \sum_1^N X_{in} X_{jn} \bar{y}_i$$

$$b_1 = \frac{-4,08 + 23,4 - 5,33 + 27,8 - 23,2 + 47,8 - 43,5 + 53,6}{8} = 9,56$$

$$b_1 = \frac{-10,7 + 26,9 - 13,8 + 32,4 - 27,3 + 56,4 - 58,6 + 61,2}{8} = 8,31$$

Аналогично рассчитываются коэффициенты b_2 и b_3 (вода и керосин соответственно).

$$b_0 = \frac{4,08 + 23,4 + 5,33 + 27,8 + 23,2 + 47,8 + 43,5 + 53,6}{8} = 28,59$$

$$b_0 = \frac{10,7 + 26,9 + 13,8 + 32,4 + 27,3 + 56,4 + 58,6 + 61,2}{8} = 35,91$$

$$b_{12} = \frac{4,08 - 23,4 - 5,33 + 27,8 + 23,2 - 47,8 - 43,5 + 53,6}{8} = -1,415$$

$$b_{12} = \frac{10,7 - 26,9 - 13,8 + 32,4 + 27,3 - 56,4 - 58,6 + 61,2}{8} = -3,01$$

После расчета всех коэффициентов уравнение (1) принимает вид (вода и керосин соответственно):

$$\hat{y} = 28,59 + 9,56X_1 + 3,97X_2 + 13,44X_3 - 1,415X_1X_2 - 0,89X_1X_3 + 2,56X_2X_3 - 2,21X_1X_2X_3 \quad (2)$$

$$\hat{y} = 35,91 + 8,31X_1 + 5,59X_2 + 14,96X_3 - 3,01X_1X_2 - 0,39X_1X_3 + 3,44X_2X_3 - 3,61X_1X_2X_3 \quad (3)$$

Проверяем статистическую значимость коэффициентов.

Проверку проводим с помощью t -критерия. Для полного факторного эксперимента ошибки всех коэффициентов равны между собой и определяются следующим образом (вода и керосин соответственно):

$$S(b_i) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nm}} = \frac{0,83}{\sqrt{8 \cdot 3}} = 0,17$$

$$S(b_i) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nm}} = \frac{0,39}{\sqrt{8 \cdot 3}} = 0,08$$

Далее определяем доверительный интервал длиной $2 \Delta b_i$ (вода и керосин соответственно):

$$\Delta b_i = t_{\text{табл}} S(b_i) = 2,12 \cdot 0,17 = 0,36$$

$$\Delta b_i = t_{\text{табл}} S(b_i) = 2,12 \cdot 0,08 = 0,17$$

Табличное значение $t_{\text{табл}}$ выбираем для числа степеней свободы $f = N \times (m-1) = 8 \times (3-1) = 16$ и по принятому уровню значимости 0,05, т.е. $t_{\text{табл}} = 2,12$. Таким образом, все коэффициенты уравнения (2), моделирующего полный факторный эксперимент в дистиллированной воде оказались статистически значимыми. Все коэффициенты уравнения (3), моделирующего полный факторный эксперимент в керосине осветительном, оказались статистически значимыми. После исключения статистически незначимого коэффициента b_3 уравнение регрессии принимает вид (вода и керосин соответственно):

$$\hat{y} = 28,59 + 9,56X_1 + 3,97X_2 + 13,44X_3 - 1,415X_1X_2 - 0,89X_1X_3 + 2,56X_2X_3 - 2,21X_1X_2X_3 \quad (3)$$

$$\hat{y} = 35,91 + 8,31X_1 + 5,59X_2 + 14,96X_3 - 3,01X_1X_2 - 0,39X_1X_3 + 3,44X_2X_3 - 3,61X_1X_2X_3 \quad (4)$$

Проверяем уравнения на адекватность.

Данная проверка проводится с целью доказательства пригодности полученного уравнения регрессии для описания экспериментальных данных с заданной точностью. Для этого оценивают отклонения вычисленных по уравнениям регрессии (3 и 4) значений функции оптимизации $\hat{y}$ от экспериментально установленных $\bar{y}$.

Для первого опыта уравнение регрессии (3 и 4) будет иметь вид (вода и керосин соответственно) (т.е. вместо значений X_1, X_2, X_3 и т.д. выбираем + или – согласно 1 строке (1 опыта)).

$$\hat{y}_1 = 28,59 - 9,56 - 3,97 - 13,44 - 1,42 - 0,89 + 2,56 + 2,21 = 4,08$$

Таблица 3: Сводные данные

№ опыта	$\bar{y}_i$		$\bar{y}_i$	
	вода	керосин	вода	керосин
1	4,08	10,7	4,085	10,7
2	23,4	26,9	23,395	26,9
3	5,33	13,8	5,315	13,8
4	27,8	32,4	27,805	32,4
5	23,2	27,3	23,205	27,3
6	47,8	56,4	47,795	56,38
7	43,5	58,6	43,515	58,6
8	53,6	61,2	53,603	61,2

$$\hat{y}_1 = 35,91 - 8,31 - 5,59 - 14,96 - 3,01 - 0,39 + 3,44 + 3,61 = 10,7$$

Аналогично рассчитываются значения для других опытов. Результаты расчетов представлены в таблице 3.

Для оценки отклонений используют критерий Фишера F -критерий.

Находят значения F -критерия Фишера (дисперсное отношение):

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_{\text{восп}}^2} = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S^2(y)},$$

где $S_{\text{ад}}^2 = \frac{m_i}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y})^2$ — дисперсия адекватности;

m_i — число параллельных опытов в i -й строчке матрицы планирования;

$\bar{y}_i$ — среднее арифметическое функции отклика (из m параллельных опытов) значение функции отклика;

$\hat{y}$ — предсказанное по уравнению (3 и 4) в i -м опыте;

l — число значимых коэффициентов в уравнении регрессии;

N — число независимых опытов.

Величина дисперсии адекватности (вода и керосин соответственно):

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{m_i}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y})^2 = \frac{3}{8-7} \sum_{i=1}^8 (4,08 - 4,805)^2 + (23,40 - 23,395)^2 + (5,33 - 5,315)^2 + \\ + (27,80 - 27,805)^2 + (23,20 - 23,205)^2 + (47,80 - 47,795)^2 + (43,50 - 43,513)^2 + \\ + (53,6 - 53,605)^2 = 0,0018$$

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{m_i}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y})^2 = \frac{3}{8-7} \sum_{i=1}^8 (10,7 - 10,7)^2 + (26,9 - 26,9)^2 + (13,8 - 13,8)^2 + \\ + (32,4 - 32,4)^2 + (27,3 - 27,3)^2 + (56,4 - 56,38)^2 + (58,6 - 58,6)^2 + (61,2 - 61,2) = 0,0012$$

Для того чтобы воспользоваться таблицей F -критерия, необходимо определить число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ и $f_{\text{восп}}$: $f_{\text{ад}} = N - 1$. $f_{\text{ад}} = 8 - 7 = 1$, $f_{\text{восп}} = N \times (m - 1) = 8(3 - 1) = 16$.

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_{1\text{ад}}^2}{S^2(y)} = \frac{0,0018}{0,175} = 0,0103$$

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_{1\text{ад}}^2}{S^2(y)} = \frac{0,0012}{0,175} = 0,0068.$$

Исходя из найденных значений $f_{ад}$, $f_{восп}$ находим по таблице $F_{табл} = 4,49$. Если $F_{расч} < F_{табл}$, то уравнение считают адекватным. В рассматриваемых примерах $0,0103 < 4,49$, $0,0068 < 4,49$, значит уравнения адекватны.

Полученные уравнения были использованы для крутого восхождения по поверхности отклика. Крутое восхождение начинали из нулевой точки (основные уровни): $X_1 = 120$ В, $X_2 = 150$ Гц, $X_3 = 44,75$ мкФ (таблица 4).

Таблица 4: Расчет крутого восхождения (дистиллированная вода)

Наименование	X_1 (У, В)	X_2 (f, Гц)	X_3 (С, мкФ)	Y
Основной уровень	125	150	44,75	—
Коэффициент b_i	9,56	3,97	13,14	—
Интервал варьирования ξ_i	25	50	20,75	—
$b_i \cdot \xi_i$	239	198,5	272,7	—
Шаг Δi	2,39	1,99	2,73	—
Округленный шаг	2	2	3	—
Реализованный опыт 1	127	152	47,75	39,01
Реализованный опыт 2	129	154	50,75	42,27
Реализованный опыт 3	131	156	53,75	48,78
Реализованный опыт 4	133	158	56,75	48,60
Реализованный опыт 5	135	160	59,75	51,63
Реализованный опыт 41(max)	210	230	65,5	51,38

Согласно проведенной серии опытов принято предельное значение параметра оптимизации Y, которое составило 61,73 мкм. Таким образом, оптимальными параметрами для процесса получения электроэрозионного материала ВНЖ 95в керосине осветленном: ёмкость разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжение на электродах 160 В, частота следования импульсов 205 Гц.

Далее представлены результаты экспериментальных исследований состава, структуры и свойств диспергированных электроэрозией частиц сплава ВНЖ в воде дистиллированной и керосине осветительном, полученных при оптимальных режимах.

Таблица 5: Расчет крутого восхождения (керосин осветительный)

Наименование	X_1 (У, В)	X_2 (f, Гц)	X_3 (С, мкФ)	Y
Основной уровень	125	150	44,75	—
Коэффициент b_i	8,31	5,59	14,96	—
Интервал варьирования ξ_i	25	50	20,75	—
$b_i \cdot \xi_i$	207,75	279,50	310,42	—
Шаг Δi	2,0775	2,795	3,1042	—
Округленный шаг	2	3	3	—
Реализованный опыт 1	127	153	47,75	39,01
Реализованный опыт 2	129	156	50,75	42,27
Реализованный опыт 3	131	159	53,75	48,78
Реализованный опыт 4	133	162	56,75	48,60
Реализованный опыт 5	135	165	59,75	51,63
Реализованный опыт 18(max)	160	205	65,5	61,73

Заключение

1. Проведено определение оптимальных параметров работы установки ЭЭД методом постановкой полного факторного эксперимента по среднему размеру частиц получаемых электроэрозионных материалов. В качестве факторов были выбраны параметры работы установки ЭЭД: напряжение на электродах, емкость разрядных конденсаторов и частота следования импульсов. Оптимальные параметры работы установки определяли для двух рабочих сред: воды дистиллированной и керосина осветительного.
2. Согласно проведенной серии опытов определены предельные значения параметра оптимизации по среднему размеру электроэрозионных частиц, которые составили: для воды — 51,38 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 210 В, частоте следования импульсов 230 Гц; для керосина — 61,73 мкм при ёмкости разрядных конденсаторов 65,5 мкФ, напряжении на электродах 160 В и частоте следования импульсов 205 Гц.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агеев Е. В., Гадалов В. Н., Семенихин Б. А., Агеева Е. В., Латыпов Р. А. Получение износостойких порошков из отходов твердых сплавов // Заготовительные производства в машиностроении. – 2010. – №12. – С. 39–44.
2. Агеев Е. В., Гадалов В. Н., Семенихин Б. А., Агеева Е. В., Латыпов Р. А. Рентгеноструктурный анализ порошков, полученных электроэрозионным диспергированием твердого сплава // Заготовительные производства в машиностроении. – 2011. – №2. – С. 42–44.
3. Агеев Е. В., Гадалов В. Н., Семенихин Б. А., Агеева Е. В., Латыпов Р. А. Рентгеноспектральный микроанализ частиц порошков, полученных электроэрозионным диспергированием твердого сплава // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2011. – №2(74). – С. 13–16.
4. Агеев Е. В., Семенихин Б. А., Агеева Е. В., Латыпов Р. А. Оценка эффективности применения твердосплавных порошков, полученных электроэрозионным диспергированием отходов твердых сплавов, при восстановлении и упрочнении деталей композиционными гальваническими покрытиями // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2011. – №9(81). – С. 14–16.
5. Агеев Е. В., Латыпов Р. А., Агеева Е. В. Исследование свойств электроэрозионных порошков и твердого сплава, полученного из них изостатическим прессованием и спеканием // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. – 2014. – №6. – С. 51–55.
6. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Агеев Е. В. Морфология и элементный состав медных электроэрозионных порошков, пригодных к спеканию // Вестник машиностроения. – 2014. – №10. – С. 66–68.
7. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Воробьев Е. А. Рентгеноспектральный микроанализ порошка, полученного из отходов быстрорежущей стали электроэрозионным диспергированием в керосине // Вестник машиностроения. – 2014. – №11. – С. 71–72.
8. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Карпенко В. Ю. Рентгеноструктурный анализ порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов электроэрозионным диспергированием в водной среде // Вестник машиностроения. – 2014. – №12. – С. 64–65.

9. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Агеев Е. В. Исследование формы и морфологии электроэрозионных медных порошков, полученных из отходов // Вестник машиностроения. – 2014. – №8. – С. 73–75.
10. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Агеев Е. В. Исследование распределения микрочастиц по размерам в порошках, полученных электроэрозионным диспергированием медных отходов // Вестник машиностроения. – 2014. – №9. – С. 63–64.
11. Агеев Е. В., Агеева Е. В., Воробьев Е. А. Гранулометрический и фазовый составы порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов инструментальных материалов электроэрозионным диспергированием в керосине // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 11–14.
12. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Карпенко В. Ю. Изучение формы и элементного состава порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов инструментальных материалов электроэрозионным диспергированием в водной среде // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 14–17.
13. Хорьякова Н. М., Агеев Е. В., Агеева Е. В. Электроэрозионные медные порошки для гальванических покрытий // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 18–20.
14. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Воробьев Е. А., Осьминина А. С. Получение износостойких покрытий с использованием электродов из твердосплавных электроэрозионных порошков и их исследование // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 21–23.
15. Агеев Е. В., Агеева Е. В., Карпенко В. Ю., Осьминина А. С. Получение заготовок твердого сплава из порошков, полученных электроэрозионным диспергированием вольфрамсодержащих отходов // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 24–27.
16. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Хорьякова Н. М. Изготовление заготовок из медных порошков, полученных электроэрозионным диспергированием отходов электротехнической меди и изучение их свойств // Научные технологии в машиностроении. – 2014. – №10(40). – С. 10–13.
17. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Карпенко В. Ю. Размерный анализ частиц порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов электроэрозионным диспергированием в воде // Вестник машиностроения. – 2015. – №3. – С. 45–46.
18. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Воробьев Е. А. Анализ формы и морфологии частиц порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов электроэрозионным диспергированием в керосине // Вестник машиностроения. – 2015. – №7. – С. 72–73.
19. Агеева Е. В., Латышов Р. А., Агеев Е. В., Алтухов А. Ю., Карпенко В. Ю. Оценка износостойкости электроискровых покрытий, полученных с использованием электроэрозионных порошков быстрорежущей стали // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2015. – №1. – С. 71–76.
20. Агеева Е. В., Латышов Р. А., Агеев Е. В., Алтухов А. Ю., Карпенко В. Ю. Характеристики электроискровых покрытий, полученных электродами из электроэрозионных порошков быстрорежущей стали // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2015. – №2. – С. 62–65.

21. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Латыпов Р. А. Оценка износостойкости электроискровых покрытий, полученных с использованием электроэрозионных порошков быстрорежущей стали // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия
22. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Пикалов С. В., Агеев Е. В. Состав, структура и свойства медного электроэрозионного порошка, полученного в среде керосина // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2015. – №4. – С. 4–8.
23. Левинсон Е. М. Электроэрозионная обработка металлов. – Л.: Лениздат, 1961. – 184 с.
24. Бурцев В. А. Электрический взрыв проводников и его применение в электрофизических установках / В. А. Бурцев, Н. В. Калинин, А. В. Лучинский. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 288 с.
25. Седой В. С., Валевич В. В. Получение высокодисперсных металлических порошков методом электрического взрыва в азоте пониженного давления // Письма в ЖТФ. – 1999. – Т.25. – Вып. 14. – С. 81–84.
26. Хольм Р. Электрические контакты. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 464 с.

REFERENCES

1. Ageev E.V., Gadalog V.N., Semenikhin B.A., Ageeva E.V., Latypov R.A. 2010, «Obtaining wear-resistant powders from solid alloy waste», *Procurement in mechanical engineering*, No.12, pp. 39-44.
2. Ageev E.V., Gadalog V.N., Semenikhin B.A., Ageeva E.V., Latypov R.A. 2011, «X-ray Structural analysis of powders obtained by electroerosive dispersion of a hard alloy», *Procurement in mechanical engineering*, No.2, pp. 42-44.
3. Ageev E.V., Gadalog V.N., Semenikhin B.A., Ageeva E.V., Latypov R.A. 2011, «X-ray Spectral microanalysis of powder particles obtained by electroerosive dispersion of hard alloy», *Strengthening technologies and coatings*, No.2(74), pp. 13-16.
4. Ageev E.V., Semenikhin B.A., Ageeva E.V., Latypov R.A. 2011, «Evaluation of the effectiveness of the use of hard-alloy powders obtained by electroerosive dispersion of solid-alloy waste in the restoration and strengthening of parts with composite electroplating coatings», *Hardening technologies and coatings*, No.9(81), pp. 14-16.
5. Ageev E.V., Latypov R.A., Ageeva E.V. 2014, «Investigation of properties of electroerosive powders and hard alloy obtained from them by isostatic pressing and sintering», *News of higher educational institutions. Nonferrous metallurgy*, No.6, pp. 51-55.
6. Ageeva E.V., Horakova N.M. Ageev E.V. 2014, «Morphology and elemental composition of copper electroerosion powders suitable for sintering», *Bulletin of mechanical engineering*, No.10, pp. 66-68.
7. Ageeva E.V., Ageev E.V., Vorobyov E.A. 2014, «X-ray Spectral microanalysis of a powder obtained from high-speed steel waste by electroerosive dispersion in kerosene», *Bulletin of mechanical engineering*, No.11, pp. 71-72.

8. Ageeva E.V., Ageev E.V., Karpenko V.Yu. 2014, «X-ray Structural analysis of a powder obtained from tungsten-containing waste by electroerosive dispersion in an aqueous medium», *Bulletin of mechanical engineering*, No.12, pp. 64-65.
9. Ageeva E.V., Horyakova N.M., Ageev E.V. 2014, «Investigation of the form and morphology of electroerosive copper powders obtained from waste», *Bulletin of mechanical engineering*, No.8, pp. 73-75.
10. Ageeva E.V., Horyakova N.M., Ageev E.V. 2014, «Investigation of the size distribution of microparticles in powders obtained by electroerosive dispersion of copper waste», *Bulletin of mechanical engineering*, No.9, pp. 63-64.
11. Ageev E.V., Ageeva E.V., Vorobiev E.A. 2014, «Granulometric and phase compositions of powder obtained from tungsten-containing waste of tool materials by electroerosive dispersion in kerosene», *Hardening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 11-14.
12. Ageeva E.V., Ageev E.V., Karpenko V.Yu. 2014, «Study of the form and elemental composition of a powder obtained from tungsten-containing waste of tool materials by electroerosive dispersion in an aqueous medium», *Hardening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 14-17.
13. Horyakova N.M., Ageev E.V., Ageeva E.V. 2014, «Electroerosive copper powders for electroplating coatings», *Strengthening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 18-20.
14. Ageeva E.V., Ageev E.V., Vorobyov E.A., Osminina A.S. 2014, «Obtaining wear-resistant coatings using electrodes from hard-alloy electroerosive powders and their research», *Hardening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 21-23.
15. Ageev E.V., Ageeva E.V., Karpenko V.Yu., Osminina A.S. 2014, «Obtaining hard alloy billets from powders obtained by electroerosive dispersion of tungsten-containing waste», *Hardening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 24-27.
16. Ageeva E.V., Ageev E.V., Horyakova N.M. 2014, «Production of blanks from copper powders obtained by electroerosive dispersion of waste electrical copper and study of their properties», *Science-Intensive technologies in mechanical engineering*, No.10(40), pp. 10-13.
17. Ageeva E.V., Ageev E.V., Karpenko V.Yu. 2015, «Dimensional analysis of powder particles obtained from tungsten-containing waste by electroerosive dispersion in water», *Bulletin of mechanical engineering*, No.3, pp. 45-46.
18. Ageeva E.V., Ageev E.V., Vorobiev E.A. 2015, «Analysis of the shape and morphology of powder particles obtained from tungsten-containing waste by electroerosive dispersion in kerosene», *Bulletin of mechanical engineering*, No.7, pp. 72-73.
19. Ageeva E.V., Latypov R.A., Ageev E.V., Altukhov A.Yu., Karpenko V.Yu. 2015, «Assessment of wear resistance of electric spark coatings obtained using high-speed steel electroerosive powders», *News of higher educational institutions. Powder metallurgy and functional coatings*, No.1, pp. 71-76.
20. Ageeva E.V., Latypov R.A., Ageev E.V., Altukhov A.Yu., Karpenko V.Yu. 2015, «Characteristics of electric spark coatings obtained by electrodes from high-speed steel electroerosive powders», *News of higher educational institutions. Powder metallurgy and functional coatings*, No.2, pp. 62-65.

21. Ageeva E.V., Ageev E.V., Latypov R.A. 2015, «Evaluation of wear resistance of electric spark coatings obtained using high-speed steel electroerosive powders», *News of higher educational institutions. Powder metallurgy and functional coatings*, No.3, p. 45.
22. Ageeva E.V., Horakova N.M. Pikalov, S.V., Ageev E.V. 2015, «Composition, structure and properties of copper spark erosion powder obtained in an environment of kerosene», *News of higher educational institutions. Powder metallurgy and functional coatings*, No.4, pp. 4-8.
23. Levinson E.M. 1961, *Electroerosion treatment of metals*. Leningrad, Lenizdat. 184 p.
24. Burtsev V.A., Kalinin N.V., Luchinsky A.V. 1990, *Electric explosion of conductors and its application in electrophysical installations*. Moscow, Energoatomizdat. 288 p.
25. Gray V.S., Valevich V.V. 1999, «Preparation of highly dispersed metal powders method of electric explosion in the nitrogen of low pressure», *Letters to the ZhTF*, Vol.25, No.14, pp. 81-84.
26. Holm R. 1961, *Electrical contacts*. Moscow, Foreign literature Publishing house. 464 p.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 533.9; 537.87

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-402-416

Компьютерное моделирование возбуждения электромагнитных колебаний открытого плазменного резонатора

Ю. В. Бобылев, Т. Г. Мещерякова, В. А. Панин

Бобылев Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: bobylev.yu@mail.ru

Мещерякова Татьяна Геннадьевна — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: tatyanka.parshkova@mail.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: panin@tspu.tula.ru

Аннотация

При расчете СВЧ-усилителей и генераторов, основанных на излучении сильноточных релятивистских электронных пучков в ограниченной плазме, приходится сталкиваться с рядом трудностей, одна из которых состоит в правильной постановке условий излучения. Поскольку универсального алгоритма, позволяющего преодолеть эти трудности не существует, приходится использовать различные упрощающие предположения и соответствующие им модели. Например, при расчетах плазменных генераторов обычно предполагалось, что ширина спектра генерируемых колебаний невелика, а центральная частота соответствует частоте точного черенковского резонанса. Однако данные предположения оправдались только для пучков с токами меньшими предельного вакуумного тока. Именно для таких пучков, используя метод медленно-меняющиеся амплитуд и вводя постоянный коэффициент отражения плазменной волны от излучающего рупора, удалось создать нестационарную теорию плазменного СВЧ-генератора. Однако возможность применения такого подхода сильно ограничена, т. к. в нем не используется строгая форма условий излучения. Обусловлено это тем, что известные граничные условия излучения разрабатывались для описания лишь установившихся колебательных процессов. В настоящее время существуют различные варианты обобщения данных граничных условий на нестационарный случай, но все они не лишены тех или иных недостатков. Одним из наиболее удачных вариантов граничных условий излучения для полной нестационарной системы Максвелла — Власова является, с нашей точки зрения, нестационарный аналог парциальных условий излучения. Однако практическая реализация этих условий также сталкивается с серьезными математическими трудностями. Вопрос о возможности и эффективности применения данных условий излучения применительно к конкретной электродинамической системе и рассматривается в настоящей работе.

Ключевые слова: СВЧ-плазменная электроника, нестационарные граничные условия излучения.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Ю. В. Бобылев, Т. Г. Мещерякова, В. А. Панин. Компьютерное моделирование возбуждения электромагнитных колебаний открытого плазменного резонатора // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 402–416.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 533.9; 537.87

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-402-416

Computer simulation of the stimulation of electromagnetic vibrations of an open plasma resonator

Yu. V. Bobylev, T. G. Meshcheryakova, V. A. Panin

Bobylev Yuriy Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: bobylev.yu@mail.ru

Meshcheryakova Tatiana Gennadyevna — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-tatyanka.parshkova@mail.ru

Panin Vladimir Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: panin@tspu.tula.ru

Abstract

In calculating microwaves - amplifiers and generators based on the emission of highly relativistic electronic beams in limited plasma, you have to face a number of difficulties, one of which is the correct setting of radiation conditions. Since there is no one-size-fits-all algorithm to overcome these challenges, you have to use a variety of simplistic assumptions and corresponding models. For example, plasma generators typically assumed that the width of the spectrum of vibrations generated was small and the central frequency corresponded to the frequency of accurate Cherenkov resonance. However, these assumptions were justified only for beams with currents of smaller maximum vacuum current. It was for such beams, using the method slowly - changing amplitude and introducing a constant ratio of plasma wave reflection from the radiating mouthpiece, it was possible to create a non-stationary theory of plasma microwave - a generator. However, the possibility of applying this approach is very limited, as it does not use a strict form of radiation conditions. This is due to the fact that known boundary conditions of radiation were developed to describe only established vibrational processes. Currently, there are various options for generalizing these boundary conditions for a non-stationary case, but all of them are not without certain shortcomings. One of the most successful variants of the radiation boundary conditions for the complete non-stationary system of Maxwell - Vlasova is, in our view, the unsteady analogue of the partial radiation conditions. However, the practical implementation of these conditions also faces serious mathematical difficulties. The question of the feasibility and effectiveness of these radiation conditions in relation to a specific electrodynamic system is being considered in this paper.

Keywords: microwave plasma electronics, non-stationary border radiation conditions.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Yu. V. Bobylev, T. G. Meshcheryakova, V. A. Panin, 2021, "Computer simulation of the stimulation of electromagnetic vibrations of an open plasma resonator", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 402–416.

Введение

Релятивистская плазменная СВЧ – электроника является относительно молодой областью физики. Её начало было положено в исследованиях пучковой неустойчивости в плазме, которая заключается в аномально сильном взаимодействии быстрого электронного пучка с плотной плазмой, в результате чего пучок будет весьма сильно тормозиться в плазме, возбуждая в ней плазменные колебания [1]. Последующие годы после теоретического предсказания явления пучково–плазменной неустойчивости, были посвящены как дальнейшему развитию теории, так и практической разработке приборов — усилителей и генераторов, принципы работы которых были основаны на использовании данной неустойчивости. При этом оказалось, что функционирование данных приборов можно организовать в области достаточно высоких частот, постоянное же увеличение мощности используемых электронных пучков, а также степени их релятивизма, и стимулировало появление релятивистской плазменной СВЧ–электроники.

Нужно отметить, что устройства, использующие релятивистские электронные пучки (усилители и генераторы) обладают рядом преимуществ в сравнении с нерелятивистскими. Однако продвижение в область сильноточных пучков оказалось связано со значительными трудностями различного характера. В частности эти трудности были связаны с созданием катодов, способных обеспечивать формирование стабильных электронных пучков [2]–[4], а также с учётом влияния конфигурации магнитного поля на длительность СВЧ-импульсов [5]–[7]. Помимо данных трудностей в плазменной СВЧ–электронике, как в теории, так и в эксперименте, приходилось сталкиваться также и с другими проблемами, в преодолении которых в последние десятилетия был достигнут существенный прогресс.

Однако, несмотря на значительные успехи, проектирование и расчёт СВЧ–усилителей и генераторов, основанных на излучении сильноточных релятивистских электронных пучков в ограниченной плазме, остаётся весьма сложной задачей. При этом одной из основных проблем является правильная постановка условий излучения. Аналогичная трудность естественно возникает и в соответствующих задачах релятивистской вакуумной СВЧ–электроники, но в случае плазменных систем имеется ряд усугубляющих факторов. Во-первых, из-за специфического линейного закона дисперсии возбуждаемых пучком плазменных волн, не представляется возможным получение какой-либо предварительной информации о центральной частоте и ширине спектра излучения. Во-вторых, возможность плавной перестройки рабочей частоты плазменных СВЧ–излучателей и возможность получения в них запредельно низких частот, требуют особой аккуратности при моделировании излучающего устройства плазменной системы. В-третьих, наличие границ плазмы, безусловно, только ещё осложняет ситуацию. К этому следует добавить общую для всех задач сильноточной электроники проблему, связанную с импульсностью электронного пучка [8], [9].

Несмотря на перечисленные трудности, расчёты плазменных СВЧ–усилителей и генераторов проводятся уже продолжительное время. Так при расчётах усилителей исходят из предположений о стационарности инжектируемого электронного пучка, стационарности подаваемого на вход усилителя сигнала и идеальной согласованности электродинамической системы усилителя с устройством для вывода излучения [9]. Понятно, что при этом совершенно не учитывается импульсный характер процесса и остаётся в стороне вопрос о возможности хорошего согласования усилителя с излучающим устройством (рупором). Несмотря на данные недостатки, проведённые исследования плазменных усилителей способствовали существенно прогрессу в понимании физики плазменно–пучкового взаимодействия.

При расчётах плазменных генераторов предполагалось, что ширина спектра генерируемых колебаний невелика, а центральная частота соответствует частоте точного черенковского резонанса. Предположения оправдались только для пучков с токами меньшими предельного вакуумного тока. Именно для таких пучков, используя метод медленно-меняющиеся амплитуд и вводя постоянный коэффициент отражения плазменной волны от излучающего рупора,

удалось создать нестационарную теорию плазменного СВЧ-генератора [8]. Аналогичный подход обычно используется и в вакуумной СВЧ-электронике, однако возможности его применения сильно ограничены, поскольку в нём не используется строгая форма условий излучения. Общие принципы излучения в системах с нелокальной границей достаточно подробно рассмотрены, например, в [10], но полученные результаты относятся лишь к случаю установившихся колебаний (подробнее см. далее).

Нужно отметить, что при решении подобных стационарных задач в настоящее время для расчёта нерегулярных волноведущих систем, в частности, систем с локальными неоднородностями в качестве эффективного численного алгоритма широко используется метод конечных элементов [11]. Высокая популярность этого метода объясняется простотой его физической интерпретации. Этот метод основан на локальной аппроксимации решения кусочно-полиномиальными функциями. Исходная область разбивается на подобласти стандартного вида, в качестве которых выступают треугольники или четырёхугольники. При этом на расположение элементов при разбиении области не накладываются ограничения, что позволяет применять метод конечных элементов для широкого круга областей без использования глобальной фиксированной системы координат.

В случае нестационарных колебательных процессов одним из удачных вариантов граничных условий излучения для полной нестационарной системы Максвелла — Власова является, с нашей точки зрения, вариант, предложенный в [9]. Он обобщает на произвольный нестационарный случай так называемый принцип предельного поглощения и учитывает частотную дисперсию коэффициента отражения волн от излучающего рупора. Напомним, что известные граничные условия излучения в виде условий Зоммерфельда, принципа предельного поглощения и принципа предельной амплитуды [13] разрабатывались для решения стационарного уравнения Гельмгольца, описывающего установившийся колебательный процесс). В работе [2] требование стационарности было преодолено, но ценой увеличения размера области, где решаются уравнения Максвелла (подробнее см. ниже). Это весьма неприятное обстоятельство для таких трудоёмких задач, как численное моделирование плазменного СВЧ-генератора или усилителя, когда объем вычислений и без того велик.

Такого недостатка, связанного с серьёзным увеличением затрат вычислительных ресурсов лишён нестационарный аналог парциальных условий излучения, предложенный в [14] для моделирования СВЧ-генератора с диэлектрическим заполнением и обобщённый в [15], на системы более общего вида. В данной работе проводится изучение практического применения данных условий к конкретной электродинамической системе, исследуемой в настоящее время в прикладных целях [9].

Постановка задачи и вывод основных уравнений

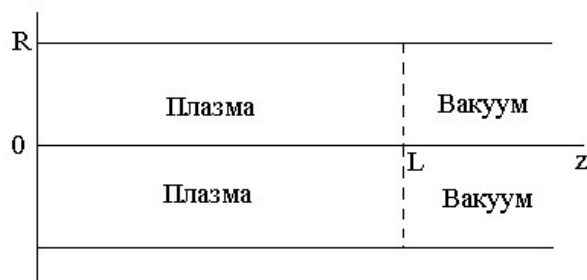


Рис. 1: Схеме открытого плазменного резонатора.

Рассмотрим следующую систему, представляющую собой открытый плазменный резонатор, схематически изображённый на Рис.1.

Основной частью системы является металлический цилиндрический волновод радиуса R с идеально проводящими стенками. Участок волновода $0 \leq z < L$ заполнен поперечно однородной плазмой.

Вдоль оси волновода наложено сильное магнитное поле, полностью замагничивающее электроны плазмы. В продольном на-

правлении (вдоль оси Oz) плазма является неоднородной. Область $z \geq L$ моделирует излучающий рупор, состыкованный с резонатором. В простейшем случае рупором является продолжение того же волновода, но только вакуумного. При этом граница $z = L$ является открытой границей, через которую и осуществляется вывод излучения.

Заметим, что граничное условие излучения целесообразно ставить не на границе плазмы $z = L$, а несколько правее — в рупоре при $z = L_0 > L$. При этом в области от $z = 0$ до $z = L_0$ должны решаться уравнения Максвелла — Власова, что дает возможность учесть в “сквозном” счёте границу плазмы, которая может быть не резкой и может меняться со временем. Поэтому, следуя [14], [15], поставим граничное условие при $z = L_0$, причём так, чтобы можно было рассматривать предел $L_0 \rightarrow L$. Дело в том, что при любом $z > L$ уравнения Максвелла решаются точно, что позволяет отобрать решение, удовлетворяющее условиям излучения, и использовать это решение как граничное условие.

Для простоты ограничимся аксиально симметричным случаем и полем, имеющим структуру E -типа (или TM -типа) [13]. В данном поле отличны от нуля только такие компоненты: E_z , E_r , B_φ . Учесть же примесь других компонент поля не представляет труда. Рассматривая плазму в линейном приближении, будем исходить из следующей системы уравнений [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_\varphi}{\partial t}, & \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_\varphi) &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(j_{zp} + j_{zd}), & \frac{\partial j_{zp}}{\partial t} &= \frac{\omega_p^2(z)}{4\pi} E_z \end{aligned} \quad (1)$$

описывающей аксиально-симметричные возбуждения волн E -типа, создаваемые некоторым внешним источником $j_{zd}(t, z, r)$. В (1) $\omega_p(z)$ — ленгмюровская частота электронов плазмы, а $j_{zp}(t, z, r)$ — продольная составляющая плотности тока, наведённого в плазме. Выберем в качестве функции, описывающей плотность тока внешнего источника:

$$j_{zd}(t, z, r) = j_{d0} J_0\left(\frac{\mu_{01}}{R} r\right) \delta(z) \vartheta(t) \sin(\omega t) \quad (2)$$

$$j_{zp}(t, z, r) = j_{d0} \delta(r - r_d) \delta(z) \vartheta(t) \sin(\omega t). \quad (3)$$

Здесь $\vartheta(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда, δ — функция Дирака. Формула (2) соответствует бесконечно-тонкому гармонически осциллирующему заряженному плоскому слою, расположенному в начале координат, поперечная плотность которого определяется функцией Бесселя $J_0(\frac{\mu_{01}}{R} r)$, где μ_{01} — первый корень уравнения $J_0(x) = 0$ [16]. Элементарный диполь, ток которого определяется формулой (3) соответствует бесконечно-тонкому кольцу радиуса r_d , расположенному в начале координат. Формулы (2) и (3), безусловно, являются модельными и выбраны для исследования разных способов возбуждения поперечных гармоник электромагнитных колебаний. Очевидно, что формулы (2) и (3) описывают синусоидальный внешний источник, включаемый в момент времени $t = 0$. Именно в этом включении и заключается основная сложность. Без учёта момента включения задача сводится к хорошо известной, вошедшей в учебники [13].

Представим компоненты поля и j_{zp} в виде:

$$\begin{aligned} E_z(t, r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_z^{(n)} J_0(k_{\perp n} r), & E_r(t, r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_r^{(n)} J_1(k_{\perp n} r), \\ B_\varphi(t, r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_\varphi^{(n)} J_0(k_{\perp n} r), & j_{zp}(t, z, r) &= \sum_{n=1}^{\infty} j_{zp}^{(n)} J_0(k_{\perp n} r). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь J_0 и J_1 - функции Бесселя нулевого и первого порядка, соответственно; $k_{\perp n} = \frac{\mu_{0n}}{R}$ ($n=0, 1, \dots$), где μ_{0n} - корни уравнения $J_0(x) = 0$.

Чтобы получить уравнения для коэффициентов $E_z^{(n)}$, $E_r^{(n)}$, $B_\varphi^{(n)}$, $j_{zp}^{(n)}$ подставим разложения (4) в уравнения (1) и, учитывая ортогональность функций Бесселя, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z} + k_{\perp n} E_z^{(n)} &= -\frac{\partial B_\varphi^{(n)}}{\partial \tau}, & \frac{\partial B_\varphi^{(n)}}{\partial z} &= -\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial \tau} &= k_{\perp n} B_\varphi^{(n)} - J_{zp}^{(n)} - J_d^{(n)}, & \frac{\partial J_{zp}^{(n)}}{\partial t} &= \tilde{\omega}_p^2(z) E_z^{(n)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь обозначено

$$\tau = ct, \quad \tilde{\omega}(z) = \frac{\omega_p(z)}{c}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{c}, \quad J_{zp}^{(n)} = \frac{4\pi}{c} j_{zp}^{(n)}, \quad (6)$$

$$J_d^{(n)} = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} j_{d0} \delta(z) \vartheta(t) \sin(\tilde{\omega}\tau); & n = 1 \\ 0; & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (7)$$

$$J_d^{(n)} = \frac{8\pi}{c} \frac{r_d J_0(k_{\perp n} r_d)}{R^2 J_1^2(\mu_{0n})} j_{d0} \delta(z) \vartheta(t) \sin(\tilde{\omega}\tau); \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Как видно из этих обозначений, новая переменная τ имеет, как и координата z размерность длины M , а частоты $\tilde{\omega}_p$ и $\tilde{\omega}$ и - размерность волнового числа M^{-1} . Приведённое в (7) выражение для $J_d^{(n)}$ справедливо, если j_{zd} определяется формулой (2). Если же $J_d^{(n)}$ задаётся формулой (3), то для j_{zd} имеем выражение (8).

Система уравнений (5) дополняется начальными и граничными условиями:

$$E_r^{(n)}|_{\tau=0} = B_\varphi^{(n)}|_{\tau=0} = E_z^{(n)}|_{\tau=0} = J_{zp}^{(n)}|_{\tau=0} = 0, \quad E_r^{(n)}|_{z=0} = 0, \quad (9)$$

а также условием излучения при $z = L$ на правом конце системы. Так как при $z = L$ $\omega_p(L) = 0$, то уравнения (5) содержат только компоненты поля, то есть являются однородными. Используя преобразование Лапласа [17], решение (5) для данного случая можно записать в виде [15]:

$$\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial \tau} = -\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z} + k_{\perp n} \int_0^\tau J_1(k_{\perp n}(\tau - \tau')) \frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z} d\tau', \quad (10)$$

где J_1 функция Бесселя первого порядка. Эти соотношения, следуя [14],[15], мы и рассматриваем как нестационарные парциальные граничные условия излучения, записанные в точке $z = L$ - левой границы излучающего устройства. Как видно, это условие является достаточно сложным интегро-дифференциальным уравнением, и поэтому численная его реализация не совсем проста. Для определённости во всех дальнейших расчётах примем длину системы $L = 10$ см, а $R = 1,8$ см. На выходе системы будем вычислять поток электромагнитной энергии, определяя его формулой:

$$N = \sum_{i=1}^n E_r^{(n)}(\tau, L) B_\varphi^{(n)}(\tau, L) J_1^2(\mu_{0n}), \quad (11)$$

где каждое слагаемое представляет собой вклад в суммарный поток энергии, даваемый n -ой поперечной модой. Спектральный состав поля излучения определим на выходе системы для каждой n -ой моды по формулам:

$$E_r^{(n)}(\Omega) = \int_0^\tau E_r^{(n)}(\tau', L) \exp(i\Omega\tau') d\tau', (n = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

являющимся, фактически, образами Фурье функций $E_r^{(n)}(\tau, L)$.

Подставляя в (5)

$$E_r^n, \quad B_\varphi^n, \quad E_z^n, \quad J_p^n \sim \exp(-i\omega t + ik_z z), \quad (13)$$

считая при этом $\tilde{\omega}_p = \text{const}$, можно получить известное дисперсионное уравнение:

$$k_{\perp n}^2 + (k_z^2 - \tilde{\omega}_p^2)(1 - \frac{\tilde{\omega}_p^2}{\tilde{\omega}^2}) = 0, \quad (14)$$

откуда следует, что частота отсечки $\tilde{\omega}_{0n}$ для n -ой поперечной моды в случае вакуумного волновода ($\tilde{\omega}_p=0$) в наших обозначениях равна:

$$\tilde{\omega}_{0n} = k_{\perp n}. \quad (15)$$

Из (14) можно также получить выражение для продольного волнового числа k_z

$$k_z^2 = \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}_p^2 - k_{\perp n}^2}{1 - \tilde{\omega}_p^2/\tilde{\omega}^2} \quad (16)$$

Результаты численного интегрирования

Численный анализ системы (5) начнём со случая вакуумного волновода, когда $\tilde{\omega}_p = 0$. Пусть $J_d^{(n)}$ определяется формулой (7). При этом в волноводе будет возбуждаться только основная мода ($n=1$) колебаний, и отличными от нуля будут только компоненты поля $E_r^{(1)}; B_\varphi^{(1)}; E_z^{(1)}$ (что видно непосредственно из системы (5) и начальных условий (9)). Из (15) следует, что минимальная частота отсечки $\tilde{\omega}_{01} = k_{\perp 1} = \mu_{01}/R \approx 1,33$. Рассмотрим отдельно случаи, когда частота внешнего источника $\tilde{\omega}$ в (7) больше $\tilde{\omega}_{01}$ и, соответственно, меньше чем $\tilde{\omega}_{01}$.

Пусть в начале $\tilde{\omega} = 20$ ($\tilde{\omega} \approx 15\tilde{\omega}_{01}$). Результаты расчётов для данного $\tilde{\omega}$ представлены на Рис.2, Рис.3 и Рис.4.

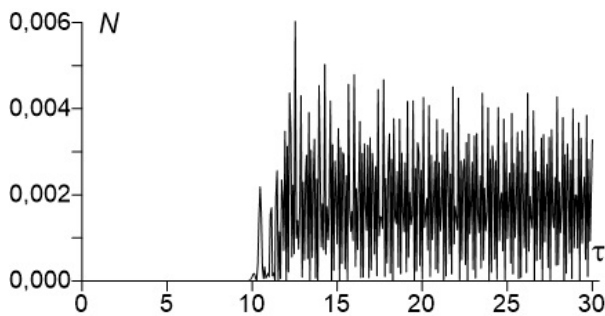


Рис. 2: Зависимость потока энергии электромагнитного поля на правой границе системы от времени τ при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 20$.

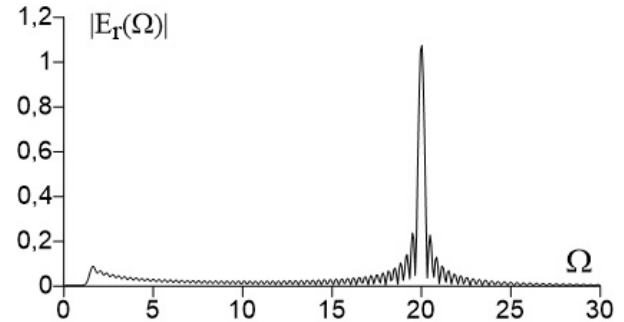


Рис. 3: Спектральная характеристика $|E_r^{(1)}(\Omega)|$ первой поперечной моды поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 20$

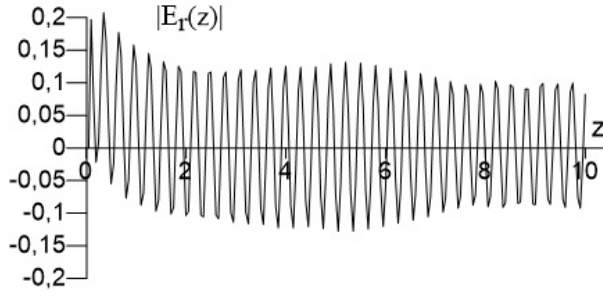


Рис. 4: Зависимость поля $E_r^{(1)}$ от продольной координаты z в момент времени $\tau = 30$ при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 20$.

системы, рассчитанный по формуле (12). Из этого рисунка видно, что в данном случае излучение происходит фактически на заданной частоте диполя $\tilde{\omega}$ (на частоте вынуждающей силы).

На Рис.4 представлена зависимость поля $E_r^{(1)}$ от продольной координаты z в момент времени $\tau = 30$. Видно, что к этому моменту времени в системе установилось практически гармоническое распределение поля вдоль оси волновода с характерным продольным размером $\Lambda = 2\pi/k_z \approx 2\pi/\tilde{\omega} \approx 0,31$ (так как из (16) (при $\tilde{\omega}_p = 0$) следует, что для данного $\tilde{\omega} = 20$ и $k_{\perp n} \approx 1,33 \mapsto k_z = \sqrt{\tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2} \approx \tilde{\omega}$).

Пусть теперь частота внешнего источника меньше минимальной частоты отсечки $\tilde{\omega}_{01} = 1,33$ и равна $\tilde{\omega} = 0,5$ ($\tilde{\omega} \approx 0,4 \tilde{\omega}_{01}$). Результаты расчётов для данной частоты представлены на Рис.4, Рис.5 и Рис.6, где приводятся те же зависимости, что и на Рис.1-Рис.3.

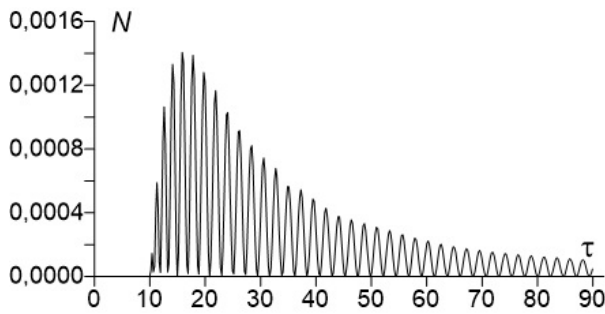


Рис. 5: Зависимость потока энергии электромагнитного поля на правой границе системы от времени τ при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 0,5$.

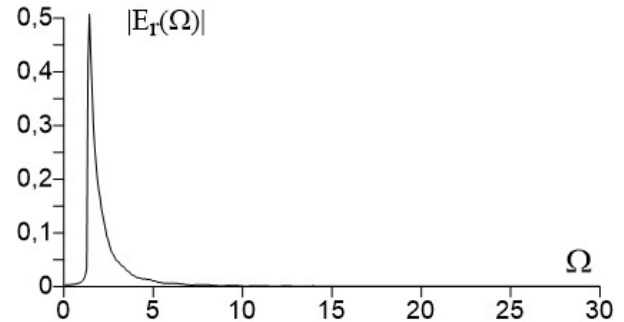


Рис. 6: Спектральная характеристика $|E_r^{(1)}(\Omega)|$ первой поперечной моды поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 0,5$

Из Рис. 6 видно, что в данном случае в спектре отсутствует частота, соответствующая частоте диполя $\tilde{\omega}$ — частота вынужденных колебаний. Возбуждаться в данных условиях могут только колебания с частотами большими или равными частоте отсечки $\tilde{\omega}_{01}$.

Однако, эти колебания не носят волновой характер, что следует из Рис. 7, где видно аperiodическое уменьшение поля $E_r^{(1)}$ с увеличением z . Кроме того, из Рис. 5 видно, что поток энергии, выходящей из системы, на достаточно больших временах ($\tau \sim 90$), когда электродинамические процессы в системе практически вышли на стационарный режим, на порядок

меньше чем в предыдущем случае (Рис. 2).

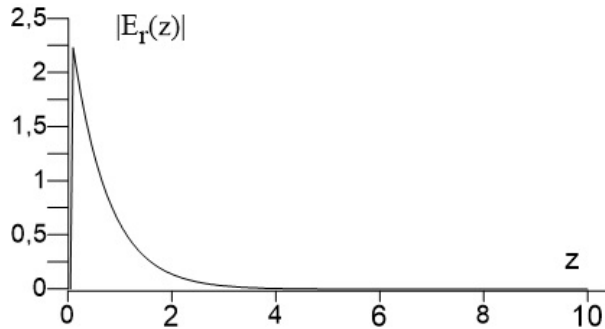


Рис. 7: Зависимость поля $E_r^{(1)}$ от продольной координаты z в момент времени $\tau = 30$ при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 0,5$.

то как известно [8], поле в волноводе будет представлять собой суперпозицию бегущих волн, число которых ограничено. Это видно и из (16) при $\tilde{\omega}_p = 0$: $k_z^2 = \tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2$, а поскольку собственные числа $k_{\perp n}$ непрерывно увеличиваются с ростом n , то при некотором n данная разность станет отрицательной, и волна, соответствующая этому номеру, будет затухать (асимптотически убывая по амплитуде до нуля при $z \rightarrow \infty$). Выберем $\tilde{\omega} = 5$, тогда в волноводе могут существовать три бегущие волны, так как $k_z^2 = \tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2 = \tilde{\omega}^2 - \mu_{0n}^2/R^2 > 0$, если $\mu_{0n}/R < \tilde{\omega}$, или $\mu_{0n} < \tilde{\omega}R = 9$, что будет выполнено для $\mu_{01} \approx 2,4$; $\mu_{02} \approx 5,52$ и $\mu_{03} \approx 8,65$ ($\mu_{04} \approx 11,79$). Положим, для определённости, в формуле (8) $r_d = 0,65$ см. Данное значение r_d соответствует расположению элементарного диполя вблизи максимума второй поперечной моды волновода, и, определяет тем самым условия наиболее интенсивного возбуждения этой моды.

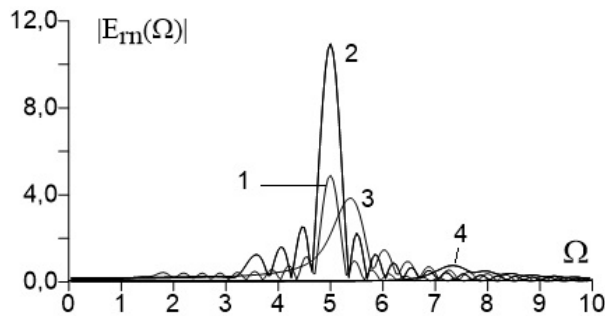


Рис. 8: Спектральные характеристики $|E_r^{(n)}(\Omega)|$ первых четырёх поперечных мод ($n=1; \dots; 4$) поля излучения при возбуждении колебаний диполем (3); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 5$.

Поскольку $E_r^{(1)}$ и $B_\varphi^{(1)}$ изменяются на выходе системы с течением времени с частотой $\tilde{\omega}_{01}$, то поток энергии N , определяемый формулой (12), будет изменяться с частотой, равной $2\tilde{\omega}_{01}$, что также следует из Рис. 5, где временной период $T = (2\pi)/(2\tilde{\omega}) \approx 2,4$. Следует отметить, что аналогичная периодичность потока энергии N имеет место и в предыдущем случае, когда $\tilde{\omega} = 20$. Однако вследствие очень большой частоты ($T = (2\pi)/(2\tilde{\omega}) \approx 0,11$) на Рис. 2 данная периодичность чётко не отражается.

Пусть теперь $J_d^{(n)}$ определяются формулой (8). В этом случае в волноводе помимо основной ($n=1$) могут возбуждаться и высшие поперечные моды (так как все $J_d^{(n)} \neq 0$). При этом, если частота внешнего источника $\tilde{\omega}$ задана, и она больше частоты отсечки ω_{01} ,

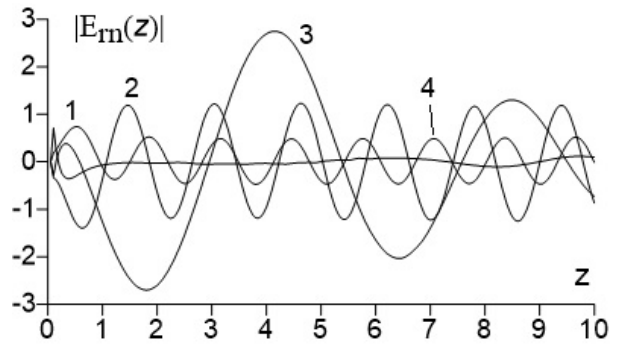


Рис. 9: Зависимости первых четырёх поперечных мод $E_r^{(n)}$ ($n=1; \dots; 4$) от продольной координаты z в момент времени $\tau = 30$ при возбуждении колебаний элементарным диполем (3); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 5$

На Рис. 8 изображены спектральные характеристики $|E_r^{(n)}(\Omega)|$ первых четырёх поперечных мод ($n=1; \dots; 4$). Из этого рисунка видно, что на частоте внешнего источника $\tilde{\omega} = 5$ воз-

буждены первые три поперечные моды, причём наиболее интенсивно возбуждается вторая мода, а третья, условие существования которой в виде бегущей волны находится “на грани”, имеет уже частоту, несколько отличную от частоты вынуждающей силы. Этот вывод подтверждается также Рис. 9, где представлены зависимости $E_r^{(n)}$ ($n=1;\dots;4$) от координаты z для момента времени $\tau = 30$.

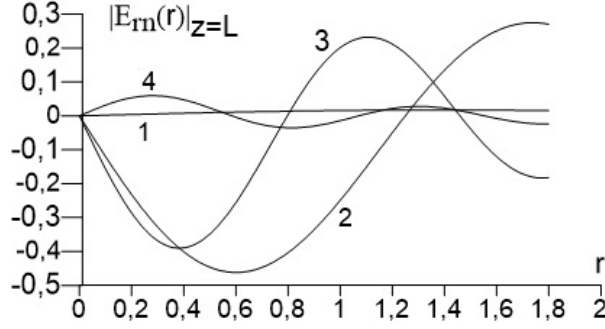


Рис. 10: Зависимости первых четырёх поперечных мод $E_r^{(n)}(L)$ ($n=1;\dots;4$) от поперечной координаты r в момент времени $\tau = 30$ при возбуждении колебаний элементарным диполем (3); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 5$.

ется вторая мода, дающая, очевидно, наибольший вклад в суммарный поток энергии, излучаемой через правый торец волновода.

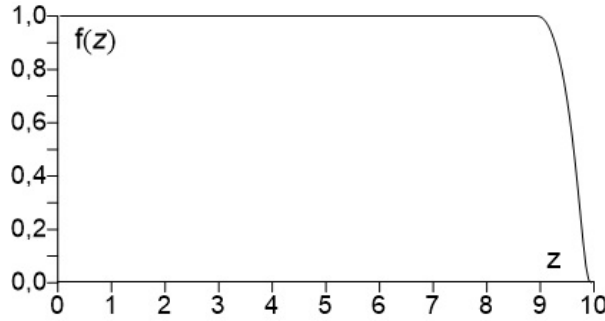


Рис. 11: Вид функции, определяющей зависимость плотности плазмы от продольной координаты.

На Рис. 12 приведена спектральная характеристика поля излучения $|E_r^{(1)}(\Omega)|$. Из этого рисунка видно, что в системе наиболее интенсивно возбуждаются колебания на частоте внешнего источника $\tilde{\omega} = 20$. Кроме того, возбуждаются две частоты, близкие к ω_{p0} .

Это является следствием того, что в системе теперь имеются уже три характерные частоты — $\tilde{\omega}$, ω_{p0} и $\tilde{\omega}_{01} = k_{\perp 1} = \frac{\mu_{01}}{R} \approx 1,33$. Поэтому, по сравнению со случаем вакуумного волновода (Рис. 3), где возбуждались колебания на частоте вынуждающей силы $\tilde{\omega}$ и вблизи

Из этого рисунка видно, что первая и вторая поперечные моды имеют волновую природу с характерным продольным масштабом, который можно приближённо оценить, как и в случае, Рис. 3. Для первой моды: $\Lambda_1 = 2\pi/k_z \approx 2\pi/\omega$; для второй моды: $\Lambda_2 = 2\pi/\sqrt{\tilde{\omega}^2 - k_{\perp 2}^2} \approx 1,6$. Четвёртая мода практически не возбуждается, третья мода уже утратила задаваемую частотой диполя периодичность, и незначительно, но убывает по амплитуде. Таким образом, эта мода, хоть и оказалась в данный момент времени самой большой по амплитуде, бегущей волной фактически не является.

На Рис. 10 приведены зависимости первых четырёх поперечных мод $E_r^{(n)}$ ($n = 1;\dots;4$) от поперечной координаты r при $z = L$ для момента времени $\tau = 30$. Видно, что наиболее интенсивной, как и на Рис. 8 оказыва-

Рассмотрим теперь решение уравнений (5) при $\tilde{\omega}_p(z) = \tilde{\omega}_{p0}f(z) \neq 0$, где $\tilde{\omega}_{p0} = \text{const}$. Причём, будем считать, что плазма однородно заполняет волновод, то есть её плотность везде const , и, только вблизи границы системы $z = L$ уменьшается до нуля не скачкообразно, а по более гладкому закону, в соответствие с функцией $f(z)$, вид которой приведён на Рис. 11.

Пусть плотность тока внешних источников $J_d^{(n)}$ в уравнениях (5) определяется формулой (7). Зададим частоту внешнего источника $\tilde{\omega} = 20$, а $\tilde{\omega}_{p0} = 10$ (что соответствует $\omega_{p0} = 30 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$).

Данный случай отличается от случая, представленного на Рис. 2 — Рис. 4 лишь наличием плазменного заполнения в волноводе.

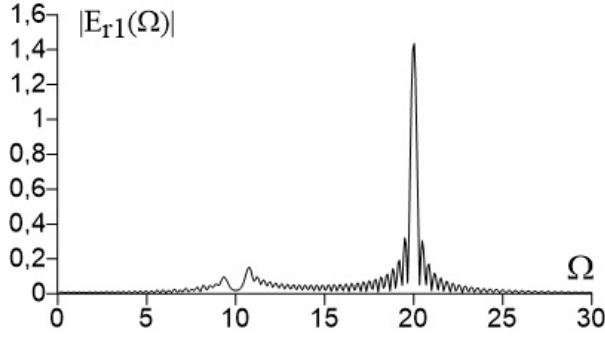


Рис. 12: Спектральная характеристика $|E_r^{(1)}(\Omega)|$ первой поперечной моды поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_{p0} = 10$ и $\tilde{\omega} = 20$

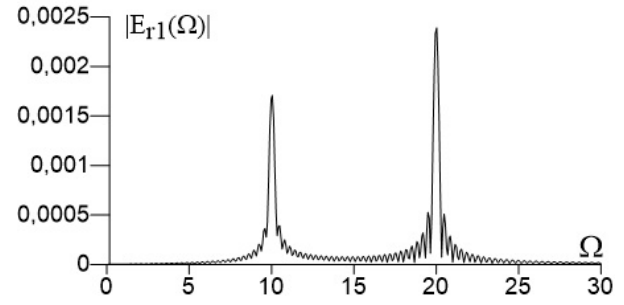


Рис. 13: Спектральная характеристика $|E_r^{(1)}(\Omega)|$ первой поперечной моды поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $R=18$ см, $\tilde{\omega}_{p0} = 10$ и $\tilde{\omega} = 20$

частоты отсечки $\tilde{\omega}_{01}$, на Рис. 12 видно, что теперь возбуждаются колебания и на частотах, близких к $\tilde{\omega}_{p0} - \tilde{\omega}_{01}$ и $\tilde{\omega}_{p0} + \tilde{\omega}_{01}$. Наличие в спектре этих двух частот обусловлено поперечной неоднородностью системы — $k_{\perp 1} = \mu_{01}/R > 0$. Если же $R \rightarrow \infty$, то $k_{\perp 1} \rightarrow 0$ и колебания будут возбуждаться на частотах $\tilde{\omega}$ и ω_{p0} , что подтверждается Рис. 13, где в отличие от Рис. 12 при расчётах радиус волновода увеличен в 10 раз и равен $R = 18$ см.

На Рис. 14 представлен случай равенства плазменной частоты и частоты внешнего источника $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{p0} = 20$. Из этого рисунка видно, что доминирующими в спектре являются частоты, близкие к $\tilde{\omega}_{p0} - \tilde{\omega}_{01}$ и $\tilde{\omega}_{p0} + \tilde{\omega}_{01}$, а излучение на частоте вынуждающей силы весьма незначительно.

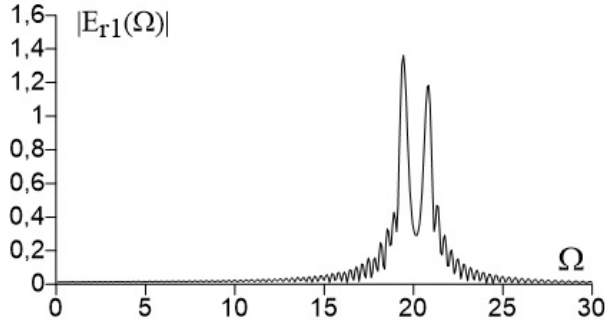


Рис. 14: Спектральная характеристика $|E_r^{(1)}(\Omega)|$ первой поперечной моды поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{p0} = 20$

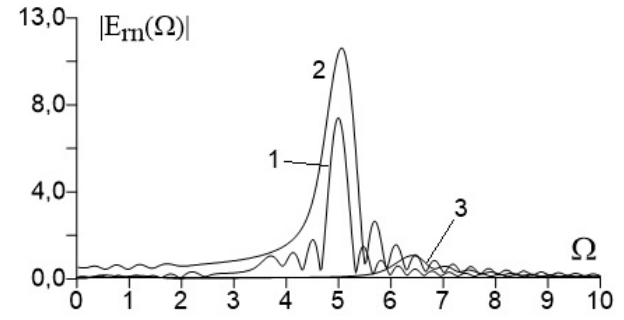


Рис. 15: Спектральные характеристики $E_r^{(n)}$ первых трёх поперечных мод ($n=1; \dots; 4$) поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (3); $\tilde{\omega}_{p0} = 3$ и $\tilde{\omega} = 5$

Пусть теперь плотность тока внешних источников $J_d^{(n)}$ определяется формулой (8). Чтобы ограничить число бегущих волн в системе положим, как и в случае, изображённом на Рис. 8-Рис. 10 $\tilde{\omega} = 5$. Как отмечалось при обсуждении Рис. 8-Рис. 10 число бегущих волн в случае вакуумного волновода было равно трём. Выберем $\tilde{\omega}_{p0} = 3$, тогда, в соответствии с (16) условию $k_z^2 = \tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}_{p0}^2 - k_{\perp n}^2 \geq 0$ будут удовлетворять только две поперечные моды ($n=1$ и $n=2$) Именно эти две поперечные моды наиболее интенсивно возбуждаются на частоте $\tilde{\omega} = 5$, что видно из Рис. 15. Третья же мода, в отличие от Рис. 8 возбуждается незначительно, причём на частоте, отличной от $\tilde{\omega} = 5$. Четвёртая мода практически не возбуждается и поэтому её

спектральная характеристика на Рис. 15 не приводится. Графики зависимостей поперечных мод от координат z и r также не приводятся, так как они аналогичны представленным на Рис. 9 и Рис. 10.

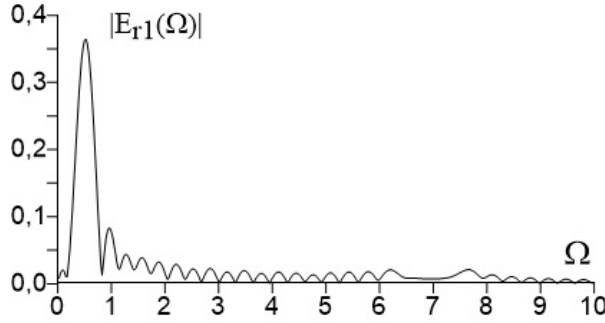


Рис. 16: Спектральная характеристика $|E_r^{(1)}(\Omega)|$ первой поперечной моды поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_{p0}=7$ и $\tilde{\omega}=0,5$

Рассмотрим в заключение случай возбуждения колебаний в плазменном волноводе внешним источником (плотность тока которого определяется (7)) с частотой $\tilde{\omega}=0,5$, меньшей частоты отсечки $\tilde{\omega}_{01}$. При этом положим $\tilde{\omega}_{p0}=7$. Полученная при расчётах спектральная характеристика представлена на Рис.16. Как видно из этого рисунка, колебания в данной системе возбуждаются как на частотах, близких к плазменной: $\tilde{\omega}_{p0}-\tilde{\omega}_{01}$ и $\tilde{\omega}_{p0}+\tilde{\omega}_{01}$ (хотя интенсивность этих колебаний и весьма незначительна), так и на частоте вынуждающей силы $\tilde{\omega}$. Это отличает данный случай от случая вакуумного волновода, спектральная характеристика которого изображена на Рис.6. Данное отличие обусловлено, очевидно, тем, что для плазменного волновода частота отсечки равна нулю.

Сравнение аналитических и численных решений

Следует отметить, что в наиболее простых случаях указанные в работе закономерности возбуждения электромагнитных полей в волноводах заданными источниками могут быть описаны аналитически. Так, если плазма отсутствует $J_p^n = 0$, а колебания в волноводе возбуждаются диполем в соответствии с формулой (8), то решая систему уравнений (5) с помощью преобразования Лапласа по обеим координатам [17], можно получить для $E_r^{(n)}$ следующее выражение:

$$E_r^{(n)} = J_{do}^{(n)} \cos(z\sqrt{\tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2}) \cos(\tilde{\omega}\tau). \quad (17)$$

Здесь $J_{do}^{(n)} = \text{const}$, включающая множители, стоящие перед δ - функцией в (8), а множитель в аргументе первого косинуса $\sqrt{\tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2} = k_z$ - продольное волновое число, что следует и из (16). Если $k_{\perp n} < \tilde{\omega}$, то выражение (17) представляет собой бегущую влево и вправо вдоль оси $0z$ волну, так как (17) можно переписать в виде:

$$E_r^{(n)} = J_{do}^{(n)} [\cos(z\sqrt{\tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2} + \tilde{\omega}\tau) + \cos(z\sqrt{\tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2} - \tilde{\omega}\tau)]. \quad (18)$$

Если же $k_{\perp n} > \tilde{\omega}$, то для этих номеров n , учитывая, что $\cos(i\varphi) = \cosh(\varphi)$, выражение (17) запишется в виде:

$$E_r^{(n)} = J_{do}^{(n)} \cosh(z\sqrt{k_{\perp n}^2 - \tilde{\omega}^2}) \cos(\tilde{\omega}\tau). \quad (19)$$

Эта формула описывает колебания, убывающие и возрастающие по амплитуде вдоль оси волновода. Поскольку последнее в данной системе невозможно, то отбрасывая в (19) возрастающую пространственную экспоненту, получим:

$$E_r^{(n)} = \frac{1}{2} J_{do}^{(n)} \exp(-z\sqrt{k_{\perp n}^2 - \tilde{\omega}^2}) \cos(\tilde{\omega}\tau). \quad (20)$$

- формулу, описывающую затухающие колебания. Производя сравнение полученных формул с численными решениями системы (5), приведёнными на рисунках, можно отметить их хорошее согласие друг с другом. Так, кривая на Рис.4 и кривые $E_r^{(1)}$ и $E_r^{(2)}$ на Рис.9 описываются формулой (18), кривая на Рис.7 – формулой (20). Действительно, поскольку в этом случае $\tilde{\omega}=0,5$, то $\Lambda = 2\pi/\omega \approx 12,56$ – при весьма сильном затухании $\exp(-z\sqrt{k_{\perp n}^2 - \tilde{\omega}^2}) \approx \exp(-1,33z)$ на длине системы $L = 10$ см. при такой частоте, даже не уложилось целого колебания, что и видно из Рис.7. Кривая $E_r^{(3)}$ на Рис.8, поскольку $k_{\perp 3} \approx \tilde{\omega}$, описывается, фактически, формулой (20).

Заключение

Из проведённого в работе с помощью аналитических и численных методов анализа процесса возбуждения электромагнитных полей диполем в вакуумном и плазменном волноводах можно сделать следующий вывод. Использование при численном моделировании парциальных граничных условий излучения верно отражает динамику рассматриваемых электродинамических процессов и является перспективным для изучения переходных процессов в более сложных электродинамических системах с плазменным и иным заполнением, независимо от природы причины, приводящей к возникновению колебаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bohm D. and Gross E. P., Theory of Plasma Oscillations // Physical Review, 1949, Vol. 75, No. 12, pp. 1851-1864
2. Dunaevsky A., Krasik Ya. E., Krokhmal A., et. al. Emission properties of metal-ceramic, velvet, and carbon fiber cathodes // Proc. of 13th Int. Conf. on High-Power Particle Beams (BEAMS 2000), Nagaoka, Japan, June 25-30, 2000, p.516-519.
3. Dunaevsky A., Krasik Ya. E., Krokhmal A., and Felsteiner J. Ferroelectric plasma cathodes // Proc. of 13th Int. Conf. on High-Power Particle Beams (BEAMS 2000), Nagaoka, Japan, June 25-30, 2000, p. 528-531.
4. Fisher A., Garate E. Long pulse electron beams produced from carbon fiber cathodes // Proc. 12th Int. Conf. on High-Power Particle Beams (BEAMS'98) Haifa, Israel, June 7-12, 1998, p.133-136.
5. Clark M.C., Marder B.M. and Bacon L.D. Magnetically insulated transmission line oscillator // Appl. Phys. Lett, 1988, Vol. 52, pp. 78-80.
6. Ashby D. E. T. F., Eastwood J. W., Allen I. et al. Comparison between experiment and computer modeling for simple MILO configurations // IEEE Trans. Plasma Sci, 1995, Vol. 23, No 6, pp.959-969.
7. Eastwood J. W., Hawkins K. C., and Hook M. P. The tapered MILO // IEEE Trans Plasma Sci, 1998, Vol. 26, No 3, pp.698-712.
8. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника - Изд. 2-е, доп. - Москва: URSS, cop. 2018. - 622 с.
9. Strelkov P. S. Experimental plasma relativistic microwave electronics // Physics - Uspekhi, 2019, Vol.62, No 5, pp.465-486.

10. Свешников А.Г., Могилевский И.Е. Избранные математические задачи теории дифракции М.: физический факультет МГУ, 2012. – 239с.
11. Коняев Д.А., Делицын А.Л. Математическое моделирование дифракции акустических и электромагнитных полей на сложных рассеивателях методом конечных элементов // Журнал радиоэлектроники (электронный), 2014, N 4.
<http://jre.cplire.ru/jre/apr14/3/text.html>
12. Майков А.Р., Свешников А.Г., Якунин С.А. Математическое моделирование плазменного генератора сверхвысокочастотного излучения. // ЖВМ и МФ, 1985, Т.25, № 6, С.883-894
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977, 636с.
14. Кузелев М.В., Майков А.Р., Поезд А.Д., Рухадзе А.А., Свешников А.Г., Якунин С.Я. Метод крупных частиц в электродинамике пучковой плазмы. // ДАН СССР, 1988, Т. 300, № 5, С.1112-1115.
15. Bobylev Yu.V., Kuzelev M.V., Rukhadze A.A., Sveshnikov A.G. Nonsteady partial boundary conditions on radiation in the problems of relativistic high – current plasma microwave electronics. // Plasma Physics Reports. 1999. Vol.25. No 7. pp. 561-566.
16. Холодова С.Е., Перегудин С.И. Специальные функции в задачах математической физики. – СПб: НИУ ИТМО, 2012, 72 с.
17. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. Издательство Лань, 2015, 447с

REFERENCES

1. Bohm D. & Gross E. P. 1949, “Theory of Plasma Oscillations“, Physical Review, Vol. 75, no. 12, pp. 1851-1864
2. Dunaevsky A., Krasik Ya. E., Krokhmal A., et. al. 2000, “Emission properties of metal-ceramic, velvet, and carbon fiber cathodes“, Proc. of 13th Int. Conf. on High-Power Particle Beams (BEAMS 2000), Nagaoka, Japan, June 25-30, pp.516-519.
3. Dunaevsky A., Krasik Ya. E., Krokhmal A. & Felsteiner J. 2000, “Ferroelectric plasma cathodes“, Proc. of 13th Int. Conf. on High-Power Particle Beams (BEAMS 2000), Nagaoka, Japan, June 25-30, pp. 528-531.
4. Fisher A. & Garate E. 1998, “Long pulse electron beams produced from carbon fiber cathodes“, Proc. 12th Int. Conf. on High-Power Particle Beams (BEAMS’98) Haifa, Israel, June 7-12, p.133-136.
5. Clark M.C., Marder B.M. & Bacon L.D. 1988, “Magnetically insulated transmission line oscillator“, Appl. Phys. Lett, Vol. 52, pp. 78-80.
6. Ashby D. E. T. F., Eastwood J. W., Allen I. et al. 1995, “Comparison between experiment and computer modeling for simple MILO configurations“, IEEE Trans. Plasma Sci, Vol. 23, no 6, pp.959-969.
7. Eastwood J. W., Hawkins K. C. & Hook M. P. 1998, “The tapered MILO“, IEEE Trans Plasma Sci, Vol. 26, no 3, pp.698-712.

8. Kuzelev M.V., Rukhadze A. A. & Strelkov P.S. 2018, "Plasma relativistic microwave electronics", Izd. 2nd, additional, Moscow: URSS, 622 p.
9. Strelkov P. S. 2019, "Experimental plasma relativistic microwave electronics", Physics - Uspekhi, Vol. 62, no. 5, pp.465–486.
10. Sveshnikov A.G. & Mogilevsky I.E. 2012, "Selected mathematical tasks of the theory of diffraction" M.: the faculty of physics at Moscow State University, 239p.
11. Konyaev D. A. & Delitsyn A. L., 2014, " Mathematical modeling of the diffraction of acoustic and electromagnetic fields on complex dispersors by the method of finite elements ", Journal of Electronics (electronic), no. 4 <http://jre.cplire.ru/jre/apr14/3/text.html>
12. Maikov A.R., Sveshnikov A.G. & Yakunin S.A. 1985, "Mathematical modeling of a plasma generator of ultra-high-frequency radiation", JVM and MF, T.25, no 6, pp.883-894.
13. Tikhonov A.N. & Samarsky A.A. 1977, "Mathematical physics equations", - M.: Science, 636p.
14. Kuzelev M.V., Maikov A.R., Train A.D., Rukhadze A.A., Sveshnikov A.G. & Yakunin S.Y. 1988, "Method of large particles in electrodynamics beam plasma" , DAN USSR, T. 300, no. 5, pp.1112-1115.
15. Bobilev Yu.V., Kuzelev M.V., Rukhadze A.A. & Sveshnikov A.G. 1999. "Nonsteady partial boundary conditions on radiation in the problems of relativistic high – current plasma microwave electronics", Plasma Physics Reports. Vol.25. no 7. pp. 561-566.
16. Kholodova S.E. & Perehudine S.I. 2012, "Special functions in the tasks of mathematical physics", St. Petersburg: ITMO Research Institute, 72p.
17. Panteleyev A.V. & Yakimov A.A.S. 2015, "Theory of Complex Variable Function and Operational Calculus in Examples and Tasks", Lan Publishing House, 447p.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-417-436

Из истории понятия структурной устойчивости¹

Р. Р. Мухин

Мухин Равиль Рафкатович — доктор физико-математических наук, Старооскольский технологический университет им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).

e-mail: mukhinu@mail.ru

Аннотация

Цель. Целью работы является изучение истории представлений о грубости (структурной устойчивости), которая является не только одним из важнейших понятий теории нелинейных систем, но лежит в основе нашего миропонимания. До настоящего времени структурная устойчивость рассматривалась в историческом плане лишь фрагментарно (главным образом, в связи со школой Андронова) и не являлась предметом последовательного исторического исследования. **Метод.** Исследование основано на анализе оригинальных работ, историко-научной литературы с привлечением воспоминаний участников описываемых событий. **Результаты.** В школе Андронова в контексте прикладных проблем исчерпывающим образом были изучены двумерные системы, для которых структурная устойчивость является типичным свойством. С конца 1950-х гг. происходит смещение исследований структурной устойчивости в контексте прикладных проблем в сторону теории динамических систем. М. Пейкото изучил структурную устойчивость на замкнутых двумерных многообразиях и доказал плотность таких систем. С. Смейл выдвинул гипотезу о существовании структурно устойчивых систем в многомерном случае ($n \geq 3$). Такие системы существуют (системы Морса-Смейла), но он сам установил их нетипичность, они не составляют плотного множества. Для многомерных систем характерно сложное поведение, был построен пример такой системы (подкова Смейла). Изучение систем со сложным поведением стимулировало развитие гиперболической теории. **Обсуждение.** Структурная устойчивость явилась важным фактором открытия сложного поведения динамических систем уже в трехмерном случае, она продолжает играть значительную роль в современной теории динамических систем. Структурная устойчивость имеет общенаучное значение, сыграла ключевую роль в построении теории катастроф, она вышла за рамки теории динамических систем и самой математики, проникает в другие области науки, в том числе в гуманитарную сферу.

Ключевые слова: динамическая система, грубость, структурная устойчивость, топологическая эквивалентность, типичность, трансверсальность, плотное множество.

Библиография: 74 названия.

Для цитирования:

Р. Р. Мухин. Из истории понятия структурной устойчивости // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 417–436.

¹Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 20-011-00402 А.).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-417-436

From the history of the concept of structural stability²

R. R. Mukhin

Mukhin Ravil' Rafkatovich — doctor of physical and mathematical sciences, Ugarov Stary Oskol Technological Institute (branch) National University of Science and Technology «MISiS» (Stary Oskol).

e-mail: mukhiny@mail.ru

Abstract

Aim. The aim of the work is to study the history of ideas about coarseness (structural stability), which is not only one of the most important concepts of the theory of nonlinear systems, but lies at the heart of our worldview. To nowadays, structural stability has been considered in historical terms only fragmentarily (mainly in connection with the Andronov school) and has not been the subject of a consistent historical study. **Method.** The study is based on an analysis of original works, historical and scientific literature with the involvement of the memories of participants in the events described. **Results.** In Andronov's school, in the context of applied problems, two-dimensional systems for which structural stability is a typical property have been exhaustively studied. Since the late 1950s there is a shift in research on structural stability in the context of applied problems towards the theory of dynamical systems. M. Peixoto studied structural stability on closed two-dimensional manifolds and proved the density of such systems. S. Smale hypothesized the existence of structurally stable systems in the multidimensional case ($n \geq 3$). Such systems exist (Morse-Smale systems), but he himself established their atypicality, they do not constitute a dense set. Multidimensional systems are characterized by complex behavior; an example of such a system (Smale's horseshoe) was built. The study of systems with complex behavior stimulated the development of hyperbolic theory. **Discussion.** Structural stability was an important factor in the discovery of the complex behavior of dynamical systems already in the three-dimensional case; it continues to play a significant role in the modern theory of dynamical systems. Structural stability is of general scientific importance, played a key role in the construction of catastrophe theory, it went beyond the framework of the theory of dynamical systems and mathematics itself, penetrates into other areas of science, including the humanitarian sphere.

Keywords: dynamical system, coarseness, structural stability, topological equivalence, typicality, transversality, dense set.

Bibliography: 74 titles.

For citation:

R. R. Mukhin, 2021, "From the history of the concept of structural stability", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 417–436.

“Гипотеза о структурной устойчивости изолированных научных процессов является скрытым постулатом любого научного наблюдения”.

Рене Том [1]

²This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 20-011-00402.

Введение

Грубость или структурная устойчивость принадлежит не только к числу важнейших понятий нелинейной динамики, но находится в основе нашего миропонимания. Оно пришло из теории дифференциальных уравнений. Генезис и эволюция этого понятия дают возможность взглянуть под определенным ракурсом на то, каким нам вообще представляется мир.

К Г. Галилею восходит идея о том, что понять природу можно только на языке математики [2, С.41]. Более конкретно, задачи естествознания привели к дифференциальным уравнениям, и они стали для них первичной математической структурой. И. Ньютон одним из первых обратился к дифференциальным уравнениям, и свой главный результат он закодировал в двух анаграммах, смысл которых В.И. Арнольд передает таким образом: “Data aequatione fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa” – “Полезно решать дифференциальные уравнения” [3, С.5]. В этой фразе содержатся научная программа и идеология, занявшие доминирующее положение на период более, чем на два столетия. Сложился идеал научной рациональности на уровне парадигмы, которая в наиболее радикальном виде была сформулирована П.С. Лапласом: в принципиальном отношении реальный мир полностью подчинен определенным, строгим, динамическим закономерностям, описываемыми дифференциальными уравнениями, и в идеале может быть получена полная информация точным, исчерпывающим образом [4].

Такая вера в простоту миропорядка сохранялась вплоть до первых десятилетий XIX в. Изучение дифференциальных уравнений главным образом стимулировалось задачами механики и физики. Давно было понято, что возможность интегрирования дифференциальных уравнений крайне ограничена. В свете глубокой реформы математического анализа в XIX в., когда формировалась методология установления условий и границ каждого утверждения [5], встал вопрос о понятии самой интегрируемости [6]–[8]. В практическом отношении разложением в ряды, непрерывные дроби или с помощью численного интегрирования можно было решить уравнения с нужной степенью точности. Но сам такой подход оставался внутренне неудовлетворительным. Не было главного – понимания. Было ясно, что, если выбрать путь изобретения новых трансцендентностей, то он ведет в тупик. Требовались кардинально новые идеи.

Выход был указан Анри Пуанкаре. Он предложил подход к интегрированию дифференциальных уравнений, исходя из качественных методов [9, 10] (1881–1886). Необходимо, по его словам, «изучать функции, определяемые дифференциальными уравнениями, сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям» [10, С.11]. Качественные методы явились одной из форм реализации интенсивно проходившей во второй половине XIX в. геометризации математики. Геометрия стала способом рассуждений, язык геометрии и ее образы проникли в далекие от нее самой области. Качественные методы явились прорывом в новый мир, но, что еще более важно, это был новый способ думать. Дальнейшее развитие пошло в нескольких направлениях. Наше внимание будет сосредоточено на одном из них, находящегося в русле идей Пуанкаре.

В понятии грубости пересеклись два главных аспекта идеологии качественных методов – глобальный подход, когда рассматривается поведение системы во всем фазовом пространстве, и устойчивость. Понятие устойчивости, которое после длительного развития получило свою современную форму в теории А.М. Ляпунова, заняло в качественных методах важнейшее место. Идея грубой системы была мотивирована в первую очередь физическими задачами. Поскольку сами дифференциальные уравнения, описывающие систему, известны лишь приближенно, возникает вопрос об изменении структуры интегральных кривых при изменении правых частей уравнений. Такая постановка задачи совершенно не была характерна ранее. После создания в XVII в. анализа бесконечно малых, формулировки законов механики и закона всемирного тяготения начался блистательный двухвековой период, где доминирующее место заняла небесная механика. Успехи небесной механики сильнее всего воздейство-

вали на формирование научного мировоззрения того времени. Понятно, что в этих условиях не вставал вопрос об изменении самих дифференциальных уравнений системы. С появлением в XX в. новых задач, в первую очередь поставленных бурно развивающейся радиотехникой, мотивировка введения грубых систем приобрела актуальность.

Видимо, первый шаг в указанном направлении был предпринят латышским математиком Пирсом Бодем в 1913 г. в мемуаре «О дифференциальных неравенствах» [11]-[13]. Поскольку дифференциальные уравнения, описывающие систему, и их решения являются по своему характеру приближенными, Боде задался вопросом о дополнении дифференциальных уравнений слагаемыми, не превосходящими некоторой константы. Другими словами, Боде интересовалась точность описания какого-либо процесса решениями дифференциальных уравнений, поскольку сами уравнения описывают этот процесс с известной погрешностью. Боде пишет, что при этом он не решился ввести новое понятие устойчивости, отказавшись от шага фундаментальной важности. Во всяком случае статья Боде [11] явилась предтечей основополагающей работы Александра Александровича Андронова и Льва Семеновича Понтрягина [14].

Пуанкаре не дал четкого определения, что понимать под качественным различием. В своем докладе на Математическом конгрессе в Риме в 1908 г. он говорит о некотором критерии эквивалентности для нелинейных дифференциальных уравнений, исходя из групп преобразований [15, С.476-477]. Но такой подход сильно сужает класс изучаемых задач, эквивалентность требуется определить при менее ограничительных условиях. Здесь следует вспомнить работу немецкого математика Гельмута Кнезера [16]. Об этой работе говорит и М. Пейксото [17]. У Кнезера критерием эквивалентности является топологическая эквивалентность: динамические системы Y и X топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм, который отображает фазовое пространство X на фазовое пространство Y , при этом ориентированные фазовые траектории X переходят в ориентированные фазовые траектории Y . К сожалению, эта работа Кнезера не привлекла должного внимания и не оказала того влияния, которое могло бы иметь место при более благоприятных обстоятельствах.

Понятие грубости (структурной устойчивости) в теории нелинейных колебаний и в теории динамических систем

Еще к Пуанкаре восходит идея о сохранении качественных свойств динамической системы при малых возмущениях - положений равновесия и предельных циклов. Но такая устойчивость имеет локальный характер. Сохранение качественной картины во всем фазовом пространстве представляет совершенно новый вид устойчивости и его актуальность была осознана лишь в 1920-е гг. Сейчас глобальный подход является привычным и почти очевидным, но еще до середины 1950-х гг. это было не так. В 1929 г. в *Comptes Rendue* была опубликована небольшая заметка Андронова «Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний» [18], содержащая основные результаты его аспирантской работы. Значение этой заметки в развитии нелинейной физики трудно переоценить, в ней содержатся основные предпосылки для постановки задачи исследования нелинейных колебаний, хотя сама формулировка сложилась несколько позднее [19, С.40]. Сам Андронов не был чистым математиком, но для решения физических задач он использовал самые последние математические достижения. Показательным примером является доклад Андронова в Московском топологическом кружке в 1931 г. (это было временем становления алгебраической топологии) «Топологические методы в теоретической радиотелеграфии» [20]. Надо отметить огромную роль Московского топологического кружка в развитии топологии в нашей стране и использовании ее методов в самой математике и ее приложениях. Активным участником работы кружка был Понтрягин. Как указывал Л.И. Мандельштам, Пуанкаре в своей качественной теории больше говорит о том, что вообще может быть у дифференциальных уравнений, чем учит исследовать конкретные уравнения [21,

С.456]. Последнее было сделано в школе Андронова, которая превратила качественную теорию в мощный метод исследования нелинейных систем. Основное место здесь заняло понятие грубости, в явном виде сформулированное в [18] как требование для устойчивости автоколебаний: в реальных физических системах автоколебания должны сохраняться при достаточно малых изменениях самих систем (физическое требование «грубости» периодических движений, представляющих автоколебания). С физической точки зрения оно было достаточным для понимания, но математически оставалось неудовлетворительным, что препятствовало его превращению в эффективный инструмент исследования нелинейных уравнений. Строго математическая формулировка явилась довольно непростой задачей. Андронов привлек Понтрягина, с которым у него сложились дружеские отношения. В 1937 г. была опубликована их основополагающая работа «Грубые системы» [14] одновременно на русском и французском языках. Андронов и Понтрягин исходят из *грубых систем*, как класса динамических систем, у которых топологическая структура фазовых траекторий не меняется при малых изменениях дифференциальных уравнений.

Рассмотрим динамическую систему, определяемую двумя уравнениями первого порядка с аналитическими на всей фазовой плоскости правыми частями [14]

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

Рассмотрим наряду с системой 1 измененную систему

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) + p(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) + q(x, y),\end{aligned}\tag{2}$$

где $p(x, y), q(x, y)$ – малые аналитические добавки к правым частям системы (1). Далее Андронов и Понтрягин дают определение грубой системы: система (2) называется грубой в данной области G , если для любого $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что при произвольных $p(x, y)$ и $q(x, y)$, удовлетворяющих в области G условиям

$$\begin{aligned}|p(x, y)| < \varepsilon, |q(x, y)| < \varepsilon, |p'_x(x, y)| < \varepsilon, \\ |p'_y(x, y)| < \varepsilon, |q'_x(x, y)| < \varepsilon, |q'_y(x, y)| < \varepsilon,\end{aligned}$$

существует топологическое (т.е. взаимно однозначное и взаимно непрерывное) отображение области G в себя, при котором: 1) соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии меньше η ; 2) точкам, лежащим на одной и той же траектории системы (1), соответствуют точки, лежащие на одной и той же траектории системы (2) и обратно. В примечании авторы отмечают, что подход Боля [11] к устойчивости динамической системы по отношению к изменению правых частей уравнений не является удовлетворительным, поскольку накладывает исключительно тяжелые требования на исходную систему. Андронов и Понтрягин сформулировали необходимые и достаточные условия грубости системы (2). В грубых системах может быть: 1) лишь конечное число особых точек, состояния равновесия могут быть только узлами, фокусами и седлами; 2) конечное число предельных циклов; 3) не могут иметься сепаратрисы, идущие из седла в седло. Они показали, что на плоскости качественная картина для грубых систем очень проста, имеется лишь конечное число положений равновесия и замкнутых траекторий. Грубые системы образуют всюду плотное множество в пространстве всех динамических систем рассматриваемого класса, они являются типичными. Грубость является важнейшим топологическим инвариантом. Но в работе не были приведены доказательства

сделанных утверждений. В определенной степени это было сделано в монографии А.А. Андропова и С.Э. Хайкина «Теория колебаний (без указания третьего автора А.А. Витта)», изданная в том же 1937 г. [22]. В 1933 г. А.А. Андронов выдвинул программу исследований динамических систем [21]: как при изменении параметров меняется топологическая структура разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые и каковы бифуркационные значения параметров? В школе Андропова на основе понятия грубости эта программа исчерпывающим образом была реализована для двумерных систем, для которых грубость представляет типичное свойство, и поведение таких систем является регулярным.

Значительную роль в исследовании грубых систем сыграл выдающийся американский математик Соломон Лефшец (выходец из России). В 1943 г. Лефшец стал консультантом ВМС и познакомился с другим выходцем из России Николаем Минорским, специалистом в области управления и устойчивости судов, который был привлечен к исследованиям по устойчивости кораблей и полученные результаты он изложил в отчете [23]. Минорский широко использовал результаты, изложенные в монографии Андропова с соавторами [22], но не придал должного значения понятию грубости – центрального понятия в исследованиях нелинейных систем. Минорский привлек внимание Лефшеца к нелинейным дифференциальным уравнениям, которые стали главным предметом интересов Лефшеца до конца жизни. Лефшец активно пропагандировал на Западе достижения российских математиков. Фундаментальная монография «Теория колебаний» [22] быстро получила признание на Западе, она часто цитировалась, и в 1949 г. в сокращенном виде под редакцией С. Лефшеца она была издана в Принстоне [24]. В этом издании вместо «грубости» был введен в употребление термин «структурная устойчивость» [24, Р.183,337-340], который получил широкое распространение, особенно в западной литературе. Различие здесь не только терминологическое, а произошел перенос акцента с характеристики системы на ее свойства. Лефшец осознал важность понятия грубости, но мимо его внимания прошло идейное богатство труда Андропова [22], в переводе было практически опущено введение, остальная часть также была сокращена, а изложение понятия грубости вынесено в приложение. Как указывает Д. Обен, если бы перевод был сделан без купюр, многие, сформулированные позднее, идеи Р. Тома и Д. Рюэля выглядели бы не столь новаторскими [25, Р.274]. В 1946 г. Лефшец возглавил исследовательский проект по нелинейным дифференциальным уравнениям в Принстонском университете, финансировавшийся ВМС [26]; [27, Р.275-276]. К проекту присоединился математик из университета Нотр-Дам в Принстоне Г. Баггис. Как отмечалось, основные работы Андропова и его сотрудников, касающиеся структурно устойчивых систем [18],[14] и др., не содержат доказательств, что затрудняет использование и дальнейшее развитие теории. Баггис в своей работе [28] (1952) восполнил этот недостаток, приведя необходимые доказательства. При этом он ослабил условия Андропова и Понтрягина [14], налагаемые на правые части системы (2): вместо аналитических функций Баггис рассматривает непрерывные функции с непрерывными частными производными.

В группе Лефшеца поначалу исследовали конкретные нелинейные дифференциальные уравнения, мотивированные прикладными задачами. Но постепенно центр интересов сместился от изучения грубости в контексте исследования нелинейных систем в сторону глобальной и амбициозной программы классификации динамических систем [29]. Важное значение здесь приобрела теория особенностей гладких отображений. Теория особенностей является далеко идущим обобщением исследования функций на максимум и минимум [30, С.8]. Эта область выделилась в 1955 г. после работы американского математика Хасслера Уитни [31], и затем теория особенностей превратилась в развитый и богатый результатами раздел современной математики. Уитни поставил задачу отображения f_0 открытого подмножества R^n n -мерного пространства E^n в m -мерное пространство E^m ($f_0 : R^n \rightarrow E^m$) таким образом, чтобы при малом изменении $f_0 \rightarrow f$ отображение f обладало более удобными и простыми свойствами. Важное место здесь занимают понятия *общего положения* или *типичности* и *трансверсальности*. Понятие типичности восходит к Пуанкаре. Рассмотрим его более подробно. В своем

знаменитом докладе на Амстердамском конгрессе математиков в 1954 г. А.Н. Колмогоров указал: «Для получения отрицательных результатов о несущественном, исключительном характере какого-либо явления мы будем применять только один несколько кустарный прием: если в классе K функций $f(x)$ можно ввести конечное число функционалов

$$F_1(f), F_2(f), \dots, F_r(f),$$

которые в том или ином смысле естественно считать принимающими, вообще говоря, произвольные значения

$$F_1(f) = C_1, \dots, F_r(f) = C_r$$

из некоторой области r -мерного пространства точек $C = (C_1, \dots, C_r)$, то мы будем считать любое явление, которое может иметь место только при C из множества, имеющего r -мерную лебеговскую меру нуль, исключительным и подлежащим «пренебрежению» [32, С.320]. Обобщение этого указания привело к понятию свойства общего положения или типичного свойства, означающего в зависимости от контекста пренебрежение «малыми» подмножествами, выдвигая на первый план «большие» подмножества, обладающих тем или иным свойством [33, Р.45-46]. Трансверсальность обобщает понятие секущей на многообразия и топологические пространства. Для нашего случая в дифференциальной ситуации два подмногообразия L и M многообразия N *трансверсальны* в точке $x \in L \cap M$, если касательные пространства в этой точке $T_x L, T_x M$ порождают $T_x N$. Это означает, что в N можно ввести такие локальные координаты $x_1, \dots, x_n$ в некоторой окрестности U точки x , в которых $L \cap U$ и $M \cap U$ представляются как трансверсальные векторные пространства в R^n . Трансверсальность связана с «хорошими» свойствами пересечения [34]. Глубокая разработка понятия трансверсальности применительно к задачам топологии была проведена Рене Томом [35]-[37], что явилось ключевым пунктом в развитой им теории кобордизма [35]. Трансверсальность представляет типичное свойство: для двух произвольных гладких подмногообразий L и M с помощью произвольно малой деформации можно добиться того, чтобы они пересекались трансверсально в любой точке их пересечения. Пусть P и Q – дифференцируемо вложены в R^3 (Рис. 1).

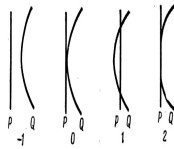


Рис. 1: Демонстрация связи трансверсальности и структурной устойчивости [37, С. 33].
Demonstration of the relationship between transversality and structural stability

Целое число указывает размерность пересечения. При нульмерном и двумерном пересечениях малой деформацией одного из поверхностей можно сделать размерность либо -1, либо +1, а в случае пересечений размерностей -1 и +1 малая деформация не меняет размерностей. Эти интуитивные рассуждения получили строгое обоснование в теореме трансверсальности. Кроме того, при определенных условиях множество трансверсальных отображений является всюду плотным [37, С.33,41]. Из сказанного ясно, что условие трансверсальности имеет важное значение для структурной устойчивости, это особенно актуально для n -мерного случая. Свойства типичности и трансверсальности явились необходимыми элементами в построениях Пейксото. Как Пейксото позднее вспоминал, он много обсуждал с Лефшецем возможность обобщения на n -мерный случай условия Андронова-Понтрягина об отсутствии траекторий, соединяющих седловые точки. Ответ был дан С. Смейлом где-то в конце 1958 г.: устойчивое

и неустойчивое многообразие особых точек и замкнутых траекторий должны пересекаться трансверсально [38].

Следующий важный шаг в исследовании грубых систем связан с именем Маурисио Пейксото, основателем бразильской школы теории динамических систем. В 1957-1958 гг. Пейксото находился в Принстоне, где познакомился с Лефшецем [39]. Общение с Лефшецем стимулировало интерес Пейксото к качественной теории дифференциальных уравнений и он познакомился с только что изданной монографией Лефшеца [40], где в десятой главе рассматривается понятие структурной устойчивости. Лефшец основывается на работе Баггиса [28], которая мотивировала Пейксото вплотную заняться структурно устойчивыми системами. В работах Пейксото ясно видно изменение подхода к поставленным задачам вследствие происшедшего сдвига в сторону теории динамических систем. В 1959 г. появилась статья Пейксото [41], в которой проведено обобщение первоначального подхода Андронова и Понтрягина [14]. Пейксото проводит рассмотрение в банаховом пространстве и дает свое определение структурной устойчивости. Главным отличием определения Пейксото от [14] является отказ от требования близости к тождественному гомеоморфизма, под действием которого система при малом возмущении остается эквивалентной исходной системе. Далее Пейксото распространил понятие структурной устойчивости на случай n -мерного диска и показал, что структурно устойчивые грубые системы образуют открытые множества. Д.В. Аносов полагает, что причиной, побудившей Пейксото пересмотреть определение структурной устойчивости, послужило то, что на любом гладком замкнутом многообразии M системы, структурно устойчивые по Пейксото, образуют открытое множество, тогда как для структурной устойчивости по Андронову и Понтрягину это справедливо лишь в тех немногих случаях, когда решен вопрос о необходимых и достаточных условиях структурной устойчивости в терминах качественной картины поведения траекторий в фазовом пространстве [13, С.69]. Таким образом, появилось два понятия структурной устойчивости: более ограничительная структурная устойчивость по Андронову и Понтрягину и структурная устойчивость по Пейксото. Долгое время оставалось неясным, являются ли эти два варианта эквивалентными. В конечном итоге на этот вопрос был получен положительный ответ [42, С.132]. В 1958 г. на Эдинбургском конгрессе математиков Лефшец познакомил Пейксото с Понтрягиным, которому Пейксото изложил результаты своей работы [41] (она к тому времени еще не была опубликована) [17, Р.608]; [43, Р.148]. Работа Пейксото [41] не вызвала большого интереса у Понтрягина, в особенности рассмотрение n -мерного случая. Хотя сам Понтрягин внес очень важный вклад, теория динамических систем составила не очень длительный период в его научной биографии и его в то время занимали другие вопросы. Да и сами математики, благодаря которым структурная устойчивость обрела вторую жизнь (С. Лефшец, Г. Баггис, Х. Уитни, М. Пейксото, С. Смейл, Д.В. Аносов, Р. Том), не могли еще осознать кардинальные последствия совершающегося прорыва.

В 1962 г. появилась другая работа Пейксото по структурной устойчивости [44]. В частных случаях эти же вопросы были изучены ранее А.Г. Майером [45], В.А. Плиссом [46] и В.И. Арнольдом [47]. На это указывали бразильские математики [17, 48]. Эта работа Пейксото вместе с [42] составляет главную часть его научного наследия. Некоторые неточности в [44] Пейксото исправил в своей следующей статье [49]. В статье [44] Пейксото распространил результаты, полученные в предыдущей работе [41], на двумерные компактные дифференцируемые многообразия M^2 . Пейксото доказал важную и получившую широкую известность теорему, ныне носящую его имя.

Теорема Пейксото утверждает, что для структурной устойчивости векторного поля на компактном двумерном многообразии M^2 необходимо и достаточно, чтобы: 1) имелось конечное число особых точек; 2) α и ω -предельные множества каждой траектории могут быть только особыми точками или замкнутыми орбитами; 3) не имелось траекторий, соединяющих седловые точки; 4) имелось лишь конечное число замкнутых траекторий. Условия 1, 3 и 4 сформулированы в работе Андронова и Понтрягина [14] и частично доказаны в [22]. Усло-

вие 2 следует из теории Пуанкаре-Бендиксона, рассматривающей предельное поведение (при $t \rightarrow \pm\infty$) траекторий автономной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка [50]. Далее Пейксото доказал теорему о плотности. Обозначим через B пространство всех векторных полей на M^2 , через $\Sigma \subset B$ - множество всех структурно устойчивых векторных полей. Тогда теорема о плотности утверждает: множество Σ открыто и плотно в пространстве B всех систем, определенных на M^2 . В случае, когда M^2 является сферой S^2 , справедливость теоремы о плотности следует из предшествующей работы Пейксото [41]. Таким образом, на M^2 структурно устойчивые системы не только типичны, но любая система может быть аппроксимирована ими, и поведение таких систем полностью определено.

В это же время на первый план выступает фигура Стивена Смейла. Как вспоминает сам Смейл [43], он первый раз встретился с Пейксото где-то в 1958 г. Пейксото познакомил Смейла со своей работой [41], в частности, со структурной устойчивостью на диске D^2 . Смейл тогда находился на взлете своей научной деятельности. Он был топологом, что обусловило в его работах [51]-[53] новый подход к теории динамических систем. На языке топологии задачи качественной теории часто предстают в наиболее простом виде и открываются новые возможности. По словам самого Смейла, через Понтрягина и Лефшеца в самой концепции структурной устойчивости сидел «дух» топологии, и это было решающим, что привлекло его внимание к динамическим системам [54, Р.22]. Смейл провел глубокое обобщение понятия неподвижной гиперболической точки, позволившее прийти к совершенно новому взгляду на теорию динамических систем. Размышления Смейла направились на возможность использования топологических методов для обобщения результатов Пейксото на n -мерный случай. Здесь Смейл вплотную подошел к своему главному вкладу в теорию динамических систем. Надо отметить смелость и неординарность шага Смейла, он вступил в неизведанную область, не было известно, существуют ли там вообще какие-либо структурно устойчивые объекты.

В конце 1959 г. Смейл отправился в Рио де Жанейро, где по приглашению бразильских математиков он провел около года в только что основанном Институте чистой и прикладной математики (IMPA) [54], и это был самый плодотворный период в его жизни. Еще с античности культивируется представление, что в главных чертах устройство мира можно объяснить с помощью небольшого числа фундаментальных принципов. В этом же ряду находятся и предположения исследований Смейла по многомерным динамическим системам. Идея выглядела очень привлекательной: предполагалось, что представления, развитые для описания двумерных систем, остаются справедливыми и в многомерном случае, существуют структурно устойчивые системы в пространстве многомерных динамических систем ($n \geq 3$) [51]. Фактически гипотеза Смейла была попыткой распространить программу Андронова на многомерный случай. Такие системы были введены самим Смейлом (1960) [52] и по предложению Тома они были названы системами Морса-Смейла. В этих системах имеется конечное число особых точек и периодических орбит, почти все траектории (в смысле меры) стремятся к периодическим орбитам. Таким образом, устройство многомерных динамических систем в главном выглядело подобным устройству двумерных систем, они относятся к системам с «простым поведением». Действительность оказалась значительно более сложной и многообразной. В многомерном случае являются типичными более сложно устроенные системы. Смейл с большим энтузиазмом приступил к работе и был весьма удовлетворен полученными результатами но, по его собственному признанию, оказался крайне самонадеян. Если бы он ознакомился с трудами предшественников, он был бы более осторожен. Эйфория Смейла быстро прошла после письма Н. Левинсона из Массачусетского технологического института. Левинсон писал, что имеется целый ряд контрпримеров к его гипотезе [43, 54].

В 1940-1950-х годах английские математики М. Картрайт и Дж. Литтлвуд в серии работ [55]-[59], стимулированных потребностями радиотехники, провели подробное исследование уравнения Ван дер Поля при большом трении и большом периодическом возбуждении. Результаты оказались неожиданными и необычными. Они обнаружили большое разнообразие

в поведении решений, некоторые из которых выглядели очень странно. Был установлен интервал значений параметра, когда уравнение имело две системы устойчивых субгармоник, к которым стремилась часть решений. Кроме того, имелось бесконечное множество неустойчивых периодических решений и множество мощности континуума непериодических рекуррентных решений. По словам Картрайт и Литтлвуда, вера в правильность необычных полученных результатов основывалась исключительно на экспериментальных данных Ван дер Поля. Для прояснения ситуации Левинсон рассмотрел более простое для анализа уравнение и показал, что его решения имеют те же особенности поведения, что и в работах Картрайт и Литтлвуда [60]. Левинсон особо отметил, что эти свойства решений сохраняются при малых возмущениях. Смейл понял, что аргументы Левинсона справедливы, а сам он ошибался [43, 54]. Позднее обнаруженные явления были проинтерпретированы как проявление гиперболичности.

Результаты Левинсона Смейлу надо было перевести на привычный ему геометрический язык и это подтолкнуло его к идее «подковы» [61]. Эту конструкцию Смейл представил на Международном симпозиуме по нелинейным колебаниям в Киеве (1961) [53]. Конференция была очень представительной, в ней принимали участие известные ученые (Н.Н. Боголюбов, Р. Беллман, Е.А. Леонтович, М. Картрайт, С. Лефшец, Н. Минорский, В.В. Немыцкий и др.), но мало кто тогда оценил значение этой работы Смейла, что это был один из поворотных пунктов и начиналась новая эпоха. Подкова Смейла явилась демонстрацией сложной динамики в двумерном отображении. В ней присутствует бесконечное множество периодических точек, множество неблуждающих точек образуют канторово множество. Для многомерных систем ключевым понятием оказались гомоклинические структуры, которые для них столь же типичны, как для двумерных систем состояния равновесия и периодические движения. В многомерном случае характерны системы со сложной динамикой. В таких системах структурная устойчивость выступает в новом, совершенно неожиданном качестве. Гомоклинические структуры локально неустойчивы в каждой точке инвариантного множества. Но сама структура в целом в качественном отношении устойчива к малым внешним возмущениям.

Любопытно, как Аносов видит возможный ход мыслей Смейла, который привел его к идее подковы [62]. Смейл не стал подробно изучать работы Левинсона, Картрайт и Литтлвуда. Из них он извлек только то, что в изучаемых системах присутствует сильное трение и большая возбуждающая сила, а траектории остаются в некоторой ограниченной части фазового пространства. Тогда можно представить геометрическую модель, в которой траектории в одном направлении сближаются, а в другом быстро расходятся друг от друга. Если перейти к итерациям отображения, то квадрат превращается в длинный и узкий прямоугольник. Но поскольку траектории не покидают ограниченной области фазового пространства, прямоугольник надо изогнуть, чтобы он остался в этой области. Сохранение основных свойств фазового портрета, на что указывал Левинсон, привело к структурной устойчивости «подковы». Как вспоминает Аносов: «Киевляне издали к началу конференции тезисы ряда докладов в виде отдельных брошюр (тогда это требовало заметных усилий), причем тезисы иностранцев были переведены на русский язык. И вот, стоя в очереди регистрирующихся участников и заглядывая через плечи вперед, я стал рассматривать стопки этих брошюр и прочитал название одной из них: С. Смейл. «Структурно устойчивый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек». В этот момент мир для меня перевернулся, и началась новая жизнь» [62, С.10-11].

Одним из способов выражения на математическом языке локальной неустойчивости является свойство гиперболичности. Наиболее отчетливо свойство гиперболичности проявляется в системах Аносова, которые представляют его наиболее сильный вариант [63, 64]. Понятие гиперболического множества призвано дать адекватное представление о глобальной структуре всей системы и основано на явлениях, которые имеют место в системах Аносова и в подкове Смейла. Гиперболическим множеством F гладкой динамической системы называют компактное множество многообразия M , целиком состоящее из траекторий, в окрестности каждой из которых поведение всех соседних траекторий (включая и те, которые и не лежат в F),

напоминает поведение траекторий возле седла. У систем Аносова все фазовое пространство является гиперболическим множеством.

Системы Морса-Смейла представляют многомерный аналог двумерных динамических систем, для которых характерно простое поведение. Надежда, что в многомерном случае такой тип поведения в целом сохранится, не оправдалась. Такие примеры, как подкова Смейла и гиперболический автоморфизм двумерного тора, противоречили гипотезе о плотности систем Морса-Смейла. И сам Смейл показал, что при размерности больше двух *системы Морса-Смейла нигде не плотны* [61]. Из него следует, что в многомерном случае типичными являются системы со сложной динамикой. Здесь возникают новые проблемы, для случая высших размерностей не удалось найти достаточно универсального свойства, которое подобно структурной устойчивости для двумерного случая, было типично для динамических систем и в то же время в значительной степени определяло их свойства. Исследования пошли по пути изучения отдельных классов систем со сложной динамикой. Сможет ли понятие структурной устойчивости стать одним из конструктивных элементов в многомерных системах, на сегодняшний день этот вопрос остается открытым.

Заключение

Подведем некоторые итоги. Вместе с эволюцией методов математического описания кардинальным образом менялись взгляды на мир на уровне парадигмы. Образно это выразил Ю.С. Ильяшенко, указав, что исследования динамических систем можно разбить на три периода: период Ньютона – дано дифференциальное уравнение, нужно его решить; период Пуанкаре – дано дифференциальное уравнение, нужно описать свойства его решений, не решая уравнение, а лишь используя свойства правой части; период Андронова – не дано никакого дифференциального уравнения, нужно описать свойства его решений [65, С.13]. Именно структурная устойчивость и свойство типичности дают такую возможность. В известной работе Д. Рюэля и Ф. Такенса «О природе турбулентности» [66], где введено понятие странного аттрактора, без рассмотрения в явном виде уравнений Навье-Стокса изучаются свойства его решений. Они рассмотрели на бесконечномерном векторном пространстве H эволюцию поля скоростей, задаваемой этими уравнениями

$$\frac{dv}{dt} = X_\mu(v) \quad (3)$$

где X_μ – векторное поле на H . В основу положены понятия типичности и структурной устойчивости. Квазипериодические движения, из которых исходит сценарий Ландау-Хопфа, при $n > 2$ не являются типичными. Аттракторы, состоящие из неподвижных точек и замкнутых траекторий, не образуют плотного множества. С ростом параметра μ система становится структурно неустойчивой, имеет место сложная структура траекторий, возникают странные аттракторы.

Как всякое фундаментальное понятие, структурная устойчивость вышла далеко за рамки своего первоначального предмета. Сошлемся на слова В.И. Арнольда: «Идея грубости (структурной устойчивости) у Андронова выступает как общефизическая и общематематическая. Изучаемые системы не обязательно должны быть динамическими системами, а классификация – не обязательно топологической. В терминологии Андронова классификация определяется тем, “какие вопросы мы задаем о системе”, а требование структурной устойчивости модели запрещает задавать слишком точные вопросы о качественном поведении системы в тех случаях, когда малое изменение модели меняет ответы на эти вопросы” [67, С.237]. В математике областями, где понятие структурной устойчивости обрело «права гражданства», стали алгебраическая геометрия, дифференциальная топология и др. (см., например, [1] и указанную там литературу). Структурная устойчивость стала одним из главных понятий теории динамиче-

ских систем, и она легла в основу попыток решения грандиозной задачи – провести классификацию динамических систем. Структурная устойчивость существенным образом дополнила понятие корректности постановки задач математической физики. Корректно поставленная задача наряду с условиями существования и единственности решений и их непрерывной зависимости от начальных и граничных условий, сформулированных Ж. Адамаром и развитых далее А.Н. Тихоновым [68]–[70], должна также включать условия структурной устойчивости. Более того, в случае уравнений в частных производных структурная устойчивость практически эквивалентна корректности задачи [1, С.32].

Теория особенностей и теория бифуркация явились источником теории катастроф, математические основы которой были заложены Рене Томом [71, 72]. Целью теории катастроф является описание возникновения дискретных структур из гладких, непрерывных систем. Теория катастроф в начале 1970-х гг. стала очень популярной теорией, претендующей революционизировать всю науку. Здесь понятия структурной устойчивости и типичности приобрели центральное значение и у Тома эти понятия легли в основу научной программы и развиваемой им философии [31, 68, 73]. Ожидания и надежды в теории катастроф оказались сильно преувеличенными, но она заняла свое место в современной математике. Выше говорилось, что в конце 1950-х гг. изучение структурной устойчивости отошло от первоначальной мотивации прикладными проблемами и сместилось в сторону чистой математики. В конце 1960-х гг. маятник качнулся в обратную сторону, структурную устойчивость стали рассматривать и в контексте прикладных задач. Инициатором опять стал Том, применив топологические методы к проблемам биологии. Результаты его исследований вошли в вызвавшую широкие дискуссии книгу «Структурная устойчивость и морфогенез» [1], изданная в 1972 г.

Структурная устойчивость приобрела общенаучное значение и стала проникать и в гуманитарные области. В качестве примера можно указать любопытный труд «Влияние и структурная устойчивость в российском парламенте» [74].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Том Р. Структурная устойчивость и морфогенез. М. : Логос, 2002. 280 с.
2. Галилей Г. Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987. 272 с.
3. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: РХД, 2000. 400 с.
4. Лаплас П.С. Опыт философии теории вероятностей. М., 1908. 206 с.
5. Молодший В.Н. О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX в. // Истор.-матем. исслед. 1978. Вып. 23. С. 32-55.
6. Liouville J. Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati // J. Math. Pures et Appl. 1841. P. 1-13, 36.
7. Bour J. Sur l'integration des équations différentielles de la Mécanique Analytic // J. Math. Pure et Appl. 1855. V. 20. P. 185-200.
8. Liouville J. Note à l'occasion du memoire précédent de M. Edmond Bour // J. Math. Pure et Appl. 1855. V. 20. P. 201-202.
9. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle // J. Math. Pure et Appl. Sér. 3. 1881. V. 7. P. 375-422; 1882. V. 8. P. 251-296; Sér. 4. 1885. V. 1. P. 167-244; 1886. V. 2. P. 151-217.

10. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ОГИЗ, 1947. 392 с.
11. Bohl P. Über Differentialungleichungen // J. für reine und angewandte Math. 1913. Bd. 144. S. 284-313.
12. Мышкис А.Д., Рабинович И.М. Математик Пирс Боль. Рига: Изд-во «Зинатне», 1965. 100 с.
13. Аносов Д.В. Грубые системы // Труды МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 59-93.
14. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247-252.
15. Пуанкаре А. Будущее математики // Вестн. опыт. физики и элем. математики. 1908. Вып. № 474. С. 405-410; № 475-476. С. 425-429; № 477. С. 473-483.
16. Kneser H. Reguläre Karvenscharen auf den Ringflächen // Math. Ann. 1924. V. 91. S. 135-154.
17. Peixoto M. M. Acceptance speech for the TWAS 1986 award in mathematics // The future of science in China and the third world. Singapore: World Sci., 1989. P. 600-614.
18. Andronov A.A. Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations autoentretenues // Comp. Rend. 1929. T. 189. N 15. P. 559-561.
19. Бойко Е.С. Александр Александрович Андронов. М.: Наука, 1991. 256 с.
20. Немыцкий В.В. Московский топологический кружок за 10 лет // УМН. 1936. Вып. 2. С. 279-285.
21. Андронов А.А. Математические проблемы теории автоколебаний // I Всесоюзн. конф. по колебаниям. Т. I. М.: Гостехтеориздат, 1933. С. 32-71.
22. Андронов А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.-Л.: ОНТИ, 1937. 519 с.
23. Minorsky N. Introduction to Nonlinear Mechanics. Ann-Arbor: J.W. Edwards, 1958. 476 p.
24. Andronov A.A., Khaikin S.E. Theory of Oscillations. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1949. 358 p.
25. Aubin D. Cultural History of Catastrophe and Chaos. Princeton, NJ: Université de Princeton, Département d'Histoire, 1998. 782 p.
26. Lefschetz S. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Oscillations. US Office of Naval Research (August 15, 1946 – Sept. 30, 1959). Final Report.
27. Griffiths P., Spencer D., Whitehead G. Solomon Lefschetz. A biographical memoir . Washington D.C.: National Acad. Sci., 1992. 313 p.
28. De Baggis G.F. Dynamical systems with stable structure // Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations. Ed. Lefschetz S. 1952. V. 2. P. 37-59.
29. Dahan Dalmedico A. La renaissance des systèmes dynamiques aux Etats-Unis après la deuxième guerre mondiale // Suppl. Rendiconti dei circolo math. Palermo. 1994. Ser. II. V. 34. P. 133-166.
30. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.

31. Whitney H. Singularities of mappings of Euclidean spaces // *Ann. Math.* 1955. V. 62. P. 374-410.
32. Колмогоров А.Н. Общая теория динамических систем и классическая механика // *Proc. Intern. Congr. Math.* 1954. Amsterdam. V. 1. P. 315-333. / То же в кн.: А.Н.Колмогоров. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 316-332.
33. Hunt B., Kaloshin V. Prevalence // *Handbook of Dynamical Systems*. V. 3. Ed. By H. Broer, F. Takens and B. Hasselblatt. Amsterdam: Elsevier, 2010. P. 43-88.
34. Аносов Д.В. Трансверсальность // *Мат. энциклопед.* Т. 5. М.: Сов. Энциклопедия, 1985. С. 415-416.
35. Thom R. Quelques proprietes globales des varietes differentiables // *Comm. Math. Helv.* 1954. V. 28. P. 17-86.
36. Thom R. Un lemme sur les applications differentiables // *Boletin de la Sociedad Math. Mexicana*. 1956. V. 1. Ser. 2. P. 59-71.
37. Том Р., Левин Г. Особенности дифференцируемых отображений // Особенности дифференцируемых отображений. Под ред. В.И. Арнольда. М.: Мир, 1968. С. 8-101.
38. Peixoto M.M. Some Recollections of the Early Work of Steve Smale // *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest*. Ed. by M.W. Hirsh, J.E. Marsden, M. Shub. N.Y.: Springer-Verlag, 1993. P. 73-75.
39. Sotomayor J. Introduction: A few words about Mauricio M. Peixoto on his 80th birthday // II. S. Lefschetz, ed. Princeton, N.Y.: Princeton Univ. Press, 1952. p. 37-59; *Comp. Appl. Math.* 2001. V. 20. N 1-2. P. 3-9.
40. Lefschetz S. *Differential equations: geometric theory*. N.Y.- L.: Interscience Publishers, 1957. 400 p.
41. Peixoto M. On structural stability // *Ann. Math.* 1959. V. 69. N 1. P. 199-222.
42. Аносов Д.В. О развитии теории динамических систем за последнюю четверть века // Студенческие чтения МК НМУ. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2000. С. 74-192.
43. Smale S. On how I can get started in dynamical systems // *Smale S. The mathematics of time*. N.Y.: Springer Verlag, 1980. P. 147-151.
44. Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds // *Topology*. 1962. V. 1. N 2. P. 101-120.
45. Майер А.Г. Грубое преобразование окружности в окружность // *Учен. записки Горьков. ун-та*. 1939. Вып. 12. С. 215-229.
46. Плисс В.А. О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе // *Вест. ЛГУ*. 1960. № 13. Вып. 3. С. 15-23.
47. Арнольд В.И. Малые знаменатели. I. Отображение окружности на саму себя // *Изв. АН СССР. Сер. Математика*. 1961. Т. 25. № 1. С. 21-86.
48. Палис Ж., Ди Мелу В. *Геометрическая теория динамических систем*. М.: Мир, 1986. 301 с.
49. Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds – a further remarks // *Topology*. 1963. V. 2. N 2. P. 179-180.

-
50. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 552 с.
51. Smale S. On gradient dynamical systems // Ann. Math. 1961. V. 74. P. 199-206.
52. Smale S. A structurally stable differential homomorphism with an infinite number of periodic points // Труды Межд. симпоз. по нелинейн. колебаниям. Киев 1961. Киев: АН УССР, 1963. С. 365-366.
53. Smale S. Structurally stable systems are not dense // Am. J. Math. 1966. V. 73. P. 747-817 / Рус. пер. в сб.: Математика. 1967. Т. 11. № 4. С. 107-112.
54. Smale S. Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio // Chaos Avant-Garde. Singapore: World Sci., 2000. P. 7-22.
55. Cartwright M., Littlewood J.E. On non-linear differential equations of the second order: I. The equation $y - k(1 - y^2)y + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$, k large // J. London Math. Soc. 1945. V. 20. Part 3. N 79. P. 180-189.
56. Cartwright M., Littlewood J.E. On non-linear differential equations of the second order: II. The equation $y + kf(y, y) + g(y, k) = p(t) = p_1(t) + kp_2(t)$; $k > 0$, $f(y) \geq 1$ // Ann. Math. 1947. V. 48. N 2. P. 472-494; 1949. V. 50. P. 504-505.
57. Littlewood J.E. On non-linear differential equations of the second order: III. The equation $y - k(1 - y^2)y + y = b\mu k \cos(\mu t + \alpha)$ for large k , and its generalization // Acta Math. 1957. V. 97. N 3-4. P. 267-308.
58. Littlewood J.E. On the non-linear differential equations of the second order: IV. The general equation $y + kf(y)y + g(y) = bkp(\varphi)$, $\varphi = t + \alpha$ // Acta Math. 1957. V. 98. N 1-2. P. 1-110.
59. Littlewood J.E. On the number of stable periods of a differential equation of the Van der Pol type, JRE Trans. Circuit Theory. 1960 V. 7. N 4. P. 535-542.
60. Levinson N. A second order differential equation with singular solutions // Ann. Math. 1949. V. 50. N 1. P. 126-153.
61. Smale S. Structurally stable systems are not dense // Am. J. Math. 1966. V. 73. P. 747-817.
62. Аносов Д.В. Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 1-18.
63. Аносов Д.В. Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны // ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 4. С. 707-709.
64. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН. М.: Наука, 1967. С. 3-209.
65. Ильяшенко Ю.С. Аттракторы динамических систем и философия общего положения // Матем. просв. 2008. Вып. 12. С. 13-22.
66. Ruelle D., Takens F. On the Nature of Turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167-192 / Рус. пер. в кн.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 117-151.
67. Арнольд В.И. Теория катастроф // Совр. проблемы математики. Фунд. направления. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1986. С. 219-277

68. Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Differential Equations. New Haven, 1923. 316 p.
69. Mira C. Some historical aspects of nonlinear dynamics: possible trends for the future // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1997. V. 7. N 9. P. 2145-2173.
70. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. 1943. Т. 39. № 5. С. 195-198.
71. Thom R. Topological models in biology // Topology. 1969. V. 8. N 3. P. 313-335.
72. Thom R. Catastrophe theory: Its present state and future perspectives // Dynamical systems. Berlin: Springer-Verlag, 1974. P. 366-372.
73. Aubin D. From catastrophe to chaos: the modelling practices of applied topologists // Changing images of math. Ed. by U. Bottazzini and A. Dahan Dalmedico. L.-N.Y.: Routledge, 2001. P. 255-279.
74. Алескеров Ф.Т. и др. Влияние и структурная устойчивость в российском парламенте (1905-1917 и 1993-2005 гг.). М.: Физматлит, 2007. 309 с.

REFERENCES

1. Thom, R. 1972, *Stabilité structurelle et morphogenèse*, W.A. Bendjamine, Paris, 288 p.
2. Galileo, Galilei. 2017, *Il Saggiatore*, Independent Publishing Platform, Rome, 270 p.
3. Arnold, V.I. 2000, *Geometric methods in the theory of ordinary differential equations*, RHD, Izhevsk, 400 p.
4. Laplace, P.S. 1902, *A Philosophical Essay on Probabilities*, J. Wiley, N.Y., 230 p.
5. Molodshiy, V.N. 1978, "A.-L. Cauchy and the revolution in the mathematical analysis of the first quarter of the 19th century", *Histor.Mat. Researches*, Issue 23, pp. 32-55.
6. Liouville, J. 1841, "Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati", *J. Math. Pures et Appl.*, Vol. 36, pp. 1-13.
7. Bour, J. 1855, "Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique Analytic", *J. Math. Pure et Appl.*, Vol. 20, pp. 185-200.
8. Liouville, J. 1855, "Note à l'occasion du memoire précédent de M. Edmond Bour", *J. Math. Pure et Appl.*, Vol. 20, pp. 201-202.
9. Poincaré, H. 1881; 1882; 1885; 1886, "Memoire sur les courbes définies par une équations différentielle", *J. Math. Pures et Appl.*, Sér. 3, Vol. 7, pp. 375-422; Vol. 8, pp. 251-296; Sér. 4, Vol. 1, pp. 167-244; Vol. 2, pp. 151-217.
10. Poincaré, H. 1947, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, GITTL, Moscow, 392 p. (in Russian).
11. Bohl, P. 1913, "Über Differentialungleichungen", *J. für reine und angewandte Math.*, Bd. 144, s. 284-313.
12. Myshkis, A.D., Rabinovich, I.M. 1965, *Mathematician Pierce Bohl*, Zinatne Publishing House, Riga, 100 p. (in Russian).

13. Anosov, D.V., 1985, "Rough systems", *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute of the USSR*, Vol. 169, pp. 59-93 (in Russian).
14. Andronov, A.A., Pontryagin, L.S. 1937, "Systèmes grossiers", *Comp. Rend. de l'Acad. Sci. de URSS*, Vol. 14, P. 247-250.
15. Poincaré, H. 1908, "L'avenir des mathématiques", *Bull. des Sci. Math.*, 2e sér., Vol. 32, part I, pp. 168-190.
16. Kneser, H., 1924, "Reguläre Karvenscharen auf den Ringflächen", *Math. Ann.*, Vol. 91, S. 135-154.
17. Peixoto, M. M. 1989, "Acceptance speech for the TWAS 1986 award in mathematics", *The future of science in China and the third world*, World Sci., Singapore, pp. 600-614.
18. Andronov, A.A. 1929, "Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues", *Comp. Rend.*, Vol. 189, Iss.15, pp. 559-561.
19. Boyko, E.S. 1991, *Alexander Alexandrovich Andronov*, Nauka, Moscow, 256 p. (in Russian).
20. Nemytsky, V.V. 1936, "Moscow Topological Circle for 10 years", *Russian Math. Survey*, Issue 2, pp. 279-285 (in Russian).
21. Andronov, A.A. 1956, "Mathematical problems in self-oscillation theory", *Collected Works*, Acad. Sci. USSR, Moscow, pp. 32-71 (in Russian).
22. Andronov, A.A., Khaikin, S.E. 1937, *Theory of oscillations*, ONTI, Moscow-Leningrad, 519 p. (in Russian).
23. Minorsky, N. 1958, *Introduction to Nonlinear Mechanics*, J.W. Edwards, Ann-Arbor, 476 p.
24. Andronov, A.A., Khaikin, S.E. 1949, *Theory of Oscillations*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 358 p.
25. Aubin, D. 1998, *Cultural History of Catastrophe and Chaos*, Université de Princeton, Département d'Histoire, 782 p.
26. Lefschetz, S. 1959, *Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Oscillations*, US Office of Naval Research (August 15, 1946 – Sept. 30, 1959), Final Report.
27. Griffiths, P., Spencer, D., Whitehead, G. 1992, *Solomon Lefschetz. A biographical memoir*, National Acad. Sci., Washington D.C., 313 p.
28. De Baggis, G.F. 1952, "Dynamical systems with stable structure", *Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations*, Ed. Lefschetz S., Vol. 2, pp. 37-59.
29. Dahan Dalmedico, A. 1994, "La renaissance des systèmes dynamiques aux Etats-Unis après la deuxième guerre mondiale", *Suppl. Rendiconti dei circolo math. Palermo*, Ser. II, Vol. 34, pp. 133-166.
30. Arnold, V.I. 1990, *Catastrophe theory*, Nauka, Moscow, 128 p. (in Russian).
31. Whiney, H. 1955, "Singularities of mappings of Euclidean spaces", *Ann. Math.*, Vol. 62, pp. 374-410.
32. Kolmogorov, A.N. 1954, "The general theory of dynamical systems and classical mechanics", *Proc. Intern. Congr. Math. Amsterdam*, Vol. 1, pp. 315-333.

33. Hunt, B., Kaloshin, V. 2010, "Prevalence", *Handbook of Dynamical Systems. Vol. 3. Ed. By H. Broer, F. Takens and B. Hasselblatt*, Elsevier, Amsterdam, pp. 43-88.
34. Anosov, D.V. 1985, "Transversality", *Math. encyclopedia*, Vol. 5, Sov. Encyclopedia, Moscow, pp. 415-416 (in Russian).
35. Thom, R. 1954, "Quelques proprietes globales des varites differentiables", *Comm. Math. Helv.*, Vol. 28, pp. 17-86.
36. Thom, R. 1956, "Un lemme sur les applications differentiables", *Boletin de la Sociedad Math. Mexicana*, Vol. 1, Ser. 2, pp. 59-71.
37. Levine, G. 1971, "Singularities of differentiable mappings", *Lecture notes of math.*, Vol. 192, pp. 1-89.
38. Peixoto, M.M. 1993, "Some Recollections of the Early Work of Steve Smale", *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest. Ed. by M.W. Hirsh, J.E. Marsden, M. Shub*, Springer-Verlag, N.Y., pp. 73-75.
39. Sotomayor, J. 1952, "Introduction: A few words about Mauricio M. Peixoto on his 80th birthday II. S. Lefschetz, ed.", Princeton Univ. Press, Princeton, N.Y., pp. 37-59.
40. Lefschetz, S. 1957, *Differential equations: geometric theory*, Interscience Publshers, N.Y., 400 p.
41. Peixoto, M. 1959, "On structural stability", *Ann. Math.*, Vol. 69, No 1, pp. 199-222.
42. Anosov, D.V. 2000, "On the development of the theory of dynamical systems over the past quarter century", *Student Readings of MK NMU. V. 1.*, MCCNMO, Moscow, pp. 74-192 (in Russian).
43. Smale, S. 1980, "On how I can get started in dynamical systems", *Smale S. The mathematics of time*, Springer Verlag, N.Y., pp. 147-151.
44. Peixoto, M. 1962, "Structural stability on two-dimensional manifolds", *Topology*, Vol. 1, No 2, pp. 101-120.
45. Mayer, A.G. 1939, "Rough transformation of a circle into a circle", *Sci. notes of Gorky State Univ.*, Issue 12, pp. 215-229 (in Russian).
46. Pliss, V.A. 1960, "On the roughness of differential equations given on a torus", *Bull. of Leningrad State Univ.*, Vol. 13, Issue. 3, pp. 15-23 (in Russian).
47. Arnold, V.I. 1961, "Small denominators. I. The mapping of a circle onto itself", *Proc. of the USSR Acad. of Sci. Ser. Math.*, Vol. 25. No. 1. pp 21-86 (in Russian).
48. Palis, J., Di Melo, V. 1998, *Geometric theory of dynamical systems*, University of Beijing, Beijing, 198 p.
49. Peixoto, M. 1963, "Structural stability on two-dimensional manifolds – a further remarks", *Topology*, Vol. 2, No 2, pp. 179-180.
50. Nemytskii, V.V., Stepanov, V.V. 1960, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 523 p.
51. Smale, S. 1961, "On gradient dynamical systems", *Ann. Math.*, Vol. 74, pp. 199-206.

52. Smale, S. 1963, "A structurally stable differential homomorphism with an infinite number of periodic points", *Proc. Int. Congress on non-linear oscillations in Kiev, 1961*, Ukrainian Acad. Sci., Kiev, pp. 365-366.
53. Smale, S. 1966, "Structurally stable systems are not dense", *Am. J. Math.*, Vol. 73, pp. 747-817.
54. Smale, S. 2000, "Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio", *Chaos Avant-Garde*, World Sci., Singapore, pp. 7-22.
55. Cartwright, M., Littlewood, J.E. 1945, "On non-linear differential equations of the second order: I. The equation $y - k(1 - y^2)y + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$, k large", *J. London Math. Soc.*, Vol. 20, Part 3, No 79, pp. 180-189.
56. Cartwright, M., Littlewood, J.E. 1947;1949, "On non-linear differential equations of the second order: II. The equation $y + kf(y, y) + g(y, k) = p(t) = p_1(t) + kp_2(t)$; $k > 0, f(y) \geq 1$ ", *Ann. Math.*, Vol. 48. No 2. P. 472-494; Vol. 50, pp. 504-505.
57. Littlewood, J.E. 1957, "On non-linear differential equations of the second order: III. The equation $y - k(1 - y^2)y + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$, for large k , and its generalization", *Acta Math.*, Vol. 97, No 3-4, pp. 267-308.
58. Littlewood, J.E. 1957, "On the non-linear differential equations of the second order: IV. The general equation $y + kf(y)y + g(y) = bkp(\varphi)$, $\varphi = t + \alpha$ ", *Acta Math.*, Vol. 98, No 1-2, pp. 1-110.
59. Littlewood, J.E. 1960, "On the number of stable periods of a differential equation of the Van der Pol type", *JRE Trans. Circuit Theory*, Vol. 7, No 4, pp. 535-542.
60. Levinson, N. 1949, "A second order differential equation with singular solutions", *Ann. Math.*, Vol. 50, No 1, pp. 126-153.
61. Smale, S. 1966, "Structurally stable systems are not dense", *Am. J. Math.*, Vol. 73, pp. 747-817.
62. Anosov, D.V. 2006, "Dynamical systems in the 60s: hyperbolic revolution", *Mathematical events of the twentieth century*, Springer, Berlin, pp. 1-18.
63. Anosov, D.V. 1962, "Coarseness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature", *Rep. of Acad. Sci. USSR*, Vol. 145, № 4, pp. 707-709.
64. Anosov, D.V. 1967, "Geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature", *Proceedings of MIAN*, Nauka, Moscow, pp. 3-209.
65. Ilyashenko, Yu.S. 2006, "Attractors of dynamical systems and philosophy of generic position", *Images de Mathematique*, CNRS, France, p. 58-63.
66. Ruelle, D., Takens, F. 1971, "On the Nature of Turbulence", *Comm. Math. Phys.*, Vol. 20, pp. 167-192.
67. Arnold, V.I. 1986, "Catastrophe Theory", *Modern problems of mathematics. Fundamental directions. V. 5.*, VINITI, Moscow, pp. 219-277 (in Russian).
68. Hadamard, J. 1923, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Differential Equations*, New Haven, 316 p.
69. Mira, C. 1997, "Some historical aspects of nonlinear dynamics: possible trends for the future", *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Vol. 7, No 9, pp. 2145-2173.

- 70. Tikhonov, A.N. 1943, "On the stability of inverse problems", *Rep. of Acad. Sci. USSR*, Vol. 39, No. 5, pp. 195-198 (in Russian).
- 71. Thom, R. 1969, "Topological models in biology", *Topology*, Vol. 8, No 3, pp. 313-335.
- 72. Thom, R. 1974, "Catastrophe theory: Its present state and future perspectives", *Dynamical systems*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 366-372.
- 73. Aubin D. 2001, "From catastrophe to chaos: the modelling practices of applied topologists", *Changing images of math. Ed. by U. Bottazzini and A. Dahan Dalmedico*, Routledge, N.Y., pp. 255-279.
- 74. Aleskerov, F.T. et al. 2007, *Influence and structural stability in the Russian parliament (1905-1917 and 1993-2005)*, Fizmatlit, Moscow, 309 p. (in Russian).

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 903.05:669.053

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-437-448

**История развития порошковой металлургии
и ее применение в современных технологиях**

А. Н. Кубанова, А. Е. Гвоздев

Кубанова Анастасия Николаевна — младший научный сотрудник, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: chureychik@mail.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Аннотация

В работе дано пояснение термина «порошковая металлургия» и определены основные отличия от классических способов металлургии. Описаны исторические аспекты развития технологий порошковой металлургии с древних времен. Представлены основные технологические методы порошковой металлургии и их применение для производства современных продуктов. Перечислены основные области применения различных типов продуктов современной порошковой металлургии.

Ключевые слова: порошковая металлургия, история развития порошковой металлургии, технологические процессы порошковой металлургии, типы продуктов порошковой металлургии, области применения порошковой металлургии.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

А. Н. Кубанова, А. Е. Гвоздев. История развития порошковой металлургии и ее применение в современных технологиях // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 437–448.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 903.05:669.053

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-437-448

**History of powder metallurgy development
and its application in modern technologies**

A. N. Kubanova, A. E. Gvozdev

Kubanova Anastasia Nikolaevna — junior researcher, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: chupeychik@mail.ru

Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of technical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

Abstract

The article explains the term "powder metallurgy" and defines the main differences from the classical methods of metallurgy. Historical aspects of the development of powder metallurgy technologies since ancient times are described. The main technological methods of powder metallurgy and their application for the production of modern products are presented. The main areas of application of various types of products of modern powder metallurgy are listed.

Keywords: powder metallurgy, history of development of powder metallurgy, technological processes of powder metallurgy, types of products of powder metallurgy, areas of application of powder metallurgy.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

A. N. Kubanova, A. E. Gvozdev, 2021, "History of powder metallurgy development and its application in modern technologies", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 437–448.

Понятие «Порошковая металлургия». Ее история возникновения и развития.

Порошковая металлургия — область техники, охватывающая совокупность методов изготовления порошков металлов и металлоподобных соединений, полуфабрикатов и изделий из них или их смесей с неметаллическими порошками без распыления основного компонента [1]. Сущность порошковой металлургии заключается в производстве порошков и изготовлении изделий из них или их смесей с неметаллическими порошками [2]. Принципы процесса порошковой металлургии применяются к керамическим материалам, полимерам, композиционным материалам, состоящим из металлических и неметаллических компонентов [3]. Среди неметаллических компонентов в изделиях порошковой металлургии наиболее широко представлены керамические порошки (оксиды, карбиды, нитриды, бориды и др.). Композиционные порошки — это порошки, частицы которых состоят из химически разнородных компонентов (двух и более) и (или) фаз, разделенных четко выраженной границей. Наиболее широко применяются в изделиях порошковой металлургии порошки из различных металлов и сплавов.

Основными достоинствами порошковой металлургии (как метода изготовления материалов и изделий) являются следующие [4]:

- изготовление материалов и изделий из этих материалов, которые традиционными металлургическими способами получить крайне затруднительно, а на примере тугоплавких материалов (вольфрам, молибден, тантал) — невозможно;
- использование отходов металлургического и машиностроительного производства (окалина, стружка, гальванические шламы и т. п.) в качестве исходного сырья для производства порошковых изделий;
- существенное снижение отходов за счет производства изделий с размерами и формой, близкими к конечным.

К недостаткам порошковой металлургии можно отнести:

- ограниченность в выборе форм и размеров изготавливаемых изделий и заготовок;
- сравнительно невысокое рафинирование по примесям, что, например, препятствует использованию методов порошковой металлургии в изготовлении монокристаллов и полупроводников.

Однако эти недостатки могут быть устранены за счет изготовления составных изделий или применения комплекса технологических процессов, включающих наряду с порошковой металлургией другие технологии.

Порошковая металлургия является одной из самых интересных и инновационных технологий производства, получивших основное развитие с начала XX века. Несмотря на свое относительно недавнее вхождение в производственный сектор современной экономики, технологические принципы порошковой металлургии существуют уже на протяжении тысячелетий [5].

Одной из важных характеристик процесса порошковой металлургии является формообразование металлических предметов из порошкообразных материалов без плавления. Следовательно, многие металлические предметы древних цивилизаций можно считать изготовленными с применением принципов порошковой металлургии [3].

В древние времена основными применениями порошковой металлургии были ювелирное дело, изготовление красок, оружие из железа. В качестве материалов для изготовления порошков использовались: золото, серебро, медь, платина, бронза, свинец, железо [3]. Первые упоминания об изготовлении железных, золотых и серебряных украшений датируются 3000 г. до н.э. и были обнаружены в древнеегипетских рукописях [3, 5]. Древние Египтяне знали обуглероживание железа в 1200 году до н.э., а также технику закалки железа в 900-700 годах до н.э., которая позже так же использовалась в Римской империи. Об этом свидетельствуют кинжалы, украшенные золотым порошком, найденные в гробнице египетского фараона Тутанхамона, жившего в XIV в. до н.э. Изготовление порошков в основном осуществлялось путем механического измельчения в ступе, механического разложением в воде или путем восстановления оксидов.

В Греции в 800-600 г. до н.э. было широко распространено производство порошковых железных орудий. В те времена единственным способом получения предметов из железа было уплотнение кусков губчатого железа до нужной формы. Железные губки получали восстановлением железной руды в угольных кострах. Большинство изделий, изготовленных таким способом, были ограничены по размеру и весили несколько килограммов [3].

Спустя столетия в интервале 35 – 414 гг. н.э. в Индии был создано первое для своих масштабов крупногабаритное изделие из железного порошка — Делийская колонна — весом порядка 6,5 тонн [5]. Ее изготовление осуществлялось прямым восстановлением оксида железа без плавления, в связи с отсутствием технологии плавления еще до XIX века.

Принципы порошковой металлургии также использовались арабами и немцами в X в. н. э. для изготовления своих высококачественных мечей из железного порошка. Для их изготовления железный порошок многократно подвергался горячей ковке, пока содержание углерода не станет достаточно низким и примеси не будут мелко диспергированы в железной матрице.

Эти принципы процессов порошковой металлургии для получения железа и стали были забыты и заменены металлургией расплавленного железа с развитием высокотемпературных печей для восстановления и обработки железа и стали в XVII и XVIII веках [3].

Порошковая металлургия получила бурное развитие в конце XIX — начале XX века. Среди открытий, созданных благодаря технологиям порошковой металлургии, обозначенного периода следует отметить нить накаливания из порошка вольфрама, давшую неоспоримый скачек развития в области электричества.

Современное порошковое спекание появилось в конце XIX века, наряду с развитием и расширением использования электричества. Поскольку тонкие проволоочные нити заменили электрические дуги, потребность в прочной вольфрамовой проволоке увеличилась. Развитие производства вольфрамовой нити связано с В. Д. Кулиджем, который получил свой патент в 1909 г. Процесс Кулиджа состоит из брикетирования порошка вольфрама в форму, которая спекается в защитной атмосфере и затем обжимается при высоких температурах, чтобы уменьшить его поперечное сечение и улучшить пластичность, пока не будет достигнута стадия, когда металл становится пластичным при комнатной температуре и может быть вытянут в проволоку. Все высокотемпературные операции проводились ниже температуры плавления вольфрама. Позже, другие тугоплавкие металлы, такие как молибден, тантал и ниобий были также обработаны по процессу Кулиджа. Было установлено, что при добавлении тонкодисперсного оксида тория в вольфрам во время обработки последнего, уменьшается роста зерна вольфрама во время свечения вольфрамовой нити в лампе накаливания. Это значительно увеличило сопротивление нити к провисанию и охрупчиванию. Кроме того, было установлено, что возможно формировать нити в катушки очень малого диаметра, что значительно повышает эффективность электрических ламповых нитей.

Это развитие можно рассматривать как современный Ренессанс порошковой металлургии, где процесс спекания использовался для изготовления нитей для производства электрических ламп накаливания [3]. Именно этот период времени принято считать началом освоения одного из методов порошковой металлургии — спекания, позволяющему получить компактные заготовки тугоплавких материалов пригодных для дальнейшей деформации.

Следующий прогресс в порошковой металлургии произошел с изготовлением пористых металлических заготовок, с целью их последующей пропитки смазочными материалами. Около 1910 года было получено несколько патентов, в том числе на производство бронзовых материалов с графитом [3].

Начало современному периоду развития порошковой металлургии положил отечественный ученый Соболевский П. Г., который в сотрудничестве с Любарским В. В. в 20-х годах XIX века разработал особый метод производства разнообразных изделий, используя платиновый порошок. С открытия данного метода началось ускоренное развитие порошковой металлургии, открывающей возможность создавать изделия с по-настоящему эксклюзивными свойствами, добиться которых иными способами невозможно и по сей день. Примерами могут являться пористые подшипники или приспособления для фильтрации.

Благодаря открытиям в области порошковой металлургии стали появляться материалы на основе систем оксидов и систем металл-полимер, а их структуру можно заранее спрогнозировать и даже задать [6]. Производство цементированных карбидов началось в 1922 году, что произвело революцию в механической обработке и металлообработке. В это время были разработаны такие продукты, как тяжелые сплавы вольфрама, цементированные мультикарбиды, контактные материалы, а также открыты такие методы, как жидкофазное спекание и инфильтрация (процесс заполнения пор спекаемого или не спекаемого компакта металлом

или сплавом с низкой температурой плавления). Основными потребителями продукции традиционной порошковой металлургии являлись предприятия автомобильной промышленности [7].

1930-е годы ознаменовались появлением порошковых металлических масляных насосов вместе со спеченными магнитными материалами. В это же время на немецком языке вышла первая современная книга о порошковой металлургии «Metal Ceramics» (1930 г.), а позже (1933 г.) она же была переведена на русский язык [3]. В военные годы 1940-ых годов порошковая отрасль металлургии получила новое веяние в развитии. Немецкие инженеры добавили компоненты огнестрельного оружия к растущему списку металлических порошковых продуктов [8].

После Второй мировой войны резко вырос спрос на автомобилестроение. Вместе с ним вырос спрос и на производство спеченных металлических деталей. Безусловно это было связано с разработкой более высококачественных материалов и усовершенствованием технологий их уплотнения в заготовки и изделия.

В 1944 г. рядом предприятий была создана первая Ассоциация металлического порошка (англ. MPA — Metal Powder Association), основной задачей которой было расширение рыночной базы металлического пороха. В период 1950-х гг., в связи с прекращением масштабных военных действий в мире, MPA была переименована в Федерацию производств порошковой металлургии (англ. MPIF — Metal Powder Industries Federation) [5]. Целью данной ассоциации было развитие отрасли порошковой металлургии в отношении стандартов, образования, связей с общественностью посредством конференций. Благодаря обмену опытом участникам ассоциации удалось совершить серьезный прорыв как в своих собственных технологических процессах, так и в сфере развития порошковой металлургии в целом. Со временем, благодаря общим усилиям компаний-участников ассоциации производство ряда изделий, получаемых традиционными классическими металлургическими процессами (механическая обработка, литье под давлением), было переведено на технологии порошковой металлургии, позволяющими достичь снижения себестоимости производства без потери качества продукции.

Позднее появились два связанных с порошковой металлургией процесса: литье порошкового металла под давлением с 1980 года (англ. MIM — Metal Injection Molding) и аддитивное производство (англ. AD — Additive Manufacturing) с 2000 года. Основным и принципиальным отличием данных процессов является единовременная много осевая обработка порошкового металла в форме близкой к конечной геометрии готового изделия.

По сей день технологические процессы отрасли порошковой металлургии неуклонно развиваются и позволяют получать новые материалы. Примерами последних открытий и разработок являются [5, 9]:

- псевдосплавы из несплавляемых литьем компонентов с управляемыми механическими, магнитными и другими характеристиками;
- металлические порошки с уровнем сферичности до 99%, применяемые в области построения изделий методами аддитивных технологий;
- сложнолегированные композиции металлических сплавов, в основе которых лежит совокупность легко- и тугоплавких материалов;
- разработка и получение широкого спектра сплавов и смесей (оксид бериллия, карбид кремния, чистый титан и др.), получение которых невозможно классическими металлургическими методами.

Современные области применения методов порошковой металлургии включают обработку ферритов, гранатов, пьезоэлектрических материалов для электронной промышленности,

а бериллия, суперсплавов и титановых сплавов для авиационной, аэрокосмической промышленности. Последние разработки в области порошковой металлургии позволяют создавать различные новые материалы и системы сплавов, адаптированные к конкретным технологическим требованиям. Технологии порошковой металлургии используются при изготовлении топливных элементов и для изготовления компонентов для аэрокосмических применений [10, 11].

Основные технологические процессы порошковой металлургии

В порошковой металлургии весь объем выполняемых технологических операций от исходного сырья до готового продукта можно разделить на следующие стадии:

- получение металлического порошка или смеси порошков, включая просев порошка по целевым фракциям;
- прессование (механическое прессование, гидростатирование) порошка или смеси порошков для формирования заготовок;
- спекание (спекание в печи, экструзия, горячее изостатическое прессование) заготовок;
- деформация (прокатка, ковка, прессование) заготовок;
- механическая обработка в готовое изделие.

Размер применяемых в области порошковой металлургии порошков варьируется в пределах от 1 нм до 0,5 мм. Для их получения прибегают к механическим и физико-химическим методам. Процесс получения металлических порошков напрямую зависит от природы сырьевого материала. Наиболее распространенными технологиями получения металлического порошка являются [2, 7, 12]:

- восстановление из сырьевых оксидов или солей;
- электролитическое осаждение;
- распыление струи расплавленного металла;
- термическая диссоциация;
- механическое измельчение (дробление) в специальных ударных мельницах, или оснащенных вращающимися частями.

Характер исходного материала определяет форму и свойства получаемых путем дробления частиц: если он хрупкий, то частицы получают осколочного вида, если пластичный — чешуйчатого. Пластическая деформация, которая характерна для раздробленных порошков, приводит к переформатированию присущих им свойств и структурному видоизменению [6].

Распыление (называемое также диспергированием) металлов и сплавов жидкой консистенции производят посредством струи жидкости или газа с применением форсунок различных форм. На свойства, форму и размер распыленных порошковидных веществ оказывает воздействие целый ряд факторов, включая поверхностное натяжение расплавленной массы, скорости, с которой осуществляется распыление, нюансов геометрии форсунок и физические свойства сплава. Распыление с применением воды нередко реализуется в азотной или аргонной среде. Таким способом получают железные, чугунные, стальные, никелевые и другие порошки. В роли газа для распыления может выступать воздух, азот, аргон, а также водяной пар. Существуют и другие методы распыления металла, в частности, плазменный, а также способ

разбрызгивания металлической струи в воду. Основное применение данные методы получили при изготовлении бронзовых, латунных, серебряных, оловянных и алюминиевых порошков [6].

Обязательным постпроцессом на стадии получения порошка является просев. Его осуществляют путем:

- физического просеивания через сита с определенным размером ячейки;
- каскадного разделения порошка на отдельные фракции;
- путем воздушного просеивания, основанного на эффекте Куанда.

Процесс прессования необходим для получения полуфабрикатов в виде прутков, труб, лент или отдельных заготовок, форма которых приближена к форме готовых изделий. В процессе компактирования сыпучий порошок преобразуется в плотную заготовку с пористой структурой, прочность которого позволяет ему сохранять приданную форму в ходе дальнейших операций по спеканию и деформации. Базовыми методами прессования являются [6]:

- прессование с одной или двух сторон в специальных металлических матрицах;
- прессование прокаткой;
- изостатическое прессование за счет давления газа или жидкости (гидростатическое прессование);
- мундштучное прессование;
- прессование с высокой скоростью, включая динамическое.

Прессование осуществляют как при комнатной температуре, так и в условиях высокотемпературной среды. В данном процессе порошок уплотняется за счет того, что его частицы смещаются по отношению друг к другу и впоследствии деформируются либо разрушаются. Применение достаточно большого давления при работе с порошками пластичных металлов позволяет добиваться уплотнения главным образом за счет пластической деформации, а при работе с хрупкими металлами и их соединениями – за счет разрушения и дробления частиц. Более высокой прочностью отличаются порошки, получаемые из пластичных металлов, а для придания необходимых прочностных характеристик порошкам из хрупких металлов дополнительно используют специальные связующие жидкие компоненты. В массовом производстве наиболее востребовано прессование порошков в жестких матрицах (прессформах) из металла, для чего используются таблетировочные, ротационные и иные пресс-автоматы с механическим или гидравлическим принципом действия. Получение заготовок в механическом прессе применяется, как правило, для изготовления малогабаритных заготовок.

Компактирование прокаткой подразумевает формирование заготовок из порошка в непрерывном режиме в валках прокатных станов. В валки порошок сыпается сам или подается принудительным способом. Прокатка позволяет получать листы, профили и ленты с пористой структурой.

Технология изостатического прессования предполагает помещение порошка или пористых заготовок в специальную оболочку с последующим ее вакуумированием, после чего материал сжимается рабочим газом со всех сторон при высокой температуре. В завершение процесса оболочку демонтируют. Изостатическое прессование, в зависимости от типа используемой рабочей среды, подразделяется на гидро- и газостатическое. Первый вариант в большинстве случаев осуществляется в условиях комнатной температуры, тогда как для второго необходимы высокие температуры. За счет изостатического прессования удается получать изделия,

отличающиеся сложной формой, и имеющие предельно однородную плотность по всему объему. Процесс прессования (формирования) заготовок путем холодного гидростатического прессования (гидростатирование) проводят при давлении до 2000 МПа в металлических формах с внутренней латексной оболочкой. Таким способом получают крупногабаритные заготовки, как правило, из тугоплавких материалов (вольфрам, молибден) с размерами до 0,7-0,8 м в диаметре и 1,9 м в высоту.

Принципом мундштучного прессования является продавливание сквозь отверстие в мундштуке порошка, смешанного с пластификатором. Данный способ применяется для сложно-прессуемых порошков, произведенных из хрупких металлов. Результатом подобной обработки становится получение длинных заготовок, имеющих однородный состав и равномерную плотность.

Финальной операцией изготовления изделий методом порошковой металлургии является спекание. Оно подразумевает термическую обработку заготовок в условиях, когда температура не достигает значения, необходимого для плавления, по крайней мере, одного из компонентов. Данная процедура необходима для того, чтобы повысить плотность изделия и придать ему определенные механические и физико-химические свойства. Вначале спекания частицы проскальзывают друг по отношению к другу, между ними формируются контакты, центры частиц сближаются. За счет процесса диффузии, возникающей при воздействии температуры спекания, пустоты между частицами сокращаются, их количество минимизируется и как следствие, возрастает плотность изделия. Для спекания в большинстве случаев используют защитную среду, представленную обычно инертными газами, восстановительную среду, в роли которой выступает водород или углеводородсодержащие газы, либо вакуум. Нагреваются изделия в электрических или индукционных печах либо за счет прямого пропускания тока [6].

Спекание прессованных заготовок проводят при температуре, составляющей 70-90% от температуры плавления основного материала заготовки [12]. При спекании смеси материалов максимальная когезия достигается вблизи температуры плавления основного компонента, а в цементированных карбидах — вблизи температуры плавления связующего. С повышением температуры и увеличением продолжительности спекания увеличиваются усадка, плотность и улучшаются контакты между зернами. Во избежание окисления материалов, спекание проводят в восстановительной атмосфере (водород), атмосфере нейтральных газов (аргон) или в вакууме [2, 7, 12].

Существует возможность совмещения в одной технологической операции и процесса прессования, и процесса спекания. Это осуществимо с применением операций горячей экструзии или горячего изостатического прессования, в которых исходным материалом является порошок, а готовым продуктом является плотная заготовка с размерами близкими к конечным [13]. Новые процессы в порошковой металлургии, используемые для получения материалов с высокими эксплуатационными свойствами, привели к значительному прогрессу в технологии производства порошков, прессования, спекания и обработки давлением [10].

Основные виды современных продуктов порошковой металлургии и области их применения.

Сегодня технологии порошковой металлургии используются преимущественно для обработки материалов, применяемых в атомной, электронной и аэрокосмической отраслях [1]. Основное применение порошковые металлические детали нашли и в инженерных системах [14]. Традиционно технология порошковой металлургии выбиралась из-за экономической эффективности. Однако, сегодня достигаемый уровень производительности, физико-механических характеристик и в целом качество готовых продуктов, произведенных по технологии порош-

ковой металлургии, значительно превосходит показатели классической традиционной металлургии. Изделия, произведенные из металлического порошка при правильно подобранной технологии, имеют однородные свойства по всем сечениям. Кроме того, диапазон применений порошковой металлургии также расширился от когда-то узкого рынка самосмазывающихся подшипников до таких несопоставимых областей, как медицинские технологии и компьютерная техника. Например, производство порошковых металлов обеспечило решение проблем рассеивания тепла с кремнием в электронных системах, позволяя создавать радиаторы с низким тепловым расширением и высокой теплопроводностью. В сфере здравоохранения развитие отрасли порошковой металлургии привело к созданию биомедицинских имплантатов, имеющих хорошую биосовместимость с телом человека и контролируемую ликвидацию свойств по сечению.

Продукция порошковой металлургии используется в различных отраслях промышленности [2, 7, 12]. Круг изделий, изготавливаемых методами порошковой металлургии, весьма широк и непрерывно увеличивается. Среди явных представителей изделий порошковой металлургии можно отметить зубчатые колеса, рычаги, кулачки и поршни, применяемые в областях автомобилестроения, машиностроения, энергетики, средств связи, строительной, горнодобывающей и авиакосмической промышленности. Из ленты, полученной холодной прокаткой никелевого порошка, изготавливают монеты, например, канадский пятицентовый доллар. Порошок железа используется в качестве носителя для тонера в ксероксах. Алюминиевый порошок служит компонентом ячеистого бетона, красок и пигментов твердого ракетного топлива.

Без изучения и применения методов порошковой металлургии не появились бы способы обработки тугоплавких материалов и получения изделий из них. Благодаря технологиям порошковой металлургии стало возможным изготовление вольфрамовых коллиматоров для рентгеновской техники, снарядов с высокой скоростью и мощностью пробития из тяжелых сплавов вольфрама. Развитие порошковой металлургии оказало неизмеримый вклад в развитие всех отраслей промышленности.

Технологии, задействованные в порошковой металлургии, обеспечивают возможность изготовления специфических продуктов. Конструкционные порошковые материалы применяются для изготовления всевозможных деталей для приборов и машин с разноплановыми механизмами. Они обладают повышенной механической прочностью и высоким уровнем экономичности [6].

Использование порошковых материалов для выпуска фильтров обусловлено тем, что в процессе производства им можно задать улучшенные свойства по сравнению с иными пористыми материалами. В частности, для них характерна высокая очистительная способность при сохранении достаточной проницаемости, устойчивость к воздействию высоких температур, превосходная прочность, отличная теплопроводность, малоподверженность абразивному износу. Порошковой металлургией, могут быть получены фильтровальные изделия, имеющие изменяемую или регулируемую пористость, уровень проницаемости, а также степень очищения. Фильтры вместе с подшипниками пористой структуры входят в перечень основных видов пористых изделий, производимых методами порошковой металлургии [6].

Методами порошковой металлургии получают и триботехнические материалы, которые в свою очередь подразделяются на антифрикционные и фрикционные. Первые характеризуются наличием твердой матрицы, внутри которой находится мягкотелый наполнитель. Методы порошковой металлургии обеспечивают возможность получения антифрикционных изделий, имеющих низкий и стабильный коэффициент трения, отличающихся низким коэффициентом изнашивания, сопротивляющихся схватыванию. Такие изделия относятся к категории самосмазывающихся, поскольку смазывающий наполнитель еще на этапе производства был помещен в поры матрицы основного компонента. Антифрикционные материалы пригодны для производства разноплановых объемных элементов. Они также отлично справляются с функцией покрытий, нанесенных на подложки. Одним из наиболее ярких примеров продуктов,

изготовленных из материалов данного класса, являются подшипники скольжения.

Фрикционные материалы порошкового типа находят применение в узлах, служащих для передачи кинетической энергии. Для таких материалов характерна высокая износостойкость и отличные прочностные характеристики. Как правило, в состав подобных материалов включаются компоненты металлической и неметаллической природы. Первые придают готовым изделиям высокую теплопроводность, тогда как вторые необходимы для повышения коэффициента трения [6].

Широкое применение порошковая металлургия находит для получения инструментальных твердых поликарбидных сплавов, имеющих высокую красностойкость. Твердосплавные порошковые изделия имеют в своем составе тугоплавкие карбиды, соединенные с пластичными связующими металлической природы. Они изготавливаются за счет прессования порошковых смесей и жидкофазного запекания. Твердосплавные материалы, характеризующиеся высокими прочностными свойствами, твердостью и слабой изнашиваемостью, в своем составе, как правило имеют более 60% вольфрама. Эти материалы служат основой для производства инструментов, применяемых при резке металла, штамповке, воздействия давлением, бурения горных пород. Для улучшения свойства инструментов, изготовленных из данных материалов, нередко дополнительно на их поверхность наносят покрытия из тугоплавких соединений [6].

Категория электротехнических материалов порошкового типа подразделяется на несколько групп: контактные, электропроводящие, магнитные и прочие. Контактные материалы способны переносить до нескольких миллионов замыканий и размыканий электроцепей. Также существуют варианты контактов скользящего типа, которые задействуются при изготовлении электродвигателей, генераторов, потенциометров, токосъемников и прочих устройств.

Порошковые высокотемпературные материалы, состоящие из сплавов тугоплавких металлов (вольфрама, молибдена, циркония) активно применяются в авиационном строительстве, радиотехнике, электронике и других наукоемких отраслях. Порошковые материалы широко распространены и в атомной энергетической сфере, где они применяются для изготовления поглотителей с замедлителями и тепловыделяющих элементов.

Заключение

Начав свою историю развития много десятилетий назад порошковая металлургия приобрела поистине мировой масштаб, став основным технологическим процессом металлических товаров на продажу и, тем самым делая значительный вклад в развитие экономики особенно в развитых странах. Индустрия порошковой металлургии сегодня очень разнообразна и содержит широкий спектр предприятий, которые специализируются на одном или нескольких из многочисленных нишевых рынков в этом сегменте. С такой разнообразной и сильной историей, порошковая металлургия, несомненно, продолжит свой успех в течение еще многих десятилетий [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.С. Кипарисов, Г.А. Либенсон. Порошковая металлургия. М., «Металлургия», 1980. 496 с.
2. В.Н. Анциферов. Порошковая металлургия и напыленные покрытия. М., «Металлургия», 1987, 792 с.
3. Plotkin S.Y., Fridman G.L. History of powder metallurgy and its literature. Powder Metallurgy and Metal Ceramics, vol. 13, 1974, p. 1026-1029.
4. <https://extxe.com/14744/poroshkovaja-metallurgija-2/> дата обращения 29.01.2020 г.

5. <https://atlaspressedmetals.com/history/> дата обращения 29.01.2020 г.
6. <https://metallplace.ru/about/stati-o-chnoy-metalurgii/poroshkovaya-metallurgiya/> дата обращения 29.01.2020 г.
7. Г.Н. Теплухин. Порошковые материалы. СЗПИ. 1984, 81 с.
8. <https://www.horizontechnology.biz/blog/history-of-powder-metallurgy-metal-powder-products/> дата обращения 30.01.2020 г.
9. А.Н. Кубанова, А.Н. Сергеев, Н.М., Добровольский, А.Е. Гвоздев, П.Н. Медведев, Д.В. Малий, Особенности материалов и технологий аддитивного производства изделий // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 452-476.
10. Д. Барк, В. Вейс. Порошковая металлургия материалов специального назначения. Пер. с англ. М., «Металлургия», 1977, 376 с. с ил.
11. А.Е. Гвоздев. Экстремальные эффекты прочности и пластичности в металлических высоколегированных слитковых и порошковых системах: монография: 2-е изд., испр. и доп. Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 476 с.
12. Г.А. Либерсон. Производство спеченных изделий. М., «Металлургия», 1982, 256 с.
13. F. Skaupy and V. S. Rakovskii, Metal Ceramics. Manufacture of Metal Articles from Powders. Изд. Металлург, 1983, 365 с.
14. Randall M. German. Powder Metallurgy & Particulate Materials Processing, Metal Powder Industry. 2005, p. 528.
15. Leander F. Pease, William G. West. Fundamentals of powder metallurgy. Metal Powder Industry. 2002, p. 452.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kiparisov S.S., Libenson G.A. 1980. Powder metallurgy. Metallurgy, Moscow.
2. Anziferov V.N. 1987. Powder metallurgy and sprayed coatings. Metallurgy, Moscow.
3. Plotkin S.Y., Fridman G.L. 1974, "History of powder metallurgy and its literature". Powder Metallurgy and Metal Ceramics, vol.13, p. 1026-1029. doi: 10.1007/BF00807917.
4. Modern technology of production (2020), Available at: <https://extxe.com/14744/poroshkovaya-metallurgiya-2/> (accessed 29 January 2020).
5. Atlas Pressed Metals (2020), Available at: <https://atlaspressedmetals.com/history/> (accessed 29 January 2020).
6. Metal place (2020), Available at: <https://metallplace.ru/about/stati-o-chnoy-metalurgii/poroshkovaya-metallurgiya/> (accessed 29 January 2020).
7. Tepluhin G.N. 1984. Powder's materials. SZPI, Leningrad.
8. Horizon Technology Inc. (2018), Available at: <https://www.horizontechnology.biz/blog/history-of-powder-metallurgy-metal-powder-products> (accessed 30 January 2020).

9. Kubanova A.N., Sergeev A.N., Dobrovolskii N.M., Gvozdev A.E., Medvedev P.N., Malii D.V. 2019, "Materials and technologies for production products by additive manufacturing", Chebyshevskii sbornik. vol. 20, no. 3 (71), pp. 452-476.
10. Bark D. & Veys V. 1977, Powder metallurgy of special-purpose materials. Metallurgy, Moscow.
11. Gvozdev A.E., 2019. Extreme effects of strength and plasticity in metal high alloy ingot and powder systems, Tula state University, Tula.
12. Libenson G.A., 1982, Production of sintered products, Metallurgy, Moscow.
13. Skaupy F. and Rakovskii V.S., 1983, Metal Ceramics. Manufacture of Metal Articles from Powders, ONTI-Metallurg, Moscow.
14. Randall M. German. 2005. Powder Metallurgy & Particulate Materials Processing, Metal Powder Industry. England.
15. Leander F. Pease, William G. West. 2002. Fundamentals of powder metallurgy. Metal Powder Industry. England.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 669.141:621.78

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-449-471

О значении математических вычислений в исследовании характеристик структуры и физико-механических свойств стали 30ХГСА, выплавленной на различной шихте

Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева,
А. Е. Гвоздев, Д. С. Клементьев

Сергеев Николай Николаевич — доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: technology@tspu.tula.ru

Сергеев Александр Николаевич — доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: ansergueev@mail.ru

Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Клементьев Денис Сергеевич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: denis.klementev.93@mail.ru

Аннотация

В статье рассмотрено влияние качества исходной шихты на структуру и физико-механические свойства конструкционной среднелегированной стали 30ХГСА. Выявлено, что сталь 30ХГСА (плавки № 3–4), отлитая в чугунные изложницы (вес слитка 2,6 т), обладает значительной химической неоднородностью и ликвацией по углероду и основным легирующим элементам (Cr и Mn), причем в плавке на полупродукте кипящего шлакового слоя ликвация выражена сильнее. Начиная с температуры отпуска 500 °С, структура обеих плавок (кипящего шлакового слоя и обычной металлизированной шихты) становится более однородной и механические свойства выравниваются. Микроструктурными исследованиями, установлено, что с повышением температуры отжига при одной выдержке химическая неоднородность уменьшается, но несильно. Начиная с 1000 °С, при увеличении температуры отжига проявляется разнотернистость стали и рост аустенитных зерен, особенно в плавке на полупродукте кипящего шлакового слоя. Разнотернистость неблагоприятно влияет на механические свойства стали: укрупнение зерна понижает сопротивление стали хрупкому разрушению, ухудшает служебные характеристики металла. Устранения химической и структурной неоднородности можно добиться за счет проведения гомогенизирующего отжига (отжиг при 950 °С в течение 8 часов). Повышение температуры отжига приводит к интенсивному росту зерна, особенно в стали, выплавленной на первородной шихте. Показано, что сталь 30ХГСА, выплавленная на полупродукте кипящего шлакового слоя, в

улучшенном состоянии при равных твердости и прочностных характеристиках имеет повышенные пластические свойства и особенно ударную вязкость по сравнению со сталью на обычной металлизированной шихте. По-видимому, это должно определять и более высокие эксплуатационные характеристики стали, полученные с применением чистой первородной шихты.

Ключевые слова: поверхностно-активные примеси, термообработка, полупродукт кипящего шлакового слоя, обычная металлизированная шихта, гомогенизирующий отжиг.

Библиография: 34 названия.

Для цитирования:

Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Д. С. Клементьев. О значении математических вычислений в исследовании характеристик структуры и физико-механических свойств стали 30ХГСА, выплавленной на различной шихте // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 449–471.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 669.141:621.78

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-449-471

On the importance of mathematical calculations in the study of structure characteristics and the physical and mechanical properties of 30XGSA steel, smelted on a different charge

N. N. Sergeev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva,
A. E. Gvozdev, D. S. Klement'yev

Sergeev Nikolay Nikolaevich — doctor of technical science, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: technology@tspu.tula.ru

Sergeev Alexander Nikolaevich — doctor of pedagogical science, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: ansergueev@mail.ru

Kutepov Sergey Nikolaevich — candidate of pedagogical science, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of technical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Klement'yev Denis Sergeevich — graduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: denis.klementev.93@mail.ru

Abstract

The article considers the influence of the quality of the initial charge on the structure and physical and mechanical properties of the structural medium-alloy steel 30KhGSA. It was found that the 30KhGSA steel (smelters No. 3-4) cast in cast-iron molds (ingot weight 2.6 t) has a significant chemical heterogeneity and liquation in carbon and the main alloying elements (Cr and Mn), and in the melting on the semi-product of the boiling slag layer, the liquation is more pronounced. Starting from the tempering temperature of 500 °C, the structure of both melts (the fluidized slag layer and the ordinary metallized charge) becomes more uniform and the mechanical properties are aligned. Microstructural studies have established that with an increase in the annealing temperature at a single exposure, the chemical inhomogeneity decreases, but not significantly. Starting from 1000 °C, when the annealing temperature increases, the steel grain diversity and the growth of austenitic grains appear, especially in the melting on the semi-product of the boiling slag layer. Different grain sizes adversely affect the mechanical properties of steel: grain enlargement reduces the resistance of steel to brittle fracture, worsens the service characteristics of the metal. Elimination of chemical and structural heterogeneity can be achieved by conducting a homogenizing annealing (annealing at 950 °C for 8 hours). An increase in the annealing temperature leads to an intensive grain growth, especially in steel smelted on the original charge. It is shown that 30XGSA steel, which is melted on a semi-product of a boiling slag layer, in an improved state with equal hardness and strength characteristics, has increased plastic properties and especially impact strength in comparison with steel on a conventional metallized charge. Apparently, this should also determine the higher operating characteristics of steel obtained with the use of pure primary charge.

Keywords: surface-active impurities, heat treatment, semi-product of the fluidized slag layer, ordinary metallized charge, homogenizing annealing.

Bibliography: 34 titles.

For citation:

N. N. Sergeev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, D. S. Klement'yev, 2021, "On the importance of mathematical calculations in the study of structure characteristics and the physical and mechanical properties of 30XGSA steel, smelted on a different charge", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 449–471.

Введение

Постоянно повышающиеся требования к качеству выпускаемой продукции черной и цветной металлургии ставят перед инженерами-технологами задачу получения сталей и сплавов, обладающих высоким комплексом физико-механических, технологических и эксплуатационных свойств, способных воспринимать длительно действующие статические, динамические и циклические нагрузки без разрушения.

Одним из эффективных методов получения высококачественных сталей является применение в процессе ее выплавки чистой первородной шихты свободной или почти свободной от вредных примесей [1, 2]. Причем по мнению А. П. Гуляева [2] более важно иметь чистую шихту, чем удалять серу и газы сложными металлургическими приемами.

О причине улучшения физико-механических свойств стали, выплавленной на первородной шихте большинство авторов высказываются осторожно и неоднозначно. Одни видят причину в меньшем содержании примесей и неметаллических включений [3, 4, 5]; другие — считают, что изменение свойств стали, выплавленной на первородной шихте, происходит из-за большего роста зерна при нагреве, чем у стали, выплавленной на ломе [1, 2]. Большинство авторов предполагает, что особые свойства стали, выплавленной на шихте прямого восстановления, вызваны строением, чистотой и состоянием границ зерен [1, 2, 4]. Однако вплоть до настоящего времени нет четкого представления о причине такого влияния шихты на свойства сталей.

Основная часть

Цель настоящей работы — исследование влияния качества первородной шихты и термической обработки на структуру и физико-механические свойства конструкционной среднеуглеродистой стали 30ХГСА.

Материалы и методы исследования

В качестве объекта исследования был выбран типичный представитель конструкционных среднелегированных сталей — сталь 30ХГСА выплавленная с использованием обычной металлической шихты (ОМШ) и заготовки, полученные методом кипящего шлакового слоя (КШС). Химический состав и характеристика плавов приведены в табл. 1.

Таблица 1: Химический состав плавов стали 30ХГСА

№ плавки	Шихта	Содержание элементов, %							
		C	Mn	Si	S	P	Cu	Ni	Cr
1	ОМШ	0,34	1,17	1,14	0,018	0,018	0,19	0,16	0,94
2	КШС	0,30	1,06	1,06	0,016	0,013	0,02	0,07	0,96
3	ОМШ	0,35	0,94	0,80	0,015	0,015	0,13	0,11	1,08
4	КШС	0,31	0,90	0,98	0,009	0,009	0,09	0,06	1,18

В соответствии с поставленными задачами исследования сталь 30ХГСА, выплавленная на различной шихте, имела одинаковые условия выплавки, вакуумирования, раскисления, разливки и кристаллизации. Температура разливки составила 1600...1620 °С.

Плавки № 1 и № 2 были разлиты на устройстве непрерывной разливки стали (круглое сечение Ø275 мм).

Разливку плавов № 3 и № 4 осуществляли в чугунные изложницы сифоном в течение 4...5 минут. Раскисление проводили в ковше алюминием в количестве 4...4,5 кг/плавку. После затвердевания слитки охлаждали в специальных колодцах. Слитки разрезали на 3 части: головную, срединную и донную (размером 600 × 600 мм). Среднюю часть затем в горячую ковали и катали до прутка Ø30 мм. Длина прутка составляла 2...3,4 м. После горячей деформации прутки охлаждали на воздухе.

Для исследования механических свойств стали 30ХГСА проводили испытания на одноосное растяжение, ударный изгиб и измерение твердости. Отбор образцов (5 штук от каждой плавки) для испытаний носил случайный характер, что обязательно для получения надежного и точного результата. Ударную вязкость измеряли в диапазоне температур –80...+20 °С (через каждые 20 °С). Испытания на растяжение выполняли на разрывной машине Р-5, а на ударный изгиб на маятниковом копре МК-30А.

Виды образцов для испытаний на одноосное растяжение и ударный изгиб приведены на рис. 1. После испытаний вычисляли следующие величины: временное сопротивление (σ_B , МПа), относительное сужение (Ψ , %), относительное удлинение (δ , %) и ударную вязкость (a_H (a_{IV}), Дж/см²).

Значения механических характеристик (временное сопротивление разрыву, условный предел текучести, относительное удлинение и относительное сужение, истинное сопротивление разрыву) определяли по следующим формулам:

$$\sigma_B = \frac{P_{\max}}{F_0}, \text{ МПа}; \quad \sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F_0}, \text{ МПа}; \quad \delta = \frac{(l_k - l_0)}{l_0} \cdot 100\%;$$

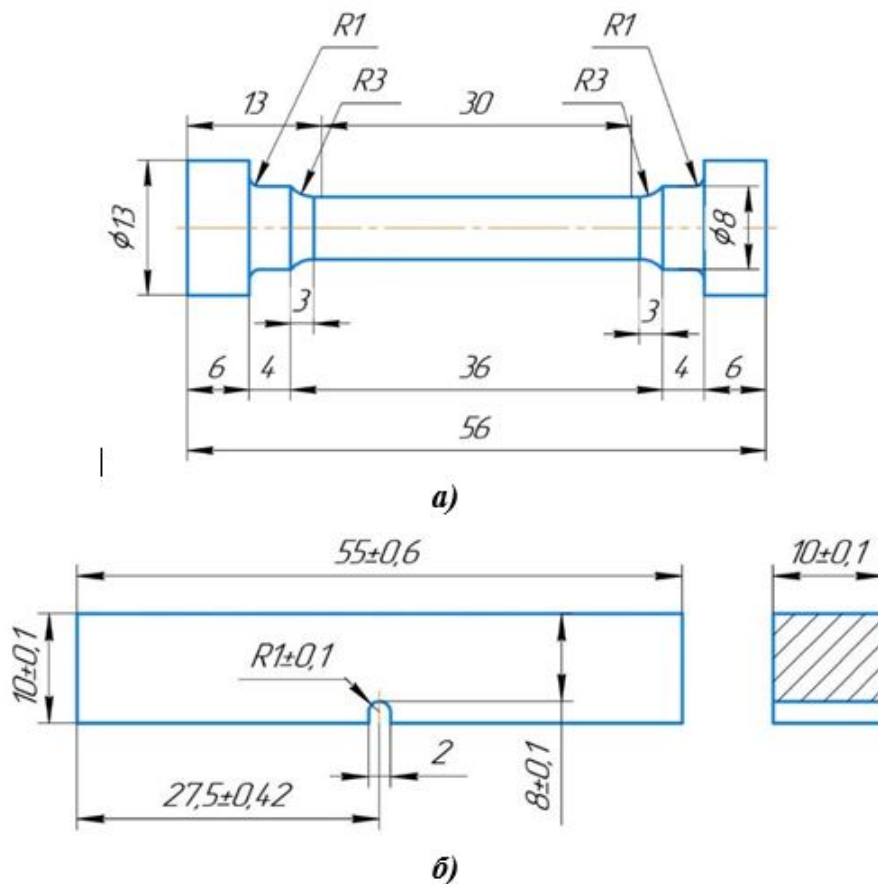


Рис. 1: Виды образцов для механических испытаний: а) на одноосное растяжение; б) на ударный изгиб

$$\Psi = \frac{(F_0 - F_K)}{F_0} \cdot 100\%; \quad S_K = \frac{P_K}{F}, \text{ МПа},$$

где F_0 — начальная площадь поперечного сечения образца, мм²; F_K — площадь поперечного сечения образца после разрыва, мм²; F — истинное сечение образца в момент разрыва, мм²; $P_{\max}$ — напряжение, соответствующее наибольшему усилию, предшествующему разрыву образца, Н; $P_{0,2}$ — нагрузка растяжения в начале площадки текучести, Н; P_K — нагрузка в момент разрыва образца, Н; l_0 — участок рабочей длины образца между нанесенными метками до испытания, на котором определяется удлинение, мм; l_K — длина расчетной части после разрыва образца, мм.

Фазовый состав стали 30ХГСА после отпуска определяли рентгеноструктурным методом. После высокого отпуска кроме α -твердого раствора и легированного цементита в стали обнаружен специальный карбид хрома Cr_{23}C_6 .

Результаты и их обсуждение

Исследование механических свойств стали 30ХГСА (плавки № 1–4) при растяжении и на ударный изгиб в литом (плавки № 1 и № 2) и горячедеформированном состоянии (плавки № 3–4), не выявили преимуществ применения шихты прямого восстановления по таким характеристикам как σ_B , Ψ , δ , и S_K несмотря на большую загрязненность неметаллическими включениями плавки на ОМШ (табл. 2). Однако ударная вязкость стали, выплавленной на

полупродукте КШС, выше, особенно после горячей пластической деформации, например, 62,5 и 80 Дж/см² для плавок № 1 и № 2 соответственно. Ударная вязкость наиболее полно характеризует пластические свойства металлов, а ее величина очень чувствительна к структурным изменениям в материале, обусловленным особенностями выплавки и последующей обработки слитка. Поэтому были проведены испытания ударной вязкости при пониженных температурах (+20... – 80 °С) в литом и горячедеформированном состояниях.

На рис. 2, 3 приведены температурные зависимости ударной вязкости образцов из стали 30ХГСА в литом и горячедеформированном состояниях. Установлено, что ударная вязкость стали на первородной шихте выше в исследованном интервале температур, чем стали, выплавленной на ОМШ, а порог хладноломкости ниже, примерно на 20°С. Прочностные и пластические свойства стали 30ХГСА зависят от места вырезки (слиток Ø275 мм, получен на УНРС). Выявлено, что более высокие прочностные свойства и ударную вязкость имеют крайние образцы по сравнению с образцами, вырезанными из центральной части слитка (рис. 4), причем механические свойства образцов из стали, выплавленной на полупродукте КШС, выше и более стабильны.

Измерение температурных зависимостей внутреннего трения и модуля нормальной упругости E показали, что в литом и горячедеформированном состоянии сталь 30ХГСА, выплавленная на полупродукте КШС, имеет более высокотемпературный фон внутреннего трения и модуль упругости, что связано с меньшей дефектностью кристаллической решетки металла [7, 8].

Таблица 2: Механические свойства стали 30ХГСА в литом и горячедеформированном состоянии

№ плавки	Шихта и состояние металла	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_B , МПа	δ , %	Ψ , %	S_K , МПа	a_H , Дж/см ²
1	ОМШ, литое	376,1	665,4	14,6	27,8	873,8	50
2	КШС, литое	375,6	669,8	19,0	33,2	907,12	60
1	ОМШ, литое нормализованное	448,2	762,96	24,0	56,2	—	—
2	КШС, литое нормализованное	432,5	734,52	24,2	55,2	—	—
1	ОМШ, ковка в горячую на сутунку 40 × 250 мм	394,23	693,33	25,9	49,5	1127,8	—
2	КШС, ковка в горячую на сутунку 40 × 250 мм	374,61	679,6	25,1	48,4	1091,5	—
1	ОМШ, ковка в горячую на пруток Ø15 мм	651,2	857,1	18,2	52,6	1317	62,5
2	КШС, ковка в горячую на пруток Ø15 мм	583,5	816,9	23,5	59,5	1384,7	80
3	ОМШ, ковка в горячую на пруток Ø30 мм — продольные	563,9	850,24	15,0	59,7	1667,13	—

4	КШС, ковка в горячую на пруток $\varnothing 30$ мм — продольные	488,4	799,24	20,8	66,5	1479,82	—
3	ОМШ, ковка в горячую на пруток $\varnothing 20$ мм — поперечные	538,4	855,14	21,1	58,6	1382,74	53
4	КШС, ковка в горячую на пруток $\varnothing 20$ мм — поперечные	567,81	796,3	23,0	58,3	1291,54	82

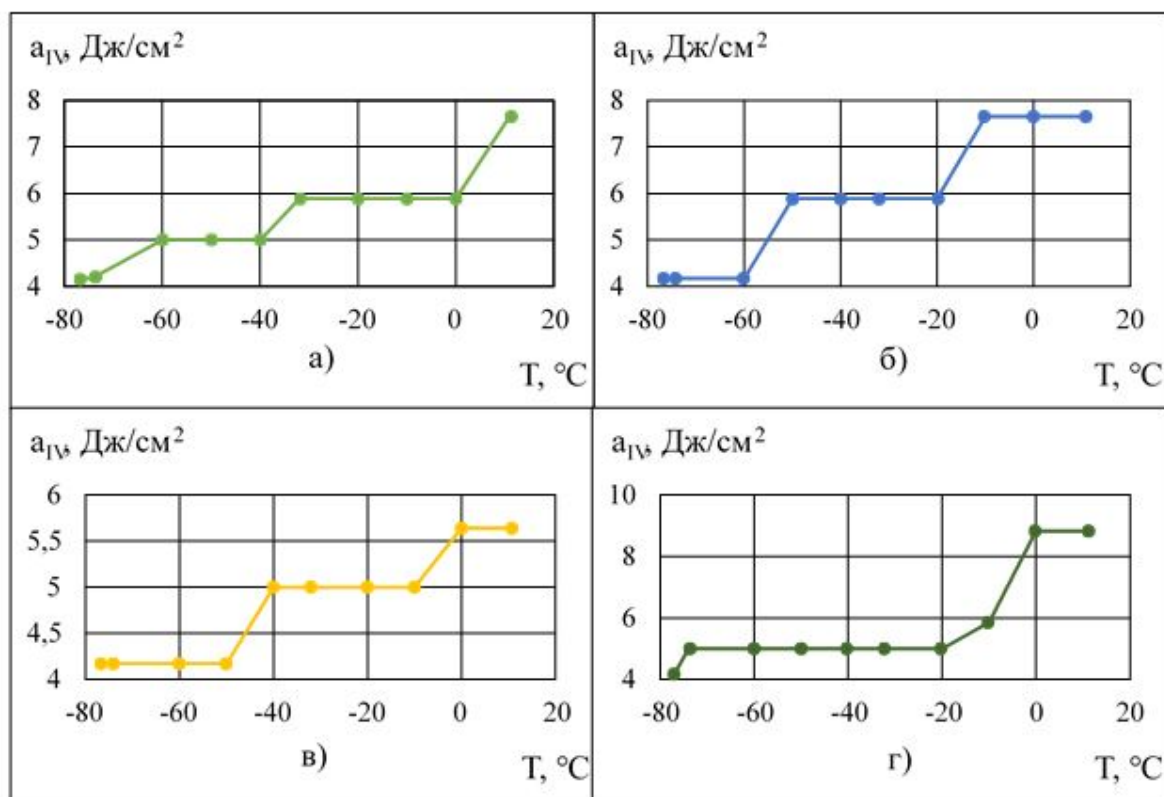


Рис. 2: Температурные зависимости ударной вязкости стали 30ХГСА в литом состоянии для образцов, вырезанных из центра (а и в) и края (б и г) слитка. Шихта: а, б – КШС (плавка № 4); в, г – ОМШ (плавка № 3)

Влияние режимов термической обработки на механические свойства и структуру стали 30ХГСА исследовали на двух плавках, одна из которых выплавлена на основе ОМШ (плавка № 3); другая — на полу-продукте КШС (плавка № 4), близкого химического состава по основным примесям, но отличающихся по количеству микропримесей цветных металлов Cu, As, Sn,

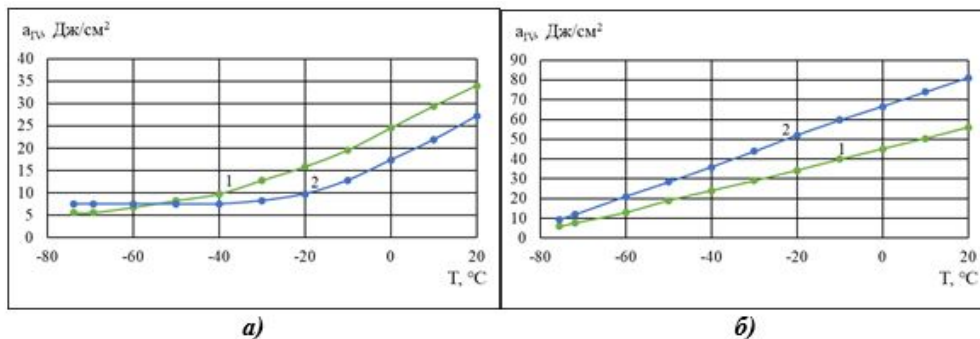


Рис. 3: Температурные зависимости ударной вязкости стали 30XГСА после горячей пластической деформации: а) прутки Ø30 мм, (продольные образцы); б) прутки Ø20 мм, (поперечные образцы); 1) шихта ОМШ (плавка № 3); 2) полупродукт КШС (плавка № 4)

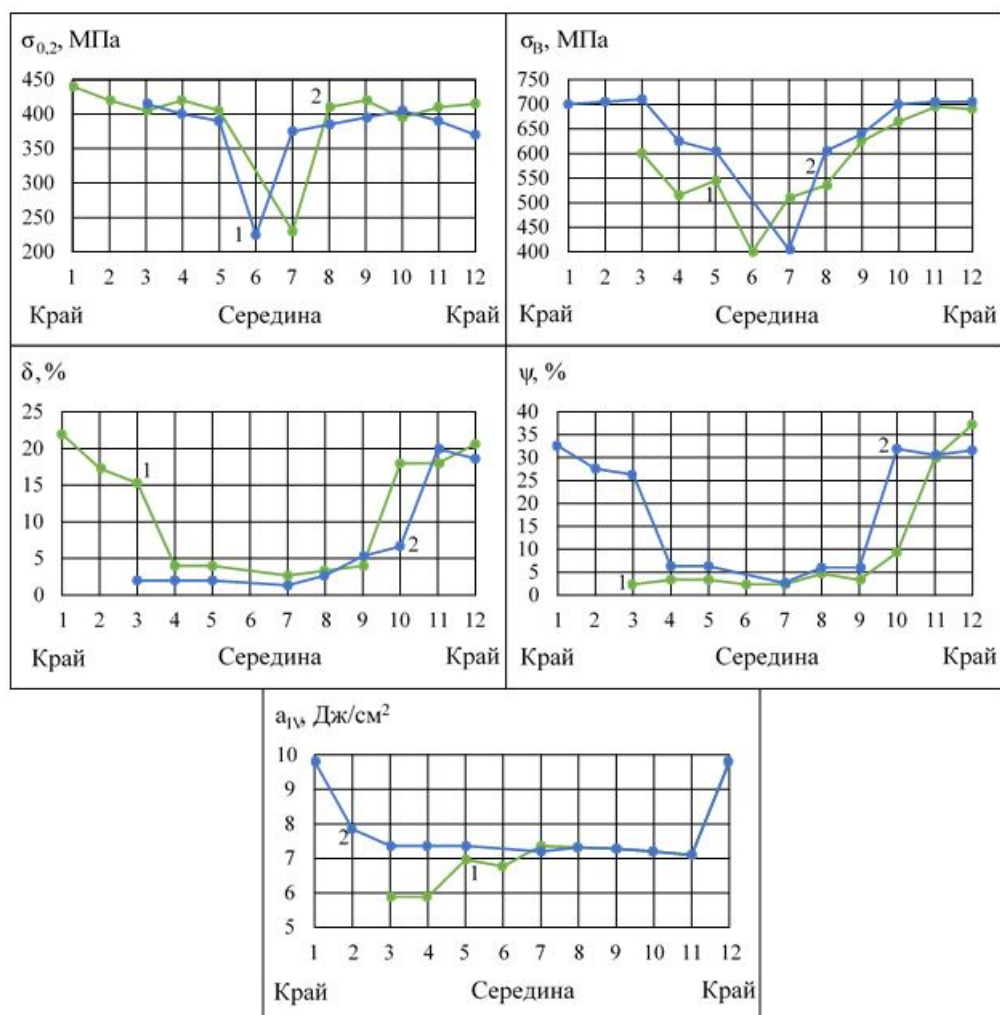


Рис. 4: Влияние места вырезки на механические свойства стали 30XГСА в литом состоянии, выплавленной на ОМШ (1) и полупродукте КШС (2)

Sb и др. Обе плавки были разлиты в чугунные изложницы, но время заполнения формы разное, поэтому плавки отличались первичной дендритной структурой. Горячая деформация и последующий отжиг при температуре 820 °С в течение 1 часа не устранили химическую неоднородность в структуре исследуемой стали (рис. 5).

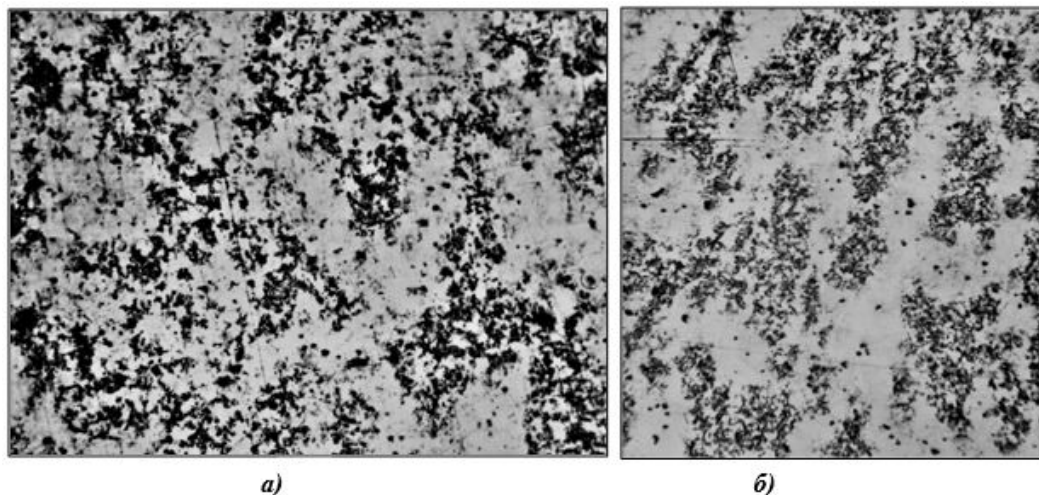


Рис. 5: Первичная ликвация в стали 30ХГСА после горячей деформации и отжига, $\times 100$: а) плавка на полупродукте КШС; б) плавка на ОМШ

Размеры зон ликвации в 1,5...2 раза больше в плавке на основе полупродукта КШС. Рентгеноспектральные исследования на приборе МАР-1 образцов, вырезанных из центра и края слитков, подтвердили химическую неоднородность по хрому и марганцу после предварительной обработки (горячая деформация + отжиг при $t = 820^\circ\text{C}$, $\tau = 1$ час) (рис. 6, кривые 1, 3, 5, 7). Степень химической неоднородности у образцов, вырезанных из центра и края слитков различна, что свидетельствует о некоторой зональной ликвации и более развитой дендритной ликвации (рис. 7, кривые 1, 3, 5, 7).

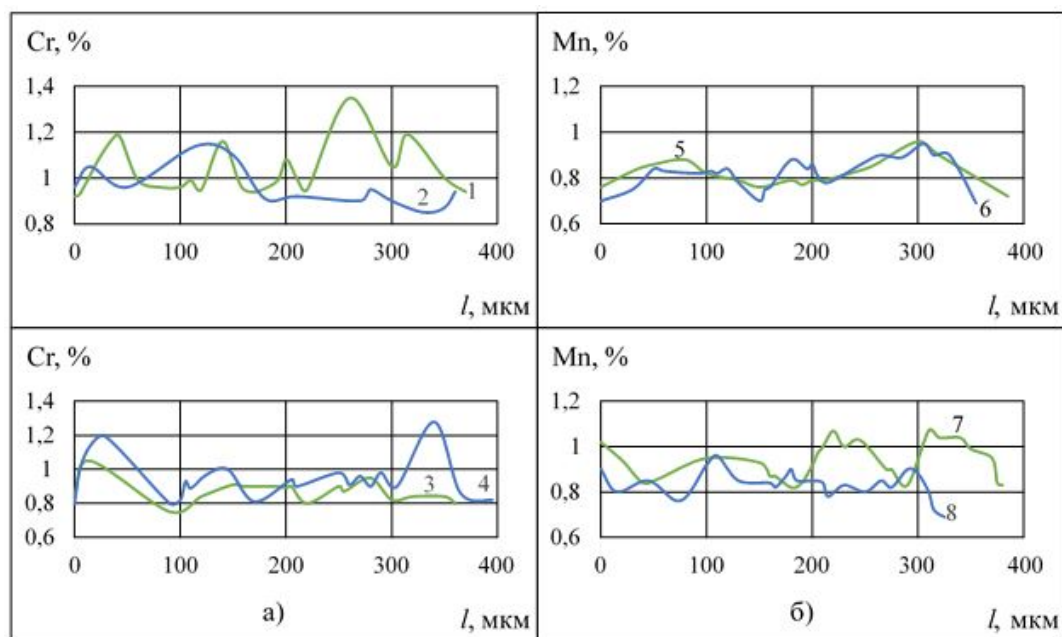


Рис. 6: Изменение концентрации Cr (а) и Mn (б) по сечению образцов стали 30ХГСА, вырезанных из центра слитков. Полупродукт КШС – 1, 2, 5, 6; ОМШ – 3, 4, 7, 8. Кривые 1, 4, 5, 7 до отжига – гомогенизации; кривые 2, 3, 6, 8 – после отжига – гомогенизации

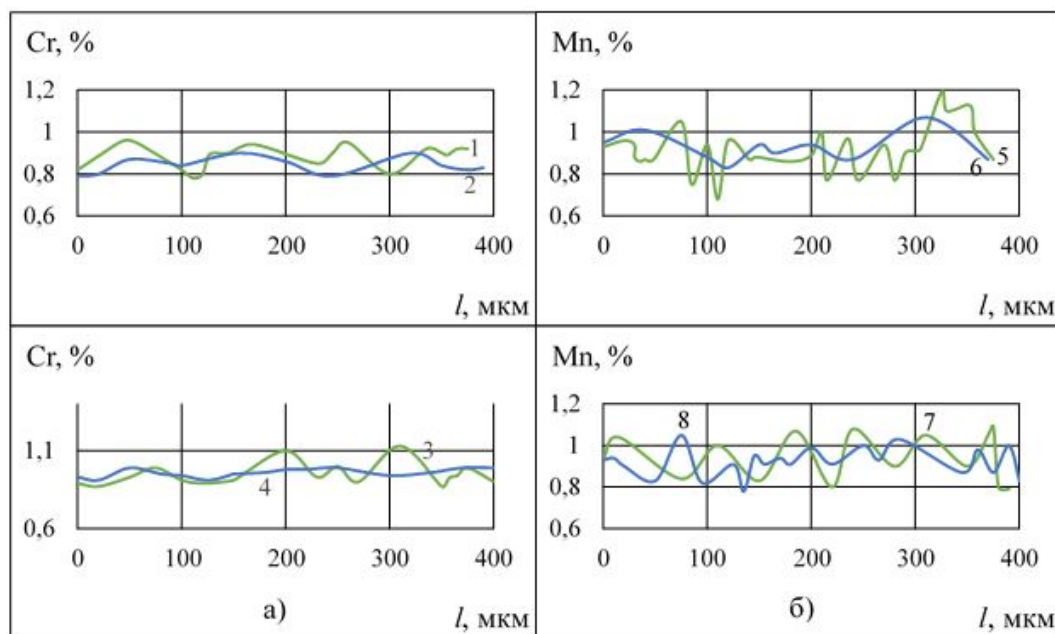


Рис. 7: Изменение концентрации Cr (а) и Mn (б) по сечению образцов стали 30ХГСА, вырезанных из края слитков. Полупродукт КШС – 1, 2, 5, 6; ОМШ – 3, 4, 7, 8. Кривые 1, 3, 5, 7 до отжига – гомогенизации; кривые 2, 4, 6, 8 – после отжига – гомогенизации

Далее разрывные и ударные образцы плавок № 3 и № 4 подвергали закалке из соляной ванны с температуры $900\text{ }^{\circ}\text{C}$, $\tau = 10$ минут в масле, а затем отпуску в диапазон температур $100 \dots 700\text{ }^{\circ}\text{C}$ (через $50\text{ }^{\circ}\text{C}$) в течение двух часов. Механические свойства стали 30ХГСА после закалки и отпуска представлены на рис. 8, 9. Твердость, предел прочности, условный предел текучести стали 30ХГСА, выплавленной на ОМШ, в интервале температур отпуска $100 \dots 400\text{ }^{\circ}\text{C}$ выше как для поперечных, так и для продольных образцов. Относительное удлинение δ , относительное сужение Ψ и ударная вязкость a_H выше в плавке на полупродукте КШС во всем интервале температур отпуска, кроме $150 \dots 250\text{ }^{\circ}$, в котором наблюдается снижение пластических свойств и ударной вязкости.

Изучение структуры стали после термической обработки на обычном и электронном микроскопах привело к выводу, что причиной такой разницы в свойствах является разная степень неоднородности структуры образцов, вызванная ликвацией углерода и легирующих элементов и разными размерами дендритов (см. рис. 5–7).

В стали 30ХГСА, выплавленной на полупродукте КШС, ширина ликвационных зон больше, а если учесть еще и более низкое в этой плавке содержание углерода и его ликвацию, то можно объяснить резко выраженную структурную неоднородность после закалки (феррит, ферритно-цементитная смесь и мартенсит). Начиная с температуры отпуска $500\text{ }^{\circ}\text{C}$, структура обеих плавок становится более однородной и механические свойства выравниваются.

Для выяснения вопроса о влиянии исходной шихты на свойства выплавленной стали необходимо провести сравнительные исследования свойств для плавок стали как можно с меньшей химической неоднородностью. Последнего можно добиться уменьшением дендритной ликвации и измельчением макроструктуры слитков: 1) за счет увеличения скорости кристаллизации, например на установке непрерывной разливки стали [2]; 2) отжигом – гомогенизацией.

Для выбора режима отжига – гомогенизации проводили отжиг в вакууме образцов обеих плавок при температурах 950 , 1000 , 1100 и $1200\text{ }^{\circ}\text{C}$ в течение трех часов.

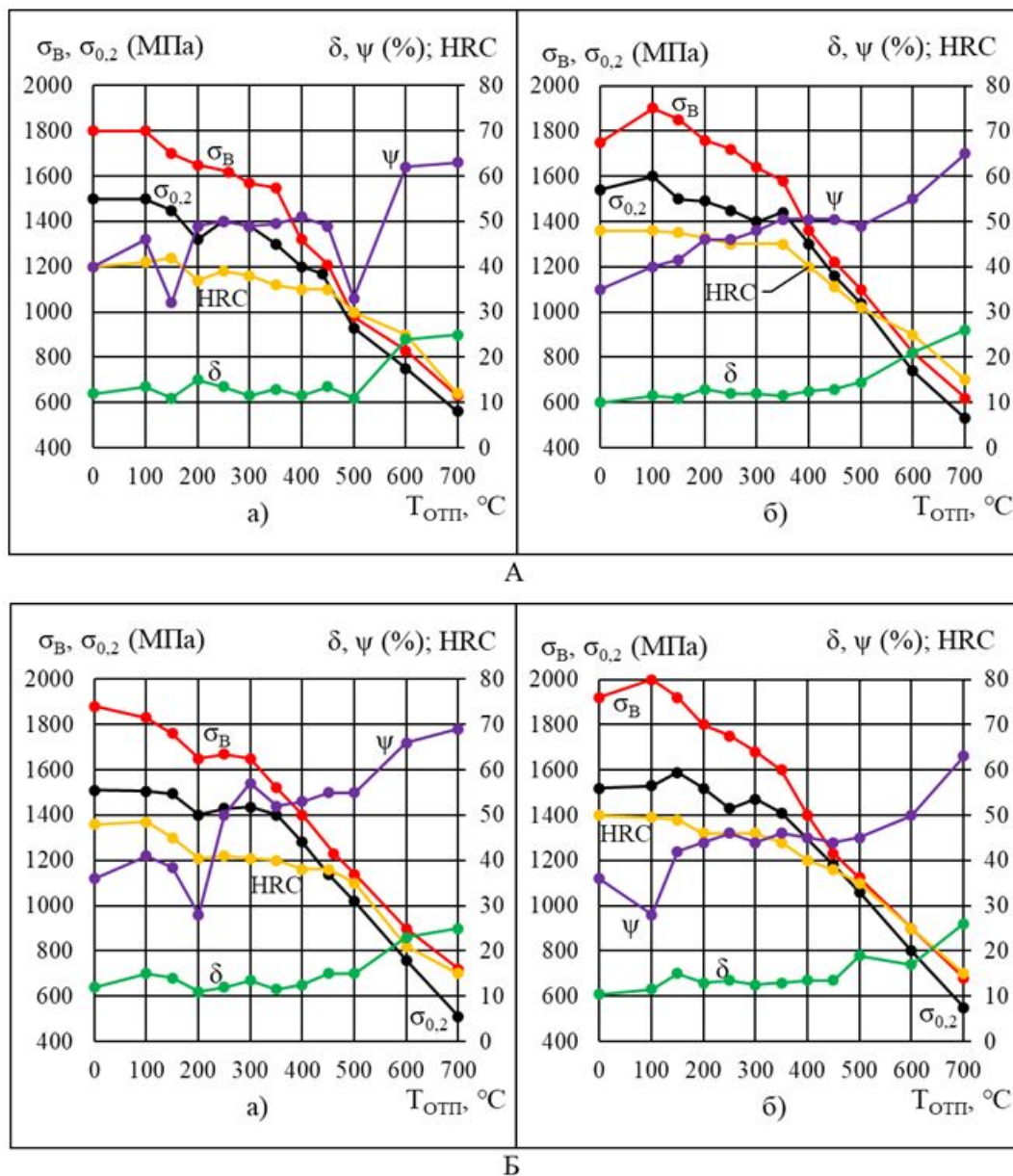


Рис. 8: Влияние температуры отпуска на механические свойства стали 30ХГСА (плавки №3 и №4): а) полупродукт КШС; б) ОМШ; А – продольные; Б – поперечные

После отжига образцы каждой плавки подвергали закалке от 900 °С в масле, затем измеряли их твердость. Твердость закаленных образцов различных плавков после гомогенизации отличалась на одну-две единицы.

Микроструктурные исследования, проведенные после травления специальным реактивом, показали, что с повышением температуры отжига при одной выдержке химическая неоднородность уменьшается, но несильно. Начиная с 1000 °С, при увеличении температуры отжига проявляется разнотернистость стали и рост аустенитных зерен, особенно в плавке на полупродукте КШС. Разнотернистость неблагоприятно влияет на механические свойства стали: укрупнение зерна понижает сопротивление стали хрупкому разрушению, ухудшает служебные характеристики металла [2]. «Исправление» не крупнозернистой структуры возможно только за счет перекристаллизации и образования новых границ зерен, что в данном случае нежелательно [6]. Поэтому для стали 30ХГСА был выбран отжиг при температуре 950 °С,

КШС	1403	1285	12,0	51,0	1491	1344	14,0	55,0
ОМШ	1462	1373	12,5	49,0	1442	1285	15,0	50,0

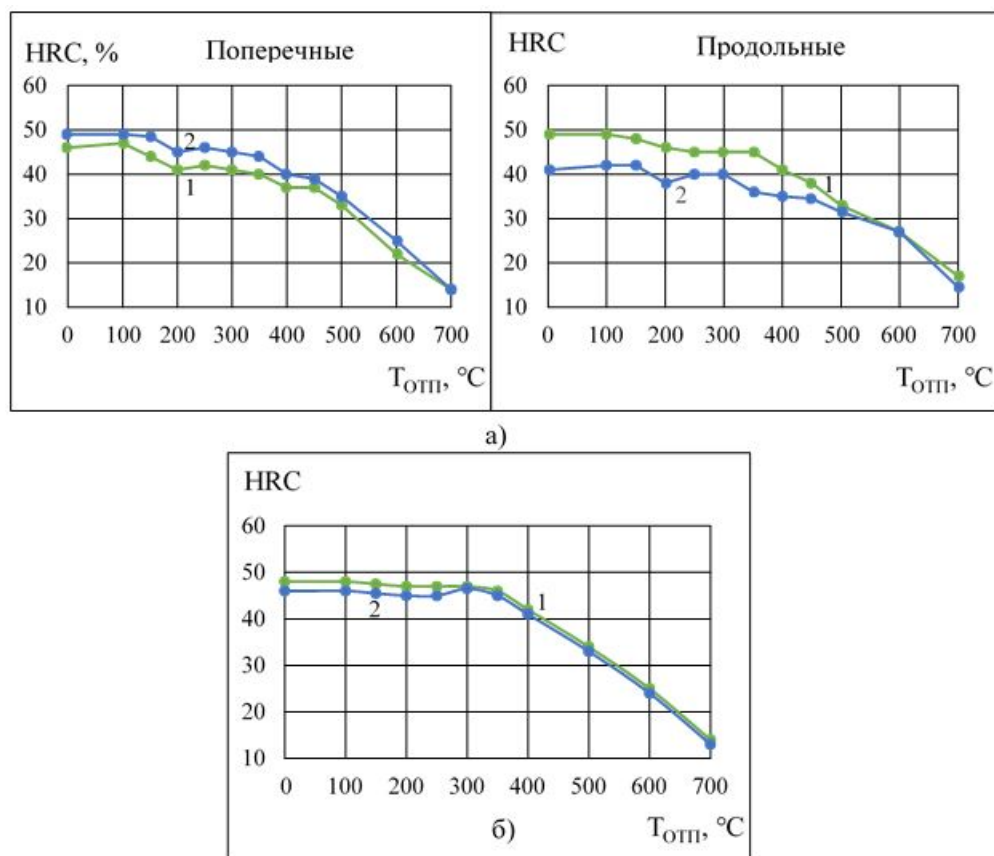


Рис. 10: Изменение твердости стали 30ХГСА, выплавленной на полупродукте КШС (1) и ОМШ (2) в зависимости от температуры отпуска: а) после горячей деформации и отжига при температуре 820°C в течение одного часа; б) после горячей деформации и гомогенизации при температуре 950°C в течение трех часов

На основании проведенных экспериментов можно предположить, что гомогенизированная сталь 30ХГСА, выплавленная на основе шихты КШС, после стандартной термической обработки — закалки и высокого отпуска будет обладать более высокими механическими свойствами, чем плавка на ОМШ. Для проверки это предположения сталь 30ХГСА из края средней части слитков (плавки № 3 и № 4) после горячей деформации подвергали гомогенизации при температуре 950°C в течение 8 часов, а затем из нее изготавливали стандартные разрывные и ударные образцы. Окончательная термическая обработка образцов проводилась по следующему режиму: закалка из соляной ванны с температуры 900°C, $\tau = 10$ минут в масле и отпуск в диапазон температур 400...600°C через 100°C в течение двух часов. Результаты механических испытаний представлены на рис. 11–13. При практически одинаковой структуре после закалки и высокого отпуска (рис. 14–16) сталь 30ХГСА, выплавленная на полупродукте КШС, обладает более высокой пластичностью и ударной вязкостью, особенно заметной на образцах из материала края слитков (рис. 11–13). Предел прочности и твердость практически одинаковые для образцов, полученных из граничных объемов краев стальных слитков.

Фазовый анализ стали после закалки и высокого отпуска показал, что образование легированного цементита начинается с 500°C, специальные карбиды хрома отсутствуют.

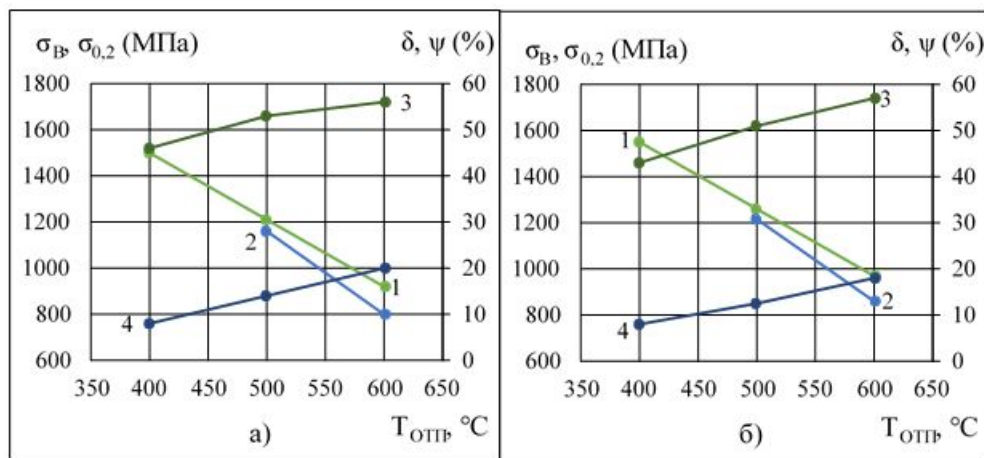


Рис. 11: Механические свойства стали 30ХГСА, выплавленной на полупродукте КШС (а) и на ОМШ (б), после гомогенизации при 950°С в течение 8 часов, закалки и высокого отпуска (образцы вырезаны из края слитков): 1 – предел прочности; 2 – предел текучести; 3 – относительное сужение; 4 – относительное удлинение

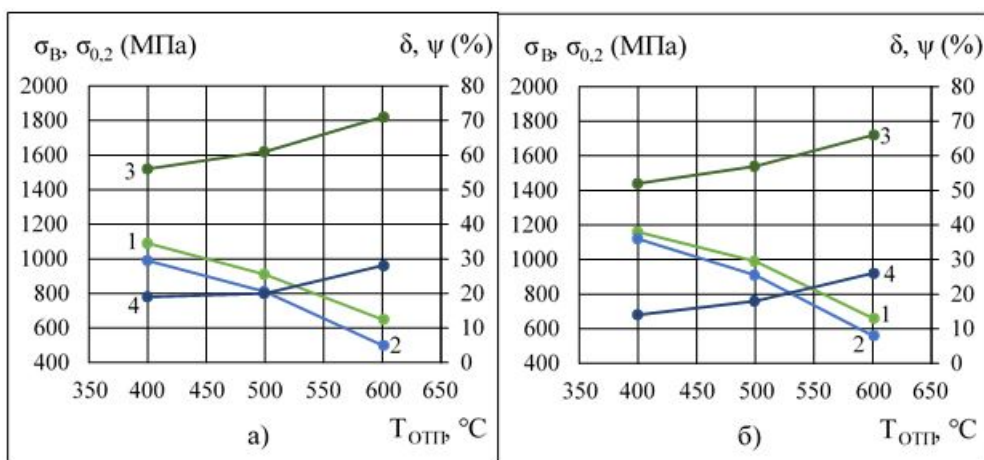


Рис. 12: Механические свойства стали 30ХГСА, выплавленной на полупродукте КШС (а) и на ОМШ (б), после гомогенизации при 950°С в течение 8 часов, закалки и высокого отпуска (образцы вырезаны из середины слитков): 1 – предел прочности; 2 – предел текучести; 3 – относительное сужение; 4 – относительное удлинение

Чтобы объяснить разницу в уровне ударной вязкости гомогенизированных образцов стали 30ХГСА, вырезанных из края слитка, рассматривали поверхности изломов ударных образцов на сканирующем электронном микроскопе РЭМН-2 при увеличении $\times 300$.

Чтобы объяснить разницу в уровне ударной вязкости гомогенизированных образцов стали 30ХГСА, вырезанных из края слитка, рассматривали поверхности изломов ударных образцов на сканирующем электронном микроскопе РЭМН-2 при увеличении $\times 300$.

Так как разрушение идет по пути наименьшего сопротивления внимательное изучение поверхности излома может выявить слабые места в структуре материала. После двухчасового отпуска при 400°С в изломах образцов обеих плавок (на основе ОМШ и КШС) — многие участки излома имеют одинаковый вид хрупкого разрушения, которое получило название «квазиотрыв». Однако в образце стали 30ХГСА на основе ОМШ встречаются участки более грубого квазиотрыва со ступенями транскристаллитного скола.

После двухчасового отпуска при 500°С в изломах образцов увеличивается доля вязкой

составляющей наряду с участками хрупкого разрушения со сколом по ликвационным зонам.

Чтобы объяснить разницу в уровне ударной вязкости гомогенизированных образцов стали 30ХГСА, вырезанных из края слитка, рассматривали поверхности изломов ударных образцов на сканирующем электронном микроскопе РЭМН-2 при увеличении $\times 300$.

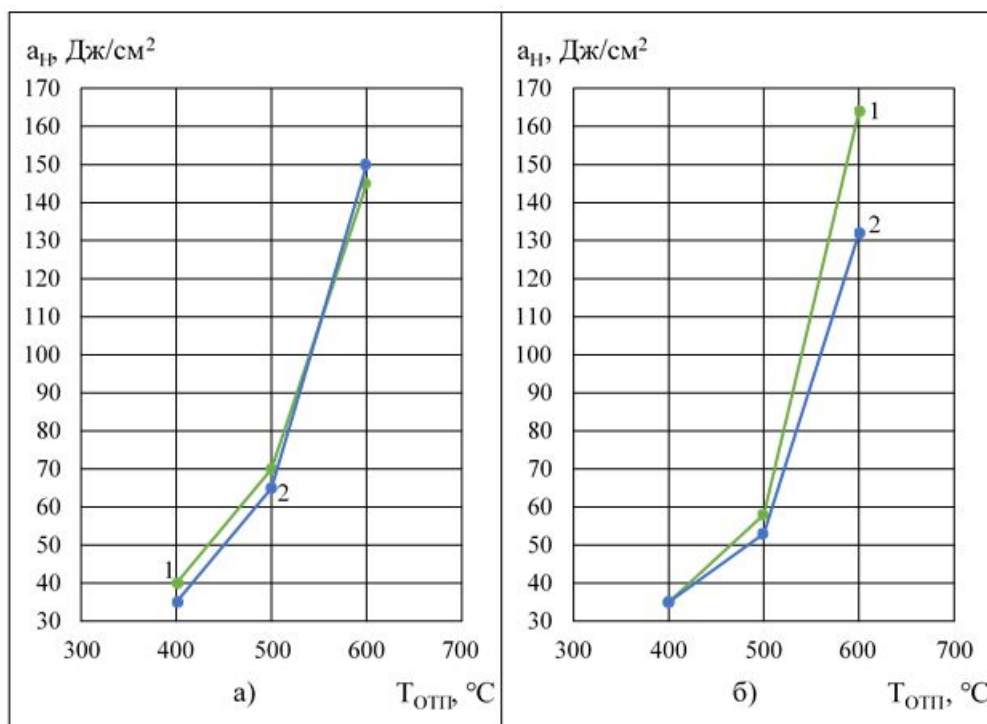


Рис. 13: Изменение ударной вязкости стали 30ХГСА, выплавленной на полупродукте КШС (1) и на ОМШ (2), от температуры высокого отпуска после гомогенизации при температуре 950°C в течение 8 часов, закалки с 900°C в масле и отпуска в течение 9 часов: а) образцы из средней части слитков; б) образцы из края слитков

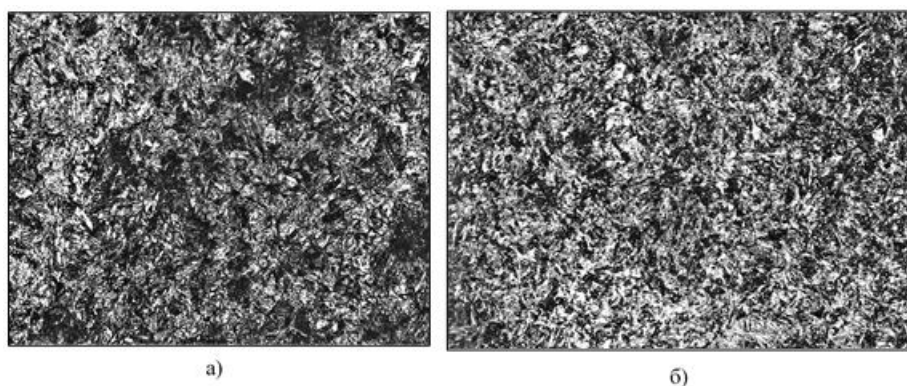


Рис. 14: Микроструктура стали 30ХГСА, выплавленной на полупродукте КШС (а) и ОМШ (б) после термической обработки, $\times 500$: гомогенизация при 950°C в течение 8 часов, закалка при температуре 900°C в течение 10 мин в масле, отпуск при 400°C в течение двух часов

Так как разрушение идет по пути наименьшего сопротивления внимательное изучение поверхности излома может выявить слабые места в структуре материала. После двухчасового отпуска при 400°C в изломах образцов обеих плавок (на основе ОМШ и КШС) — многие участки излома имеют одинаковый вид хрупкого разрушения, которое получило название

«квазиотрыв». Однако в образце стали 30ХГСА на основе ОМШ встречаются участки более грубого квазиотрыва со ступенями транскристаллитного скола.

После двухчасового отпуска при 500°C в изломах образцов увеличивается доля вязкой составляющей наряду с участками хрупкого разрушения со сколом по ликвационным зонам.

Двухчасовой отпуск при 600°C приводит к получению вязкого излома за счет слияния пустот и образования «ямок». Установлено, что доля «ямок» — полупустот на поверхности излома больше в стали на полупродукте КШС. Величина ямок определяется рядом факторов, в том числе степенью пластической деформации перед слиянием пустоты с другой свободной поверхностью. Это хорошо согласуется с большей величиной ударной вязкости образцов из стали 30ХГСА, выплавленной на полупродукте КШС.

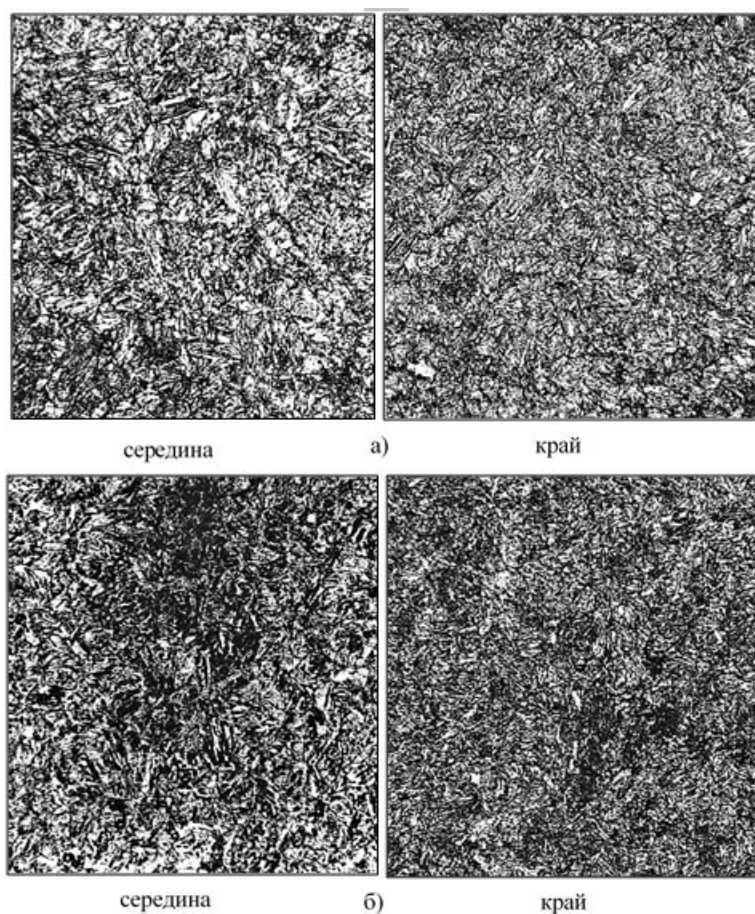


Рис. 15: Микроструктура стали 30ХГСА, выплавленной на полупродукте КШС (а) и ОМШ (б) после термической обработки, $\times 500$: гомогенизация при 950°C в течение 8 часов, закалка при температуре 900°C в масле, отпуск при 500°C в течение двух часов

Заключение

1. Выявлено, что сталь 30ХГСА (плавки № 3–4), отлитая в чугунные изложницы (вес слитка 2,6 т), обладает значительной химической неоднородностью и ликвацией по углероду и основным легирующим элементам (Cr и Mn), причем в плавке на полупродукте КШС ликвация выражена сильнее. Для устранения химической неоднородности необходимо строго регламентировать условия разливки и кристаллизации (в частности, скорость

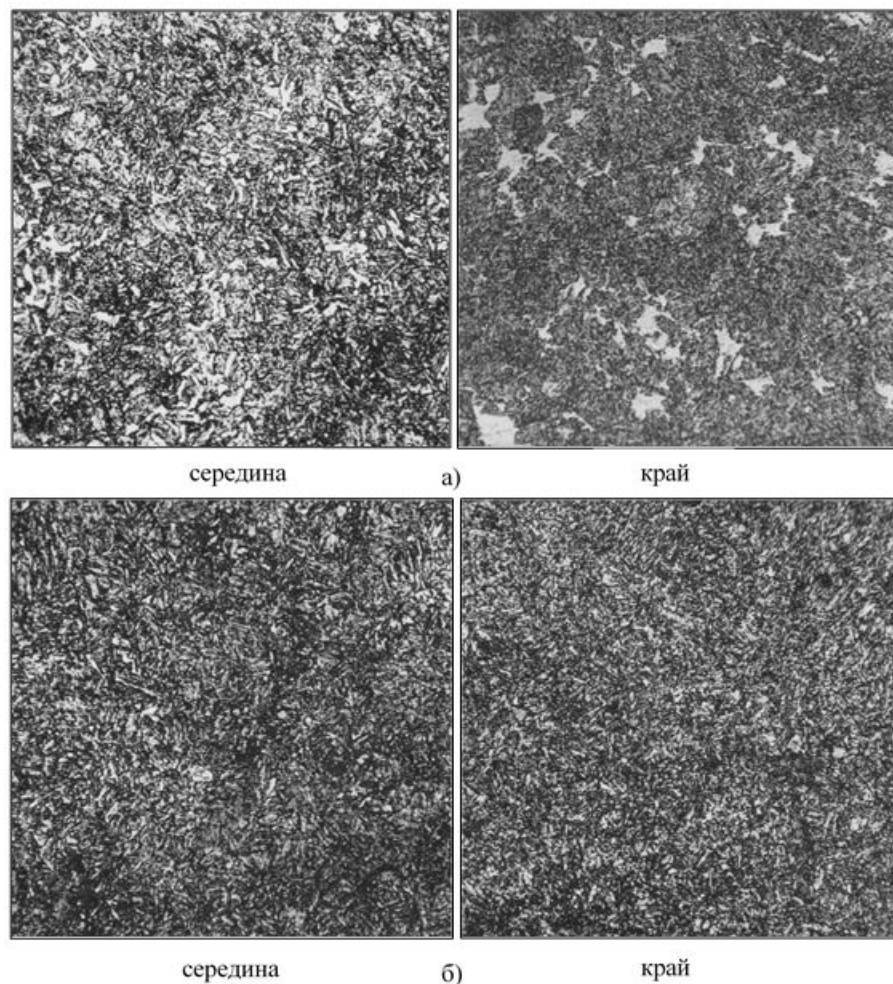


Рис. 16: Микроструктура стали 30ХГСА, выплавленной на полупродукте КШС (а) и ОМШ (б) после термической обработки, $\times 500$: гомогенизация при 950°C в течение 8 часов; закалка при температуре 900°C в масле, отпуск при 600°C в течение двух часов

кристаллизации желательно увеличить, за счет разливки стали на устройстве непрерывной разливки стали), так как эти факторы в значительной степени вуалируют преимущества от применения чистой первородной шихты.

- Показано, что горячая пластическая деформация не устраняет полностью химическую неоднородность. После горячей пластической деформации ударная вязкость стали 30ХГСА выплавленной на полупродукте КШС при комнатной и повышенных температурах выше, чем у стали на ОМШ. Порог хладноломкости стали 30ХГСА (плавки № 3–4) на полупродукте КШС примерно на 20°C ниже, чем на ОМШ. Однако после закалки и отпуска сталь 30ХГСА на первородной шихте несколько уступает по прочностным свойствам и твердости (особенно, после низкотемпературного отпуска). Устранения химической и структурной неоднородности можно добиться за счет проведения гомогенизирующего отжига (отжиг при 950°C в течение 8 часов). Повышение температуры отжига приводит к интенсивному росту зерна, особенно в стали, выплавленной на первородной шихте.
- Выявлены преимущества от использования шихты прямого восстановления для стали 30ХГСА после гомогенизирующего отжига (т. е. при практически одинаковой химиче-

ской и структурной неоднородности). Сталь 30ХГСА, выплавленная на полупродукте КШС, в улучшенном состоянии при равных твердости и прочностных характеристиках имеет повышенные пластические свойства (особенно ударную вязкость) по сравнению со сталью на ОМШ. По-видимому, это должно определять и более высокие эксплуатационные характеристики стали, полученные с применением чистой первородной шихты.

Полученные результаты могут быть использованы при создании ресурсосберегающих процессов обработки материалов [9]–[34].

Работа выполнена по проекту №11.6682.2017/8.9.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев Н. Н., Тихонова И. В., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Агеев Е. В., Гвоздев А. Е., Клементьев Д. С. 2019, «Влияние качества шихты на чувствительность стали 30ХГСА к водородному растрескиванию», Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии, Т.9, №1(30), С.37–48.
2. Гуляев А. П. 1975. Чистая сталь. М.: Металлургия, 184 с.
3. Мартынов О. В., Свободов А. Н., Лещенко И. П., Дадешкилиани Ю. Т., Кожевников И. Ю. 1971, «Влияние первородной шихты на свойства конструкционных сталей», Сталь, №12, С.1113–1115.
4. Марченко В. Н., Литвиненко Д. А., Моргалев Б. Н. 1977, «Свойства стали 18Х2Н4ВА, выплавленной на первородной и обычной шихте», Сталь, №7, С.655–658.
5. Терещенко В. Т., Сергеев Н. Н., Тинькова Е. В., Дадешкилиани Ю. Т. 1987, «Физико-механические характеристики стали У10А разных способов выплавки», Сталь, №2, С.86–90.
6. Мовчан Б. А. 1970. Границы кристаллитов в литых металлах и сплавах. Киев: Техника, 212 с.
7. Сергеев Н. Н., Сергеев А. Н. 2017. Водородное охрупчивание и растрескивание высокопрочной арматурной стали. Тула: Издательство ТулГУ, 180 с.
8. Сергеев Н. Н., Сергеев А. Н. 2018. Механические свойства и внутреннее трение высокопрочных сталей в коррозионных средах. Тула: Издательство ТулГУ, 430 с.
9. Сергеев Н. Н., Тихонова И. В., Минаев И. В., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Агеев Е. В., Гвоздев А. Е., Клементьев Д. С. 2019, «Влияние качества шихты и температуры отжига на формирование зеренной структуры аустенита в стали 30ХГСА», Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии, Т.9, №2, С.8–26.
10. Сергеев Н. Н., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Минаев И. В., Гвоздев А. Е., Агеев Е. В., Клементьев Д. С., Кругляков О. В. 2019, «Влияние способа получения высокоуглеродистой инструментальной стали У10А на физико-механические, технологические и коррозионные свойства», Известия Юго-Западного государственного университета, №23(6), С.56–76.
11. Сергеев Н. Н., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Тихонова И. В., Гвоздев А. Е., Агеев Е. В., Клементьев Д. С. 2020, «Влияние качества шихты на физико-механические и эксплуатационные свойства низколегированной стали 30ХГСА», Известия Юго-Западного государственного университета, №24(2), С.17–36.

12. Сергеев Н. Н., Извольский В. В., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Гвоздев А. Е., Агеева Е. В., Клементьев Д. С., Кругляков О. В. 2019, «Влияние масштабного фактора и состояния поверхности на чувствительность стали 20ГС2 к водородному растрескиванию», Известия Юго-Западного государственного университета, №23(5), С.8–22.
13. Губанов О. М., Гвоздев А. Е., Кутепов С. Н., Колмаков А. Г. 2020, «Влияние разнородности феррита на магнитные свойства кремнистой электротехнической стали», Материаловедение, №11, С.7–10.
14. Сергеев Н. Н., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г., Клементьев Д. С. 2020, «Влияние термической обработки на формирование остаточных напряжений в износостойком биметаллическом материале сталь 60-сталь 15-сталь 60», Материаловедение, №3, С.7–11.
15. Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Кузовлева О. В., Гвоздев А. Е., Клементьев Д. С. 2020, «Математическое планирование и моделирование процессов поведения металлических систем в экстремальных условиях и состояниях», Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина, С.385–388.
16. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е., Золотухин В. И., Сергеев А. Н., Калинин А. А., Бреки А. Д., Сергеев Н. Н., Кузовлева О. В., Стариков Н. Е., Малий Д. В. 2016. Разработка прогрессивных технологий получения и обработки металлов, сплавов, порошковых и композиционных наноматериалов. Тула: Издательство ТулГУ, 235 с.
17. Гвоздев А. Е. 2019. Экстремальные эффекты прочности и пластичности в металлических высоколегированных слитковых и порошковых системах. 2-е изд., испр. и доп. Тула: Издательство ТулГУ, 476 с.
18. Гвоздев А. Е., Сергеев Н. Н., Стариков Н. Е., Сапожников С. В., Кутепов С. Н., Маляров А. В., Калинин А. А. 2019. Малоотходные технологии получения инструмента из горячекатаных, порошковых и литых заготовок быстрорежущих сталей 2-е изд., испр. и доп. Под ред. проф. Н. Н. Сергеева. Тула, Издательство ТулГУ, 282 с.
19. Сергеев Н. Н., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Колмаков А. Г., Гвоздев А. Е. 2018, «Механизмы водородного растрескивания металлов и сплавов», Материаловедение, №4, С.20–29.
20. Сергеев Н. Н., Гвоздев А. Е., Стариков Н. Е., Золотухин В. И., Сергеев А. Н., Бреки А. Д., Кузовлева О. В., Журавлёв Г. М., Провоторов Д. А. 2017. Технология металлов и сплавов. под ред. проф. Н. Н. Сергеева. Тула: Изд-во ТулГУ, 490 с.
21. Сергеев Н. Н., Гвоздев А. Е., Зеленко В. К., Сергеев А. Н., Кузовлева О. В., Стариков Н. Е., Золотухин В. И., Бреки А. Д. 2017. Материаловедение. под ред. проф. А. Е. Гвоздева. Изд. 2-е доп. и испр. Тула: Изд-во ТулГУ, 469 с.
22. Селёдкин Е. М., Гвоздев А. Е., Сергеев А. Н., Стариков Н. Е., Калинин А. А. 2016. Расчёт процессов обработки материалов давлением методом конечных элементов. под ред. проф. А. Е. Гвоздева Тула: Изд-во ТулГУ, 113 с.
23. Кузовлева О. В., Гвоздев А. Е., Тихонова И. В., Сергеев Н. Н., Бреки А. Д., Стариков Н. Е., Сергеев А. Н., Калинин А. А., Малий Д. В., Титова Ю. Е., Александров С. Е., Крылов Н. А. 2016. О состоянии предпревращения металлов и сплавов, Тула: Издательство ТулГУ, 245 с.

24. Сергеев А. Н., Сергеев Н. Н., Гвоздев А. Е., Медведев П. Н., Дорохин Ю. С., Малий Д. В. 2016. Современные перспективные материалы и технологии. Тула: Изд-во ТулГУ, 87 с.
25. Бреки А. Д., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г. 2016, «Использование обобщенного треугольника Паскаля для описания колебаний силы трения материалов», Материаловедение, №11, С. 3–8.
26. Медведева В. В., Бреки А. Д., Крылов Н. А., Фадин Ю. А., Стариков Н. Е., Гвоздев А. Е., Александров С. Е., Сергеев А. Н., Провоторов Д. А., Малий Д. В., 2016, «Исследование изнашивания стали ШХ15 в среде пластичных смазочных композиционных материалов, содержащих дисперсные частицы слоистого модификатора трения», Технология металлов, №7, С.9–15.
27. Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г., Провоторов Д. А., Минаев И. В., Сергеев Н. Н., Тихонова И. В. 2014, «Влияние разнотермности аустенита на кинетику перлитного превращения в мало- и среднеуглеродистых низколегированных сталях», Материаловедение, №7, С.23–26.
28. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М. 2015. Теория пластичности дилатирующих сред. под. ред. проф. А. Е. Гвоздева; 2-е изд., перераб. и доп. Тула: Изд-во ТулГУ, 337 с.
29. Сергеев Н. Н., Гвоздев А. Е., Грашкин И. Л., Сергеев А. Н., Минаев И. В., Полосин С. И., Тихонова И. В., Чеглов А. Е., Хонелидзе Д. М. 2014. Комплекс научно-технических, проектно-конструкторских и технологических разработок по созданию, изготовлению и внедрению высокотехнологического импортозамещающего оборудования качественной лазерной и газоплазменной обработки листового проката. Под ред. д-ра техн. наук, проф. Н. Н. Сергеева. Тула: Изд-во ТулГУ, 188 с.
30. Гвоздев А. Е. 2005, «Ресурсосберегающая технология термомеханической обработки быстрорежущей вольфрамомолибденовой стали Р6М5», Металловедение и термическая обработка металлов, №12(606), С.27–30.
31. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е., Афанаскин А. В., Гвоздев Е. А. 2002, «Расчет кластерной структуры расплава, её влияние на образование наноаморфных твердых фаз и их структурную релаксацию при последующем нагреве», Металловедение и термическая обработка металлов, №6, С. 12–16.
32. Гвоздев А. Е., Афанаскин А. В., Гвоздев Е. А. 2002, «Закономерности проявления сверхпластичности сталей Р6М5 и 10Р6М5-МП», Металловедение и термическая обработка металлов, №6, С.32–36.
33. Гвоздев А. Е. 1996, «Получение заготовок металлорежущего инструмента из порошковой быстрорежущей стали в условиях сверхпластичности», Кузнечно-штамповочное производство, №8, С.13–16.
34. Чернышева Т. А., Гвоздев А. Е. 1988, «Вклад различных механизмов деформации в сверхпластичность быстрорежущих сталей», Физика и химия обработки материалов, №2, С.118–127.

REFERENCES

1. Sergeev N.N., Tikhonova I.V., Sergeev A.N., Kutepov S.N., Ageev E.V., Gvozdev A.E., Klementyev D.S. 2019, «The influence of charge quality on the sensitivity of 30XGSA steel to hydrogen cracking», *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Series: Technics and Technologists*, Vol.9, No.1 (30), pp. 37–48.

2. Gulyaev A.P. 1975. *Pure steel*. M.: Metallurgy, 184 p.
3. Martynov O.V., Svobodov A.N., Leshchenko I.P., Dadeshkiliani Yu.T., Kozhevnikov I.Yu. 1971, «The influence of the original charge on the properties of structural steels», *Steel*, No.12, pp. 1113–1115.
4. Marchenko V.N., Litvinenko D.A., Morgalev B.N. 1977, «Properties of steel 18X2H4VA, smelted on primordial and ordinary charge», *Steel*, No.7, pp.655–658.
5. Tereshchenko V.T., Sergeev N.N., Tinkova E.V., Dadeshkeliani Yu.T. 1987, «Physical and mechanical characteristics of steel U10A of different ways of melting», *Steel*, No.2, pp.86–90.
6. Movchan B.A. 1970. *Boundaries of crystallites in cast metals and alloys*. Kiev: Technika, 212 p.
7. Sergeev N.N., Sergeev A.N. 2017. *Hydrogen embrittlement and cracking of high-strength reinforcing steel*. Tula: TulSU Publishing House, 180 p.
8. Sergeev N.N., Sergeev A.N. 2018. *Mechanical properties and internal friction of highstrength steels in corrosive environments*. Tula: Publishing house of Tula state University, 430 p.
9. Sergeev N.N., Tikhonova I.V., Minaev I.V., Sergeev A.N., Kutepov S.N., Ageev E.V., Gvozdev A.E., Klementyev D.S. 2019, «The influence of charge quality and annealing temperature on the formation of the grain structure of austenite in 30XGSA steel», *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universita. Series: Technics and Technologies*, Vol.9, No.2, pp.8–26.
10. Sergeev N.N., Sergeev A.N., Kutepov S.N., Minaev I.V., Gvozdev A.E., Ageev E.V., Klementyev D.S., Kruglyakov O.V. 2019, «The influence of the method of producing high-carbon tool steel U10A on physical, mechanical, technological and corrosion properties», *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta*, No.23(6), pp.56–76.
11. Sergeev N.N., Sergeev A.N., Kutepov S.N., Tikhonova I.V., Gvozdev A.E., Ageev E.V., Klementyev D.S. 2020, «The influence of charge quality on the physical-mechanical and operational properties of low-alloy steel 30KhGSA», *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta*, No.24(2), pp.17–36.
12. Sergeev N.N., Izvolsky V.V., Sergeev A.N., Kutepov S.N., Gvozdev A.E., Ageeva E.V., Klementyev D.S., Kruglyakov O.V. 2019, «Influence of the mass factor and surface state on the sensitivity of 20GS2 steel to hydrogen cracking», *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta*, No.23(5), pp. 8–22.
13. Gubanov O.M., Gvozdev A.E., Kutepov S.N., Kolmakov A.G. 2020, «The effect of ferrite heterogeneity on the magnetic properties of siliceous electro-technical steel», *Materials Science*, No.11, pp.7–10.
14. Sergeev N.N., Sergeev A.N., Kutepov S.N., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Klementyev D.S. 2020, «The influence of heat treatment on the formation of residual stresses in the wear-resistant bimetallic material steel 60-steel 15-steel 60», *Materials Science*, No.3, pp.7–11.
15. Sergeev A.N., Kutepov S.N., Kuzovleva O.V., Gvozdev A.E., Klementyev D.S. 2020, «Mathematical planning and modeling of processes for conducting metal systems in extreme conditions and states», *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: Materials of the XVIII International Conference dedicated to the birth of Professors B. M. Bredikhin, V. I. Nechaev and S. B. Stechkin*, pp. 385–388.

16. Shorshorov M.Kh., Gvozdev A.E., Zolotukhin V.I., Sergeev A.N., Kalinin A.A., Breki A.D., Sergeev N.N., Kuzovleva O.V., Starikov N.E., Maliy D.V. 2016. *Development of advanced technologies for the production and processing of metals, alloys, powder and composite nanomaterials*. Tula: TulSU Publishing House, 235 p.
17. Gvozdev A.E. 2019. *Extreme strength and ductility effects in high-alloy metal ingot and powder systems*. 2nd ed., ISPR. and add. Tula: Publishing house of Tula state University, 476 p.
18. Gvozdev A.E., Sergeev N.N., Starikov N.E., Sapozhnikov S.V., Kutepov S.N., Malyarov A.V., Kalinin A.A. 2019. *Low-waste technologies for obtain-ing tools from hot-rolled, powder and cast billets of high-speed steels* 2nd ed., ISPR. and add. Edited by Prof. N.N. Sergeev. Tula, Tula state University Publishing house, 282 p.
19. Sergeev N.N., Sergeev A.N., Kutepov S.N., Kolmakov A.G., Gvozdev A.E. 2018, «Mechanisms of hydrogen cracking of metals and alloys», *Material Science*, No.4, pp.20–29.
20. Sergeev N.N., Gvozdev A.E., Starikov N.E., Zolotukhin V.I., Sergeev A.N., Breki A.D., Kuzovleva O.V., Zhuravlev G.M., Provotorov D.A. 2017. *Technology of metals and alloys*. edited by prof. N.N. Sergeev. Tula: TulSU Pub-lishing House, 490 p.
21. Sergeev N.N., Gvozdev A.E., Zelenko V.K., Sergeev A.N., Kuzovleva O.V., Starikov N.E., Zolotukhin V.I., Breki A.D. 2017. *Materials science*. under the editorship of Professor A.E. Gvozdev. Ed. 2-e, dop. and ispr. Tula: TulSU Publishing House, 469 p.
22. Seledkin E.M., Gvozdev A.E., Sergeev A.N., Starikov N.E., Kalinin A.A. 2016. *Calculation of the processes of material processing by pressure by the finite element method*. under the editorship of Professor A.E. Gvozdev Tula: Izd-vo Tulgu, 113 p.
23. Kuzovleva O.V., Gvozdev A.E., Tikhonova I.V., Sergeev N.N., Breki A.D., Starikov N.E., Sergeev A.N., Kalinin A.A., Maliy D.V., Titova Yu.E., Aleksandrov S.E., Krylov N.A. 2016. *On the state of pre-conversion of metals and alloys*. Tula: Tulsu Publishing house, 245 p.
24. Sergeev A.N., Sergeev N.N., Gvozdev A.E., Medvedev P.N., Dorokhin Yu.S., Maliy D.V. 2016. *Modern advanced materials and technologies*. Tula: TulSU Publishing House, 87 p.
25. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2016, «Using the generalized Pascal triangle to describe vibrations of the friction force of materials», *Materials science*, No.11, pp. 3–8.
26. Medvedeva V.V., Breki A.D., Krylov N.A., Fadin Yu.A., Starikov N.E., Gvozdev A.E., Alexandrov S.E., Sergeev A.N., Provotorov D.A., Maliy D.V. 2016, «Study of the wear of SHX15 steel in the medium of plastic lubricating composite materials containing dispersed particles of a layered friction modifier», *Metal Technology*, No.7, pp.9–15.
27. Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Provotorov D.A., Minaev I.V., Sergeev N.N., Tikhonova I.V. 2014, «The effect of austenite heterogeneity on the kinetics of pearlite transformation in low- and medium-carbon low-alloy steels», *Materials Science*, No.7, pp.23–26.
28. Makarov E.S., Gvozdev A.E., Zhuravlev G.M. 2015. *Theory of plasticity of dilating media*. ed. by prof. A.E. Gvozdev; 2nd ed., reprint. and the add. Tula: TulSU Publishing House, 337 p.
29. Sergeev N.N., Gvozdev A.E., Grashkin I.L., Sergeev A.N., Minaev I.V., Po-losin S.I., Tikhonova I.V., Cheglov A.E., Khonelidze D.M. 2014. *A complex of scientific and technical, design and technological developments for the creation, manufacture and implementation of high-tech import-substituting equipment for high-quality laser and gas-plasma processing of sheet metal*.

Edited by Dr. N.N. Sergeev, Doctor of Technical Sciences. Tula: TulSU Pub-lishing House, 188 p.

30. Gvozdev A.E. 2005, «Resource-saving technology of thermomechanical processing of high-speed tungsten-molybdenum steel R6M5», *Metal science and heat treatment of metals*, No.12(606), pp.27–30.
31. Shorshorov, M.H., Gvozdev, A.E., Afanaskin, A.V., Gvozdev, E.A. 2002, «The calculation of the cluster structure of the melt, its impact on education anamorph solid phases and their structural relaxation upon subsequent heating», *The Metallography and heat treatment of metals*, No. 6, pp. 12–16.
32. Gvozdev A.E., Afanaskin A.V., Gvozdev E.A. 2002, «Regularities of super-plasticity of P6M5 and 10P6M5-MP steels», *Metallography and heat treat-ment of metals*, No.6, pp.32–36.
33. Gvozdev A.E. 1996, «Getting blanks cutting tool high-speed powder steel in sverkhplastichnost-STI», *Forging and stamping production*, No.8, pp.13–16.
34. Chernyshova T.A., Gvozdev A.E. 1988, «The Contribution of the different mechanisms of deformation in the superplasticity of high-speed steel», *Physics and chemistry of materials processing*, No.2, pp.118–127.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 532.5.031, 626.131.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-472-483

О воронке выброса, образующейся при взрыве двух плоских поверхностных шнуровых зарядов

С. Л. Толоконников, В. А. Максименко

Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tolsl@mail.ru

Максименко Василий Александрович — аспирант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: vamaxim@bk.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача о взаимодействии двух плоских шнуровых зарядов при их взрыве на поверхности грунта. Использована импульсно-гидродинамическая твердодожидкостная модель, в которой действие зарядов на среду определяется импульсом давления, а границей воронки выброса является поверхность с некоторым постоянным значением модуля скорости.

Полагается, что в общем случае заряды имеют различную ширину, и импульсы давления, характеризующие воздействие зарядов на среду, могут быть различными.

Точное решение задачи построено отображением областей изменения комплексного потенциала и комплексной скорости на область изменения вспомогательного параметрического переменного.

Для случая одинаковых зарядов проведен подробный параметрический анализ, изучено поведение решения при изменении основных безразмерных параметров. Указаны ограничения на значения определяющих параметров, исследованы предельные случаи.

Приведены результаты расчетов формы воронки выброса для различных наборов значений определяющих параметров.

Ключевые слова: взрыв, воронка выброса, плоские поверхностные шнуровые заряды, идеальная несжимаемая жидкость, импульсно-гидродинамическая модель.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

С. Л. Толоконников, В. А. Максименко. О воронке выброса, образующейся при взрыве двух плоских поверхностных шнуровых зарядов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 472–483.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 532.5.031, 626.131.3

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-472-483

On the crater of an ejection formed by an explosion of two flat surface cord charges

S. L. Tolokonnikov, V. A. Maksimenko

Tolokonnikov Sergey Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tols@mail.ru

Maksimenko Vasilij Aleksandrovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: vamaksim@bk.ru

Abstract

In article the problem of the interaction of two flat cord charges at explosion on the ground surface is considered. The impulse-hydrodynamic solid-liquid model is used. The action of charges on the medium by the pressure pulse is determined. The boundary of the ejection crater is a surface with some constant speed module value.

It is believed that in general the charges have different widths and pressure pulses characterizing the effect of charges on the medium may be different.

The exact solution to the problem is built by displaying the areas of change complex potential and complex speed per area of change auxiliary parametric variable.

Detailed parametric analysis done for the case of equal charges. The behavior of the solution when changing the main dimensionless parameters is learned. Limitations on values of determining parameters are specified. Limiting cases is investigated.

The results of calculations of the shape of the ejection crater for various sets of values of defining parameters are given.

Keywords: explosion, crater of an ejection, flat surface cord charges, inviscid incompressible fluid, pulse-hydrodynamic model.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

S. L. Tolokonnikov, V. A. Maksimenko, 2021, "On the crater of an ejection formed by an explosion of two flat surface cord charges", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 472–483.

Введение

Исследование воздействия взрыва поверхностных и заглубленных зарядов в грунте представляет интерес благодаря их широкому использованию в промышленности, сельском хозяйстве, строительстве и других областях.

Движение среды, возникающее вследствие взрыва, можно разделить на два этапа. На первом из них, кратковременно существующем сразу после взрыва, происходит разрушение и образование начального поля скоростей среды для второго, «баллистического» этапа взрыва, когда, например, происходит выброс при некамуфлетном взрыве.

Широкое распространение для описания процесса взрыва на его первом этапе получил подход, основанный на модели идеальной несжимаемой жидкости. Использование такого подхода объясняется тем, что на этом этапе сжимаемость среды играет второстепенную роль,

а вследствие возникновения больших давлений при взрыве можно считать несущественными прочностные эффекты и полагать тензор напряжений шаровым. Воздействие заряда, как правило, задается импульсом давления, приводящим среду в движение с некоторым потенциальным полем скорости.

Гидродинамические модели взрыва имеют, в свою очередь, две разновидности. В первой из них, так называемой «жидкостной» модели, грунт рассматривается как идеальная несжимаемая жидкость во всей занимаемой ею области. Вторая модель, названная в дальнейшем «твердожидкостной», была предложена академиком М.А. Лаврентьевым [1, 2]. В этой модели грунт также полагается идеальной несжимаемой жидкостью, а воздействие взрыва описывается заданным импульсом давления продуктов взрыва на среду. Дополнительно принимается, что в области, где возникает движение грунта при взрыве, скорость больше некоторого критического значения v_0 . При этом границей воронки выброса, отделяющей вовлеченный в движение грунт от твердого, является поверхность с постоянным значением модуля скорости, равным v_0 . Такая поверхность считается границей воронки выброса при некамуфлетном взрыве, ее форма заранее неизвестна и должна определяться в процессе решения задачи.

Широкое применение на практике получили так называемые шнуровые заряды, которые имеют значительную протяженность. Они представляют собой либо большое количество зарядов, соединенных детонирующим шнуром, либо уложенный в длинную узкую канавку заряд взрывчатого вещества. Такие заряды используются, например, для получения траншеи с большим отношением ее длины к поперечным размерам.

В случае, когда шнуровой заряд имеет значительную протяженность, задача может быть рассмотрена как плоская. Для решения задач такого класса применяются эффективные методы теории функций комплексного переменного.

Задача о взрыве плоского поверхностного шнурового заряда была исследована в [3]. В работах [4, 5] было получено решение аналогичной задачи для случаев, когда заряд имеет клиновидную форму [4] и когда примыкающие к заряду свободные от напряжений прямолинейные участки грунта наклонены к плоскости заряда под некоторыми углами [5]. Работа [6] посвящена исследованию влияния твердых дна и откосов при взрыве на выброс, а также проблеме пробивания пластины взрывом. Случай наклонного твердого дна изучен в [7]. Сравнение результатов, полученных в рамках твердожидкостной модели, с данными экспериментов по пробиванию преграды было проведено в [8]. В [9] рассматривалась задача о взрыве заглубленного заряда в двухслойной среде.

Изучению проблемы взаимодействия двух поверхностных шнуровых зарядов посвящены работы [10, 11]. В [10] рассмотрены случаи двух сосредоточенных и бесконечного числа равномерно распределенных поверхностных зарядов. Сосредоточенные заряды моделировались диполями с заданным моментом. В работе [11] найдено решение задачи о взрыве двух одинаковых плоских поверхностных зарядов с использованием схемы, содержащей в окрестности плоскости симметрии течения твердотельную зону покоя, ограниченную линиями с критическим значением модуля скорости.

Библиография по другим работам в области теории взрыва содержится также в монографиях [12, 13].

В настоящей работе рассматривается плоская задача о взрыве двух поверхностных зарядов, имеющих в общем случае различную ширину, а также различные значения импульса давления, определяющего их воздействие на поверхность грунта.

Постановка задачи

Схема течения, соответствующая твердожидкостной модели, показана на рис. 1, *а*. Здесь отрезки AB и CD — поперечные сечения зарядов, расположенных на поверхности грунта

$y = 0$, занимающего полупространство $y \leq 0$. Ширина зарядов — l_1 и l_2 , расстояние между их крайними точками B и C равно h . Движение среды вызвано одновременным взрывом зарядов, действие которых определяется заданными, в общем случае различными, постоянными импульсами давления p_{t1} и p_{t2} .

Область G_z , в которой в момент взрыва возникло движение среды, ограничена зарядами AB и CD , участками поверхности грунта EA , BC и DF , свободными от напряжений, а также линией $\Gamma_z = EH_1H_2H_3F$, на которой задано некоторое постоянное «критическое» значение модуля скорости v_0 .

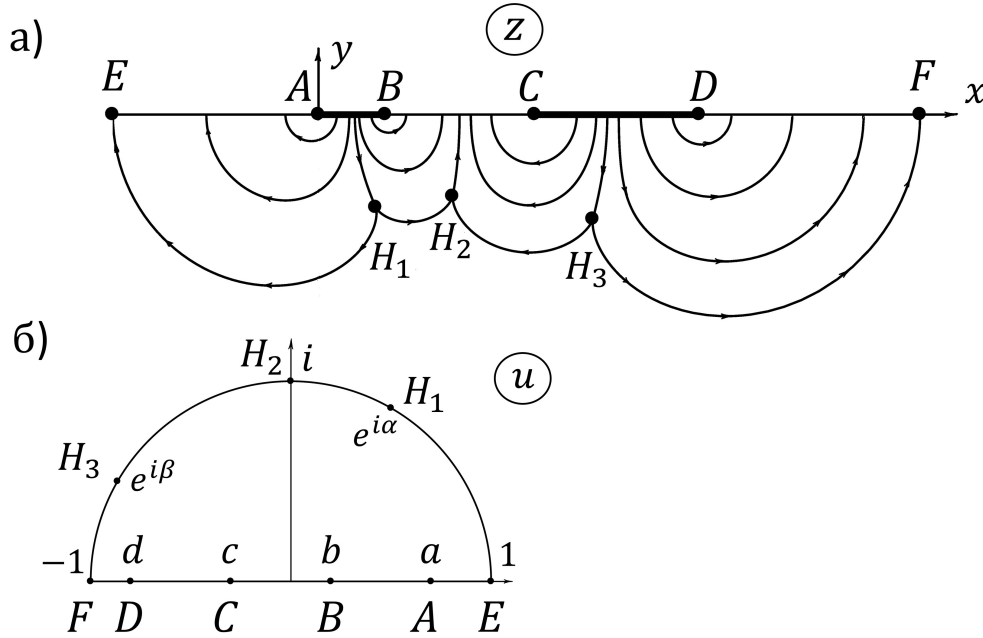


Рис. 1: Схема течения (а), параметрическая область (б)

Поле скорости возникшего течения несжимаемой среды обладает потенциалом $\varphi = -p_t/\rho$, где p_t — импульс давления, ρ — плотность [12]. Из условия несжимаемости следует, что потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

Таким образом, задача сводится к следующей задаче для гармонической функции φ в области G_z с частично неизвестной границей:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0 & \text{в области } G_z; \\ \varphi(x, y) = 0, & (x, y) \in EA, BC, DF; \\ \varphi(x, y) = -p_{t1}/\rho = -\varphi_1, & (x, y) \in AB; \\ \varphi(x, y) = -p_{t2}/\rho = -\varphi_2, & (x, y) \in CD; \\ |\text{grad } \varphi(x, y)| = v_0, & (x, y) \in \Gamma_z. \end{cases}$$

Линия Γ_z , принимаемая за границу воронки выброса, имеет заранее неизвестную форму, определяемую в результате решения задачи.

Для рассматриваемого плоскопараллельного течения можно ввести комплексный потенциал $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ ($\psi(x, y)$ — функция тока), который является в области G_z аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$.

Действительная часть комплексного потенциала $\varphi = \text{Re}(w(z))$ должна удовлетворять указанным выше граничным условиям на участках поверхности грунта, а условие на Γ_z записывается в виде $\left| \frac{dw}{dz}(z) \right| = v_0$.

Аналитическое решение

Решение задачи строится отображением областей изменения комплексного потенциала w и комплексной скорости $\frac{dw}{dz}$ течения на область изменения вспомогательного параметрического переменного u , в качестве которого выбирается полукруг единичного радиуса. Соответствие точек физической и параметрической областей указано на рис. 1, а, б.

Для построения отображения $\frac{dw}{du}(u)$ проанализируем его особенности в параметрической области.

В точке H_1 происходит раздвоение линии тока, поэтому при обходе этой точки в параметрической области по бесконечно малой полуокружности увеличению $\arg(u - e^{i\alpha})$ на π соответствует увеличение $\arg(w(u) - w(e^{i\alpha}))$ на 2π . Поэтому в тейлоровском разложении $w(u)$ отсутствует линейный член и функция $\frac{dw}{du}(u)$ имеет в точке $u = e^{i\alpha}$ нуль первого порядка. Аналогично устанавливаем, что отображение $\frac{dw}{du}(u)$ имеет простые нули в точках H_2 ($u = i$) и H_3 ($u = e^{i\beta}$).

В плоскости w точке A соответствует бесконечно удаленная точка полосы, поэтому в A ($u = a$) функция $w(u)$ имеет логарифмическую особенность, а $\frac{dw}{du}(u)$ — простой полюс. По этой же причине в B ($u = b$), C ($u = c$), D ($u = d$) будут также полюса первого порядка.

В точках E ($u = 1$) и F ($u = -1$) функция $\frac{dw}{du}(u)$ не имеет ни нулей, ни особенностей. Действительно, эти точки в параметрической области расположены в вершинах прямых углов, и поэтому нарушения конформности отображения $w(u)$ не происходит.

При аналитическом продолжении $\frac{dw}{du}(u)$ на всю плоскость u согласно принципу симметрии [14, 15] добавляются простые нули в точках $u = e^{-i\alpha}$, $u = e^{-i\beta}$, $u = -i$ и простые полюса в $u = 1/a$, $u = 1/b$, $u = 1/c$, $u = 1/d$. Других, кроме указанных выше, нулей и особенностей отображение $\frac{dw}{du}(u)$ не имеет, поэтому согласно теореме Лиувилля [14, 15] находим

$$\frac{dw}{du} = N \frac{(u - e^{i\alpha})(u - e^{-i\alpha})(u - e^{i\beta})(u - e^{-i\beta})(u - i)(u + i)}{(u - a)(1 - au)(u - b)(1 - bu)(u - c)(1 - cu)(u - d)(1 - du)},$$

где N — некоторая постоянная.

Это соотношение с учетом обозначений $f(u, \gamma) = u^2 - 2u \cos \gamma + 1$, $g(u, n) = (u - n)(1 - nu)$ записывается в виде:

$$\frac{dw}{du}(u) = N \frac{f(u, \alpha)f(u, \beta)(u^2 + 1)}{g(u, a)g(u, b)g(u, c)g(u, d)}. \quad (1)$$

Интегрируя (1) по бесконечно малой полуокружности вокруг точки A ($u = a$) с учетом того, что при переходе с EA на AB изменение w равно $-\varphi_1$, находим

$$-\varphi_1 = N \frac{(1 + a^2)f(a, \alpha)f(a, \beta)}{(1 - a^2)g(a, b)g(a, c)g(a, d)}\pi i. \quad (2)$$

Аналогичное интегрирование вокруг точек B ($u = b$), C ($u = c$), D ($u = d$) позволяет получить

$$\varphi_1 = N \frac{(1 + b^2)f(b, \alpha)f(b, \beta)}{(1 - b^2)g(b, a)g(b, c)g(b, d)}\pi i, \quad (3)$$

$$-\varphi_2 = N \frac{(1 + c^2)f(c, \alpha)f(c, \beta)}{(1 - c^2)g(c, a)g(c, b)g(c, d)}\pi i, \quad (4)$$

$$\varphi_2 = N \frac{(1+d^2)f(c, \alpha)f(c, \beta)}{(1-d^2)g(c, a)g(c, b)g(c, d)} \pi i. \quad (5)$$

Из (2) – (5) следуют соотношения

$$\frac{(1+a^2)(1-b^2)f(a, \alpha)f(a, \beta)g(b, c)g(b, d)}{(1-a^2)(1+b^2)f(b, \alpha)f(b, \beta)g(a, c)g(a, d)} = 1, \quad (6)$$

$$\frac{(1+c^2)(1-d^2)f(c, \alpha)f(c, \beta)g(a, d)g(b, d)}{(1-c^2)(1+d^2)f(d, \alpha)f(d, \beta)g(a, c)g(b, c)} = 1, \quad (7)$$

$$\frac{(1+a^2)(1-c^2)f(a, \alpha)f(a, \beta)g(b, c)g(c, d)}{(1-a^2)(1+c^2)f(c, \alpha)f(c, \beta)g(a, b)g(a, d)} = \tilde{\varphi}, \quad (8)$$

$$N = \frac{Q_1 \varphi_1}{\pi} i = \frac{Q_2 \varphi_2}{\pi} i, \quad (9)$$

где $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, $Q_1 = \frac{(1-b^2)g(a, b)g(b, c)g(b, d)}{(1+b^2)f(b, \alpha)f(b, \beta)}$, $Q_2 = \frac{(1-d^2)g(a, d)g(b, d)g(c, d)}{(1+d^2)f(d, \alpha)f(d, \beta)}$.

Перейдем к построению отображения $\frac{dw}{dz}(u)$. Эта функция в точках F и E ($u = \pm 1$) является регулярной, поскольку этим точкам, размещенным в вершинах прямых углов в параметрической области, в плоскости годографа (плоскости dw/dz) также соответствуют точки, являющиеся вершинами прямых углов.

При обходе точки A ($u = a$) увеличению $\arg(u - a)$ на π соответствует уменьшение $\arg(dw/dz)$ на π . Следовательно, $\frac{dw}{dz}(u)$ в $u = a$ имеет полюс первого порядка. Такие же особенности отображение $\frac{dw}{dz}(u)$ имеет в точках $u = b$, $u = c$, $u = d$.

Так как на линии Γ_z выполнено условие $\left| \frac{dw}{dz} \right| = v_0 = \text{const}$, то при аналитическом продолжении на всю плоскость u добавляются нули первого порядка в точках $u = 1/a$, $u = 1/b$, $u = 1/c$ и $u = 1/d$.

Таким образом,

$$\frac{dw}{dz}(u) = M \frac{(1-au)(1-bu)(1-cu)(1-du)}{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}. \quad (10)$$

В точках E и F известно значение $\frac{dw}{dz}(\pm 1) = -iv_0$. С помощью (10) находим $M = -iv_0$.

Из (1), (10) следует

$$\frac{dz}{du}(u) = \frac{N}{M} F(u), \quad F(u) = \frac{f(u, \alpha)f(u, \beta)(u^2 + 1)}{(1-au)^2(1-bu)^2(1-cu)^2(1-du)^2}. \quad (11)$$

При интегрировании (11) вдоль AB получаем соотношение

$$-l_1 = \int_b^a \frac{dz}{du}(u) du = \frac{N}{M} J_1, \quad J_1 = \int_b^a F(u) du,$$

с использованием которого (11) записывается в виде:

$$\frac{1}{l_1} \frac{dz}{du}(u) = -\frac{1}{J_1} F(u). \quad (12)$$

С помощью (9) находим

$$k_1 = \frac{l_1 v_0}{\varphi_1} = \frac{Q_1 J_1}{\pi}. \quad (13)$$

Интегрируя (12) вдоль CD и BC , получаем

$$\tilde{l} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{J_2}{J_1}, \quad (14)$$

$$\tilde{h} = \frac{h}{l_1} = \frac{J_3}{J_1}, \quad (15)$$

где $J_2 = \int_b^a F(u)du$, $J_3 = \int_c^b F(u)du$.

С помощью (9, 13, 14) находим $k_2 = \frac{l_2 v_0}{\varphi_2} = \frac{Q_2 J_2}{\pi}$.

Таким образом, независимыми безразмерными определяющими параметрами можно брать величины $\tilde{\varphi}$, k_1 , $\tilde{l}$ и $\tilde{h}$. При заданных их значениях система уравнений (6) – (8) и (13) – (15) служит для определения входящих в общее решение (10), (12) неизвестных параметров a , b , c , d , α , β , удовлетворяющих требованиям $-1 < d < c < b < a < 1$ и $0 < \alpha < \pi/2 < \beta < \pi$.

После решения указанной системы можно рассчитать форму границы воронки выброса Γ_z , параметрическое уравнение которой имеет вид $z = z(e^{it})$, $t \in [0, \pi]$, где функция $z(u)$ находится интегрированием (12).

Явный вид функции $z(u)$ и выражений для величин J_1 , J_2 и J_3 из-за их громоздкости здесь не приводится.

Система уравнений (6) – (8) и (13) – (15) является сложной, и поэтому полный параметрический анализ задачи затруднителен.

Можно из общих соображений утверждать, что ее решение существует не для всех возможных наборов значений $\tilde{\varphi}$, k_1 , $\tilde{l}$ и $\tilde{h}$. Действительно, при значительном удалении зарядов друг от друга может оказаться, что их взаимодействия не происходит, и выемка выброса распадается на две несвязные области. Это не соответствует рассматриваемой схеме рис. 1, *a*. Другое ограничение на значения указанных безразмерных параметров следует из требования отсутствия самопересечения найденной из решения линии Γ_z , то есть сохранения однолиственности течения. Из решения задачи о взрыве одиночного поверхностного заряда следует [3], что если значение безразмерного параметра $k_1 = l_1 v_0 / \varphi_1$ оказывается больше некоторого максимального значения, то выброс грунта происходит только в окрестности краев заряда, а некоторая его центральная часть срабатывает впустую. Очевидно, в настоящей задаче может возникнуть подобная ситуация, также не согласующаяся со схемой рис. 1, *a*.

В частном случае, когда заряды имеют одинаковую ширину $l_1 = l_2 = l$ и равны значения потенциалов $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$, течение оказывается симметричным относительно плоскости, проходящей через середину отрезка BC . Такая задача аналогична задаче о взрыве одиночного заряда при наличии непробиваемого вертикального откоса (твердой стенки, совпадающей с указанной плоскостью симметрии).

Выбранная параметрическая область в виде полукруга и расположение на ее границе характерных точек течения позволяют из общего решения легко получить решение для указанного симметричного случая. Для этого следует положить $c = -b$, $d = -a$ и $\beta = \pi - \alpha$.

Тогда уравнения (6) и (7) дают одно и то же соотношение

$$a(1 - a^2)((b^2 + 1)^2 - 4b^2 \cos^2 \alpha) = b(1 - b^2)((a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \alpha). \quad (16)$$

Из уравнений (8) и (14) следует $\tilde{\varphi} = 1$ и $\tilde{l} = 1$, то есть действительно $l_2 = l_1$, $\varphi_2 = \varphi_1$ и $k_1 = k_2$.

Из (16) получаем $\cos^2 \alpha = \frac{4ab - (1 - a^2)(1 - b^2)}{4ab}$. Требование $\cos \alpha \in (0, 1)$ приводит к неравенству $a > (1 - b)/(1 + b)$.

После исключения с помощью (16) параметра α система (13), (15) для параметров a , b решается численно в области $0 < b < 1$, $\max\{b, (1 - b)/(1 + b)\} < a < 1$.

Результаты численных расчетов

На рис. 2 – 4 приведены найденные расчетами границы воронки выброса для случая одинаковых зарядов. Вследствие симметрии изображена только область течения, расположенная слева от плоскости симметрии.

Изменение формы воронки при фиксированном значении $k = lv_0/\varphi_0$ и меняющимся $\tilde{h} = h/l$ можно проследить на примере расчета для $k = 0.3/\pi$ (рис. 2).

Решение задачи, соответствующее рассматриваемой схеме, существует только при $\tilde{h} < \tilde{h}_{max}(k)$. В предельном случае $\tilde{h} = \tilde{h}_{max}(k)$ точка H_2 линии Γ_z оказывается на уровне поверхности грунта $y = 0$, а воронка распадается на две одинаковые, имеющие только одну общую точку выемки. Их форма может быть найдена из решения задачи о взрыве одиночного заряда.

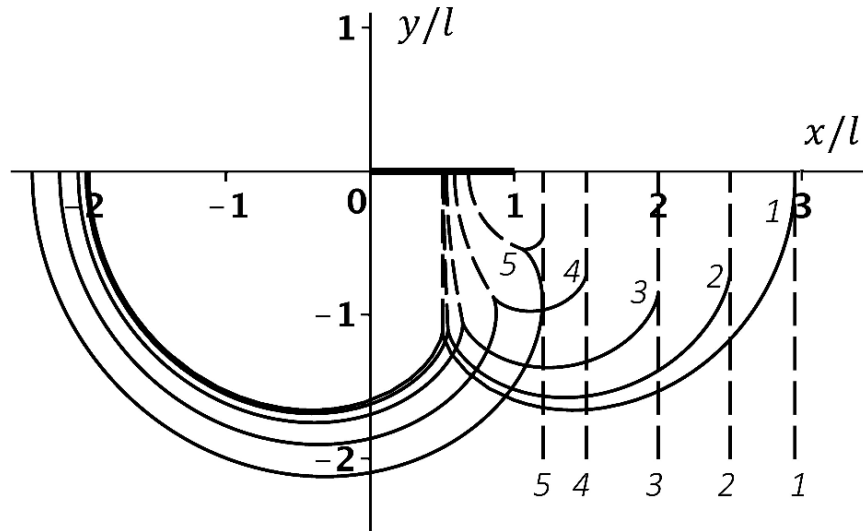


Рис. 2: Форма границы воронки выброса для $k = 0.3/\pi$ при значениях $\tilde{h} = 3.9; 3, 2, 1, 0.4$ (кривые 1–5 соответственно)

На рис. 2 линия 1 соответствует значению $\tilde{h} = 3.9$, близкому к предельному $\tilde{h}_{max}(0.3/\pi) \approx 3.917$. Как видно из рисунка, эта линия оказывается практически симметричной относительно плоскости, перпендикулярной заряду и проходящей через его центр. Уменьшение значения $\tilde{h}$ приводит к существенной деформации границы воронки, сокращению участка H_1H_2 и увеличению длины EH_1 (линии 2 – 5).

При достижении $\tilde{h}$ некоторого значения $\tilde{h}_{min}(k)$ возникает ситуация, когда участок EH_1 линии Γ_z касается плоскости симметрии течения. Линия 5, соответствующая $\tilde{h} = 0.4$, близка к предельному случаю $\tilde{h}_{min}(0.3/\pi) \approx 0.396$.

Для значений $\tilde{h} < \tilde{h}_{min}$ происходит пересечение EH_1 с плоскостью симметрии, то есть возникает неоднолистность течения, и такое решение является физически нереализуемым. Подобная ситуация наблюдается и в задаче о взаимодействии двух точечных зарядов [10]. Для исключения возможности появления неоднолистности решения в работе [11] использовалась модифицированная схема течения, в которой в окрестности плоскости симметрии дополнительно располагалась зона покоя, аналогичная застойной зоне Чаплыгина, используемой в гидродинамике струйных течений [14].

Перейдем далее к описанию эволюции формы воронки с изменением параметра k при фиксированном значении $\tilde{h}$. Имеет место качественное отличие случаев $\tilde{h} \leq 1$ и $\tilde{h} > 1$.

При $\tilde{h} > 1$ соответствующее рассматриваемой схеме однолистное решение может существовать только при $k \in [k_{min}(\tilde{h}), k_{max}(\tilde{h})]$. В предельном случае $k = k_{max}(\tilde{h})$ наблюдается

ситуация, аналогичная описанной выше — воронка представляет собой объединение двух отдельных одинаковых выемок, соприкасающихся в одной точке H_2 , расположенной на уровне $y = 0$. На рис. 3 для $\tilde{h} = 3$ линией 1 показана форма воронки, близкая к указанной предельной $k_{\max}(3) \approx 0.458/\pi$.

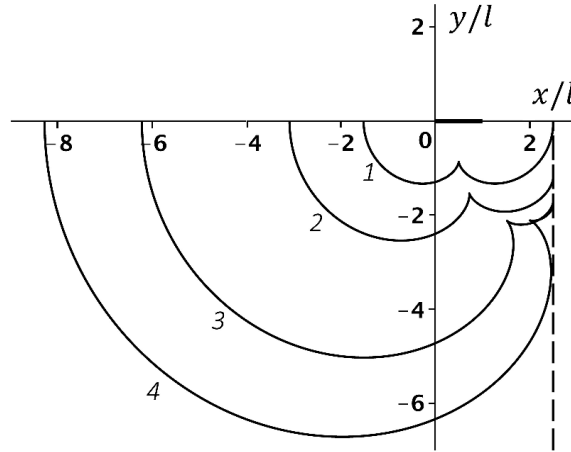


Рис. 3: Форма границы воронки выброса для $\tilde{h} = 3$ при значениях $\pi k = 0.45; 0.15, 2, 0.05, 0.032$ (кривые 1 – 4 соответственно)

При уменьшении значения параметра k , которое можно трактовать как усиление импульсного воздействия заряда, происходит рост размеров воронки (линии 1 – 4). При достижении значения $k_{\min}(\tilde{h})$ участок EH_1 линии Γ_z касается плоскости симметрии, а при меньших значениях k решение становится неоднолиственным. На рис. 3 линия 4 соответствует значению $k = 0.032/\pi$, близкому к $k_{\min}(3) \approx 0.0314/\pi$.

При $h \leq 1$ значения параметра k также должны лежать в диапазоне $[k_{\min}(\tilde{h}), k_{\max}(\tilde{h})]$. Но теперь в предельном случае $k = k_{\max}(\tilde{h}) = 2/\pi$ граница воронки состоит из дуг окружностей с радиусами, равными $l/2$, и центрами, находящимися в крайних точках зарядов. Форма воронки для $\tilde{h} = 0.4$, близкая к предельной, изображена на рис. 4 линией 1. С уменьшением параметра k поведение решения аналогично описанному выше (линии 2 – 5). При $k < k_{\min}(0.4) \approx 0.1665$ решение является неоднолиственным.

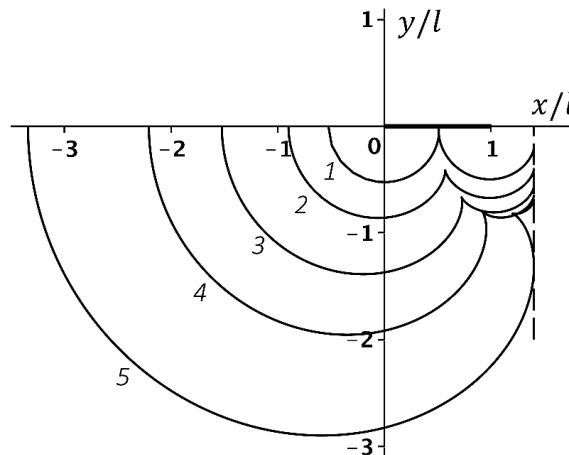


Рис. 4: Форма границы воронки выброса для $\tilde{h} = 0.4$ при значениях $\pi k = 1.99, 1, 0.5, 0.3, 0.167$ (кривые 1–5 соответственно)

Примеры расчетов формы воронки выброса для общего случая неодинаковых зарядов приведены на рис. 5 и 6 для двух наборов значений безразмерных определяющих параметров. Рис. 5 соответствует ситуации, когда равны значения импульса давления на поверхностях зарядов, но при этом заряды имеют различную ширину. В расчете, результаты которого показаны на рис. 6, различными являются также и значения импульса давления.

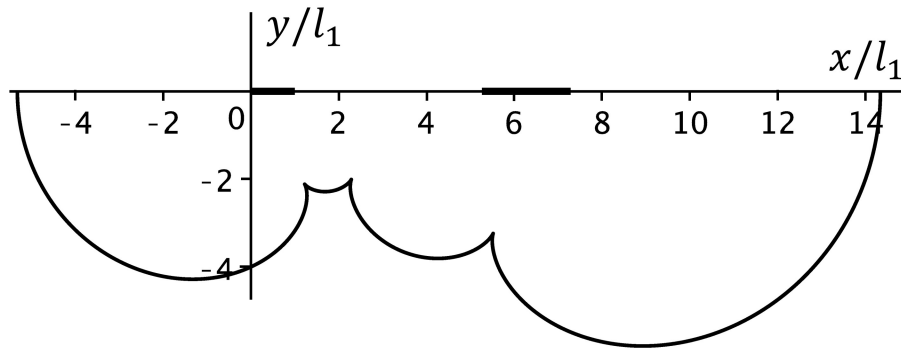


Рис. 5: Форма границы воронки выброса для значений $\tilde{\varphi} = 1$, $\tilde{l} = 2.02$, $\tilde{h} = 4.27$, $\pi k_1 = 0.063$, $\pi k_2 = 0.126$

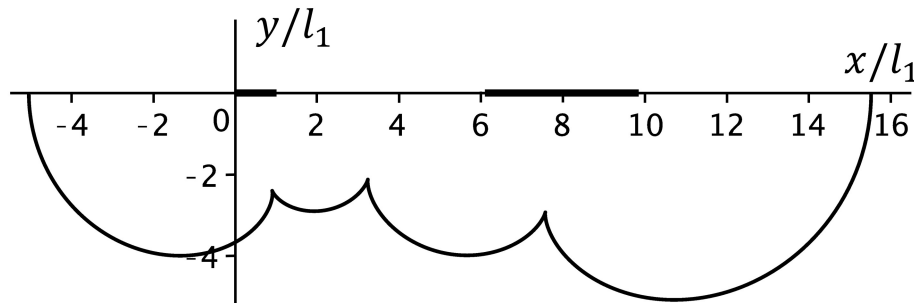


Рис. 6: Форма границы воронки выброса для значений $\tilde{\varphi} = 2$, $\tilde{l} = 3.75$, $\tilde{h} = 5.09$, $\pi k_1 = 0.063$, $\pi k_2 = 0.476$

Заключение

В рамках твердожидкостной импульсной модели получено точное решение задачи о взрыве на поверхности грунта двух плоских шнуровых зарядов, позволяющее определить форму воронки выброса для широкого набора значений определяющих параметров. Установлено, что форма воронки, возникающей при взаимодействии зарядов, существенно отличается от случая одиночного заряда. Показано, что имеют место ограничения на значения безразмерных определяющих параметров, обусловленные выбранной схемой течения и требованием сохранения однолиственности решения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М. А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 136 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.

3. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта// Прикл. механика и техн. физ. 1960. № 3. С. 152–156.
4. Толоконников С. Л. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта шнурового заряда клиновидной формы// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 6. С. 82–85.
5. Толоконников С. Л. К задаче о взрыве поверхностного шнурового заряда// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2020. № 1. С. 75–79.
6. Ильинский Н. Б., Поташев А. В., Рубиновский А. В., Фищенко П. А. Решение некоторых задач теории взрыва в импульсно-гидродинамической постановке// Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 14. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. С. 98–109.
7. Ильинский Н. Б., Фищенко П. А. Исследование влияния наклонного твердого дна на выемку выброса при взрыве поверхностного шнурового заряда// Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 20. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1983. С. 116–128.
8. Рубиновский А. В. О пробивании преграды взрывом в импульсно-гидродинамической постановке// Прикл. механика. и техн. физ. 1986. № 2. С. 143–146.
9. Поляк Э. Б., Шер Е. Н. О форме воронки выброса при взрыве шнурового заряда в двухслойной среде// Прикл. механика. и техн. физ. 1973. № 2. С. 143–146.
10. Кузнецов В. М., Поляк Э. Б., Шер Е. Н. О гидродинамическом взаимодействии шнуровых зарядов ВВ// Прикл. механика и техн. физ. 1975. № 5. С. 93–101.
11. Ильинский Н. Б., Якимов Н. Д. О взаимодействии двух плоских шнуровых зарядов при взрыве на поверхности грунта// Прикл. механика и техн. физ. 1977. № 1. С. 147–151.
12. Кузнецов В. М. Математические модели взрывного дела. Новосибирск: Наука, 1977. 259 с.
13. Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Краевые задачи теории взрыва. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 183 с.
14. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
15. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

REFERENCES

1. Lavrentiev, M. A. 1962, “*The variational method in the basic problems for the systems of elliptical type equations*”, AN USSA, Moscow, 136 p., [in Russian].
2. Lavrentiev, M. A., Shabat, B. V. 1973, “*Hydrodynamic problems and their mathematic models*”, Nauka, Moscow, 416 p., [in Russian].
3. Kuznetsov V. M. 1960, “On the shape of the ejection funnel by an explosion on ground surface”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no 3, pp. 152-156, [in Russian].
4. Tolokonnikov, S. L. 2018, “The shape of the crater formed by an explosive wedge-shaped cord charge on the ground surface”, *Moscow University Mechanics Bulletin*, vol. 73, no. 6, pp. 82-85.
5. Tolokonnikov, S. L. 2020, “On the explosion problem of surface cord charge”, *Moscow University Mechanics Bulletin*, no. 5, pp. 75-79, [in Russian].

6. Ilyinsky, N.B., Potashev, A.V., Rubinovskii, A.V. & Fishenko, P.A. 1977, "Solving some problems of the explosion theory in a pulse-hydrodynamic formulation", *Seminar proceedings on boundary problems*, no 14, Kazan University, Kazan, pp. 98-109, [in Russian].
7. Ilyinsky, N.B., Fishenko, P.A. 1983, "Investigation of the influence of a sloping hard bottom on ejection notch formed by an explosion of a surface cord charge", *Seminar proceedings on boundary problems*, no 20, Kazan University, Kazan, pp. 116-128, [in Russian].
8. Rubinovskii, A.V. 1986, "On breaking of an obstacle by an explosion in a pulse-hydrodynamic formulation", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no 2, pp. 143-146, [in Russian].
9. Polyak, E.B. & Sher, E.N. 1973, "About the shape of the ejection funnel at explosion of a cord charge in a two-layer medium", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no. 2, pp. 143-146, [in Russian].
10. Kuznetsov, V.M., Polyak, E.B. & Sher, E.N. 1975, "About hydrodynamic interaction of cord explosive charges", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no 5, pp. 143-146, [in Russian].
11. Ilyinsky, N.B., Yakimov, N.D. 1977, "On the interaction of two flat cord charges formed by an explosion on ground surface", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no. 1, pp. 147-151, [in Russian].
12. Kuznetsov V.M. 1977, "Mathematical models of the explosive case", Nauka, Novosibirsk, 259 p., [in Russian].
13. Ilyinsky, N.B., Potashev, A.V. 1986, "Boundary problems of the explosion theory", Kazan University, Kazan, 183 p., [in Russian].
14. Gurevich, M.I. 1979, "Theory of the ideal liquid jets", Nauka, Moscow, 536 p., [in Russian].
15. Lavrentiev, M.A., Shabat, B.V. 1973, "Methods of complex variable functions theory", Nauka, Moscow, 736 p., [in Russian].

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-484-489

Замечание к теореме Давенпорта¹

Ке Гонг

Гонг Ке — доктор наук, доцент, Хэнаньский университет (Кайфэн, КНР).*e-mail: kg@henu.edu.cn*

Аннотация

Пусть Λ - n -мерная решетка, а $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1}$ — любые $n - 1$ векторов в n -мерном вещественном евклидовом пространстве. В работе доказано существование базиса $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ решётки Λ такого, что неравенство

$$|\alpha_i - N\mathbf{c}_i| = O(\log^2 N), \quad (1 \leq i \leq n - 1)$$

имеет место для любого вещественного $N \geq 2$, где константа в знаке O зависит лишь от Λ и $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1}$.

Ключевые слова: Решетка, базис, аппроксимация, комбинаторное решето.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Ке Гонг. Замечание к теореме Давенпорта // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 484–489.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-484-489

Note on a theorem of Davenport

Ke Gong

Gong Ke — doctor of science, Associate Professor, Henan University (Kaifeng, P. R. China).*e-mail: kg@henu.edu.cn*

Abstract

Let Λ be a n -dimensional lattice, and $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1}$ be any $n - 1$ vectors in n -dimensional real Euclidean space. We show that there exists a basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ of Λ such that

$$|\alpha_i - N\mathbf{c}_i| = O(\log^2 N), \quad (1 \leq i \leq n - 1)$$

holds for any real number $N \geq 2$, where the constant implied by the O symbol depends only on Λ and $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1}$.

Keywords: Lattice, basis, approximation, combinatorial sieve.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

Ke Gong, 2021, “Note on a theorem of Davenport”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 484–489.

¹Исследование выполнено за счет гранта Государственного фонда естественных наук Китая (проект № 11671119).

Introduction

We denote by $\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{c}$ the n -dimensional real vectors, and by

$$|\mathbf{x}| = |(x_1, \dots, x_n)| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

the length of $\mathbf{x}$. Let $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ be a given system of linearly independent vectors in n -dimensional real Euclidean space, the set of vectors

$$\Lambda = \{u_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \dots + u_n \boldsymbol{\alpha}_n \mid u_1, \dots, u_n \in \mathbb{Z}\}$$

is called a n -dimensional lattice with basis $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$.

Let $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1}$ be an arbitrary set of $n-1$ linearly independent n -dimensional real vectors. A theorem of Davenport [2] says that, for large positive N , we can choose a basis of Λ such that the first $n-1$ vectors of it are not too far from $N\mathbf{c}_1, \dots, N\mathbf{c}_{n-1}$ respectively. Using this theorem, Davenport [2] gave a simple and elegant proof of a generalization of Furtwängler's result on simultaneous Diophantine approximation. See also the monographs of Cassels [1], Gruber and Lekkerkerker [3], and Zhu [13].

In this note, we obtain

THEOREM 1. *Let Λ be a n -dimensional lattice, and $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1}$ be any $n-1$ vectors in n -dimensional real Euclidean space. Then there exists a basis $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ of Λ , such that for any real number $N \geq 2$, we have*

$$|\boldsymbol{\alpha}_i - N\mathbf{c}_i| = O(\log^2 N), \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

where the constant implied by the O symbol depends only on Λ and $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1}$.

If we replace the above error term with $O(N^\varepsilon)$, where ε is any given positive number and the constant implied by the O symbol may depend on ε, Λ and $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1}$, this is the original result of H. Davenport. In 1975, using Brun's sieve, Y. Wang [9] obtained a refinement $O(\log^3 N)$ on the error term. In 1985, Z. H. Yang [10] and Q. Yao [11] refined the error term to $O(\log^{2+\varepsilon} N)$ and to $O(\log^2 N (\log \log N)^2)$ respectively. Here we obtain a still-further refinement of Davenport's theorem.

Proof

We need Iwaniec's shifted sieve [4], see also Martin [7].

LEMMA 1. *Let $\mathcal{A}$ be a finite sequence, $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ and $W : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Let $p_1, \dots, p_r$ be distinct primes and $Q = p_1 \cdots p_r$. Define*

$$T = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ \gcd(U(a), Q) = 1}} W(a)$$

and for all $d \mid Q$, put

$$S_d = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ U(a) \equiv 0 \pmod{d}}} W(a).$$

Suppose there exist A and B such that

$$\left| S_d - \frac{A}{d} \right| \leq B$$

for all $d \mid Q$. Then there exists an absolute positive constant c such that

$$T \geq c \frac{A}{\log(\omega(Q))} \prod_{p \mid Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + O(B\omega^2(Q)),$$

where $\omega(Q)$ denote the number of distinct prime divisors of Q , and the constant implied by the O symbol is an absolute constant.

PROOF. See Lemma 7 of Martin [7]. $\square$

LEMMA 2. For $q \geq 3$, there holds

$$\varphi(q) \geq c' \frac{q}{\log \log q}.$$

PROOF. For a proof, see Theorem 5.1 of Prachar [8]. $\square$

LEMMA 3. Let $q \geq 2$ be any positive integer, s and t be integers with $(t, q) = 1$. Then there exists an absolute constant K such that each interval of length greater than $K \log^2 q$ contains a positive integer u such that $(tu + s, q) = 1$.

This lemma is essential for our refinement of Davenport's theorem. So we shall give a detailed proof by combining Iwaniec's shifted sieve with the arguments of Wang [9].

PROOF. 1) Let G be an arbitrary real number,

$$H = K \log^2 q, \quad Q = \prod_{\substack{p \mid q \\ p \leq \log^\delta q}} p,$$

where p runs through primes, $\delta = 1 + \varepsilon$ with ε being an arbitrarily small positive number, and $K \geq 1$ is a parameter to be determined. Then

$$\Sigma = \sum_{\substack{G < u \leq G+H \\ (tu+s, q)=1}} 1 \geq \Sigma_1 - \Sigma_2,$$

where

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{G < u \leq G+H \\ (tu+s, Q)=1}} 1, \quad \Sigma_2 = \sum_{\substack{p \mid q \\ p > \log^\delta q}} \sum_{\substack{G < u \leq G+H \\ tu+s \equiv 0 \pmod{p}}} 1.$$

For $(t, q) = 1$, we have

$$\sum_{\substack{G < u \leq G+H \\ tu+s \equiv 0 \pmod{d}}} 1 = \left[\frac{H}{d} \right] + \theta = \frac{H}{d} + \theta,$$

here and hereafter, we use θ to denote a number $|\theta| \leq 1$ but not always the same in each occurrence. Since the number of prime divisors of q is less than $2 \log q$, we have

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{\substack{p \mid q \\ p > \log^\delta q}} \left(\frac{H}{p} + \theta \right) \leq \frac{H}{\log^\delta q} \sum_{p \mid q} 1 + \sum_{p \mid q} 1 \\ &\leq 2H \log^{1-\delta} q + 2 \log q \leq 4K \log^{3-\delta} q = 4K \log^{2-\varepsilon} q. \end{aligned}$$

We shall apply Lemma 2 with

$$\mathcal{A} = \{u \mid G < u \leq G + H\}, \quad U(u) = tu + s, \quad W(u) = 1,$$

and let $p_1 < \cdots < p_r$ be the set of primes satisfying $p_i \mid q$ and $p_i \leq \log^\delta q$ ($1 \leq i \leq r$). Then, by Lemma 1 and Mertens's theorem, there exists an absolute positive constant c_1 such that

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\geq c_1 \frac{H}{\log(\omega(Q))} \prod_{\substack{p \mid q \\ p \leq \log^\delta q}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + O(\omega^2(Q)) \\ &\geq c_1 \frac{H}{\log(\omega(Q))} \frac{e^{-\gamma}}{\delta \log \log q} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log \log q}\right)\right) + O(\omega^2(Q)). \end{aligned}$$

Since $\omega(Q) \leq \omega(q)$ and $\omega(q) \sim \frac{\log q}{\log \log q}$, thus

$$\Sigma_1 \geq c_2 K \frac{\log^2 q}{(\log \log q)^2}$$

if we choose K sufficiently large, where c_2 is an absolute positive constant.

Combing the above estimates for Σ_1 and Σ_2 , we conclude that, when $q \geq q_0$ with q_0 being a sufficiently large constant,

$$\Sigma > c_3 K \frac{\log^2 q}{(\log \log q)^2} > 1.$$

2) When $q \leq q_0$, we use Eratosthenes sieve and Lemma 2 to obtain

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{\substack{G < u \leq G+H \\ (tu+s, q)=1}} 1 = \sum_{G < u \leq G+H} \sum_{d \mid (tu+s, q)} \mu(d) = \sum_{d \mid q} \mu(d) \sum_{\substack{G < u \leq G+H \\ tu+s \equiv 0 \pmod{d}}} 1 \\ &= H \sum_{d \mid q} \frac{\mu(d)}{d} + \theta \sum_{d \mid q} 1 = H \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \theta q > c_4 K \frac{\log^2 q}{\log \log q} + \theta q > 1, \end{aligned}$$

where $c_4 > 0$ is an absolute constant. Since $q \leq q_0$, we can choose K sufficiently large to guarantee that $\Sigma > 1$. $\square$

PROOF. [Theorem 1] Once we obtain Lemma 3, the proof of Theorem 1 follows the arguments of Y. Wang [9], or Cassels [1, § I.2.4]. $\square$

Remarks

We give some remarks for further study.

- i) Using the results we obtain here, we can also refine the corresponding results presented in Lekkerkerker [5, 6] and Zhu [12], where they considered some generalizations of Davenport's theorem.
- ii) It is an interesting problem to reduce further the interval length in Lemma 3.

Acknowledgements

This work was supported by NSFC grant 11671119.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. W. S. Cassels, *An Introduction to the Geometry of Numbers*. Springer-Verlag, Berlin, 1959.
2. H. Davenport, *On a theorem of Furtwängler*. J. London Math. Soc. **30** (1955), 186–195.
3. P. M. Gruber and C. G. Lekkerkerker, *Geometry of Numbers*. Second Edition, North-Holland, Amsterdam, 1987.
4. H. Iwaniec, *On the problem of Jacobsthal*. Demonstratio Math. **11** (1978), 225–231.
5. C. G. Lekkerkerker, *A theorem on the distribution of lattices*. Indag. Math. **23** (1961), 197–210.
6. C. G. Lekkerkerker, *Homogeneous simultaneous approximations*. Indag. Math. **25** (1963), 578–586.
7. G. Martin, *The least prime primitive root and the shifted sieve*. Acta Arith. **80** (1997), 277–288.
8. K. Prachar, *Primzahlverteilung*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
9. Y. Wang, *Remarks on a theorem of Davenport*. Acta Math. Sinica **18** (1975), 286–289 (in Chinese); English transl. in *Selected Papers of Wang Yuan*, pp.180–184, World Scientific, Hackensack, NJ, 2005.
10. Z. H. Yang, *An improvement for a theorem of Davenport*. J. China Univ. Sci. Tech. **15** (1985), 1–5.
11. Q. Yao, *An approximation theorem for an n -dimensional lattice*. J. Shanghai Univ. Sci. Tech. **8** (1985), 12–15. (in Chinese)
12. Y. C. Zhu, *A note on Lekkerkerker's theorem concerning lattices*. Acta Math. Sinica **23** (1980), 720–729.
13. Y. C. Zhu, *An Introduction to the Geometry of Numbers*. University of Science and Technology of China Press, Hefei, 2019. (in Chinese)

REFERENCES

1. J. W. S. Cassels, *An Introduction to the Geometry of Numbers*. Springer-Verlag, Berlin, 1959.
2. H. Davenport, *On a theorem of Furtwängler*. J. London Math. Soc. **30** (1955), 186–195.
3. P. M. Gruber and C. G. Lekkerkerker, *Geometry of Numbers*. Second Edition, North-Holland, Amsterdam, 1987.
4. H. Iwaniec, *On the problem of Jacobsthal*. Demonstratio Math. **11** (1978), 225–231.
5. C. G. Lekkerkerker, *A theorem on the distribution of lattices*. Indag. Math. **23** (1961), 197–210.
6. C. G. Lekkerkerker, *Homogeneous simultaneous approximations*. Indag. Math. **25** (1963), 578–586.
7. G. Martin, *The least prime primitive root and the shifted sieve*. Acta Arith. **80** (1997), 277–288.
8. K. Prachar, *Primzahlverteilung*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.

-
9. Y. Wang, *Remarks on a theorem of Davenport*. Acta Math. Sinica **18** (1975), 286–289 (in Chinese); English transl. in *Selected Papers of Wang Yuan*, pp.180–184, World Scientific, Hackensack, NJ, 2005.
 10. Z. H. Yang, *An improvement for a theorem of Davenport*. J. China Univ. Sci. Tech. **15** (1985), 1–5.
 11. Q. Yao, *An approximation theorem for an n -dimensional lattice*. J. Shanghai Univ. Sci. Tech. **8** (1985), 12–15. (in Chinese)
 12. Y. C. Zhu, *A note on Lekkerkerker's theorem concerning lattices*. Acta Math. Sinica **23** (1980), 720–729.
 13. Y. C. Zhu, *An Introduction to the Geometry of Numbers*. University of Science and Technology of China Press, Hefei, 2019. (in Chinese)

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 517.11

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-490-500

Об экстремальности аффинного образа топологического произведения некоторых многообразий

И. Ш. Джаббаров, Л. Г. Исмаилова

Джаббаров Ильгар Шикар оглы — кандидат физико-математических наук, Гянджинский государственный университет (г. Гянджа).

e-mail: ilgar_j@rambler.ru

Исмаилова Ляман Галиб кызы — Гянджинский государственный университет (г. Гянджа).

e-mail: leman.ismailova.86@mail.ru

Аннотация

В теории диофантовых приближений рассматриваются вопросы приближения действительных чисел рациональными дробями с одинаковыми знаменателями. Среди интенсивно изучаемых вопросов этой теории особое место занимают метрические аспекты. Здесь рассматриваются такие вопросы теории приближений, которые имеют место для почти всех действительных чисел из заданного промежутка. Впервые подобные вопросы были изучены Хинчином для приближений независимых величин. Им были поучены условия, при которых для почти всех действительных чисел достигается указанная точность приближения рациональными дробями. Очень важный в техническом плане принцип переноса Хинчина позволяет связать совместные приближения зависимых величин с приближениями целочисленных форм.

В 1932 г. Малер К. ввел в рассмотрение классификацию трансцендентных чисел. Он показал, что почти все трансцендентные числа являются S -числами. Более того, Малер доказал существование такой постоянной $\gamma > 0$, что для почти всех ω

$$|P(\omega)| > h^{-n\gamma},$$

каков бы ни был целочисленный многочлен P степени не более n и высоты $h > h_0(\omega, n, \gamma)$. По Малеру можно взять

$$\gamma = 4 + \varepsilon.$$

В этой же работе Малер высказал предположение, что можно взять $\gamma = 1 + \varepsilon$ для почти всех вещественных чисел.

Эту гипотезу доказал Спринджук В. Г. методом существенных и несущественных областей. Одновременно Спринджук В. Г. выдвинул несколько гипотез, обобщающие и уточняющие результаты Малера. В дальнейшем исследования Спринджук привели к развитию нового направления в теории диофантовых приближений — исследованию экстремальности многообразий.

В настоящей статье мы развиваем новый подход к этим вопросам и предлагаем новое доказательство экстремальности алгебраических многообразий. Предлагаемый метод позволяет установить экстремальность аффинного образа топологических произведений некоторых многообразий. На одном примере мы доказываем, что экстремальность таких многообразий можно вывести из теорем о показателе сходимости особого интеграла проблемы Терри, используя лемму Ковалевской Э. И. Далее из полученного результата мы выведем частный случай гипотезы Спринджук об экстремальности многообразия, порожденного одночленами некоторого многочлена от двух переменных.

Ключевые слова: Диофантовы приближения, экстремальное многообразие, показатель сходимости, особый интеграл, проблема Терри.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

И. Ш. Джаббаров, Л. Г. Исмаилова. Об экстремальности аффинного образа топологического произведения некоторых многообразий // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 490–500.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 517.11

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-490-500

On extremality of affine image of topological product of some varieties

I. Sh. Jabbarov, L. G. Ismailova

Jabbarov Ilgar Shikar oglu — candidate of physical and mathematical sciences, Ganja State University (Ganja).

e-mail: ilgar_j@rambler.ru

Ismailova Leman Galib gizi — Ganja State University (Ganja).

e-mail: leman.ismailova.86@mail.ru

Abstract

In the theory of Diophantine Approximations one considers a question on approximation of Real Numbers by rational fractions with one and the same denominators. Among intensively studied questions of this theory a special place occupy Metric questions. Here such questions of the theory are considered which take place for almost all real numbers from given interval. For the first time similar questions have been studied by Khintchine for approximation of independent quantities. It had been investigated by him conditions at which for almost all real numbers specified accuracy of approximation is reached. Very important in the technical plan Khintchine's transference principle allows us to connect a simultaneous approximations of dependent quantities with approximations of linear forms with integral coefficients.

In 1932 Mahler K. has entered classification of transcendental numbers into consideration. He showed that almost all transcendental numbers are S -numbers. Moreover, Mahler had proved an existence of a constant $\gamma > 0$ such that for almost all ω

$$|P(\omega)| > h^{-n\gamma},$$

for all polynomials P of degree no more n and height $h > h_0(\omega, n, \gamma)$. Mahler showed that it is possible to take

$$\gamma = 4 + \varepsilon.$$

In the same work Mahler made an assumption that it is possible to take $\gamma = 1 + \varepsilon$ for almost all real numbers.

This hypothesis was proved by Sprindzhuk V. G by a method of essential and non-essential domains. Simultaneously, Sprindzhuk V. G. advanced some hypotheses generalising and improving Mahler's results. Further these investigations of Sprindzuk led to the development of a new direction in the theory of Diophantine Approximations – to the research of extremality of manifolds.

In the present article we develop a new approach to these questions and offer a new proof for extremality of algebraic varieties. This method allows to establish extremality of affine image of topological product of some varieties. Considering one particular case, we prove that the extremality for these varieties is possible to deduct from theorems on the convergence exponent of a special integral of Terry's problem, using E.I. Kovalevskaya's lemma. Further, we derive from the getting result particular case of the Sprindzuk's hypothesis on extremality of varieties, induced by monomials of a polynomial in two variables.

Keywords: Diophantine approximation, extremal manifold, convergence exponent, special integral, Terry's problem.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

I. Sh. Jabbarov, L. G. Ismailova, 2021, "On extremality of affine image of topological product of some varieties", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 490–500.

Введение

Рассмотрим множество всех многочленов от переменной x с целыми коэффициентами, степени которых не превосходят n :

$$\Pi = \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Число

$$H(f) = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|)$$

называется высотой многочлена $f(x)$. Пусть дано действительное трансцендентное число α (следовательно, α не является корнем никакого из многочленов рассматриваемого семейства Π). Пусть $H > 0$ действительное число. Будем, при заданном $H > 0$, рассмотреть такие многочлены, у которых высота не превосходит H (ясно, что количество таких многочленов конечно). Обозначим через $\gamma_0 = \gamma_0(\alpha)$ точную верхнюю грань тех положительных чисел $\gamma > 0$, для которых неравенство

$$|f(\alpha)| < H^{-\gamma}; \quad H = H(f) \quad (1)$$

выполняется для бесконечного количества многочленов из Π , когда $H \rightarrow \infty$; другими словами для любого $\varepsilon > 0$ найдется не ограниченная сверху возрастающая последовательность $H_1, \dots, H_m, \dots$ такая, что (1) выполнено для всех таких H_m при

$$\gamma = \gamma_0 + \varepsilon.$$

Вводя классификацию ([8]) Малер ([9]) высказал предположение, что $\gamma_0 = n$. Это предположение было доказано в [11].

В работах [10], [11, стр. 433] Спринджук В. Г. сформулировал ряд проблем теории диофантовых приближений, касающихся экстремальным многообразиям. К настоящему времени эти гипотезы доказаны (наиболее общая из них установлена Д. Клейнбоком и Г. Маргулисом [12]). В данной работе мы рассматриваем частный случай одной из гипотез Спринджук В. Г., и докажем экстремальность аффинного образа топологического произведения ([3], [10, стр. 67]) многообразий, порожденных одночленами рассматриваемого многочлена степени 3 (заметим, что мы рассматриваем только действительный вариант) новым путем, используя лемму 2 и теорему из [1, стр. 51] (см. также [4]). Заметим, что примененный способ пригоден и для многочленов более высоких степеней.

Пусть

$$P(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3,$$

— целочисленный многочлен степени 3. Пусть, далее, $v(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{2h}, \beta_{2h})$ означает точную верхнюю грань тех $v > 0$, для которых существует бесконечное число целочисленных многочленов P , удовлетворяющих неравенству

$$\left| \sum_{j=1}^h (P(\alpha_j, \beta_j) - P(\alpha_{j+h}, \beta_{j+h})) \right| < H^{-v},$$

$$H = \max(|a_0|, \dots, |a_9|).$$

Теорема. Для почти всех $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{2h}, \beta_{2h}) \in \mathbb{R}^{4h}$

$$v(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{2h}, \beta_{2h}) = 9,$$

где $h = 12$.

Замечание. Следует заметить, что нижняя граница для h определяется условием $2h > \gamma$, где γ – показатель сходимости двумерной проблемы Терри с многочленом $P(x, y)$. Согласно оценке, найденной в [5], можно взять $h = 6$.

Следствие. Для почти всех $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$v(\alpha, \beta) = 9.$$

Вспомогательные результаты

Для установления наших результатов перейдем к равносильному варианту поставленной задачи, выражая ее в виде экстремальности многообразий. Сначала заметим, что полученные выше соотношения можно интерпретировать по-другому. А именно, пусть нам задана система действительных чисел $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Рассмотрим неравенство

$$\|b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + \dots + b_n\eta_n\| \leq b^{-v}, \quad (2)$$

где $\|x\|$ означает расстояние от x до ближайшего целого числа, $b = \max(|b_1|, \dots, |b_n|)$, причем $b > 0, v > 0$. Обозначим через $v(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ точную верхнюю грань всех тех $v > 0$, для которых (2) выполнено для бесконечного числа целых векторов $(b_1, \dots, b_n)$. Одновременно, рассмотрим следующее неравенство:

$$\max(\|q\eta_1\|, \|q\eta_2\|, \dots, \|q\eta_n\|) \leq q^{-u}. \quad (3)$$

Теперь обозначим через $u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ точную верхнюю грань всех тех $u > 0$, для которых (3) выполнено для бесконечного числа целых положительных $q > 0$. В теории диофантовых приближений существует принцип, называемый принципом переноса Хинчина (см. [3, 7, 10]), утверждающая, что равенства $v(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = n$ и $u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = 1/n$ равносильны. Опять – таки из принципа ящиков Дирихле следует соотношение

$$u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \geq 1/n.$$

Полагая $n = 9$ в качестве чисел $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_9$ возьмем следующие многочлены в топологическом произведении многообразий, порожденных одночленами положительной степени рассматриваемого многочлена P :

$$\begin{aligned} \eta_9 &= \sum_{j=1}^h (\beta_j^3 - \beta_{j+h}^3), \eta_8 = \sum_{j=1}^h (\alpha_j \beta_j^2 - \alpha_{j+h} \beta_{j+h}^2), \eta_7 = \sum_{j=1}^h (\alpha_j^2 \beta_j - \alpha_{j+h}^2 \beta_{j+h}), \\ \eta_6 &= \sum_{j=1}^h (\alpha_j^3 - \alpha_{j+h}^3), \eta_5 = \sum_{j=1}^h (\beta_j^2 - \beta_{j+h}^2), \eta_4 = \sum_{j=1}^h (\alpha_j \beta_j - \alpha_{j+h} \beta_{j+h}), \\ \eta_3 &= \sum_{j=1}^h (\alpha_j^2 - \alpha_{j+h}^2), \eta_2 = \sum_{j=1}^h (\beta_j - \beta_{j+h}), \eta_1 = \sum_{j=1}^h (\alpha_j - \alpha_{j+h}). \end{aligned}$$

Тогда можем записать

$$b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + \dots + b_9\eta_9 = \sum_{j=1}^h (P(\alpha_j, \beta_j) - P(\alpha_{j+h}, \beta_{j+h})),$$

т. е. неравенство (2) совпадает с неравенством рассмотренным выше для многочлена P , с коэффициентами $a_1 = b_1, \dots, a_9 = b_9$ (a_0 – произвольный), при этом b заменится на H . Тогда, с учетом принципа переноса Хинчина, мы должны показать, что

$$u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_9) = 1/9,$$

где $u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_9)$ обозначает точную верхнюю грань тех $u > 0$, для которых (3) выполнено для бесконечного числа целых положительных $q > 0$.

Лемма 1. Пусть A_q некоторая последовательность измеримых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ такая, что ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \text{mes} A_q < \infty.$$

сходится. Тогда, мера подмножества A тех точек $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, которые попадают в бесконечное семейство подмножеств A_q равна нулю.

Эта лемма хорошо известно из литературы и носит название леммы Бореля-Кантелли (см. [10]).

Следующая лемма принадлежит Э. И. Ковалевской (см. [2, 6, 10]).

Лемма 2. Пусть $m \leq N$ q -натуральные числа, $f_j(\bar{x})$, $j = 1, \dots, N$ - действительные измеримые функции, определенные в кубе $\Omega = [0, 1]^m$. Обозначим через $\mu(q)$ меру множества таких точек $\bar{x} \in \Omega = [0, 1]^m$, для которых

$$\|f_j(\bar{x})\| < q^{-r_j} (1 \leq j \leq N).$$

Тогда,

$$\mu(q) << q^{-r} \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \dots \sum_{|c_N| < q^{r_N}} \left| \int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 f_1(\bar{x}) + \dots + c_N f_N(\bar{x}))} d\bar{x} \right|,$$

где $r = r_1 + \dots + r_N$, а постоянная скрытая под символом $<<$ зависит лишь от N .

Доказательство этой леммы можно найти в [2, 10].

Введем следующие обозначения:

$$f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = y, f_3(x, y) = x^2, f_4(x, y) = xy,$$

$$f_5(x, y) = y^2, f_6(x, y) = x^3, f_7(x, y) = x^2y, f_8(x, y) = y^2x, f_9(x, y) = y^3$$

Лемма 3. Существует натуральное число h , обладающее свойством: определитель Грама градиентов функций

$$\sum_{j=1}^h f_i(x_j, y_j), i = 1, \dots, 9, \quad (4)$$

отличен от нуля почти всюду в $\mathbb{R}^{2h}$.

Доказательство. Пусть $h \geq 9$. В этом случае матрица Якоби содержит 9 столбцов, образованных взятием частных производных рассматриваемых функций по переменным $x_1, y_2, x_3, y_4, x_5, y_6, x_7, y_8, x_9$. А именно, первый столбец содержит одночлены только от переменных x_1, y_1 , второй столбец – одночлены только от переменных x_2, y_2 и т. д. При этом, матрица Якоби не содержит нулевых строк. Поэтому, минор с такими столбцами содержит 9!

попарно разных произведений в своем раскрытии, которые не могут исчезать путем приведения подобных членов. Тогда этот минор представляет собой ненулевой многочлен и может обращаться в нуль только на замкнутом подмножестве пространства $\mathbb{R}^{18}$ меры нуль. Поскольку определитель Грама равен сумме квадратов всевозможных миноров матрицы Якоби (см. [13, стр. 245]), то утверждение леммы доказана.

Заметим, также, что на самом деле можно взять $h \geq 6$ (см. [5]).

Доказательство теоремы

Введем обозначение $\Omega = [0, 1]^2$. Рассмотрим функции

$$g_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) = f_j(\bar{x}_1) + \dots + f_j(\bar{x}_h) - f_j(\bar{x}_{h+1}) - \dots - f_j(\bar{x}_{2h}), j = 1, \dots, 9,$$

где $\bar{x}_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, 2h$, а значение h будем уточнять ниже. По сказанным выше, нам достаточно доказать, что $4h$ -мерное многообразие

$$\Gamma^* = (g_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_3(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_4(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_5(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), \\ g_6(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_7(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_8(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_9(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}))$$

является экстремальным (т. е. равенство $u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_9) = 1/9$ выполняется почти для всех $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{2h}, \beta_{2h}) \in \Omega^{2h}$ (см. [10, стр. 65])), как аффинный образ топологического произведения $2h$ экземпляров двумерного многообразия

$$\Gamma = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y), f_5(x, y), f_6(x, y), f_7(x, y), f_8(x, y), f_9(x, y)).$$

В лемме 2 положим $r_j = 1/9 + \delta$, где δ -произвольно малое положительное число.

Рассмотрим систему неравенств:

$$\|q(g_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}))\| = \\ = \|q(f_j(\bar{x}_1) + \dots + f_j(\bar{x}_h) - f_j(\bar{x}_{h+1}) - \dots - f_j(\bar{x}_{2h}))\| \leq q^{-r_j}, j = 1, \dots, 9, \quad (5)$$

Нетрудно заметить, что если мы положим $\bar{x}_j = (\alpha_j, \beta_j)$, то получим систему неравенств (3). Нам надо показать, что $u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = 1/n$ для почти всех $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h}$.

Введем в рассмотрение множество точек в Ω^{2h} , для которых (5) выполнено, т. е. множество

$$B_q = \{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h, \bar{x}_{h+1}, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h} : \|qg_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h})\| \leq q^{-r_j}, j = 1, \dots, 9\}$$

Через B обозначим подмножество тех кортежей $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h, \bar{x}_{h+1}, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h}$, которые попадают в бесконечное множество подмножеств B_q . Мы докажем, что $mes B = 0$. Для этого, согласно лемме Бореля -Кантелли, достаточно доказать сходимость ряда $\sum_{q=1}^{\infty} \mu_q$, где $\mu_q = mes(B_q)$.

По лемме 2, для меры $\mu_q = mes(B_q)$ подмножества точек, с условиями (5), получаем:

$$\mu_q < q^{-1-9\delta} \times \\ \times \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \dots \sum_{|c_9| < q^{r_9}} \left| \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q g_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) + \dots + c_9 q g_9(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}))} d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{2h} \right| = \\ = q^{-1-9\delta} \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \dots \sum_{|c_9| < q^{r_9}} \left| \left(\int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q f_1(\bar{x}) + \dots + c_9 q f_9(\bar{x}))} d\bar{x} \right)^h \right|^2.$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q f_1(\bar{x}) + \dots + c_9 q f_9(\bar{x}))} d\bar{x} \right)^h = \\ & = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q(f_1(\bar{x}_1) + \dots + f_1(\bar{x}_h)) + \dots + c_9 q(f_9(\bar{x}_1) + \dots + f_9(\bar{x}_h)))} d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_h. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно формуле замены переменных из работ [4, 5], имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q(f_1(\bar{x}_1) + \dots + f_1(\bar{x}_h)) + \dots + c_9 q(f_9(\bar{x}_1) + \dots + f_9(\bar{x}_h)))} d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_h = \\ & = \int_0^h \dots \int_0^h du_1 \dots du_9 e^{2\pi i q(c_1 u_1 + \dots + c_9 u_9)} \int_{\Pi(\bar{u})} \frac{ds}{\sqrt{G}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Pi(\bar{u})$ обозначает поверхность, определяемую системой уравнений

$$f_j(\bar{x}_1) + \dots + f_j(\bar{x}_h) = u_j, \quad j = 1, \dots, 9,$$

а G обозначает определитель Грама градиентов функций стоящих на левых частях уравнений этой системы. Заметим, что согласно лемме 3, левую часть равенства (7) можно представить в виде несобственного интеграла, предварительно выделив некоторое окружение (см. [13, стр. 204]) множества точек, где $G = 0$, с достаточно малой мерой. Тогда, соответственно этому, и правую часть равенства (7) также следует понимать в несобственном смысле. Более строго говоря, введем множество

$$M_{\eta} = \{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h) \in \Omega^h | G \geq \eta > 0\}.$$

Тогда, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q(f_1(\bar{x}_1) + \dots + f_1(\bar{x}_h)) + \dots + c_9 q(f_9(\bar{x}_1) + \dots + f_9(\bar{x}_h)))} d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_h = \\ & = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{M_{\eta}} e^{2\pi i(c_1 q(f_1(\bar{x}_1) + \dots + f_1(\bar{x}_h)) + \dots + c_9 q(f_9(\bar{x}_1) + \dots + f_9(\bar{x}_h)))} d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_h \end{aligned}$$

Следовательно, правую часть равенства (7) следует записать в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^h \dots \int_0^h \left(\int_{\Pi(\bar{u}) \cap M_{\eta}} \frac{ds}{\sqrt{G}} \right) e^{2\pi i q(c_1 u_1 + \dots + c_9 u_9)} d\bar{u} = \\ & = \int_0^h \dots \int_0^h \left(\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Pi(\bar{u}) \cap M_{\eta}} \frac{ds}{\sqrt{G}} \right) e^{2\pi i q(c_1 u_1 + \dots + c_9 u_9)} d\bar{u}. \end{aligned}$$

Выражение $\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Pi(\bar{u}) \cap M_{\eta}} \frac{ds}{\sqrt{G}}$ под интегралом определяет функцию от $\bar{u}$, которая, в силу положительности и монотонности относительно η , имеет вполне определенное, конечное или бесконечное значение. Полагая, для удобства $\eta = 1/m$, будем иметь:

$$\begin{aligned} & \int_0^h \dots \int_0^h \left| \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Pi(\bar{u}) \cap M_{\lambda}} \frac{ds}{\sqrt{G}} - \left(\int_{\Pi(\bar{u}) \cap M_{\eta}} \frac{ds}{\sqrt{G}} \right) \right| d\bar{u} \leq \\ & \int_0^h \dots \int_0^h \sum_{n \geq m} \int_{\Pi(\bar{u}) \cap (M_{1/n} \setminus M_{1/(n+1)})} \frac{ds}{\sqrt{G}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_{\Omega^h \setminus M_{1/m}} dx_1 dy_1 \cdots dx_h dy_h \rightarrow 0,$$

при $\eta \rightarrow 0$, что доказывает возможность указанного выше перехода к пределу под знаком интеграла.

Представим интеграл на правой части (7) в виде суммы коэффициентов Фурье от кусков внутреннего поверхностного интеграла, который понимается в несобственном смысле. С этой целью разобьем интеграл на правой части (6) в сумму интегралов, взятых по единичным кубам. Для этого представим интеграл на правой части (6) в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^h \cdots \int_0^h du_1 \cdots du_9 e^{2\pi i(c_1 qu_1 + \cdots + c_9 qu_9)} \int_{\Pi(\bar{u})} \frac{ds}{\sqrt{G}} = \\ &= \sum_{h_1=1}^h \cdots \sum_{h_9=1}^h \int_{h_1-1}^{h_1} \cdots \int_{h_9-1}^{h_9} \phi(u_1, \dots, u_9) e^{2\pi i(c_1 qu_1 + \cdots + c_9 qu_9)} du_1 \cdots du_9, \end{aligned}$$

причем,

$$\phi(u_1, \dots, u_9) = \begin{cases} \int_{\Pi(\bar{u})} \frac{ds}{\sqrt{G}}, & \text{если } \Pi(\bar{u}) \neq \emptyset \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, при каждом фиксированном q , согласно сказанным выше, получаем:

$$\begin{aligned} & \left| \left(\int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q f_1(\bar{x}) + \cdots + c_9 q f_9(\bar{x}))} d\bar{x} \right)^h \right|^2 \leq h^9 \times \\ & \sum_{h_1=1}^h \cdots \sum_{h_9=1}^h \left| \int_{h_1-1}^{h_1} \cdots \int_{h_9-1}^{h_9} \phi(u_1, \dots, u_9) e^{2\pi i(c_1 qu_1 + \cdots + c_9 qu_9)} du_1 \cdots du_9 \right|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \mu_q & \ll q^{-1-9\delta} \sum_{h_1=1}^h \cdots \sum_{h_9=1}^h \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \cdots \sum_{|c_9| < q^{r_9}} 1 \times \\ & \times \left| \int_{h_1-1}^{h_1} \cdots \int_{h_9-1}^{h_9} \phi(u_1, \dots, u_9) e^{2\pi i(c_1 qu_1 + \cdots + c_9 qu_9)} du_1 \cdots du_9 \right|^2 \end{aligned}$$

Очевидно, на правой части суммы по $(c_1, \dots, c_9)$ не превосходят всю сумму квадратов модулей коэффициентов Фурье функции $\phi(u_1, \dots, u_9)$. Тогда, по равенству Парсеваля имеем:

$$\begin{aligned} \mu_q & \ll q^{-1-9\delta} \times \\ & \times \sum_{h_1=1}^h \cdots \sum_{h_9=1}^h \int_{h_1-1}^{h_1} \cdots \int_{h_9-1}^{h_9} du_1 \cdots du_9 \left(\int_{\Pi(\bar{u})} \frac{ds}{\sqrt{G}} \right)^2 = \\ & = q^{-1-9\delta} \int_0^h \cdots \int_0^h du_1 \cdots du_9 \left(\int_{\Pi(\bar{u})} \frac{ds}{\sqrt{G}} \right)^2 \end{aligned}$$

Как установлено в [4, стр. 78] (см. также [5]), кратный интеграл на правой части равенства представляет собой особый интеграл проблемы Терри с многочлен теоремы 10 кн. [1] степени 3 ($r = 2$). Поскольку

$$2 \binom{5}{2} + 2 = 22,$$

то как было установлено в [1], особый интеграл сходится, если $h = 12$. Тогда, ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \mu_q$$

сходится. Согласно лемме Бореля - Кантелли, подмножество B имеет меру нуль.

Нами доказано, что при $h = 12$ подмножество тех кортежей $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h, \bar{x}_{h+1}, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h}$, которые попадают в подмножества B_q для бесконечного количества натуральных чисел q , имеет меру нуль. Возьмем последовательность чисел $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \rightarrow 0$ и найдем последовательность множеств $M_1, M_2, \dots$ меры нуль, точки каждого из которых попадают в подмножества B_q для бесконечного количества натуральных чисел q , с соответствующим значением δ_n . Обозначим $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.

Имеем $mes M = 0$. Для точек $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h} \setminus M$ система неравенств

$$\|qg_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h})\| \leq q^{-r_j}, j = 1, \dots, 9 \quad (8)$$

уже для любого положительного $\delta > 0$ может выполняться только для конечного числа натуральных чисел q . Это означает, что почти для всех $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h}$ точная верхняя грань тех чисел $u > 0$, для которых система

$$\|qg_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h})\| \leq q^{-u}, j = 1, \dots, 9$$

имеет место для бесконечного множества натуральных чисел q , не превосходит $1/9$. Далее, из принципа Дирихле следует, что эта точная грань не меньше чем $1/9$. Следовательно, в обозначениях, введенных выше, выполняется равенство $u(\eta_1, \dots, \eta_9) = 1/9$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Обратимся теперь к доказательству следствия.

Введем множество

$$A_q = \{\bar{x} \in \Omega \mid \|qf_j(\bar{x})\| < (1/2h)q^{-r_j} (1 \leq j \leq 9)\}.$$

Очевидно имеем: $A_q^{2h} \subset B_q$. Из этого следует, что для любого положительного $\delta > 0$ множество A тех точек $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h}$, для которых соотношение

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in A_q^{2h}$$

выполняется для бесконечного количества натуральных чисел q является подмножеством множества B таких же точек, для которых соотношение

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in B_q$$

выполняется для бесконечного количества натуральных чисел q , т. е. $A \subset B$.

Далее, по теореме Фубини проекция C множества $\Omega^{2h} \setminus M$ на плоскость (x, y) имеет полную меру. Нам надо доказать, что для всех $(x, y) \in C$ система неравенств

$$\|qf_j(\bar{x})\| < q^{-u-1/9} (1 \leq j \leq 9) \quad (9)$$

для всех $u > 0$ имеет место лишь для конечного числа чисел q . Допустим противное. Пусть для некоторого $(x, y) \in C$ найдется $u > 0$ такое, система (9) выполняется для бесконечного множества натуральных чисел q . Тогда, полагая $(x, y) = \bar{x}_1 = \dots = \bar{x}_{2h}$, и учитывая равноправность переменных $\bar{x}_j$, получаем, что (8) выполняется для бесконечного множества натуральных чисел q , когда $\delta = u$, при этом $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h} \setminus M$. Это противоречит доказанному выше. Итак, почти для всех точек из Ω (9) выполняется.

Следствие доказано.

Заключение

Следует заметить, что хотя в статье мы рассмотрели частный случай многочлена третьей степени с двумя переменными, результат работы можно обобщить на случай многочленов от нескольких переменных и произвольной положительной степени. Всегда найдется специальный аффинный образ топологического произведения экземпляров многообразий, порожденных одночленами данного многочлена, являющийся экстремальным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987, 368 с.
2. Берник В. И., Ковалевская Э. И. Экстремальное свойство некоторых поверхностей в n -мерном евклидовом пространстве. // Матем. заметки, 1974, том 15, выпуск 2, 247–254.
3. Касселе Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.:ИИЛ, 1961, 212стр.
4. Джаббаров И. Ш., О показателе сходимости особого интеграла многомерной проблемы Терри, *Чебышевский Сборник*, 14:2 (2013), 74-103.
5. Джаббаров И. Ш. О многомерной проблеме Терри для кубического многочлена // Математические заметки, том 107, выпуск 5, (2020), стр. 657-673 (в печати).
6. Ковалевская Э. И. Совместно экстремальные многообразия.// Матем. заметки, 1987, том 41, выпуск 1, 3–8.
7. Khintchine A., Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, *Circolo mat. Palermo* 50, 1926, 175-195.
8. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus. I, II., *J. reine und angew. Math.*, 1932, 166, S. 118–150.
9. Mahler K. Über das Mass der Menge aller S-Zahlen.— *Math. Ann.*, 1932, v. 106 pp. 131 — 139.
10. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977, 143 стр.
11. Спринджук В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965, т. 29 вып.2, стр. 379–436.
12. Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // *Ann. Math.*—1998.—Vol. 148.—P. 339–360.
13. Шилов Г. Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных).— М.:Наука, 1972.

REFERENCES

1. Archipov, G. I., Karatsuba, A. A. & Chubarikov V. N. 1987. The Theory of multiple trigonometric sums, Moscow: Nauka, pp. 368.
2. Bernik V. I., Kovalevskaya E. I. 1974, “Extremality property of some surfaces in n dimensional space”, *Mathematical Notes*, v. 15, issue 2, pp. 247–254.

3. Kassels, J. B. C. 1961. Introduction to the theory of Diophantine Approximations, Moscow: IIL, pp. 212.
4. Dzhabbarov I. Sh., The exponent of convergence of a special integral in multidimensional problems Terry, *Chebyshevskii Sbornik*, 14:2 (2013), 74-103.
5. Dzhabbarov, I. Sh. 2020. On multidimensional Tarry's problem for a cubic polynomial, *Matematicheskie zametki*, v.107, issue 5 pp. 657–673 (to appear).
6. Kovalevskaya E. I. 1987, "Simultaneously extremal manifolds", *Mathematical Notes*, v. 41, issue 1, pp. 3-8.
7. Khintschine A., 1926, "Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen", *Circolo mat. Palermo* 50, pp. 175-195.
8. Mahler K. 1932, "Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus", I, II., *J. reine und angew. Math.*, v. 166, pp. 118–150.
9. Mahler K. 1932, "Über das Mass der Menge aller S-Zahlen", *Math. Ann.*, 1932, v. 106 pp. 131 — 139.
10. Sprindzuk B. Г. 1977. Metric theory of Diophantine Approximations, Moscow: Nauka, pp.143.
11. Sprindzuk V. G. 1965, "A proof of Mahler's conjecture on the measure of the set of S-numbers", *Izvestiya: Mathematics*, v.29, 2, pp. 379–436.
12. Kleinbock D. Y., Margulis G. A. 1998, "Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds", *Ann. Math.*, v. 148, pp. 339–360.
13. Shilov G. E. 1972. Mathematical Analysis (functions of several real variables), Moscow: Nauka, pp. 622.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 518.865

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509

Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения¹

А. И. Козко, Л. М. Лузина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Козко Артем Иванович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Лузина Любовь Михайловна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).

e-mail: lluzhina@gmail.com

Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуется зависимость функций капитала (ресурса) и потребления в экономической модели Рамсея — Касса — Купманса в случае, когда сбережение является тождественной постоянной. В сделанных предположениях система дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию рассматриваемой экономической модели, решена в квадратурах. На основании полученного решения найдены оценки сверху функции потребления.

Ключевые слова: математическая модель, задача Рамсея — Касса — Купманса, конкурентные домохозяйства, функция капитала, потребления.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

А. И. Козко, Л. М. Лузина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 501–509.

¹Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00332-а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 518.865

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509

**Restrictions on the values of the consumption function
in the Ramsey — Kass — Koopmans economic growth model
in the case of a stationary saving function**

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Luzhina Lyubov Mihailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: lluzhina@gmail.com

Popov Anton Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Chirskii Vladimir Grigorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We study the dependence of the functions of capital (resource) and consumption in the Ramsey–Kass–Koopmans economic model in the case when saving is an identical constant. The system of differential equations describing the evolution of the economic model under consideration is solved in quadratures under the assumptions made. Upper estimates of the consumption function are found based on the obtained solution.

Keywords: mathematical model, Ramsey–Kass–Koopmans problem, competitive households, function of capital, consumption.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2021, “Restrictions on the values of the consumption function in the Ramsey–Kass–Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 501–509.

Введение

В модели Рамсея – Касса – Купманса (см. [5]–[12]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой

удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t :

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^\alpha(t) - C(t) - x_1K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2C(t). \end{cases} \quad (1)$$

В систему входит набор констант $(a, \alpha, \theta, x_1, x_2)$, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру.

Первая группа констант a, α, θ определяет производственную функцию Кобба – Дугласа f и функцию полезности U_θ . В качестве функции $f(K)$, выражающей зависимость производства продукции от капитала K , берут степенную функцию Кобба – Дугласа [5] – [12]

$$f(K) = aK^\alpha. \quad (2)$$

В последних работах Гомеса [18], [19] экономическая модель Рамсея – Касса – Купманса разбиралась также и для CES производственной функции, т.е. для функции вида $f(K) = B(\alpha K^\psi + (1 - \alpha))^{1/\psi}$, где $B > 0$, $\alpha \in (0; 1)$, $\psi < 1$.

В статье нами задача решается на бесконечном промежутке времени $t \in [0; \infty)$. Отметим также некоторые интересные обобщения данной модели, в которых рассматриваются задачи на конечном промежутке времени (модель с "известным концом света") с учётом режима производства технологической информации см. [17]. В работах авторов [1] – [4] также изучалась модель экономического роста на конечном промежутке времени.

Во всех востребованных на практике моделях показатель степени α в производственной функции Кобба – Дугласа лежит в пределах $0.7 \leq \alpha \leq 0.97$. Модели со значениями показателя α меньше $2/3$ считаются заведомо неэффективными и не рассматриваются см. [15]. В качестве функции полезности U_θ обычно берут

$$U_\theta = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}, \quad \theta > 0, \quad \theta \neq 1, \quad U_1(C) = \ln C. \quad (3)$$

Значение параметра θ обычно лежит в отрезке $0.4 \leq \theta \leq 4$.

Вторая группа констант, линейными комбинациями которых являются $x_1 = x + n + \delta$ и $x_2 = \frac{\delta + \rho}{\theta} + x$, связана с такими характеристиками изучаемой экономической системы (n, x, δ, θ), как темпы прироста населения, развитие уровня технологии, выбывания капитала, а также ставкой временного предпочтения. Подробно с ними можно ознакомиться в [7] – [12]. В дальнейших рассмотрениях существенно, что x_1, x_2 — небольшие положительные числа, как правило, лежащие в пределах от 0.01 до 0.1.

В этой работе мы изучаем решения системы уравнений (1) в том важном частном случае, когда величины x_1 и x_2 связаны между собой соотношением

$$x_2 = \alpha x_1. \quad (4)$$

Равенство (4) рассматривалось в ряде публикаций, поскольку при его выполнении функция сбережения (см. о ней в [8]) является тождественной постоянной. Отметим, что нам не встретились в работах по этой тематике какие-либо решения системы (3) в квадратурах даже при выполнении связи (4) между входящими в систему экономическими параметрами. Обычно находят приближённое решение данной системы уравнений (без теоретической оценки погрешности), либо решают её численно. Также из этой системы приближённо выражают зависимость $C(K)$, показывающую, каким образом функция потребления зависит от величины капитала.

В случае выполнения равенства (4) мы получили решение системы дифференциальных уравнений (1) в квадратурах, хотя решение содержит интегралы от элементарных функций, в общем случае через элементарные функции не выражаемые. В то же время, в процессе решения системы (1) мы получили, введя функции

$$v(t) = K(t)e^{x_1 t}, \quad w(t) = C(t)e^{x_2 t}, \quad (5)$$

явную зависимость $v(w)$ через элементарные функции. Анализ этой зависимости позволил обнаружить ограничение на значения функции потребления $C(t)$, выражаемое через начальные условия

$$K(0) = K_0, \quad C(0) = C_0. \quad (6)$$

Как правило, в статьях, где рассматривались экономические модели, описываемые системой дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (6), рассматривались только возрастающие решения системы (1) (как $K(t)$, так и $C(t)$). Необходимым (но недостаточным) условием возрастания $K(t)$ является следующее неравенство между начальными условиями:

$$C_0 \leq f(K_0). \quad (7)$$

Мы несколько расширили допустимый класс решений системы (1), не требуя возрастания $K(t)$; мы лишь требуем, чтобы возрастающей являлась функция $v(t) = K(t)e^{x_1 t}$. Очевидно, что неубывание $K(t)$ влечёт за собой возрастание $v(t)$, но не наоборот.

В указанных предположениях доказана теорема 1, которая является основным результатом нашей работы. Говоря описательно, содержание этой теоремы состоит в том, что если начальное значение C_0 функции потребления $C(t)$ "ненамного" меньше значения производственной функции f от начального капитала K_0 , то $C(t)$ не может "значительно" подняться над своим начальным уровнем без того, чтобы нарушилось возрастание $v(t)$ и, как следствие, начала бы снижаться величина капитала $K(t)$.

Основные результаты

Перед формулировкой теоремы введём сравнительную характеристику начальных условий (6)

$$\Delta = \frac{f(K_0)}{C_0} - 1, \quad (8)$$

неотрицательную согласно ограничениям (7). Введённая характеристика связана с начальным значением неотрицательной функции $s(t) = 1 - \frac{C(t)}{f(K(t))}$, известной как норма валового сбережения. Нетрудно убедиться в справедливости равенства $\Delta = \frac{s(0)}{1-s(0)}$. Откуда вытекает равносильность $\Delta \geq 0 \iff s(0) \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K(t)$, $C(t)$ — решения системы (1) на произвольном отрезке $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющие начальным условиям (6), подчинённым ограничению (7). Тогда при условии (4) связи между параметрами справедливо следующее утверждение. Для того, чтобы функция $v(t) = K(t)e^{x_1 t}$ была неубывающей на всем отрезке $[0; T]$, функция $w(t) = C(t)e^{x_2 t}$ во всех точках отрезка $[0; T]$ необходимо должна удовлетворять оценке сверху

$$w(t) \leq C_0 (1 + \Delta(1 - \theta))^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если } \theta \in (0; 1), \quad (9)$$

$$w(t) \leq C_0 e^{\Delta}, \quad \text{если } \theta = 1. \quad (10)$$

Если $\theta > 1$, то оценка сверху

$$w(t) \leq C_0 (1 - \Delta(\theta - 1))^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (11)$$

выполняется при условии $0 < \Delta < (\theta - 1)^{-1}$.

Функция $w(t)$ является возрастающей, и поэтому выполнение неравенств (9)–(11) в точке T следует, что они выполняются во всех точках интервала $(0; T)$, причём неравенства становятся строгими.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если функция $w(t)$ достигнет в некоторой точке $t = T_0$ значения, стоящего в правой части неравенств теоремы 1 (какого именно неравенства — зависит от значения θ), то при всех $t > T_0$ функция $w(t)$ в силу своего возрастания превзойдёт эту границу. А тогда функция $v(t)$ (и тем более $K(t)$) будет иметь при любом $t > T_0$ отрицательную производную.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $\theta > 1$, когда $\Delta \geq (\theta - 1)^{-1}$ наш метод не даёт ограничений на значения $w(t)$ (или хотя бы $C(t)$), однако возможность наличия подобных ограничений не исключена.

Из теоремы 1 и тождества $C(t) = w(t)e^{-x_2 t}$ получаем ограничение сверху для значений функции потребления.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 для функции потребления $C(t)$ при всех значениях $t > 0$ верны следующие оценки сверху;

$$\begin{aligned} C(t) &\leq C_0 e^{-x_2 t} (1 + \Delta(1 - \theta))^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если } \theta \in (0; 1), \\ C(t) &\leq C_0 e^{(\Delta - x_2 t)}, \quad \text{если } \theta = 1, \\ C(t) &\leq C_0 e^{-x_2 t} (1 - \Delta(\theta - 1))^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если } \theta > 1, \Delta < (\theta - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Преобразуя систему дифференциальных уравнений (1) относительно функций $K(t)$ и $C(t)$ в систему дифференциальных уравнений относительно функций $v(t)$ и $w(t)$, определённых формулами (5). Полученная в результате этих преобразований система дифференциальных уравнений относительно функций v и w будет выглядеть проще, нежели система (1), но, в отличие от неё, окажется не автономной: в правых частях уравнений будут присутствовать множители, явно зависящие переменной t . Однако, в силу равенства (4) эти множители являются одинаковыми. Данное обстоятельство позволит вывести для зависимости $v(w)$ дифференциальное уравнение первого порядка, задача Коши для которого явно решается известными методами.

Согласно (5) имеем

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= \frac{d}{dt} (v(t)e^{-x_1 t}) = \dot{v}(t)e^{-x_1 t} - x_1 v(t)e^{-x_1 t} = \dot{v}(t)e^{-x_1 t} - x_1 K(t), \\ \dot{C}(t) &= \frac{d}{dt} (w(t)e^{-x_2 t}) = \dot{w}(t)e^{-x_2 t} - x_2 w(t)e^{-x_2 t} = \dot{w}(t)e^{-x_2 t} - x_2 C(t). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\dot{K}(t) + x_1 K(t) = \dot{v}(t)e^{-x_1 t}, \quad \dot{C}(t) + x_2 C(t) = \dot{w}(t)e^{-x_2 t}. \quad (12)$$

Из (12) заключаем, что после перехода от $K(t)$ и $C(t)$ к функциям $v(t)$ и $w(t)$ по формулам (5) система уравнений (1) приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{v}e^{-x_1 t} = av^\alpha(t)e^{-\alpha x_1 t} - w(t)e^{-x_2 t}; \\ \dot{w}e^{-x_2 t} = \theta^{-1}\alpha av^{\alpha-1}(t)w(t)e^{((1-\alpha)x_1 - x_2)t}. \end{cases} \quad (13)$$

После умножения первого уравнения системы (13) на $e^{x_1 t}$, а второго — на $e^{x_2 t}$ приходим к равносильной (4) системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{v} = av^\alpha e^{x_1(1-\alpha)t} - we^{(x_1 - x_2)t}; \\ \dot{w} = \theta^{-1}\alpha av^{\alpha-1} we^{x_1(1-\alpha)t}. \end{cases} \quad (14)$$

Вследствие условия (4) величины $x_1(1 - \alpha)$ и $x_1 - x_2$ совпадают. Обозначим

$$x_1 - x_2 = x_1(1 - \alpha) = \varkappa > 0.$$

Ввиду сказанного, система уравнений (14), равносильная исходной системе (1) при ограничении (4), приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{v} = (av^\alpha - w)e^{\varkappa t}, \\ \dot{w} = \theta^{-1}\alpha awv^{\alpha-1}e^{\varkappa t}. \end{cases} \quad (15)$$

Из системы (15) мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для зависимости $v(w)$. Приведём без доказательства следующий результат, который позволяет находить явное выражение функции v через w .

ТЕОРЕМА 2. *Если экономические параметры, определяющие систему дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (6), связаны соотношением (4), то между функциями $v = v(t)$ и $w = w(t)$, выражающимися через $K(t)$ и $C(t)$ по формулам (5), имеется следующая зависимость:*

$$v = \left(K_0^\alpha \left(\frac{w}{C_0} \right)^\theta + \frac{\theta w^\theta}{a} (U_\theta(C_0) - U_\theta(w)) \right)^{1/\alpha}.$$

Заключение

Прделанное исследование имеет целью дать количественное выражение интуитивно очевидному принципу, состоящему в том, что успешный экономический рост невозможен, если уровень производства "значительно" не опережает уровень потребления. Но сколь значительным должно быть это опережение в начальный момент времени? Мы получили первые теоретически обоснованные результаты в данном направлении для экономических систем со стационарной функцией сбережения. Для того, чтобы дать оценку сверху максимально возможному уровню потребления в рассматриваемых нами экономических моделях, мы ввели численную характеристику начального состояния экономической системы, определяемую формулой (8), которую можно назвать относительным превышением значения производственной функции от начального капитала над начальным уровнем потребления. В терминах этой величины мы дали ограничения на то, во сколько раз может вырасти уровень потребления в процессе эволюции рассматриваемой экономической системы. Более того, мы указали границу, выше которой уровень потребления никак не может подняться, чтобы не нанести ущерб имеющемуся в рассматриваемой структуре экономическому ресурсу.

Полученное ограничение существенно зависит от выбранного в модели значения параметра θ ; это объясняется тем, что от параметра θ зависит норма валового сбережения $s(t) = 1 - \frac{C(t)}{f(K(t))}$ (здесь f — производственная функция, в нашем случае функция Кобба–Дугласа), которая в стационарном состоянии (когда $\dot{K}(t) = \dot{C}(t) = 0$) в случае функции Кобба–Дугласа принимает вид:

$$s^* = \alpha \cdot \frac{x + n + \delta}{\rho + \theta x + \delta} = \frac{\alpha}{\theta} \cdot \frac{x_2}{x_1},$$

которая тем меньше, чем больше значение θ . Поэтому с увеличением значения θ ограничения на $C(t)$ делаются менее обременительными.

Статья ставит ряд вопросов. Отметим три из них.

1. Сколь окончательны полученные ограничения? Думается, что они допускают усиления.

2. Если $\theta > 0$, то при $\Delta \geq (\theta - 1)^{-1}$ наш метод ограничение на $C(t)$ не даёт. Должно ли оно быть?
3. Как трансформируются ограничения, если $x_2 \neq \alpha x_1$? Например, если разность $x_2 - \alpha x_1$ — очень малое положительное или отрицательное число.

Скажем несколько слов о перспективах развития теоремы 2. Нетрудно убедиться в том, что явное выражение функции v через w позволяет решить систему дифференциальных уравнений (15) в квадратурах, но получающиеся интегралы не вычисляются в элементарных функциях. Поэтому для детального изучения поведения решений системы (15), т.е. функций $v(t)$ и $w(t)$, придётся применять к подынтегральным функциям методы теории приближений, аппроксимируя их функциями, интегралы от которых имеют достаточно простой вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея–Касса–Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019;20(4):197-207. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207>
2. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея–Касса–Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44
3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея–Касса–Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.
4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса // Чебышевский сборник. 2019;20(4):188-196. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196>
5. Acemoglu Daron. The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth // Princeton: Princeton University Press. 2009. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.
6. Bénassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory // New York: Oxford University Press. 2011. pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.
7. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model // http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf
8. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.
9. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=899250>
10. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory, Vol. 44, No. 2, 2010.

11. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: <http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf>, 2010.
12. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.
13. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114. No 4. P. 1125-1152.
14. Paul H. Douglas. In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas // New York, Harcourt Brace Jovanovich. 1972.
15. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September, P. 908-931.
16. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf
17. Акаев А.А., Садовничий В.А. К вопросу о выборе математических моделей для описания динамики цифровой экономики // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 743-752.
18. Gómez, M. A., Economic growth and factor substitution with elastic labor supply // Math. Social Sci., 94, 49-57, (2018)
19. Gómez, M. A., Factor substitution and convergence speed in the neoclassical model with elastic labor supply. // Economics Letters 172, 89-92 (2018)

REFERENCES

1. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, "Optimal exponent in the Ramsey-Kass-Koopmans problem with logarithmic utility function", *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 20(4), September, pp. 197-207. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207>
2. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2020, "On the Ramsey-Kass-Koopmans problem for consumer choice", *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review*. vol. 182, September, pp. 39-44. (In Russ.) DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44
3. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey-Kass-Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow*. pp. 87-88.
4. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, "Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey-Kass-Koopmans problem", *Chebyshevskii Sbornik*. vol. 20(4), September, pp. 188-196. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196>
5. Acemoglu, Daron. 2009, "The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth", *Princeton: Princeton University Press*. pp. 287-326. ISBN 978-0-691-13292-1.
6. Bénassy, Jean-Pascal. 2011. "The Ramsey Model. Macroeconomic Theory", *New York: Oxford University Press*. pp. 145-160. ISBN 978-0-19-538771-1.

7. Rahul, Giri. "Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model", 2018, http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.
8. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, "Economic growth (2nd ed.)", *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.
9. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, "Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)", *CESifo Working Paper Series No. 1701*. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=899250>
10. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. "When Economic Growth is Less than Exponential", 2010. *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, 2010.
11. Groth, C. 2010, "Chapter 10: The Ramsey Model", Available at: <http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf>.
12. Romer, D. "Advanced Macroeconomics. 3rd ed", *New York: McGraw-Hill/Irwin*, 2006. pp. 651.
13. Robert J. Barro. 1999. "Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model", *The Quarterly Journal of Economics*, *Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.
14. Douglas, Paul H. 1972. "In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas", *New York, Harcourt Brace Jovanovich*.
15. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, "Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model", *American Economic Review*. vol. 83, September, pp. 908-931.
16. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, "Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model", *UC Berkeley Fall*, https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf
17. Akaev A.A., Sadovnichii V.A. 2019. "On the choice of mathematical models for describing the dynamics of digital economy" *Differential Equations*. 2019. vol. 55, no. 5. pp. 729-738.
18. Gómez, M. A. 2018. "Economic growth and factor substitution with elastic labor supply" *Math. Social Sci.*, 94, pp. 49-57.
19. Gómez, M. A. 2018. "Factor substitution and convergence speed in the neoclassical model with elastic labor supply" *Economics Letters* 172, pp. 89-92.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 514.7

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-510-518

Симметрии многообразий Эйнштейна — Вейля с краем

Р. Мохсэни

Мохсэни Рузбех — Ягеллонский университет, Институт математики (г. Краков, Польша)
e-mail: rouzbeh.mohseni@doctoral.uj.edu.pl

Аннотация

Начиная с вещественной аналитической поверхности $\mathcal{M}$ с вещественно-аналитической конформной связностью Картана, А. Боровка построил пространство минитвисторов асимптотически гиперболического многообразия Эйнштейна–Вейля с границей $\mathcal{M}$. В этой статье, начиная с симметрии конформной связности Картана, мы доказываем, что симметрии конформной связности Картана на $\mathcal{M}$ могут быть продолжены до симметрий полуженного многообразия Эйнштейна–Вейля.

Ключевые слова: конечные поля, квадраты, суммы.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

Р. Мохсэни. Симметрии многообразий Эйнштейна — Вейля с краем // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 510–518.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 514.7

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-510-518

Symmetries of Einstein–Weyl manifolds with boundary

R. Mohseni

Mohseni Rouzbeh — Jagiellonian University, Institute of Mathematics (Krakow, Poland)
e-mail: rouzbeh.mohseni@doctoral.uj.edu.pl

Abstract

Starting from a real analytic surface $\mathcal{M}$ with a real analytic conformal Cartan connection A. Borówka constructed a minitwistor space of an asymptotically hyperbolic Einstein–Weyl manifold with $\mathcal{M}$ being the boundary. In this article, starting from a symmetry of conformal Cartan connection, we prove that symmetries of conformal Cartan connection on $\mathcal{M}$ can be extended to symmetries of the obtained Einstein–Weyl manifold.

Keywords: Einstein–Weyl manifold, Symmetries, Minitwistor space, Conformal Cartan connection

Bibliography: 10 titles.

For citation:

R. Mohseni, 2021, “Symmetries of Einstein–Weyl manifolds with boundary”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 510–518.

Introduction

A complex manifold M with a conformal structure $[g]$ is a Weyl manifold if it is equipped with a holomorphic connection $\mathcal{D}$ that preserves $[g]$. Furthermore, it is called an Einstein–Weyl manifold if the symmetric trace-free part of the Ricci tensor of $\mathcal{D}$ vanishes. In [5] N. Hitchin introduced a twistor correspondence for 3-dimensional Einstein–Weyl manifolds which is called minitwistor correspondence or Hitchin correspondence. Moreover, in [7] P. Jones and K. Tod gave a relation between the work of R. Penrose on twistor spaces [9] and the Hitchin correspondence.

A. Borówka [2] starting from a real analytic surface $\mathcal{M}$ with a real analytic conformal Cartan connection constructed a complex surface and then proved that the constructed surface is, in fact, a minitwistor space of an asymptotically hyperbolic Einstein–Weyl space with $\mathcal{M}$ being the boundary. A. Borówka also gave a description on how this fits with work of Jones and Tod by explicitly realizing the minitwistor space as a quotient of a twistor space with a local $\mathbb{C}^\times$ action and $\mathcal{M}$ being the fixed point set.

After having a correspondence or a construction, it is natural to ask which data can be carried through the construction and what is the resulting object and in the case of correspondence, what will the initial data relate to in the corresponding space. One of the examples of such approach, is the work done by A. Borówka and H. Winther [1], in which they investigate the symmetries in case of the generalized Feix–Kaledin construction. In this article, we want to do a similar investigation for the construction done in [2], therefore, starting from a symmetry of conformal Cartan connection on a complex surface (see Definition 3), we try to determine sufficient conditions for which a symmetry of the Cartan connection gives the symmetry of the resulting Einstein–Weyl structure. Our final result is that under some mild conditions on the bundle appearing in the definition of the conformal Cartan connection, the symmetry we start with on the boundary $\mathcal{M}$ can be extended to a symmetry of the minitwistor space and therefore, it induces a symmetry of the corresponding Einstein–Weyl manifold. This result is analogous to the result in [1] where the c-projective symmetries under given conditions extend from the fixed points set of a circle action to quaternionic symmetries.

In Section 9, we review necessary background needed for construction, then in §9, we review the construction done in [2]. In Section 9, we follow the construction and show how the symmetry carries through the construction and finally, we obtain a symmetry of the minitwistor space. In Section 9, using this result together with the result from §9 we show that the symmetry we started with on the boundary can be extended to a symmetry of the Einstein–Weyl space.

Background

Complexification: For any n -dimensional real-analytic manifold $\mathcal{M}$, its complexification $\mathcal{M}^\mathbb{C}$ is a holomorphic manifold that contains $\mathcal{M}$ as a fixed point set of the real structure (i.e. an anti-holomorphic involution) and $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^\mathbb{C} = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}$. $\mathcal{M}^\mathbb{C}$ can be constructed by using holomorphic extensions of the real-analytic transition functions on $\mathcal{M}$ and the real structure will be given by the complex conjugation. Similarly, using holomorphic extensions, real-analytic objects like functions, bundles and connections can be extended to a neighborhood of $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}^\mathbb{C}$.

Hitchin correspondence:

DEFINITION 1. Let $(\mathcal{M}, [g])$ be a conformal manifold with a compatible torsion-free connection $\mathcal{D}$ (i.e. a Weyl connection). Then $(\mathcal{M}, [g], \mathcal{D})$ is called an Einstein–Weyl manifold if the symmetric trace-free part of the Ricci tensor of $\mathcal{D}$ vanishes. (For more information about Einstein–Weyl manifolds see [4], [6], [7], and [8]).

In 1967 [9] R. Penrose proposed twistor theory as a possibility for quantizing space-time and fields and then in 1976 [10] gave a description for curved twistor theory. Later in 1982 N. Hitchin

obtained a similar construction to Penrose and provided a one-to-one correspondence between the three-dimensional Einstein–Weyl spaces and minitwistor spaces and in particular, proved the following theorem:

THEOREM 1 (Hitchin [5], see [2]). *Let T be a surface such that:*

1. *There is a family of non-singular holomorphic projective lines $\mathbb{CP}^1$ each with normal bundle isomorphic to $\mathcal{O}(2)$, called minitwistor lines.*
2. *The surface T has a real structure, which induces the antipodal map of $\mathbb{CP}^1$ on lines from the family that are invariant under this real structure.*

Then the parameter space of projective lines invariant under the real structure is an Einstein–Weyl manifold.

In 1985 [7] P. Jones and K. Tod related the work of Penrose to the Hitchin correspondence by realizing the spaces in the Hitchin correspondence as the quotient space of the spaces in the Penrose correspondence by a conformal Killing vector field and a holomorphic vector field respectively. Moreover, they proved that the spaces in the Penrose correspondence can be constructed from the quotient spaces provided that the Einstein–Weyl space is equipped with abelian monopole.

Conformal Cartan connection: (see [2], [3])

DEFINITION 2. *A conformal Cartan connection on an n -manifold Σ is a quadruple $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Lambda, \mathcal{D})$ where:*

- *V is a rank $n + 2$ vector bundle with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ over Σ ,*
- *$\Lambda \subset V$ is a null line subbundle over Σ ,*
- *$\mathcal{D}$ is a linear metric connection in the vector bundle V satisfying the Cartan condition, i.e. $\epsilon := \mathcal{D}|_{\Lambda} \bmod \Lambda$ is an isomorphism from $T\Sigma \otimes \Lambda$ to $\Lambda^{\perp}/\Lambda$.*

For the purposes of this article we will restrict to the case of $n = 2$. Note that, unlike for dimensions $n \geq 3$, in dimension 2 the conformal structure does not fully determine the conformal Cartan connection.

Let Σ be a complex surface with a complex Cartan connection $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Lambda, \mathcal{D})$ given as a complexification of a real analytic surface $\mathcal{M}$ with a Cartan connection. Suppose that the fiber bundle V is the associated bundle to the tangent bundle $T\Sigma$. Let Z be a vector field on $\mathcal{M}$ and let us denote by X its complexification on Σ and by ϕ_t the group of infinitesimal transformations generated by X .

DEFINITION 3. *The Cartan connection is preserved by ϕ_t if and only if the following holds for sufficiently small values of t :*

1. *ϕ_t preserves the line bundle Λ .*
2. *ϕ_t preserves the inner product, i.e. the following holds: $\langle Y, Z \rangle = \langle (\phi_t)_*Y, (\phi_t)_*Z \rangle$ for all $Y, Z \in \Gamma(T\Sigma)$.*
3. *$(\phi_t)_*\mathcal{D} = \mathcal{D}$, i.e. the connection is preserved.*

In this case, the vector field X is called a symmetry of conformal Cartan connection.

REMARK 5. *The isomorphism ϵ is also preserved by the symmetry, since it preserves the connection $\mathcal{D}$ and the line bundle Λ .*

Symmetries of minitwistor spaces

The minitwistor correspondence by Hitchin [5] relates minitwistor spaces and Einstein–Weyl 3-dimensional manifolds. In this section we discuss the relationship between the symmetries of these spaces.

DEFINITION 4. *Let M be a complex 3-dimensional manifold with a Weyl structure $([g], \mathcal{D})$. A null plane is a 2-dimensional subspace U of $T_w M$ for each point $w \in M$ such that $[g]$ degenerates on U .*

DEFINITION 5. *A null surface is a 2-dimensional submanifold $S \subset M$ such that for every $w \in M$, $T_w S$ is a null plane.*

The parameter space of all minitwistor lines is a complex 3-dimensional manifold $M^{\mathbb{C}}$ with the real structure induced by the real structure T and the real submanifold M is given as the parameter space of minitwistor lines invariant under the real structure; $M^{\mathbb{C}}$ is a complexification of M . Conversely, T can be defined as the space of totally geodesic null hypersurfaces in M . As points $l \in M$ correspond to real minitwistor lines in T , therefore for points $w \in T$ it makes sense to consider $w \in l$. We define two families of submanifolds of $M^{\mathbb{C}}$ by $M_w^{\mathbb{C}} := \{l \in M \mid w \in l\}$, that is a 2-dimensional complex submanifold and $M_{w,w'}^{\mathbb{C}} := \{l \in M \mid w, w' \in l\}$, which is 1-dimensional. The complexified Einstein–Weyl structure on $M^{\mathbb{C}}$ can be determined as follows:

PROPOSITION 1 (see [6]). *There exists a unique torsion free complexified Einstein–Weyl structure $([g], \mathcal{D})$ on $M^{\mathbb{C}}$ that satisfies:*

1. *The family $\{M_w^{\mathbb{C}}\}_{w \in T}$ and the set of null surfaces of $[g]$ coincide.*
2. *The family $\{M_{w,w'}^{\mathbb{C}}\}_{w,w' \in T}$ and the set of geodesics coincide.*
3. *A curve $M_{w,w'}^{\mathbb{C}}$ is null geodesics if and only if w is a double point in l .*

DEFINITION 6. *Let $(M, [g], \mathcal{D})$ be an Einstein–Weyl manifold. A diffeomorphism is called a symmetry of $(M, [g], \mathcal{D})$ if it preserves both the conformal structure $[g]$ and the connection $\mathcal{D}$.*

Let X be a holomorphic vector field on T and ϕ_t the group of infinitesimal transformations generated by X .

LEMMA 1. *The transformation ϕ_t preserves the minitwistor lines.*

PROOF. ϕ_t for sufficiently small t preserves the normal bundle $\mathcal{O}(2)$, therefore the minitwistor lines are preserved. $\square$

If the vector field is real then it, moreover, preserves real minitwistor lines. The following theorem is a common knowledge, however, since we were unable to find a source for it, we will state and prove it here.

THEOREM 2. *Real holomorphic vector fields on T correspond to symmetries of $(M, [g], \mathcal{D})$.*

PROOF. First we want to show that the families of submanifolds $\{M_w\}$ and $\{M_{w,w'}\}$ are preserved by the transformation ϕ_t . Observe that under the action of the transformation $\phi_t : w \mapsto \phi_t(w)$, $w \in M$, the submanifold M_w are transformed into $M_{\phi_t(w)} := \{l \in M \mid \phi_t(w) \in l\}$. Furthermore, note that the twistor lines containing w are transformed into the twistor lines containing $\phi_t(w)$, hence by Lemma 1, $\phi_t(M_w) \subseteq M_{\phi_t(w)}$. Moreover, since ϕ_t is an isomorphism the inclusion in the other direction is obtained by the inverse, therefore, the family of submanifolds $\{M_w\}$ are preserved. The proof for $\{M_{w,w'}\}$ is similar, however, it is worth to notice that it is necessary for the points w and w' to be sufficiently near each other. Hence, by Proposition 1 holomorphic vector fields on T correspond to symmetries of the underlying complexified Einstein–Weyl manifold. The reality condition on the vector fields imply that the symmetries restrict to symmetries of the underlying real Einstein–Weyl manifold. $\square$

Review of the twistor construction:

In [2] A. Borówka gives a description for a construction of minitwistor spaces for asymptotically hyperbolic Einstein–Weyl spaces. In this section, a concise review of the first part of the construction is given, for more details and proofs see [2].

Let $\mathcal{M}$ be a real analytic surface with a Cartan connection, by complexification we obtain a complex surface Σ with a complexified conformal Cartan connection $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Lambda, \mathcal{D})$ defined as in Definition 2. Moreover, there exists $\Lambda^0 \subset V$ that is the annihilator of Λ and for each point $\sigma \in \Sigma$, we will have two null planes $U_\sigma^+ \subset \Lambda^0$ and $U_\sigma^- \subset \Lambda^0$, which are defined using the induced degenerated inner product on Λ_σ^0 , as the solutions to $\langle a, a \rangle = 0$ for $a \in \Lambda_\sigma^0$. Let U^+ and U^- be the two null subbundles of $\Lambda^\perp \subset V$ defined fiberwise by these null planes with $\Lambda = U^+ \cap U^-$.

Using the isomorphism ϵ between $T\Sigma \otimes \Lambda$ and $\Lambda^\perp/\Lambda$ given in Definition 2, two line subbundles t^+, t^- of the tangent bundle $T\Sigma$ can be defined as follows

$$\epsilon(t^+ \otimes \Lambda) = U^+/\Lambda \quad \text{and} \quad \epsilon(t^- \otimes \Lambda) = U^-/\Lambda. \quad (1)$$

These define two families of curves C^+ and C^- as integral curves of the line subbundles t^+ and t^- respectively. Moreover, fiber bundle F^+ (respectively F^-) with fibers given by $F_\sigma^+ := \mathbb{P}(U_\sigma^+)$ [respectively $F_\sigma^- := \mathbb{P}(U_\sigma^-)$] is defined.

The connection $\mathcal{D}$ on the base manifold induces a connection along the curves C^+ (respectively C^-) and using this connection it is possible to horizontally lift the curves from C^+ (respectively C^-) to F^+ (respectively F^-). Furthermore, Σ can be restricted in such a way that the curves from each family do not intersect each other.

PROPOSITION 2. *The horizontally lifted curves from C^+ (respectively C^-) families, locally foliate the total space of the bundle F^+ (respectively F^-) and the leaf space of the foliations is a manifold which is denoted by T^+ (respectively T^-).*

PROOF. See [2]. $\square$

We restrict the manifold Σ such that any horizontally lifted curve from the C^+ family intersects a horizontally lifted curve from C^- family at most once and if we denote by $\sigma \in \Sigma$ the points of the intersection, then $\mathbb{P}(\Lambda)_\sigma = F_\sigma^+ \cap F_\sigma^-$ holds. Therefore at any point $\mathbb{P}(\Lambda)_\sigma$ exactly one element of T^+ intersects one element of T^- and it enables us to glue the leaf spaces T^+ and T^- .

DEFINITION 7. T^+ and T^- can be glued together in the following way:

$$T := T^+ \bigsqcup_{\sim} T^-, \quad (2)$$

$$\forall t^+ \in T^+, t^- \in T^-, t^+ \sim t^- \Leftrightarrow \exists \sigma \in \Sigma : t^+ \cap t^- = \{\mathbb{P}(\Lambda)_\sigma\}.$$

DEFINITION 8. *For each curve $c^+ \in C^+$ the family of its horizontal lifts define a projective line in T^+ which will be denoted by $l_{c^+}^+$ and analogously $l_{c^-}^-$ in T^- is defined for $c^- \in C^-$.*

Since for each point $\sigma \in \Sigma$ there exists exactly one curve from each family such that $\sigma \in c^\pm$, we will use the notation $l_\sigma^+ := l_{c^+}^+$ and $l_\sigma^- := l_{c^-}^-$ instead. Also note that the minitwistor lines are deformations of these line pairs. It can be shown that T is a minitwistor space of an Einstein–Weyl manifold and it admits a real structure induced naturally by the initial complexification of the Cartan connection. Furthermore, the pairs of intersecting lines $l_\sigma^\pm$ correspond to points on a boundary of this Einstein–Weyl manifold.

Construction of a vector field on the minitwistor space

Let Σ be a complex surface with a complexified conformal Cartan connection, which is a complexification of a real analytic surface $\mathcal{M}$ and X be a holomorphic vector field on Σ which is obtained as a complexification of a symmetry of the conformal Cartan connection (see Definition 3) as described in Section 9. T is a minitwistor space obtained as in [2], see Section 9 and ϕ_t is the flow of the vector field X . In this section, we argue how X induces a flow on the minitwistor space T . Then in the next section we will show that the vector field tangent to the flow is a symmetry of the minitwistor space and therefore it induces a symmetry of the underlying Einstein–Weyl manifold.

LEMMA 2. *The fiber subbundles U^+ and U^- are preserved by ϕ_t .*

PROOF. The transformation induced by ϕ_t preserves the inner product, therefore it preserves the fiber bundles U^+ and U^- . $\square$

LEMMA 3. *Let $t^\pm$ be the line subbundles of $T\Sigma$ defined as in §2.2. $t^\pm$ are preserved by ϕ_t and hence the families of curves $c^\pm$, which are the integral curves of $t^\pm$ are also preserved.*

PROOF. The line bundles $t^\pm$ were defined using the isomorphism ϵ , the fiber bundles $U^\pm$ and the line bundle Λ , since ϕ_t preserves all of them, $t^\pm$ will also be preserved. $\square$

Recall that the vector bundle V is an associated bundle to the tangent bundle $T\Sigma$, hence on V there is a transformation $\tilde{\phi}_t$, which is induced by ϕ_t as follows:

$$\tilde{\phi}_t(\sigma, v) = (\phi_t(\sigma), (\phi_t)_*(v)). \quad (3)$$

LEMMA 4. *The transformation $\tilde{\phi}_t$ (3) preserves the fiber bundles $U^\pm$.*

PROOF. The fiber bundles $U^\pm$ are subbundles of V . We abuse the notation and denote maps $\tilde{\phi}_t|_{U^\pm}$ also by $\tilde{\phi}_t$. Since we proved in Lemma 2 that ϕ_t preserves the fiber bundles $U^\pm$, $\tilde{\phi}_t$ will preserve the fiber bundles $U^\pm$, therefore, the diagram is well-defined. $\square$

Recall that as discussed in §9 the subbundles $t^\pm$ define two families of curves C^+ and C^- in Σ . Furthermore, we horizontally lift the curves to the fiber bundles F^+ and F^- respectively and the lifted curves foliate the fiber bundles $F^\pm$. Now in order to show that the flow $\tilde{\phi}_t$ induces flows on T^+ and T^- , we have to prove

LEMMA 5. *The transformation $\tilde{\phi}_t$ preserves the lifted curves of $C^\pm$ families and therefore gives a transformation on the leaf spaces of the curves lifted to $U^\pm$.*

PROOF. Let $C^\pm$ and $\tilde{C}^\pm$ denote respectively the family of curves on Σ and the families of curves lifted to the fiber bundles $U^\pm$. Take a curve $c_1^+ \in C^+$ and let $\tilde{c}_1^+ \in \tilde{C}^+$ be a curve obtained by horizontally lifting c_1^+ . By Lemma 3, ϕ_t maps the curve c_1^+ to another curve c_2^+ from the same family. We want to show that $\tilde{\phi}_t$ transforms the curve $\tilde{c}_1^+$ into a horizontal lift of the curve c_2^+ . This would imply the image of $\tilde{c}_1^+$ belongs to $\tilde{C}^+$. Therefore, let $X_{\tilde{c}_1^+}$, $X_{c_1^+}$ and $X_{c_2^+}$ be tangent vector fields to the curves $\tilde{c}_1^+$, c_1^+ and c_2^+ respectively and we denote $X_2 := (\tilde{\phi}_t)_*(X_{\tilde{c}_1^+})$. From definition of $\tilde{\phi}_t$ (see Equation 3) we have that $\pi_*(X_2) = X_{c_2^+}$. The fact that it is a horizontal lift follows from $(\phi_t)_*\mathcal{D} = \mathcal{D}$. The proof for curves from C^- family is analogous. $\square$

PROPOSITION 3. *The constructed flow on the leaf space of curves lifted to $U^\pm$ is $\mathbb{C}^\times$ invariant.*

PROOF. The $\mathbb{C}^\times$ action maps isomorphically curves to curves and for the constructed flow $\tilde{\phi}_t$ (3) the following holds:

$$\tilde{\phi}_t(\sigma, u^\pm) = (\phi_t(\sigma), \phi_{t*}(\lambda u^\pm)) = (\phi_t(\sigma), \lambda \phi_{t*}(u^\pm)), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, u^\pm \in U^\pm. \quad (4)$$

which is a result of ϕ_{t*} being a linear isomorphism. $\square$

In Section 9, two fiber bundles F^+ and F^- were defined fiberwise by $F_\sigma^\pm := \mathbb{P}(U_\sigma^\pm)$ respectively, and as a result of Proposition 3 we obtain transformations $\tilde{\phi}_t^\pm$ on $F^\pm$. Furthermore, these bundles were foliated by lifted curves, and their leaf spaces were denoted by $T^\pm$, hence, by Lemma 5 we obtain the following corollary.

COROLLARY 1. *The obtained transformations descend to transformations on T^+ and T^- and are denoted by $\tilde{\phi}_t'^+$ and $\tilde{\phi}_t'^-$ respectively.*

Recall that the minitwistor space T is obtained by the gluing of T^+ and T^- and we need to check that the transformations $\tilde{\phi}_t'^+$ and $\tilde{\phi}_t'^-$ coincide on the gluing part.

PROPOSITION 4. *The transformations $\tilde{\phi}_t'^+$ and $\tilde{\phi}_t'^-$ are compatible with the gluing of T^+ and T^- , therefore, they induce a vector field on the minitwistor space T denoted by ϕ_t' .*

PROOF. The curves from the two families C^+ and C^- may intersect each other at most in one point and this point lies in Λ and the gluing is given by identifying curves that intersect each other in Λ . We proved in Lemma 5 that the flow maps the curves from each family to a curve which is also in that family of curves. What remains to prove is that the point of intersection is preserved, which is a consequence of the flow preserving Λ . $\square$

Properties of the vector field

Let $\tilde{X}$ be the vector field given by the flow ϕ_t' (see Proposition 4). Now by studying the properties of $\tilde{X}$, we will show that it gives a symmetry of the corresponding Einstein–Weyl space, which on the boundary $\mathcal{M}$ coincides with our initial symmetry of the conformal Cartan connection.

LEMMA 6. *The transformation $\tilde{\phi}_t'$ preserves the real structure on the minitwistor space.*

PROOF. Recall that both the vector field X and the real structure on the manifold Σ were introduced by complexification from the underlying real manifold. As the real structure on the minitwistor space from [2] was constructed using the real structure of this complexification, it is straightforward to show that the vector field $\tilde{X}$, which arises from X preserves this real structure. $\square$

THEOREM 3. *The real holomorphic vector field $\tilde{X}$ on the minitwistor space T corresponds to a symmetry Y on the corresponding Einstein–Weyl manifold M .*

PROOF. In Section 9, we constructed the vector field $\tilde{X}$ and in Lemma 6, we proved that it is in fact a real vector field. Therefore, as an immediate result of Theorem 2, $\tilde{X}$ corresponds to a symmetry on M , which will be denoted by Y . $\square$

Starting from the vector field Z on real analytic surface $\mathcal{M}$, which is the symmetry of Cartan connection, by complexification we obtained a vector field X on the complex surface Σ . Furthermore, we constructed the vector field $\tilde{X}$ that as was proved in Theorem 3 corresponds to the symmetry Y on the Einstein–Weyl manifold M , which has $\mathcal{M}$ as its boundary. Now we are ready to state the main result of the paper.

THEOREM 4. *Let $\mathcal{M}$ be a real analytic surface with a conformal Cartan connection and a symmetry Z . Suppose that the vector bundle V used in Definition 2 is an associated bundle of the tangent bundle $T\mathcal{M}$ and let M be an Einstein–Weyl manifold constructed from $\mathcal{M}$ via construction from [2]. Then there exists a vector field Y' on the manifold with boundary $M \cup \mathcal{M}$ such that*

$$Y'|_{\mathcal{M}} = Z \tag{5}$$

and $Y'|_M$ is a symmetry of the Einstein–Weyl structure.

PROOF. We take $Y'|_M = Y$. The line pairs $l_\sigma^\pm$ are preserved by the vector field $\tilde{X}$, which is a result of Lemma 5. These intersecting line pairs correspond to points on Σ and the real ones to points on $\mathcal{M}$. As a result $\tilde{X}$ induces a transformation on $\mathcal{M}$, which by definition is equal to Z since $\tilde{X}$ was constructed using the vector field X that is a complexification of Z . $\square$

Conclusion

Starting from a symmetry of conformal Cartan connection on a complex surface, under sufficient conditions we showed that it can be extended to the minitwistor space and we denoted the obtained symmetry by $\tilde{X}$ and later proved that it is a real holomorphic vector field. Furthermore, we proved that real holomorphic vector fields on the minitwistor space correspond to symmetries of the resulting Einstein-Weyl structure, hence, the corresponding symmetry Y on the Einstein-Weyl manifold was obtained. Since, symmetries of the Einstein-Weyl structure form a Lie algebra, it is natural to consider the computation of the Lie algebra as further research. This result is analogous to the result in [1] where the c -projective symmetries under given conditions extend from the fixed points set of a circle action to quaternionic symmetries.

Acknowledgements

I would like to thank Aleksandra Borówka for helpful discussions and valuable comments. This work was supported by Grants N16/MNS/000001 and N16/DBS/000006 and I would like to thank Institute of Mathematics of Jagiellonian University in Krakow for financial support.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Borówka and H. Winther. C -projective symmetries of submanifolds in quaternionic geometry // Ann. Glob. Anal. Geom. 2019, Vol. 55, No. 3, P. 395. doi: 10.1007/s10455-018-9631-3
2. A. Borówka. Twistor construction of asymptotically hyperbolic Einstein-Weyl spaces // Differ. Geom. Appl. 2014, Vol. 35, P. 224-41. doi: 10.1016/j.difgeo.2014.05.003
3. F. Burstall and D. Calderbank. Submanifold geometry in generalized flag varieties // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 2014, Series 72, P. 13-41.
4. D. Calderbank and H. Pedersen. Einstein-Weyl geometry // Surveys in Differential Geometry. 1999, Vol. 6. doi: 10.4310/SDG.2001.v6.n1.a14.
5. N. J. Hitchin. Complex manifolds and Einstein's equations // In: Doebner HD, Palev TD. (eds). Twistor Geometry and Non-Linear Systems. Lecture Notes in Mathematics 1982. 970, Springer, Berlin-New York, P. 73-99. doi: 10.1007/BFb0066025
6. N. Honda and F. Nakata. Minitwistor spaces, Severi varieties, and Einstein-Weyl structure // Ann. Glob. Anal. Geom. 2011, Vol. 39. P. 293-323. doi: 10.1007/s10455-010-9235-z
7. P. E. Jones and K. P. Tod. Minitwistor spaces and Einstein-Weyl spaces // Class. Quantum Gravity. 1985, Vol. 2, No. 4, P. 565-77. doi: 10.1088/0264-9381/2/4/021
8. F. Nakata A construction of Einstein-Weyl spaces via Lebrun-Mason type twistor correspondence // Communications in Mathematical Physics. 2009, Vol. 289. P. 663-99. doi: 10.1007/s00220-009-0750-3
9. R. Penrose. Twistor algebra // J. Math. Phys. 1967, Vol. 8. P. 345-66. doi: 10.1063/1.1705200

10. R. Penrose. Nonlinear gravitons and curved twistor theory // Gen. Relativ. Gravit. 1976, Vol. 7. P. 31-52. doi: 10.1007/BF00762011

REFERENCES

1. Borówka, A. & Winther, H. 2019, "C-projective symmetries of submanifolds in quaternionic geometry", Ann. Glob. Anal. Geom. Vol. 55, No. 3, pp. 395. doi: 10.1007/s10455-018-9631-3
2. Borówka, A. 2014, "Twistor construction of asymptotically hyperbolic Einstein-Weyl spaces", Differ. Geom. Appl. Vol. 35, pp. 224-41. doi: 10.1016/j.difgeo.2014.05.003
3. Burstall, F. & Calderbank, D. 2004, "Submanifold geometry in generalized flag varieties", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 72, pp. 13-41.
4. Calderbank, D. & Pedersen, H. 1999, "Einstein-Weyl geometry", Surveys in Differential Geometry. Vol. 6. doi: 10.4310/SDG.2001.v6.n1.a14.
5. Hitchin, N. J. 1982, "Complex manifolds and Einstein's equations", In: Doebner HD, Palev TD. (eds). Twistor Geometry and Non-Linear Systems. Lecture Notes in Mathematics 1982. 970, Springer, Berlin-New York, 1982, pp. 73-99. doi: 10.1007/BFb0066025
6. Honda, N. & Nakata, F. 2011, "Minitwistor spaces, Severi varieties, and Einstein-Weyl structure", Ann. Glob. Anal. Geom. Vol. 39, pp. 293-323. doi: 10.1007/s10455-010-9235-z
7. Jones, P. E. & Tod, K. P. 1985, "Minitwistor spaces and Einstein-Weyl spaces", Class. Quantum Gravity, Vol. 2, No. 4, pp. 565-77. doi: 10.1088/0264-9381/2/4/021
8. Nakata, F. 2009, "A construction of Einstein-Weyl spaces via Lebrun-Mason type twistor correspondence", Communications in Mathematical Physics. Vol. 289, pp. 663-99. doi: 10.1007/s00220-009-0750-3
9. Penrose, R. 1967, "Twistor algebra", J. Math. Phys. Vol. 8, pp. 345-66. doi: 10.1063/1.1705200
10. Penrose, R. 1976, "Nonlinear gravitons and curved twistor theory", Gen. Relativ. Gravit. Vol. 7, pp. 31-52. doi: 10.1007/BF00762011

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-519-527

Арифметические свойства значений некоторых
гипергеометрических F -рядов

А. Х. Муньос Васкес

Муньос Васкес Анхель Хорхеевич — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru

Аннотация

Обобщённые гипергеометрические ряды имеют вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_l)_n}{(b_1)_n \dots (b_m)_n} z^n \quad (1)$$

При $l < m$ и рациональных значениях параметров они сводятся к E -функциям Зигеля. При $l = m$ и рациональных параметрах это G -функции. При $l > m$ и рациональных параметрах они являются F -рядами.

Исследование арифметических свойств значений обобщённых гипергеометрических рядов — актуальная задача имеющая большую историю. Достаточно упомянуть Зигеля К. Л., Шидловского А. Б., Салихова В. Х., Beukers F., Brownawell W. D., Heckman G., Галочкина А. И., Олейникова В. А., Иванкова П. Л., Горелова В. А., Чирского В. Г., Зудилина В. В., Matala-Aho T. и др.

В работе рассмотрены F -ряды для значений которых в работе Чирского В. Г. доказана бесконечная алгебраическая независимость.

В этой работе получены оценки снизу многочленов от значений этих рядов и их производных в конкретном p -адическом поле.

Ключевые слова: F -ряды, оценки линейных форм и многочленов, p -адические числа.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:

А. Х. Муньос Васкес. Арифметические свойства значений некоторых гипергеометрических F -рядов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 519–527.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-519-527

Arithmetic properties of the values some hypergeometric F -series

A. Kh. Munos Vaskes

Munos Vaskes Ankhel Khorkheevich — graduate student, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru

Abstract

Generalized hypergeometric series are of the form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_l)_n}{(b_1)_n \dots (b_m)_n} z^n \quad (2)$$

If $l < m$ and if the parameters are rational, they are closely related to Siegel's E -functions. If $l = m$ and if the parameters are rational, they are G -functions. For $l > m$ and if the parameters are rational, they are F -series.

The arithmetic properties values of generalized hypergeometric series is an actual problem with a long history. We shall only mention Siegel C.L., Shidlovskii A.B., Salikhov V.Kh., Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G., Galochkin A.I., Oleinikov V.A., Ivankov P.L., Gorelov V.A., Chirskii V.G., Zudilin W., Matala-Aho T. etc

We consider the so-called F -series. Chirskii V.G. proved the infinity algebraic independence of the corresponding values.

Here we obtain lower estimates of polynomials and linear forms in the values of these series and their derivatives in a concrete p -adic field.

Keywords: F -series, estimates linear forms and polynomials, p -adic numbers.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

A. Kh. Munos Vaskes, 2021, "Arithmetic properties of the values some hypergeometric F -series", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 519–527.

Введение

Для произвольного $a \in \mathbb{C}$ символ Похгаммера определяется равенством

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1), & \text{при } n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

Если $a_i, b_j \in \mathbb{C}, b_j \neq 0, -1, -2, \dots, i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m$ то рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_l)_n}{(b_1)_n \dots (b_m)_n} z^n \quad (4)$$

Функции такого вида называются *обобщёнными гипергеометрическими функциями*. Эти функции широко используются в математике и её приложениях. Частными случаями обобщённых гипергеометрических функций являются

1. целые функции, $e^x, \sin x, \cos x$ и т.д. в случае $l < m$
2. функции имеющие конечный радиус сходимости, например $\ln(1+x), (1+x)^\alpha$ и т.д. в случае $l = m$
3. ряды, имеющие в комплексной области нулевой радиус сходимости, однако сходящиеся в p -адических полях, например $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$, при $l > m$.

Арифметические свойства гипергеометрических целых функций посвящено большое количество работ. Они относятся к рядам вида (4), здесь мы упомянем лишь те, которые можно отнести к основным: Шидловский А. Б. [18], Салихов В. Х. [6]–[9], Олейников В. А. [5] и др.

Арифметические свойства гипергеометрических G – функций исследованы в работах Bombieri E. [21], Галочкина А. И. [1],[2] и др.

История F – рядов рассмотрена в работах Чирского В. Г. [10], [22]. Общая теория F – рядов дана в работах Чирского В. Г. [10]–[17], [22]–[23], André Y. [19], и в коллективных у Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. [20], Matala-Aho T., Zudilin W. [24] и др. В них доказываются, в основном результаты, об отсутствии глобальных соотношений.

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени κ над $\mathbb{Q}$. Пусть V – множество всех нормирований на поле $\mathbb{K}$. Для любого $v \in V$ соответствующие пополнения полей $\mathbb{K}$ и $\mathbb{Q}$ обозначаем $\mathbb{K}_v$ и $\mathbb{Q}_v$. Пусть $P(y_1, \dots, y_m)$ – многочлен с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$, степенные ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из $\mathbb{K}$, точка $\xi \in \mathbb{K}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Соотношение*

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0$$

называется глобальным, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, где сходятся все ряды $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$.

В работе автора [3] рассмотрены F – ряды в конкретном p – адическом поле. В настоящей работе описана теорема 2 этой статьи, примененная к обобщенным гипергеометрическим F – рядам которые были рассмотрены в статье [10]. Мы сохраняем обозначения использованные в этих работах.

Напомним формулировку этой теоремы.

ТЕОРЕМА 1 ([3], теорема 2). Пусть F – ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ принадлежат классу $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$ и удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = Q_{i,0} + \sum_{j=1}^{\infty} Q_{i,j} y_j, i = 1, \dots, m,$$

где $Q_{i,j} \in \mathbb{Q}(z), i = 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, m$. Пусть $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$ и $T(z)Q_{i,j} \in \mathbb{Z}(z), i = 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, m$. Пусть эти ряды алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Пусть

$$P(y_1, \dots, y_m)$$

произвольный многочлен степени K , коэффициенты которого являются целыми числами из поля $\mathbb{Q}$, причём среди них есть отличные от нуля. Пусть, кроме того, наибольшая из абсолютных величин этих коэффициентов, а также сопряжённых с ними чисел, равна $H, H \geq H_0$.

Пусть p – простое число, $(p, q) = 1$, выполняются условия

$$p \left(\frac{\ln p - 1}{\ln p} \right) > 2(c_3 + 1)K,$$

а также $\xi = p^{\gamma(H)}, T(\xi) \neq 0$ и пусть $\gamma(H) \geq \binom{m+K}{m} \frac{\ln \ln H}{\ln p}$.

Тогда в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Далее, пусть $\bar{a} = (a_1, \dots, a_s), \bar{b} = (b_1, \dots, b_s), a_i, b_j \in \mathbb{C}$. Используется обозначение $\bar{a} \approx \bar{b}$ в случае, когда существует перестановка $i_1, \dots, i_s$ чисел $1, \dots, s$ такая, что $a_j - b_{i_j} \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, s$. Для $c \in \mathbb{C}$ обозначим $(\bar{a} + c) = (a_1 + c, \dots, a_s + c)$.

Основной результат

ТЕОРЕМА 2. Пусть ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta_1)_n \cdots (\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n \cdots (\lambda_s)_n} (zt)^{tn}, \quad (5)$$

в котором множество

$$S = \{\eta_1, \dots, \eta_r; \lambda_1, \dots, \lambda_s\}, \quad r > s \quad (6)$$

состоит из нецелых рациональных параметров, а

$$t = r - s.$$

чётно, $t = 2k$, и для множества параметров S выполнены условия:

$$\eta_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, t + s, \quad j = 1, \dots, s.$$

Пусть для всех d – общих делителей чисел t, s либо не выполняется соотношение $\bar{\eta} + \frac{1}{d} \approx \bar{\eta}$, либо не выполняется соотношение $\bar{\lambda} + \frac{1}{d} \approx \bar{\lambda}$.

Пусть не выполняется ни одно из следующих условий:

1. если $s = 0$, то существуют $X_0, X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathbb{C}$ такие, что

$$(\bar{\eta} + X_0) \approx (0; -\frac{1}{2}; X_1; -X_1; \dots; X_{k-1}; -X_{k-1});$$

2. если $s > 0$ – чётно, $s = 2u$, то существуют $X_0, X_1, \dots, X_{k+s-1} \in \mathbb{C}$ такие, что либо

$$(\bar{\eta} + X_0) \approx (0; -\frac{1}{2}; X_1; -X_1; \dots; X_{k+u-1}; -X_{k+u-1});$$

$$(\bar{\lambda} + X_0) \approx (X_{k+u}; -X_{k+u}; \dots; X_{k+s-1}; -X_{k+s-1});$$

либо

$$(\bar{\eta} + X_0) \approx (X_1; -X_1; \dots; X_{k+u}; -X_{k+u});$$

$$(\bar{\lambda} + X_0) \approx (0; -\frac{1}{2}; X_{k+u+1}; -X_{k+u+1}; \dots; X_{k+s-1}; -X_{k+s-1});$$

3. если $s > 0$ – нечётно, $s = 2u + 1$, то существуют $X_0, X_1, \dots, X_{k+l-1} \in \mathbb{C}$ такие, что

$$(\bar{\eta} + X_0) \approx (0; X_1; -X_1; \dots; X_{k+u}; -X_{k+u});$$

$$(\bar{\lambda} + X_0) \approx (-\frac{1}{2}; X_{k+u+1}; -X_{k+u+1}; \dots; X_{k+s-1}; -X_{k+s-1}).$$

Пусть

$$P(y_1, \dots, y_m)$$

произвольный многочлен степени K , коэффициенты которого являются целыми числами из поля $\mathbb{Q}$, причём среди них есть отличные от нуля. Пусть, кроме того, наибольшая из абсолютных величин этих коэффициентов, а также сопряжённых с ними чисел, равна H , $H \geq H_0$.

Пусть q – наименьшее общее кратное знаменателей рациональных коэффициентов η_i , $i = 1, \dots, r$ в степени $1 + [\ln K]$ и для простого числа p , $(p, q) = 1$, выполняются условия

$$p \left(\frac{\ln p - 1}{\ln p} \right) > 2(c_3 + 1)K,$$

а также $\xi = p^{\gamma(H)}$ и пусть $\gamma(H) \geq \binom{m+K}{m} \frac{\ln \ln H}{\ln p}$.

Тогда в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется

$$P(f(S, \xi), f'(S, \xi), \dots, f^{(r-1)}(S, \xi)) \neq 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Степенной ряд называется F – рядом, если он входит в некоторый класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, где $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, $\kappa = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.*

Класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$ определяется следующим образом. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n.$$

Пусть:

1. $a_n \in \mathbb{K}, n = 0, 1, 2, \dots$;
2. $|\overline{a_n}| = O(e^{c_1 n}), n \rightarrow \infty$ (где для алгебраического числа α символ $|\overline{\alpha_n}|$ обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраически сопряжённых с α чисел);
3. существует последовательность натуральных чисел $d_n = q^n d_{0,n}$, где $q \in \mathbb{N}$, такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, n = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, n$.

При этом $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p , не большие $c_2 n$, причём

$$\text{ord}_p d_{0,n} \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

При выполнении перечисленных условий будем говорить, что $f(z)$ входит в класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$.

Также отметим, что частный случай F – ряда, а именно $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^n$, который рассматривал ещё в своих работах Л. Эйлер представляет собой асимптотическое разложение для интеграла $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{w}{z}}}{1+w} dw$.

Везде далее считаем $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}$.

Для доказательства основной теоремы необходимо проверить выполнение условий теоремы 1 для рядов вида (5) Для этого сформулируем ряд лемм и введем несколько определений. Проверим являются ли ряды вида (5) F – рядами.

ЛЕММА 1 (см.[22]). *Если параметры (6) являются рациональными числами, то соответствующий ряд (5) будет F – рядом*

ЛЕММА 2 (см.[22]). *Для любого множества параметров (6) ряд (5) представляет собой формальное решение линейного дифференциального уравнения*

$$y' = Q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j y_j,$$

где $Q_j \in \mathbb{Q}(z), j = 0, 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства, сначала, докажем что они являются решениями для

$$\left(\prod_{j=1}^s \left(z \frac{d}{dz} + t(\lambda_j - 1) \right) - z^t \prod_{i=1}^r \left(z \frac{d}{dz} + t\eta_i \right) \right) y = \prod_{j=1}^s t(\lambda_j - 1). \quad (7)$$

Рассмотрим уменьшаемое после раскрытия скобок

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^s \left(z \frac{d}{dz} + t(\lambda_j - 1) \right) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta_1)_n \cdots (\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n \cdots (\lambda_s)_n} (zt)^{tn} &= \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta_1)_n \cdots (\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n \cdots (\lambda_s)_n} \prod_{j=1}^s \left(z \frac{d}{dz} + t(\lambda_j - 1) \right) (zt)^{tn} &= \\
= t^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta_1)_n \cdots (\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n \cdots (\lambda_s)_n} (zt)^{tn} \prod_{j=1}^s (n + \lambda_j - 1) &= \\
= \prod_{j=1}^s t(\lambda_j - 1) + t^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\eta_1)_n \cdots (\eta_r)_n}{(\lambda_1)_{n-1} \cdots (\lambda_s)_{n-1}} (zt)^{tn}, & \quad (8)
\end{aligned}$$

учитывая (3). Для вычитаемого получим

$$\begin{aligned}
z^t \prod_{i=1}^r \left(z \frac{d}{dz} + t\eta_i \right) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta_1)_n \cdots (\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n \cdots (\lambda_s)_n} (zt)^{tn} &= \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta_1)_n \cdots (\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n \cdots (\lambda_s)_n} z^t \prod_{i=1}^r \left(z \frac{d}{dz} + t\eta_i \right) (zt)^{tn} &= \\
= t^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta_1)_{n+1} \cdots (\eta_r)_{n+1}}{(\lambda_1)_n \cdots (\lambda_s)_n} (zt)^{t(n+1)} t^{-t} &= \\
= t^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta_1)_n \cdots (\eta_r)_n}{(\lambda_1)_{n-1} \cdots (\lambda_s)_{n-1}} (zt)^{tn} & \quad (9)
\end{aligned}$$

Разность последних частей цепочек (8) и (9) показывают верное равенство, а значит ряд (5) действительно удовлетворяет уравнению (7), которое сводится к данному в формулировке леммы. $\square$

Отметим что особой точкой уравнения (7) является точка $z = 0$ и то, что упоминающийся в формулировке теоремы 1 многочлен $T(z)$ отличен от нуля при $z \neq 0$.

ЛЕММА 3 (теорема из статьи [22]). Пусть множество параметров $S = \{\eta_1, \dots, \eta_r; \lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, $r > s$ состоит из нецелых рациональных чисел, $t = r - s = 2k$. Пусть $\eta_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, s$. Тогда ряды $y(z), y'(z), \dots, y^{(r-1)}(z)$ алгебраически независимы (где $y(z)$ любое решение уравнения (7)).

Доказательство этой леммы для F – рядов получен в статье [22] с использованием важной теоремы из работы [8] Салихова В. Х, при замене переменной $z = \frac{1}{u}$, и применением результатов Нестеренко Ю. В. [4].

Таким образом выполняются все условия теоремы 1, а следовательно, применяя её к гипергеометрическому F – ряду (5) и множеству его производных различных степеней, получаем утверждение основной теоремы.

Заключение

Ближайшими перспективами дальнейшей работы можно считать последующее уточнение оценок. В дальнейшем, результаты данной работы будут использованы для изучения гипергеометрических рядов с рациональными параметрами, входящими в класс F – рядов. Одной из трудных проблем, подходы к решению которой пока неизвестны, можно назвать устранение зависимости p – адической величины рассматриваемой точки от высоты формы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галочкин А.И. О неулучшаемых по высоте оценках некоторых линейных форм // Мат.сб.1984.т.124(166),№3(7). с.416–430.
2. Галочкин А.И. Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса // Мат. сб., Т. 95(137), №3(11), 1974, С. 396–417.
3. Муньос Васкес А.Х. Оценки снизу многочленов и линейных форм от значений F – рядов // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3.
4. Нестеренко Ю.В. Об алгебраической независимости значений E – функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям // Матем. заметки, 5:5 (1969), 587–598; Math. Notes, 5:5 (1969), 352–358.
5. Олейников В.А. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых целых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – Т. 32, №1. – С. 63–92.
6. Салихов В.Х. Критерий алгебраической независимости значений одного класса гипергеометрических E – функций // Мат.сб. 1990. т.181, №2. с.189–211.
7. Салихов В.Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E – функций // Acta Arith. –1990. т. 53. с.453–471.
8. Салихов В.Х. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E – функций // ДАН СССР. 1989. т.307, №2. с.284–287.
9. Салихов В.Х. Формальные решения линейных дифференциальных уравнений и их применение в теории трансцендентных чисел // Тр. Моск. мат. о-ва. 1988. т.51. с.223–256.
10. Чирский В.Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F – рядов // Доклады Академии наук. Наука (М.). 2018. т. 483, №3, с.257–259.
11. Чирский В.Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук, математика. Наука (М). 2014. т. 439, №6. с. 677–679.
12. Чирский В.Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая. 2017. т. 81, выпуск 2. с. 215–232.
13. Чирский В.Г. Арифметические свойства полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2015. т. 16, №1. с. 254–264.
14. Чирский В.Г. Линейная независимость p – адических значений некоторых q – базисных гипергеометрических рядов // Фунд. и прикл. матем. 1999. т. 5, №2. с. 619–625.
15. Чирский В.Г. О глобальных соотношениях // Мат. заметки. 1990. т. 48, №2. с.123–127.
16. Чирский В.Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая. 2014. т. 78, №6. с. 193–210.
17. Чирский В.Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика. Изд-во Моск. университета (М). 2015. №1. с. 59–61.
18. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа // М. Наука. 1987.

19. André Y. Séries Gevrey de type arithmétique. // Inst. Math., Jussieu.
20. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. Vol. XIII, №2. pp. 241–260.
21. Bombieri E. On G -functions. // Recent Progress in Analytic Number Theory. V.2. London: Academic Press, 1981. – P. 1–68.
22. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric F – Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175–184.
23. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic numbers // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2019. Vol. 26, №3, pp. 286–305.
24. Matala-Aho T., Zudilin W. Euler factorial series and global relations. // J. Number Theory. 2018. 186, pp.202–210.

REFERENCES

1. André, Y. “Séries Gevrey de type arithmétique“, Inst. Math., Jussieu.
2. Bertrand, D., Chirskii, V. G. & Yebbou, Y. 2004. “Effective estimates for global relations on Euler – type series“, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Vol. XIII, №2. pp. 241–260.
3. Bombieri, E. 1981, “On G -functions“, *Recent Progress in Analytic Number Theory*. Vol.2. London: Academic Press, pp. 1–68.
4. Chirskii, V. G. 2020, “Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series“, *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), Vol 27, №2, pp. 175–184.
5. Chirskii, V. G. 2019, “Product formula, global relations and polyadic integers“, *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), Vol. 26, №3, pp. 286–305.
6. Chirskii, V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric F -series“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). Vol. 98, №3. pp.589–591.
7. Chirskii, V. G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), Vol. 81, №2. pp. 444–461.
8. Chirskii, V. G. 2015, “Arithmetic properties of Euler series“, *Moscow University Mathematics Bulletin*, Allerton Press Inc.(United States), Vol. 70, №1, pp.41–43.
9. Chirskii, V. G. 2015, “Arithmetic properties of polyadic integers“, *Chebyshevskii Sb.*, 16:1, pp.254–264.
10. Chirskii, V. G. 2014, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), Vol. 90, №3, pp. 766–768.

11. Chirskii, V. G. 2014, "On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters", *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States). Vol. 78, №6. pp. 1244–1260.
12. Chirskii, V. G. 1999, "Linear independence of the p – adic values of certain q – basic hypergeometric series", *Fundam. Prikl. Mat.*, 5:2 , pp.619–625.
13. Chirskii, V. G. 1990, "Global relations", *Mat. Zametki*, 48:2, 123–127; *Math. Notes*, 48:2 (1990), pp.795–798.
14. Galochkin, A. I. 1984, "On estimates, unimprovable with respect to height, of some linear forms", *Mat. Sb. (N.S.)*, 124(166):3(7), 416–430; *Math. USSR-Sb.*, 52:2 (1985), 407–421
15. Galochkin, A. I. 1974, "Estimates from below of polynomials in the values of analytic functions of a certain class", *Mat. Sb. (N.S.)*, 95(137):3(11), 396–417; *Math. USSR-Sb.*, 24:3 (1974), 385–407
16. Matala-Aho T. & Zudilin W. 2018, "Euler factorial series and global relations", *J. Number Theory*, 186, pp.202–210.
17. Munos Vaskes, A. Kh. 2020, "Lower estimates of polynomials and linear forms in the values of F – series", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3
18. Nesterenko Yu. V. 1969, "On the Algebraic Independence of the Values of E-Functions Satisfying Nonhomogeneous Linear Differential Equations" *Mat. Zametki* 5 (5), 587–599 [Math. Notes 5 (5), 352–358 (1969)].
19. Oleinikov, V. A. 1968, "On the transcendence and algebraic independence of the values of certain entire functions", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32:1, 63–92; *Math. USSR-Izv.*, 2:1 (1968), 61–87
20. Salikhov, V. Kh. 1990, "A criterion for the algebraic independence of values of a class of hypergeometric E – functions", *Mat. Sb.*, 181:2, 189–211; *Math. USSR-Sb.*, 69:1 (1991), 203–226
21. Salikhov V. Kh. 1990, "Irreducibility of hypergeometric equations and algebraic independence of values of E – functions", *Acta Arith.*, Vol. 53. p. 453–471.
22. Salikhov, V. Kh. 1989, "Algebraic independence of values of hypergeometric E – functions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 307:2, 284–287; *Dokl. Math.*, 40:1 (1990), 71–74
23. Salikhov, V. Kh. 1988, "Formal solutions of linear differential equations and their application in the theory of transcendental numbers", *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 51, MSU, M., 223–256
24. Shidlovskii, A. B. 1989, "Transcendental numbers" [Transtsendentnye chisla] / Andrei Borisovich Shidlovskii; translated from the Russian by Neal Koblitz.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.464

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-528-535

Об одном применении методов исследования алгебраической независимости гипергеометрических рядов и значений g -адических функций

А. С. Самсонов

Самсонов Алексей Сергеевич — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы трансцендентности и алгебраической независимости, формулируется и доказываются теорема для некоторых элементов прямых произведений p -адических полей. Пусть $\mathbb{Q}_p$ — пополнение $\mathbb{Q}$ по p -адической норме, поле Ω_p — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$, $g = p_1 p_2 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел, а пополнение $\mathbb{Q}$ по g -адической псевдонорме это кольцо $\mathbb{Q}_g$, иными словами $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$. Рассматривается кольцо $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$, содержащее $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца. Также, рассматриваются гипергеометрические ряды вида

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_j \dots (\gamma_r)_j}{(\beta_1)_j \dots (\beta_s)_j} (zt)^{tj},$$

и их формальные производные. Получены достаточные условия, при которых значения ряда $f(\alpha)$ и формальных производных удовлетворяют глобальному соотношению алгебраической независимости, если $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}$, где $a_k \in \mathbb{Z}_g$, а неотрицательные рациональные числа r_k образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \rightarrow +\infty$ последовательность.

Ключевые слова: p -адические числа, g -адические числа, f -ряды, трансцендентность, алгебраическая независимость.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:

А. С. Самсонов. Об одном применении методов исследования алгебраической независимости гипергеометрических рядов и значений g -адических функций // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 528–535.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 511.464

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-528-535

One application on hypergeometric series and values of g -adic functions algebraic independence investigation methods

A. S. Samsonov

Samsonov Aleksei Sergeevich — graduate student, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Abstract

The article takes a look at transcendence and algebraic independence problems, introduces statements and proofs of theorems for some kinds of elements from direct product of p -adic fields and polynomial estimation theorem. Let $\mathbb{Q}_p$ be the p -adic completion of $\mathbb{Q}$, Ω_p be the completion of the algebraic closure of $\mathbb{Q}_p$, $g = p_1 p_2 \dots p_n$ be a composition of separate prime numbers, $\mathbb{Q}_g$ be the g -adic completion of $\mathbb{Q}$, in other words $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$. The ring $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$, a subring $\mathbb{Q}_g$, transcendence and algebraic independence over $\mathbb{Q}_g$ are under consideration. Also, hypergeometric series

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_j \dots (\gamma_r)_j}{(\beta_1)_j \dots (\beta_s)_j} (zt)^{tj},$$

and their formal derivatives are under consideration. Sufficient conditions are obtained under which the values of the series $f(\alpha)$ and formal derivatives satisfy global relation of algebraic independence, if $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j g^{r_j}$, where $a_j \in \mathbb{Z}_g$, and non-negative rationals r_j increase strictly unbounded.

Keywords: p -adic numbers, g -adic numbers, f -series, transcendence, algebraic independence.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

A. S. Samsonov, 2021, "One application on hypergeometric series and values of g -adic functions algebraic independence investigation methods", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 528–535.

Введение

Используются следующие обозначения: p — простое число, $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p -адических чисел, $|x|_p = p^{-ord_p x}$ — p -адическая норма; $\mathbb{Q}_p$ — поле p -адических чисел, это пополнение поля рациональных чисел по p -адической норме; Ω_p , оно же $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$; $K[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из кольца K , например $\mathbb{Q}_p[x]$, $K[x_1, \dots, x_m]$ — кольцо многочленов от m переменных над кольцом K .

Для g -адических чисел используются следующие обозначения: $g = p_1 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел, $\mathbb{Z}_g$ — кольцо целых g -адических чисел, $|x|_g$ — g -адическая псевдонорма; $\mathbb{Q}_g$ — кольцо g -адических чисел, пополнение множества рациональных чисел по g -адической псевдонорме; построено кольцо Ω_g — расширение кольца $\mathbb{Q}_g$, $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$.

Основные понятия и определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обозначим $\Phi : \mathbb{Q}_g \rightarrow \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ — прямой изоморфизм колец, а $\Psi : \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n} \rightarrow \mathbb{Q}_g$ — обратный.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Описание изоморфизма $\mathbb{Q}_g \cong \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ см. в [22], с. 59.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Множество $\Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$ — кольцо, которое содержит кольцо $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ в качестве подкольца.

Содержание этого утверждения очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пространство $\mathbb{Q}_g$ представляет из себя множество $\{\Psi(\beta_1, \dots, \beta_n)\}$, где $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ пробегает множество $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$.

Теперь мы построим пространство Ω_g . В силу предыдущего замечания, мы можем дополнить множество $\mathbb{Q}_g$ недостающими элементами и обозначить их $\Psi(\beta_1, \dots, \beta_n)$, где $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ пробегает множество $\Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$. Более того, продолжение изоморфизма Ψ , которое мы построим, будет отображать элементы $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ в $\Psi(\beta_1, \dots, \beta_n)$, поэтому совпадение обозначений не приведет к конфликту.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Omega_g = \{\Psi(\beta_1, \dots, \beta_n)\}$, где $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ пробегает $\Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$. Алгебраическую структуру заимствуем из кольца $\Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Кольцо Ω_g содержит $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца. Существует продолжение изоморфизма $\Psi : \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n} \rightarrow \Omega_g$ и продолжение обратного изоморфизма $\Phi : \Omega_g \rightarrow \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$.

Доказательство. В силу замечания 2 и определения 2, очевидно, что кольцо Ω_g содержит $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца. Продолжение изоморфизма Ψ определим следующим образом, пусть Ψ отображает элемент $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ в $\Psi(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Такое отображение будет изоморфизмом в силу определения 2. Изоморфизм Φ продолжим, как обратный к Ψ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Далее, нет смысла упоминать названия изоморфизмов, они будут опущены, поскольку обозначения не вызывают разночтений. Если $\alpha \in \Omega_g$, то $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, где $\beta_k \in \Omega_{p_k}$. Аналогично, если $\alpha \in \mathbb{Q}_g$, то $\beta_k \in \mathbb{Q}_{p_k}$, если $\alpha \in \mathbb{Z}_g$, то $\beta_k \in \mathbb{Z}_{p_k}$. Любой многочлен $G \in \mathbb{Q}_g[x]$ можно представить в виде

$$G = (P_1, P_2, \dots, P_n), \text{ где } P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x]$$

и вычислить по формуле

$$G(\alpha) = (P_1(\beta_1), P_2(\beta_2), \dots, P_n(\beta_n)), \text{ где } \alpha \in \Omega_g, \alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Аналогично, если $G \in \mathbb{Q}_g[x_1, \dots, x_m]$, то $P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x_1, \dots, x_m]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обозначим $U_p := \{\beta \in \mathbb{Q}_p : |\beta|_p = 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Обозначим $\mathbb{Z}_g^* := \{\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \dots, n\}, \beta_k \neq 0\}$.

Хотелось бы ввести обозначение $A \setminus \widehat{0}$, которое бы исключало из множества A , являющегося прямым произведением, все такие элементы, что хотя бы одна из компонент тождественно равна нулю, иными словами, исключить нули и делители нуля. Это обозначение представим в следующем виде.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. $\mathbb{Z}_g \setminus \widehat{0} := \mathbb{Z}_g^*$, $\mathbb{Q}_g[x] \setminus \widehat{0} := \{G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] : \forall k \in \{1, \dots, n\}, P_k \neq 0\}$ и так далее.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Следующие определения раскрывают смысл глобального соотношения, которое говорит о наличии соответствующего соотношения для каждой компоненты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $\alpha \in \Omega_g$, $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Будем называть α глобально трансцендентным над $\mathbb{Q}_g$ элементом Ω_g , если для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ и любого многочлена $G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] \setminus \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(\beta_k) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\alpha_i \in \Omega_g$, $\alpha_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,n})$, $i = 1, \dots, t$. Будем называть α_i глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$ элементами Ω_g , если для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ и любого многочлена $G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \dots, x_m] \setminus \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(\beta_{1,k}, \dots, \beta_{t,k}) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Степенной ряд $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, будем называть глобально трансцендентным над $\mathbb{Q}_g$, если для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ и любого многочлена $G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] \setminus \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(f_k) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Степенные ряды $f_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$, $f_i = (f_{i,1}, \dots, f_{i,n})$, $i = 1, \dots, t$, будем называть глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$, если для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ и любого многочлена $G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \dots, x_m] \setminus \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(f_{1,k}, \dots, f_{t,k}) \neq 0$.

Формулировка и доказательство теоремы

Для семейств действительных чисел $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k)$ и $\bar{b} = (b_1, \dots, b_k)$ используем обозначение

$$\bar{a} \approx \bar{b},$$

если существует перестановка $i_1, \dots, i_k$ чисел $1, \dots, k$ такая, что $b_j - a_{i_j} \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, k$. Также, используем обозначение $\bar{a} + c$ для семейства чисел $(a_1 + c, \dots, a_m + c)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $t = r - s > 0$,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_j \dots (\gamma_r)_j}{(\beta_1)_j \dots (\beta_s)_j} (zt)^{tj}.$$

Пусть четное число $t = 2k$ и пусть множество параметров $S = (\gamma_1, \dots, \gamma_r; \beta_1, \dots, \beta_s)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\gamma_i \notin \mathbb{Z}, \beta_j \notin \mathbb{Z}, \gamma_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}, i = 1, \dots, t + s, j = 1, \dots, s.$$

Для всех общих делителей d чисел t, s , ни одно из соотношений $\bar{\gamma} + \frac{1}{d} \approx \bar{\gamma}$ или $\bar{\beta} + \frac{1}{d} \approx \bar{\beta}$ не может иметь места.

Кроме того, не выполняются следующие условия:

1) если $s = 0$, тогда существуют $x_0, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\bar{\gamma} + x_0 \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_1, -x_1, \dots, x_{k-1}, -x_{k-1}\right),$$

2) если $s > 0$, $s = 2q$, тогда существуют $x_0, \dots, x_{k+s-1} \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\bar{\gamma} + x_0 \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_1, -x_1, \dots, x_{k+q-1}, -x_{k+q-1}\right),$$

$$\bar{\beta} + x_0 \approx (x_{k+q}, -x_{k+q}, \dots, x_{k+s-1}, -x_{k+s-1}),$$

или

$$\bar{\gamma} + x_0 \approx (x_1, -x_1, \dots, x_{k+q}, -x_{k+q}),$$

$$\bar{\beta} + x_0 \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_{k+q+1}, -x_{k+q+1}, \dots, x_{k+s-1}, -x_{k+s-1}\right),$$

3) если $s > 0$, $s = 2q + 1$, тогда существуют $x_0, \dots, x_{k+l-1} \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\bar{\gamma} + x_0 \approx (0, x_1, -x_1, \dots, x_{k+q-1}, -x_{k+q-1}),$$

$$\bar{\beta} + x_0 \approx \left(-\frac{1}{2}, x_{k+q}, -x_{k+q}, \dots, x_{k+s-1}, -x_{k+s-1}\right).$$

Пусть $f'(z), f''(z), \dots, f^{(r-1)}(z)$ — формальные производные вышеуказанного ряда $f(z)$.

Пусть $g = p_1 \dots p_n$ — произведение $n \geq 1$ различных простых чисел, для любого $j = 1, \dots, s$, наибольший общий делитель $(g, \beta_j) = 1$,

$$\alpha_\mu = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,\mu} g^{r_{j,\mu}}, \quad \alpha_\mu \in \Omega_g, \quad a_{j,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*, \quad \mu = 1, \dots, t.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \dots, t$ положительные рациональные числа $r_{j,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \rightarrow +\infty$ последовательность;

2) для любого $\mu = 1, \dots, t$ существует бесконечное множество номеров j таких, что число $r_{j+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{j,\mu}$ и чисел $r_{j',\mu'}$ при любых j' и при $\mu' \neq \mu$;

3) не существует номеров j, j', μ таких, что разность $r_{j,\mu} - r_{j',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f^{(\lambda)}(\alpha_\mu)$, где параметры пробегают значения $\lambda = 0, 1, \dots, r-1$, $\mu = 1, \dots, t$, представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться теоремой 7 из статьи "Арифметические свойства элементов прямых произведений p -адических полей, II". Поскольку коэффициенты ряда $f(z)$ представляют собой рациональные числа, знаменатели которых взаимно просты с g , значит коэффициенты рядов принадлежат $\mathbb{Z}_g$. Остается показать, что $f(z), f'(z), \dots, f^{(r-1)}(z) \in \mathbb{Z}_g[[z]]$ глобально алгебраически независимы над $\mathbb{Q}_g$.

Предположим противное, а именно, пусть p — простой делитель числа g , а ряды $f(z), f'(z), f''(z), \dots, f^{(r-1)}(z)$ являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$. Поскольку $f(z), f'(z), \dots, f^{(r-1)}(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$, можно воспользоваться леммой 2 из статьи "Арифметические свойства элементов прямых произведений p -адических полей, II". Если ряды $f(z), f'(z), f''(z), \dots, f^{(r-1)}(z)$ являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$, то и над $\mathbb{Q}$, но согласно результатам из статьи [19], $f(z), f'(z), f''(z), \dots, f^{(r-1)}(z)$ являются алгебраически независимыми над $\mathbb{C}(z)$, противоречие.

Заключение

Статья показывает пример приложения результатов об алгебраической независимости для конкретного случая.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adams W. Transcendental numbers in the p -adic domain // Amer. J. Math., 1966, V. 88, P. 279–307.
2. Amice Y. Les nombres p -adiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1975.
3. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse, 2004, V. XIII, №2, P. 241–260.
4. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. 3-е изд. доп. М.: Наука, 1985.
5. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I // Arch. Math., 2002, V. 79, P. 345–352.
6. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II // Acta Arithm., 2004, V. 113, №4, P. 309–326.
7. Bundschuh P., Chirskii V. G. Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$ // Moscow Journ. of Comb. and Number Th., 2015, V. 5, iss. 1-2, P. 14–20.
8. Чирский В. Г. Метод Зигеля-Шидловского в p -адической области. // Фундаментальная и прикладная математика. 2005, Т. 11, №6, С. 221–230.
9. Chirskii V. G. Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$ // Russian Journ. of Math. Physics, 2013, V. 20, №2, P. 149–154.
10. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады академии наук, 2014, Т. 459, №6, С. 677–679.
11. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Изв. РАН. Сер. мат., 2014, Т. 78, №6, С. 193–210.
12. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Моск. ун-та, Сер.1, мат., мех., 2015, №1, С. 59–61.
13. Чирский В. Г. Арифметические свойства целых полиадических чисел // Чебышёвский сборник, 2015, Т. 16, вып. 1, С. 254–264.
14. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат., 2017, Т. 81, №2, С. 215–232.
15. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to their solutions in the works of Yu. V. Nesterenko // Russian Journ. of Math. Physics, 2017, V. 24, №2, P. 153–171.
16. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических f -рядов // Доклады академии наук, 2018, Т. 483, №3, С. 257–259.
17. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric f -series // Doklady Mathematics, 2018, V. 98, №3, P. 589–591.
18. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journ. of Math. Physics, 2019, V. 26, №3, P. 286–305.
19. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric series // Russian Journ. of Math. Physics, 2020, V. 27, №2, P. 175–184.

20. Коблиц Н. p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции; пер. с англ. В. В. Шокурова, под ред. Ю. И. Манина. М.: Мир, 1982.
21. Mahler K. Uber transzendente p -adische Zahlen // Compos. Math. 1935, V. 2, P. 259–275.
22. Mahler K. p -adic numbers and their functions; second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
23. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

REFERENCES

1. Adams W. 1966, “Transcendental numbers in the p -adic domain”, *Amer. J. Math.*, vol. 88, pp. 279–307.
2. Amice Y. 1975, Les nombres p -adiques. Presses Universitaires de France, Paris.
3. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. 2004, “Effective estimates for global relations on Euler-type series”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. XIII, no. 2, pp. 241–260.
4. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. 1985, Teoriya Chisel, [The theory of numbers], third edition. “Nauka”, Moscow.
5. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2002, “On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I”, *Arch. Math.*, vol. 79, pp. 345–352.
6. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2004, “On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II”, *Acta Arithm.*, vol. 113, no. 4, pp. 309–326.
7. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2015, “Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$ ”, *Moscow Journ. of Comb. and Number Th.*, vol. 5, iss. 1–2, pp. 14–20.
8. Chirskii V. G. 2005, “Siegel–Shidlovskii method in p -adic domain”, *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 11, no. 6, pp. 221–230.
9. Chirskii V. G. 2013, “Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$ ”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 20, no. 2, pp. 149–154.
10. Chirskii V. G. 2014, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients”, *Dokladi akademii nauk*, vol. 459, no. 6, pp. 677–679.
11. Chirskii V. G. 2014, “Arithmetic properties of hypergeometric series with irrational parameters”, *Izv. RAN. Ser. mat.*, vol. 78, no. 6, pp. 193–210.
12. Chirskii V. G. 2015, “On the arithmetic properties of Euler-type series”, *Vestnik Mosk. Univ. Ser. I, mat., mech.*, no. 1, pp. 59–61.
13. Chirskii V. G. 2015, “Arithmetic properties of polyadic integer numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 16, no. 1, pp. 254–264.
14. Chirskii V. G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients”, *Izv. RAN. Ser. mat.* vol. 81, no. 2, pp. 215–232.
15. Chirskii V. G. 2017, “Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to their solutions in the works of Yu. V. Nesterenko”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 24, no. 2, pp. 153–171.

16. Chirskii V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series”, *Doklady akademii nauk*, vol. 483, no. 3, pp. 257–259.
17. Chirskii V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series”, *Doklady Mathematics*, vol. 98, no. 3, pp. 589–591.
18. Chirskii V. G. 2019, “Product formula, global relations and polyadic integers”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 26, no. 3, pp. 286–305.
19. Chirskii V. G. 2020, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric series”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 27, no. 2, pp. 175–184.
20. Koblitz N. 1982, *p -adic numbers, p -adic analysis, and zeta-functions*, 2nd ed.
21. Mahler K. 1935, “Über transzendente p -adische Zahlen”, *Compos. Math.*, vol. 2, pp. 259–275.
22. Mahler K. 1981, *p -adic numbers and their functions*, second edition, Cambridge University Press, Cambridge.
23. Shidlovskii A. B. 1987, *Transcendentnye chisla*, [Transcendental numbers], “Nauka”, Moscow.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-536-542

Значения гипергеометрических F -рядов
в полиадических лиувиллевых точках

Е. Ю. Юденкова

Юденкова Екатерина Юрьевна — аспирант, Московский педагогический государственный университет; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (г. Москва).

e-mail: yudenkovaey@gmail.com

Аннотация

В настоящей работе доказывается бесконечная алгебраическая независимость значений гипергеометрических F -рядов в полиадических лиувиллевых точках. Гипергеометрическая функция — это функция вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_s)_n n!} z^n, |z| < 1.$$

F -ряд — это ряд вида $f_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$, коэффициенты которого a_n удовлетворяют некоторым арифметическим свойствам. Эти ряды сходятся в поле $\mathbb{Q}_p$ — p -адических чисел и их алгебраических расширений $\mathbb{K}_v$. Полиадическое число — это ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$, $a_n \in \mathbb{Z}$. Лиувиллево число — это вещественное число x такое, что для всех положительных целых чисел n существует бесконечное число пар целых чисел (p, q) , $q > 1$ таких, что $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$. Полиадическое лиувиллево число α обладает тем свойством, что для любых чисел P, D существует целое число $|A|$ такое, что для всех простых чисел $p \leq P$ выполняется неравенство $|\alpha - A|_p < A^{-D}$.

Ключевые слова: гипергеометрические F -ряды, полиадические лиувиллевы точки.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Е. Ю. Юденкова. Значения гипергеометрических F -рядов в полиадических лиувиллевых точках // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 536–542.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-536-542

Values of hypergeometric F -series
at polyadic Liouville points

E. Yu. Yudenkova

Yudenkova Ekaterina Yurievna — graduate student, Moscow Pedagogical State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: yudenkovaey@gmail.com

Abstract

This paper proves infinite algebraic independence of the values of hypergeometric F – series at polyadic Liouville points. Hypergeometric functions are defined for $|z| < 1$ by the power series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_s)_n n!} z^n.$$

F – series have form $f_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$ whose coefficients a_n satisfy some arithmetic properties. These series converge in the field $\mathbb{Q}_p$ of p – adic numbers and their algebraic extensions $\mathbb{K}_v$. Polyadic number is a series of the form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$, $a_n \in \mathbb{Z}$. Liouville number is a real number x with the property that, for every positive integer n , there exist infinitely many pairs of integers (p, q) with $q > 1$ such that $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$. The polyadic Liouville number α has the property that for any numbers P, D there exists an integer $|A|$ such that for all primes $p \leq P$ the inequality $|\alpha - A|_p < A^{-D}$.

Keywords: hypergeometric F -series, polyadic Liouville numbers.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

E. Yu. Yudenkova, 2021, “Values of hypergeometric F -series at polyadic Liouville points”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 536–542.

Введение

В данной работы доказывается бесконечная алгебраическая независимость гипергеометрических F – рядов в полиадических лиувилевых точках.

Символ Похгаммера определяется равенствами

$$(a)_0 = 1, (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1), n \geq 1$$

Дадим определение обобщенных гипергеометрических функций и F – ряда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}, b_j \neq 0, -1, -2, \dots, i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m$, то функции вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_l)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_m)_n} \left(\frac{t}{z} \right)^{tn}$$

называются обобщёнными гипергеометрическими функциями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$$

принадлежит классу $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, если его коэффициенты принадлежат полю $\mathbb{K}$ и удовлетворяют условиям

1. $|\overline{a_n}| = O(\exp(c_1 n)), n \rightarrow \infty$ (где для алгебраического числа α символ $|\overline{\alpha_n}|$ обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраически сопряжённых с α чисел);

2. существует последовательность натуральных чисел $d_n = q^n d_{0,n}$, где $q \in \mathbb{N}$, такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, n = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, n$.

При этом $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p , не большие $c_2 n$, причём

$$\text{ord}_p d_{0,n} \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Полиадическое лиувиллево число α обладает тем свойством, что для любых чисел P, D существует целое число $|A|$ такое, что для всех простых чисел $p \leq P$ выполняется неравенство

$$|\alpha - A|_p < A^{-D}.$$

Настоящая работа развивает результаты В.Г.Чирского [8].

Перейдем к формулировкам утверждений. Пусть

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k, \quad (1)$$

где $\theta_k \in \mathbb{K}$, причем этот ряд сходится во всех полях $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Обозначим

$$\Theta_n = \sum_{k=0}^n \theta_k.$$

Для семейств вещественных чисел $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ и $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$ будем использовать следующее обозначение

$$\bar{a} \approx \bar{b}$$

если существует перестановка $i_1, \dots, i_m$ чисел $1, \dots, m$ такая, что $b_j - a_{i_j} \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, m$. Также под $\bar{a} + c$ понимается $(a_1 + c, \dots, a_m + c)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_n \dots (\mu_r)_n}{(\lambda_1)_n \dots (\lambda_s)_n} (zt)^{tn}, \quad (2)$$

в котором множество

$$S = \{\mu_1, \dots, \mu_r; \lambda_1, \dots, \lambda_s\}, r > s \quad (3)$$

состоит из нецелых рациональных параметров, а

$$t = r - s$$

чётно ($t = 2k$) и для множества параметров S выполнены следующие условия:

$$\mu_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}, i = 1, \dots, t + s, j = 1, \dots, s.$$

Пусть для всех d – общих делителей чисел t и s – либо не выполняется соотношение $\bar{\mu} + \frac{1}{d} \approx \bar{\mu}$, либо не выполняется соотношение $\bar{\lambda} + \frac{1}{d} \approx \bar{\lambda}$. Также пусть не выполняется ни одно из следующих условий:

1. если $s = 0$, то существуют $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{C}$ такие, что

$$(\bar{\mu} + x_0) \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_1, -x_1, \dots, x_{k-1}, -x_{k-1} \right);$$

2. если $s > 0$ – чётно ($s = 2u$), то существуют $x_0, x_1, \dots, x_{k+s-1} \in \mathbb{C}$ такие, что либо

$$(\bar{\mu} + x_0) \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_1, -x_1, \dots, x_{k+q-1}, -x_{k+q-1}\right),$$

$$(\bar{\lambda} + x_0) \approx (x_{k+q}, -x_{k+q}, \dots, x_{k+s-1}, -x_{k+s-1}),$$

либо

$$(\bar{\mu} + x_0) \approx (x_1, -x_1, \dots, x_{k+q}, -x_{k+q}),$$

$$(\bar{\lambda} + x_0) \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_{k+q+1}, -x_{k+q+1}, \dots, x_{k+s-1}, -x_{k+s-1}\right);$$

3. если $s > 0$ – нечётно ($s = 2u + 1$), то существуют $x_0, x_1, \dots, x_{k+s-1} \in \mathbb{C}$ такие, что

$$(\bar{\mu} + x_0) \approx (0, x_1, -x_1, \dots, x_{k+q-1}, -x_{k+q-1}),$$

$$(\bar{\lambda} + x_0) \approx \left(-\frac{1}{2}, x_{k+q}, -x_{k+q}, \dots, x_{k+s-1}, -x_{k+s-1}\right).$$

Пусть ξ – ряд (1), где θ_k – целые числа из поля $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Пусть $\epsilon > 0, 0 < \delta < 1$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству

$$p \leq m \exp(\ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta}_n|) \quad (4)$$

и любого нормирования v , продолжающего p -адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполняется неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(\exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta}_n|) \ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta}_n|), |\Theta_n| > \exp(\ln^{2+\epsilon} |\overline{\Theta}_n|) \quad (5)$$

Тогда для любого многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$, коэффициенты которого – целые числа из поля $\mathbb{K}$, не все равные нулю, существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v , продолжающих p -адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$ такие, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

$$|P(\xi)|_v = |P(f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(r-1)}(\xi))|_v > 0.$$

Доказательство теоремы

ЛЕММА 1. [8] Если параметры (3) являются рациональными числами, то соответствующий ряд (2) будет F – рядом.

ЛЕММА 2. [8] Для любого множества параметров (3) ряд (2) представляет собой формальное решение линейного дифференциального уравнения:

$$\left(\prod_{j=1}^s \left(z \frac{d}{dz} + t(\lambda_j - 1) \right) - z^t \prod_{i=1}^r \left(z \frac{d}{dz} + t\mu_i \right) \right) y = \prod_{j=1}^s t(\lambda_j - 1)$$

ЛЕММА 3. [8] При условиях теоремы 1. ряд $f(z)$ является F – рядом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – ряды $f_1, f_2, \dots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений

$$y'_i(z) = Q_{0,i}(z) \sum_{j=1}^m Q_{j,i}(z) y_j(z), i = 1, \dots, m,$$

$$Q_{j,i}(z) \in \mathbb{K}(z), i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, m. \quad (6)$$

и алгебраически независимы над полем $\mathbb{K}(z)$. Пусть ξ – ряд вида (1). Пусть $\epsilon > 0, 0 < \delta < 1$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству

$$p \leq m \exp(\ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta}_n|) \quad (7)$$

и любого нормирования v , продолжающего p -адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполняется неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(\exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta}_n|) \ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta}_n|), |\Theta_n| > \exp(\ln^{2+\epsilon} |\overline{\Theta}_n|) \quad (8)$$

Тогда для любого многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$, коэффициенты которого – целые числа из поля $\mathbb{K}$, не все равные нулю, существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v , продолжающих p -адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$ такие, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

$$|P(\xi)|_v = |P(f_1(\xi), f_2(\xi), \dots, f_m(\xi))|_v > 0.$$

Доказательство теоремы 2 приведено в предыдущей статье [Чебышевский сборник, т.22, вып.2, «Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F -рядов в полиадических лиувиллевых точках»].

Применение лемм 1 – 3 и теоремы 2 завершает доказательство теоремы 1.

Заключение

В настоящей работе была доказана бесконечная алгебраическая независимость значений гипергеометрических F – рядов в полиадических лиувиллевых точках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галочкин А. И. Об алгебраической независимости значений E – функций в некоторых трансцендентных точках // Вестн. Московского университета. Сер. 1, Математика, механика. 1970. № 5. С. 58-63.
2. Bombieri E. On G – functions // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 2. London: Academic Press, 1981. P. 1-68.
3. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа // М. Наука. 1987.
4. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2019, vol. 26, no. 2, pp. 175-184.
5. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика, механика. — Изд-во Моск. университета (М), 2015. № 1. С. 59-61.
6. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая, 2017. Том 81, № 1. С. 215-232 DOI.
7. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F -рядов // Доклады Академии наук. — Изд-во Наука (М), 2018. Том 483, № 1. С. 257-259.

8. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of Generalized Hypergeometric F – Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2020, vol. 27, no. 2, pp. 175-184.
9. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук. — Изд-во Наука (М), 2014. Том 459, № 6. С. 677-679.
10. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая, 2014. Том 78, № 6. С. 193-210
11. Чирский В. Г. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2011. Том 12, № 4. С. 129-133.
12. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Мат. заметки. 1990. Том 48, № 2. С. 123-127.
13. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук, математика. Наука (М). 2014. Том 459, № 6. С. 677-679.
14. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая. 2017. Том 81, выпуск 2. С. 215-232.
15. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей // Чебышевский сборник. 2016. Том 17, № 3. С. 180-185.
16. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, № 1. С. 254-264.
17. André Y. Séries Gevrey de type arithmétique. // Inst. Math., Jussieu.
18. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175-184.
19. Matala-Aho T., Zudilin W. Euler factorial series and global relations. // J. Number Theory. 2018. 186, pp.202-210.
20. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. Vol. XIII, №2. pp. 241-260.

REFERENCES

1. Galochkin A. I. 1970, “On algebraic independence of the values of E – functions at certain transcendental points“, *Moscow University Mathematics Bulletin*, iss. 1, no. 5, pp. 58-63.
2. Bombieri E., 1981, “On G – functions“, *Recent Progress in Analytic Number Theory*, Academic Press (London), vol. 2, pp. 1-68.
3. Shidlovskii, A. B. 1989, “Transcendental numbers“, *Studies in mathematics*, Walter de Gruyter (Berlin, New York), vol. 12
4. Chirskii V. G. 2019, “Product formula, global relations and polyadic integers“, *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2019 vol. 26, no. 2, pp. 175-184.

5. Chirskii, V. G. 2015, “Arithmetic properties of Euler series“, *Moscow University Mathematics Bulletin*, Allerton Press Inc.(United States), vol. 70, no. 1, pp. 41-43.
6. Chirskii, V. G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), vol. 81, no. 2, pp. 444-461.
7. Chirskii, V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric F-series“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 98, no. 3, pp. 589-591.
8. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of Generalized Hypergeometric F – Series // *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2020, vol. 27, no. 2, pp. 175-184.
9. Chirskii, V. G. 2014, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 90, no. 3, pp. 766-768.
10. Chirskii, V. G. 2014, “On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), vol. 78, no. 6, pp. 1244-1260.
11. Chirskii, V. G. 2011, “Estimates of linear forms and polynomials in polyadic numbers“, *Chebyshevskii Sb.*, 12:4, pp.129-133.
12. Chirskii, V. G. 1990, “Global relations“, *Mat. Zametki*, vol. 48, no. 2, pp. 123–127
13. Chirskii, V. G. 2014, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 90, no. 3, pp. 766-768.
14. Chirskii, V.,G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), vol. 81, no. 2, pp. 444-461.
15. Chirskii, V. G. 2016, “On transformations of periodic sequences“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 17, no. 3, pp. 191–196.
16. Chirskii, V. G. 2015, “Arithmetic properties of polyadic integers“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 1, pp. 254–264.
17. André Y. 2000, “Séries Gevrey de type arithmétique“, *Annals of Mathematics*, vol. 151, pp. 705-740
18. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series // *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175-184.
19. Matala-Aho T. & Zudilin W. 2018, “Euler factorial series and global relations“, *J. Number Theory*, vol. 186, pp. 202-210.
20. Bertrand, D., Chirskii, V. G. & Yebbou, Y. 2004, “Effective estimates for global relations on Euler-type series“, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. XIII, no. 2, pp. 241-260.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 22 Выпуск 2

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЕ СЕКРЕТАРИ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, декан факультета математики, физики и информатики, доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Артамонов Вячеслав Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологии и сервиса Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uniya.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Карташов Владимир Константинович — кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и физики Волгоградского государственного социально-педагогического университета.

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Касьянов Павел Олегович — доктор физико-математических наук, профессор Учебно-научного комплекса «Институт прикладного системного анализа» НТУ «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского» МОН и НАН Украины (Украина).

e-mail: kasyanov@i.ua

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).

e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).

e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — профессор, доктор математических наук, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 22 Issue 2

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University», Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

EXECUTIVE SECRETARIES

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

EDITORIAL BOARD

Artamonov Vyacheslav Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Higher Algebra, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Gvozdev Alexander Evgenievich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I.Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Kartashov Vladimir Konstantinovich — PhD in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Higher Mathematics and Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Volgograd State Socio-Pedagogical University».

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Professor of the Chair of Applied Mathematics and System Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra-Geometric Calculations, Ulyanovsk State University.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of Informatization of Education, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov».
e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Chair of Number Theory, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University»; Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).
e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).
e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Kasyanov Pavel Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Educational-scientific complex «Institute for applied system analysis», National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» of MES and NAS of Ukraine (Ukraine).
e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).

e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)

e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rahmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdullo Rudaki» (Tajikistan).

e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).

e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius — Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 22 Issue 2

От редакции	6
V. N. Chubarikov, A. Ghyasi. On several problems of the analytic number theory in the creative work of G. I. Arkhipov and S. M. Voronin	7
S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, M. N. Dobrovolskiy, O. V. Ivanchenko, D. A. Kamaev. Regression differentiation and regression integration of finite series	27
E. I. Deza, B. Mhanna. Quasi-metrics on graphs	48
A. V. Galatenko, A. E. Pankratiev, V. M. Staroverov. An algorithm for checking the existence of subquasigroups	76
N. V. Elizarov, S. V. Vostokov. Lubin–Tate extensions and Carlitz module over a projective line: an explicit connection	90
A. A. Zhukova, A. V. Shutov. On Gelfond-type problem for generalized Zeckendorf representations	104
A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii. Localization of the indicator optimal exponent of the Ramsey–Kass–Koopmans problem tending to infinity of the power utility function	121
M. Langarshoev. Jackson–Stechkin type inequalities and widths of classes of functions in the weighted Bergman space	135
E. V. Larkin, A. N. Privalov, Yu. I. Bogatyreva. Paired discrete competition with a free route choice	145
F. M. Malyshev. Completion of the proof of Brunn’s theorem by elementary means	160
B. Mhanna. Matrix of relative forest accessibility of the oriented path and the oriented cycle ..	183
I. A. Reshetnikov. Combinatorics on words, facrordynamics and normal forms	202
A. S. Samsonov. Arithmetic properties of direct product of p -adic fields elements, II	236
V. L. Usoltsev. The subdirect irreducibility and the atoms of congruence lattices of algebras with one operator and the symmetric main operation	257
V. L. Usoltsev. On rees closure in some classes of algebras with an operator	271
A. P. Fot, N. N. Dobrovol’skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol’skii, A. S. Podolyan. On a linear Diophantine equation and its applications	288
V. G. Chirskii. Arithmetic properties of values at polyadic Liouville points of Euler-type series with polyadic Liouville parameter	304
A. V. Shutov. Generalized Rauzy tilings and linear recurrence sequences	313

E. Yu. Yudenkova. Infinite linear and algebraic independence of values of F -series at polyadic Liouvillea points	334

MEMORABLE DATE

K. K. Andreev, G. N. Arzhantseva, V. A. Artamonov, V. S. Atabekyan, I. N. Balaba, N. V. Bezverkhny, A. A. Vdovina, V. S. Guba, A. E. Guterma, G. S. Deryabina, N. M. Dobrovolsky, M. V. Zaicev, A. L. Kanunnikov, A. A. Klyachko, O. V. Kulikova, O. V. Markova, V. G. Mikaelyan, M. V. Milentyeva, A. E. Minasyan, K. V. Mikhailovsky, A. V. Mikhalev, A. E. Pankratiev, Yu. G. Prokhorov, Yu. S. Semenov, D. A. Timashev, V. N. Chubarikov, I. A. Chubarov, E. E. Shirshova. Alexander Yuryevich Olshanskii (to the 75th anniversary)	347
Yu. V. Bobylev, N. M. Dobrovol'skii, V. A. Panin, A. P. Plotnikov, I. Yu. Rebrova, D. A. Nurgulyev, N. N. Dobrovol'skii. Yuri Filippovich Golovnev (to the 80th anniversary)	366

HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

M. M. Abdurazakov, O. Yu. Lyaginova, O. N. Tsvetkova. Computer science, Mathematics and Logic in the aspect of interdisciplinary and metasubject educational communication ..	373
E. V. Ageeva, E. V. Ageev, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev. Mathematical optimization of the process of electrodispergation of the waste of the alloy of the residence permit	389
Yu. V. Bobylev, T. G. Meshcheryakova, V. A. Panin. Computer simulation of the stimulation of electromagnetic vibrations of an open plasma resonator	402
R. R. Mukhin. From the history of the concept of structural stability	417
A. N. Kubanova, A. E. Gvozdev. History of powder metallurgy development and its application in modern technologies	437
N. N. Sergeev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, D. S. Klement'yev. On the importance of mathematical calculations in the study of structure characteristics and the physical and mechanical properties of 30XGSA steel, smelted on a different charge	449
S. L. Tolokonnikov, V. A. Maksimenko. On the crater of an ejection formed by an explosion of two flat surface cord charges	472

BRIEF MESSAGE

Ke Gong. Note on a theorem of Davenport	484
I. Sh. Jabbarov, L. G. Ismailova. On extremality of affine image of topological product of some varieties	490
A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii. Restrictions on the values of the consumption function in the Ramsey–Kass–Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function	501
R. Mohseni. Symmetries of Einstein–Weyl manifolds with boundary	510
A. Kh. Munos Vaskes. Arithmetic properties of the values some hypergeometric F -series	519

A. S. Samsonov. One application on hypergeometric series and values of g -adic functions algebraic independence investigation methods	528
E. Yu. Yudenkova. Values of hypergeometric F -series at polyadic Liouvillea points	536
РЕДКОЛЛЕГИЯ	543
THE EDITORIAL BOARD	547
TABLE OF CONTENTS	551