ISSN 2226-8383

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический математический журнал

www.chebsbornik.ru

XXII

Выпуск 1 (77)

2021

ISSN 2226-8383

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

ТОМ XXII

ВЫПУСК 1 (77)

Тула
2021

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции:
300026, г. Тула, пр. Ленина, 125.
Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru
URL: http://www.chebsbornik.ru

Издается с 2001 года.
Выходит 6 раз в год.
Свидетельство о регистрации
СМИ: ПИ № ФС77-80049

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируется и/или реферируется: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ Математика, Mathematical Reviews, РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Министерства просвещения Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, Тульского государственного университета

12+

СОДЕРЖАНИЕ

Том 22 Выпуск 1

От редакции

Данный выпуск Чебышевского сборника
посвящен юбилеям выдающихся русских математиков:

80-летию профессора МГУ им. М. В. Ломоносова
Александра Васильевича Михалёва

и 70-летию профессора МГУ им. М. В. Ломоносова,
академика РАН, академика РАО
Алексея Львовича Семёнова

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-8-26

К 80-летию Александра Васильевича Михалёва[1]

И. Н. Балаба, Е И. Бунина, С. Т. Главацкий, И. Б. Кожухов

Ирина Николаевна Балаба — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ibalaba@mail.ru
Елена Игоревна Бунина — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: helenbunina@gmail.com
Сергей Тимофеевич Главацкий — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: glavatsky_st@mail.ru
Игорь Борисович Кожухов — доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена юбилею Александра Васильевича Михалёва, признанного специалиста в области математики и информатики. Он внес значительный вклад в развитие советской и российской науки, создал одну из крупнейших научных математических школ. Более ста его учеников стали кандидатами и докторами физико-математических наук, активно работают в системе высшего образования, проводят научные исследования, занимают высокие административные должности.

Александр Васильевич опубликовал около 500 работ, среди которых научные и обзорные статьи, монографии, учебники и учебные пособия, перевел на русский язык несколько фундаментальных научных монографий. В статье дана краткая характеристика его крупных научных достижений, представлен список избранных публикаций.

Ключевые слова: теория колец, линейные и унитарные группы, элементарная эквивалентность, компьютерная алгебра.

Библиография: 107 названий.

Для цитирования:
И. Н. Балаба, Е И. Бунина, С. Т. Главацкий, И. Б. Кожухов. К 80-летию Александра Васильевича Михалёва// Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 8–26.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ «Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-8-26

To the 80th anniversary of Alexander Vasilyevich Mikhalev

I. N. Balaba, E. I. Bunina, S. T. Glavatsky, I. B. Kozhukhov

Irina Nikolaevna Balaba — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ibalaba@mail.ru
Elena Igorevna Bunina — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: helenbunina@gmail.com
Sergei Timofeevich Glavatsky — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: glavatsky_st@mail.ru
Igor' Borisovich Kozhukhov — doctor of physical and mathematical sciences, National Research University of Electronic Technology; Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail:kozhuhov_i_b@mail.ru

Abstract

The article is dedicated to the anniversary of Alexander Vasilyevich Mikhalev one of the recognized specialist in mathematics and computer science. He made a significant contribution to the development of Soviet and Russian science, created one of the largest scientific mathematical schools. More than one hundred of his students became candidates and doctors of physical and mathematical sciences, they actively work in the system of higher education, carry out scientific research, and hold high administrative positions.

Alexander Vasilyevich has published about 500 works, including scientific and review articles, monographs and textbooks, translated into Russian several fundamental scientific monographs. The article provides a brief description of his major scientific achievements and presents a list of selected publications.

Keywords: ring theory, linear and unitary groups, elementary equivalence, computer algebra.

Bibliography: 107 titles.

For citation:
I. N. Balaba, E. I. Bunina, S. T. Glavatsky, I. B. Kozhukhov, 2021, "To the 80th anniversary of Alexander Vasilyevich Mikhalev" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 8–26.

Биография

Александр Васильевич Михалёв родился 8 ноября 1940 года в г. Брянске. Окончив школу с золотой медалью, он в 15 лет поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. С этого момента вся дальнейшая жизнь Александра Васильевича связана с Московским университетом.

В 1961 году, окончив университет с красным дипломом (все оценки в зачетной книжке были отличными), он продолжил обучение в аспирантуре по кафедре высшей алгебры под руководством профессора Льва Анатольевича Скорнякова. В 1965–1966 годах Александр Васильевич прошел годичную стажировку в Колумбийском университете в Нью Йорке под руководством С. Эйленберга и С. Маклейна, признанных специалистов в теории категорий и гомологической алгебре. С 1966 года он начал работать на кафедре высшей алгебры в должности ассистента. В 1967 году защитил кандидатскую диссертацию «Изоморфизмы полугрупп эндоморфизмов модулей», а в 1990 году – докторскую диссертацию «Эндоморфизмы модулей и мультипликативное строение колец». С 1992 года по настоящее время А. В. Михалёв — профессор кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ.

Трудовой путь Александра Васильевича в МГУ был исключительно насыщенным: он был заведующим лабораторией вычислительных методов механико-математического факультета МГУ (1979—2014); генеральным директором Центра новых информационных технологий МГУ с момента основания в 1989 году по 2013 год; проректором МГУ (1999—2009); руководителем-организатором и деканом факультета дополнительного образования (1999—2013). С 2013 года по настоящее время является заведующим кафедрой теоретической информатики механико-математического факультета МГУ.

А. В. Михалёв — заслуженный деятель науки РФ (2003), почетный работник высшего профессионального образования РФ (2005), заслуженный профессор МГУ (2005), лауреат премии Совета Министров СССР (1982), лауреат премии Президента РФ в области образования (2005), лауреат премии имени М.В. Ломоносова (2004).

Область научных интересов А. В. Михалёва весьма обширна. В алгебре это теория колец, гомологическая алгебра, алгебраическая K-теория, линейные группы, полугруппы, топологическая алгебра и упорядочения, дифференциальная алгебра, коммутативная и компьютерная алгебра. В информатике: теоретическая информатика, теория кодирования и криптография. В других областях – алгебраическая теория меры, теория моделей и основания математики, математическое моделирование. Им опубликовано около 500 работ, среди которых научные и обзорные статьи, монографии, учебники, учебные пособия, практикумы и сборники задач.

В списке литературе приведены только наиболее значительные из них.

Александр Васильевич является признанным авторитетом в математике и информатике. Крупными научными достижениями А. В. Михалёва являются:

- решение проблемы Бэра–Капланского об описании изоморфизмов и антиизоморфизмов колец и полугрупп эндоморфизмов модулей, близких к свободным;
- решение проблемы Шрайера–Ван дер Вардена об автоморфизмах линейных и унитарных групп над кольцами (с И. З. Голубчиком);
- развитие мультипликативной классификации колец;
- построение теории ортогонально полных алгебраических систем с приложениями в теории колец и модулей (с К. И. Бейдаром);
- решение проблемы Херстейна о лиевских изоморфизмах первичных колец с инволюцией (с К. И. Бейдаром, У. Мартиндейлом);

- развитие теории размерностных дифференциальных и разностных многочленов Гильберта–Эйнштейна–Колчина (с Е. В. Панкратьевым и А. В. Левиным);
- построение гомологической классификации моноидов (с Л. А. Скорняковым и У. Кнауэром);
- построение продолжений топологий с топологических колец и топологических пространств переменных на кольца многочленов, групповые и полугрупповые кольца (с В. И. Арнаутовым);
- создание теории рекуррентных последовательностей многих переменных над кольцами и модулями (с А. А. Нечаевым);
- решение проблемы Рисса–Радона об интегральном представлении мер на произвольном топологическом пространстве (с В. К. Захаровым);
- развитие теории математических систем и уровней основания математики (с В. К. Захаровым);
- решение проблемы Мальцева об элементарной эквивалентности для линейных и алгебраических групп (с К. И. Бейдаром и Е. И. Буниной).

А. В. Михалёвым создана одна из крупнейших научных математических школ по алгебре, под его руководством подготовлено и защищено 112 диссертаций, в том числе 16 докторских, в которых решены известные математические проблемы и созданы новые научные направления.

Приведем темы докторских диссертаций учеников Александра Васильевича, чтобы показать, насколько широк спектр его интересов:

- Туганбаев Аскар Аканович, «Дистрибутивные кольца и модули» (1990);
- Бейдар Константин Игоревич, «Радикалы, ортогональная полнота и строение колец» (1991);
- Дубровин Николай Иванович, «Некоммутативные арифметические кольца» (1992);
- Тюкавкин Дмитрий Викторович, «Условия конечности в регулярных кольцах» (1993);
- Голубчик Игорь Захарович, «Линейные группы над ассоциативными кольцами» (1998);
- Кожухов Игорь Борисович, «Условия конечности в полугруппах, полугрупповых кольцах и полигонах» (2000);
- Тищенко Александр Владимирович, «Полугрупповые многообразия и сплетение полугрупп» (2000);
- Пунинская Вера Александровна, «Модули над кольцами с условиями конечности теоретико-модельного типа» (2001);
- Белов Алексей Яковлевич, «Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы» (2002, совместно с Латышевым В.Н);
- Чеботарь Михаил Александрович, «Функциональные тождества в кольцах и их приложения» (2004, совместно с Ивановым В.И.);
- Чермных Василий Владимирович, «Функциональные представления полуколец и полумодулей» (2007);

- Гутерман Александр Эмилевич, «Фробениусовы эндоморфизмы пространств матриц» (2009);
- Табаров Абдулло Хабибуллоевич, «Тождества и линейность квазигрупп» (2009);
- Людковский Сергей Викторович, «Представления вполне несвязных групп преобразований неархимедовых многообразий» (2010);
- Бунина Елена Игоревна, «Автоморфизмы и элементарная эквивалентность групп Шевалле и других производных структур» (2010);
- Балаба Ирина Николаевна, «Градуированные кольца и модули» (2012).

За долгие годы педагогической работы им прочитаны основные курсы лекций «Алгебра», «Линейная алгебра», «Высшая алгебра» для студентов механико-математического факультета. Разработаны и прочитаны специальные курсы «Теория колец», «Кольца и модули», «Топологические кольца и модули» «Теория колец и гомологическая алгебра «Алгебраическая К-теория», «Компьютерная алгебра», «Компьютерная линейная алгебра», «Дополнительные главы теоретической информатики, алгебраические структуры», «Теория категорий и ее приложения», «Квантовая информатика».

Александр Васильевич является руководителем (соруководителем) специальных научных семинаров: «Научно-исследовательский семинар по алгебре», «Кольца, модули и матрицы», «Теоретическая информатика», «Математические методы информатики».

Он является членом Ученого Совета механико-математического факультета МГУ, двух диссертационных советов при МГУ, членом правления Московского математического общества, многие годы являлся членом Учёного Совета МГУ и Экспертного Совета ВАК РФ.

А. В. Михалёв является главным редактором серии монографий, учебников и учебных пособий «Основы информатики и математики» и журнала «Фундаментальная и прикладная математика», членом редколлегии ведущих российских и международных математических журналов: «Труды семинара им. И. Г. Петровского», «Математические вопросы криптографии», «Интеллектуальные системы. Теория и приложения», «Чебышевский сборник», «Algebra and Discrete Mathematics», «Sarajevo Journal of Mathematics», «Asian–European Journal of Mathamatics», «Groups-Complexity-Cryptology», «Discussiones Mathematicae — General Algebra and Applications», «Eurasian Mathematical Journal». Многие годы работает в РЖ «Математика» ВИНИТИ РАН.

В настоящее время Александр Васильевич полон творческих сил и научных идей. Желаем ему крепкого здоровья, дальнейших успехов в многогранной научной и педагогической деятельности и удачи во всех начинаниях.

СПИСОК ИЗБРАННЫХ ТРУДОВ А. В. МИХАЛЁВА

Статьи в научных журналах

1. А. В. Михалёв. Специальные структурные пространства колец // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, №2. С. 259–261.
2. А. В. Михалёв. Об изоморфизме колец непрерывных эндоморфизмов // Сиб. матем. журн. 1963. Т. 4, №1. С. 177–186.
3. А. В. Михалёв. Изоморфизмы полугрупп эндоморфизмов модулей // Алгебра и логика. Семинар. 1966. Т. 5, №5. С. 59–67.

4. А. В. Михалёв. Изоморфизмы полугрупп эндоморфизмов модулей. II // Алгебра и логика. Семинар. 1967. Т. 6, №2. С. 35–47.

5. И. С. Клейн, А. В. Михалёв. Ортогональная группа Стейнберга над кольцом с инволюцией // Алгебра и логика. Семинар. 1970. Т. 9, №2. С. 259–261.

6. И. С. Клейн, А. В. Михалёв. Унитарная группа Стейнберга над кольцом с инволюцией// Алгебра и логика. Семинар. 1970. Т. 9, №5. С. 510–519.

7. А. В. Михалёв, М. А. Шаталова. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Матем. сб. 1970. Т. 81(123), №4. С.600–609.

8. Л. Н. Васерштейн, А. В. Михалёв. О нормальных подгруппах ортогональной группы над кольцом с инволюцией // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, №6. С. 629–632.

9. А. В. Михалёв, М. А. Шаталова. Проективные и свободные упорядоченные модули// Матем. заметки. 1972. Т. 11, №1. С. 41–52.

10. А. В. Михалёв, М. А. Шаталова. Свободные упорядоченные модули// Матем. заметки. 1972. Т. 12, №4. С.477–487.

11. U. Knauer, A.V. Mikhalev. Endomorphism monoids of acts over monoids // Semigroup Forum. 1973. Vol. 6, №1. P. 50-58.

12. I.Z. Golubchik, A.V. Mikhalev. A note on varieties of semiprime rings with semigroup identities // J. Algebra. 1978. Vol. 54, №1. P. 42-45.

13. И. З. Голубчик, А. В. Михалёв. Обобщенные групповые тождества в классических группах // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 6(216). С. 155–156

14. K. I. Beidar, A. V. Mikhalev, Salavova K. Generalized identities and semiprime rings with involution // Math. Z. 1981. Vol. 178, no. 1. P. 37—62.

15. В. И. Арнаутов, А. В. Михалёв. Топологии кольца многочленов и топологический аналог теоремы Гильберта о базисе // Матем. сб. 1981. Т. 116 (158), №4(12). С.467–482.

16. И. З. Голубчик, А. В. Михалёв. Обобщенные групповые тождества в классических группах // Модули и алгебраические группы, Зап. научн. сем. ЛОМИ 114, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1982, 96–119

17. И. З. Голубчик, А. В. Михалёв. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1983. Т. 132. С. 97–109.

18. И. З. Голубчик, А. В. Михалёв. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1983, № 3. С. 61–72.

19. В. И. Арнаутов, А. В. Михалёв. Достаточные условия для продолжения топологий группы и кольца на их групповое кольцо // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1983, № 5. С. 25–33

20. К. И. Бейдар, А. В. Михалёв. Ортогональная полнота и минимальные первичные идеалы // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1984. Вып. 10. С. 227—234.

21. И. З. Голубчик, А. В. Михалёв. Элементарная подгруппа унитарной группы над PI-кольцом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1985, № 1. С. 30–36.

22. Бейдар К. И., Михалёв А. В. Ортогональная полнота и алгебраические системы // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 6 (246). С. 79—115.

23. В. И. Арнаутов, А. В. Михалёв. К вопросу о продолжении топологий группы и кольца на их групповое кольцо // Успехи мат. наук. 1985. Т.40, № 4(244). С. 135–136.

24. А. В. Михалёв. Ортогонально полные многосортные алгебраические системы // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 6. С. 1304–1308.

25. А. В. Михалёв. Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Матем. сб. 1988. Т. 135(177), № 2. С. 210–224.

26. А. В. Михалёв. Изоморфизмы колец эндоморфизмов модулей, близких к свободным // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1989, № 2. С. 20–27.

27. В. И. Арнаутов, А. В. Михалёв. Компактные группы и их групповые кольца // Матем. заметки. 1989. Т. 46, № 6. С. 3–9; Math. Notes, 46:6 (1989), 891–895.

28. А. В. Михалёв. Продолжение мультипликативных изоморфизмов полупервичных колец на их ортогональные пополнения // Теория Галуа, кольца, алгебраические группы и их приложения, Сборник статей, Тр. МИАН СССР, 183, Наука. Ленинградское отд., Л., 1990, 145–148.

29. K. I. Beidar, A. V Mikhalev. On Mal'cev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Proc. Int. Conf. on Algebra (Novosibirsk, 1989). Part 1. (Contemp. Math.; Vol. 131, Part 1). Providence: Amer. Math. Soc., 1992. P. 29—35.

30. A. B. Levin, M. V. Kondratieva, A. V. Mikhalev, E. V. Pankratiev. Computation of dimension polynomials // Internat. J. Algebra Comput. 1992. Vol. 2, no. 2. P. 117—137.

31. A.B. Levin, A.V. Mikhalev. Dimension polynomials of filtered differential G-modules and extensions of differential G-fields // Contemporary Mathematics. 1992 Vol. 131, no. 2. P. 469—489.

32. K. I. Beidar, A. V. Mikhalev. The method of orthogonal completeness in the structure theory of rings // J. Math. Sci. 1995. Vol. 73, no. 1. P. 1–46.

33. V. L. Kurakin, A. S. Kuzmin, A. V. Mikhalev, A. A. Nechaev. Linear recurring sequences over rings and modules // J. Math. Sci. 1995. Vol. 76, no. 6. P. 2793-2915.

34. К. И. Бейдар, А. В. Михалёв. Антиизоморфизмы колец эндоморфизмов модулей и антиэквивалентность Мориты // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, № 1 (301). С. 187—188.

35. К. И. Бейдар, А. В. Михалёв. Обобщённые полиномиальные тождества и кольца, являющиеся суммами двух подколец // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 1. С. 3—11.

36. К. И. Бейдар, А. В. Михалёв., Г. Е. Пунинский. Логические аспекты теории колец и модулей // Фундам. и прикл. мат. 1995. Т. 1, вып. 1. С. 1—62.

37. A.V. Mikhalev, A.A. Nechaev. Linear recurring sequences over modules // Acta Applicandae Mathematica. 1996. Vol. 42. P. 161–202.

38. В. К. Захаров, А. В. Михалёв. О концепции математической системы // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4, вып. 3. С. 927–935.

39. А. С. Кузьмин, В. Л. Куракин, В. Т. Марков, А. В. Михалёв, А. А. Нечаев. Коды и рекурренты над конечными кольцами и модулями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1999, № 5. С. 18–31.

40. В. К. Захаров, А. В. Михалёв. Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63, №5 . С. 37–82.

41. В. К. Захаров, А. В. Михалёв. Двусортная теория классов и множеств, допускающая множества высказывательных формул // Фундамент. и прикл. матем. 1999 Т. 5, вып. 2. С. 417–435.

42. Е. И. Бунина, А. В. Михалёв. Элементарная эквивалентность линейных и алгебраических групп // Фундамент. и прикл. матем. 2000. Т. 6, вып. 3. С. 707–722.

43. В. К. Захаров, А. В. Михалёв. Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства. II // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66, вып.6. С. 3–18.

44. И. Н. Балаба, С. В. Зеленов, С. В. Лимаренко, А. В. Михалёв. Теоремы плотности для градуированных колец // Фундамент. и прикл. матем. 2003. Т. 9, вып.1. С. 27–49.

45. А. Э. Гутерман, А. В. Михалёв. Общая алгебра и линейные отображения, сохраняющие матричные инварианты // Фундамент. и прикл. матем. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 83–101.

46. К. И. Бейдар, А. В. Михалёв, М. А. Чеботарь. Функциональные тождества в кольцах и их приложения // Успехи мат. наук. 2004. Т.59, № 3(357). С. 3–30.

47. Е. И. Бунина, А. В. Михалёв. Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых p-групп // Фундамент. и прикл. матем.2004. Т.10, №2. С. 135–224.

48. А. В. Михалёв, И. А. Пинчук. Конформные алгебры Стейнберга // Матем. сб. 2005. Т. 196, №5. С. 31–52.

49. А. В. Михалев, И. А. Пинчук. Универсальные центральные расширения конформных алгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2005, № 1. С. 26–31.

50. Е. И. Бунина, А. В. Михалёв. Элементарные свойства категории полигонов над моноидом // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, №6. С. 687–709.

51. А. В. Михалёв, И. А. Пинчук. Подъем автоморфизмов и дифференцирований конформных супералгебр Ли на их центральные расширения// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2007. Т. 26. С. 241–254.

52. А. С. Выдрин, А. В. Михалёв. Стохастические матрицы и анализ защищённости автоматизированных систем // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т. 13, вып.1. С. 61–99.

53. Кондратьева М. В., Михалёв А. В., Панкратьев Е. В. Граница Якоби для систем алгебраических дифференциальных уравнений // Фундамент. и прикл. мат. 2008. Т. 14, вып. 4. С. 151—166.

54. В. Гоулд, А. В. Михалёв, Е. А. Палютин, А. А. Степанова. Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14, вып. 7. С. 163–110.

55. И. Н. Балаба, А. В. Михалёв. Изоморфизмы и антиизоморфизмы колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Докл. РАН. 2009 Т.425, №5. С. 583–586/

56. А. В. Михалёв, И. А. Пинчук. Универсальные центральные расширения конформных алгебр Ли. Часть 2: суперслучай // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2010, № 1. С. 36–41.

57. А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, А. А. Чеповский. Примитивные элементы свободных коммутативных и антикоммутативных неассоциативных алгебр // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2010. Т. 10, №4. С. 105–124.

58. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, Т. В. Родионов. Проблема Рисса–Радона–Фреше характеризации интегралов // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65, №4(394). С. 153–178.

59. А.С. Аткарская, Е.И. Бунина, А.В. Михалёв. Изоморфизмы общих линейных групп над ассоциативными кольцами, градуированными абелевой группой // Доклады Академии наук. 2011. Т. 437, № 3. С. 295-296.

60. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, Т. В. Родионов. Характеризация интегралов по всем радоновским мерам с помощью индексов ограниченности // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17, вып. 1. С. 107–126.

61. И. Н. Балаба, А. Л. Канунников, А. В. Михалёв. Кольца частных градуированных ассоциативных колец. I. // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т.17, вып. 2. С. 3–74.

62. А. В. Михалёв, А. А. Нечаев. Цикловые типы семейств полилинейных рекуррент и датчики псевдослучайных чисел // Матем. вопр. криптогр. 2014. Т. 5, № 1. С. 95–125.

63. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, Т. В. Родионов. Постклассические семейства функций, присущие дескриптивным и прескриптивным пространствам // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19, вып. 6. С. 77–113.

64. Бунина Е.И., Михалёв А.В., Ройзнер М.А. Критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов и колец эндоморфизмов абелевых p-групп // Доклады Академии наук. 2014. Т. 457, вып. 1. С. 11-12.

65. А. С. Кузьмин, В. Т. Марков, А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, А. А. Нечаев. Криптографические алгоритмы на группах и алгебрах // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Т. 20, вып. 1. С. 205–222.

66. Е. И. Бунина, А. В. Михалёв, И. О. Соловьёв. Элементарная эквивалентность стабильных линейных групп над локальными коммутативными кольцами с 1/2" // Фундамент. и прикл. матем. 2016. Т. 21, вып. 1. С. 65–78.

67. Г. Г. Аракелов, А. В. Грибов, А. В. Михалёв. Прикладная гомоморфная криптография: примеры // Фундамент. и прикл. матем. 2016. Т. 21, вып. 3. С. 25–38.

68. В. Т. Марков, А. В. Михалёв, А. А. Нечаев. Неассоциативные алгебраические структуры в криптографии и кодировании // Фундамент. и прикл. матем. 2016. Т. 21, вып. 4. С. 99–124.

69. A.V. Mikhalev, I.Z. Golubchik. Isomorphisms of the linear groups $GL_2(R)$ over associative rings R // Journal of Algebra, 2017. Vol. 500. P. 691-708.

70. I.N. Balaba, A.V. Mikhalev. Graded division rings // Sarajevo J. of Math. 2018. Vol. 14(27), no. 2. P. 167–174.

71. А. В. Михалёв, Е. Е. Ширшова. Первичный радикал направленных псевдоупорядоченных колец // Фундамент. и прикл. матем. 2019. Т. 22, вып. 4. С. 147–166.

72. V. T. Markov, A. V. Mikhalev, A. A. Nechaev. Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding // J. Math. Sci. 2020, no. 24. P. 94-109.

Обзорные статьи

73. А. В. Михалёв, Л. А. Скорняков. Модули // Итоги науки. Сер. Мат. Алгебра. Топол. Геом. 1968. М.: ВИНИТИ, 1970. С. 57–100.

74. А. Е. Залесский, А. В. Михалёв. Групповые кольца // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. М.: ВИНИТИ, 1973. Том. 2. С. 5–118.

75. А. В. Михалёв. Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. 1974. Том. 12. М.: ВИНИТИ, 1974, С. 51–76.

76. А. В. Михалёв, Л. А. Скорняков. Модули // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. Том. 14. М.: ВИНИТИ, 1976. С. 57–190.

77. В. Т. Марков, А. В. Михалёв, Л. А. Скорняков, А. А. Туганбаев. Модули // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. Том. 19. М.: ВИНИТИ, 1981. С. 31–134.

78. M. Kilp, U. Knewer, A.V. Mikhalev, L. A. Skornyakov. Acts over monoids // Oldenburg University Oldenburg. 1982. P. 1-42.

79. В. Т. Марков, А. В. Михалёв, Л. А. Скорняков, А. А. Туганбаев. Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 21. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 183–254.

80. К. И. Бейдар, В. Н. Латышев, В. Т. Марков, А. В. Михалёв, Л. А. Скорняков, А. А. Туганбаев. Ассоциативные кольца // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 22. М.: ВИНИТИ, 1984. С. 3–115.

81. А. В. Михалёв, Е. В. Панкратьев. Дифференциальная и разностная алгебра // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 25. М.: ВИНИТИ, 1987. С. 67–139.

82. А. В. Михалёв, А. П. Мишина. Бесконечные абелевы группы: методы и результаты // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1, вып.2. С. 319–375.

83. Е. М. Вечтомов, А. В. Михалёв, В. В. Сидоров. Полукольца непрерывных функций // Фундамент. и прикл. матем. 2016. Т. 21, вып.2. С. 53–131.

84. Е. А. Благовещенская, А. В. Михалёв. Влияние теоремы Бэра-Капланского на развитие теории групп, колец и модулей // Фундамент. и прикл. матем. 2020. Т. 23, вып. 3. С. 16-178.

85. И. Б. Кожухов, А. В. Михалёв. Полигоны над полугруппами: избранные вопросы структурной теории // Фундамент. и прикл. матем. 2020. Т. 23, вып. 3. С. 81-140.

Монографии

86. В. И. Арнаутов, М. И. Водинчар, А. В. Михалёв. Введение в теорию топологических колец и модулей. Кишинев: Штиинца, 1981. 175 с.

87. В. И. Арнаутов, М. И. Водинчар, С.Т. Главацкий, А.В. Михалёв. Конструкции топологических колец и модулей. Кишинев: Штиинца, 1988. 170 с.

88. K. I.Beidar, W. S. Martindale, III, A. V. Mikhalev. Rings with Generalized Identities. New York: Marcel Dekker, 1996. 522 p. — (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 196).

89. V. I. Arnautov, S.T. Glavatsky, A.V. Mikhalev. Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules. New York: Marcel Dekker, 1996. 512 p. – (Monographs Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 197).

90. M. V.Kondratieva, A. B. Levin, A. V. Mikhalev, E. V. Pankratiev. Differential and Difference Dimension Polynomials. Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. 422 p.

91. M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev. Monoids, acts and categories with applications to wreath products and graphs: a handbook for students and researchers. Berlin; New York: de Gruyter, 2000. 529 p. (De Gruyter exposition in mathematics, vol. 29).

92. П. А. Крылов, А.В. Михалёв, А.А. Туганбаев. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск: Том. гос. ун-т, 2002. 451 с.

93. P. A. Krylov, A.V. Mikhalev, A.A. Tuganbaev. Endomorphism Rings of Abelian Groups. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2003. 442 p. – (Algebra and Applications, vol. 2)

94. К. И. Бейдар, А. В. Михалёв, М. А. Чеботарь. Тождества в кольцах. Тула: Издательство ТулГУ, 2003. 122 с.

95. П. А. Крылов, А. В. Михалёв, А. А. Туганбаев. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006. 512 с.

96. Е. И. Бунина, А. В. Михалёв, А. Г. Пинус. Элементарная и близкие к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр. М.: МЦНМО, 2015. 360 с.

97. V. K. Zakharov, T.V. Rodionov, A. V. Mikhalev. Sets, Functions, Measures, Volume 2: Fundamentals of Functions and Measure Theory. Berlin: de Gruyter, 2018. 478 p. – (De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 68/2).

Учебники и учебные пособия

98. Практикум по алгебре (под ред. Н. С. Бахвалова, А. И. Кострикина). М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 91 с.

99. Сборник задач по алгебре. Выпуск 4. Дополнительные главы алгебры. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 71 с.

100. А. В. Михалев, Е. В. Панкратьев. Компьютерная алгебра. Вычисления в дифференциальной и разностной алгебре. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 97 с.

101. Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry (Edited by A.I.Kostrikin). Gordon and Breach United Kingdom, 1996. 464 p.

102. Математическое обеспечение автоматизированных комплексов обучения, тренировки и тестирования специалистов по управлению динамическими системами. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1996. 57 с.

103. A. V. Mikhalev, G. F. Pilz. The Concise Handbook of Algebra. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 618 p.

104. В. В. Борисенко, В. С. Люцарев, А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, Е. В. Панкратьев, А. М. Чеповский, В. Г. Чирский. Преподавание информатики и математических основ информатики для непрофильных специальностей классических университетов. М.: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2005. 144 с.

105. А.В. Михалёв, А.А. Михалёв. Начала алгебры, часть 1. М.: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2005. 258 с.

106. Сборник задач по алгебре под редакцией А.И. Кострикина, М.: МЦНМО, 2009. 404 с.

107. А.В. Михалёв, А.А. Михалёв. Алгебра матриц и линейные пространства. Ч. 1. М.: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016. 146 с.

LIST OF SELECTED WORKS BY A. V. MIKHALEV

Articles in scientific journals

1. Mikhalev, A. V. 1963, “Special structure spaces of rings“, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 150, no. 2, pp. 259–261.

2. Mikhalev, A. V. 1963, “An isomorphism of rings of continuous endomorphisms“, *Sibirsk. Mat. Ž.*, vol. 4, pp. 177–186.

3. Mikhalev, A. V. 1966, “Isomorphisms of semigroups of endomorphisms of modules“, *Algebra i Logika Sem.*, vol. 5, no. 5, pp. 59–67.

4. Mikhalev, A. V. 1967, “Isomorphisms of semigroups of endomorphisms of modules“. II , *Algebra i Logika Sem.*, vol. 6, no. 2, pp. 35–47.

5. Kleĭn, I. S., Mikhalev, A. V. 1970, “The orthogonal Steinberg group over a ring with involution“), *Algebra i Logika Sem.*, vol. 9, no. 2, pp. 145–166.

6. Kleĭn, I. S., Mikhalev, A. V. 1970, “The unitary Steinberg group over a ring with involution“, *Algebra i Logika Sem.*, vol. 9, no. 5, pp. 510–519.

7. Mikhalev, A. V., Shatalova, M. A. 1970, “Automorphisms and anti-automorphisms of the semigroup of invertible matrices with non-negative elements“, *Math. USSR-Sb.*, vol. 10, no. 4, pp. 547–555.

8. Vaseršteĭn, L. N., Mikhalev, A. V. 1970, “The normal subgroups of the orthogonal group over a ring with involution“, *Algebra i Logika*, vol. 9, no. 6, pp. 629–632.

9. Mikhalev, A. V., Shatalova, M. A. 1972, “Projective and free ordered modules“, *Math. Notes*, vol. 11, no. 1, pp. 29–35.

10. Mikhalev, A. V., Shatalova, M. A. 1972, “Free ordered modules“, *Math. Notes*, vol. 12, no. 4, pp. 720–726.

11. Knauer, U., Mikhalev, A. V. 1973, “Endomorphism monoids of acts over monoids“, *Semigroup Forum*, vol. 6, no.1, pp. 50-58.

12. Golubchik, I. Z., Mikhalev, A. V. 1978, “A note on varieties of semiprime rings with semigroup identities“, *J. Algebra*, vol. 54, no.1, pp. 42-45.

13. Golubchik, I. Z., Mikhalev, A. V. 1980, “Generalized group identities in the classical groups“, *Russian Math. Surveys*, vol. 35, no.6, pp. 89–90.

14. Beidar, K. I., Mikhalev, A. V., Salavova, K. 1981, “Generalized identities and semiprime rings with involution“, *Math. Z*, vol. 178, no. 1, pp. 37—62.

15. Arnautov, V. I., Mikhalev, A. V. 1983, “Topologies on a ring of polynomials, and a topological analogue of the Hilbert basis theorem“, *Math. USSR-Sb*, vol.44, no.4, pp. 417–430.

16. Golubchik, I. Z., Mikhalev, A. V. 1984, “Generalized group identities in classical groups“, *J. Soviet Math.*, vol. 27, no.4, pp. 2904–2918.

17. Golubchik, I. Z., Mikhalev, A. V. 1983, “Isomorphisms of unitary groups over associative rings“, *Modules and algebraic groups, 2. Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* , vol. 132, pp. 97–109.

18. Golubchik, I. Z., Mikhalev, A. V. 1983, “Isomorphisms of the general linear group over an associative ring“, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, no. 3, pp. 61–72.

19. Arnautov, V. I., Mikhalev, A. V. 1983, “Sufficient conditions for extension of topologies of a group and a ring to their group ring“, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, no. 5, pp. 25–33.

20. Beidar, K. I., Mikhalev, A. V. 1984, “Orthogonal completeness and minimal prime ideals“, *Tr. Sem. Petrovsk*, no. 10, pp. 227–234.

21. Golubchik, I. Z., Mikhalev, A. V. 1985, “Elementary subgroup of the unitary group over PI-ring“, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, no. 1, pp. 30–36.

22. Beidar, K. I., Mikhalev, A. V. 1985, “Orthogonal completeness and algebraic systems“, *Usp. Mat. Nauk*, vol. 40, no. 6 (246), pp.79–115.

23. Arnautov, V. I., Mikhalev, A. V. 1985, “On the problem of extending the topologies of a group and a ring to their group ring“, *Russian Math. Surveys*, vol. 40, no.4, pp.7151–152.

24. Mikhalev, A. V. 1986, “Orthogonally complete many-sorted algebraic systems“, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 289, no.6, pp. 1304–1308.

25. Mikhalev, A. V. 1989, “Multiplicative classification of associative rings“, *Math. USSR-Sb*, vol. 63, no.1, pp. 205–218.

26. Mikhalev, A. V. 1989, “Isomorphisms of endomorphism rings of modules that are close to free)“, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* , no. 2, pp. 20–27. (Translation in *Moscow Univ. Math. Bull.*, 1989, vol. 44, no. 2,pp. 28–38.)

27. Arnautov, V. I., Mikhalev, A. V. 1989, “Compact groups and their group rings“, *Math. Notes*, vol. 46, no.1, pp. 891–895.

28. Beidar, K. I., Mikhalev, A. V. 1989, “On Mal’cev’s theorem on elementary equivalence of linear groups“, *Proc. Int. Conf. on Algebra* (Novosibirsk, 1989). Part 1. (Contemp. Math.; Vol. 131, Part 1). Providence: Amer. Math. Soc., 1992, pp. 29—35.

29. Mikhalev, A. V. 1990, “Extension of multiplicative isomorphisms of semiprime rings to their orthogonal completions“, *Galois theory, rings, algebraic groups and their applications. Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 183, pp. 145–148. (Translation in *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1991, no. 4, pp. 171–175.

30. Levin, A. B., Kondratieva, M. V., Mikhalev, A. V., Pankratiev, E. V. 1992, "Computation of dimension polynomials", *Internat. J. Algebra Comput*, vol. 2, no. 2, pp. 117—137.

31. Levin, A.B., Mikhalev, A.V. 1992, "Dimension polynomials of filtered differential G-modules and extensions of differential G-fields", *Contemporary Mathematics*, vol. 132, no. 2, pp. 469—489.

32. Beidar, K. I., Mikhalev, A. V. 1995, "The method of orthogonal completeness in the structure theory of rings", *J. Math. Sci*, vol. 73, no. 1, pp. 1–46.

33. Kurakin, V. L., Kuzmin, A. S., Mikhalev, A. V., Nechaev, A. A. 1995, "Linear recurring sequences over rings and modules", *J. Math. Sci.*, vol. 76, no. 6, pp. 2793-2915.

34. Beidar, K. I., Mikhalev, A. V. 1995, "Anti-isomorphism of endomorphism rings of modules and Morita anti-equivalence", *Russian Math. Surveys*, vol. 50, no.1, pp. 191–192.

35. Beidar, K. I., Mikhalev, A. V. 1995, "Generalized polynomial identities and rings that are sums of two subrings", *Algebra i Logika*, vol. 34, no. 1, pp. 3–11.

36. Beidar, K. I., Mikhalev, A. V., Puninskiĭ, G. E. 1995, "Logical aspects of the theory of rings and modules", *Fundam. Prikl. Mat*, vol. 1, no. 1, pp. 1–62.

37. Mikhalev, A. V., Nechaev, A. A. 1996, "Linear recurring sequences over modules", *Acta Applicandae Mathematica*, vol. 42, pp. 161–202.

38. Zakharov, V. K., Mikhalev, A. V. 1997, "The Radon problem for regular measures on an arbitrary Hausdorff space", *Fundam. Prikl. Mat*, vol. 3, no. 3, pp. 801–808.

39. Kuzmin, A. S., Kurakin, V. L., Markov, V. T., Mikhalev, A. V., Nechaev, A. A. 1999, "Codes and recurrences over finite rings and modules", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, no. 5, pp. 18–31, 80. (Translation in *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2000, vol. 54, no. 5, pp. 15–28)

40. Zakharov, V. K., Mikhalev, A. V. 1999, "The problem of the general Radon representation for an arbitrary Hausdorff space', *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat*, vol. 63, no. 5, pp. 37–82. (Translation in *Izv. Math..*, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 881–921).

41. Zakharov, V. K., Mikhalev, A. V. 1999, "A two-sorted theory of classes and sets that admits sets of propositional formulas", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 5, no. 2, pp. 417–435.

42. Bunina, E. I., Mikhalev, A. V. 2000, "Elementary equivalence of linear and algebraic groups", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 6, no. 3, pp. 707–722.

43. Zakharov, V. K., Mikhalev, A. V. 2002, "The problem of general Radon representation for an arbitrary Hausdorff space. II", *Izv. Math.*, vol. 66, no. 6, pp. 3–18. (Translation in *Izv. Math.*, 2002, vol. 66, no. 6, pp. 1087–1101).

44. Balaba, I. N., Zelenov, S. V., Limarenko, S. V., Mikhalev, A. V. 2003, "Density theorems for graded rings", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 9, no. 1, pp. 27–49 (Translation in *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2005, vol. 128, no. 6, pp. 3350–3364).

45. Guterman, A. E., Mikhalev, A. V. 2003, "General algebra and linear mappings that preserve matrix invariants", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 9, no. 1, pp. 83–101. (Translation in *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2005, vol. 128, no. 6, pp. 3384–3395).

46. Beidar, K. I., Mikhalev, A. V., Chebotar, M. A. 2004, "Functional identities in rings and their applications", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 59, no. 3(357), pp. 3–30. (Translation in *Russian Math. Surveys*, vol. 59, no. 3, pp. 403–428).

47. Bunina, E. I., Mikhalev, A. V. 2004, "Elementary equivalence of endomorphism rings of abelian p-groups", *Fundam. Prikl. Mat*, vol. 10, no. 2, pp. 135–224. (Translation in *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2006, vol. 137, no. 6, pp. 5275–5335).

48. Mikhalev, A. V., Pinchuk, I. A. 2005, "Conformal Steinberg algebras", *Mat. Sb.*, vol. 196, no. 5, pp. 31–52. (Translation in *Sb. Math*, 2005, vol. 196, no. 5-6, pp. 649–671).

49. Mikhalev, A. V., Pinchuk, I. A. 2005, "Universal central extensions of conformal Lie algebras", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, no. 1, pp.26–31, 72. (Translation in *Moscow Univ. Math. Bull.*,2005, vol. 60, no. 1, pp. 26–31).

50. Bunina, E. I., Mikhalev, A. V. 2006, "Elementary properties of the category of polygons over a monoid", *Algebra Logika*, vol.45 , no. 6, pp. 687–709. (Translation in *Algebra Logic*, 2006, vol. 45, no. 6, pp. 389–402).

51. Mikhalev, A. V., Pinchuk, I. A. 2007, "Lifting of automorphisms and derivations of conformal Lie superalgebras to their central extensions", *Trudy Seminara im. I. G. Petrovskogo (Petrovskii Seminars)*, no. 26, pp. 241–254.(Translation in *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2007, vol. 143, no. 4, pp.3333–3341).

52. Vydrin, A. S., Mikhalev, A. V. 2007 , "Stochastic matrices and an analysis of the vulnerability of automated systems", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 13, no. 1, pp. 61–99. (Translation in *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2008, vol. 152, no. 4, pp. 490–516).

53. Kondratieva, M. V., Mikhalev, A. V, Pankratiev, E. V. 2008, "Jacobi's bound for systems of algebraic differential equations", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 14, no. 4, pp. 151–166. (Translation in *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2009, vol. 163, no. 5, pp.543–553).

54. Gould, V., Mikhalev, A. V., Palyutin, E. A., Stepanova, A. A. 2008, "Model-theoretic properties of free, projective, and flat S-acts", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 14, no. 7, pp.63–110. (Translation in *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2010, vol. 164, no. 2, pp. 195–227).

55. Balaba, I. N., Mikhalev, A. V. 2009, "Isomorphisms and anti-isomorphisms of endomorphism rings of graded modules that are close to free ones, *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 425, no. 5, pp. 583–586. (Translation in *Dokl. Math*, 2009, vol. 79, no. 2, pp. 255–257).

56. Mikhalev, A. V., Pinchuk, I. A. 2010, " Universal central extensions of conformal Lie algebras, Part 2: The supercase", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, no. 1, pp. 36–41. (Translation in *Moscow Univ. Math. Bull*, 2010, vol. 65, no. 1, pp. 34–38).

57. Mikhalev, A. V., Mikhalev, A. A., Chepovskiĭ, A. A. 2010, "Primitive elements of free commutative and noncommutative nonassociative algebras", *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, vol. 10, no. 4, pp. 105–124.

58. Zakharov, V. K., Mikhalev, A. A., Rodionov, T. V. 2010, "The Riesz-Radon-Fréchet problem of the characterization of integrals", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 65, no.4(394), pp. 153–178. (Translation in *Russian Math. Surveys*, 2010, vol. 65, no. 4, pp.741–765).

59. Atkarskaya, A.S., Bunina, E.I., Mikhalev, A.V. 2011, "Isomorphisms of general linear groups over associative rings graded be a commutative group", *Doklady Mathematics*,vol. 83, no.2, pp. 175-176.

60. Zakharov, V. K., Mikhalev, A. V., Rodionov, T. V. 2012, "The characterization of integrals with respect to arbitrary Radon measures by the boundedness indices", *Fundam. Prikl. Mat.*,vol.17, no.1, pp. 107–126. (Translation in *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 185, no.3, pp. 417–429).

61. Balaba, I. N., Kanunnikov, A. L., Mikhalev, A. V. 2012 , “Quotient rings of graded associative rings. I“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 17, no.2, pp. 3–74. (Translation in *J. Math. Sci.*, 2012 ,vol.186, no.4, pp. 531–577).

62. Mikhalev, A. V., Nechaev, A. A. 2014, “Cyclic types of families of polylinear recurrent sequences and generators of pseudorandom numbers“, *Mat. Vopr. Kriptogr.*, vol. 5, no.1, pp. 95–125.

63. Zakharov, V. K., Mikhalev, A. V., Rodionov, T. V. 2014, “Postclassical families of functions proper for descriptive and prescriptive spaces“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 19, no.6, pp. 77–113. (Translation in *J. Math. Sci.*,2017, vol. 221, no.3, pp. 360–383).

64. Bunina, E.I., Mikhalev, A.V., Roizner, M.A. 2014, “A criterion for the elementary equivalence of endomorphism rings and automorphism groups of Abelian p-groups“, *Doklady Mathematics*, vol. 90, no.1, pp. 399-400.

65. Kuzmin, A. S., Markov, V. T., Mikhalev, A. A., Mikhalev,A. V., Nechaev A. A. 2015, “Cryptographic algorithms on groups and algebras“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 20, no.1, pp. 205–222 . (Translation in *J. Math. Sci.*, 2017, vol. 223, no.5, pp. 629–641).

66. Bunina, E. I., Mikhalev, A. V., Solovyev, I. O. 2016, “Elementary equivalence of stable linear groups over local commutative rings with 1/2“, *Fundam. Prikl. Mat*, vol. 21, no.1, pp. 65–78. (Translation in *J. Math. Sci.*,2018, vol. 233, no.5, pp. 646–655).

67. Arakelov, G. G., Gribov, A. V., Mikhalev, A. V. 2016, “Applied homomorphic cryptography: examples“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 21, no.3, pp. 25–38. (Translation in *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 237, no.3, pp. 353–361).

68. Markov, V. T., Mikhalev, A. A., Nechaev, A. A. 2016, “Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 21, no.4, pp. 99–124.

69. Mikhalev, A.V., Golubchik, I.Z. 2017, “Isomorphisms of the linear groups $GL_2(R)$ over associative rings R“, *Journal of Algebra*, vol. 500, pp. 691-708.

70. Balaba, I.N., Mikhalev, A.V. 2018, “Graded division rings“, *Sarajevo J. of Math.*, vol. 14(27), no. 2, pp. 167–174

71. Mikhalev, A. V., Shirshova, E. E. 2019, “Prime radicals of directed pseudo-ordered rings“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 22, no.4, pp. 147–166.

72. Markov, V.T., Mikhalev, A.V., Nechaev, A.A. 2020, “Nonassociative Algebraic Structures in Cryptography and Coding“, *J. Math. Sci.*, vol. 245, no.2, pp. 178-196.

Review articles

73. Mikhalev, A.V, Skornjakov, L. A. 1968, 1970, “Modules“ Algebra. Topology. Geometry. - *Akad. Nauk SSSR Vsesojuz. Inst. Naučn. i. Tehn. Informacii, Moscow*, pp. 57–100.

74. Zalesskii, A. E., Mikhalev, A. V. 1975, “Group rings“, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat., 2, VINITI, Moscow*, vol. 4, no. 1, pp. 1–78. (Translation in *J. Soviet Math*, 1975, vol. 4, no.1, pp. 1–78).

75. Mikhalev, A. V. 1974, “Endomorphism rings of modules, and lattices of submodules“, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Algebra. Topol. Geom., 12, VINITI, Moscow*, pp. 51–76. (Translation in *J. Soviet Math.*, 1976, vol. 5, no. 6, pp. 786–802).

76. Mikhalev, A. V., Skornyakov, L. A. 1976, “Modules“, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Algebra. Topol. Geom., 14, VINITI, Moscow*, pp. 57–190.

77. Markov, V. T., Mikhalev, A. V., Skornyakov, L. A., Tuganbaev, A. A. 1981, “Modules“, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Algebra. Topol. Geom., 19, VINITI, Moscow*, pp. 31–134. (Translation in *J. Soviet Math.*, 1983, vol. 23, no.6, pp. 2642–2707).

78. Kilp, M., Knewer, U., Mikhalev, A. V., Skornyakov, L. A. 1982, “Acts over monoids“ *Oldenburg, University Oldenburg*, pp. 1-42.

79. Markov, V. T., Mikhalev, A. V., Skornyakov, L. A., Tuganbaev, A. A. 1983, “Rings of endomorphisms of modules and lattices of submodules“, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Algebra. Topol. Geom., 21, VINITI, Moscow*, pp. 183–254. (Translation in *J. Soviet Math.*, 1985, vol. 31, no.3, pp. 3005–3051).

80. Beidar, K. I., Latyshev, V. N., Markov, V. T., Mikhalev, A. V., Skornyakov, L. A., Tuganbaev, A. A. 1984, “Associative rings“, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Algebra. Topol. Geom., 22, VINITI, Moscow*, pp. 3–115. (Translation in *J. Soviet Math.*, 1987, vol. 38, no.3, pp. 1855–1929).

81. Mikhalev, A. V., Pankratiev, E. V. 1987, “Differential and difference algebra“, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Algebra. Topol. Geom., 25, VINITI, Moscow*, pp. 67–139. (Translation in *J. Soviet Math.*, 1989, vol. 45, no.1, pp. 912–955).

82. Mikhalev, A. V., Mishina, A. P. 1995, “Infinite Abelian groups: methods and results“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 1, no.2, pp. 319–375.

83. Vechtomov, E. M., Mikhalev, A. V., Sidorov, V. V. 2016, “Semirings of continuous functions“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 21, no.2, pp. 53–131. (Translation in *J. Math. Sci.*, 2019, vol 237, no.2, pp. 191–244).

84. Blagoveshchenskaya, E. A., Mikhalev, A. V. 2020, “Influence of the Baer–Kaplansky theorem on the development of the theory of groups, rings and modules“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 23, no.3, pp. 16-178.

85. Kozhukhov, I. B., Mikhalev, A. V. 2020, “Polygons over semigroups: selected questions of structural theory“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 23, no.3, pp. 81-140.

Monographs

86. Arnautov, V.I., Vodinchar, M I, Mikhalev, A. V. 1981, “Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules“. — Chisinau: Stiintsa„ 175 p.

87. Arnautov, V.I., Vodinchar, M. I., Glavatsky, S.T., Mikhalev, A. V. 1988, “Constructions of Topological Rings and Modules“. — Chisinau: Stiintsa, 170 p.

88. Beidar, K. I., Martindale, W. S., III, Mikhalev, A. V. 1996, “Rings with Generalized Identities“. — New York: Marcel Dekker, 522 p. — (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 196).

89. Arnautov, V. I., Glavatsky, S. T., Mikhalev, A. V. 1996, “Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules“. — New York: Marcel Dekker, 512 p. – (Monographs Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 197).

90. Kondratieva, M. V., Levin, A. B., Mikhalev, A. V., Pankratiev, E. V. 1999, “Differential and Difference Dimension Polynomials“. – Dordrecht: Kluwer Academic, 422 p.

91. Kilp, M., Knauer, U., Mikhalev, A. V. 2000, “Monoids, acts and categories with applications to wreath products and graphs: a handbook for students and researchers“. – Berlin; New York: de Gruyter, 529 p. – (De Gruyter exposition in mathematics, vol. 29).

92. Krylov, P. A., Mikhalev, A. V., Tuganbaev, A. A. 2002, “Connections of Abelian Groups and their Endomorphism Rings“. – Tomsk: Tomsk State University, 451 p.

93. Krylov, P. A., Mikhalev, A. V., Tuganbaev, A. A. 2003,“Endomorphism Rings of Abelian Groups“. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 442 p. – (Algebra and Applications, vol. 2)

94. Beidar, K. I., Mikhalev, A.V., Chebotar, M. A. 2003, “Identities in Rings“ -– Tula: Tula State University, 122 p.

95. Krylov, P. A., Mikhalev, A. V., Tuganbaev, A. A. 2006, “Abelian Groups and their Endomorphism Rings“. – Moscow: Factorial Press, 512 p.

96. Bunina, E. I., Mikhalev, A. V., Pinus, A. G. 2015, “Elementary and close logical equivalences of classical and universal algebras“. – Moscow: MCCME, 360 p.

97. Zakharov, V. K., Rodionov, T.V., Mikhalev, A. V. 2018, “Sets, Functions, Measures, Volume 2: Fundamentals of Functions and Measure Theory“. – Berlin: de Gruyter, 478 p. – (De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 68/2).

Textbooks

98. “Workshop on algebra“ (Edited by N. S. Bakhvalov, A. I. Kostrikin.). 1983. – Moscow: Publishing house of Moscow State University, 91 p.

99. “Collection of Exercises in Algebra. Issue 4. Additional chapters of algebra“. 1986. – Moscow: Publishing house of Moscow State University, 71 p.

100. Mikhalev, A. V., Pankratiev, E. V. 1989, “Computer algebra. Calculations in differential and difference algebra“. – Moscow: Publishing house of Moscow State University, 97 p.

101. “Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry“ (Edited by A.I.Kostrikin). 1996. — Gordon and Breach United Kingdom. 464 p.

102. “Mathematical support of automated training complexes, training and testing of specialists in dynamic systems control“. – Moscow: Publishing house of Moscow State University, 57 p.

103. Mikhalev, A.V., Pilz, G. F. 2002, “The Concise Handbook of Algebra“. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 618 p.

104. Borisenko, V. V., Lyutsarev, V. S., Mikhalev, A. A., Mikhalev, A. V., Pankratiev, E. V., Chepovskii, A.M., Chirskii, V. G. 2005, “Teaching computer science and mathematical basisof computer science for non-core specialties of classical universities“. – Moscow: Intuit, 144 p.

105. Mikhalev, A. V., Mikhalev, A. A. 2005, “The beginnings of algebra“, part 1. – Moscow: National Open University “INTUIT“, 258 p.

106. Collection of Exercises in Algebra, edited by A.I.Kostrikin. 2009. – Moscow: MCCME. 404 p.

107. Mikhalev, A. V., Mikhalev, A. A. 2016, “Algebra of matrices and linear spaces“, part 1. – M.: Moscow: National Open University “INTUIT”, 146 p.

Получено 25.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-27-56

Академику А. Л. Семенову – 70 лет[1]

Т.А. Рудченко, С.Ф. Сопрунов, А.Ю. Уваров (г. Москва)

Татьяна Александровна Рудченко — научный сотрудник, Институт кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).
e-mail: rudchenko1@yandex.ru
Сергей Фёдорович Сопрунов — кандидат физико-математических наук, Центр педагогического мастерства Департамента образования и науки Москвы, Институт кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).
e-mail: soprunov@mail.ru
Александр Юрьевич Уваров — доктор педагогических наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Институт кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).
e-mail: alexander.yu.uvarov@gmail.com

Аннотация

Статья посвящена 70-летнему юбилею Алексея Львовича Семенова, видного российского математика и деятеля российского образования. В статье приведены биографические сведения и дан обзор профессиональной деятельности академика РАН и РАО А. Л. Семенова – как в области математики и теоретической информатики, так и в других важных областях деятельности А. Л. Семенова: поддержки и развития школьного математического образования, исследования проблем цифровой трансформации образования, обновления содержания образования в начальной и средней школе, а также профессионального педагогического образования.

Ключевые слова: академик А. Л. Семенов, теория определимости, разрешимые теории, цифровая трансформация образования, школьная математика.

Библиография: 46 названий.

Для цитирования:
Т. А. Рудченко, С. Ф. Сопрунов, А. Ю. Уваров. Академику А. Л. Семенову – 70 лет // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 27–56.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 19-29-14152, 19-29-14167, 19-29-14199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-27-56

70 year jubilee of academician Alexei L. Semenov

T.A. Rudchenko, S.F. Soprunov, A.Yu. Uvarov (Moscow)

Tatyana Alexandrovna Rudchenko — research associate, Alex Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC SCS of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: rudchenko1@yandex.ru
Sergey Fedorovich Soprunov — candidate of physical and mathematical sciences, Center for pedagogical excellence, Alex Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC SCS of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: soprunov@mail.ru
Alexander Yurievich Uvarov — doctor of pedagogical sciences, National research university «Higher School of Economics», Alex Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC SCS of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: alexander.yu.uvarov@gmail.com

Abstract

The article is devoted to the 70th anniversary of Alexey Lvovich Semenov, a prominent Russian mathematician and figure of Russian education. The article provides biographical information and an overview of the professional activities of academician of Russian Academy of Sciences and Russian Academy of Education, A. L. Semenov – both in the fields of mathematics and theoretical informatics, and in other important areas of A. L. Semenov's activity: support and development of school mathematical education, research on issues of the digital transformation of education, upgrading the content of education in primary and secondary schools, as well as professional teacher education.

Keywords: academician A. L. Semenov, definability theory, solvable theories, digital transformation of education, school mathematics.

Bibliography: 46 titles.

For citation:
Rudchenko, T. A., Soprunov, S. F., Uvarov A. Yu., 2021, "70 years jubilee of academician Alexei L. Semenov", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 27–56.

1. Введение

13 октября 2020 года исполнилось 70 лет видному российскому математику, деятелю российского образования Алексею Львовичу Семенову.

А. Л. Семенов родился в Москве в семье инженеров – выпускников Московского энергетического института, Евгении Тихоновны, ставшей одним из ведущих участников создания первой отечественной серийной ЭВМ «Стрела», и Льва Афанасьевича – впоследствии главного конструктора СВЧ-техники для радиолокации.

Ключевую роль в судьбе А. Л. Семенова сыграло дополнительное образование – школьный кружок по радиотехнике Николая Николаевича Путятина [1], который проводился в здании бывшей Церкви священномученика Власия (сейчас восстановленной [2]), и математический кружок Николая Николаевича Константинова [3], занятия которого проходили в Зоологическом музее МГУ на ул. Герцена [4]. Вели занятия студенты мехмата МГУ Давид Бернштейн и Аскольд Хованский. В девятый класс московской 7-й школы, где Бернштейн и Хованский вели курс математики, Семенов поступил в 1965 году. В его классе учились В. И. Беликов, О. Н. Вендрова, Ю. Ю. Гурьев, А. И. Маршак.

Школу Семенов закончил с золотой медалью и в 1967 году поступил на мехмат МГУ. Среди его мехматских друзей – Г. П. Амирджанов, А. А. Болибрух [5], В. А. Варданян. Со многими школьными и университетскими друзьями он сохранил отношения и в последующие годы.

На третьем курсе А. Л. Семенов познакомился со своим научным руководителем – учеником П. С. Новикова, Альбертом Абрамовичем Мучником (1934 – 2019, [6]), широко эрудированным математиком, получившим известность, когда он в 19 лет решил Проблему Поста о существовании неразрешимого, перечислимого множества, к которому не сводится любое перечислимое. Дружеские отношения с А. А. Мучником и его семьей (женой – Надеждой Митрофановной Ермолаевой, сыновьями – Андреем и Ильей) сохранились и в дальнейшем. Андрей Мучник (1958 – 2007, [7]), ставший учеником Семенова, сыграл важную роль в его научной биографии, как и в истории кафедры математической логики МГУ; ряд важных результатов Семенова и других членов кафедры был получен в соавторстве с Ан. Мучником, некоторые результаты Андрея были получены им в связи с результатами или постановками Семенова. Дальше в тексте ссылки на Альберта Мучника выглядят как «А. А. Мучник», на Андрея Мучника – как «Ан. Мучник» или «Ан. А. Мучник».

2. Математика

2.1. Задачи Альберта Мучника

А. А. Мучник поставил перед Семеновым несколько задач, которые и сформировали его интересы в период студенчества и аспирантуры. Первая публикация Семенова, представленная П. С. Новиковым в Доклады АН СССР в 1972 г. [8], содержала доказательство разрешимости проблемы эквивалентности для однозначных контекстно-свободных грамматик. Этот результат развивал предложенную А. А. Мучником идею использовать представление языков, порождаемых грамматиками с помощью степенных рядов над полем действительных чисел. Результат Семенова послужил отправной точкой для исследований А. Саломаа и М. Соиттолы [9]; в 1989 г., когда стали возможными поездки на Запад, А. Саломаа пригласил А. Л. Семенова на пару месяцев профессором в Университет Турку.

В 1973 г. А. Л. Семенов решил следующую проблему Амара и Путцолы из области комбинаторики слов, предложенную ему А. А. Мучником. Пусть линейная грамматика (недетерминированный конечный автомат) порождает из одного центра цепочку символов в две стороны, с фиксированным отношением k количества символов, возникающих справа и слева от центра. Порождаемый такой грамматикой язык называется k-линейным. Вопрос Амара и Путцолы состоял в том, будет ли язык, k-линейный при двух разных рациональных k, регулярным, то есть порождаемым недетерминированным конечным автоматом, у которого символы возникают только с одной стороны. Семенов дал положительный ответ на этот вопрос.

Следующая задача А. А. Мучника по формулировке несколько напоминала предыдущую. Конечный автомат, получающий на вход несколько лент, на которых записаны числа в n-ичной системе счисления, определяет отношение на натуральных числах. В частности, любое отношение, определимое в структуре сложения натуральных чисел, таково при любом n. При этом автомат может распознавать и другие отношения, например, автомат, работающий в девятеричной системе счисления, может распознавать степени тройки или числа 27. Пусть некоторое отношение определяется автоматами, работающими в n-ичной и в m-ичной системе счисления, причем числа n и m не являются степенями одного и того же числа. Предположение Мучника состояло в том, что тогда отношение будет выразимо через сложение. В случае одноместных отношений это утверждение было доказано Аланом Кобхэмом (Alan Cobham) в его работе 1969 года [10]. А. Л. Семенову удалось доказать это для любых отношений (Теорема Кобхэма – Семенова). Андрей Мучник впоследствии предложил альтернативное доказательство этого результата Семенова, используя введенное им понятие самоопределимости (самовыразимости) ([11]), подробнее см. [12].

2.2. Определимость и разрешимость для теорий числовых структур

Слово «теория» в математической логике используется как математическое понятие – это «множество утверждений, записанных на каком-то логическом языке, выводимых из какой-то системы аксиом по каким-то правилам». Другим пониманием является «множество утверждений, записанных в каком-то логическом языке, истинных в данной структуре». В обзоре работ А. Л. Семенова мы будем использовать только второе понимание.

Кроме того, мы будем говорить об определимости отношений в некотором логическом языке. Самый распространенный логический язык, который можно использовать для определения отношений на некотором фиксированном множестве – универсуме, – это язык логики отношений, иначе – язык логики первого порядка, или элементарный язык. В нем используются логические связки, символы для переменных объектов и кванторы по этим переменным. Объекты при этом интерпретируются как пробегающие универсум. К этим символам добавляются символы отношений с различным количеством аргументов, интерпретируемые как фиксированные отношения на универсуме. Формула языка с n свободными переменными определяет n-местное отношение на универсуме. Говоря об определимости, мы будем подразумевать именно это понятие «определять».

Можно, однако, рассмотреть язык, расширенный символами для переменных одноместных отношений на универсуме и кванторами для этих переменных. Такой язык называется *монадическим языком.* К монадическому языку, как и в случае элементарного языка, добавляют нелогические символы отношений, интерпретируемые как конкретные фиксированные отношения на универсуме. Формула этого языка, если она не содержит свободных переменных для объектов, но содержит n свободных переменных для отношений, определяет n-местное отношение на одноместных отношениях на универсуме, другими словами, n-местное отношение на подмножествах универсума. Если же интерпретировать символы одноместных отношений только как конечные подмножества, то получаем слабый монадический язык и соответствующее понятие определимости.

Таким образом, наряду с «простой» определимостью отношений на некотором универсуме, мы получаем понятия монадической и слабой монадической определимости на подмножествах и конечных подмножествах универсума. Наряду с определимостью естественно рассмотреть и вопрос о разрешимости возникающих монадических и слабо монадических теорий структур.

Рассмотрим простейший случай – натуральные числа с исходным отношением следования $y = x + 1$. Конечные подмножества натуральных чисел можно кодировать цепочками нулей и единиц (единицы на местах, принадлежащих множеству). Множество цепочек из нулей и единиц естественно рассматривать как структуру с двумя следованиями – дописыванием в конце цепочки символа 0 и 1. Заметим, что произвольное множество можно рассматривать как сверхслово, то есть бесконечное слово из нулей и единиц. (Конечно, сверхслова бывают и не двоичными.)

Таким образом, можно говорить о задании (определимости) отношений на натуральных числах конечными автоматами, об определимости отношений на конечных множествах в слабом монадическом языке следования натуральных чисел и определимости отношений на двоичных цепочках в структуре двух следований. Швейцарский (потом американский) математик, ученик Пола Бернайса и Саундерса Маклейна Ричард Бюхи (Julius Richard Büchi) на рубеже 1960-х гг. установил эквивалентность (в некотором естественном смысле) этих трех понятий определимости. Исходя из конструктивности операций с конечными автоматами, отвечающих логическим операциям, включая квантификацию, Бюхи получил теорему о разрешимости возникающих элементарных и слабо монадических теорий (ряд результатов здесь принадлежит ученику Бюхи – Лоренсу Ландвеберу). Отсюда получается и разрешимость теории сложения целых чисел, которая была доказана Мозесом Пресбургером в 1928 г. и относится к первым классическим результатам математической логики.

Калвин Элгот и Майкл Рабин в работе [13] показали, что результат Бюхи допускает усиление. К структуре следования натуральных чисел можно добавить или одноместное отношение, задающее все степени какого-то натурального числа, или все натуральные числа в данной степени, или все значения факториала. В результате будут получаться структуры с разрешимой монадической теорией. (Указанные Элготом и Рабином примеры – частные случаи применения полученного ими необходимого условия.) В то же время Элгот и Рабин установили, что добавление одноместных функций в широком классе случаев делает монадическую теорию неразрешимой. Они поставили вопрос о существовании максимальных разрешимых теорий. В слабо монадическом случае этот вопрос получил отрицательный ответ в работе Сопрунова [14].

Идея доказательства разрешимости в работе Элгота и Рабина состоит в том, что состояние любого фиксированного конечного автомата после прочтения последовательности нулей определяется его состоянием в начале этой последовательности и остатком от деления длины этой последовательности на некоторое фиксированное для данного автомата число. Таким образом, сверхслово оказывается «периодическим» относительно произвольного автомата. Возможность эффективного перехода к соответствующему периодическому сверхслову и дает разрешимость теории. Конечно, описанная конструкция не охватывает многих интересных ситуаций, в частности, ученик Бюхи Дирк Зифкес (Dirk Siefkes) в работе 1971 г. [15] поставил проблему выяснения разрешимости монадической теории для сверхслова W, задаваемого как знак синуса натурального числа. Как и указанные Элготом и Рабином естественные примеры числовых множеств, конкретный пример Зифкеса интересен не только сам по себе, но и как представитель важного класса. Таким классом являются почти периодические сверхслова. Почти периодичность сверхслова означает, что всякое слово, входящее в сверхслово бесконечное количество раз, обязательно входит на каждом отрезке фиксированной, зависящей от слова, длины. Почти периодичность является основным свойством для символической динамики. Можно сказать, что мы, измеряя состояние какой-то физической системы в последовательные моменты времени, обязательно получаем почти периодическую последовательность – не надо ждать произвольно долго, чтобы какая-то конечная цепочка измерений повторилась. Основной результат Семенова в данной области, опубликованный в [16], состоит в том, что при условии вычислимости символической траектории и ее эффективной почти периодичности, получаемая монадическая теория разрешима, т. е. есть эффективный алгоритм, отвечающий на любые вопросы о динамической системе, формулируемые в терминах измерения ее состояний и следования моментов времени и использующие переменные одноместные отношения и кванторы по ним.

Еще один круг результатов Семенова относится к разрешимости теорий, получаемых добавлением к арифметике сложения натуральных чисел одноместных функций. Как показал еще Хилари Патнэм [17], добавление нетривиального многочлена приводит к неразрешимости. Результат А. Л. Семенова состоит в том, что если брать более быстро растущие функции, например, экспоненту с целым основанием, или факториал, то получаются разрешимые теории.

2.3. Решетки определимости

Приведенный выше вопрос Элгота и Рабина о максимальных структурах с разрешимой теорией является примером вопроса из общей теории определимости. Внимание А. Л. Семенова к этим вопросам также привлек его учитель А. А. Мучник, спросивший, какова структура «обеднений» арифметики сложения целых чисел. Это привело к серии исследований А. Л. Семенова, С. Ф. Сопрунова, при участии Ан. А. Мучника, которые подробно освещены в публикации [12], где, в частности, говорится о подходе Ан. Мучника к доказательству теоремы Кобхэма – Семенова, приведшем Ан. Мучника к понятию самоопределимости. Доказательства Семенова и существенно более короткое доказательство Мучника послужили источником для ряда работ европейских математиков.

2.4. Колмогоровская сложность

Интерес А. Л. Семенова к колмогоровской сложности связан, с одной стороны, с его работой совместно с В. А. Успенским над докладом на конференции «Алгоритмы в современной математике и ее приложениях» в г. Ургенче, Узбекской ССР в сентябре 1979 г. по приглашению А. П. Ершова, с другой стороны, с приходом на кафедру математической логики ее заведующего (после А. А. Маркова) Андрея Николаевича Колмогорова, который предложил Семенову совместное ведение семинара, который теперь называется Колмогоровским. По инициативе Ан. А. Мучника в конце 1990-х гг. А. Л. Семенов вместе с ним вернулся к проблематике колмогоровской сложности.

Колмогоров начал свои исследования в данной области с фундаментального вопроса о применимости законов теории вероятностей к явлениям реального мира. Колмогоров предложил следующий подход к этому вопросу: последовательность, полученная достаточным количеством испытаний, имеет большую колмогоровскую сложность. Отсюда можно вывести, что она с хорошей точностью удовлетворяет закону больших чисел. Более того, то же самое верно для любой ее достаточно длинной подпоследовательности, отобранной алгоритмом малой колмогоровской сложности (отбирающему алгоритму разрешается читать члены последовательности в любом порядке и принимать решение об отборе непрочитанных членов на основе значений прочитанных). Вопрос о точном соотношении сложности исходной последовательности, сложности отбирающего алгоритма и степени выполнения для отобранной подпоследовательности закона больших чисел был поставлен Колмогоровым в его работе [18], начавшей исследования, теперь относящиеся к «Колмогоровской теории сложности». Через 20 лет в предисловии к русскому переводу этой работы Колмогоров подчеркнул важность решения этого вопроса. Еще через 20 лет Ан. Мучник довел до логического завершения построения из исходной статьи и предложил путь, на котором проблема Колмогорова была решена в работах Мучника и Семенова (см. [19], [20], [21]). Указанная статья Колмогорова относилась к «комбинаторному» подходу к сложности (и случайности). В ней же он в нескольких фразах наметил и получивший дальнейшее развитие «алгоритмический» подход. Как оказалось, для «комбинаторных» теорем Колмогорова существуют «алгоритмические» аналоги (см. [20]), в определенном смысле завершающие программу, сформулированную Колмогоровым в основополагающей статье. Данные работы Мучника и Семенова были удостоены Премии им. А. Н. Колмогорова РАН в 2006 г.

А. Л. Семенов никогда не разрывал совсем связь с родной кафедрой математической логики (впоследствии – кафедрой математической логики и теории алгоритмов) мехмата МГУ и возглавил ее в 2018 г. Ряд его результатов последних лет был получен в коллективе МФТИ в рамках гранта РНФ 17-11-01377.

3. Вычислительная техника

Интерес А. Л. Семенова к электронике был связан с тем радиокружком, о котором было упомянуто вначале. Интерес к программированию и искусственному интеллекту возник благодаря его матери, Е. Т. Семеновой, [22], и включал работу по конструированию устройства, выделяющего в звуковых образах слов набора признаков, позволяющих распознавать небольшой словарь [23]. Первой программистской работой А. Л. Семенова была организация поиска конечных автоматов, решающих задачу о синхронизации цепи стрелков, затем было участие в реализации языков программирования Lisp, APL в группе Е. Т. Семеновой и Д. А. Поспелова в МЭИ. Работа в направлении практического программирования возобновилась, когда в 1984 г. А. Л. Семенов был вынужден уйти из МГУ и перешел на работу в Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР (НСК) [24]. В создаваемом в составе этого совета Институте проблем кибернетики АН СССР Семенов начал работу по реализации эффективных параллельных вычислений в коллективе под руководством академика В. А. Мельникова, проектировавшем супер-ЭВМ «Электроника ССБИС». Завершение работ по созданию этого компьютера совпало с радикальными изменениями в стране и привело к фактическому свертыванию разработок. В 1993 г. не стало и их лидера – В. А. Мельникова.

В 2015 г. А. Л. Семенов в составе Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» создал Институт кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга, в котором сегодня работает ряд сотрудников бывшего Научного совета АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика», созданного в 1959 г. академиком, адмиралом Акселем Ивановичем Бергом, «отцом» советской радиолокации, председателем Межведомственной комиссии по программированному обучению [25]. Институт продолжает традиции НСК.

4. Школьное образование

Обучение в школе «системы Константинова» оказало принципиальное влияние на становление А. Л. Семенова как математика.

Это обучение, как и его дальнейшая работа в этой школе и работа в вместе с Колмогоровым в «Колмогоровском интернате», дали исходный импульс для работы А. Л. Семенова в школьном образовании.

В 1985 г. А. Л. Семенов организовал коллектив, который под руководством академика А. П. Ершова при ключевом участии А. Г. Кушниренко, Г. В. Лебедева и А. Шеня создал первый отечественный учебник по информатике для всех школ страны [26]. Эта линия школьных учебников информатики продолжается по сей день.

По инициативе академика Е. П. Велихова с 1986 г. началась работа по созданию новой системы школьного образования в рамках ВНТК «Школа-1»[29]. В этом коллективе Семенов стал заместителем Е. П. Велихова. Данная работа опиралась, во-первых, на построение обучения детей всех возрастов на основе самостоятельного, в сотрудничестве с учителем и другими учениками, создания, изобретения, открытия чего-то (для учащегося) нового. Тем самым каждый ученик становился творцом, ученым, изобретателем. Развивая этот подход, А. Л. Семенов опирался на идеи деятельностного подхода, проектного и исследовательского методов обучения (Дьюи и Выготский, Эльконин и Давыдов, Скаткин и Лернер), на передовой опыт педагогов физико-математических и других специализированных школ, которые успешно готовили научно-техническую элиту нашей страны. Качественно новым здесь было широкое использование учеником цифровых технологий, которые стали входить в нашу жизнь вместе с персональными компьютерами: текстовые и графические редакторы, электронные таблицы, инструменты презентационной графики, цифровые фото- и видеокамеры, калькуляторы, цифровые датчики, навигаторы, зарождающийся интернет и т. д. Исследования, выполненные коллективами ВНТК «Школа-1», заложили основу многих научно-практических и методических решений, которые вошли в практику работы школы в следующие десятилетия.

Семенов стал инициатором инновационного для конца 80-х годов прошого века международного педагогического проекта «Школьная электронная почта» (NewYork – Moscow School Telecommunication Project).

Три десятка инновационных школ в Москве и штате Нью-Йорк получили передовое для своего времени оборудование (профессиональные компьютеры, модемы, принтеры, видеотелефоны), установили партнерские связи, а их старшеклассники вели совместные исследовательские проекты по физике и биологии, охране окружающей среды, изучению иностранных языков, страноведению, географии, проектированию школы будущего и др. Продолжением этого проекта стал I*EARN [27], в работе которого сегодня участвуют более 30 тысяч школ – более 2 млн. учащихся.

Еще один проект – это Московский детский клуб «Компьютер» [28]. Г. К. Каспаров, получив гонорар за очередную победу на международном турнире компьютерами, решил создать детский компьютерный клуб и пришел с этой идеей к академику Е. П. Велихову. Велихов поручил организацию Клуба Семенову. Семенов сумел получить для него помещение – сначала на Арбате, а затем на Рождественском бульваре — и пригласил для учреждения клуба прекрасного организатора, участника ВНТК «Школа-1», в дальнейшем компьютерного бизнесмена С. А. Пачикова. Е. Т. Семенова была одним из первых преподавателей Клуба.

Одним из условий успеха работы ВНТК «Школа-1» стало налаженное Семеновым международное сотрудничество с ведущими исследовательскими группами Симора Паперта (Seymour Papert, Media Lab, MIT) и Благовеста Сендова (Болгарская АН, Проблемная группа по образованию), Роберта Тинкера (Robert Tinker, TERC [30]). Следствиями этого сотрудничества стала разработка интерпретатора с языка LISP для отечественных школьных ЭВМ и плодотворная работа С. Ф. Сопрунова и его группы при участии Семенова над конструкционистским направлением в российском образовании: в качестве технической базы были взяты диалекты языка Лого, что соответствует Лого-философии Симора Паперта. В частности, была создана версия Лого, не требующая алфавитной грамотности, – ПервоЛого. В некоторые годы XX века нелегальные копии Лого можно было встретить почти на каждом школьном компьютере.

Направление развития школьного образования, заданное в работе ВНТК «Школа-1», было продолжено созданным А. Л. Семеновым и его коллегами Б. С. Беренфельдом и В. А. Носкиным Институтом новых технологий. Среди его итогов – публикации ЮНЕСКО: [31]–[37]. Институт был учреждением, работавшим по принципам некоммерческой организации, он разрабатывал решения для общего образования на основе философии конструкционизма и ее развития коллективом под руководством Семенова для страны. Средства, получаемые за счет поставки этих решений в регионы страны, инвестировались в новые разработки. Среди образовательных программных средств, созданных институтом, был первый в стране спелл-чекер Lingvo-Litera (руководителем этой разработки был Владимир Павлович Селегей), распространявшийся совместно с ABBYY, тысячи чертежей динамической геометрии «Живая геометрия» (русской адаптации Geometer's Sketchpad), «Кубики Никитина» (совместно с Френком Куном), методики применения образовательного LEGO в российской школе и еще десятки других продуктов.

К тому же периоду относится начало работ А. Л. Семенова и его коллег – математиков и лингвистов – над школьным курсом, позиционировавшемся как интегрированный курс «Язык, математика, информатика» (первый выпуск тетради этого курса хранится в РГБ [38]). Этот курс строится начиная с первого класса (а используется и в более младшем возрасте), исходя из принципов наглядности, самостоятельного открытия учащимися математики. Исходными объектами являются наглядные объекты современной «конечной» математики – цепочки и совокупности (мешки, мультимножества), таблицы. Учащиеся сами строят формальные и неформальные алгоритмы, игровые стратегии и т. п. Первые красочные тетради курса вышли в 1988 году, в их разработке принимала участие А. К. Поливанова. С 1991 года тетради использовались в экспериментальном классе в московской школе № 57, где учителем была Е. И. Булин-Соколова, также принимавшая участие в создании курса. В 1999 году в издательстве «Просвещение» начал издаваться отдельный курс информатики для начальной школы (авт. А. Л. Семенов, Т. А. Рудченко, [39], [40]), который включил в себя основные наработки этого интегрированного курса: давал новую точку зрения на содержание основных дисциплин начальной школы и использовал в качестве примеров и объектов элементы из этих дисциплин — языка, математики и окружающего мира.

В 2009 г. был принят и действует сейчас Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) для начальной школы. В его положениях нашла отражение практика работы школ по учебникам, созданным под руководством А. Л. Семенова, как и разработанные под его руководством подходы к применению цифровых технологий в образовании. В 2010 году стартовала работа по созданию нового интегрированного курса «Математика и информатика» (С. Посицельский, М. Посицельская и др. [41]). Работа над этим курсом продолжается до сих пор – сейчас происходит его доработка по результатам апробации в школе, также планируется создание новой цифровой интерактивной версии курса.

Работа коллективов А. Л. Семенова со школами была замечена руководителем московского образования Л. П. Кезиной, которая в августе 1993 г. предложила ему место ректора Московского института повышения квалификации работников образования, в дальнейшем преобразованного в Московский институт открытого образования. Под его руководством количество учителей, повышавших свою квалификацию в течение года, выросло в 7 раз, был разработан образовательный стандарт для московских школ и внедрен во все школы Федеральный стандарт начального образования и т. д. Одним из результатов работы А. Л. Семенова в должности ректора МИОО было включение в состав института московской школы № 179, позволившее ее возродить и сделать одной из лучших математических школ города.

Настоящим прорывом в области персонализации обучения в цифровой среде стал инициированный Семеновым в Москве проект i-Школы для детей с особыми потребностями [42]. Ученикам этой школы был предоставлен комплект современного оборудования (подключенный к интернету компьютер, видеокамера, сканер, цифровой микроскоп и др.). Были разработаны необходимые цифровые учебно-методические материалы для дистанционной формы работы. В школе был создан высокопрофессиональный коллектив творческих учителей, владеющих методами обучения с использованием сети интернет, что позволяло учащимся получать качественное образование, не выходя из дома.

В августе 2013 г. по предложению Министра образования и науки Д. В. Ливанова А. Л. Семенов стал ректором Московского педагогического государственного университета (им. В. И. Ленина). Его работа там продолжалась до 2016 г. и была направлена на приближение обучения в вузе к задачам, стоящим перед реальной школой, что позволило заметно повысить интерес студентов к учебе, успешно формировать их профессиональное сознание [43], [44]. В частности, он существенно расширил практику студентов в школах. Произошла перестройка обучения будущих педагогов в области цифровых технологий, было обновлено содержание образования для будущих учителей математики с акцентом на решении школьных математических задач.

Академик А. Л. Семенов стал координатором разработки Концепции развития российского математического образования, разработанной в соответствии с майским Указом Президента Российской Федерации (2012 г.), принятым Правительством России в декабре 2013 года. А. Л. Семенов – один из лидеров разработки Концепции школьного технологического образования в соответствии с поручением Президента Российской Федерации (2016 г., майский указ

2018 г.) в области цифровой трансформации образования, которая оказала существенное влияние на это ключевое направление развития российской школы. А. Л. Семенов – один из идеологов разработки «Цифровой платформы новой школы» Сбера, член Экспертно-стратегического совета благотворительного фонда Сбера «Вклад в будущее». Международным признанием роли А. Л. Семенова в развитии математического образования было и его избрание в состав Исполкома Международной комиссии по математическому образованию, членом которого он являлся в 2004 – 2007 гг. В 2004 г. А. Л. Семенов обеспечил возможность участия в Международном конгрессе по математическому образованию 100 российских участников, масштабной выставки российского математического образования и проведения Дня России на этом Конгрессе.

Сегодня А. Л. Семенов активно участвует в работе Института образования НИУ «Высшая школа экономики» и Российского государственного педагогического университета имени А. И. Герцена, является председателем Научно-методического совета по математике, членом Научно-методического совета по информатике, членом Ученого совета Федерального института педагогических измерений.

А. Л. Семенов – активный участник разработки программ «Цифровая экономика РФ», «Национальной стратегии в области искусственного интеллекта», член рабочей группы Федеральной программы «Кадры для цифровой экономики», член экспертной группы «Дополнительные образовательные программы для развития компетенций цифровой экономики».

В 2019 г. А. Л. Семенов выступил инициатором большой междисциплинарной программы Российского фонда фундаментальных исследований «Фундаментальное научное обеспечение процессов цифровизации общего образования». В сложившихся в 2020 году обстоятельствах задача научного обеспечения цифровой трансформации школы стала сверхактуальной и остросоциальной. Ранее слабо востребованные школой дистанционные технологии стали насущной необходимостью. Это направление работы Фонда было поддержано не только учеными Российской академии наук, но и Российской академией образования, ее ведущими специалистами и организациями.

Вклад А. Л. Семенова был отмечен присуждением ему премий Президента РФ (1997 г.) и Правительства РФ (2009 г.) в области образования. Международным признанием его работы в области обновления образования в развивающейся цифровой среде стало присуждение ему Премии ЮНЕСКО (2009 г., вручена Генеральным директором ЮНЕСКО И. Боковой в январе 2010 г.). Таким образом, он пополнил ряды отечественных ученых (академики А. Опарин, С. Капица, И. Петрянов-Соколов, Н. Басов и знаменитый тележурналист, д. б. н. Н. Дроздов), которые в разные годы получили премии ЮНЕСКО в области образования.

За достижения в области развития науки и образования А. Л. Семенов был награжден медалью «В память 850-летия Москвы» (1997 г.), нагрудным знаком «Почетный работник общего образования Российской Федерации» (2000 г.), орденом Дружбы (2010 г.), орденом Почёта (2016 г.). Также А. Л. Семенову в 2005 г. было присвоено почетное звание «Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации».

5. Заключение

В дни, когда писалась эта статья, А. Л. Семенов вместе с А. С. Соловейчиком проводили обсуждение «Хартии цифрового пути школы», в которой отражены представления Семенова и его коллег на важнейшие предстоящие в общем образовании изменения [45]. В обсуждении приняли участие видные деятели российского образования и представители проектов Программы РФФИ, упомянутой выше. Мы с большим интересом слушали эти обсуждения! Выражаем признательность А. Л. Семенову за возможность работы с ним в течение многих десятилетий и желаем ему долгих лет жизни и активной деятельности. Благодарим «Чебышёвский сборник» за публикацию этой статьи.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ТРУДОВ АКАДЕМИКА А. Л. СЕМЕНОВА

Математика

1. Семенов А. Л. Алгоритмические проблемы для степенных рядов и контекстно-свободных грамматик. // Доклады Академии наук СССР, 1973, т. 212. – С. 50–52.

2. Семенов А. Л. Регулярность языков, k-линейных при различных k. // Доклады Академии наук СССР, 1974, т. 215. – С. 278–281.

3. Семенов А. Л. Пресбургеровость предикатов, регулярных в двух системах счисления// Сибирский математический журнал, 1977, т. 18, № 2. – С. 403–418.

4. Семенов А. Л. Некоторые алгебраические проблемы для систем алгоритмических алгебр // Доклады Академии наук СССР, 1978, т. 239, № 5. – С. 1063–1066.

5. Семенов А. Л. О некоторых расширениях арифметики сложения натуральных чисел // Известия Академии наук СССР. Серия математическая, 1979, т. 43, № 5. – С. 1175–1195.

6. Семенов А. Л. Интерпретация свободных алгебр в свободных группах // Доклады Академии наук СССР, т. 252, № 6, 1980. – С. 1329–1332.

7. Uspensky V. A., Semenov A. L. What are the Gains of the Theory of Algorithms: Basic Developments Connected with the Concept of Algorithm and with Its Applications in Mathematics // Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science, Urgench, UzbekSSR, September 16–22, 1979. Proceedings. Lecture Notes of Computer Science, 1981, v. 122. – Pp. 100–234.

8. Семенов А. Л. Об определимости арифметики в ее фрагментах // Доклады Академии наук СССР, 1982, т. 263, № 1. – С. 44–47.

9. Семенов А. Л. Логические теории одноместных функций на натуральном ряде // Известия Академии наук СССР. Серия математическая, 1983, т. 47, № 3. — С. 623–658.

10. Semenov A. L. Decidability of Monadic Theories // Mathematical Foundations of Computer Science, Praha, Czechoslovakia, September 3–7, 1984. Proceedings. Lecture Notes in Computer Science, 1984, v. 176. – Pp. 162–175.

11. Успенский В. А., Семенов А. Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения // М.: Наука, Библиотечка программиста, 1987. – 288 с.

12. Успенский В. А., Семенов А. Л. Алгоритмы, или машины Колмогорова // В сб. А. Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. Избранные труды. Ред. А. Н. Ширяев. М., Наука, 1987. -– С. 279–289.

13. Успенский В. А., Семенов А. Л., Шень А. Х. Может ли (индивидуальная) последовательность нулей и единиц быть случайной? // Успехи математических наук, 1990, т. 45, № 1. — С. 105–162.

14. Uspensky V. A., Semenov A. L. Algorithms: Main Ideas and Applications // Kluwer Academic Publishers, 1993. – 269 p. ISBN 978-90-481-4256-2.

15. Muchnik An. A., Semenov A. L. Uspensky V. A. Mathematical Metaphysics of Randomness // Theoretical Computer Science, 1998, v. 207, № 2. -– Pp. 263–317.

16. Semenov A., Muchnik A. A. Single intermediate degrees in some classical reducibilities. // Abstracts of International conference «Mathematical Logic, Algebra and Set Theory» dedicated to the 100th anniversary of P. S. Novikov. M., 2001.

17. Семенов А. Л. Математика текстов. М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 2002 — 16 с.

18. Мучник Ан. А., Семенов А. Л. О роли закона больших чисел в теории случайности // Проблемы передачи информации. 2003. Т. 39. № 1. — С. 134.

19. Семенов А. Л., Мучник А. А. Об уточнении оценок Колмогорова, относящихся к датчикам случайных чисел и сложностному определению случайности // Доклады Академии наук. 2003. Т. 3991. № 6. — С. 738–740.

20. Muchnik Andrej, Semenov Alexei, Ushakov Maksim. Almost Periodic Sequences // Theoretical Computer Science. Elsevier BV (Netherlands). 2003. V. 1. № 304. – P. 1–33.

21. Semenov Alexei, Muchnik Andrej. 40 years of the Origin of Kolmogorov Randomness Theory // Сб. Колмогоров и современная математика. Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова, Москва, 16–21 июня 2003. М. : Издательство механико-математического факультета МГУ. 2003. – С. 677–678.

22. Semenov A., Muchnik A. A. The Quality of Prediction and Optimal Predictions Based on Two Experts. // Abstracts of International Workshop «Kolmogorov Complexity and Applications», Dagstuhl, Germany, January 29 — February 03, 2006.

23. Muchnik Andrej, Semenov Alexei, Effective Bounds for Convergence, Descriptive Complexity, and Natural Examples of Simple and Hypersimple Sets. // Annals of Pure and Applied Logic. Elsevier BV (Netherlands), 2006, v. 141, № 3. — P. 437–441.

24. Адян С. И., Семенов А. Л., Успенский В. А. Андрей Альбертович Мучник (некролог) // Успехи математических наук, 2007, т. 62, № 4. – С. 140–144.

25. Мучник А. А., Притыкин Ю. Л., Семенов А. Л. Последовательности, близкие к периодическим // Успехи математических наук, 2009, т. 64, № 5. — С. 21–96.

26. Семенов А. Л., Сопрунов С. Ф. Конечные кванторные иерархии в алгебрах отношений. // Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 2011, т. 274. — С. 291–296.

27. Semenov A. L.; Soprunov S. F. Lattice of relational algebras definable in integers with successor. // arXiv:1201.4439 [math.LO], 2011.

28. Semenov A., Soprunov S., and Uspensky V. The Lattice of Definability. Origins, Recent Developments, and Further Directions // Computer Science – Theory and Applications, 9th International Computer Science Symposium in Russia. CSR 2014, Moscow, Russia, June 7–11, 2014. Proceedings. Lecture Notes in Computer Science. Springer. 2014. V. 8476. – Pp. 23–38.

29. Semenov A. L., Soprunov S. F. A combinatorial version of the Svenonius theorem on definability // Logic Journal of IGPL, 23.6, 2015. – P. 966–975.

30. Мучник Ан. А., Семенов А. Л. Решетка определимости в порядке рациональных чисел // Матем. заметки, 2020, т. 108, вып. 1. – С. 102–118. DOI: `https://doi.org/10.4213/mzm12651`.

31. Семенов А. Л. Отображения, сохраняющие отношения, определимые через линейный порядок // Вестник МГУ, сер. 1, Математика. Механика, 2020, № 5. С. 62–65.

Вычислительная техника, информатика

32. Семенов А. Л., Семенова Е. Т. Язык программирования APL. // М.: МЭИ, 1971. – 96 с.

33. Семенов А. Л., Сопрунов С. Ф. О языке комбинаторно-логического процессора // Сб. Эффективное использование высокопроизводительных ЭВМ. Серия Вопросы кибернетики. Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1985, т. 117. — С. 182–191.

34. Семенов А. Л., Успенский В. А. Математическая логика в вычислительных науках и вычислительной практике // Вестник Академии наук СССР, 1986, т. 56, № 7. – С. 93–103.

35. Вовк В. Г., Семенов А. Л., Сопрунов С. Ф. Некоторый способ проверки правильности программ на Ассемблере // Методы и алгоритмы анализа больших систем. Ред. В. Г. Карманов. Вопросы кибернетики. Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1988, т. 136. — С. 56–77.

36. Семенов А. Л. О фундаментальных понятиях кибернетики и информатики // Вестник кибернетики, 2015, № 3 (19). – С. 22–26.

37. Семенов А. Л., Варданян В. А., Вишняков Ю. С., Гукасов И. И., Рудченко Т. А., Уваров А. Ю. Наследие А. И. Берга в кибернетике и образовании. От Совета по Кибернетике к Институту Берга // Труды V Международной конференции «Развитие вычислительной техники в России, странах бывшего СССР и СЭВ: история и перспективы» (SORUCOM–2020), 6–7 октября 2020 года, Москва. Под ред. А. Н. Томилина. НИУ ВШЭ, 2020. – С. 277–284. ISBN 978-5-6044274-3-9.

Школьное образование

38. Вишняков Ю. С., Грюнталь А., Кольцова А., Пачиков С. А., Семенов А. Л., Шень А. Х. и др. Простое и сложное в программировании. // Авт. предисл. Е. П. Велихова. М.: Наука, 1987. — 176 с. ISBN: 5-02-006595-1.

39. Семенов А. Л. Информатика в российской средней школе: доклад на пленарном заседании II Международного конгресса ЮНЕСКО «Образование и информатика» // Информатика и образование, 1996, № 5. – С. 29.

40. Ландо С. К., Семенов А. Л. Алгоритмика: учебная программа курса // Информатика и образование, 1998, № 3. – С. 94.

41. Semenov Alexei. Technology in Transforming Education // Communication and Networking in Education: Learning in a Networked Society, IFIP TC3/WG3.1 Open Conference on Communication and Networking in Education, June 13—18, 1999, Aulanko, Finland. IFIP Conference Proceedings, Kluwer, v. 163. — P. 25–38.

42. Симур Паперт и образовательные технологии в российской перспективе // Ред. А. Л. Семенов. М.: МИПКРО-ПРЕСС, 2001.

43. Антология гуманной педагогики. Лао-Цзы. // Сост. и авт. предисл. А. Л. Семенов. М., Изд. дом Ш. Амонашвили, Моск. гор. пед. ун-т, 2001. — 217 с. ISBN 5-89147-036-5.

44. Firsov Victor, Semenov Alexey. School Mathematics in Russia // «National Presentations: Russia», 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, 2004.

45. Семенов А. Л. Цифровые образовательные ресурсы для общего среднего и начального профессионального образования. // М., Национальный фонд подготовки кадров, 2005. – 18 с.

46. Семенов А. Л. Качество информатизации школьного образования // Вопросы образования, 2005, № 3. – С. 248–270.

47. Булин-Соколова Е. И., Семенов А. Л. Школа информатизации: путь к обновлению образования. // Информатика и образование, 2009, № 11. — С. 3–12.

48. Асмолов А., Семенов А., Уваров А. Мы ждем перемен. Чему и как будет учиться подрастающее поколение в XXI веке. // Дети в информационном обществе, 2010, № 5. — С. 20.

49. Асмолов А. Г., Семенов А. Л., Уваров А. Ю. Российская школа и новые информационные технологии: взгляд в следующее десятилетие. // М., Изд-во «НексПринт», 2010. – 95 с. ISBN 978-5-904731-03-8.

50. Булин-Соколова Е. И., Рудченко Т. А., Семенов А. Л., Хохлова Е. Н. Формирование ИКТ-компетентности младших школьников: пособие для учителей общеобразоват. учреждений. // М., Просвещение, 2012. — 128 с. ISBN 978-5-09-026513-3.

51. «Две культуры» сегодня. Математика и литература. Занятия литературой в гуманитарных и математических классах. Сочинения, игры, путешествия. // Под общ. ред. А. Л. Семенова. М.: Московский институт открытого образования, Институт новых технологий, 2013. – 245 с.

52. Семенов А. Л. Концепция развития российского математического образования (ход проекта) // Математика в школе. 2013. № 9. – С. 3–5.

53. Семенов А. Л., Атанасян С. Л. О концепции развития российского математического образования // Наука – образованию. 2013. № 2. – С. 6.

54. Семенов А. Л. «Две культуры» в современной школе (часть 1). // Математика в школе, 2014, № 5. – С. 21–26.

55. Семенов А. Л. «Две культуры» в современной школе (часть 2). // Математика в школе, 2014, № 6. – С. 21–26.

56. Булин-Соколова Е. И., Обухов А. С., Семенов А. Л. Будущее педагогическое образование. Направление движения и первые практические шаги // Психологическая наука и образование, 2014, т. 19, № 3. – С. 207–226.

57. Высоцкий И. Р., Захаров П. И., Панферов В. С., Посицельский С. Е., Семенов А. В., Семенова М. А., Сергеев И. Н., Смирнов В. А., Шестаков С. А., Шноль Д. Э., Семенов А. Л., Ященко И. В. К демонстрационной версии ЕГЭ от 31.10.13. Базовый и профильный уровни ЕГЭ 2014. // М., Экзамен, 2014. – 56 с. ISBN 978-5-377-07945-3.

58. Семенов А. Л. Вариативная математика // Образовательная политика, 2015, № 1 (67). – С. 95–97.

59. Семенов А. Л. О реализации концепции математического образования. // Наука и школа, № 6, 2016. – С. 57–60.

60. Семенов А. Л. Концептуальные проблемы информатики, алгоритмики и программирования в школе. // Вестник кибернетики, Международный журнал, № 2(22), 2016. – С. 11–15.

61. Семенов А. Л. Учим учиться и учить. О возрождении педагогического образования, принципах работы педагогического университета и перспективах его выпускников. // Российская газета, 7127(259), 15 ноября 2016 г.

62. Семенов А. Л. Симор Паперт и мы. Конструкционизм – образовательная философия XXI века // Вопросы образования, № 1, 2017. – С. 269–294. ISSN 1814-9545.

63. Семенов А. Л., Уваров А. Ю. Обновление технологического образования и информатизация школы // Вестник московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования», № 4, 2017. – С. 17–31.

64. Polikarpov S. A., Semenov A. L. Mathematics for the 21th Century School: The Russian Experience and International Prospects // Proceedings of the 13th international Congress on Mathematical Education (ICME-13). Springer, 2017. – Pp. 675–676. ISBN 978-3-319-62596-6.

65. Кузьминов Я. И., Фрумин И. Д., Абанкина И. В., Алашкевич М. Ю., Болотов В. А., Добрякова М. С., Дудырев Ф. Ф., Зиньковский К. В., Корешникова Ю. В., Коршунов И. А., Косарецкий С. Г., Мерцалова Т. А., Овакимьян А. Г., Одоевская Е. В., Платонова Д. П., Семенов А. Л., Семенов Д. С., Сергоманов П. А., Сорокин П. С., Уваров А. Ю., Шилова Н. П. Новое технологическое образование в школе и СПО. // Сб. «Как сделать образование двигателем социально-экономического развития?», серия коллективных монографий «Российское образование: достижения, вызовы, перспективы». Ред. Я. И. Кузьминов, И. Д. Фрумин). М.: Изд. дом ВШЭ, 2019. ISBN: 978-5-7598-1995-0. DOI: 10.17323/978-5-7598-1995-0.

66. Семенов А. Л. Возможно ли преодоление цифрового разрыва между школой и жизнью? // Цифровое общество как культурно-исторический контекст развития человека. Сб. науч. статей. Под общ. ред. Р. В. Ершовой. Коломна, Государственный социально-гуманитарный университет, 2020. – С. 350–354. ISBN 978-5-98492-462-7.

67. Семенов А. Л. Результативное образование расширенной личности в прозрачном мире на цифровой платформе // Сб. трудов III Международной научно-практической конференции «Герценовские чтения: психологические исследования в образовании», Санкт-Петербург, 1–2 октября 2020 г. РГПУ им. А. И. Герцена, вып. 3, 2020. – С. 590–596. DOI 10.33910/herzenpsyconf-2020-3-271.

68. Бетелин В. Б., Кушниренко А. Г., Семенов А. Л., Сопрунов С. Ф. О цифровой грамотности и средах ее формирования // Информатика и ее применения, т. 14, вып. 4, 2020. – С. 102–109.

Издания ЮНЕСКО

69. Семенов А. Л., Книерзингер А., Марчева К., Резвик С., Шмидт Э., Информатика в начальном образовании. Рекомендации ЮНЕСКО. // Пер. с англ. Под общ. ред. А. Л. Семенова. ИИТО ЮНЕСКО, 2000. -– 92 с.

70. Аллен Н., Андерсон Дж., Дэвис Н., Муранов А., Томас Л., Уваров А. Информационные и коммуникационные технологии в подготовке преподавателей. Руководство по планированию // Авторизованный пер. с англ., переработанный и дополненный. Координаторы Е. Хвилон, М. Патру. Редактор-координатор русского перевода А. Семенов. Париж, ЮНЕСКО. М., ИНТ, 2005. — 288 с.

71. Андерсон Дж., Вирт Т. ван, Алагумалаи С., Уоррен Дж., Семенов А. Информационные и коммуникационные технологии в образовании: учебные планы для средней школы и программы подготовки преподавателей // Авторизованный пер. с англ., переработанный и дополненный. Координаторы Е. Хвилон, М. Патру. Редактор-координатор русского перевода А. Семенов. Париж, ЮНЕСКО. М., ИНТ, 2005. – 168 с.

72. Мур М., Тейт А., Реста П., Гревил Р., Запарованный Ю. Открытое и дистанционное обучение: тенденции, политика и стратегии // Пер. с англ., переработанный и дополненный. Координаторы Е. Хвилон, М. Патру. Редактор-координатор русского перевода А. Семенов. Париж: ЮНЕСКО. – М.: ИНТ, 2005. – 139 с.

73. Семенов А., Переверзев Л., Булин-Соколова Е. Информационные и телекоммуникационные технологии в общем образовании. Теория и практика — Information and Communication Technologies in Schools. A handbook for Teachers or How ICT Can Create New, Open Learning Environments // Авторизованный перевод с англ. Переработанный и дополненный. Координатор М. Патру. Париж, ЮНЕСКО. М., ИНТ, 2006. – 327 с.

74. Калаш И., Булин-Соколова Е., Веракса А., Посицелькая М., Рубцов В., Семенов А., Токарева Н., Туйчиева И., Цапенко М. Возможности информационных и коммуникационных технологий в дошкольном образовании. Аналитический обзор // Редактор-координатор русского перевода А. Семенов. М., ЮНЕСКО, 2011. — 176 с.

75. Kalaš I., Bannayan H. E., Conery L., Laval E., Laurillard D., Lim C. P., Musgrave S., Semenov A., Turcsányi-Szabó M. ICT in Primary Education Volume 1: Exploring the Origins, Settings and Initiatives. // Moscow, Russian Federation: UNESCO Institute for Information Technologies in Education, 2012. — 136 c.

Учебники

76. Ершов А. П., Кушниренко А. Г., Лебедев Г. В. Семенов А. Л., Шень А. Х. и др. Основы информатики и вычислительной техники. Пробный учебник для сред. учеб. заведений. // Под ред. А. П. Ершова. М., Просвещение, 1988. – 206 с. ISBN 5-09-000593-1.

77. Семенов А. Л., Рудченко Т. А. Информатика 5 класс. Учебно-методический комплект (учебник, тетрадь, проектов, книга для учителя). // М., «Просвещение», ИНТ, 2006.

78. Звонкин А. К., Ландо С. К., Семенов А. Л. Информатика. Алгоритмика 6 класс. Учебник. // М., «Просвещение», 2006. ISBN 978-5-09-014569-5.

79. Звонкин А. К., Ландо С. К., Семенов А. Л. Информатика. Алгоритмика 7 класс. Учебник. М., «Просвещение», 2008. ISBN 978-5-09-015963-0.

80. Рудченко Т. А., Семенов А. Л. Информатика. 1—4 классы. Учебно-методический комплект (учебники, рабочие тетради, тетради проектов для каждого года обучения) для общеобразоват. организаций. // М., Просвещение, ИНТ, серия «Перспектива», 2011—2012.

81. Семенов А. Л., Рудченко Т. А. Информатика. 3–4 классы. В 3 частях. Учебно-методический комплект (учебники, рабочие тетради, тетради проектов для общеобразоват. организаций. // М., Просвещение, ИНТ, серия «Школа России», 2019.

82. Семенов А. Л., Посицельская М. А., Посицельский С. Е. и др. Математика и информатика. 1—4 классы. Учебно-методический комплект (учебники и задачники для каждого года обучения) для общеобразоват. организаций. // М., МЦНМО, ИНТ, 2012—2019.

83. Семенов А. Л., Рудченко Т. А. Информатика. 5–6 классы. Учебно-методический комплект (учебник, тетрадь проектов, поурочные разработки для каждого года обучения) для общеобразоват. организаций. // М., «Просвещение», 2019.

LIST OF SELECTED WORKS BY ACADEMIC A. L. SEMENOV

Mathematics

1. Semenov, A. L. 1973, "Algoritmicheskie problemy dlya stepennyh rjadov i kontekstno-svobodnyh grammatik – Algorithmic problems for power series and context-free grammars", *Proc. USSR Acad. Sci.,* vol. 212, pp. 50–52.

2. Semenov, A. L. 1974, "Regularity of languages k-linear for various k", *Sov. Math., Dokl.*, 15, pp. 492–496.

3. Semenov, A. L. 1977, "Presburgerness of Predicates Regular in Two Number Systems", *Siberian Mathematical Journal*, v. 18, № 2, pp. 289–300.

4. Semenov, A. L. 1978, "Some algorithmic problems for systems of algorithmic algebras", *Sov. Math., Dokl.*, 19, pp. 490–493.

5. Semenov, A. L. 1980, "On Certain Extentions of the Arithmetic of Addition of Natural Numbers", *Mathematics of the USSR – Izvestia*, v. 15, № 2, pp. 401–418.

6. Semenov, A. L. 1980, "An interpretation of free algebras in free groups", *Sov. Math., Dokl.*, 21, pp. 952–955.

7. Uspensky, V. A. & Semenov, A. L. 1981, "What are the Gains of the Theory of Algorithms: Basic Developments Connected with the Concept of Algorithm and with Its Applications in Mathematics", *Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science, Urgench, UzbekSSR, September 16–22, 1979. Proceedings,* Lecture Notes of Computer Science, v. 122, pp. 100–234.

8. Semenov, A. L. 1982, "On the definability of arithmetic in its fragments", *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 263:1, pp. 44–47.

9. Semenov, A. L. 1983, "Logical theories of one-place functions on the set of natural numbers", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.,* 47(3), pp. 623—658.

10. Semenov, A. L. 1984, "Decidability of Monadic Theories", *Mathematical Foundations of Computer Science, Praha, Czechoslovakia, September 3–7, Proceedings,* Lecture Notes in Computer Science, v. 176, pp. 162–175.

11. Uspensky, V. A. & Semenov, A. L. 1987, *Teoria algoritmov: osnovnye otkrytia i prilozhenya – Theory of algorithms: main discoveries and applications,* Moscow, Science, "Programmer's library" series, 288 pp.

12. Uspensky, V. A. & Semenov, A. L. 1987, "Algoritmy, ili mashiny Kolmogorova – Algorithms, or Kolmogorov machines", In *A. N. Kolmogorov. Information theory and algorithm theory. Selected works.* Ed. by A. N. Shiryaev. Moscow, Nauka, pp. 279–289.

13. Uspensky, V. A., Semenov, A. L. & Shen, A. 1990, "Can an (individual) sequence of zeros and ones be random?" *Russian Math. Surveys,* 45, No. 1, pp. 121–189.

14. Uspensky, V. A. & Semenov, A. L. 1993, *Algorithms: Main Ideas and Applications,* Kluwer Academic Publishers, 269 p. ISBN 978-90-481-4256-2.

15. Muchnik, An. A., Semenov, A. L. & Uspensky, V. A. 1998, "Mathematical Metaphysics of Randomness", *Theoretical Computer Science,* v. 207, № 2, pp. 263–317.

16. Semenov, A. & Muchnik, A. A. 2001, "Single intermediate degrees in some classical reducibilities", *Abstracts of International conference "Mathematical Logic, Algebra and Set Theory", dedicated to the 100th anniversary of P. S. Novikov,* Moscow.

17. Semenov, A. L. 2002, *Matematika tekstov – Mathematics of Texts,* Moscow, Publishing House of the Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 16 pp.

18. Muchnik, A. A. & Semenov, A. L. 2003, "On the Role of the Law of Large Numbers in the Theory of Randomness", *Problems of Information Transmission,* vol. 39, pp. 119–147. doi: 10.1023/A:1023638717091/

19. Semenov, A. L. & Muchnik, A. A. 2003, "An Improvement of Kolmogorov's Estimates Related to Random Number Generators and a Definition of Randomness in terms of complexity", *Proceedings of the Russian Academy of Sciences,* vol. 68(1), pp. 132–134.

20. Muchnik, Andrej, Semenov, Alexei & Ushakov, Maksim. 2003, "Almost Periodic Sequences", *Theoretical Computer Science,* Elsevier BV, Netherlands, v. 1, № 304, pp. 1–33.

21. Semenov, A. L. & Muchnik, A. A. 2003, "40 years of the Origin of Kolmgorov Randomness Theory", *Kolmogorov i sovremennaja matematika. Abstracts of reports of the international conference, dedicated to the 100th anniversary of A. N. Kolmogorov (25.04.1903–20.10.1987),* Moscow, pp. 677–678.

22. Semenov, A. L. & Muchnik, A. A. 2006, "The Quality of Prediction and Optimal Predictions Based on Two Experts", *Abstracts of International Workshop "Kolmogorov Complexity and Applications", Dagstuhl, Germany, January 29 — February 03, 2006.*

23. Muchnik, Andrej & Semenov, Alexei. 2006, "Effective Bounds for Convergence, Descriptive Complexity, and Natural Examples of Simple and Hypersimple Sets", *Annals of Pure and Applied Logic,* Elsevier BV, Netherlands, v. 141, № 3, pp. 437–441.

24. Adyan, S. I., Semenov, A. L. & Uspensky, V. A. 2007, "Andrej Albertovich Muchnik (Nekrolog) -– Andrej Albertovich Muchnik (Obituary)", *Russian Mathematical Surveys,* 62(4), pp. 775–779.

25. Muchnik, A. A., Pritykin, Yu. L. & Semenov, A. L. 2009, "Sequences close to periodic", *Russian Mathematical Surveys,* 64:5, pp. 805–871.

26. Semenov, A. L. & Soprunov, S. F. 2011, "Finite quantifier hierarchies in relational algebras", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,* 274, pp. 267–272.

27. Semenov, A. L. & Soprunov, S. F. 2011, "Lattice of relational algebras definable in integers with successor", *arXiv:1201.4439 [math.LO].*

28. Semenov, A., Soprunov, S. & Uspensky, V. 2014, "The Lattice of Definability. Origins, Recent Developments, and Further Directions", *Computer Science – Theory and Applications,* Springer International Publishing, pp. 23–38. DOI: 10.1007/978-3-319-06686-8_3/

29. Semenov, A. L. & Soprunov, S. F. 2015, "A combinatorial version of the Svenonius theorem on definability", *Logic Journal of IGPL,* 23.6, pp. 966–975.

30. Muchnik, An. A. & Semenov, A. L. 2020, "Lattice of Definability in the Order of Rational Numbers", *Mathematical Notes,* 108:1, pp. 94–107. DOI: `https://doi.org/10.4213/mzm12651`.

31. Semenov, A. L. 2020, “Mappings preserving relations definable by linear order”, *Moscow University Bulletin,* vol. 75, No. 5, pp. 222–226. ISSN 0027-1322.

Computer engineering, computer science

32. Semenov, A. L. & Semenova, E. T. 1971, *Yazyk programmirovaniya APL – Programming language APL,* Moscow, Moscow Energ. Inst., 96 pp.

33. Semenov, A. L. & Soprunov, S. F. 1985, “O yazyke kombinatorno-logicheskogo processora – About the language of the combinatorial logic processor“, *Efficient use of high-performance computers. A series of Questions of Cybernetics,* Scientific Council on the Complex problem “Cybernetics“ of the USSR Academy of Sciences, v. 117, pp. 182–191.

34. Semenov, A. L. & Uspensky, V. A. 1986, “Matematicheskaya logika v vychislitelnyh naukah i vychislitelnoj praktike – Mathematical logic in computer science and computer programming“, *Vestnik Akad. Nauk SSSR,* No. 7, pp. 93–103.

35. Vovk, V. G., Semenov, A. L. & Soprunov, S. F. 1988, “Nekotoryj sposob proverki pravilnosti programm na Assemblere – Some way to check the correctness of programs in Assembler“, *Methods and algorithms for analyzing large systems,* ed. by V. G. Karmanov. Questions of cybernetics. Scientific Council on the complex problem “Cybernetics“ of the Academy of Sciences of the USSR, v. 136, pp. 56–77.

36. Semenov, A. L. 2015, “O fundamentalnyh ponyatiyah kibernetiki i informatiki – About the fundamental concepts of cybernetics and computer science“, *Vestnik Kibernetiki,* № 3(19), pp. 22–26.

37. Semenov, A. L., Vardanyan, V. A., Vishnyakov, Yu. S., Gukasov, I. I., Rudchenko, T. A. & Uvarov, A. Yu. 2020, “Naslediye A.I. Berga v kiberketike i obrazovanii. Ot Soveta po Kibernetike k Institutu Berga – Axel Berg’s Legacy in Cybernetics and Education. From the Council on Cybernetics to Axel Berg Institute“, *Proceedings of the V International Conference “Development of Computer Technology in Russia, the Former USSR and COMECON: History and Prospects“ (SORUCOM-2020), 6–7 October 2020, Moscow.* Ed. by A. N. Tomilin. Higher School of Economics, pp. 277–284. ISBN 978-5-6044274-3-9.

School education

38. Vishnyakov, Yu. S., Gruntal, A., Koltsova, A., Pachikov, S., Semenov, A. L., Shen, A. at al. 1987, *Prostoye i slozhnoye v programmirovanii – Simple and complex in programming,* author’s preface by E. P. Velikhov. Moscow, Nauka, 176 pp. ISBN: 5-02-006595-1.

39. Semenov, A. L. 1996, “Informatika v rossijskoj shkole: doklad na plenarnomn zasedanii II Mezhdunarodnogo kongressa UNESKO «Obrazovanije i informatika» – Informatics in the Russian secondary school: report at the plenary session of the II International Congress of UNESCO «Education and Informatics»“, *Informatics and Education,* No. 5, p. 29.

40. Lando, S. K. & Semenov, A. L. 1998, “Algoritmika: uchebnaya programma kursa – Algorithmics: the curriculum of the course“, *Informatics and Education,* No. 3, p. 94.

41. Semenov, Alexei. 1999, “Technology in Transforming Education“, *Communication and Networking in Education: Learning in a Networked Society, IFIP TC3/WG3.1, Open Conference on Communication and Networking in Education, June 13—18, 1999, Aulanko, Finland.* IFIP Conference Proceedings, Kluwer, v. 163, pp. 25–38.

42. Semenov, A. L., ed. 2001, *Seymour Papert i obrazovatelnye tehnologii v rossijskoj perspektive – Seymour Papert and educational technologies in the Russian perspective,* Moscow, MIPKRO-PRESS.

43. Semenov, A. L., ed. 2001, *Antologia gumannoj pedagogiki. Lao Tsy – Anthology of Humane Pedagogy. Lao Tzu,* Comp. and the author's preface by A. L. Semenov, House of Sh. Amonashvili, Moscow City Pedagogical University, 217 pp. ISBN 5-89147-036-5.

44. Firsov, Victor & Semenov, Alexey. 2004, "School Mathematics in Russia", *National Presentations: Russia, 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, 2004.*

45. Semenov, A. L. 2005, *Cifrovye obrazovatelnye resursy dlya obshchego srednego i nachalnogo professionalnogo obrazovaniya – Digital educational resources for general secondary and primary vocational education,* Moscow, National Personnel Training Foundation, 18 pp.

46. Semenov, A. L. 2005, "Kachestvo informatizatsii shkolnogo obrazovanija – The quality of the Informatization of school education", *Education issues,* No. 3, pp. 248–270.

47. Bulin-Sokolova, E. I. & Semenov, A. L. 2009, "Shkola informatizatsii: put' k obnovleniju obrazovanija – School of informatization: the path to the renewal of education", *Informatics and Education,* No. 11, pp. 3–12.

48. Asmolov, A., Semenov, A. & Uvarov, A. 2010, "My zhdem peremen. Chemu i kak budet uchitsya podrastayushchee pokoleniye v XXI veke – We are waiting for the changes. What and how the younger generation will learn in the XXI century", *Children in the Information Society,* No. 5, pp. 20.

49. Asmolov, A. G., Semenov, A. L. & Uvarov, A. Yu. 2010, *Rossijskaya shkola i novye informatsyonnye tehnologii: vzglyad v sleduyushchee desyatiletiye – Russian school and new information technologies: a look into the next decade,* // Moscow, NexPrint publ., 95 pp. ISBN 978-5-904731-03-8.

50. Bulin-Sokolova, E. I., Rudchenko, T. A., Semenov, A. L. & Hohlova, E. N. 2012, *Formirovaniye IKT-kompetentnosti mnladshih shkolnikov: posobiye dlya uchitelej obshcheobrazovat. uchrezhdenij – Formation of ICT competence of junior schoolchildren: a guide for teachers of general education. institutions,* Moscow, Prosveshchenie, 128 pp. ISBN 978-5-09-026513-3.

51. Semenov, A. L., ed. 2013, *"Dve kultury" segodnya. Matematika i literatura. Zanyatiya literaturoj v gumanitarnyh i matematicheskih klassah. Sochineniya, igry, puteshestviya. – "The two cultures" today. Mathematics and literature. Literature classes in humanities and mathematics classes. Essays, games, travel.* // Under the general editorship of A. L. Semenov. Moscow, Institute of Open Education, Institute of New Technologies, 245 pp.

52. Semenov, A. L. 2013, "Koncepciya razvitiya rossijskogo matematicheskogo obrazovaniya (hod proyekta) – The concept of development of Russian mathematical education (project progress)", *Mathematics at school,* No. 9, pp. 3–5.

53. Semenov, A. L. & Atanasyan, S. L. 2013, "O koncepcii razvitiya rossijskogo matematicheskogo obrazovaniya – On the concept of development of Russian mathematical education", *Nauka – obrazovaniyu,* No. 2, p. 6.

54. Semenov, A. L. 2014, "«Dve kultury» v sovremennoj shkole (chast 1) – «Two cultures» in the modern school (part 1)", *Mathematics at school,* No. 5, pp. 21–26.

55. Semenov, A. L. 2014, "«Dve kultury» v sovremennoj shkole (chast 1) – «Two cultures» in the modern school (part 1)", *Mathematics at school,* No. 6, pp. 21–26.

56. Bulin-Sokolova, E. I., Obuhov, A. S. & Semenov, A. L. 2014, "Budushchee pedagogicheskoye obrazovaniye. Napravlenie dvizheniya i pervyye prakticheskiye shagi – The future of teacher education. Direction of movement and first practical steps", *Psychological science and Education,* v. 19, No. 3, pp. 207–226.

57. Vysotsky, I. R., Zaharov, P. I., Panfyorov, V. S., Posicelsky, S. E., Semenov, A. V., Semenova, M. A., Sergeev, I. N., Smirnov, V. A., Shestakov, S. A., Shnol, D. E., Semenov, A. L. & Yashchenko, I. V. 2014, *K demonstracionnoj versii EGE ot 31.10.13. Bazovyj i profilnyj urovni EGE – To the demo version of the Unified State Exam from 31.10.13. Basic and profile levels of the Unified State Exam,* Moscow, Ekzamen, 56 pp. ISBN 978-5-377-07945-3.

58. Semenov, A. L. 2015, "Variativnaya matematika – Variative mathematics", *Educational policy,* No. 1(67), pp. 95–97.

59. Semenov, A. L. 2016, "O realizacii koncepcii matematicheskogo obrazovaniya – On the implementation of the concept of mathematical education", *Science and School,* No. 6, pp. 57–60.

60. Semenov, A. L. 2016, "Konceptualnye problemy informatiki, algoritmiki i programmirovaniya v shkole – Conceptual problems of computer science, algorithmics and programming in school", *Journal of Cybernetics, the international journal,* No. 2(22), pp. 11–15.

61. Semenov, A. L. 2016, "Uchim uchitsya i uchit'. O vozrozhdenii pedagogicheskogo obrazovaniya, principah raboty pedagogicheskogo universiteta i perspektivah ego vypusknikov – We teach to learn and teach. On the revival of pedagogical education, the principles of the pedagogical University and the prospects of its graduates", *Rossiyskaya Gazeta,* 7127(259), November 15, 2016.

62. Semenov, A. L. 2017, "Seymour Papert i my. Konstrukcionizm – obrazovatelnaya filosofiya XXI veka – Seymour Papert and us. Constructionism – educational philosophy of the XXI century", *Education issues,* No. 1, pp. 269–294. ISSN 1814-9545.

63. Semenov, A. L., & Uvarov, A. Yu., 2017, "Obnovleniye tehnologicheskogo obrazovaniya i informatizaciya shkoly – Renovation of technological education and informatization of the school", *// Bulletin of the Moscow City Pedagogical University. Series "Informatics and informatization of education",* No. 4, pp. 17–31.

64. Polikarpov, S. A., & Semenov, A. L., 2017, "Mathematics for the 21th Century School: The Russian Experience and International Prospects", *Proceedings of the 13th international Congress on Mathematical Education (ICME-13),* Springer, pp. 675–676. ISBN 978-3-319-62596-6.

65. Kuzminov, Ya. I., Frumin, I. D., Abankina, I. V., Alashkevich, M. Yu., Bolotov, V. A., Dobriakova, M. S., Dudyrev, F. F., Zinkovsky, K. V., Koreshnikova, Yu. V., Korshunov, I. A., Kosaretsky, S. G., Mertsalova, T. A., Ovakimyan A. G., Odoevskaya, E. V., Platonova, D. P., Semenov, A. L., Semenov, D. S., Sergomanov, P. A., Sorokin, P. S., Uvarov, A. Yu. & Shilova, N. P. 2019, "Novoye tehnologicheskoye obrazovaniye v shkole i SPO – New technological education in schools and vocational schools", *How to make education an engine of socio-economic development?,* a series of collective monographs "Russian education: achievements, challenges, prospects". Ed. by Ya. I. Kuzminov, I. D. Frumin. Moscow: Publishing House of the Higher School of Economics. ISBN: 978-5-7598-1995-0. DOI: 10.17323/978-5-7598-1995-0.

66. Semenov, A. L. 2020, “Vozmozhno li preodoleniye cifrovogo razryva mezhdu shkoloj i zhiznjyu? – Is it possible to bridge the digital divide between school and life?“ *Digital society as a cultural and historical context of human development. Sat. nauch. articles.* Under the general editorship of R. V. Ershova. Kolomna, State Social and Humanitarian University, pp. 350–354. ISBN 978-5-98492-462-7.

67. Semenov, A. L. 2020, “Rezultativnoye obrazovaniye rasshirennoj lichnosti v prozrachnom mire na cifrovoj platforme – Effective education of an extended personality in a transparent world on a digital platform,“ *Proceedings of the III International Scientific and Practical Conference “Herzen Readings: Psychological Research in Education“, St. Petersburg, October 1–2, 2020,* Herzen Pedagogical Univ., No. 3, pp. 590–596. DOI 10.33910/herzenpsyconf-2020-3-271.

68. Betelin, V. B., Kushnirenko, A. G., Semenov, A. L. & Soprunov, S. F. 2020, “O cifrovoj gramotnosti i sredah ee formirovanija – On digital literacy and the environment of its formation“, *Informatics and its applications,* v. 14, No. 4, pp. 102–109.

UNESCO publications

69. Semenov, A., Knierzinger, A. J., Martcheva, K., Roesvik, S. & Schmidt, E. 2000, *Informatics for Primary Education. Recommendations.* Russian transl. ed. A. Semenov. Russian Federation: UNESCO Institute for Information Technologies in Education, Moscow, 92 pp.

70. Allen, N., Anderson, J., Davis, N., Muranov, A., Thomas, L. & Uvarov, A. 2005. *Information and communication technologies in teacher training. Planning guide.* Transl. from eng., revised and expanded. Coordinators: E. Khvilon, M. Patru. Coordinator and Russian transl. ed. A. Semenov. Paris: UNESCO, Moscow: INT, 288 pp.

71. Anderson, J., Weert, T. van, Alagumalai, S., Warren, J. & Semenov, A. 2005, *Information and communication technologies in education: secondary school curricula and teacher training programs,* Authorized translation from English, revised and expanded. Coordinators E. Khvilon, M. Patru. Coordinator and Russian transl. ed. A. Semenov. Paris: UNESCO, Moscow: INT, 168 pp.

72. Moore, M. G., Tait, A., Resta, P., Rumble, G. & Zaparovanny, Yu. 2005, *Open and distance learning. Trends, policies and strategies.* Transl. from eng., revised and expanded. Coordinators: E. Khvilon, M. Patru. Coordinator and Russian transl. ed. A. Semenov. Paris: UNESCO. Moscow: INT, 139 pp.

73. Semenov, A., Pereverzev, L. & Bulin-Sokolova, E. 2006, *Information and Communication Technologies in Schools. A handbook for Teachers or How ICT Can Create New, Open Learning Environments,* Authorized translation from English, revised and expanded. Coordinator M. Patru. Paris: UNESCO. Moscow: INT, 327 pp.

74. Kalaš, I., Bulin-Sokolova, E., Posicelskaja, M., Tokareva, N., Tsapenko, M., Tuychieva, I., Rubtsov, V., Semenov, A. & Veraksa, A. 2011, *Recognizing the potential of ICT in early childhood education. Analytical survey.* Russian transl. ed. A. Semenov. Moscow, Russian Federation: UNESCO Institute for Information Technologies in Education, 176 pp.

75. Kalaš, I., Bannayan, H. E., Conery, L., Laval, E., Laurillard, D., Lim, C. P., Musgrave, S., Semenov, A. & Turcsányi-Szabó, M. 2012, *ICT in Primary Education Volume 1: Exploring the Origins, Settings and Initiatives.* Russian transl. ed. A. Semenov. Russian Federation: UNESCO Institute for Information Technologies in Education, Moscow, 136 pp.

Textbooks

76. Ershov, A. P., Kushnirenko, A. G., Lebedev, G. V. Semenov, A. L., Shen, A. H. et al. 1988, *Osnovy informatiki i vychislitelnoj tehniki – Fundamentals of Computer Science and Engineering,* A trial textbook for general educ. org., ed. by A. P. Ershov. Moscow, Prosveshchenie, 1988, 206 pp. ISBN 5-09-000593-1.

77. Semenov, A. L. & Rudchenko, T. A. 2006, *Informatika 5 – Informatics, 5 grade.* Educational set (textbook, project notebook, teachers handbook) for general educ. organizations. Moscow, Prosveshchenie, Institute of New Technologies.

78. Zvonkin, A. K., Lando, S. K. & Semenov, A. L. 2006, *Informatika. Algoritmika 6 – Informatics, algorithmics, 6 grade.* Textbook for general educ. organizations. Moscow, Prosveshchenie, Institute of New Technologies. ISBN 978-5-09-014569-5.

79. Zvonkin, A. R., Lando, S. K. & Semenov, A. L. 2008, *Informatika. Algoritmika 77 – Informatics, algorithmics, 7 grade.* Textbookfor general educ. organizations. Moscow, Prosveshchenie, Institute of New Technologies. ISBN 978-5-09-015963-0.

80. Rudchenko T. A. & Semenov, A. L. 2011–2012, *Informatika 1–4 klassy – Informatica. 1–4 grades.* Educational set (textbooks, workbooks, project notebooks for each year of study) for general educ. organizations. Moscow, Prosveshchenie, Institute of New Technologies, "Perspektiva" series.

81. Semenov, A. L. & Rudchenko T. A. 2019, *Informatika. 3–4 klassy – Informatica. 3–4 grades.* In 3 parts. Educational set (textbooks, workbooks, project notebooks for each part) for general educ. organizations. Moscow, Prosveshchenie, Institute of New Technologies, "Shkola Rossii" series.

82. Semenov, A. L., Posicelskaja, M. A., Posicelskij, S. E., Rudchenko, T. A. et al. 2012–2019, *Matematika i informatika.. 1–4 klassy – Mathematics and Informatics 1–4 grades.* Educational set (textbooks and workbooks for each year of study) for general educ. organizations. Moscow, MCCME, INT.

83. Semenov, A. L. & Rudchenko, T. A. 2019, *Informatika 5–6 klasses – Informatics 5–6 grades.*. Educational set (textbook, project notebook, teachers handbook for each year of study) for general educ. organizations. Moscow, Prosveshchenie.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Путятин Н. Н. Радиоконструирование: методическое пособие для руководителей радиокружков. // Москва, ДОСААФ, 1975. – 222 с.

2. Церковь св. Власия на Старой Конюшенной слободе. [Электронный ресурс] `https://hram-vlasiya.ru` (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

3. Константинов Н. Н. Математические кружки раньше... // Математическое образование, сер. 3, № 6. – С. 38–48 (дата обращения 25 декабря 2020 г.). `http://www.mathnet.ru/links/4969931a838d2cd422dbc2ed8712b8bd/mp98.pdf`.

4. Научно-исследовательский зоологический музей МГУ им. М. В. Ломоносова. [Электронный ресурс] `http://zmmu.msu.ru/musei/istoriya` (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

5. Болибрух А. А. Воспоминания и размышления о давно прошедшем. // Москва, Издательство МЦНМО, 2013. – 128 с. https://mccme.ru/free-books/izdano/2013/Bolibrukh.pdf (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

6. Мучник Альберт Абрамович // Википедия. [Электронный ресурс] https://ru.wikipedia.org/wiki/Мучник,_Альберт_Абрамович (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

7. Адян С. И., Семенов А. Л., Успенский В. А. Андрей Альбертович Мучник (некролог). // Успехи матем. наук, 2007, т. 62, вып. 4(376). – С. 140–144.

8. Семенов А. Л. Алгоритмические проблемы для степенных рядов и контекстно-свободных грамматик. // Доклады Академии наук СССР, 1973, т. 212. – С. 50–52.

9. Salomaa A., Soittola M. Automata-theoretic aspects of formal power series. // Springer New York, Heidelberg, Berlin, 1978. – 171 pp.

10. Cobham A. On the base-dependence of set of numbers recognizable by finite automata. // Math. Systems Theory, 1969, 3:2. – Pp. 186–192.

11. Muchnik An. A. The definable criterion for definability in Presburger arithmetic and its applications. // Theoretical Computer Science, 2003, vol. 290. – Pp. 1433–1444.

12. Semenov, A. L., Soprunov S. F., Uspensky V. A. The lattice of definability. Origins, recent developments, and further directions. // Computer Science – Theory and Applications. Springer International Publishing, 2014. – Pp. 23–38.

13. Elgot C. C., Rabin M. O. Decidability and undecidability of extensions of second (first) order theory of (generalized) successor. // The Journal of Symbolic Logic, 1966, vol. 31.2. – Pp. 169–181.

14. Сопрунов С. Ф. Разрешимые обогащения структур. // Вопросы кибернетики, 1988, т. 134. – С. 175–179.

15. Siefkes D. Undecidable extensions of monadic second order successor arithmetic. // Z. Math. Logik und Grundlagen der Math., 1971, vol. 17. – Pp. 383–394.

16. Семенов А. Л. Логические теории одноместных функций на натуральном ряде. // Известия Академии наук СССР. Сер. матем., 1983, т. 47, № 3. – С. 623–658.

17. Putnam, Hilary. Decidability and essential undecidability. // J. of Symbolic Logic, 1957, vol. 22, no. 1. – Pp. 39–54.

18. Kolmogorov A. N. On tables of random numbers. // Sankhyā, Indian J. Statist., Ser. A, 1963, vol. 25, no. 4. – Pp. 369–376.

19. Семенов А. Л., Мучник А. А. Об уточнении оценок Колмогорова, относящихся к датчикам случайных чисел и сложностному определению случайности. // Доклады Академии наук, 2003, т. 3991, № 6. – С. 738–740.

20. Мучник Ан. А., Семенов А. Л. О роли закона больших чисел в теории случайности. // Проблемы передачи информации. 2003. Т. 39, вып 1. – С. 134–165.

21. Semenov A., Muchnik An. 40 years of the Origin of Kolmogorov Randomness Theory // Сб. Колмогоров и современная математика. Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова, Москва, 16–21 июня 2003 г. М., Издательство механико-математического факультета МГУ. 2003. – С. 677–678.

22. Семенова Е. Т. Метод автоматического кодирования (распознавания) смысловой информации ограниченного набора слов. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук.: 05.00.00. Моск. энергет. ин-т, Москва, 1966. – 219 с.

23. Семенова Е. Т. Способ кодирования (распознавания) смысловой информации устной речи. // Св-во об изобретении 181882, 13.03.1965. https://rusneb.ru/catalog/000224_000128_0000181882_19660421_A1_SU/ (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

24. Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. // Открытый архив СО РАН. [Электронный ресурс] http://odasib.ru/OpenArchive/Portrait.cshtml?id=Xu_pavl_634993802223476562_2905 (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

25. Семенов А. Л., Варданян В. А., Вишняков Ю. С., Гукасов И. И., Рудченко Т. А., Уваров А. Ю. Наследие А. И. Берга в кибернетике и образовании. От Совета по Кибернетике к Институту Берга // Труды V Международной конференции «Развитие вычислительной техники в России, странах бывшего СССР и СЭВ: история и перспективы» (SORUCOM–2020), 6–7 октября 2020 года, Москва. Под ред. А. Н. Томилина. НИУ ВШЭ, 2020. – С. 277–284. ISBN 978-5-6044274-3-9.

26. Ершов А. П., Кушниренко А. Г., Лебедев Г. В. Семенов А. Л., Шень А. Х. и др. Основы информатики и вычислительной техники. Пробный учебник для сред. учеб. заведений. // Под ред. А. П. Ершова. М., Просвещение, 1988. – 206 с. ISBN 5-09-000593-1.

27. iEARN. Empowers teachers and young people to work together online using the Internet and other new communications technologies. // [Электронный ресурс] https://collaborate.iearn.org/ (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

28. Московский детский клуб «Компьютер». // [Электронный ресурс] http://www.notabene.ru/child/about.html/ (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

29. Временный научно-технический коллектив «Школа-1». // Архив документов академика А. П. Ершова. [Электронный ресурс] http://ershov.iis.nsk.su/ru (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

30. TERC. Because math and science build futures. // [Электронный ресурс] https://www.terc.edu/ (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

31. Семенов А. Л., Книерзингер А., Марчева К., Резвик С., Шмидт Э. Информатика в начальном образовании. Рекомендации ЮНЕСКО. // Пер. с англ. Под общ. ред. А. Л. Семенова. ИИТО ЮНЕСКО, 2000. – 92 с.

32. Андерсон Дж., Вирт Т. ван, Алагумалаи С., Уоррен Дж., Семенов А. Информационные и коммуникационные технологии в образовании: учебные планы для средней школы и программы подготовки преподавателей // Авторизованный пер. с англ., переработанный и дополненный. Координаторы Е. Хвилон, М. Патру. Редактор-координатор русского перевода А. Семенов. Париж, ЮНЕСКО. М., ИНТ, 2005. – 168 с.

33. Аллен Н., Андерсон Дж., Дэвис Н., Муранов А., Томас Л., Уваров А. Информационные и коммуникационные технологии в подготовке преподавателей: руководство по планированию. // Пер. с англ., переработанный и дополненный. Координаторы: Е. Хвилон, М. Парту. Координатор русского перевода А. Семенов. Париж, ЮНЕСКО. М., ИНТ, 2005. – 288 с.

34. Мур М., Тейт А., Реста П., Гревил Р., Запарованный Ю. Открытое и дистанционное обучение: тенденции, политика и стратегии. // Пер. с англ., переработанный и дополненный.

Координаторы Е. Хвилон, М. Патру. Редактор-координатор русского перевода А. Семенов. Париж: ЮНЕСКО. М., ИНТ, 2005. – 139 с.

35. Семенов А., Переверзев Л., Булин-Соколова Е. Информационные и телекоммуникационные технологии в общем образовании. Теория и практика — Information and Communication Technologies in Schools. A handbook for Teachers or How ICT Can Create New, Open Learning Environments // Авторизованный перевод с англ. Переработанный и дополненный. Координатор М. Патру. Париж, ЮНЕСКО. М., ИНТ, 2006. – 327 с.

36. Калаш И., Булин-Соколова Е., Веракса А., Посицелькая М., Рубцов В., Семенов А., Токарева Н., Туйчиева И., Цапенко М. Возможности информационных и коммуникационных технологий в дошкольном образовании. Аналитический обзор // Ред. рус. пер. А. Семенов. М., ЮНЕСКО, 2011. – 176 с.

37. Kalaš I., Bannayan H. E., Conery L., Laval E., Laurillard D., Lim C. P., Musgrave, S., Semenov A., Turcsányi-Szabó M. ICT in Primary Education Volume 1: Exploring the Origins, Settings and Initiatives. // Moscow, Russian Federation: UNESCO Institute for Information Technologies in Education. 2012. – 136 с.

38. Русский язык, математика, информатика. 1-й кл. // ВНТК «Школа-1» [Врем. науч.-техн. коллектив по разраб. пед. прогр. продуктов и созданию системы опережающего образования на основе новых информ. технологий АН СССР; Н. Я. Виленкин и др.]. Пущино : НЦБИ, 1988. – 29 с. Карточка хранения в РГБ: `https://search.rsl.ru/ru/record/01001429761` (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

39. Семенов А. Л., Рудченко Т. А. Информатика. 3–4 классы. В 3 частях. Учебно-методический комплект (учебники, рабочие тетради, тетради проектов, поурочные разработки для каждой части) для общеобразоват. организаций. // М., Просвещение, ИНТ, 2019. Серия «Школа России».

40. Рудченко Т. А., Семенов А. Л. Информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники, рабочие тетради, тетради проектов, поурочные разработки для каждого года обучения) для общеобразоват. организаций // М.: Просвещение, ИНТ, 2011–2012. Серия «Перспектива».

41. Семенов А. Л., Посицельская М. А., Посицельский С. Е., Рудченко Т. А. и др. Математика и информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники и задачники) для общеобразоват. организаций // М.: МЦНМО, ИНТ, 2012–2019.

42. Школа «Технологии обучения». [Электронный ресурс] `http://iclass.home-edu.ru` (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

43. Булин-Соколова Е. И., Обухов А. С., Семенов А. Л. Будущее педагогическое образование. Направление движения и первые практические шаги // Психологическая наука и образование, 2014, т. 19, № 3. – С. 207–226.

44. Семенов А. Л. Учим учиться и учить. О возрождении педагогического образования, принципах работы педагогического университета и перспективах его выпускников. // Российская газета, 7127(259), 15 ноября 2016 г.

45. Хартия цифрового пути российской школы. [Электронный ресурс] `https://rffi.1sept.ru/document/charter` (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

REFERENCES

1. Adyan, S. I., Semenov, A. L. & Uspensky, V. A. 2007, "Andrej Albertovich Muchnik (Nekrolog) – Andrej Albertovich Muchnik (Obituary)", *Russian Mathematical Surveys,* 62(4), pp. 775–779.

2. *Albert Abramovich Muchnik.* Wikipedia. (2020) Available at: https://ru.wikipedia.org/wiki/Мучник,_Альберт_Абрамович (accessed 25 December 2020).

3. Allen, N., Anderson, J., Davis, N., Muranov, A., Thomas, L. & Uvarov, A. 2005. *Information and communication technologies in teacher training. Planning guide.* Transl. from eng., revised and expanded. Coordinators: E. Khvilon, M. Patru. Coordinator and Russian transl. ed. A. Semenov. Paris: UNESCO, Moscow: INT, 288 pp.

4. Anderson, J., Weert, T. van, Alagumalai, S., Warren, J., Semenov, A. 2005, *Information and communication technologies in education: secondary school curricula and teacher training programs,* Authorized translation from English, revised and expanded. Coordinators E. Khvilon, M. Patru. Coordinator and Russian transl. ed. A. Semenov. Paris: UNESCO, Moscow: INT, 168 pp.

5. Bolibruh A. A. 2013, *Vospominaniya i razmyshleniya o davno proshedshem – Memories and reflections on the long past,* Moscow, MCCME, 128 pp. https://mccme.ru/free-books/izdano/2013/Bolibrukh.pdf (accessed 25 December 2020).

6. Bulin-Sokolova, E. I., Obuhov, A. S. & Semenov, A. L. 2014, "Budushchee pedagogicheskoye obrazovaniye. Napravlenie dvizheniya i pervyye prakticheskiye shagi – The future of teacher education. Direction of movement and first practical steps", *Psychological science and Education,* v. 19, No. 3, pp. 207–226.

7. *Church of St. Blaise In the Staraya Konushennaya Sloboda.* (2020) Available at: https://hram-vlasiya.ru (accessed 25 December 2020).

8. Cobham, A. 1969, "On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata", *Math. Systems Theory,* 3, 186—192. doi: 10.1007/bf01746527/

9. Elgot, C. C. & Rabin, M. O. 1966, "Decidability and undecidability of extensions of second (first) order theory of (generalized) successor", *J. symb. log.,* 31, pp. 169—181. doi: 10.2307/2269808.

10. Ershov, A. P., Kushnirenko, A. G., Lebedev, G. V. Semenov, A. L., Shen, A. H. et al. 1988, *Osnovy informatiki i vychislitelnoj tehniki – Fundamentals of Computer Science and Engineering,* A trial textbook for general educ. org., ed. by A. P. Ershov. Moscow, Prosveshchenie, 1988, 206 pp. ISBN 5-09-000593-1.

11. *Hartia cifrovogo puti rossijskoj shkoly – Charter of the digital path of the Russian school.* (2020) Available at: https://rffi.1sept.ru/document/charter (accessed 25 December 2020).

12. *iEARN. Empowers teachers and young people to work together online using the Internet and other new communications technologies.* Available at: https://collaborate.iearn.org/ (accessed 25 December 2020).

13. Kalaš, I., Bannayan, H. E., Conery, L., Laval, E., Laurillard, D., Lim, C. P., Musgrave, S., Semenov, A. & Turcsányi-Szabó, M. 2012, *ICT in Primary Education Volume 1: Exploring the Origins, Settings and Initiatives.* Russian transl. ed. A. Semenov. Russian Federation: UNESCO Institute for Information Technologies in Education, Moscow, 136 pp.

14. Kalaš, I., Bulin-Sokolova, E., Posicelskaja, M., Tokareva, N., Tsapenko, M., Tuychieva, I., Rubtsov, V., Semenov, A. & Veraksa, A. 2011, *Recognizing the potential of ICT in early childhood education. Analytical survey.* Russian transl. ed. A. Semenov. Moscow, Russian Federation: UNESCO Institute for Information Technologies in Education. 176 pp.

15. Kolmogorov, A. N. 1963, "On Tables of Random Numbers", *Sankhyā, Indian J. Statist., Ser. A,* vol. 25, no. 4, pp. 369–376.

16. Konstantinov, N. N. 2002, "Matematicheskiye kruzhki ran'she… — Mathematical circles before…", *Mathematical education*, ser. 3, No. 6, pp. 38–48. Available at: `http://www.mathnet.ru/links/4969931a838d2cd422dbc2ed8712b8bd/mp98.pdf` (accessed 25 December 2020).

17. Moore, M. G., Tait, A., Resta, P., Rumble, G. & Zaparovanny, Yu. 2005, *Open and distance learning. Trends, policies and strategies.* Transl. from eng., revised and expanded. Coordinators: E. Khvilon, M. Patru. Coordinator and Russian transl. ed. A. Semenov. Paris: UNESCO. Moscow: INT, 139 pp.

18. *Moscow children club «Computer».* Available at: `http://www.notabene.ru/child/about.html/` (accessed 25 December 2020).

19. Muchnik, An. A. 2003, "The definable criterion for definability in Presburger arithmetic and its applications", *Theoretical Computer Science,* vol. 290, pp. 1433–1444. doi: 10.1016/s0304-3975(02)00047-6/

20. Muchnik, A. A. & Semenov, A. L. 2003, "On the Role of the Law of Large Numbers in the Theory of Randomness", *Problems of Information Transmission,* vol. 39, pp. 119—147. doi: 10.1023/A:1023638717091/

21. Putnam, H. 1957, "Decidability and Essential Undecidability", *J. Symbolic Logic,* vol. 22, no. 1, pp. 39–54. Available at: `https://projecteuclid.org/euclid.jsl/1183732662` (accessed 25 December 2020).

22. Putyatin N. N. 1975, *Radiokonstruirovaniye: metodicheskoye posobiye dlya rukovoditelej radio-kruzhkov – Radiokonstruktor: Toolkit for radio-club managers,* Moscow, DOSAAF. – 222 pp.

23. Rudchenko T. A. & Semenov A. L. 2011–2012, *Informatika. 1–4 klassy – Informatica. 1–4 grades.* Educational set (textbooks, workbooks, project notebooks for each year of study) for general educ. organizations. Moscow, Prosveshchenie, Institute of New Technologies, "Perspektiva" series.

24. *Russkyj yazyk, matematika, informatika. 1-j kl. – Russian language, mathematics, informatics. 1st grade.* VNTK "Shkola-1" (Temp. Scient.-Tech. team for the development of educational programs and the creation of a system of advanced education based on new information. technologies of the USSR Academy of Sciences; N. Ya. Vilenkin et al). Pushchino, NCBI, 1988. – 29 pp. Catalog card of The Russian National Library: `https://search.rsl.ru/ru/record/01001429761` (accessed 25 December 2020).

25. Salomaa, A. & Soittola, M. 1978, "Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series". *Springer New York.* doi: 10.1007/978-1-4612-6264-0/

26. Semenov, A. L. 1973, "Algoritmicheskie problemy dlya stepennyh rjadov i kontekstno-svobodnyh grammatik – Algorithmic problems for power series and context-free grammars", *Proc. USSR Acad. Sci.,* vol. 212, pp. 50–52.

27. Semenov, A. L. 1983, “Logical theories of one-place functions on the set of natural numbers“, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.,* 47(3), pp. 623–658.

28. Semenov, A. L. 2016, “Uchim uchitsya i uchit’. O vozrozhdenii pedagogicheskogo obrazovaniya, principah raboty pedagogicheskogo universiteta i perspektivah ego vypusknikov – We teach to learn and teach. On the revival of pedagogical education, the principles of the pedagogical University and the prospects of its graduates“, *Rossiyskaya Gazeta,* 7127(259), November 15, 2016.

29. Semenov, A., Knierzinger, A. J., Martcheva, K., Roesvik S. & Schmidt, E. 2000, *Informatics for Primary Education. Recommendations.* Russian transl. ed. A. Semenov. Russian Federation: UNESCO Institute for Information Technologies in Education, Moscow, 92 pp.

30. Semenov, A. L. & Muchnik, A. A. 2003, “40 years of the Origin of Kolmgorov Randomness Theory“, *Kolmogorov i sovremennaja matematika. Abstracts of reports of the international conference., dedicated to the 100th anniversary of A. N. Kolmogorov (25.04.1903–20.10.1987),* Moscow, pp. 677–678.

31. Semenov, A. L. & Muchnik, A. A. 2003, “An Improvement of Kolmogorov’s Estimates Related to Random Number Generators and a Definition of Randomness in terms of complexity“, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences,* vol. 68(1) , pp. 132–134.

32. Semenov, A., Pereverzev, L., Bulin-Sokolova, E. 2006, *Information and Communication Technologies in Schools. A handbook for Teachers or How ICT Can Create New, Open Learning Environments,* Authorized translation from English, revised and expanded. Coordinator M. Patru. Paris: UNESCO. Moscow: INT, 327 pp.

33. Semenov A. L., Posicelskaja M. A., Posicelskij S. E. & Rudchenko T. A. et al. 2012–2019, *Matematika i informatika. 1–4 klassy – Mathematics and Informatics 1–4 grades.* Educational set (textbooks and workbooks for each year of study) for general educ. organizations. Moscow, MCCME, INT.

34. Semenov A. L. & Rudchenko T. A. 2019, *Informatika. 3–4 klassy – Informatica. 3–4 grades.* In 3 parts. Educational set (textbooks, workbooks, project notebooks for each part) for general educ. organizations. Moscow, Prosveshchenie, Institute of New Technologies, “Shkola Rossii“ series.

35. Semenov, A., Soprunov, S. & Uspensky, V. 2014, “The Lattice of Definability. Origins, Recent Developments, and Further Directions“, *Computer Science – Theory and Applications,* Springer International Publishing, pp. 23–38. doi: 10.1007/978-3-319-06686-8_3/

36. Semenov, A. L., Vardanyan, V. A., Vishnyakov, Yu. S., Gukasov, I. I., Rudchenko, T. A. & Uvarov, A. Yu. 2020, “Naslediye A.I. Berga v kiberketike i obrazovanii. Ot Soveta po Kibernetike k Institutu Berga – Axel Berg’s Legacy in Cybernetics and Education. From the Council on Cybernetics to Axel Berg Institute“, *Proceedings of the V International Conference “Development of Computer Technology in Russia, the Former USSR and COMECON: History and Prospects“ (SORUCOM-2020), 6–7 October 2020, Moscow.* Ed. by A. N. Tomilin. Higher School of Economics, pp. 277–284. ISBN 978-5-6044274-3-9.

37. Semenova, E. T. 1965, *Sposob kodirovaniya (raspoznavaniya) smyslovoj informacii ustnoj rechi – Encoding (recognition) method of semantic information of oral speech coding.* Certificate on invention No. 181882, 13.03.1965. `https://rusneb.ru/catalog/000224_000128_0000181882_19660421_A1_SU/` (accessed 25 December 2020).

38. Semenova, E. T. 1966, *Metod avtomaticheskogo kodirovanija (raspoznavaniya) smyslovoj informacii ogranichennogo nabora slov – A method of automatic coding (OCR) semantic information of a limited set of words.* The dissertation on competition of a scientific degree of candidate of technical sciences: 05.00.00. Mosk. energet. in-t, Moscow, 219 pp.

39. *Shkola "Tehnologii obucheniya" – School "Learning Technologies".* Available at: http://iclass.home-edu.ru (accessed 25 December 2020).

40. Siefkes, D. 1971, "Undecidable extensions of monadic second order successor arithmetic", *Z. Math. Logik und Grundlagen der Math.,* vol.17, pp. 383–394.

41. *Scientific Council for Cybernetics of the Academy of Sciences of the USSR.* Open archive of Siberian Branch of RAS (accessed 25 December 2020). Available at: http://odasib.ru/OpenArchive/Portrait.cshtml?id=Xu_pavl_634993802223476562_2905.

42. Soprunov, S. F. 1988, "Decidable expansions of structures", *Vopr. Kibern.,* 134, pp. 175–179.

43. *Temporary scientific and technical team "School-1".* Archive of documents of Academician A. P. Ershov. Available at: http://ershov.iis.nsk.su/ru/ (accessed 25 December 2020).

44. *TERC. Because math and science build futures.* Available at: https://www.terc.edu/ (accessed 25 December 2020).

45. *Zoological museum of Moscow University.* Available at: http://zmmu.msu.ru/musei/istoriya (accessed 25 December 2020).

Получено 10.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 519.115.8 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-57-66

О возможности восстановления периодического слова по подсловам фиксированной длины[1]

В. А. Алексеев, Ю. Г. Сметанин

Василий Антонович Алексеев — ассистент кафедры информатики и вычислительной математики, ассистент кафедры высшей математики, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (г. Москва).
e-mail: wasya.alekseev@gmail.com

Юрий Геннадьевич Сметанин — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: ysmetanin@rambler.ru

Аннотация

Рассмотрена задача реконструкции слов из конечного алфавита по частичной информации при дополнительных ограничениях на допустимые слова. А именно, ставится задача о восстановлении периодического слова по мультимножеству его подслов одной длины. Для некоторых видов частичной информации и ограничений получены условия однозначной реконструкции. Показано, что периодическое слово с периодом p однозначно определяется мультимножеством его подпоследовательностей длины $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{p} \right\rfloor + 5$. Для слова, состоящего из непериодического префикса длины q и периодического суффикса с периодом p, повторяющегося l раз, получена аналогичная оценка $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$ при условии $l \geq q^{\left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5}$, где $P = \max(p, q)$.

Ключевые слова: реконструкция слова, мультимножество подслов, подслова фиксированной длины, периодическое слово.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
В. А. Алексеев, Ю. Г. Сметанин. О возможности восстановления периодического слова по подсловам фиксированной длины //Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 57–66.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-07-00150.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 519.115.8 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-57-66

On the possibility of a periodic word reconstruction from the subwords of fixed length

V. A. Alekseev, Y. G. Smetanin

Vasily Antonovich Alekseev — assistant at the department of informatics and computational mathematics, assistant at the department of higher mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT) (Moscow).
e-mail: wasya.alekseev@gmail.com
Yuri Gennadievich Smetanin — doctor of physical and mathematical sciences, chief researcher, Federal Research Center «Computer Science and Control», Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: ysmetanin@rambler.ru

Abstract

The problem being considered is the reconstruction of periodic words from a finite alphabet using multiset of fixed length subwords. This is a special case of a more general problem of reconstruction with incomplete information and under restrictions on the words in question. For some constraints on the multiset of subwords, conditions for possibility of reconstruction are obtained. It is shown that a periodic word with period p is uniquely determined by the multiset of its subwords of length $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{p} \right\rfloor + 5$. For a word consisting of a non-periodic prefix of length q and a periodic suffix with period p, repeated l times, a similar estimate is obtained: $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$, provided $l \geq q^{\left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5}$ where $P = \max(p, q)$.

Keywords: word reconstruction, multiset of subwords, subwords of fixed length, periodic word.

Bibliography: 14 titles.

For citation:
V. A. Alekseev, Y. G. Smetanin. 2021, “On the possibility of a periodic word reconstruction from the subwords of fixed length”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 57–66.

1. Введение

Символьное кодирование — способ представления информации, при котором данные кодируются в виде слов над определённым алфавитом [13]. Такой способ представления информации используется, например, при передаче данных по каналам связи [11], при работе с временными рядами [14], при анализе генома в биоинформатике [5]. Часто закодированные данные доступны не полностью, а в виде фрагментов. Это может происходить как из-за внешних факторов, например при потере или искажении данных при передаче [12], так и просто в рамках постановки конкретной задачи [3]. Одной из математических абстракций упомянутой проблемы неполной информации является постановка о восстановлении слова по множеству его подслов [2, 9].

В работах [6, 7] получены оценки для длины подслова, достаточной, чтобы данное слово можно было восстановить по мультимножеству всех его подслов. В данной же работе рассматривается частный случай периодического слова, такого что оно состоит из повторяющейся многократно последовательности символов. На основе доказанного другими авторами для случая произвольного слова, выводятся улучшенные оценки для периодического слова. Также рассматривается случай слова, состоящего из непериодического префикса и периодического суффикса, причём длина префикса меньше длины суффикса.

2. Постановка задачи

Греческими буквами обозначаются слова, малыми латинскими — символы алфавита

- E_2^n — множество слов длины n из алфавита $\{0, 1\}$
- для слова $\alpha = (a_1 a_2 \ldots a_n) \in E_2^n$ символом $|\alpha|$ обозначается сумма его элементов: $|\alpha| = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- λ — пустое слово, длина которого равна нулю

Определение 1. *Для заданного слова $\alpha = (a_1 a_2 \ldots a_n) \in E_2^n$ и заданного опорного вектора $v = (v_1 v_2 \ldots v_n)$, $v_i \in \{0, 1\}, i = 1 \ldots n$ операция фрагментирования $\langle \alpha \cdot v \rangle$ строит слово длины $|v|$ по следующему правилу:*

$$\langle \alpha \cdot v \rangle = \begin{cases} a_i, & v_i = 1 \\ \lambda, & v_i = 0 \end{cases}$$

В общем виде рассматриваемая задача формулируется следующим образом: заданы

- набор опорных векторов $V = \{v^1, v^2, \ldots, v^N\}, v_i \in E_2^n$, $|v^i| = k, i = 1 \ldots N$
- и множество слов $X = \{x^1, x^2, \ldots, x^N\}, x^i \in E_2^k, i = 1 \ldots N$

Требуется проверить, является ли набор векторов X набором подпоследовательностей (фрагментов) фиксированной длины некоторого неизвестного слова $\alpha \in E_2^n$, построенных с помощью операции фрагментирования векторами из V, и найти все возможные решения.

Для возникающей задачи известно её сведение к проверке единственности решения диофантовых уравнений определенного вида [1]. Показано, что задача о существовании и единственности решения является NP-полной. При этом все оценки, получаемые для случая двоичного алфавита, остаются верными и для произвольного алфавита [2], так как в случае алфавита $\{0, 1, \ldots, k\}$ задача сводится к набору из k задач в двоичном алфавите с помощью отображений:

$$\begin{cases} \phi_i \colon x \to \begin{cases} 1, & x = i \\ 0, & x \neq i \end{cases} \\ i = 0, 1, \ldots, k \end{cases}$$

Поэтому далее будут рассмотрены только двоичные случаи.

В случае полного мультимножества фрагментов ($V = E_2^n$) установлено [10], что для однозначного восстановления необходима длина $k \geq \exp\Big(\Omega\Big(\sqrt{\log n}\Big)\Big)$. Для того же случая полного мультимножества фрагментов известны следующие оценки на достаточную длину:

- $k \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ — показано в [2]
- $k \geq \big(1 + o(1)\big)\sqrt{n \log n}$ — показано в [7]
- $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{n} \right\rfloor + 5$ — показано в [6]

Было изучено несколько частных случаев задачи. Так, для слов, состоящих из l серий, достаточно фрагментов длины l [4].

В данной же работе доказывается, что для однозначного восстановления периодического слова длины n с периодом p по мультимножеству всех его подпоследовательностей длины k достаточно выполнения условия $k \leq \big(1 + o(1)\big)\sqrt{p \log p}$. При этом утверждение остаётся верным, если у слова есть маленький непериодический префикс.

Перейдём к задаче реконструкции при $V = E_2^n$, но с дополнительными ограничениями на допустимые решения.

3. Результаты

Как уже отмечалось, объект дальнейшего анализа — двоичные слова $\alpha = (a_1 a_2 \dots a_n)$, $a_i \in \{0,1\}$. Более того, нас будут интересовать *периодические* слова.

Определение 2. *Слово $\alpha = (a_1 a_2 \dots a_n), a_i \in \{0,1\}$ называется периодическим с периодом p, если*

$$\alpha = (a_1 a_2 \dots a_p)^l, a_i \in \{0,1\}$$

где $x^s = \underbrace{xx \dots x}_{s}$.

В [7] получена оценка наименьшей длины фрагментов $k = f^*(n)$, при которой гарантирована однозначность восстановления слова:

$$f^*(n) \leq (1 + o(1))\sqrt{n \log n}$$

что позволит нам доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для однозначного восстановления периодического слова длины n с периодом p по мультимножеству всех его подпоследовательностей длины k достаточно выполнения условия*

$$k \geq (1 + o(1))\sqrt{p \log p}$$

при этом наименьшая длина подпоследовательностей $f^*(n)$, обеспечивающая однозначное восстановление слова

$$f^*(n) \leq (1 + o(1))\sqrt{p \log p}$$

Начнём с леммы, которая непосредственно следует из системы уравнений в [1].

Лемма 1. *Для любого слова по набору его фрагментов вида $x^j 1$ однозначно определяется набор его моментов вида $\sum\limits_{r=1}^{n} a_r r^j$.*

Перед доказательством леммы введём определение

Определение 3. *За $N_\beta(\alpha)$ обозначим число фрагментов, равных β, в слове α.*

В [1] показано, что по $N_\beta(\alpha)$ для всех двоичных слов β длины k однозначно восстанавливаются числа фрагментов всех длин меньше k.

Переходим к доказательству леммы.

Доказательство.

$$N_1(\alpha) = \sum_{r=1}^{n} a_r$$

$$N_{x1}(\alpha) = \sum_{r=1}^{n}(r-1)a_r = \sum_{r=1}^{n} ra_r - \underbrace{N_1(\alpha)}_{f_1\left(N_1(\alpha)\right)}$$

$$N_{x^21}(\alpha) = \sum_{r=1}^{n}\binom{r-1}{2}a_r = \frac{1}{2!}\sum_{r=1}^{n} r^2a_r - \underbrace{\frac{1}{2!}\left(3N_{x1}(\alpha)+N_1(\alpha)\right)}_{f_2\left(N_1(\alpha),N_{x1}(\alpha)\right)}$$

$$\ldots$$

$$N_{x^{k-1}1}(\alpha) = \sum_{r=1}^{n}\binom{r-1}{k-1}a_r = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{r=1}^{n} r^{k-1}a_r - f_{k-1}\Big(N_1(\alpha), N_{x1}(\alpha), \ldots, N_{x^{k-2}1}(\alpha)\Big)$$

Функции $f_2, f_3, \ldots, f_{k-1}$ вычисляются на основе комбинаторных соотношений. Например, найдём выражение функции $f_p(N_1(\alpha), \ldots, N_{x^p1}(\alpha))$, $2 \le p \le k-1$ через полученные на предыдущих шагах $f_1, \ldots, f_{p-1}$ (при этом можно положить $f_0 \equiv 0$):

$$\begin{aligned}
N_{x^p1}(\alpha) &= \sum_{r=1}^{n}\binom{r-1}{p}a_r = \sum_{r=1}^{n}\frac{(r-1)!}{p!(r-1-p)!}a_r = \sum_{r=1}^{n}\frac{(r-1)\cdot(r-2)\cdot\ldots\cdot(r-p)}{p!}a_r \\
&= \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}a_r\left\{r^p + r^{p-1}\sum_{i_1=1}^{p}(-i_1) + r^{p-2}\sum_{\substack{i_1,i_2\in\{1,2,\ldots,p\}\\ i_1\ne i_2}}(-i_1)(-i_2) + \ldots + r^0\prod_{i_p=1}^{p}(-i_p)\right\} \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{r=1}^{n} r^pa_r + \frac{1}{p!}\sum_{l=1}^{p}\sum_{r=1}^{n} r^{p-l}a_r \sum_{\substack{S\subseteq\{1,\ldots,p\}\\ |S|=l}}\prod_{i\in S}(-i) \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{r=1}^{n} r^pa_r + \frac{1}{p!}\sum_{l=1}^{p}\Big(N_{x^{p-l}1}(\alpha) + f_{p-l}\big(N_1(\alpha), \ldots, N_{x^{p-l-1}1}(\alpha)\big)\Big)\sum_{\substack{S\subseteq\{1,\ldots,p\}\\ |S|=l}}\prod_{i\in S}(-i) \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{r=1}^{n} r^pa_r + f_p(N_1(\alpha), \ldots, N_{x^{p-1}1}(\alpha))
\end{aligned}$$

Так как, по предположению, все $f_1, \ldots, f_{p-1}$ известны, то известна и $f_p(N_1(\alpha), \ldots, N_{x^p1}(\alpha))$. □

И возвращаемся к доказательству теоремы (1).

Доказательство. Итак, доказательство базируется на доказанном в [7] для получения достаточной для однозначной реконструкции длины фрагменты в случае произвольных слов. Оценка величины $f^*(n)$ в [7] получена на основе анализа системы уравнений

$$\begin{cases}\sum_{r=1}^{n} a_r r^j = s_j(\alpha) \\ 0 \le j \le k-1\end{cases} \tag{1}$$

для которой при $f^*(n) \le (1+o(1))\sqrt{n\log n}$ решение единственно. Пусть слово α состоит из

$l = \frac{n}{p}$ периодов: $\alpha = (a_1 a_2 \dots a_p)^l$. Тогда нулевое уравнение $\sum\limits_{r=1}^{n} a_r = s_0(\alpha)$ можно переписать в виде $\sum\limits_{r=1}^{p} a_r = \frac{s_0(\alpha)}{l}$.

И для произвольного индекса m от 1 до $k-1$ включительно:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n} a_r r^m &= \sum_{r=1}^{p} a_r r^m + \sum_{r=p+1}^{2p} a_r r^m + \ldots + \sum_{r=(l-1)p+1}^{lp} a_r r^m \\
&= \sum_{r=1}^{p} a_r r^m + \sum_{r=1}^{p} a_r (p+r)^m + \ldots + \sum_{r=1}^{p} a_r \big((l-1)p + r\big)^m \\
&= \sum_{r=1}^{p} a_r r^m + \sum_{r=1}^{p} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j r^{m-j} a_r + \ldots + \sum_{r=1}^{p} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \big((l-1)p\big)^j r^{m-j} a_r \\
&= l \cdot \sum_{r=1}^{p} a_r r^m + \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{p} \binom{m}{j} \big((l-1)p\big)^j r^{m-j} a_r \\
&= f_m \left(\sum_{r=1}^{p} a_r r^m, \ldots, \sum_{r=1}^{p} a_r \right)
\end{aligned}$$

где f_m — линейная функция.

И далее доказательство теоремы в точности повторяет доказательство из [7].

□

Сформулируем более сильное утверждение.

Теорема 2. *Для однозначного восстановления периодического слова длины n с периодом p по мультимножеству всех его подпоследовательностей длины k достаточно выполнения условия*

$$k \geq \left\lfloor \frac{16}{7} \sqrt{p} \right\rfloor + 5$$

при этом наименьшая длина подпоследовательностей $f^*(n)$, обеспечивающая однозначное восстановление слова

$$f^*(n) \leq \left\lfloor \frac{16}{7} \sqrt{p} \right\rfloor + 5$$

Доказательство. Доказательство основано на [6], где авторы доказывают возможность однозначной реконструкции слова по его подсловам не из анализа системы уравнений (1), как в [7], но из анализа похожей системы

$$\begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{n} a_r r^j = \sum\limits_{r=1}^{n} b_r r^j \\ 0 \leq j \leq k-1 \end{cases} \tag{2}$$

выписанной для двух слов $\alpha = a_1 \dots a_n$ и $\beta = b_1 \dots b_n$. Доказывается, что слова α и β имеют одинаковые мультимножества подслов длины k тогда и только тогда, когда система (2) имеет нетривиальное решение $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_1)$. Таким образом, доказательство сводится к поиску условия, при котором система диофантовых уравнений (2) имеет только тривиальное решение. Авторы [6] ссылаются на [8], где получен результат

$$k \geq \left\lfloor \frac{16}{7} \sqrt{n} \right\rfloor + 5$$

Для случая же периодических слов ранее в данной работе при доказательстве теоремы (1) показано, как систему (2) можно переписать в переменных только $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$, где p — период слова. Таким образом, оценка на достаточную для однозначного восстановления исходного слова длину подпоследовательности получается равной

$$k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{p} \right\rfloor + 5$$

□

Реконструкция слова остаётся возможной и при наличии у него *малого непериодического префикса.* А именно, пусть слово периодическое, начиная с некоторого индекса:

$$\alpha = a_1 a_2 \ldots a_q (a_{q+1} a_{q+2} \ldots a_{q+p})^l \tag{3}$$

Введём обозначение $P \equiv \max(p, q)$. Тогда можно сформулировать следующие теоремы.

Теорема 3. *При $l \geq q^{\sqrt{P \log P}}$ для однозначного восстановления слова (3) достаточно $k \geq (1 + o(1))\sqrt{P \log P}$*

Теорема 4. *При $l \geq q^{\left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5}$ для однозначного восстановления слова (3) достаточно $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$*

Обе сформулированные теоремы доказываются схоже: сведением к раннее доказанным теоремам для полностью периодического слова (1) и (2). Способ сведения одинаков, поэтому ограничимся доказательством только теоремы (4).
Доказательство.

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = a_a + \ldots a_q + l \cdot \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r = s_0(\alpha)$$

При $q < l$ верно $\frac{a_1 + \ldots a_q}{l} < 1$, поэтому

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{r=q+1}^{q+p} a_r = \left\lfloor \frac{s_0(\alpha)}{l} \right\rfloor \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{q} a_r = \left\{ \frac{s_0(\alpha)}{l} \right\} \cdot l \end{cases}$$

Рассмотрим случай $s_1(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{q} a_r r + \sum_{r=q+1}^{n} a_r r &= \sum_{r=1}^{q} a_r r + a_{q+1} \sum_{j=q+1}^{q+p(l-1)+1} j + \ldots + a_{q+p} \sum_{j=q+p}^{q+p(l-1)+p} j \\ &= \sum_{r=1}^{q} a_r r + \sum_{i=1}^{p} a_{q+i} \left(l(q+i) + \frac{p(l-1)}{2} \cdot l \right) \\ &= \sum_{r=1}^{q} a_r r + \left(ql + \frac{p(l-1)l}{2} \right) \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r + l \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r r \\ &= \sum_{r=1}^{q} a_r r + l \cdot \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r r + f_1(s_0) \end{aligned}$$

При $\frac{r(r+1)}{2} < l$ уравнения для непериодического префикса и периодического хвоста разделяются аналогично.

Перейдём к случаю произвольного $m \in [2, k-1] \cap \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{q} a_r r^m + \sum_{r=q+1}^{n} a_r r^m &= \sum_{r=1}^{q} a_r r^m + \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r \big((q+r)^m + \ldots + (q+p(l-1)+r)^m\big) \\ &= \sum_{r=1}^{q} a_r r^m + \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r \sum_{h=1}^{l}\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (q+r)^j \big(p(l-h)\big)^{m-j}\Big) \\ &= \sum_{r=1}^{q} a_r r^m + \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r \sum_{h=1}^{l}\sum_{j=0}^{m}\sum_{s=0}^{j} \binom{m}{j}\binom{j}{s} q^s r^{j-s} \big(p(l-h)\big)^{m-j}\Big)\end{aligned}$$

Нас интересует показатель степени при r во втором слагаемом равный $j - s = m$. Откуда получаем $j = m$ и $s = 0$. При меньших показателях степени будем получать члены, уже найденные из предыдущих уравнений. Таким образом,

$$\sum_{r=1}^{q} a_r r^m + \sum_{r=q+1}^{n} a_r r^m = \sum_{r=1}^{q} a_r r^m + l \cdot \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r r^m + f_m(s_{m-1}, \ldots, s_0)$$

где f_m — линейная функция.

Так как $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p \to \frac{n^{p+1}}{p+1}$, то при $\frac{q^k}{k} < l$ разделяются все уравнения и получается две системы. Поэтому, если ввести обозначение $P \equiv \max(p, q)$, из доказанного ранее для случая периодического слова, при

$$l \geq q^{\left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5}$$

размер подпоследовательностей ограничивается

$$k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$$

□

4. Заключение

В работе получены оценки на длину подслова, достаточную для однозначного восстановления периодического слова по мультимножеству его подслов фиксированной длины. Рассмотрен случай слова, состоящего из непериодического префикса и периодического суффикса. Для таких слов также доказана возможность однозначного восстановления, но при достаточной длине суффикса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев В. К., Сметанин Ю. Г. О восстановлении векторов по набору их фрагментов //Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1988. – Т. 302. – №. 6. – С. 1319-1322.

2. Manvel B. et al. Reconstruction of sequences //Discrete Mathematics. – 1991. – Т. 94. – №. 3. – С. 209-219.

3. Skiena S. S., Sundaram G. Reconstructing strings from substrings //Journal of Computational Biology. – 1995. – Т. 2. – №. 2. – С. 333-353.

4. Леонтьев В. К. Задачи восстановления слов по фрагментам и их приложения //Дискретный анализ и исследование операций. – 1995. – Т. 2. – №. 2. – С. 26-48.

5. Gusfield D. Algorithms on stings, trees, and sequences: Computer science and computational biology //Acm Sigact News. – 1997. – Т. 28. – №. 4. – С. 41-60.

6. Krasikov I., Roditty Y. On a reconstruction problem for sequences //journal of combinatorial theory, Series A. – 1997. – Т. 77. – №. 2. – С. 344-348.

7. Scott A. D. Reconstructing sequences //Discrete Mathematics. – 1997. – Т. 175. – №. 1-3. – С. 231-238.

8. Borwein P., Erdélyi T., Kós G. Littlewood-type problems on [0, 1] //Proceedings of the London Mathematical Society. – 1999. – Т. 79. – №. 1. – С. 22-46.

9. Levenshtein V. I. Efficient reconstruction of sequences from their subsequences or supersequences //Journal of Combinatorial Theory, Series A. – 2001. – Т. 93. – №. 2. – С. 310-332.

10. Dudık M., Schulman L. J. Reconstruction from subsequences //Journal of Combinatorial Theory, Series A. – 2003. – Т. 103. – №. 2. – С. 337-348.

11. Batu T. et al. Reconstructing strings from random traces //Departmental Papers (CIS). – 2004. – С. 173.

12. Kannan S., McGregor A. More on reconstructing strings from random traces: insertions and deletions //Proceedings. International Symposium on Information Theory, 2005. ISIT 2005. – IEEE, 2005. – С. 297-301.

13. Lin J. et al. Experiencing SAX: a novel symbolic representation of time series //Data Mining and knowledge discovery. – 2007. – Т. 15. – №. 2. – С. 107-144.

14. Smetanin Y., Ul'yanov M. Determining the characteristics of kolmogorov complexity of time series: an approach based on symbolic descriptions. – 2013.

REFERENCES

1. Leontiev, V. K., & Smetanin, Y. G. 1988, "On the reconstruction of vectors from a set of their fragments", *Doklady Academii nauk*, vol. 302, no. 6, pp. 1319-1322.

2. Manvel, B., Meyerowitz, A., Schwenk, A., Smith, K., & Stockmeyer, P. 1991, "Reconstruction of sequences", *Discrete Mathematics*, 94(3), 209-219.

3. Skiena, S. S., & Sundaram, G. 1995, "Reconstructing strings from substrings", *Journal of Computational Biology*, 2(2), 333-353.

4. Leontiev, V. K. 1995, "Words reconstruction by fragments problems and their applications", *Diskretniy analiz i issledovanie operaciy*, 2(2), 26-48.

5. Gusfield, D. 1997, "Algorithms on stings, trees, and sequences: Computer science and computational biology", *Acm Sigact News*, 28(4), 41-60.

6. Krasikov, I., & Roditty, Y. 1997, "On a reconstruction problem for sequences", *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, 77(2), 344-348.

7. Scott, A. D. 1997, "Reconstructing sequences", *Discrete Mathematics*, 175(1-3), 231-238.

8. Borwein, P., Erdélyi, T., & Kós, G. 1999, "Littlewood-type problems on [0, 1]", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 79(1), 22-46.

9. Levenshtein, V. I. 2001, "Efficient reconstruction of sequences from their subsequences or supersequences", *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, 93(2), 310-332.

10. Dudık, M., & Schulman, L. J. 2003, "Reconstruction from subsequences", *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, 103(2), 337-348.

11. Batu, T., Kannan, S., Khanna, S., & McGregor, A. 2004, "Reconstructing strings from random traces", *Departmental Papers (CIS)*, 173.

12. Kannan, S., & McGregor, A. 2005, "More on reconstructing strings from random traces: insertions and deletions", *Proceedings. International Symposium on Information Theory, 2005 (ISIT 2005)*, pp. 297-301, IEEE.

13. Lin, J., Keogh, E., Wei, L., & Lonardi, S. 2007, "Experiencing SAX: a novel symbolic representation of time series", *Data Mining and knowledge discovery*, 15(2), 107-144.

14. Smetanin, Y. G., & Ul'yanov, M. V. 2013, "Determining the characteristics of kolmogorov complexity of time series: an approach based on symbolic descriptions".

Получено 12.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-67-75

Замечание о теореме о среднем значении модуля L-функции Дирихле в критической полосе

Л. Г. Архипова, В. Н. Чубариков

Людмила Геннадьевна Архипова — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: arhipova@mi-ras.ru
Владимир Николаевич Чубариков — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

В статье продолжены исследования по обобщению и уточнению результата Р. Т. Турганалиева по выводу асимптотической формулы для среднего значения дзета-функции Римана в критической полосе с остаточным членом,имеющим степенное понижение. Нами найдена асимптотика среднего значения L-функции Дирихле в критической полосе, которая уточняет теорему Р.Т.Турганалиева о дзета-функции при всех значениях действительной части ($1/2 < \mathrm{Re}\, s \leq 1$). Этот результат получен за счет другого использования оценок тригонометрических сумм на основе второй производной в экспоненте.

Ключевые слова: характеры Дирихле; функции Дирихле; дзетовая сумма, скрученная с характером Дирихле.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
Л.Г.Архипова, В. Н. Чубариков. Замечание о теореме о среднем значении модуля L-функции Дирихле в критической полосе // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 67–75.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-67-75

The remark on the mean value theorem for the absolute value of Dirichlet L-function in the critical strip

L.G.Arkhipova, V. N. Chubarikov

Lyudmila Gennad'evna Arkhipova — candidate of physical and mathematical sciences, M. V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics (Moscow).
e-mail: arhipova@mi-ras.ru
Vladimir Nikolaevich Chubarikov — doctor of physical and mathematical sciences, professor, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

We continue our researches concerning the generalization and improvement of R.T.Turganaliev's result that states an asymptotic formula for the mean value of the Riemann zeta function in the critical strip with power factor saving in the remainder term. We find an asymptotic for the mean value of Dirichlet L-function in the critical strip. This assertion improves R.T.Turganaliev's theorem for zeta-function in the whole interval $(1/2 < \mathrm{Re}\, s \leq 1)$. Our result is based on the special use of the estimation of exponential sums by second derivative test.

Keywords: Dirichlet's characters, Dirichlet's functions, the zeta-sum twisted together with the Dirichlet's character.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
L.G.Arkhipova, V. N. Chubarikov, 2021, "The remark on the mean value theorem for the absolute value of Dirichlet L-function in the critical strip", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 67–75.

1. Введение

В настоящей статье дан вывод асимптотики среднего значения модуля L — функций Дирихле в критической полосе. Мы продолжаем исследования Р.Т.Турганалиева [8], получившего впервые асимптотическую формулу со степенным понижением в остатке при $1/2 < \sigma < 1$ и при $T \to \infty$ среднего значения дзета-функции Римана

$$\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|\,dt = c(\sigma)T + O(T^{\omega}), \omega = 5/4 - \sigma/2 + \varepsilon,$$

где $c(\sigma) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2/n^{2\sigma}$, α_n — коэффициенты разложения в ряд Дирихле функции $\zeta^{1/2}(s)$ при $\mathrm{Re}\, s > 1\zeta$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

Ранее подобную асимптотику без остаточного члена нашли А.Е.Ингам [5], Г.Дэвенпорт [6] (см. [8],с.155). Здесь мы пользуемся идеей С.М.Воронина о замене конечного эйлеровского произведения на частичную сумму соответствующего ряда Дирихле, что приводит к степенному понижению в остатке.

Пусть $q > 1$ — натуральные числа, $T > 1$ — вещественное число, p — последовательность всех простых чисел, χ — примитивный характер Дирихле по модулю q, $s = \sigma + it$ — комплексная переменная, $0 \leq \sigma \leq 1$ — критическая полоса L-функции Дирихле. При $\mathrm{Re}\, s = \sigma > 1$ эта функция определяется абсолютно сходящимся рядом и бесконечным произведением

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Теорема 1. *При $1/2 < \sigma < 1$ и $T \to \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула*

$$\int_1^T |L(s,\chi)|\,dt = C(\sigma,\chi)T + O\left(q^{1-\sigma}T^{3/2-\sigma}\ln(qT)\right),$$

где

$$C(\sigma,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{n^{2\sigma}},$$

причём коэффициенты $\alpha_n, n \geq 1$, определяются из разложения в ряд Дирихле при $Res > 1$ функции

$$L^{1/2}(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}.$$

Лемма 1. *Пусть $f''(x)$ — непрерывна на промежутке $a < x \leq b$ и удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{A} \leq |f''(x)| \leq \frac{k}{A},$$

где k — постоянная, причём $A \geq 5k$. Тогда для суммы

$$S = \sum_{a<x\leq b} e^{2\pi i f(x)}$$

справедливо неравенство

$$S \ll \frac{b-a}{\sqrt{A}} + \sqrt{A} + \ln U, U = \max\{b-a, A\}.$$

Доказательство см.[1], лемма 1, с.14.

2. Доказательство теоремы

Пусть, далее, σ_0 — некоторое фиксированное число, $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2, 2\pi \leq |t| \leq \pi T$. Тогда

$$L(s,\chi) = \sum_{1\leq n\leq qT} \chi(n) n^{-s} + O(q^{1-\sigma}T^{-\sigma}), \tag{1}$$

что является следствием простейшего приближения дзета-функции Гурвица, задаваемой при $\operatorname{Re} s > 1$ рядом

$$\zeta(s;\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s}, 0 < \alpha \leq 1,$$

начальным отрезком её ряда Дирихле

$$\zeta(s;\alpha) = \sum_{0\leq n\leq T} \frac{1}{(n+\alpha)^s} + \frac{T^{1-s}}{s-1} + O(T^{-\sigma}),$$

где постоянная в знаке O зависит только от σ_0.

Тогда, используя разложение бинома в ряд, при $\sigma > 1$ находим

$$L^{1/2}(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1/2} = \prod_p \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} d(l) \left(\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^l\right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^{-s},$$

где при $m = \prod_{p|m} p^{l_m(p)}$, имеем

$$d_l = \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2l-1)}{l! 2^l} < 1, a_1 = 1, a_m = \chi(m) \prod_{p|m} d(l_m(p)).$$

Определим функцию

$$F(s) = \sum_{1\leq n\leq \sqrt{qT}} \chi(n) a_n n^{-s}.$$

Имеем
$$F^2(s) = \sum_{1\le n\le\sqrt{qT}} \chi(n)n^{-s} + \sum_{\sqrt{qT}<n\le qT} \chi(n)b_n n^{-s}.$$
Следовательно, воспользовавшись формулой (1), при $0<\sigma_0\le\sigma\le 2, |t|\le T$, получим
$$L(s,\chi) = F^2(s) + G(s) - H(s) + O(q^{1-\sigma}T^{-\sigma}),$$
где
$$G(s) = \sum_{\sqrt{qT}<n\le qT} \chi(n)n^{-s}, H(s) = \sum_{\sqrt{qT}<n\le qT} \chi(n)b_n n^{-s}.$$
Преобразуем интеграл
$$I = \int\limits_1^T |L(s,\chi)|dt = I_1 + O(I_2) + O(I_3) + O(qT)^{1-\sigma}),$$
где
$$I_1 = \int\limits_1^T |F^2(s)|dt, I_2 = \int\limits_1^T |G(s)|dt, I_3 = \int\limits_1^T |H(s)|dt.$$
При $1/2<\sigma<1$ находим
$$I_1 = \int\limits_1^T |F^2(s)|dt = \sum_{m,n\le\sqrt{qT}} \frac{\chi(n)\bar\chi(m)a_na_m}{(mn)^\sigma}\int\limits_1^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt =$$
$$= T\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^\infty \frac{a_n^2}{n^{2\sigma}} + O\left(\sum\sum_{1\le m<n\le\sqrt{qT}} \frac{1}{(mn)^\sigma \ln n/m}\right) + O\left(q^{1/2-\sigma}T^{3/2-\sigma}\right),$$
где ряд $\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^\infty \frac{a_n^2}{n^{2\sigma}}$ сходится при $\sigma>1/2$.

Оценим двойную сумму
$$\sum\sum_{1\le m<n\le\sqrt{qT}} \frac{1}{(mn)^\sigma \ln n/m} = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$
$$\Sigma_1 = \sum\sum_{1\le m<n/2\le\sqrt{qT}} \frac{1}{(mn)^\sigma \ln(n/m)}, \Sigma_2 = \sum\sum_{n/2\le m<n\le\sqrt{qT}} \frac{1}{(mn)^\sigma \ln(n/m)}.$$
При $1/2<\sigma<1$ имеем
$$\Sigma_1 \le \frac{1}{\ln 2}\left(\sum_{n\le\sqrt{qT}} n^{-\sigma}\right)^2 \ll (qT)^{1-\sigma},$$
$$\Sigma_2 \ll \sum_{n\le\sqrt{qT}} n^{-2\sigma} \sum_{n/2\le m<n\le\sqrt{qT}} \frac{1}{\ln(n/m)} \ll \sum_{n\le\sqrt{qT}} n^{1-2\sigma} \sum_{1\le r\le n/2} \frac{1}{r} \ll (qT)^{1-\sigma}\ln(qT).$$
Таким образом
$$I_1 = T\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^\infty \frac{a_n^2}{n^{2\sigma}} + O\left(q^{1/2-\sigma}T^{3/2-\sigma} + (qT)^{1-\sigma}\ln(qT)\right).$$

Перейдём к оценке интеграла I_2. Воспользовавшись преобразованием Абеля в интегральной форме,при $\sqrt{qT} \le A < B \le 2A \le qT$ находим

$$G_1 = G_1(A;t) = \left| \sum_{A<n\le B} \chi(n) n^{-\sigma-it} \right| = C(B)B^{-\sigma} - \int\limits_A^B C(u)\, d(u^{-\sigma}),$$

где

$$C(u) = \sum_{A<n\le u} \chi(n) n^{-it} = \sum_{A<n\le u} \chi(n) e^{-f(n)}, f(n) = \frac{t\ln n}{2\pi}, f'(n) = \frac{t}{2\pi n}, f''(n) = -\frac{t}{2\pi n^2}.$$

Отсюда получим

$$|G_1| \le A^{-\sigma} \max_{A<u\le B} |C(u)|.$$

Произведем замену переменной суммирования

$$n = qk+m, 1 \le m < q, \frac{A-m}{q} < k \le \frac{2A-m}{q}.$$

Тогда сумма $C(u)$ примет вид

$$C(u) = \sum_{m=1}^{q-1} \chi(m) \sum_{A<qk+m\le u} e^{2\pi i f(qk+m)}.$$

Следовательно, по лемме 1 находим

$$|C(u)| \ll \frac{A^2}{\sqrt{q|t|}} + \frac{\sqrt{q^2|t|}}{A}.$$

При $A \le u \le 2A$ оценим $|C(u)|$. Имеем

$$|G_1| \ll \frac{A^{2-\sigma}}{\sqrt{q|t|}} + \frac{\sqrt{q^2|t|}}{A^{1+\sigma}}$$

Таким образом, при $A = qT2^{-r}, r \le r_0 = \min([\log_2 q]+1, [0,5\log_2(qT)]+1)$, справедливы соотношения

$$|G(s)| = \left| \sum_{\sqrt{qT}<n\le qT} \chi(n) n^{-s} \right| \le \sum_{1\le r\le r_0} |G_1(qT2^{-r})| \ll$$
$$\ll (qT)^{-\sigma} q\sqrt{t} + (qT)^{1-\sigma} t^{-1/2}.$$

Следовательно,

$$I_2 = \int\limits_1^T |G(s)| dt \ll q^{1-\sigma} T^{3/2-\sigma}.$$

Теперь оценим I_3. Имеем

$$I_3 = \int\limits_1^T |H(s)| dt,$$

где

$$H(s) = \sum_{\substack{1\le m\le\sqrt{qT} \\ mn>\sqrt{qT}}} \sum_{1\le n\le\sqrt{qT}} a_m a_n \chi(m)\chi(n)(mn)^{-s}.$$

Следовательно,

$$|H(s)| \le \sum_{m \le \sqrt{qT}} m^{-\sigma} \left| \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n \le \sqrt{qT}} a_n \chi(n) n^{-s} \right|.$$

Далее воспользуемся неравенством Коши. Получим

$$|H(s)|^2 \le \left(\sum_{m \le \sqrt{qT}} m^{-\sigma} \right) \sum_{m \le \sqrt{qT}} m^{-\sigma} \left| \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n \le \sqrt{qT}} a_n \chi(n) n^{-s} \right|^2 \le$$

$$\le (qT)^{(1-\sigma)/2} \left(H_1 + H_2 \right),$$

$$H_1 = \sum_{\substack{1 \le m \le \sqrt{qT} \\ mn > \sqrt{qT}}} \sum_{1 \le n \le \sqrt{qT}} m^{-\sigma} n^{-2\sigma} a_n^2 \ll (qT)^{(1-\sigma)/2},$$

$$H_2 = \sum_{\substack{1 \le m \le \sqrt{qT} \\ qT \ge mn_1 > mn_2 > \sqrt{qT}}} m^{-\sigma} \sum_{1 \le n_1, n_2 \le \sqrt{qT}} a_{n_1} a_{n_2} \chi(n_1) \bar{\chi}(n_2) (n_1 n_2)^{-\sigma} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{it}.$$

Находим

$$I_3 = \int_1^T |H(s)| dt \le T^{1/2} \left(\int_1^T |H(s)|^2 dt \right)^{1/2} \le q^{1-\sigma/2} T^{(1-\sigma)/2} \left(\int_1^T (H_1 + H_2) dt \right)^{1/2}.$$

Используя оценку H_1, имеем

$$\int_1^T H_1 \, dt \ll q^{(1-\sigma)/2} T^{1-\sigma/2}.$$

Для “недиагональных слагаемых”, отвечающих сумме H_2, получим

$$\left| \int_1^T H_2 \, dt \right| \le \sum_{\substack{1 \le m \le \sqrt{qT} \\ qT \ge mn_1 > mn_2 > \sqrt{qT}}} m^{-\sigma} \sum_{1 \le n_1, n_2 \le \sqrt{qT}} (n_1 n_2)^{-\sigma} \left(\ln (n_1/n_2) \right)^{-1} \le \sum_{m \le \sqrt{qT}} (H_{2,m,1} + H_{2,m,2}),$$

где

$$H_{2,m,1} = \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n_1 \le \sqrt{qT}} \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n_2 \le 0{,}5 n_1} (n_1 n_2)^{-\sigma} \left(\ln (n_1/n_2) \right)^{-1},$$

$$H_{2,m,2} = \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n_1 \le \sqrt{qT}} \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} \le 0{,}5 n_1 < n_2 \le n_1} (n_1 n_2)^{-\sigma} \left(\ln (n_1/n_2) \right)^{-1}.$$

Отсюда при $1/2 < \sigma < 1$ следует, что

$$H_{2,m,1} \le \frac{1}{\ln 2} \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n_1 \le \sqrt{qT}} \left(\frac{n_1^{1-2\sigma}}{1-\sigma} + n^{-\sigma} \right) \ll (qT)^{1-\sigma},$$

$$H_{2,m,2} \le \sum_{m^{-1}\sqrt{qT} < n_1 \le \sqrt{qT}} \left(\frac{n_1^{1-2\sigma}}{1-\sigma} + n^{-\sigma} \right) \sum_{r < n_1} \frac{1}{r} \le (qT)^{1-\sigma} \ln (qT).$$

Стало быть,

$$|I_3| \le q^{1-\sigma} T^{3/2-\sigma} \ln^{1/2} (qT).$$

Теорема доказана.

3. Заключение

Представляет интерес уточнение остаточного члена в асимптотической формуле Р. Т. Турганалиева и обобщениях ее на L-ряды Дирихле. Важно исследовать средние значения на коротких промежутках. Полезным дополнением к этим результатам явились бы соответствующие омега-теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Физматлит. 1976, 120 с.
2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное — М.: Физматлит. 1980, 144 с.
3. van der Corput J. G. Zahlentheoretische Abschätzungen// Math. Ann., 1921, **84,** 53–79.
4. van der Corput J. G. Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem// Math. Ann., 1922, **87,** 39–65.
5. Ingham A. E. Mean-value theorems and the Riemann zeta-function// Quart. J. Math., 1933, **4,** 278–290.
6. Davenport H. Note on mean-value theorems for the Riemann zeta-function// J. Lond. Math. Soc., 1935, **10,** 136–138.
7. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.: ИЛ. 1953.
8. Турганалиев Р. Т. Асимптотическая формула для средних значений дробной степени дзета-функции Римана// Труды Матем. ин-та АН СССР, 1981, **158,** 203–226.
9. Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$// Изв. АН СССР, сер.матем., 1958, **22,** № 2, 161–164.
10. Коробов Н. М. О нулях функции $\zeta(s)$// Докл. АН СССР, 1958, **118,** 231–232.
11. Коробов Н. М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения// Усп.матем.наук, 1958, **13,** вып.4, 185–192.
12. Richert H.-E.Zur Abschätzung der Riemannschen Zeta-funktion in der Nahe der Vertikalen $\sigma = 1$// Math.Ann., 1967, **169,** № 2, 97–101.
13. Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их приложения// Тр.МИАН СССР, 1971, **112,** 241–255.
14. Arkhipov G., Buriev K. Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neibourhood of the line $\mathrm{Re}(s) = 1$// Integral Transforms and Special Functions, 1993, v.1, № 1, 1–7.
15. Дэвенпорт Г. Мультипликатиная теория чисел. — М.: Физматлит. 1971, 200 с.
16. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана — М.: Физматлит. 1994, 376 с.
17. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983, 240 с.
18. Popov O. V. On Hadamard's method concerning zeros of the Riemann zeta-function// Integral Transforms and Special Functions, 1993, v.1, № 2, pp.143–144.

19. Попов О. В. Вывод современной границы нулей дзета-функции Римана по методу Адамара// Вестник МГУ, сер. 1,мат.,мех., 1994, № 1, 51–54.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. 1976, “Special variants of the method of trigonometric sums” - - - M.: Fizmatlit. 120 p.

2. Vinogradov I. M. 1980, “The method of trigonometric sums in number theory. 2nd ed., corrected and supplemented” - - - M.: Fizmatlit. 144 p.

3. van der Corput J. G. 1921, “Zahlentheoretische Abschätzungen”// Math. Ann., **84,** pp. 53–79.

4. van der Corput J. G. 1922, “Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem”// Math. Ann., **87,** pp. 39–65.

5. Ingham A. E. 1933, “Mean-value theorems and the Riemann zeta-function”// Quart. J. Math., **4,** pp. 278–290.

6. Davenport H. 1935, “Note on mean-value theorems for the Riemann zeta-function”// J. Lond. Math. Soc., **10,** pp. 136–138.

7. Titchmarsh E. K. 1953, “Theory of the Riemann zeta function” - - - Moscow: ILL.

8. Turganaliev R. T. 1981, “An asymptotic formula for the average values of the fractional power of the Riemann zeta function”// Works of Math. in-ta AN SSSR, **158,** pp. 203–226.

9. Vinogradov I. M. 1958, “A new estimate of the ζ function $(1+k)$” // Izv. AN SSSR, ser.math., **22,** № 2, pp. 161–164.

10. Korobov N. M. 1958,“ On the zeros of the function $\zeta(s)$” // Dokl. USSR Academy of Sciences, **118,** pp. 231–232.

11. Korobov, N., M. 1958, “Estimates of trigonometric sums and their applications.nauk”, **13,** no. 4, pp. 185–192.

12. Richert H.-E. 1967, “Zur Abschätzung der Riemannschen Zeta-funktion in der Nahe der Vertikalen $\sigma = 1$” // Math.Ann., **169,** no. 2, pp. 97–101.

13. Karatsuba A. A. 1971, “Estimates of trigonometric sums by the method of I. M. Vinogradov and their applications” // Tr. MIAN USSR, **112,** pp. 241–255.

14. Arkhipov G., Buriev K. 1993, “Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neibourhood of the line $\mathrm{Re}(s) = 1$” // Integral Transforms and Special Functions, vol.1, no. 1, pp, 1–7.

15. Davenport G. 1971, “Multiplicative number theory” - - - M.: Fizmatlit. 200 p.

16. Voronin S. M., Karatsuba A. A. 1994, “The Riemann zeta function” - - - M.: Fizmatlit. 376 p.

17. Karatsuba A. A. 1983, “Fundamentals of analytical number theory” - - - Moscow: Nauka, 240 p.

18. Popov O. V. 1993, “On Hadamard’s method concerning zeros of the Riemann zeta-function” // Integral Transforms and Special Functions, vol.1, no. 2, pp. 143–144.

19. Popov O. V. 1994, "Derivation of the modern boundary of the zeros of the Riemann zeta function by the Hadamard method"// Vestnik MSU, ser. 1, mat., mech., no. 1, 51–54.

Получено 03.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.772 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-76-91

Построение некоторых взаимных расположений M-кубики и M-квинтики[1]

И. М. Борисов

Иван Михайлович Борисов — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).
e-mail: i.m.borisov@mail.ru

Аннотация

В работе рассматривается задача построения распадающихся кривых степени 8 с сомножителями степеней 3 и 5. Для этого применяется модификация метода кусочного конструирования Виро, предложенная Штурмфельсом. Построены 29 попарно различных кривых.

Ключевые слова: Вещественные алгебраические кривые, распадающиеся алгебраические кривые, метод кусочного конструирования.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
И. М. Борисов. Построение некоторых взаимных расположений M-кубики и M-квинтики // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 76–91.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.772 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-76-91

Construction of some mutual arrangements of M-cubic and M-quintic

I. M. Borisov

Ivan Mikhailovich Borisov — National Research University Higher School of Economics (Moscow).
e-mail: i.m.borisov@mail.ru

Abstract

The construction of decomposable curves of degree 8 with multipliers of degrees 3 and 5 is considered in this paper. Sturmfels's modification of Viro's patchworking method for constructing decomposable curves is used. 29 pairwise different curves were constructed.

Keywords: Real algebraic curves, real decomposable algebraic curves, patchworking

Bibliography: 14 titles.

For citation:
I. M. Borisov, 2021, "Construction of some mutual arrangements of M-cubic and M-quintic", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 76–91.

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории топологических методов в динамике НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931

1. Введение

Классификация вещественных алгебраических кривых, распадающихся в произведение двух неособых кривых-сомножителей, входит в круг задач, которые относятся к первой части 16-й проблемы Гильберта (например, см. [1]). Для случая распадающихся кривых степени 6 эта задача была сформулирована Д.А. Гудковым в [2] и решена Г.М. Полотовским в [3]. Затем началось решение аналогичной задачи для распадающихся кривых степени 7, которое сейчас близко к завершению.

Классификация распадающихся кривых степени 8 только начинается, в [4] и [5] рассматривался случай, когда сомножителями являются кривые степеней 2 и 6. В данной работе рассматривается построение взаимных расположений кривой степени 3 – кубики и кривой степени 5 – квинтики при некоторых условиях максимальности и общего положения кривых сомножителей.

Напомним некоторые понятия и факты из теории вещественных алгебраических кривых.

Определение 1. *Плоской вещественной проективной алгебраической кривой C_m степени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами от трёх переменных x_0, x_1, x_2, рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.*

Определение 2. *Кривая C_m называется неособой, если первые частные производные многочлена $C_m(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в нуль* (в комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$).

Теорема 1 (Харнак [6]). *Пусть N — число компонент связности (ветвей) множества вещественных точек плоской вещественной проективной кривой степени m. Тогда $N \leqslant (m-1)(m-2)/2+1$, причём эта оценка точна для любого m.*

Кривые с максимально возможным по теореме Харнака числом ветвей называются *M-кривыми.*

Каждая компонента связности неособой кривой в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ гомеоморфна окружности. Если степень кривой чётна, то компоненты называются овалами, они вложены в $\mathbb{R}P^2$ двусторонне. Если степень нечётна, то имеется одна односторонняя компонента, называемая нечётной ветвью.

M-квинтика состоит из шести овалов, лежащих вне друг друга, и нечётной ветви. M-кубика состоит из одного овала и нечётной ветви.

В данной работе строятся расположения квинтики и кубики, которые удовлетворяют следующим условиям:

- квинтика и кубика являются M-кривыми;
- квинтика и кубика пересекаются без касаний в максимальном по теореме Безу количестве общих точек в $\mathbb{R}P^2$;
- все 15 точек пересечения лежат на нечётной ветви квинтики и нечётной ветки кубики.

Для построения кривых указанного класса используется метод кусочного конструирования О.Я. Виро[2]. Здесь будет описан алгоритм комбинаторного метода кусочного конструирования, с подробным описанием и применением метода можно ознакомиться в [7] – [13].

[2]В оригинале у О.Я. Виро используется термин patchworking.

1.1. Многоугольник Ньютона

Рассмотрим многочлен $C_m(x,y)$ степени m от двух действительных переменных x и y:

$$C_m(x,y) = \sum_{i+j\leqslant m} a_{i,j}x^iy^j.$$

Если $a_{i_0,j_0} > 0$, то говорят, что одночлен $a_{i_0,j_0}x^{i_0}y^{j_0}$ входит в многочлен $C_m(x,y)$.

Если одночлен $a_{i_0,j_0}x^{i_0}y^{j_0}$ входит в многочлен $C_m(x,y)$, то отметим точку (i_0, j_0) на координатной плоскости. Таким образом, многочлену ставится в соответствие множество точек с целочисленными координатами. Выпуклая оболочка этого множества точек называется многоугольником Ньютона многочлена $C_m(x,y)$.

2. Метод Виро

Опишем кратко идею и алгоритм реализации комбинаторного метода кусочного конструирования, используя терминологию и некоторые обозначения из [7], [8] и [11].

2.1. Кусочное конструирование неособых кривых

Рассмотрим на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ треугольник T_m с вершинами $(0,m)$, $(0,0)$, $(m,0)$.

Определение 3. *Триангуляция τ_m треугольника T_m называется примитивной триангуляцией, если вершины треугольников триангуляции имеют целочисленные координаты и площадь каждого треугольника равна $\frac{1}{2}$.*

Точки с целочисленными координатами будем называть целыми точками.

Зададим функцию $\sigma : T_m \to \{+1,-1\}$, которую определим в целых точках треугольника T_m, $\sigma : (i,j) \mapsto \sigma_{i,j}$, то есть каждой вершине триангуляции поставим в соответствие знак плюс или минус.

Наложим на триангуляцию условие выпуклости, то есть будем считать, что существует выпуклая кусочно-линейная функция $V : T_m \to R$, которая линейна на каждом треугольнике триангуляции τ_m и нелинейна на объединении любых двух треугольников.

Определение 4. *Набор (m, τ_m, V, σ), где τ_m – примитивная триангуляция, называется начальными данными.*

Рассмотрим отображение $S_{\varepsilon,\delta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такое, что $(x,y) \mapsto (\varepsilon x, \delta y)$, где $\varepsilon, \delta \in \{+1,-1\}$. Обозначим $T_*(m) = T_m \cup S_{-1,1}(T_m) \cup S_{-1,-1}(T_m) \cup S_{1,-1}(T_m)$ квадрат, представляющий собой объединение исходного треугольника и его образов при отображении $S_{\varepsilon,\delta}$. Обозначим через $\tau_*(m)$ триангуляцию квадрата $T_*(m)$, полученную при симметриях $S_{\varepsilon,\delta}$ триангуляции треугольника T_m.

Функцию σ доопределим в квадрате $T_*(m)$ по формуле:

$$\sigma_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{|i|}\sigma_{-i,j}, & i<0, j\geqslant 0, \\ (-1)^{|j|}\sigma_{i,-j}, & i\geqslant 0, j<0, \\ (-1)^{|i|+|j|}\sigma_{-i,-j}, & i<0, j<0. \end{cases}$$

Если треугольник триангуляции $\tau_*(m)$ имеет вершины разных знаков, проведём в нём среднюю линию, разделяющую вершины с разными знаками, и обозначим объединение средних линий треугольников триангуляции квадрата $T_*(m)$ через L.

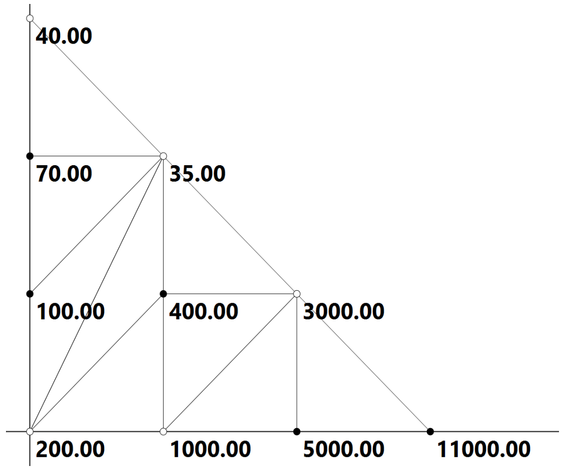


Рис. 1: Примитивная триангуляция треугольника T_3 с примером значений выпуклой функции V и функции σ в вершинах триангуляции. На этом и последующих рисунках значения $+1$ функции σ обозначаются белыми точками, -1 – чёрными.

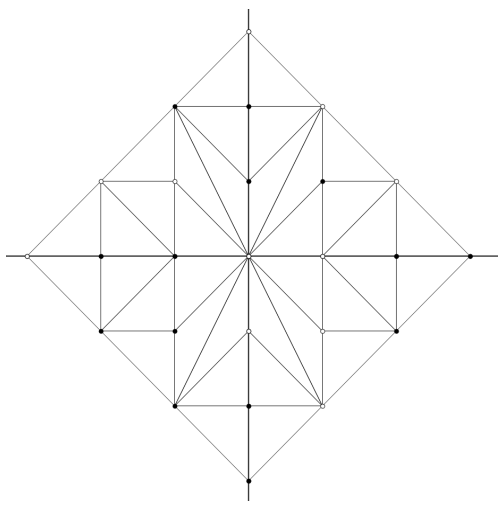


Рис. 2: Квадрат $T_*(3)$, соответствующий треугольнику T_3 на рис. 1

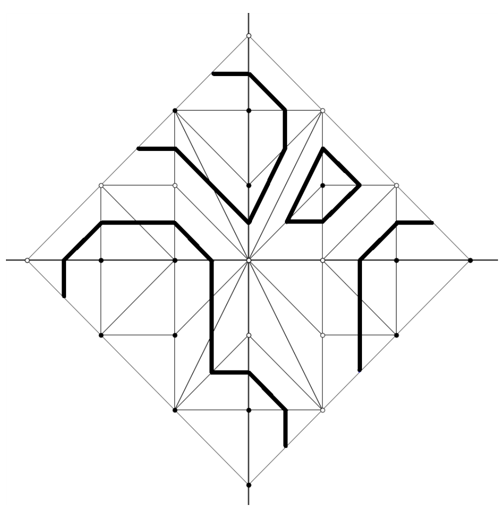


Рис. 3: Кусочно-линейная схема неособой кривой степени 3.

Обозначим через $T^*(m)$ квадрат $T_*(m)$ с отождествлёнными диаметрально противоположными точками его границы. Множество $T^*(m)$ гомеоморфно вещественной проективной плоскости. Пусть $\overline{L}$ – образ кусочно-линейной кривой L в $T^*(m)$ при описанном отождествлении, (m, τ_m, V, σ) – набор начальных данных.

Определим однопараметрическое семейство многочленов

$$b(x, y, t) = \sum_{\substack{0 \leqslant i+j \leqslant n \\ i \geqslant 0,\ j \geqslant 0}} \sigma_{i,j} t^{V_{i,j}} x^i y^j = b_t(x, y) \tag{1}$$

и семейство однородных многочленов

$$B_t(x_0, x_1, x_2) = x_0^m b_t(x_1/x_0, x_2/x_0).$$

Теорема 2 (Виро [7]). *Пусть (m, τ_m, V, σ) – набор начальных данных, $b_t(x, y)$ и $B_t(x_0, x_1, x_2)$ – неоднородные и однородные многочлены, полученные по этим начальным данным, L и $\overline{L}$ – кусочно-линейные кривые в $T_*(m)$ и $T^*(m)$ соответственно.*

Тогда существует $t_0 > 0$, такое, что для любого $t \in (0, t_0]$ уравнение $b_t(x, y) = 0$ определяет в плоскости $\mathbb{R}^2$ кривую c_t такую, что пара $(\mathbb{R}^2, c_t)$ гомеоморфна паре $(T_*(m), L)$, а уравнение $B_t(x_0, x_1, x_2) = 0$ определяет в вещественной проективной плоскости кривую C_t такую, что пара $(\mathbb{R}P^2, C_t)$ гомеоморфна паре $(T^*(m), \overline{L})$.

2.2. Кусочное конструирование распадающихся кривых

Рассмотрим два набора начальных данных $(m_1, \tau_{m_1}, V^1, \sigma^1)$ и $(m_2, \tau_{m_2}, V^2, \sigma^2)$ (индексы у функций V и σ расположены сверху для удобства дальнейшего обозначения их значений в целых точках). Пусть $m = m_1 + m_2$.

Примитивным смешанным разбиением μ_m треугольника T_m назовём его разбиение на параллелограммы площади 1 и треугольники площади $\frac{1}{2}$ с целыми вершинами. Определим на множестве целых точек треугольника T_m функцию V следующим образом:

$$V_{i,j} = \min_{\substack{i_1+i_2=i \\ j_1+j_2=j}} (V^1_{i_1,j_1} + V^2_{i_2,j_2}). \tag{2}$$

Если есть несколько пар (i_1, j_1), (i_2, j_2), на которых достигается минимум, то нужно изменить значения функции V^1 или V^2 в начальных данных.

Значение функции σ в вершинах разбиения определим так:

$$\sigma_{i,j} = \sigma^1_{i_1,j_1} \cdot \sigma^2_{i_2,j_2}.$$

Также необходимо определить на треугольнике T_m выпуклую кусочно-линейную функцию V, принимающую в целых точках из T_m значения, определённые формулой (2). Для этого будем действовать по такому же алгоритму, как в [8].

Рассмотрим набор из четырёх вершин (i_k, j_k), $k = \overline{1,4}$, с целыми координатами в треугольнике T_m, которые являются вершинами параллелограмма с площадью, равной единице.

Лежат ли точки (i_k, j_k, V_{i_k,j_k}), $k = \overline{1,4}$, в одной плоскости?

Да $\to$ Лежат ли все точки, отличные от точек (i_k, j_k, V_{i_k,j_k}), $k = \overline{1,4}$, по одну сторону от плоскости, проходящей через эти четыре точки?

Да $\to$ Определим функцию V на этом параллелограмме так, что её график совпадает с частью плоскости, проходящей через эти четыре вершины, а параллелограмм добавим в примитивное смешанное разбиение.

Нет $\to$ Параллелограмм не входит в примитивное смешанное разбиение.

Нет $\to$ Параллелограмм не входит в примитивное смешанное разбиение.

Повторим эти операции для всех четвёрок целых точек из треугольника T_m, которые образуют параллелограммы с площадью 1, не пересекающиеся с уже добавленными в разбиение параллелограммами.

Затем перейдём к области треугольника T_m, не заполненной параллелограммами.

Рассмотрим тройку целых вершин (i_k, j_k), $k = \overline{1,3}$, которые являются вершинами треугольника с площадью $\frac{1}{2}$, не пересекающимся с параллелограммами, добавленными в примитивное смешанное разбиение ранее.

Лежат ли все остальные целые точки треугольника T_m по одну сторону от плоскости, проходящей через три выбранные точки?

Да $\to$ Функцию V на этом треугольнике определим так, что её график совпадает с частью плоскости, проходящей через эти три вершины. Треугольник добавим в примитивное смешанное разбиение.

Нет $\to$ Треугольник не входит в примитивное смешанное разбиение.

Переберём таким образом все допустимые тройки точек. Если в результате область треугольника T_m, не заполненная параллелограммами, окажется триангулированной, то смешанное разбиение и выпуклая кусочно-линейная функция V найдены, иначе требуется корректировка начальных данных и повторное применение алгоритма.

Пусть на треугольнике T_m определены функция σ, которая ставит в соответствие каждой целой точке из треугольника T_m знак $+$ или $-$, кусочно-линейная выпуклая функция V и примитивное смешанное разбиение μ_m.

Аналогично случаю построения неособой кривой, с помощью симметрий получим разбиение $\mu_*(m)$ квадрата $T_*(m)$ и распространим на этот квадрат функцию σ.

В треугольниках разбиения, как и ранее, проведём средние линии, отделяя вершины разных знаков. В параллелограммах отделим вершины с разными знаками по правилам, указанным на рис. 4.

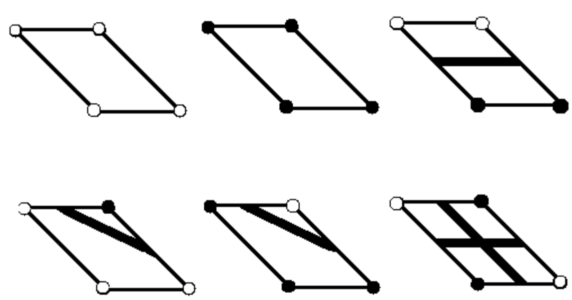


Рис. 4: Правила построения отрезков в параллелограммах.

Как и раньше, обозначим через L и $\overline{L}$ объединение отрезков, проведённых в треугольниках и параллелограммах, в квадрате $T_*(m)$ и $T^*(m)$ соответственно.

Теорема 3 (Штурмфельс [11]). *Пусть $(m_1, \tau_{m_1}, V^1, \sigma^1)$ и $(m_2, \tau_{m_2}, V^2, \sigma^2)$ – начальные данные, которые задают неоднородные и однородные многочлены b_t^1, b_t^2 и B_t^1, B_t^2, $m = m_1 + m_2$, L и $\overline{L}$ – кусочно-линейные кривые в $T_*(m)$ и $T^*(m)$ соответственно, полученные в процессе кусочного конструирования, описанного выше.*

Тогда существует $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \in (0, t_0]$

1. *Уравнение $b_t = b_t^1 \cdot b_t^2 = 0$ определяет в плоскости $\mathbb{R}^2$ распадающуюся кривую $c_m(b_t) = c_{m_1}(b_t^1) \cdot c_{m_2}(b_t^2)$ такую, что пара $(\mathbb{R}^2, c_m(b_t))$ гомеоморфна паре $(T_*(m), L)$;*

2. *Уравнение $B_t = B_t^1 \cdot B_t^2 = 0$ определяет в вещественной проективной плоскости распадающуюся кривую $C_m(B_t) = C_{m_1}(B_t^1) \cdot C_{m_2}(B_t^2)$ такую, что пара $(\mathbb{R}P^2, C_m(B_t))$ гомеоморфна паре $(T^*(m), \overline{L})$.*

3. Результаты построений

Как видно из алгоритма метода кусочного конструирования, описанного выше, некоторые шаги сопровождаются многократно повторяющимися и сложными при ручной работе вычислениями. Для автоматизации и ускорения этого процесса была написана компьютерная программа, которая позволяет по начальным данным получить примитивное смешанное разбиение и рисунок кусочно-линейной кривой, которая ему соответствует.

На рисунках 5 – 8 продемонстрированы начальные данные и результат применения к ним комбинаторного метода кусочного конструирования.

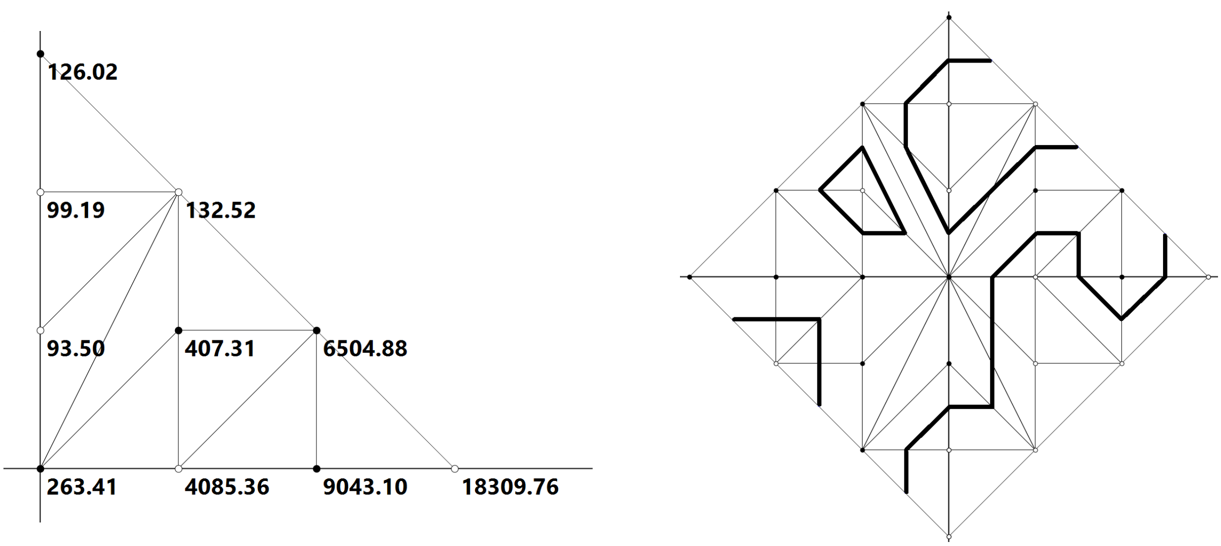


Рис. 5: M-кривая степени 3 и отвечающие ей начальные данные.

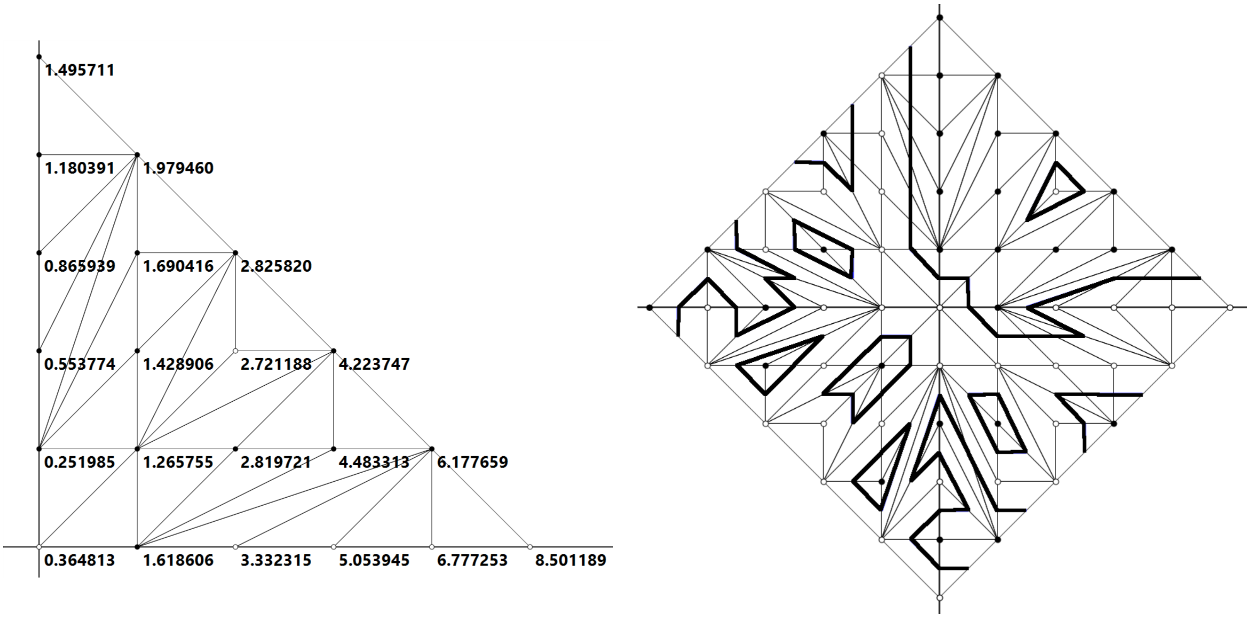


Рис. 6: M-кривая степени 5 и отвечающие ей начальные данные.

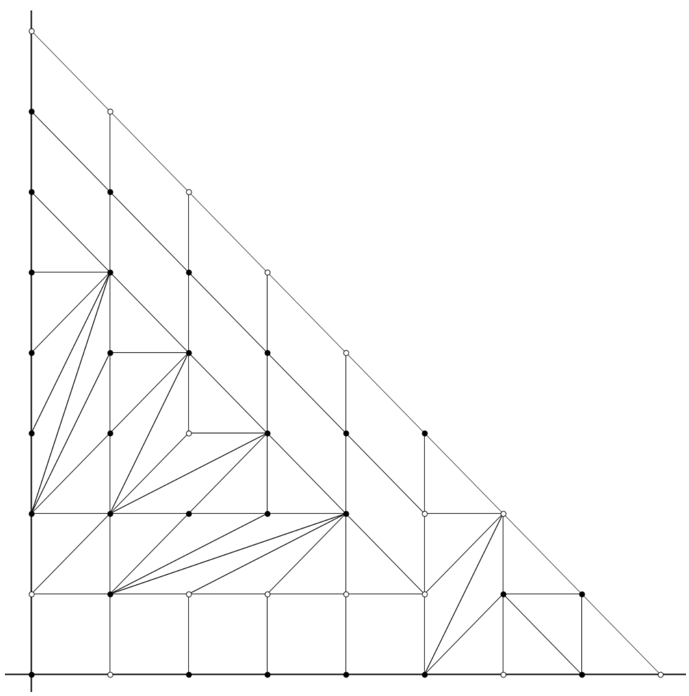


Рис. 7: Примитивное смешанное разбиение, построенное по начальным данным на рис. 5 и рис. 6.

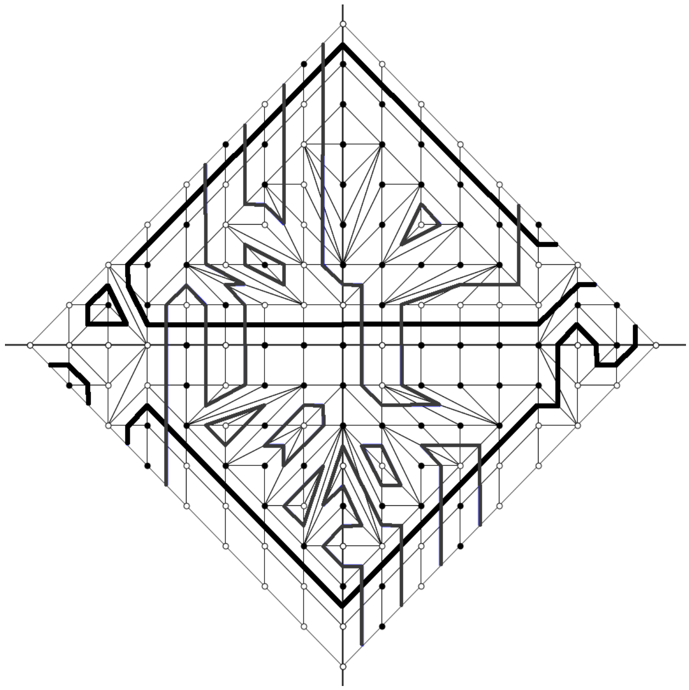


Рис. 8: Результат кусочного конструирования распадающейся кривой степени 8. Более жирными линиями выделены ветви кубики.

Аналогичным образом были получены распадающиеся кривые степени 8, кусочно-линейные модели которых изображены на рис. 12[3] и рис. 13. Под каждым рисунком содержится информация о сомножителях распадающейся кривой, где $\bigsqcup$ обозначает объединение при описанных в п.1 условиях.

Исходные данные для квинтик и кубик представлены в таблицах[4] 1, 2, 3 и 4. Знаки чисел в ячейках таблиц указывают на значения функции σ в целых точках, а модули этих чисел – значения функции V в соответствующих точках. Примитивные триангуляции изображены на рисунках 10 и 11. Под каждой триангуляцией указано к начальным данным каких кривых она относится. Триангуляция из начальных данных для кривой C_5^1 изображена на рисунке 6.

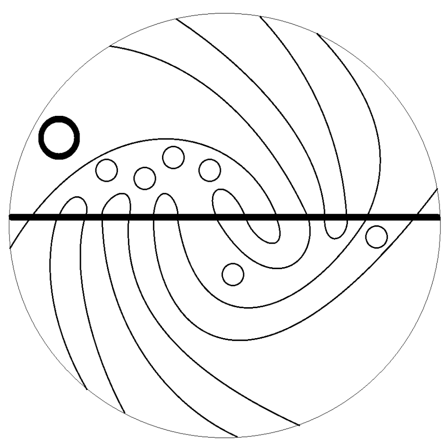


Рис. 9: Гладкая модель построенной распадающейся кривой.

[3]Построение первой модели было ранее рассмотрено подробно на рисунках 5 – 8.

[4]Исходные данные для квинтик взяты из [14] с некоторыми корректировками.

Таблица 1: Исходные данные для кривых степени 3.

Кривая / Координата	C_3^1	C_3^2
(0,0)	-263.41	+280
(1,0)	+4085.36	+150
(2,0)	-9043.1	+260
(3,0)	+18309.76	+1100
(0,1)	+93.5	+500
(1,1)	-407.31	-300
(1,2)	-6504.88	+1600
(0,2)	+99.19	+1650
(2,1)	+132.52	+2300
(0,3)	-126.02	+3600

Таблица 2: Исходные данные для кривых степени 5.

Кривая / Координата	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5
(0,0)	+0.364813	+6.391368	+1.921742	+8.785822	+0.686618
(1,0)	-1.618606	+5.111845	-1.919990	-7.662989	-0.592536
(2,0)	+3.332315	+3.983147	+2.798394	-6.544328	-1.595525
(3,0)	+5.053945	+3.042329	-3.881727	+5.432353	+2.603180
(4,0)	+6.777253	+2.312552	+5.008655	-4.332050	-3.611449
(5,0)	+8.501189	-1.791285	-6.150657	+3.254743	+4.619918
(0,1)	-0.251985	-5.450648	-1.296484	+8.681416	+0.203111
(1,1)	-1.265755	+4.078444	-1.194708	+7.587507	-0.161764
(2,1)	-2.819721	-2.866636	-2.298640	+6.506753	+0.865123
(3,1)	-4.483313	-1.876611	-3.449699	-5.446304	-1.774683
(4,1)	-6.177659	-1.152135	-4.606489	-4.419194	+2.737483
(0,2)	-0.553774	+4.605481	+1.681392	-8.692071	-0.135469
(1,2)	-1.428906	-3.117422	-1.732884	+7.639722	-0.117809
(2,2)	+2.721188	+1.785613	+2.436382	-6.611600	-0.560877
(3,2)	-4.223747	+0.714585	-3.419363	+5.619089	-1.277099
(0,3)	-0.865939	-3.907379	-2.286298	-8.805151	+0.117472
(1,3)	-1.690416	-2.288366	-2.383016	-7.802076	-0.108539
(2,3)	-2.825820	-0.785504	-2.891397	-6.833842	+0.422970
(0,4)	-1.180391	-3.424126	+2.930230	-9.006650	-0.112592
(1,4)	-1.979460	-1.698243	-3.046047	-8.056156	-0.108083
(0,5)	-1.495711	-3.215007	-3.586784	-9.282828	-0.112980

Таблица 3: Исходные данные для кривых степени 5.

Координата / Кривая	C_5^6	C_5^7	C_5^8	C_5^9	C_5^{10}
(0,0)	+1.921742	+5.063224	+5.063234	+5.351532	+8.785822
(1,0)	-1.919990	-3.935589	-3.935589	+4.470126	-7.662989
(2,0)	+2.798394	+2.893621	+2.893621	+3.811411	-6.544328
Продолжение таблицы на следующей странице ...					

Таблица 3

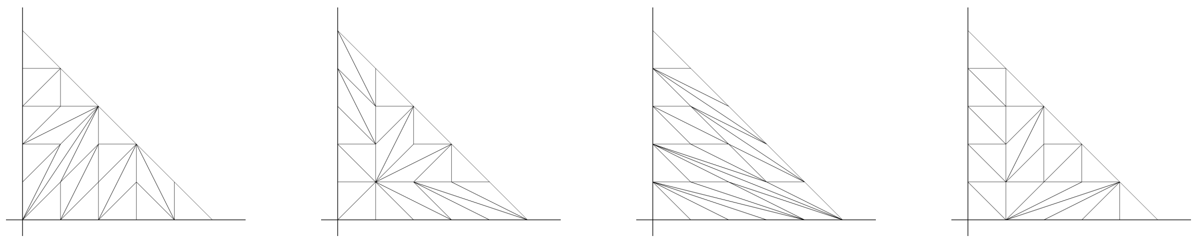
	C_5^6	C_5^7	C_5^8	C_5^9	C_5^{10}
(3,0)	-3.881727	-2.053709	-2.053709	+3.375242	-5.432353
(4,0)	+5.008655	-1.651401	-1.651401	-3.131985	-4.332050
(5,0)	-6.150657	-1.795841	+1.795841	+3.038671	-3.254743
(0,1)	+1.296484	-4.476115	+4.476115	-4.367345	-8.681416
(1,1)	+1.194708	-3.259702	+3.259702	+3.425546	+7.587507
(2,1)	+2.298640	-2.063989	+2.063989	-2.767121	-6.506753
(3,1)	+3.446999	-0.948590	+0.948590	-2.391774	-5.446304
(4,1)	+4.606489	-0.373552	+0.373552	-2.242184	+4.419194
(0,2)	+1.681392	+4.137727	+4.137727	+3.431179	-8.692071
(1,2)	-1.732884	-2.906948	-2.906948	+2.387864	-7.639722
(2,2)	+2.436382	+1.682166	+1.682166	+1.729965	-6.611600
(3,2)	-3.419363	-0.484267	-0.484267	-1.456732	-5.619089
(0,3)	+2.286298	-4.055736	+4.055736	-2.607163	+8.805151
(1,3)	+2.383016	+2.894808	-2.894808	+1.371303	-7.802076
(2,3)	+2.891397	-1.799620	-1.799620	-0.714611	-6.833842
(0,4)	+2.930230	-4.193171	-4.193171	+2.074613	-9.006650
(1,4)	-3.046047	-3.144232	-3.144232	+0.486331	-8.056156
(0,5)	+3.586784	-4.493751	-4.493751	-2.115173	-9.282828

Таблица 4: Исходные данные для кривых степени 5.

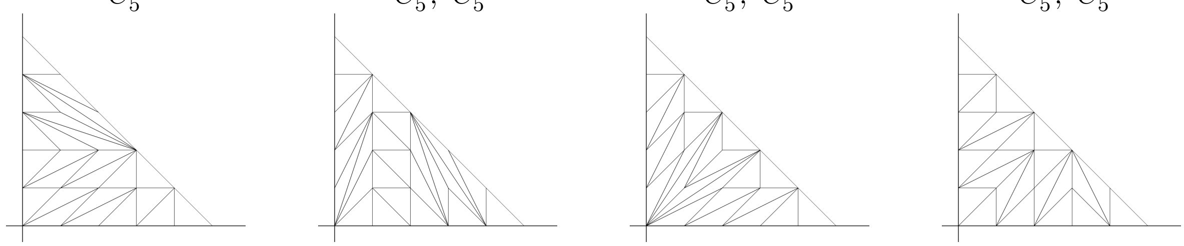
	C_5^{11}	C_5^{12}	C_5^{13}	C_5^{14}	C_5^{15}	C_5^{16}
(0,0)	+3.897520	+0.686618	+6.928716	+5.063224	+5.063224	+5.351532
(1,0)	+4.944820	-0.592536	+5.509098	+3.935589	+3.935589	-4.470126
(2,0)	+6.090824	+1.595525	+4.266741	-2.893621	+2.893621	+3.811411
(3,0)	+7.290039	-2.603180	+3.265917	-2.053709	+2.053709	-3.375242
(4,0)	+8.520121	-3.611449	+2.542920	-1.651401	-1.651401	-3.131985
(5,0)	-9.769379	+4.619918	-2.077390	-1.795841	-1.795841	+3.038671
(0,1)	+4.960769	-0.203111	-5.704748	+4.476115	-4.476115	-4.367345
(1,1)	-5.874163	+0.161764	+4.162723	+3.259702	+3.259702	-3.425546
(2,1)	-6.911405	-0.865123	-2.799377	+2.063989	-2.063989	-2.767121
(3,1)	+8.026747	+1.774683	+1.732737	+0.948590	+0.948590	+2.391774
(4,1)	-9.192268	-2.737483	-1.046562	+0.373352	-0.373552	+2.422184
(0,2)	+6.100987	-0.135469	+4.634037	-4.137727	-4.137727	+3.431179
(1,2)	-6.911577	-0.117809	+2.949034	-2.906948	-2.906948	-2.387864
(2,2)	+7.851436	-0.560877	+1.401275	+1.682166	+1.682166	+1.729965
(3,2)	+8.882884	-1.277099	+0.201262	-0.484267	+0.484267	-1.456732
(0,3)	-7.281919	-0.117472	-3.794708	+4.055736	-4.055736	+2.607163
(1,3)	+8.015331	+0.108539	-1.993701	-2.894808	-2.894808	-1.371303
(2,3)	+8.873963	-0.422970	-0.223389	-1.799620	-1.799620	-0.714611
(0,4)	-8.486366	-0.112592	-3.253832	-4.193171	-4.193171	-2.074613
(1,4)	-9.161148	-0.108083	-1.449983	-3.144232	-3.144232	-0.486331
(0,5)	-9.705439	-0.112980	-3.013054	-4.493751	-4.493751	-2.115173

C_3^1 C_3^2

Рис. 10: Примитивные триангуляции для кубик.

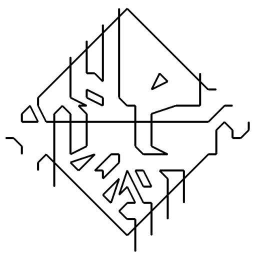


C_5^2 $C_5^3,\ C_5^6$ $C_5^4,\ C_5^{10}$ $C_5^5,\ C_5^{12}$

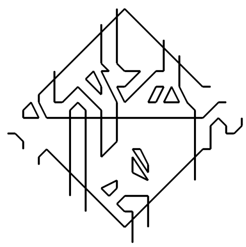


$C_5^7,\ C_5^8,\ C_5^{14},\ C_5^{15}$ $C_5^9,\ C_5^{16}$ C_5^{11} C_5^{13}

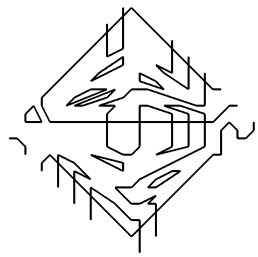
Рис. 11: Примитивные триангуляции для квинтик.



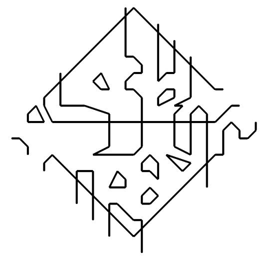
$C_3^1 \bigsqcup C_5^1$



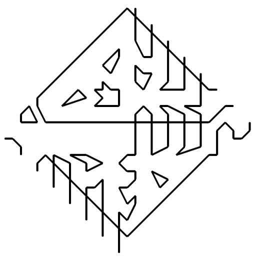
$C_3^1 \bigsqcup C_5^2$



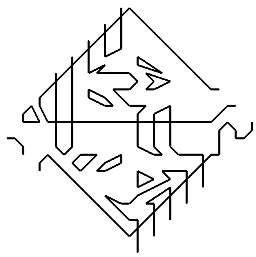
$C_3^1 \bigsqcup C_5^4$



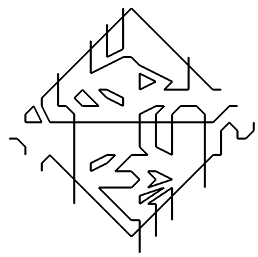
$C_3^1 \bigsqcup C_5^5$



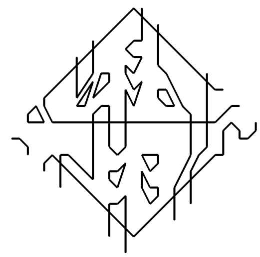
$C_3^1 \bigsqcup C_5^6$



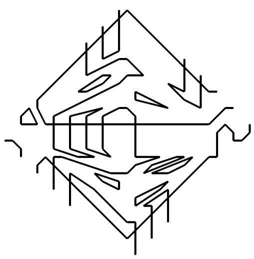
$C_3^1 \bigsqcup C_5^7$



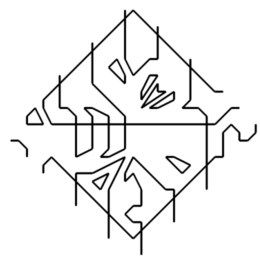
$C_3^1 \bigsqcup C_5^8$



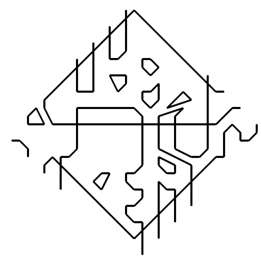
$C_3^1 \bigsqcup C_5^9$



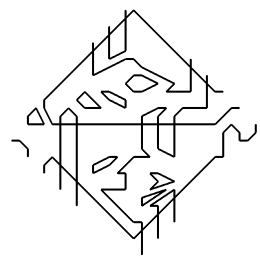
$C_3^1 \bigsqcup C_5^{10}$



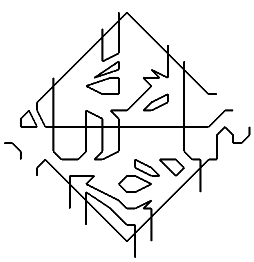
$C_3^1 \bigsqcup C_5^{11}$



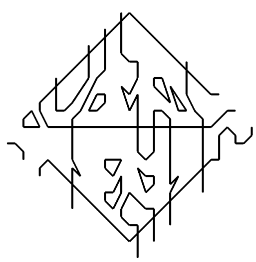
$C_3^1 \bigsqcup C_5^{12}$



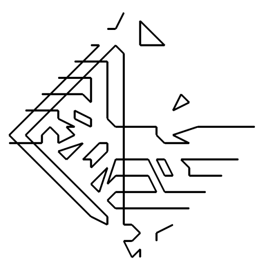
$C_3^1 \bigsqcup C_5^{14}$



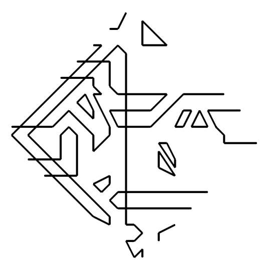
$C_3^1 \bigsqcup C_5^{15}$



$C_3^1 \bigsqcup C_5^{16}$

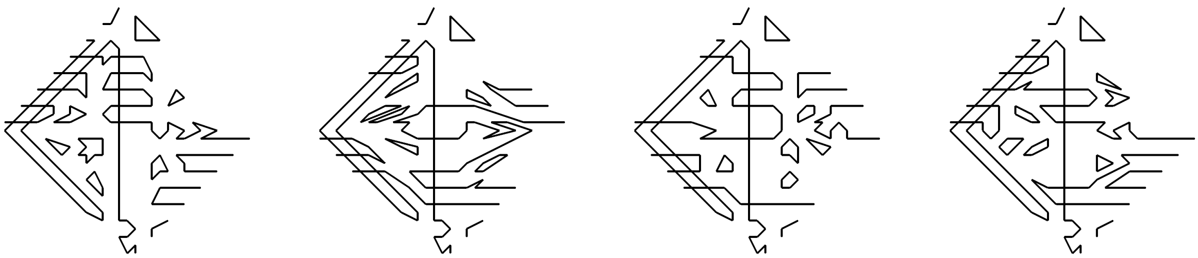


$C_3^2 \bigsqcup C_5^1$

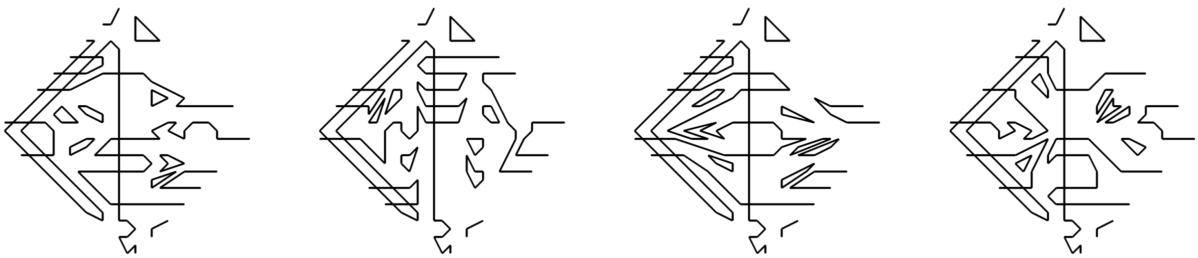


$C_3^2 \bigsqcup C_5^2$

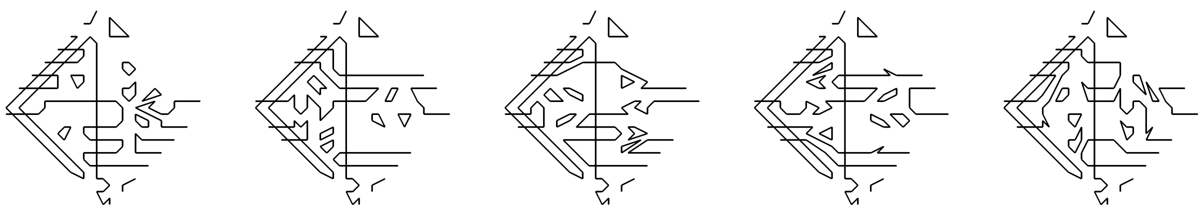
Рис. 12



$C_3^2 \bigsqcup C_5^3$ $C_3^2 \bigsqcup C_5^4$ $C_3^2 \bigsqcup C_5^5$ $C_3^2 \bigsqcup C_5^7$



$C_3^2 \bigsqcup C_5^8$ $C_3^2 \bigsqcup C_5^9$ $C_3^2 \bigsqcup C_5^{10}$ $C_3^2 \bigsqcup C_5^{11}$



$C_3^2 \bigsqcup C_5^{12}$ $C_3^2 \bigsqcup C_5^{13}$ $C_3^2 \bigsqcup C_5^{14}$ $C_3^2 \bigsqcup C_5^{15}$ $C_3^2 \bigsqcup C_5^{16}$

Рис. 13

4. Заключение

Модификация Штурмфельса метода кусочного конструирования Виро была применена для построения кривых, распадающихся в произведение M-кубики и M-квинтики, пересекающихся в 15 попарно различных точках, расположенных на их нечётных ветвях. В результате были построены 29 попарно различных кривых указанного класса.

Благодарю Г.М. Полотовского за обсуждение и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Проблемы Гильберта. Под ред. П.С. Александрова. Москва: Наука. 1969.

2. Гудков Д.А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН, 1974, Т.29, вып. 4(178). С. 3-79.

3. Полотовский Г. М. Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР, 1977, Том 236:3. С. 548-551.

4. Борисов И.М., Полотовский Г.М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз., 2020, т. 176. С. 3-18.

5. Борисов И.М., Горская В.А., Полотовский Г.М. О топологии вещественных распадающихся кривых степеней 7 и 8 // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVIII Международной кон- ференции, посвящённой столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина, Тула: 2020. С. 423 - 427.

6. Harnack A. Über die Vieltheiligkeit der ebenen algebraishen Curven // Math. Ann., 1876, Bd.10. S.189-199.

7. Viro O. Ya. Patchworking real algebraic varieties // U.U.D.M. Report, Uppsala Univ., 1994, V.42.

8. Гущин М.А., Коробейников А.Н., Полотовский Г.М. Построение взаимных расположений кубики и квартики методом кусочного конструирования // Записки научных семинаров ПОМИ, 2000, Т. 267, С. 119 - 132.

9. Виро О.Я. Склеивание алгебраических гиперповерхностей и построения кривых // Тезисы Ленинградской Международной Топологической Конференции, Ленинград: 1982. С. 149-197.

10. Itenberg I., O. Viro Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture // Math. Intelligencer, 1996, no. P. 19-28.

11. Sturmfels B. Viro's theorem for complete intersection // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1994, V. 21. P. 377 - 386.

12. Viro O.Ya. Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7, Lecture Notes in Math, 1984, 1060. P. 187-200.

13. Коробейников А.Н. Новые построения распадающихся кривых // Вестник ННГУ (Математическое моделирование и оптимальное управление), 2001, Т. 1(23), С. 17-27.

14. Гущин М.А. Построения некоторых расположений коники и M-квинтики с одной точкой на бесконечности // Вестник ННГУ, сер. мат., 2004, №1(2). С. 43 - 52.

REFERENCES

1. 1969, Problemy Gilberta [Hilbert's problems], edited by Alexandrov P.S., *Nauka*, Moscow.

2. Gudkov, D. A. 1974, "Topology of real projective algebraic manifolds", *UMN*, vol. 29, no. 4(178), pp. 3-79.

3. Polotovskiy G.M. 1977, "Catalog of M-decomposable curves of degree 6", *DAN USSR*, vol 236:3, pp. 548-551.

4. Borisov I.M., Polotovskiy G.M. 2020 "On the topology of plane real algebraic decomposable curves of degree 8", *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i eyo pril. Temat. obz.*, vol. 176, pp. 3-18.

5. Borisov I.M., Gorskaya V.A., Polotovskiy G.M. "On the topology of real decomposable curves of degrees 7 and 8", *Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy, prilozheniya i problemy istorii: Materialy XVIII Mezhdunarodnoj konferencii, posvyashchyonnoj stoletiyu so dnya rozhdeniya professorov B. M. Bredihina, V. I. Nechaeva i S. B. Stechkina*, Tula, 2020, pp. 397 - 401.

6. Harnack A. 1876, “Über die Vieltheiligkeit der ebenen algebraishen Curven“, *Math. Ann.*, Bd.10. S.189-199.

7. Viro O. 1994 “Patchworking real algebraic varieties“, U.U.D.M. Report, Uppsala Univ.,vol.42.

8. Guschin M.A, Korobeynikov A.N., Polotovkiy G.M. 2000, “Constructing of mutual arrangements of cubic and quartic by the method of piecewise construction“, *Zapiski nauchnyh seminarov POMI*, vol. 267, pp. 119 - 132.

9. Viro O. Ya. “Gluing algebraic hypersurfaces and constructions of curves“, *Tezisy Leningradskoj Mezhdunarodnoj Topologicheskoj Konferentsii* Leningrad, 1982, pp. 149-197.

10. Itenberg I., O. Viro 1996, “Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture“, *Math. Intelligencer*, no. 4, pp. 19-28.

11. Sturmfels B. 1994 “Viro's theorem for complete intersection“, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, vol. 21, pp. 377 - 386.

12. Viro O. Ya. 1984, “Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7“, *Lecture Notes in Math*, 1060, pp. 187-200.

13. Korobeinikov A.N. 2001, “New constructions of decomposable curves“, *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta (Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie)*, vol. 1(23), pp. 17-27.

14. Guschin M.A 2004, “Construction of some mutual arrangements of conic and M-quintic with a single point at infinity“, *Vestnik NNGU, ser. mat.*, no. 1(2), pp. 43 - 52.

Получено 25.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-92-104

Стохастический анализ механической системы на предмет ее надежности с различными услугами по ремонту

Дж. Бхатти, М. К. Каккар, М. Каур, Дипика, П. Кханна

Джасдев Бхатти — доцент, Институт инженерии и технологий Университета Читкары, Университет Читкары (Пенджаб, Индия).
e-mail: jasdev.bhatti@chitkara.edu.in

Мохит Кумар Каккар — профессор, Институт инженерии и технологий Университета Читкары, Университет Читкары (Пенджаб, Индия).
e-mail: mohit.kakkar@chitkara.edu.in

Манприт Каур — доцент, Институт инженерии и технологий Университета Читкары, Университет Читкары (Пенджаб, Индия).
e-mail: manpreet.kaur@chitkara.edu.in

Дипика — доцент, Институт инженерии и технологий Университета Читкары, Университет Читкары (Пенджаб, Индия).
e-mail: deepika.goyal@chitkara.edu.in

Панкадж Кханна — Институт инженерии и технологий Университета Читкары, Университет Читкары (Пенджаб, Индия).
e-mail: pankaj.khanna@chitkara.edu.in

Аннотация

Надежность увеличивает свою ценность в развитии механического и промышленного мира за счет включения механизма ремонта, доступности и возможности изготовления машин с различной рабочей мощностью в любых условиях. Настоящая статья представляет собой инициативу, предпринятую с механической системой, работающей с единым сервером ремонта для различного характера отказов и услуг. Стратегия пассивной резервной машины используется для поддержания надежности системы на удовлетворительном уровне. Процесс проверки включен для фильтрации машин в зависимости от их неисправности или уровня ремонтных услуг. Вычисленные числовые и графические данные оказались полезными для выяснения поведения прибыли и надежности при увеличении / уменьшении скорости механизма ремонта и интенсивности отказов. Политика предпочтений была инициирована для регулярных сбоев или сбоев, требующих обычных затрат на обслуживание и периода времени, чем основные, чтобы избежать времени ожидания для обычного клиента.

Ключевые слова: Моделирование надежности, геометрическое распределение, доступность системы, отказ, проверка, стоимость обслуживания и функция прибыли.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

Дж. Бхатти, М.К. Каккар, М. Каур, Дипика, П. Кханна. Стохастический анализ механической системы на предмет ее надежности с различными услугами по ремонту // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 92–104.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-92-104

Stochastic analysis to mechanical system to its reliability with varrying repairing services

J. Bhatti, M. K. Kakkar, M. Kaur, Deepika, P. Khanna

Jasdev Bhatti — Associate Professor, Chitkara University Institute of Engineering and Technology, Chitkara University (Punjab, India).
e-mail: jasdev.bhatti@chitkara.edu.in
Mohit Kumar Kakkar — Professor, Chitkara University Institute of Engineering and Technology, Chitkara University (Punjab, India).
e-mail: mohit.kakkar@chitkara.edu.in
Manpreet Kaur — Assistant Professor, Chitkara University Institute of Engineering and Technology, Chitkara University (Punjab, India).
e-mail: manpreet.kaur@chitkara.edu.in
Deepika — Assistant Professor, Chitkara University Institute of Engineering and Technology, Chitkara University (Punjab, India).
e-mail: deepika.goyal@chitkara.edu.in
Pankaj Khanna — Chitkara University Institute of Engineering and Technology, Chitkara University (Punjab, India).
e-mail: pankaj.khanna@chitkara.edu.in

Abstract

Reliability is enhancing its value in the advancement of mechanical and industrial world by incorporating the repair mechanism, availability and manufacturing possibility of machines with varying working capacity in all conditions. The present paper is an initiative taken with a mechanical system operating with single repair server facility for varying nature of failures and services. Passive standby machine strategy is adopted for maintaining reliability at a gratified level in the system. The inspection process is included for filtering the machines according to its failure or to the level of repair services. The computed numerical and graphical data is proved to be beneficial for clarifying the profit and reliability behaviour with increasing/decreasing rate of repair mechanism and failure rate. The preference policy has been initiated for regular failure or to the failure requiring normal servicing charges and time period than major ones to avoid the waiting time for normal customer.

Keywords: Reliability modelling, geometric distribution, system availability, failure, inspection, maintenance cost and profit function.

Bibliography: 30 titles.

For citation:
J. Bhatti, M. K. Kakkar, M. Kaur, Deepika, P. Khanna, 2021, "Stochastic analysis to mechanical system to its reliability with varrying repairing services", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 92–104.

1. Introduction

In the real world full of industrial advancement and variety of machines, reliability is adding its major importance for their evaluation and analysis such as manufacturing and availability of machines and system, their repairing mechanism and working capacity in all environmental situations and many more. For keeping the technology more reliable there is always a new initiative or substitution policy be kept ready for balancing the possibilities of damage to technology. Along with this keeping standby units in active or passive form is also an alternative method that usually been adopted by many industries for maintaining reliability of system in satisfied level. It has been observed in several systems that rather than placing direct repair server to the failed unit, the inspection process is included for filtering the machines according to its failure or to the level of repair services. The present paper is initially contributed to analysis of the system based on above strategies.

From past many years there has been lots of initiative been taken in reliability evaluation of industrial models for its improvement. In 2008, Bhardwaj et al. [1, 2] had stochastically examined distinct repair and failure mechanism under discrete distribution for the redundant system. In 2009 evaluation of industrial system with linear first order differential equations was initiated by Haggag et al. [3, 4]. Rizwan et al. [5] also investigated hot standby PLC system for enhancing its reliability. An computer based working system with replacement preference to S/W over H/W replacement subject to MOT and MRT was examined by Kumar, A. [6]. In 2014, Singh et al. [7] had stochastically studied a gas turbine plant processing with one gas and steam turbine to an industrial system i.e. power generating system. Malhotra. R et. al. [8, 9], had also initiated with examining system with varying repair demands. Bhatti and Kakkar et al [10, 11, 12, 13, 14] had also initiated together in evaluating different real life models following correlation relation concept and using geometric distributions.

In 2016, Hua et al. [15, 16] had spatially distributed units in his research with major challenge of assessing systems with involving unit degradation paths. Pervaiz et al [17] used Boolean function for assessment of paper plant industry and S.Z. Taj, et al [18] assessed the cable plant subsystem by framing probabilistic modelling. In 2017 N. Adlakha [19] had investigated mechanical system having assembling and activation time for cold standby unit before being into an operative state. Cui et al [20, 21] and Endharta et al. [22] in 2018 had applied F and G balanced systems under Markov processes for k-out-of-n systems reliability. Chen W-L. et al. [23] enhanced his study for retrial machine repair systems with operating units in 'M' numbers out of which 'W' are to be in warm standby mode and a single recovery policy for server breakdown. In 2019, S. Bhardwaj [24] studied neural network prediction model and Dong Q.L. et al. [25] used Bivariate Wiener processes by emerging stochastic degradation system for two-stage failure process. Recently, new balanced mechanisms for examining balanced systems and common cause failures had been initiated by Wu H. et al. [26], Jia H.P. [27] and Fang et al. [28]. Bhatti and Kakkar et al. [29, 30] also enhance his study under reliability with active or passive standby systems with common failure.

In all, all researchers had contributed to their best for enhancing the reliability of mechanical system and machines. The present paper is also one step forward been taken with initiative as an inspection process for filtering the machines according to its failure or to the level of repair service but with some preferences. The preference is been given to regular or to the failure required normal servicing charges and time period to avoid the waiting time for normal customer. The two machines or customer $'X'$ and $'Y'$ having their individual mechanical problems. But due to the possibility of only normal/regular failure to machine $'Y'$ it has been given preference to machine $'X'$ for being repaired and free from inspection procedure. Possible states of the system under operative and failed states are reflected through transition model Figure 1 and Table 1.

Up States

$$S_0 = (X_0, Y_0), \quad S_1 = (X_I, Y_0), \quad S_2 = (X_{r_1}, Y_0), \quad S_3 = (X_{r_2}, Y_0), \quad S_7 = (X_0, Y_{r_2}).$$

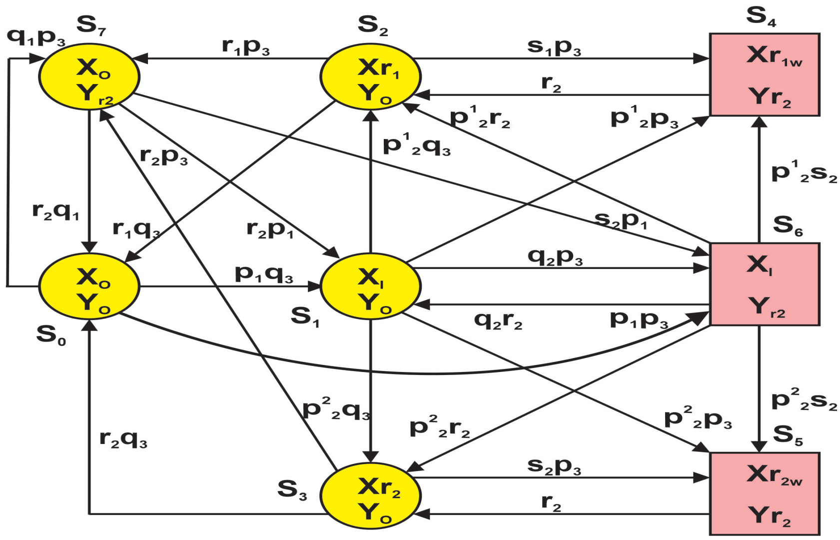


Рис. 1: Transition Model

Таблица 1: Nomenclature

X_0, Y_0	:	Operative behaviour of unit $'X'$ and $'Y'$.
X_I	:	Inspection behaviour of failed unit $'X'$.
$X_{r_1}/X_{r_{1W}}$	:	Special failure repaired service or waiting rate to unit $'X'$.
$X_{r_2}/X_{r_{2W}}/Y_{r_2}$	:	Regular services or waiting rate to unit $'X'$ and $'Y'$.
p_1	:	Probability value for $'X'$ to fall in failure mode
p_2^1/p_2^2	:	Probabilityc value for $'X'$ to get inspected.
p_3	:	Probability value to $'Y'$ for falling in failure mode with regular repair
r_1/r_2	:	Probability repair value to ‘$'X'$ and $'Y'$ for being repaired (special/regular) successfully.

Down States

$$S_4 = (X_{r_{1w}}, Y_{r_2}), \qquad S_5 = (X_{r_{2w}}, Y_{r_2}), \qquad S_6 = (X_I, Y_{r_2}).$$

2. Transition Probabilities

Using the transition diagram shown in Figure 1, the steady state transition probabilities from state S_i to $S_j$can be calculated by applying:

$$P_{ij} = \lim_{t\to\infty} Q_{ij}$$

where Q_ij depicts the 'cumulative density function' from first regenerative state $'i'$ to second state $'j'$. The evaluated transition probabilities are as follows:

$$P_{01} = \frac{p_1 q_3}{1 - q_1 q_3} \quad P_{20} = \frac{r_1 q_3}{1 - s_1 q_3} \quad P_{62} = \frac{p_2^1 r_2}{1 - q_2 s_2}$$

$$P_{06} = \frac{p_1 p_3}{1 - q_1 q_3} \quad P_{24} = \frac{s_1 p_3}{1 - s_1 q_3} \quad P_{63} = \frac{p_2^2 r_2}{1 - q_2 s_2}$$

$$P_{07} = \frac{q_1 p_3}{1 - q_1 q_3} \quad P_{27} = \frac{r_1 p_3}{1 - s_1 q_3} \quad P_{64} = \frac{p_2^1 s_2}{1 - q_2 s_2}$$

$$P_{12} = \frac{p_2^1 q_3}{1 - q_2 q_3} \quad P_{30} = \frac{r_2 q_3}{1 - s_2 q_3} \quad P_{65} = \frac{p_2^2 s_2}{1 - q_2 s_2}$$

$$P_{13} = \frac{p_2^2 q_3}{1 - q_2 q_3} \quad P_{35} = \frac{s_2 p_3}{1 - s_2 q_3} \quad P_{70} = \frac{r_2 q_1}{1 - s_2 q_1}$$

$$P_{14} = \frac{p_2^1 p_3}{1 - q_2 q_3} \quad P_{37} = \frac{r_2 p_3}{1 - s_2 q_3} \quad P_{71} = \frac{r_2 p_1}{1 - s_2 q_1}$$

$$P_{15} = \frac{p_2^2 p_3}{1 - q_2 q_3} \quad P_{42} = P_{53}(t) = \frac{r_2}{1 - s_2} \quad P_{76} = \frac{s_2 p_1}{1 - s_2 q_1}$$

$$P_{16} = \frac{q_2 p_3}{1 - q_2 q_3} \quad P_{61} = \frac{q_2 r_2}{1 - q_2 s_2}$$

2.1. Mean Sojourn Times

By mentioning sojourn time in state $S_i (i = 0 - 9)$ by symbol $'\mu_i'$, the value of mean sojourn time for state S_i is calculated as:

$$\mu_0 = \frac{1}{1 - q_1 q_3}, \quad \mu_1 = \frac{1}{1 - q_2 q_3}, \quad \mu_2 = \frac{1}{1 - s_1 q_3}, \quad \mu_3 = \frac{1}{1 - s_2 q_3}$$
$$\mu_4 = \mu_5 = \frac{1}{1 - s_2}, \quad \mu_6 = \frac{1}{1 - q_2 s_2}, \quad \mu_7 = \frac{1}{1 - s_2 q_1}.$$

3. Mean Time to System Failure (MTSF)

To calculate MTSF of the proposed system, the absorbing states is taken to be the failure ones. Then, reliability analysis R_i at time $'t'$ is obtained by solving the following equation:

$$R_0 = Z_0 + q_{01} \copyright R_1 + q_{07} \copyright R_7$$

$$R_1 = Z_1 + q_{12} \copyright R_2 + q_{13} \copyright R_3$$

$$R_2 = Z_2 + q_{20} \copyright R_0 + q_{27} \copyright R_1$$

$$R_3 = Z_3 + q_{30} \copyright R_0 + q_{37} \copyright R_1$$

$$R_7 = Z_7 + q_{70} \copyright R_0 + q_{71} \copyright R_1$$

By solving above equations, we obtain

$$MTSF = \lim_{h \to 1} \frac{N_1(h)}{D_1(h)} - 1 = \frac{N_1}{D_1}$$

where

$$N_1 = \mu_0[1 - P_{71}(P_{12} + P_{13})] + \mu_1[P_{01} + P_{07}P_{71}] + \mu_2(P_{12} + P_{13})[P_{01} + P_{07}P_{71}]$$
$$+\mu_7(P_{12} + P_{13})[P_{07} + P_{02}P_{27}]$$
$$D_1 = 1 - (P_{12} + P_{13})P_{20}(P_{01} + P_{07}P_{71}) + P_{27}((P_{71} + P_{70}P_{01}) - P_{07}P_{70}.$$

4. Availability and Maintenance Analysis of the System

Using probabilistic argument and through reliability models design as figure 1, the relations related to availability and maintenance analysis of the system are obtained as:

$$X_0 = Z_0 + q_{01}\copyright X_1 + +q_{06}\copyright X_6 + +q_{07}\copyright X_7.$$
$$X_1 = Z_1 + q_{12}\copyright X_2 + q_{13}\copyright X_3 + q_{14}\copyright X_4 + q_{15}\copyright X_5 + q_{16}\copyright X_6.$$
$$X_2 = Z_2 + q_{20}\copyright X_0 + q_{24}\copyright X_4 + q_{27}\copyright X_7.$$
$$X_3 = Z_3 + q_{30}\copyright X_0 + q_{35}\copyright X_5 + q_{37}\copyright X_7.$$
$$X_4 = Z_4 + q_{42}\copyright X_2.$$
$$X_5 = Z_5 + q_{53}\copyright X_3.$$
$$X_6 = Z_6 + q_{61}\copyright X_1 + q_{62}\copyright X_2 + q_{63}\copyright X_3 + q_{64}\copyright X_4 + q_{65}\copyright X_5.$$
$$X_7 = Z_7 + q_{70}\copyright X_0 + q_{71}\copyright X_1 + q_{76}\copyright X_6.$$

By solving above equations, we get the value of reliability parameters as: Availability:

$$A_0 = -\frac{N_2(1)}{D_2'(1)}, \qquad Z_i = 0 \qquad fori = 4, 5, 6.$$

Busy schedule of Inspection:

$$B_0 = -\frac{N_3(1)}{D_2'(1)}, \qquad Z_i = 0 \qquad fori = 0, 2, 3, 4, 5, 7.$$

Busy schedule of Repairman r_1:

$$B_0' = -\frac{N_4(1)}{D_2'(1)}, \qquad Z_i = 0 \qquad fori = 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Busy schedule of Repairman r_2:

$$B_0'' = -\frac{N_5(1)}{D_2'(1)}, \qquad Z_i = 0 \qquad fori = 0, 1, 2.$$

where

$$N_2(1) = \mu_0(1 - P_{16}P_{61})[P_{20} + P_{27}P_{70}] + \mu_1[(1 - P_{24})[P_{01} + P_{06}P_{61} + P_{07}(P_{71} + P_{76}P_{61})]$$
$$+P_{27}(P_{06}P_{71} - P_{01}P_{76})(1 - P_{61})] + (1 - P_{16}P_{61})[(\mu_2 + \mu_3 + \mu_7)(1 - P_{07}P_{70} + P_{27} + P_{20}P_{07})]$$

$$N_3(1) = (1 - P_{24})[\mu_1([P_{01} + P_{06}P_{61} + P_{07}(P_{71} + P_{76}P_{61})] + P_{27}(P_{06}P_{71} - P_{01}P_{76})$$
$$(1 - P_{61})) + \mu_6([P_{06} + P_{01}P_{16} + P_{07}(P_{76} + P_{71}P_{16})] + P_{27}(P_{01}P_{76} - P_{06}P_{71})(1 - P_{61}))]$$

$$N_4(1) = (1 - P_{16}P_{61})\mu_2(1 - P_{07}P_{70})$$

$$\begin{aligned} N_5(1) = (1 - P_{16}P_{61})\mu_3(1 - P_{07}P_{70}) + \mu_4[(P_{01} + P_{07}P_{71})[P_{14} + P_{15} + P_{16}(P_{64} + P_{65}) \\ +P_{24}(P_{12} + P_{13} + P_{16}(P_{62} + P_{63}))] + P_{06} + P_{07}P_{76}[P_{64} + P_{65} + P_{61}(P_{14} + P_{15}) \\ +P_{24}(P_{62} + P_{63} + P_{61}(P_{12} + P_{13}))] + P_{27}(P_{06}P_{71} - P_{01}P_{76})[(P_{64} + P_{65})(1 - P_{16}) \\ (P_{14} + P_{15})(1 - P_{61})]] + \mu_6([P_{06} + P_{01}P_{16} + P_{07}(P_{76} + P_{71}P_{16})] \\ +P_{27}(P_{01}P_{76} - P_{06}P_{71})(1 - P_{61})) + \mu_7(1 - P_{07}P_{70} + P_{27} + P_{20}P_{07}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2'(1) = -\mu_0(1 - P_{16}P_{61})[P_{20} + P_{27}P_{70}] - \mu_1[(1 - P_{24})[P_{01} + P_{06}P_{61} + P_{07}(P_{71} + P_{76}P_{61})] \\ +P_{27}(P_{06}P_{71} - P_{01}P_{76})(1 - P_{61})] - (1 - P_{16}P_{61})[(\mu_2 + \mu_3 + \mu_7)(1 - P_{07}P_{70} + P_{27} + P_{20}P_{07})] \\ -\mu_4[(P_{01} + P_{07}P_{71})[P_{14} + P_{15} + P_{16}(P_{64} + P_{65}) + P_{24}(P_{12} + P_{13} + P_{16}(P_{62} + P_{63}))] \\ +P_{06} + P_{07}P_{76}[P_{64} + P_{65} + P_{61}(P_{14} + P_{15}) + P_{24}(P_{62} + P_{63} + P_{61}(P_{12} + P_{13}))] \\ +P_{27}(P_{06}P_{71} - P_{01}P_{76})[(P_{64} + P_{65})(1 - P_{16})(P_{14} + P_{15})(1 - P_{61})]] \\ -\mu_6([P_{06} + P_{01}P_{16} + P_{07}(P_{76} + P_{71}P_{16})] + P_{27}(P_{01}P_{76} - P_{06}P_{71})(1 - P_{61}))] \end{aligned}$$

5. Conclusion

The total profit of system to its steady state will be calculated by using:

$$P = C_1A_0 - C_2B_0 - C_3[B_0' + B_0'']$$

where C_1: be the per unit up time revenue by the system. C_2,C_3: be the per unit down time expenditure on the system. As per the data analysis, the performance of profit function was analyzed through having some fixed parameters C_1, C_2 and C_3 as $C_0 = 1500$, $C_1 = 300$, $C_2 = 350$ and $p_2 = 0.6$.

Table 2 and Figure 2 reflects that the profit function will decrease as the failure rate p_1 increases from 0.1 to 0.9 for certain r_1, r_2, p_3 values. Whereas Table 3 and Figure 3 reflects its opposite behaviour for certain p_1, p_3 with increasing r_1, r_2. Hence, with the help of numerical and graphical analysis it has been proved that the profit function increases with increasing repair and decreasing failure rate. In other words, the research paper will verify its objectives of benefiting the industries by developing new techniques using prescribed repairng techniques for different failure.

6. Acknowledgement

The authors are grateful to the Editor, Co-Editor and Reviewers for their constructive suggestions.

Таблица 2: Reliability parameters w.r.t repair r_1,r_2, Failure Rate p_3

Repair, Failure Rate	MTSF	A_0	B_0	$B_0' + B_0''$	Profit
$r_1 = 0.06$, $r_2 = 0.04$, $p_3 = 0.2$	13.34816	0.439386	0.071212	0.88796	326.9289262
	8.26087	0.382619	0.076136	0.915303	230.7321359
	6.718898	0.363914	0.076619	0.926769	198.5157803
	6.024452	0.355656	0.076143	0.93332	183.9797496
	5.650493	0.351492	0.075428	0.937648	176.4327009
	5.426997	0.349245	0.074682	0.940759	172.1972711
	5.283912	0.347999	0.073974	0.943121	169.7147604
	5.187718	0.347315	0.073322	0.944984	168.231833
$r_1 = 0.3$ $r_2 = 0.1$, $p_3 = 0.5$	11.95662	0.730824	0.130052	0.710412	808.5761745
	6.44206	0.628585	0.179353	0.769325	619.8084424
	4.611465	0.57487	0.205185	0.800348	520.627402
	3.701681	0.541837	0.221014	0.819481	459.6323401
	3.160083	0.519522	0.231661	0.832451	418.4274372
	2.802469	0.503476	0.239279	0.841815	388.7952611
	2.549898	0.491411	0.244974	0.84889	366.5126824
	2.362903	0.48203	0.249373	0.854418	349.1869919
$r_1 = 0.65$ $r_2 = 0.15$, $p_3 = 0.8$	11.17526	0.867294	0.131712	0.594928	1053.202165
	5.860592	0.795704	0.206111	0.647095	905.2398548
	4.068428	0.752177	0.254561	0.679733	813.9911542
	3.154762	0.724026	0.289165	0.701777	753.6677721
	2.590463	0.70537	0.315597	0.717387	712.2912115
	2.198814	0.693146	0.336889	0.728752	683.589792
	1.903705	0.685638	0.35483	0.737123	664.0154099
	1.666667	0.681853	0.370562	0.743258	651.4703642

Таблица 3: Reliability parameters w.r.t Failure rate p_1, p_3

Failure Rate p_1,p_3	MTSF	A_0	B_0	$B_0' + B_0''$	Profit
$p_1 = 0.8$ $p_3 = 0.2$	5.187718	0.347315	0.073322	0.944984	168.231833
	5.346386	0.525387	0.147298	0.854984	444.6463936
	5.527778	0.631806	0.207931	0.768851	616.2317649
	5.728331	0.703059	0.256255	0.693314	735.0530471
	5.946468	0.754788	0.295017	0.628232	823.7964199
	6.181694	0.794554	0.326554	0.57213	893.6185798
	6.434177	0.826391	0.352603	0.523485	950.586493
	6.704545	0.852641	0.374421	0.481001	998.2854495
$p_1 = 0.6$ $p_3 = 0.5$	2.509642	0.170905	0.09413	0.984894	-116.5943514
	2.604938	0.303493	0.156777	0.947438	76.602372
	2.702541	0.412269	0.203008	0.897451	243.3935662
	2.802469	0.503476	0.239279	0.841815	388.7952611
	2.904762	0.580645	0.268817	0.784946	515.5913978
	3.009473	0.646232	0.293449	0.729478	625.9958088
	3.116667	0.702148	0.314321	0.67686	722.0244016
	3.226415	0.749953	0.332213	0.627792	805.5379368
$p_1 = 0.4$ $p_3 = 0.8$	2.691851	0.120397	0.11433	0.994673	-201.8382064
	2.765625	0.234297	0.177468	0.975075	-43.07078764
	2.835925	0.341	0.215672	0.941976	117.1070403
	2.903458	0.438468	0.240567	0.899243	270.7977208
	2.96875	0.525427	0.257924	0.850976	412.9208633
	3.032202	0.601609	0.270802	0.800524	540.990066
	3.094124	0.667504	0.280893	0.750277	654.3913683
	3.154762	0.724026	0.289165	0.701777	753.6677721

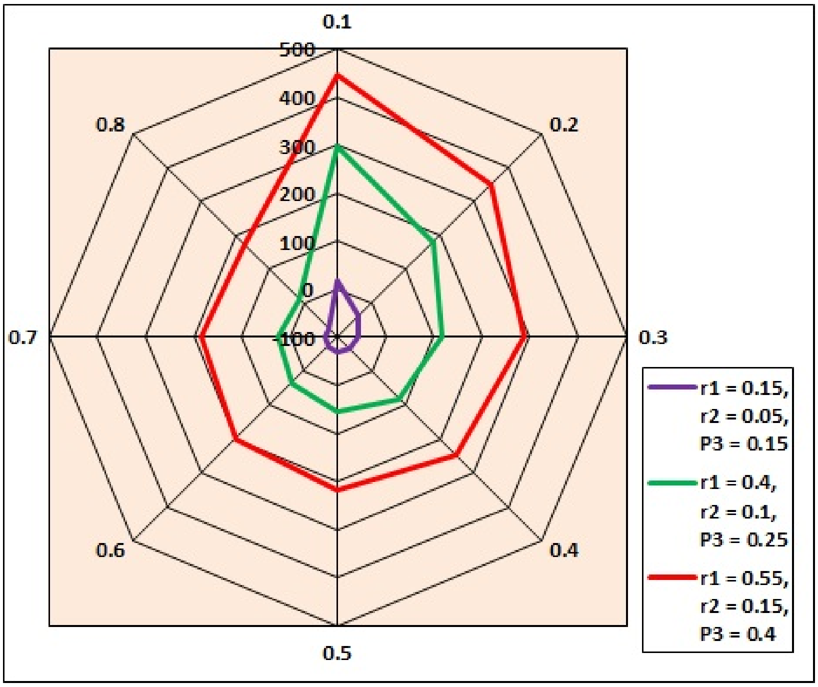


Рис. 2: Profit vs Failure rate

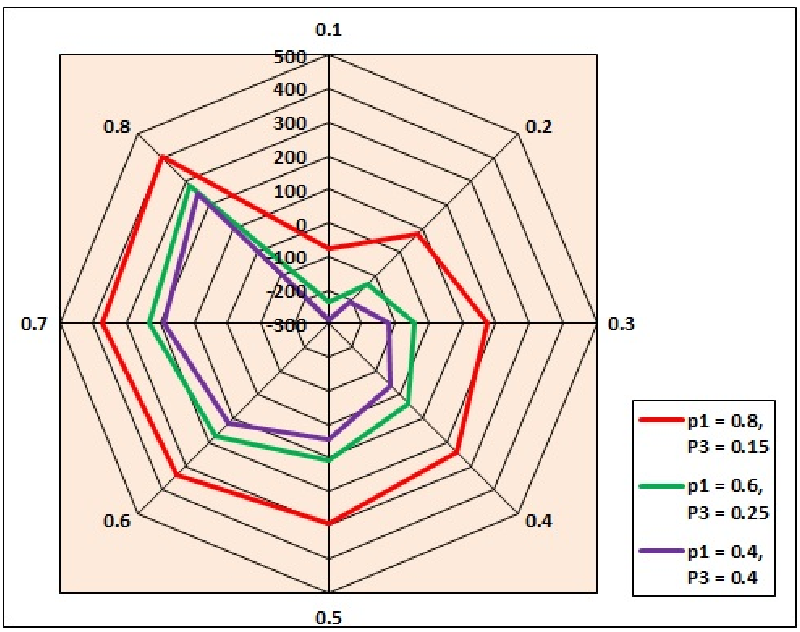


Рис. 3: Profit vs Repair rate

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bhardwaj N., Kumar A. & Kumar S. Stochastic analysis of a single unit redundant system with two kinds of failure and repairs // Reflections des. ERA-JMS. 2008. Vol. 3, No. 2. P. 115–134.

2. Bhardwaj N. Analysis of two-unit redundant system with imperfect switching and connection time // International Transactions in Mathematical Sciences and Computer. 2009. Vol. 2, No. 2. P. 195–202.

3. Haggag M. Y. Cost analysis of a system iInvolving common cause failures and preventive maintenance // J. Math and Stat. 2009. Vol. 5, No. 4. P. 305-310.

4. Haggag M. Y. Cost analysis of two-dissimilar unit cold standby system with three states and preventive maintenance using linear first order differential equations // J. Math and Stat. 2009. Vol. 5, No. 4. P. 395-400.

5. Rizwan S. M., Khurana V. & Taneja G. Reliability analysis of a hot standby industrial system // International Journal of Modelling and Simulation. 2010. Vol. 30, No. 3. P. 315-322.

6. Kumar A. & Malik S. C. Reliability modeling of a computer system with priority to S/w replacement over H/w replacement subject to MOT and MRT // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012. Vol. 80, No. 5. P. 693-709.

7. Singh D. & Taneja G. Reliability and economic analysis of a power generating system comprising one gas and one steam turbine with random inspection // Journal of Mathematics and Statistics. 2014. Vol. 10, No. 4. P. 436-442.

8. Malhotra R. & Taneja G. Stochastic analysis of a two-unit cold standby system wherein both units may become operative depending upon the demand // Journal of Quality and Reliability Engineering. 2014. P. 1-13.

9. Malhotra R. & Taneja G. Comparative study between a single unit system and a two unit cold standby system with varying demand // SpringerPlus. 2015. Vol. 4, P. 1-17.

10. Bhatti J., Chitkara A. & Kakkar M. Stochastic analysis of parallel system with two discrete failures // Model Assisted Statistics and Applications. 2014. Vol. 9, P. 257-265.

11. Kakkar M. K. & Bhatti J. Reliability and profit analysis of standby unit system with correlated life time in an industry // Advance Study in Contemporary Mathematics. 2015. Vol. 25, No. 3. P. 333-340.

12. Kakkar M. K., Chitkara A. K. & Bhatti J. Reliability analysis of two-unit parallel repairable industrial system // Decision Science Letters. 2015. Vol. 4, P. 525-536.

13. Kakkar M. K., Chitkara A. K. & Bhatti J Reliability analysis of two dissimilar parallel unit repairable system with failure during preventive maintenance // Management Science Letters, 2016. vol. 6, pp. 285-296.

14. Bhatti J., Chitkara A. & Kakkar M. Stochastic analysis of dis-similar standby system with discrete failure, inspection and replacement policy // Demonstratio Mathematica. 2016. Vol. 49, No. 2. P. 224-235.

15. Hua D. G. & Elsayed E. Reliability estimation of k-out-of-npairs: G balanced systems with spatially distributed units // IEEE Trans. Reliab. 2016. Vol. 65, P. 886—900.

16. Hua D. G. & Elsayed E. Degradation analysis of k-out-of-n pairs: G balanced systems with spatially distributed units // IEEE Trans Reliab. 2016. Vol. 65, P. 941–956.

17. Iqbal P. & Uduman P. S. S. Reliability analysis of paper plant using boolean function with fuzzy logic technique // International Journal of Applied Engineering Research. 2016. Vol. 11, No. 1. P. 573-577.

18. Taj S. Z., Rizwan S. M., Alkali B. M., Harrison D. K. & Taneja G. Probabilistic modeling and analysis of a cable plant subsystem with priority to repair over preventive maintenance // I-Managers Journal on Mathematics. 2017. Vol. 6, No. 3. P. 12-21.

19. Adlakha N., Taneja G. & Shilpi. Reliability and cost-benefit analysis of a two-unit cold standby system used for communication through satellite with assembling and activation time // International Journal of Applied Engineering Research. 2017. Vol. 12, No. 20. P. 9697-9702.

20. Cui L. R., Gao H. D. & Mo Y. C. Reliabilities for k-out-of-n: F balanced systems with m sectors // IISE Trans. 2017. Vol. 50, No. 5. P. 381–393.

21. Cui L. R., Chen J. H. & Li X. C. Balanced reliability systems under Markov processes // IISE Trans.. 2018. Vol. 51, No. 9. P. 1025-1035.

22. Endharta A. J., Yun W. Y. & Ko Y. M. Reliability evaluation of circular k-out-of-n:G balanced systems through minimal path sets // Reliability Engineering and System Safety. 2018. Vol. 180, P. 220-236.

23. Chen W. L. System reliability analysis of retrial machine repair systems with warm standbys and a single server of working breakdown and recovery policy // System Engineering. 2018. Vol. 21, P. 59–69.

24. Bhardwaj S., Bhardwaj N., Kumar V. & Parashar B. Estimation of lifespan of diesel locomotive engine // Journal of Information and Optimization Sciences. 2019. Vol. 40, No. 5. P. 1097-1108.

25. Dong Q. L., Cui L. R. & Si S. B. Reliability and availability analysis of stochastic degradation systems based on bivariate wiener processes // Appl. Math. Model. 2019. Vol. 79, P. 414–433.

26. Wu H., Li Y. F. & Bérenguer C. Optimal inspection and maintenance for a repairable k -out-of-n: G warm standby system // Reliability Engineering and System Safety. 2019. Vol. 193, P. 1-11.

27. Jia H. P., Ding Y., Peng R., Liu H. L. & Song Y. H. Reliability assessment and activation sequence optimization of non-repairable multi-state generation systems considering warm standby // Reliability Engineering and System Safety. 2019. Vol. 195, P. 1-11.

28. Fang C. & Cui L. Reliability analysis for balanced engine systems with m sectors by considering start-up probability // Reliability Engi-neering and System Safety. 2019. Vol. 197, P. 1-10.

29. Kakkar M. K, Bhatti J, Malhotra R., Kaur M. & Goyal D. Availability analysis of an industrial system under the provision of replacement of a unit using genetic algorithm // International Journal of Innovative Technology and Exploring En-gineering (IJITEE). 2019. Vol. 9, P. 1236–1241.

30. Bhatti J. & Kakkar M. K. Reliability analysis of cold standby parallel system possessing failure and repair rate under geometric distribution // Recent Advances in Computer Science and Communications. 2020. Vol. 13, P. 1-7.

REFERENCES

1. Bhardwaj, N., Kumar, A. & Kumar, S. 2008, "Stochastic analysis of a single unit redundant system with two kinds of failure and repairs", *Reflections des. ERA-JMS*, vol. 3, no. 2, pp. 115–134.

2. Bhardwaj, N. 2009, "Analysis of two-unit redundant system with imperfect switching and connection time", *International Transactions in Mathematical Sciences and Computer*, nol. 2, no. 2, pp. 195–202.

3. Haggag, M. Y. 2009, “Cost analysis of a system iInvolving common cause failures and preventive maintenance“, *J. Math and Stat.*, vol. 5, no. 4, pp. 305-310.

4. Haggag, M. Y. 2009, “Cost analysis of two-dissimilar unit cold standby system with three states and preventive maintenance using linear first order differential equations“, *J. Math and Stat.*, vol. 5, no. 4, pp. 395-400.

5. Rizwan, S. M., Khurana, V. & Taneja, G. 2010, “Reliability analysis of a hot standby industrial system“, *International Journal of Modelling and Simulation*, vol. 30, no. 3, pp. 315-322.

6. Kumar, A. & Malik, S. C. 2012, “Reliability modeling of a computer system with priority to S/w replacement over H/w replacement subject to MOT and MRT“, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 80, no. 5, pp. 693-709.

7. Singh, D. & Taneja, G. 2014, “Reliability and economic analysis of a power generating system comprising one gas and one steam turbine with random inspection“, *Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 10, no. 4, pp. 436-442.

8. Malhotra, R. & Taneja, G. 2014, “Stochastic analysis of a two-unit cold standby system wherein both units may become operative depending upon the demand“, *Journal of Quality and Reliability Engineering*, pp. 1-13.

9. Malhotra, R. & Taneja, G. 2015, “Comparative study between a single unit system and a two unit cold standby system with varying demand“, *SpringerPlus*, vol. 4, pp. 1-17.

10. Bhatti, J., Chitkara, A. & Kakkar, M. 2014, “Stochastic analysis of parallel system with two discrete failures“, *Model Assisted Statistics and Applications*, vol. 9, pp. 257-265.

11. Kakkar, M. K. & Bhatti, J. 2015, “Reliability and profit analysis of standby unit system with correlated life time in an industry“, *Advance Study in Contemporary Mathematics*, vol. 25, no. 3, pp. 333-340.

12. Kakkar, M. K., Chitkara, A. K. & Bhatti, J. 2015, “Reliability analysis of two-unit parallel repairable industrial system“, *Decision Science Letters*, vol. 4, pp. 525-536.

13. Kakkar, M. K., Chitkara, A. K. & Bhatti, J. 2016, “Reliability analysis of two dissimilar parallel unit repairable system with failure during preventive maintenance“, *Management Science Letters*, vol. 6, pp. 285-296.

14. Bhatti, J., Chitkara, A. & Kakkar, M. 2016, “Stochastic analysis of dis-similar standby system with discrete failure, inspection and replacement policy“, *Demonstratio Mathematica*, vol. 49, no. 2, pp. 224-235.

15. Hua, D. G. & Elsayed, E. 2016, “Reliability estimation of k-out-of-npairs: G balanced systems with spatially distributed units“, *IEEE Trans. Reliab.*, vol. 65, pp. 886—900.

16. Hua, D. G. & Elsayed, E. 2016, “Degradation analysis of k-out-of-n pairs: G balanced systems with spatially distributed units“, *IEEE Trans Reliab.*, vol. 65, pp. 941–956.

17. Iqbal, P. & Uduman, P. S. S. 2016, “Reliability analysis of paper plant using boolean function with fuzzy logic technique“, *International Journal of Applied Engineering Research*, vol. 11, no. 1, pp. 573-577.

18. Taj, S. Z., Rizwan, S. M., Alkali, B. M., Harrison, D. K. & Taneja, G. 2017, “Probabilistic modeling and analysis of a cable plant subsystem with priority to repair over preventive maintenance“, *I-Managers Journal on Mathematics*, vol. 6, no. 3, pp. 12-21.

19. Adlakha, N., Taneja, G. & Shilpi. 2017, “Reliability and cost-benefit analysis of a two-unit cold standby system used for communication through satellite with assembling and activation time“, *International Journal of Applied Engineering Research*, vol. 12, no. 20, pp. 9697-9702.

20. Cui, L. R., Gao, H. D. & Mo Y. C. 2017, “Reliabilities for k-out-of-n: F balanced systems with m sectors“, *IISE Trans.*, vol. 50, no. 5, pp. 381–393.

21. Cui, L. R., Chen, J. H. & Li, X. C. 2018, “Balanced reliability systems under Markov processes“, *IISE Trans.*, vol. 51, no. 9, pp. 1025-1035.

22. Endharta, A. J., Yun, W. Y. & Ko, Y. M. 2018, “Reliability evaluation of circular k-out-of-n:G balanced systems through minimal path sets“, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 180, pp. 220-236.

23. Chen, W. L. 2018, “System reliability analysis of retrial machine repair systems with warm standbys and a single server of working breakdown and recovery policy“, *System Engineering*, vol. 21, pp. 59–69.

24. Bhardwaj, S., Bhardwaj, N., Kumar V. & Parashar, B. 2019, “Estimation of lifespan of diesel locomotive engine“, *Journal of Information and Optimization Sciences*, vol. 40, no. 5, pp. 1097-1108.

25. Dong, Q. L., Cui, L. R. & Si, S. B. 2019, “Reliability and availability analysis of stochastic degradation systems based on bivariate wiener processes“, *Appl. Math. Model*, vol. 79, pp. 414–433.

26. Wu, H., Li, Y. F. & Bérenguer, C. 2019, “Optimal inspection and maintenance for a repairable k -out-of-n: G warm standby system“, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 193, pp. 1-11.

27. Jia, H. P., Ding, Y., Peng, R., Liu, H. L. & Song, Y. H. 2019, “Reliability assessment and activation sequence optimization of non-repairable multi-state generation systems considering warm standby“, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 195, pp. 1-11.

28. Fang, C. & Cui, L. 2019, “Reliability analysis for balanced engine systems with m sectors by considering start-up probability“, *Reliability Engi-neering and System Safety*, vol. 197, pp. 1-10.

29. Kakkar, M. K, Bhatti, J, Malhotra, R., Kaur, M. & Goyal, D. 2019, “Availability analysis of an industrial system under the provision of replacement of a unit using genetic algorithm“, *International Journal of Innovative Technology and Exploring En-gineering (IJITEE)*, vol. 9, pp. 1236–1241.

30. Bhatti, J. & Kakkar, M. K. 2020, “Reliability analysis of cold standby parallel system possessing failure and repair rate under geometric distribution“, *Recent Advances in Computer Science and Communications*, vol. 13, pp. 1-7.

Получено 26.04.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517.925 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-105-117

Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов

И. М. Буркин, О. И. Кузнецова

Игорь Михайлович Буркин — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: i-burkin@yandex.ru
Оксана Игоревна Кузнецова — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: oxxy4893@mail.ru

Аннотация

Мультистабильные системы и их динамические свойства являются интересными темами в нелинейной динамике. Небольшие различия в начальных условиях (например, из-за ошибок округления при численных вычислениях) приводят к принципиально разным результатам для таких динамических систем, что делает долгосрочное предсказание их поведения практически невозможным. Это происходит, даже если такие системы являются детерминированными, то есть их будущее поведение полностью определяется выбором начальных условий без участия случайных элементов. Другими словами, детерминированная природа этих систем не делает их предсказуемыми. Поведение решений динамической системы зависит как от выбора их начальных условий, так и от значений входящих в систему параметров. Сосуществование нескольких аттракторов, или мультистабильность, соответствует одновременному существованию более одного нетривиального аттрактора для одного и того же набора параметров системы. Это явление было обнаружено почти во всех естественных науках, включая электронику, оптику, биологию. В последние годы усилия многих исследователей были направлены на создание так называемых мегастабильных систем, то есть систем, которые при постоянных значениях входящих в них параметров имеют счетное число сосуществующих аттракторов. Интерес к подобным системам обусловлен широким спектром их прикладного использования, например, для скрытия информации в системах коммуникаций и аудиосхемах шифрования, биомедицинской инженерии, нечетком управлении. В статье предлагаются методы синтезирования мегастабильных систем с использованием систем в форме Лурье. Мегастабильные системы, содержащие 1-D решетку хаотических аттракторов, удается получить, заменяя нелинейность в исходной системе на периодическую функцию. Путем замены на периодические функции некоторых переменных в исходной системе порядка n удается построить мегастабильную систему, содержащую n-D решетку хаотических аттракторов. В качестве одного из примеров в работе впервые построена система четвертого порядка с 4-D решеткой хаотических аттракторов. Вычисляются показатели Ляпунова и размерность Каплана-Йорке аттракторов, принадлежащих решеткам.

Ключевые слова: динамические системы, хаос, счетное число сосуществующих аттракторов, показатели Ляпунова, размерность Каплана-Йорке.

Библиография: 24 названий.

Для цитирования:
И. М. Буркин, О. И. Кузнецова. Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 105–117.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 517.925 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-105-117

Designing megastable systems with multidimensional lattice of chaotic attractors

I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova

Igor Mikhailovich Burkin — doctor of physical and mathematical Sciences, Tula State Univetsity (Tula).
e-mail: i-burkin@yandex.ru

Oksana Igorevna Kuznetsova — postgraduate student, Tula State Univetsity (Tula).
e-mail: oxxy4893@mail.ru

Abstract

Multistable systems and their dynamic properties are interesting topics in nonlinear dynamics. Small differences in the initial conditions (for example, due to rounding errors in numerical calculations) lead to completely different results for such dynamic systems, which makes a long-term prediction of their behavior practically impossible. This happens even if such systems are deterministic, that is, their future behavior is completely determined by the choice of initial conditions without the participation of random elements. In other words, the deterministic nature of these systems does not make them predictable. The behavior of the solutions of a dynamic system depends both on the choice of their initial conditions and on the values of the system parameters. The coexistence of several attractors, or multistability, corresponds to the simultaneous existence of more than one nontrivial attractor for the same set of system parameters. This phenomenon was discovered in almost all natural sciences, including electronics, optics, biology. In recent years, the efforts of many researchers have been aimed at creating so-called megastable systems, that is, systems that, at constant values of their parameters, have a countable number of coexisting attractors. Interest in such systems is due to a wide range of applications, for example, for hiding information in communication systems and audio encryption schemes, biomedical engineering and fuzzy control. The article proposes methods for the synthesis of megastable systems using systems in Lurie form. Megastable systems containing a 1-D lattice of chaotic attractors can be obtained by replacing the nonlinearity in the original system with a periodic function. By replacing some variables with periodic functions in the original system of order n, one can construct a megastable system containing an n-D lattice of chaotic attractors. As one example, a fourth-order system with a 4-D lattice of chaotic attractors is constructed for the first time. The Lyapunov exponents and Kaplan – Yorke dimension are calculated for attractors belonging to lattices.

Keywords: dynamical systems, chaos, countable number of coexisting attractors, Lyapunov exponents, Kaplan-Yorke dimension.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova, 2021, "Designing megastable systems with multidimensional lattice of chaotic attractors" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 105–117.

1. Введение

В реальном физическом мире мультистабильность является достаточно распространенным явлением. Ее можно наблюдать, например, в динамических моделях газового лазера [1], биологических систем [2], волоконных лазеров [3], нейронных сетей [4], полупроводниковых сверхрешеток [5]. Мультистабильность динамической системы, содержащей хаотические аттракторы, может создать угрозу в практических инженерных приложениях, поскольку поведение системы не может быть однозначно гарантировано. Такая система может демонстрировать решения с принципиально различным поведением в зависимости от выбора их начальных условий. После того как были найдены теоретические решения проблем борьбы с хаосом и синхронизации хаотических систем, многие исследователи обратились к задачам использования хаоса в технических системах. В настоящее время хаотические сигналы и системы широко используются при обнаружении слабого сигнала [6], в системах радиолокации [7], биомедицинской инженерии [23]. нечетком управлении [24], а также в шифровании изображений [8-10] и безопасной связи [11], поскольку в данном случае специальный выбор начальных условий может играть роль "секретного ключа".

Чем сложнее структура хаотической системы, тем больше возможностей она предоставляет для потенциального прикладного использования. Поэтому в последние годы появилось много работ, посвященных вопросам конструирования мегастабильных динамических систем, содержащих счетное число сосуществующих хаотических аттракторов [12-18]. В работах [12-15] мегастабильные системы, содержащие многомерные решетки хаотических аттракторов, строятся путем введения периодических функций в динамические системы, смещаемые по переменным (offset-boostable systems). Динамическую систему $X = F(X)$, $(X = (x_1, x_2, ..., x_n))$ называют смещаемой по переменным, если существует замена переменных $y_k = x_k - c_k$, приводящая систему к виду $Y = F(Y) + D,\ (Y = (y_1, y_2, ..., y_n),\ C = (c_1, c_2, ..., c_n),\ D = (d_1, d_2, ..., d_n))$. Здесь при $k \in i_1, i_2, ..., i_m, (1 \le i_1 < i_2 < ... < i_m \le n)$ постоянные $c_k \neq 0$ и $c_k = 0$ при $k \in 1, 2, ..., n \setminus i_1, i_2, ..., i_m$. К смещаемым по переменным системам относятся, в частности, многомерные системы каскадного типа.

$$\dot{x} = y, \dot{y} = z, ..., \dot{u} = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, ..., x) \tag{1}$$

Методы, построения мегастабильных систем, применяемые в упомянутых работах, позволяют конструировать системы n-го порядка, содержащие решетку хаотических аттракторов размерности не более чем $n - 1$. Для систем, не являющихся системами каскадного типа, процедура введения периодических функций, позволяющая построить систему с многомерной решеткой аттракторов, оказывается намного сложнее, поскольку такая процедура может существенно менять динамику системы и приводить к разрушению ее аттракторов.

В работах [17,18] предложены методы конструирования мегастабильных систем с использованием систем в форме Лурье, то есть систем вида

$$\dot{x} = Ax + bf(\sigma), \sigma = c^T x, \tag{2}$$

где A – постоянная $n \times n$ - матрица, b и c – постоянные n - векторы, $f(\sigma)$ – непрерывная, кусочно-дифференцируемая скалярная функция. Известно множество примеров систем вида (2), обладающих хаотическими аттракторами [14-20]. Опираясь на эти примеры, можно строить мегастабильные системы, пользуясь приемами, предложенными в [17,18].

2. Методы конструирования мегастабильных систем на основе систем в форме Лурье

Динамическая система $\dot{X} = F(X), X \in \mathbb{R}^n$ называется системой с угловой координатой $\sigma = d^T X$, если существует вектор $d \in \mathbb{R}^n$ такой, что $F(X+d) = F(X)$. Пусть I - единичная $n \times n$

- матрица, $\chi(p) = c^T(A-pI)^{-1}b$ - передаточная функция системы (2). Хорошо известно [19], что система (2) является системой с угловой координатой, если передаточная функция $\chi(p)$ этой системы невырожденная, $detA = 0$, а функция $f(\sigma)$ периодическая. При этом $d = \Delta s(c^T s)^{-1}$, где s – собственный вектор матрицы A, соответствующий ее нулевому собственному значению, а Δ – период функции $f(\sigma)$. Если при этом существует такое $x_0 \in \mathbb{R}^n$ что система (2) имеет аттрактор, целиком расположенный в полосе $\Pi = \{x : c^T x_0 < c^T x < c^T x_0 + \Delta\}$, то она имеет 1-D решетку идентичных аттракторов-клонов.

Суть одного из приемов конструирования мегастабильных систем, предложенного в [17,18], состоит в следующем. Пусть известна система вида (2) (с произвольной функцией $f(\sigma)$), имеющая хаотический аттрактор, расположенный в полосе П. Пусть существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что матрица $A + kbc^T$ имеет нулевое собственное значение. Заменив в этой системе функцию $f(\sigma)$ на функцию $g(\sigma) + k\sigma$, где $g(\sigma)$ – Δ-периодическая функция, совпадающая с $f(\sigma) - k\sigma$ на $[0, \Delta]$, получим систему с угловой координатой, обладающую 1-D решеткой идентичных хаотических аттракторов.

Второй прием, предложенный в [17,18], основан на использовании следующего известного факта: система (2) с невырожденной передаточной функцией $\chi(p) = c^T(A - pI)^{-1}b$ неособым линейным преобразованием может быть приведена к системе каскадного типа (1). Если система (2) имела хаотический аттрактор, то заменив подходящим образом в новой системе переменные $y, z, ..., u$ на периодические функции этих переменных можно построить динамическую систему, обладающую решеткой идентичных хаотических аттракторов, размерность которой не превышает $n - 1$.

В настоящей работе предлагается метод конструирования мегастабильных систем, основанный на синтезе описанных приемов. Использование этого метода позволяет строить различные мегастабильные системы n-го порядка, обладающие n-D решеткой идентичных хаотических аттракторов-клонов.

3. Мегастабильные системы с 3-D решеткой хаотических аттракторов, построенные с использованием классической системы Чуа

Цепь Чуа – простейшая электрическая цепь, демонстрирующая режимы хаотических колебаний, была предложена профессором Калифорнийского университета Леоном Чуа в 1983 году. Математическая модель цепи Чуа имеет вид (2) с

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$
$$f(\sigma) = m_1\sigma + 0.5(m_0 - m_1)(|\sigma + 1| - |\sigma - 1|).$$

Система (2)-(3) исследовалась многими авторами при различных значениях входящих в нее параметров.

Пример 1. При $m_1 = -1.1468, m_0 = -0.1768, \alpha = 8.4562, \beta = 12.0732, \gamma = 0.0052$ в работе [21] в системе (2)-(3) впервые был обнаружен скрытый хаотический аттрактор, который визуализируется численным интегрированием системы с начальными условием $x_0 = (5.858, -0.369, 8.369)$ и представлен на рисунке 1. Этот аттрактор имеет показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.143, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = -1.135$ и размерность Каплана-Йорке $D_{KY} = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2)|\Lambda_3|^{-1} = 2.126$.

Положим $k = -\beta(\gamma + \beta)^{-1}$, $\varphi(\sigma) = f(\sigma) - k\sigma$. Тогда матрица $A + kbc^T$ будет особой, а функция $\varphi(\sigma)$ будет иметь три нуля $\sigma = 0, \sigma = \pm(\gamma + \beta)\rho$, где $\rho = (m_0 - m_1)[\beta + m_1(\gamma + \beta)]^{-1}$.

Заменим функцию $\varphi(\sigma)$ на периодическую функцию $g(\sigma)$ периода $\Delta = -2(\gamma+\beta)\rho$, совпадающую с функцией $\varphi(\sigma)$ на $[(\gamma+\beta)\rho, -(\gamma+\beta)\rho]$. После этого заменим в исходной системе $f(\sigma)$на $g(\sigma)+k\sigma$. Полученная таким образом система

$$\dot{x} = Ax + b(g(\sigma)+k\sigma), \sigma = c^T x, \tag{4}$$

является системой с угловой координатой и имеет 1-D решетку идентичных аттракторов-клонов. Все эти аттракторы могут быть получены численным интегрированием системы (4) с начальными условиями $x_0 + jd,\ j \in \mathbb{Z}$, где $d = 2(-(\gamma+\beta)\rho, -\gamma\rho, \beta\rho)$ – собственный вектор матрицы $A+kbc^T$, соответствующий нулевому собственному значению. Фрагмент 1-D решетки аттракторов системы (4) представлен на рисунке 2. Все расчеты здесь и далее производились с использованием адаптированного метода Рунге-Кутта в пакете Mathcad.

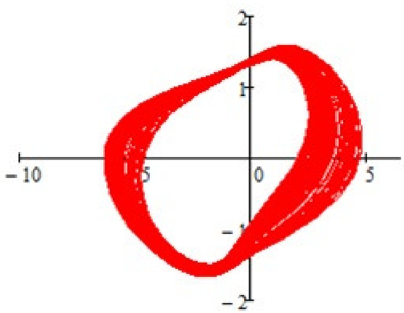


Рис. 1: Скрытый аттрактор системы (2)-(3).

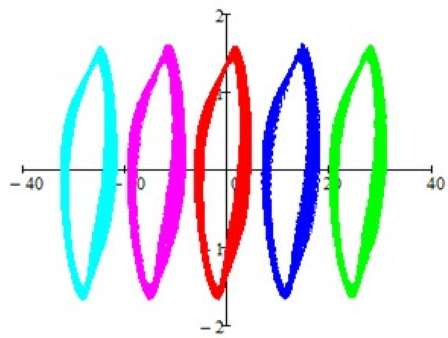


Рис. 2: 1-D решетка аттракторов системы (4).

Передаточная функция системы (4) имеет вид

$$\chi(p) = \frac{\alpha p^2 + \alpha(1+\gamma)p + \alpha(\beta+\gamma)}{p^3 + (\gamma+\alpha+1)p^2 + (\gamma+\beta+\alpha\gamma)p + \alpha\beta}$$

Поэтому система (4) неособым линейным преобразованием $x = My$ с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha(\beta+\gamma) & -\alpha(1+\gamma) & -\alpha \\ -\alpha\gamma & -\alpha & 0 \\ \alpha\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2, \\ &\dot{y}_2 = y_3, \\ &\dot{y}_3 = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - a_2 y_3 + (g(\sigma)+k\sigma), \\ &\sigma = -c_0 y_1 - c_1 y_2 - c_2 y_3, \end{aligned} \tag{6}$$

где $a_0 = \alpha(\beta+\gamma)$, $a_1 = \gamma+\beta+\alpha\gamma$, $a_2 = \gamma+\alpha+1$, $c_0 = \alpha(\beta+\gamma)$, $c_1 = \alpha(1+\gamma)$, $c_2 = \alpha$. Система (6), очевидно, также имеет 1-D решетку идентичных хаотических аттракторов. Заменим теперь переменные y_2, y_3 в системе (6) на периодические функции $y_2 \to 0.49 sin(2y_2), y_3 \to 0.51 sin(2y_3)$. Получим систему

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = 0.49 sin(2y_2), \\ &\dot{y}_2 = 0.51 sin(2y_3), \\ &\dot{y}_3 = -a_0 y_1 - 0.49 a_1 sin(2y_2) - 0.51 a_2 sin(2y_3) + (g(\sigma)+k\sigma), \\ &\sigma = -c_0 y_1 - 0.49 c_1 sin(2y_2) - 0.51 c_2 sin(2y_3). \end{aligned} \tag{7}$$

Система (7) будет иметь 3-D решетку самовозбуждающихся хаотических аттракторов, проекции фрагментов которой на координатные плоскости приведены на рисунках 3–5.

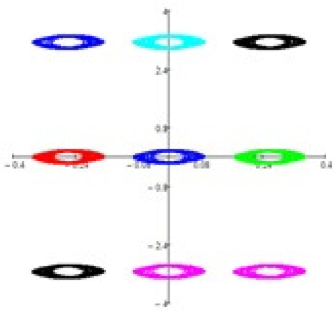


Рис. 3: Проекция на плоскость (x, y).

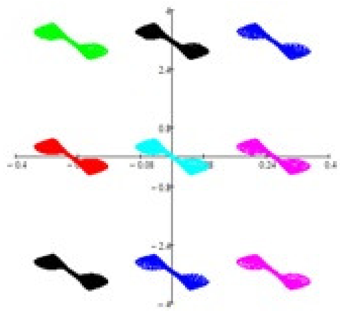


Рис. 4: Проекция на плоскость (x, z).

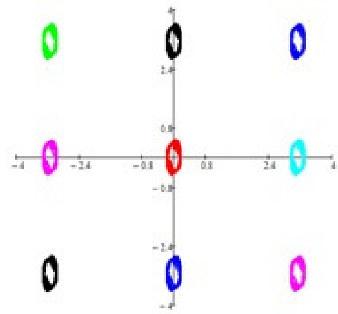


Рис. 5: Проекция на плоскость (y, z).

Все аттракторы решетки имеют показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.293, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = -1.200$ и размерность Каплана - Йорке $D_{KY} = 2.244$.

Пример 2. Рассмотрим теперь систему (2)-(3) с $m_1 = -0.7143, m_0 = -1.099, \alpha = 9.8$, $\beta = 13.37, \gamma = 0$. Хорошо известно [20], что при указанных значениях параметров система имеет double-scroll аттрактор, который представлен на рисунке 6.

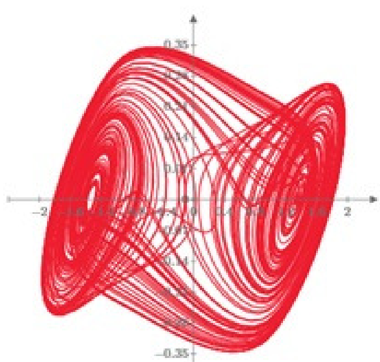


Рис. 6: Double-scroll аттрактор системы (2)-(3).

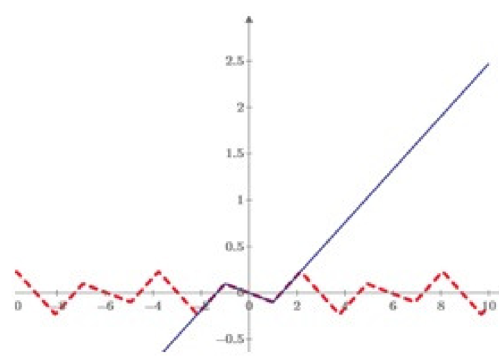


Рис. 7: Графики функций $\varphi(\sigma)$ (сплошная линия) и $g(\sigma)$ (пунктирная линия).

Положим $k = -1, \varphi(\sigma) = f(\sigma) + \sigma$. Тогда матрица $A - bc^T$ будет особой, а функция $\varphi(\sigma)$ будет иметь три нуля $\sigma = 0, \sigma = \pm\sigma_0, \sigma_0 = (m_1 - m_0)(m_1 + 1)^{-1}$. Заменим функцию $\varphi(\sigma)$ на $4.4\sigma_0$-периодическую функцию $g(\sigma)$, совпадающую с $\varphi(\sigma)$ на $[-1.6\sigma_0, 1.6\sigma_0]$. Графики функций $\varphi(\sigma)$ и $g(\sigma)$ приведены на рисунке 7. При этом система (4) будет иметь 1-D решетку идентичных double-scroll аттракторов, фрагмент которой представлен на рисунке 8.

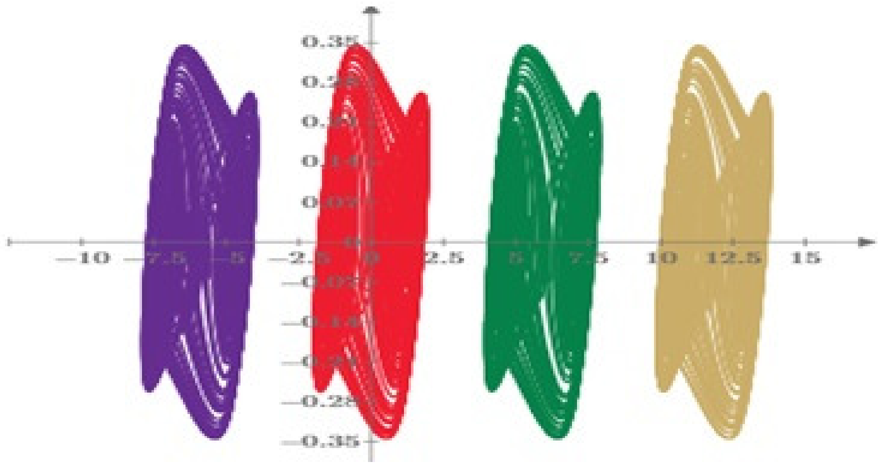


Рис. 8: Фрагмент 1-D решетки аттракторов системы (4).

Все аттракторы решетки, также как аттрактор на рисунке 6, имеют одинаковые показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.3479, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = -3.0062$ и размерность Каплана - Йорке $D_{KY} = 2.116$. Неособым преобразованием $x = My$ с матрицей (5) приведем систему к виду (6). Заменим переменные y_2, y_3 в полученной системе на периодические функции $y_2 \to 0.0625tan(16y_2), y_3 \to 0.125tan(8y_3)$. Получим систему

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = 0.0625tan(16y_2),\\
&\dot{y}_2 = 0.125tan(8y_3),\\
&\dot{y}_3 = -a_0y_1 - 0.0625a_1tan(16y_2) - 0.125a_2tan(8y_3) + (g(\sigma) + k\sigma),\\
&\sigma = -c_0y_1 - 0.0625c_1tan(16y_2) - 0.125c_2tan(8y_3).
\end{aligned} \tag{8}$$

Система (8) имеет 3-D решетку самовозбуждающихся хаотических аттракторов, проекции фрагментов которой на координатные плоскости приведены на рисунках 9–11.

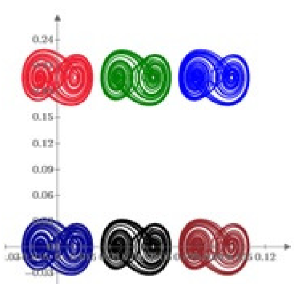


Рис. 9: Проекция на плоскость (x, y).

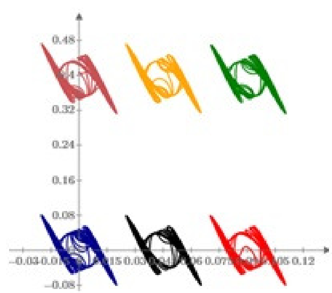


Рис. 10: Проекция на плоскость (x, z).

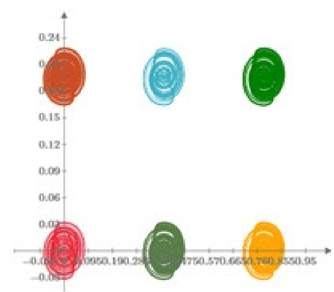


Рис. 11: Проекция на плоскость (y, z).

Все аттракторы 3-D решетки имеют одинаковые показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.3098, \Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = -3.3132$ и размерность Каплана - Йорке $D_{KY} = 2.093$.

4. Система четвертого порядка с 4-D решеткой хаотических аттракторов.

Процедуру конструирования системы с 4-D решеткой хаотических аттракторов начнем с построения системы вида (2) с угловой координатой, содержащей 1-D решетку хаотических аттракторов. Матрицу A и векторы b, c возьмем в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -c_0 \\ -c_1 \\ -c_2 \\ -c_3 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ и $c_j, j = 1, ..., 4$ – положительные числа. Тогда

$$det(A + kbc^T - pI) = p^4 + (a_3 + c_4k)p^3 + (a_2 + c_3k)p^2 + (a_1 + c_2k)p + c_1k \tag{9}$$

Коэффициенты полинома (9) подберем так, чтобы при $k < 0$ он имел один положительный корень и 3 корня с отрицательными вещественными частями, а при малых $k > 0$ все его корни располагались в левой открытой полуплоскости. Для этого достаточно потребовать выполнение условия $a_3a_2 > a_1$. Положим $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 3$. При выбранных значениях элементов матрицы A условия гурвицевости полинома (9) примут вид

$$c_3c_4k^2 + (3c_3 - c_2 + c_4)k + 2 > 0, \tag{10}$$

$$(c_2k + 1)[c_3c_4k^2 + (3c_3 - c_2 + c_4)k + 2] - c_1k(c_4k + 3)^2 > 0. \tag{11}$$

Коэффициенты c_j подберем так, чтобы условие (10) выполнялось при всех $k > 0$, а условие (11) нарушалось при некотором значении $k = k_0 > 0$. Тогда на некотором интервале (k_0, k_1) полином (9) будет иметь 2 отрицательных вещественных корня и два корня с положительными вещественными частями. Все перечисленные условия будут выполняться, если положить, например, $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 1, c_4 = 1.6$. При этом условия (10) и (11) выполнены при $k \in (0, 0.537591)$ и $k \in (5, \infty)$.

При выбранных значениях параметров системы (2) плоскость (σ, f) разбивается на 4 сектора линейной устойчивости и неустойчивости: сектор $(-\infty, 0)$ – сектор неустойчивости степени 1, сектор $(0, 0.53759)$ – сектор гурвицевости, сектор $(0.537592, 5)$ – сектор неустойчивости степени 2, наконец, сектор $(5, \infty)$ – сектор гурвицевости. Теперь подберем нечетную 2π - периодическую функцию $f(\sigma)$, имеющую 2 нуля на периоде такую, чтобы ее график на периоде попеременно пребывал в секторе линейной неустойчивости степени 2, секторе гурвицевости и секторе линейной неустойчивости степени 1. Если пребывание графика $f(\sigma)$ в каждом из секторов будет "достаточно длительным" то система с такой нелинейностью будет иметь либо устойчивый цикл, либо хаотический аттрактор, расположенный в полосе $\Pi = \{x : -\pi < c^T x < \pi\}$ [22]. Поскольку все состояния равновесия системы будут неустойчивыми, то бассейн притяжения аттрактора будет содержать сколь угодно малую окрестность одного из состояний равновесия. Поэтому такой аттрактор может быть визуализирован путем численного интегрирования с начальным условием из малой окрестности некоторого состояния равновесия системы на периоде.

Путем целенаправленного компьютерного поиска удается выбрать $f(\sigma) = 1.8 sin\sigma$. При таком выборе из окрестности нулевого состояния равновесия возбуждаются два симметричных хаотических аттрактора, проекции которых на плоскости $(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_3, x_4)$ представлены на рисунках 12-15.

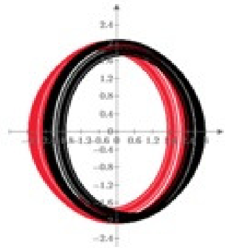


Рис. 12: Проекция на плоскость (x_1, x_2).

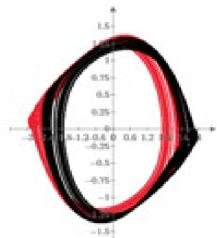


Рис. 13: Проекция на плоскость (x_1, x_4).

Рис. 14: Проекция на плоскость (x_2, x_3).

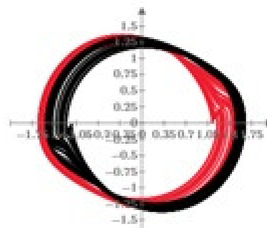


Рис. 15: Проекция на плоскость (x_3, x_4).

Из рисунков 12-15 видно, что "размах"аттракторов по координатам x_2, x_3, x_4 не превышает 2π, поэтому можно попытаться заменить каждую из переменных x_2, x_3, x_4 в полученной системе на некоторую 2π-периодическую функцию так, чтобы новая система имела пару симметричных хаотических аттракторов. Тогда такая система будет иметь 4-D решетку хаотических аттракторов-клонов.

Выполним замену: $x_2 \to 1.82 sin x_2, x_3 \to 1.29 sin x_3, x_4 \to 1.42 tan(0.5 x_4)$. Получим систему

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = 1.82 sin x_2,\\
&\dot{x}_2 = 1.29 sin x_3,\\
&\dot{x}_3 = -1.42 tan(0.5 x_4),\\
&\dot{x}_4 = -1.82 sin x_2 - 1.29 sin x_3 - 4.26 tan(0.5 x_4) + 1.8 sin[-x_1 - 3.64 sin x_2 -\\
&- 1.29 sin x_3 - 2.272 tan(0.5 x_4)].
\end{aligned} \tag{12}$$

Фрагменты проекций 4-D решетки аттракторов системы (12) на координатные плоскости представлены на рисунках 16 – 19

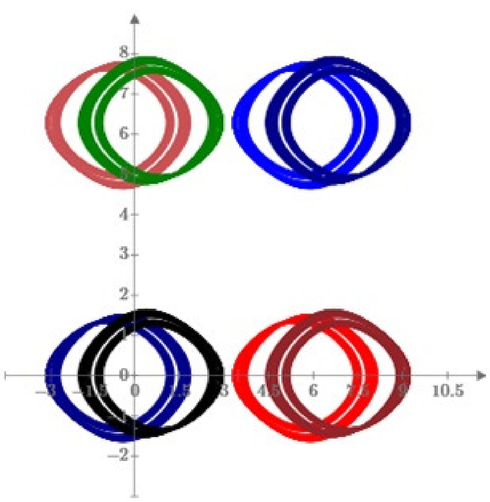


Рис. 16: Проекция на плоскость (x_1, x_2).

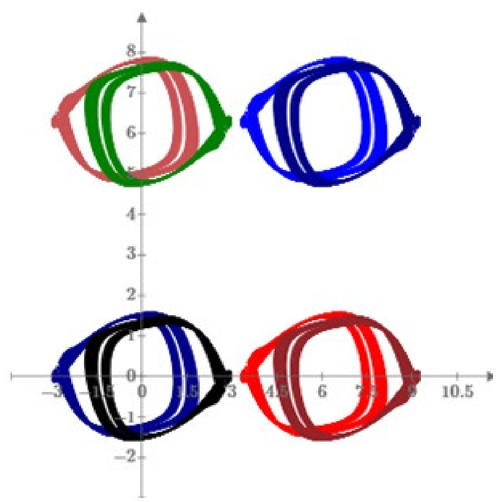


Рис. 17: Проекция на плоскость (x_1, x_4).

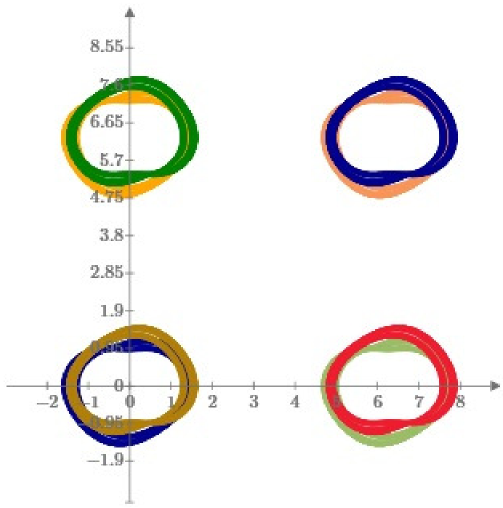


Рис. 18: Проекция на плоскость (x_2, x_3).

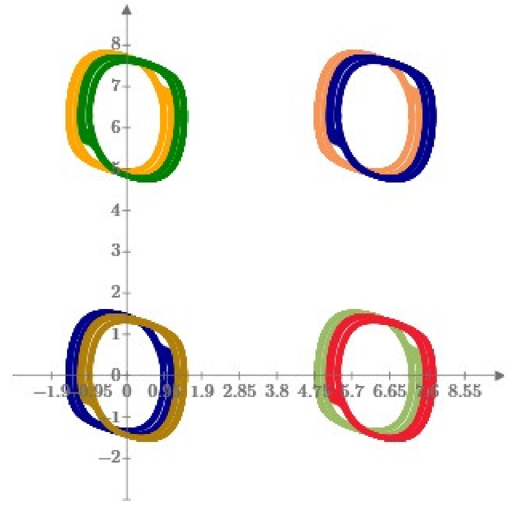


Рис. 19: Проекция на плоскость (x_3, x_4).

Все аттракторы 4-D решетки имеют показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.054, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = -0.206$, $\Lambda_4 = -3.004$ и размерность Каплана - Йорке $D_{KY} = 2.262$.

5. Заключение

В настоящей статье обсуждаются различные подходы к генерированию мегастабильных систем, содержащих бесконечную решетку хаотических аттракторов. Для генерирования мегастабильных систем используются системы в форме Лурье. Обсуждаются методы преобразования таких систем в системы со счетным числом сосуществующих хаотических аттракторов. Предлагаемый подход позволяет конструировать системы с бесконечной n-D решеткой хаотических аттракторов, используя многочисленные примеры существования хаотических аттракторов в n-мерных системах в форме Лурье. В данной работе такая возможность демонстрируется на примерах использования классической системы Чуа. Также впервые построена система четвертого порядка с 4-D решеткой хаотических аттракторов.

Метод построения многомерной решетки странных аттракторов имеет потенциальное применение в основанных на использовании хаоса инженерных приложениях, таких, например, как безопасная связь и обнаружение слабых сигналов, где начальные условия важны для определения динамики систем. В защищенной связи на основе хаоса непредсказуемость начального условия может дополнительно повысить безопасность связи. Хаос также имеет потенциальное применение в обнаружении слабых сигналов, потому что хаотические системы чувствительны к определенным сигналам, и в то же время невосприимчивы к шуму, в то время как мегастабильность с бесконечным количеством аттракторов обеспечивает возможность прерывистых переходов между порядком и хаосом, что полезно для обнаружения сигналов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arecchi F. T , Meucci R., Puccioni G., Tredicce J. Experimental evidence of subharmonic bifurcations-multistability and turbulence in a Q-switched gas laser // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49(17):1217.

2. Laurent M., Kellershohn N. Multistability: a major means of differentiation and evolution in biological systems // Trends Biochem Sci. 1999. Vol. 24(11). P. 418–422.

3. Komarov A., Leblond H., Sanchez F. Multistability and hysteresis phenomena in passively mode-locked fiber lasers // Phys. Rev. A. 2005. Vol. 71(5):053809.

4. Zeng Z., Huang T., Zheng W. Multistability of recurrent neural networks with time-varying delays and the piecewise linear activation function // IEEE Trans Neural Netw. 2010. Vol. 21(8). P. 1371–1377.

5. Ying L., Huang D., Lai Y. C. Multistability, chaos, and random signal generation in semiconductor superlattices // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 93(6):062204.

6. Wang G., He S. A quantitative study on detection and estimation of weak signals by using chaotic Duffing oscillators // IEEE Trans. on Circuits Syst.–I: Fund. Theor. Appl. 2003. Vol. 50, №7. P. 945-953.

7. Liu Z., Zhu X. H., Hu W., Jiang F. Principles of chaotic signal Radar // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, №5. P. 1735.

8. Guan Z. H., Huang F., Guan W. Chaos-based image encryption algorithm // Phys. Lett. A. 2005. Vol. 346, №1-3. P. 153-157.

9. Gao T., Chen Z. A new image encryption algorithm based on hyper-chaos // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372, №4. P. 394-400.

10. Xie E. Y., Li C., Yu S, Lü J. On the cryptanalysis of Fridrich's chaotic image encryption scheme // Signal processing. 2017. Vol.132. P. 150-154.

11. Wang S., Kuang J., Li J., Luo Y., Lu H., Hu G. Chaos-based secure communications in a large community // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 66, Art. no. 065202R.

12. Li C., Thio W. J.-C., Sprott J. C, Iu H. H. C., Xu Y., Constructing infinitely many attractors in a programmable chaotic circuit // IEEE Access. 2018.Vol. 6. P. 29003–29012.

13. Li C., Sprott J. C., Hu W., Xu Y. Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system //Int. J. Bifurc. Chaos. 2017. Vol. 27(10): 1750160.

14. Lai Q., Chen S. Generating multiple chaotic attractors from Sprott B system // Int. J. Bifurcation Chaos. 2016. Vol. 26, №11: 1650177.

15. Zhang X., Chen G. Constructing an autonomous system with infinitely many chaotic attractors // Chaos. 2017. Vol. 27, №7. Art. no. 071101.

16. Sprott J. C., Jafari S., Abdul J. M. K., Kapitaniak T. Megastability: Coexistence of a countable infinity of nested attractors in a periodically-forced oscillator with spatially-periodic damping // Eur. Phys. J. Special Topics. 2017. Vol. 226. P. 1979-1985.

17. Burkin I. M., Kuznetsova O. I. On some methods for generating extremely multistable systems // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. 1368 042050.

18. Буркин И. М., Кузнецова О. И. Генерирование экстремально мультистабильных систем на основе систем в форме Лурье // Вестник СПбГУ, Математика, Механика, Астрономия. 2019. Т. 6(64), Вып. 4. С. 555-564.

19. Leonov G. A., Burkin I. M., Shepeljavyi A.I . Frequency Methods in Oscillation Theory //Kluwer Academic Publishers. 1996. 404 p.

20. Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T. The Double Scroll Family // IEEE Transactions on Circuits Systems. 1986. Vol. CAS-33, №11. P. 1073-1118.

21. Брагин В. О., Вагайцев В. И., Кузнецов Н. В., Леонов Г. А. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи Чуа //Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. №4. С. 3-36.

22. Burkin I. M. The Buffer Phenomenon in Multidimensional Dynamical Systems // Diff. Equations. 2002. Vol.38, №5. P. 615-625.

23. Chen C.-K., et al. A chaotic theoretical approach to ECG-based identity recognition [application notes] // IEEE Computational Intelligence Magazine. 2014. Vol. 9(1). P. 53-63.

24. Wu Z.-G., et al. Sampled-data fuzzy control of chaotic systems based on a T–S fuzzy model // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2014. Vol. 22(1). P. 153-163.

REFERENCES

1. Arecchi, F. T., Meucci, R., Puccioni, G. & Tredicce, J. 1982, “Experimental evidence of subharmonic bifurcations-multistability and turbulence in a Q-switched gas laser“, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 49(17):1217.

2. Laurent, M. & Kellershohn, N. 1999, “Multistability: a major means of differentiation and evolution in biological systems“, *Trends Biochem Sci.*, vol. 24(11), pp. 418–422.

3. Komarov, A., Leblond, H. & Sanchez, F. 2005, “Multistability and hysteresis phenomena in passively mode-locked fiber lasers“, *Phys. Rev. A.*, vol. 71(5):053809.

4. Zeng, Z., Huang, T. & Zheng, W. 2010, “Multistability of recurrent neural networks with time-varying delays and the piecewise linear activation function“, *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 21(8), pp. 1371–1377

5. Ying, L., Huang, D. & Lai, Y. C. 2016, “Multistability, chaos, and random signal generation in semiconductor superlattices“, *Phys. Rev. E.*, vol. 93(6):062204.

6. Wang, G. & He, S. 2003, “A quantitative study on detection and estimation of weak signals by using chaotic Duffing oscillators“, *IEEE Trans. on Circuits Syst.–I: Fund. Theor. Appl.*, vol. 50, no.7, pp. 945-953.

7. Liu, Z., Zhu, X. H., Hu, W. & Jiang, F. 2007, “Principles of chaotic signal Radar“, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 17, no. 5, pp. 1735.

8. Guan, Z. H., Huang, F. & Guan, W. 2005, “Chaos-based image encryption algorithm“, *Phys. Lett. A.*, vol. 346, no. 1-3, pp.153-157.

9. Gao, T. & Chen, Z. 2008, “A new image encryption algorithm based on hyper-chaos“, *Phys. Lett. A.*, vol. 372, no. 4, pp. 394-400.

10. Xie, E. Y., Li, C., Yu, S. & Lü, J. 2017, “On the cryptanalysis of Fridrich’s chaotic image encryption scheme“, *Signal processing*, vol.132, pp.150-154.

11. Wang, S., Kuang, J., Li, J., Luo, Y., Lu, H. & Hu, G. 2012, “Chaos-based secure communications in a large community“, *Phys. Rev. E.*, vol. 66, Art. no. 065202R.

12. Li, C., Thio, W. J.-C., Sprott, J. C, Iu, H. H. C. & Xu, Y. 2018, “Constructing infinitely many attractors in a programmable chaotic circuit“, *IEEE Access*, vol. 6. pp. 29003–29012.

13. Li, C., Sprott, J. C., Hu, W. & Xu, Y. 2017, “Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system“, *Int J Bifurc. Chaos*, vol. 27(10): 1750160.

14. Lai, Q. & Chen, S. 2016, “Generating multiple chaotic attractors from Sprott B system“, *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 26, no. 11: 1650177.

15. Zhang, X. & Chen, G. 2017, “Constructing an autonomous system with infinitely many chaotic attractors“, *Chaos*, vol. 27, no. 7. Art. no. 071101.

16. Sprott, J. C., Jafari, S., Abdul, J. M. K. & Kapitaniak, T. 2017, “Megastability: Coexistence of a countable infinity of nested attractors in a periodically-forced oscillator with spatially-periodic damping“, *Eur. Phys. J. Special Topics*, vol. 226. pp. 1979–1985.

17. Burkin, I. M. & Kuznetsova, O. I. 2019, “On some methods for generating extremely multistable systems“, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 1368 042050.

18. Burkin, I. M. & Kuznetsova, O. I. 2019, “Generation of Extremely Multistable Systems Based on Lurie Systems“, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, vol. 52, no. 4, pp. 342–348.

19. Leonov G.A., Burkin I.M. & Shepeljavyi A.I. Frequency Methods in Oscillation Theory. Kluwer Academic Publishers, 1996. 404 p.

20. Chua, L. O., Komuro, M. & Matsumoto, T. "The Double Scroll Family *IEEE Transactions on Circuits Systems*, 1986, vol. CAS-33, no. 11, pp. 1073–1118.

21. Bragin, V. O., Vagajcev, V. I., Kuznecov, N. V. & Leonov, G. A. 2011, “Algoritmy poiska skrytych kolebaniy v nelineynych sistemach. Problemy Ayzermana, Kalmana i zepi Chua [Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman conjectures and Chua’s circuits.]“, *Izvestia RAN*, vol. 4, pp. 3-36 (in Russian).

22. Burkin, I. M. 2002, “The Buffer Phenomenon in Multidimensional Dynamical Systems“, *Diff. Equations*, vol. 38, no. 5, pp. 615-625.

23. Chen, C.-K. 2014, “A chaotic theoretical approach to ECG-based identity recognition [application notes]“, *IEEE Computational Intelligence Magazine*, vol. 9(1), pp. 53-63.

24. Wu, Z.-G. 2014, “Sampled-data fuzzy control of chaotic systems based on a T–S fuzzy model“, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 22(1), pp. 153-163.

Получено 14.07.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517.583+512.742.72 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-118-132

Тропические последовательности, ассоциированные с последовательностями Сомоса

В. А. Быковский, М. А. Романов, А. В. Устинов

Виктор Алексеевич Быковский — Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН (г. Хабаровск).
e-mail: vab@iam.khv.ru
Марк Анатольевич Романов — Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН (г. Хабаровск).
e-mail: romanov@iam.khv.ru
Алексей Владимирович Устинов — Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Тихоокеанский государственный университет (г. Хабаровск).
e-mail: ustinov.alexey@gmail.com

Аннотация

Начиная с основополагающей заметки, опубликованной М. Сомосом в 1989 году, большое внимание специалистов по теории чисел и смежных областей привлекают нелинейные последовательности, удовлетворяющие квадратичному рекуррентному соотношению. При этом особое внимание уделяется вопросам построения целочисленных последовательностей Сомоса и их лорановости относительно начальных значений и коэффициентов рекуррентного соотношения. В фундаментальных работах Робинсона, Фомина и Зелевинского была доказана лорановость последовательности Сомос-k при $k = 4, 5, 6, 7$. В работах Хона были найдены представления для числовых последовательностей Сомос-4, 5 через сигма-функцию Вейерштрасса на эллиптических кривых, а при $k = 6$ — через значения сигма-функции Клейна на гиперэллиптических кривых рода 2. Следует также отметить, что последовательности Сомоса естественным образом возникают при построении криптосистем на эллиптических и гиперэллиптических кривых над конечным полем. Это объясняется тем, что для вышеупомянутых последовательностей выполняются теоремы сложения, и они естественным образом возникают при вычислении кратных точек на эллиптических и гиперэллиптических кривых. При $k = 4, 5, 6, 7$ последовательности Сомоса представляют собой полиномы Лорана от k начальных переменных и обычные полиномы от коэффициентов рекуррентного соотношения. Поэтому эти полиномы Лорана можно записать в виде несократимой дроби с обычным полиномом в числителе с начальными значениями и коэффициентами в качестве переменных. При этом знаменатель записывается в виде монома от начальных переменных. С помощью тропических функций мы доказываем, что степени переменных вышеупомянутого монома представляются в виде квадратичных полиномов от порядкового номера элемента последовательности Сомоса, у которых свободные члены представляют собой периодические последовательности рациональных чисел. При этом в каждом случае в явном виде указываются соответствующие полиномы и периоды их свободных членов.

Ключевые слова: последовательности Сомоса, тропические последовательности.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
В. А. Быковский, М. А. Романов, А. В. Устинов. Тропические последовательности, ассоциированные с последовательностями Сомоса // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 118–132.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 517.583+512.742.72 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-118-132

Tropical sequences associated with Somos sequences

V. A. Bykovskii, M. A. Romanov, A. V. Ustinov

Victor Alekseevich Bykovskii — Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division of FEB RAS (Khabarovsk).
e-mail: vab@iam.khv.ru

Mark Anatolievich Romanov — Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division of FEB RAS (Khabarovsk).
e-mail: romanov@iam.khv.ru

Alexey Vladimirovich Ustinov — Institute of Applied Mathematics (Khabarovsk Division of FEB RAS), Pacific National University (Khabarovsk).
e-mail: ustinov.alexey@gmail.com

Abstract

Since the seminal note published by M. Somos in 1989, a great deal of attention of specialists in number theory and adjacent areas are attracted by nonlinear sequences that satisfy a quadratic recurrence relation. At the same time, special attention is paid to the construction of Somos integer sequences and their Laurent property with respect to initial values and coefficients of a recurrence. In the fundamental works of Robinson, Fomin and Zelevinsky the Laurent property of the Somos-k sequence for $k = 4, 5, 6, 7$ was proved. In the works of Hone, representations for Somos-4 and 5 sequences were found via the Weierstrass sigma function on elliptic curves, and for $k = 6$ via the Klein sigma function on hyperelliptic curve of genus 2. It should also be noted that the Somos sequences naturally arise in the construction of cryptosystems on elliptic and hyperelliptic curves over a finite field. This is explained by the reason that addition theorems hold for the sequences mentioned above, and they naturally arise when calculating multiple points on elliptic and hyperelliptic curves. For $k = 4, 5, 6, 7$, the Somos sequences are Laurent polynomials of k initial variables and ordinary polynomials in the coefficients of the recurrence relation. Therefore, these Laurent polynomials can be written as an irreducible fraction with an ordinary polynomial in the numerator with initial values and coefficients as variables. In this case, the denominator can be written as a monomial of the initial variables. Using tropical functions, we prove that the degrees of the variables of the above monomial can be represented as quadratic polynomials in the order index of the element of the Somos sequence, whose free terms are periodic sequences of rational numbers. Moreover, in each case these polynomials and the periods of their free terms are written explicitly.

Keywords: Somos sequences, tropical sequences.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

V. A. Bykovskii, M. A. Romanov, A. V. Ustinov, 2021, "Tropical sequences associated with Somos sequences" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 118–132.

1. Введение

Пусть $k \geqslant 2$ — натуральное и

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k/2\}, \quad \boldsymbol{x} = \{x_j \mid -k/2 < j \leqslant k/2\}$$

— два множества независимых формальных переменных в количестве $[k/2]$ в первом случае и k во втором. Последовательность рациональных функций Сомос-k от переменных из $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{x}$, $S_k(n) = S_k(n; \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{x})$ $(n \in \mathbb{Z})$, определяется рекуррентным соотношением

$$S_k(n + [(k+1)/2])S_k(n - [k/2]) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k/2} \alpha_i S_k(n + [(k+1)/2] - i)S_k(n - [k/2] + i). \qquad (1)$$

Впервые эту последовательность при $k = 6$,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \quad x_{-2} = x_{-1} = x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

рассмотрел Майкл Сомос в связи с изучением свойств эллиптических тэта-функций. Много полезной информации о последовательностях Сомоса находится на ресурсе [1], популярное изложение этой темы содержится в работах [2, 3].

При $k = 2$

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1\}, \quad \boldsymbol{x} = \{x_0, x_1\}, \quad S_2(n+1)S_2(n-1) = \alpha_1 S_2^2(n),$$

и индукцией по n легко показать, что

$$S_2(n) = \alpha_1^{n(n-1)/2} x_0^{1-n} x_1^n.$$

При $k = 3$

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1\}, \quad \boldsymbol{x} = \{x_{-1}, x_0, x_1\}, \quad S_3(n+2)S_3(n-1) = \alpha_1 S_3(n+1)S_3(n),$$

и с помощью индукции по n получаем равенство

$$S_3(n) = \begin{cases} \alpha_1^{n^2/4} x_{-1}^{-n/2} x_0 x_1^{n/2}, & \text{если } n \text{ — чётное} \\ \alpha_1^{(n^2-1)/4} x_{-1}^{(1-n)/2} x_1^{(1+n)/2}, & \text{если } n \text{ — нечётное.} \end{cases}$$

При $k \geqslant 4$ ситуация существенно сложнее. В работах [4] – [7] были найдены явные выражения общего члена последовательностей Сомос-4, 5 через сигма-функцию Вейерштрасса, ассоциированную с некоторой эллиптической кривой. В работе [8] найдено представление общего члена последовательности Сомос-6 через сигма-функцию Клейна на гиперэллиптической кривой рода 2.

В работах [9, 10] было доказано, что при $k = 4, 5, 6, 7$

$$S_k(n) \in \mathbb{Z}[\ldots, \alpha_i, \ldots; \ldots, x_j^{\pm 1}, \ldots].$$

Другими словами, элемент $S_k(n)$ является полиномом Лорана от начальных переменных x_j и обычным полиномом от коэффициентов α_i. Поэтому его можно записать в виде

$$S_k(n) = \left(\prod_{-k/2 < j \leqslant k/2} x_j^{p_k^{(j)}(n)} \right) P_k(n), \qquad (2)$$

где $P_k(n) = P_k(n; \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{x})$ — полиномы с целыми коэффициентами, а $p_k^{(j)}(n)$ — целочисленные последовательности.

В работе изучаются ассоциированные с $S_k(n)$ последовательности $q_k(n)$, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$q_4(n-1)+q_4(n)+q_4(n+1)+\max\{0,q_4(n)\}=0,$$

$$q_5(n-2)+q_5(n-1)+q_5(n)+q_5(n+1)+\max\{0,q_5(n-1)+q_5(n)\}=0,$$

$$q_6(n-3)+q_6(n-2)+q_6(n-1)+q_6(n)+q_6(n+1)+$$
$$+\max\{0,q_6(n-2)+q_6(n-1)+q_6(n),q_6(n-2)+2q_6(n-1)+q_6(n)\}=0,$$

$$q_7(n-4)+q_7(n-3)+q_7(n-2)+q_7(n-1)+q_7(n)+q_7(n+1)+$$
$$+\max\{0,q_7(n-3)+q_7(n-2)+q_7(n-1)+q_7(n),$$
$$q_7(n-3)+2q_7(n-2)+2q_7(n-1)+q_7(n)\}=0.$$

С их помощью мы вычисляем последовательности $p_k^{(j)}(n)$ при $k=4,5,6,7$. Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Для любого целого n:*

$$p_4^{(-1)}(n)=-\frac{1}{16}n^2-\frac{1}{8}n+\delta_4^{(-1)}(n),\quad p_4^{(0)}(n)=-\frac{1}{16}n^2+\delta_4^{(0)}(n),$$

где $\delta_4^{(j)}(n+8)=\delta_4^{(j)}(n)$ для всех $n\in\mathbb{Z}$ и $j=-1,0$. Значения последовательностей $\delta_4^{(j)}(n)$ приведены в таблицах 1 и 2.

$$p_5^{(-2)}(n)=-\frac{1}{28}n^2-\frac{1}{7}n+\delta_5^{(-2)}(n),\quad p_5^{(-1)}(n)=-\frac{1}{28}n^2-\frac{1}{14}n+\delta_5^{(-1)}(n),$$
$$p_5^{(0)}(n)=-\frac{1}{28}n^2+\delta_5^{(0)}(n),$$

где $\delta_5^{(j)}(n+14)=\delta_5^{(j)}(n)$ для всех $n\in\mathbb{Z}$ и $j=-2,-1,0$. Значения последовательностей $\delta_5^{(j)}(n)$ приведены в таблицах 3, 4, 5.

$$p_6^{(-2)}(n)=-\frac{1}{40}n^2-\frac{1}{10}n+\delta_6^{(-2)}(n),\quad p_6^{(-1)}(n)=-\frac{1}{40}n^2-\frac{1}{20}n+\delta_6^{(-1)}(n),$$
$$p_6^{(0)}(n)=-\frac{1}{40}n^2+\delta_6^{(0)}(n),$$

где $\delta_6^{(j)}(n+20)=\delta_6^{(j)}(n)$ для всех $n\in\mathbb{Z}$ и $j=-2,-1,0$. Значения последовательностей $\delta_6^{(j)}(n)$ приведены в таблицах 6, 7, 8.

$$p_7^{(-3)}(n)=-\frac{1}{60}n^2-\frac{1}{10}n+\delta_7^{(-3)}(n),\quad p_7^{(-2)}(n)=-\frac{1}{60}n^2-\frac{1}{15}n+\delta_7^{(-2)}(n),$$
$$p_7^{(-1)}(n)=-\frac{1}{60}n^2-\frac{1}{30}n+\delta_7^{(-1)}(n),\quad p_7^{(0)}(n)=-\frac{1}{60}n^2+\delta_7^{(0)}(n),$$

где $\delta_7^{(j)}(n+30)=\delta_7^{(j)}(n)$ для всех $n\in\mathbb{Z}$ и $j=-3,-2,-1,0$. Значения последовательностей $\delta_7^{(j)}(n)$ приведены в таблицах 9, 10, 11, 12.

Remark 1. *В работе [14] были получены явные формулы для последовательностей $p_4(n)$ и $p_5(n)$ с любыми начальными значениями. Их вторые разности являются периодическими последовательностями с периодами 8 и 14 соответственно.*

Remark 2. *Вычисления показывают, что при $k\geqslant 8$ периодичность $\Delta^2 p_k^{(j)}(n)$ нарушается.*

2. Тропические последовательности

Для заданного натурального $k \geqslant 2$ зафиксируем целое j с $-k/2 < j \leqslant k/2$. Положим

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{[k/2]} = 1,$$

$$x_i = \begin{cases} x_j, & \text{если } i = j \\ 1, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Возникающую при этом последовательность $S_k^{(j)}(n)$ можно представить в виде последовательности рациональных функций от переменной x_j, числители и знаменатели которых — полиномы с неотрицательными коэффициентами. Очевидно, что

$$S_k^{(j)}(n) = x_j^{p_k^{(j)}(n)} R_k^{(j)}(n),$$

где $R_k^{(j)}(n)$ — отношение полиномов с отличными от нуля свободными членами. При этом мы считаем, что последовательности $S_k^{(j)}(n)$ вычисляются по формуле (1) без сокращения числителей и знаменателей на одинаковые сомножители, за исключением степеней переменных x_j. Отсюда следует, что последовательности $p_k^{(j)}(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{gathered} p_k(n + [(k+1)/2]) + p_k(n - [k/2]) = \\ = \min_{1 \leqslant i \leqslant k/2} \{p_k(n + [(k+1)/2] - i) + p_k(n - [k/2] + i)\} \end{gathered} \tag{3}$$

и задаются начальными значениями

$$p_k^{(j)}(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Последовательности подобного рода называются тропическими (ультрадискретными). Примеры таких последовательностей и их рекуррентных соотношений можно найти в работах [11] – [15].

Пусть $\widetilde{S}_k(n)$ — последовательность, которая получается из $S_k(n)$ перестановкой начальных значений в обратном порядке. Замена n на $1 - n$ для чётных k и n на $-n$ при нечётных k в рекуррентном соотношении (1) приводит к равенству

$$\widetilde{S}_k(n) = \begin{cases} S_k(1-n), & \text{если } k \text{ — чётное} \\ S_k(-n), & \text{если } k \text{ — нечётное.} \end{cases} \tag{4}$$

Remark 3. *Из* (4) *следует, что*

$$p_k^{(j)}(n) = \begin{cases} p_k^{(1-j)}(1-n), & \textit{если } k \textit{ — чётное} \\ p_k^{(-j)}(-n), & \textit{если } k \textit{ — нечётное.} \end{cases}$$

Поэтому последовательности $p_k^{(j)}(n)$ достаточно вычислить только для $-k/2 < j \leqslant 0$.

Для $k = 2$ соотношение (3) приобретает вид

$$p_2(n+1) + p_2(n-1) = 2p_2(n),$$

и поэтому

$$p_2^{(0)}(n) = 1 - n, \quad p_2^{(1)}(n) = n,$$

что соответствует явной формуле для $S_2(n)$ из введения.

Для $k=3$
$$p_3(n+2)+p_3(n-1)=p_3(n+1)+p_3(n).$$
Поэтому для $\Delta p_2(n)=p_2(n+1)-p_2(n)$ (разность первого порядка)
$$\Delta p_2(n+1)=\Delta p_2(n-1).$$
Следовательно,
$$p_3^{(-1)}(n)=\begin{cases}-n/2, \text{ если } n \text{ — чётное}\\ -(n-1)/2, \text{ если } n \text{ — нечётное,}\end{cases}$$
$$p_3^{(0)}(n)=\begin{cases}1, \text{ если } n \text{ — чётное}\\ 0, \text{ если } n \text{ — нечётное,}\end{cases}$$
что соответствует формуле для $S_3(n)$ из введения.

2.1. Сомос-4

При $k=4$ соотношение (3) имеет вид
$$p_4(n+2)+p_4(n-2)=\min\{p_4(n+1)+p_4(n-1), 2p_4(n)\}.$$
С помощью замены
$$q_4(n)=\Delta^2 p_4(n)=\Delta p_4(n+1)-\Delta p_4(n)=p_4(n+2)-2p_4(n+1)+p_4(n)$$
оно приводится к виду
$$q_4(n)+2q_4(n-1)+q_4(n-2)=\min\{0, q_4(n-1)\}$$
или, после вычитания из обеих частей $q_4(n-1)$,
$$q_4(n)+q_4(n-1)+q_4(n-2)+\max\{0, q_4(n-1)\}=0.$$
В соответствии с замечанием 3 рассмотрим последовательности $p_4^{(-1)}(n)$ и $p_4^{(0)}(n)$. Последовательность $p_4^{(-1)}(n)$ задаётся начальными значениями
$$p_4(-1)=1, \quad p_4(0)=p_4(1)=p_4(2)=0.$$
Поэтому
$$q_4(-1)=1, \quad q_4(0)=0.$$
С помощью рекуррентного соотношения для $q_4(n)$ составим таблицу

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_4^{(-1)}(n)$	1	0	-1	1	-1	0	1	-2	1	0

Так как $q_4(n)$ однозначно определяется двумя соседними значениями, то
$$q_4^{(-1)}(n+8)=q_4^{(-1)}(n)$$
для любого целого n. Отсюда следует, что

$$p_4^{(-1)}(n) = -\frac{1}{16}n^2 - \frac{1}{8}n + \delta_4^{(-1)}(n), \quad \delta_4^{(-1)}(n+8) = \delta_4^{(-1)}(n)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Таблица 1: $\delta_4^{(-1)}(n)$

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
$16\delta_4^{(-1)}(n)$	15	0	3	8	-1	8	3	0

Последовательность $p_4^{(0)}(n)$ определяется начальными значениями

$$p_4(0) = 1, \quad p_4(-1) = p_4(1) = p_4(2) = 0.$$

Следовательно,

$$q_4(-1) = -2, \quad q_4(0) = 1.$$

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_4^{(0)}(n)$	-2	1	0	-1	1	-1	0	1	-2	1

$$q_4^{(0)}(n+8) = q_4^{(0)}(n),$$

$$p_4^{(0)}(n) = -\frac{1}{16}n^2 + \delta_4^{(0)}(n), \quad \delta_4^{(0)}(n+8) = \delta_4^{(0)}(n).$$

Значения последовательности $\delta_4^{(0)}(n)$ приведены в следующей таблице.

Таблица 2: $\delta_4^{(0)}(n)$

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
$16\delta_4^{(0)}(n)$	1	16	1	4	9	0	9	4

2.2. Сомос-5

При $k = 5$ рекуррентное соотношение (3) имеет вид

$$p_5(n+3) + p_5(n-2) = \min\{p_5(n+2) + p_5(n-1), p_5(n+1) + p_5(n)\}.$$

Из него следует, что

$$q(n) = \Delta^2 p_5(n)$$

удовлетворяет соотношению

$$q_5(n-2) + q_5(n-1) + q_5(n) + q_5(n+1) + \max\{0, q_5(n-1) + q_5(n)\} = 0.$$

Рассматриваем последовательности $p_5^{(j)}(n)$ при $j = -2, -1, 0$. Для $p_5^{(-2)}(n)$

$$p_5(-2) = 1, \quad p_5(-1) = p_5(0) = p_5(1) = p_5(2) = 0,$$

$$q_5(-2) = 1, \quad q_5(-1) = q_5(0) = 0,$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$q_5^{(-2)}(n)$	1	0	0	-1	1	0	-1	0	1	-1	0	0	1	-2	1	0	0

$$q_5^{(-2)}(n+14) = q_5^{(-2)}(n),$$

$$p_5^{(-2)}(n) = -\frac{1}{28}n^2 - \frac{1}{7}n + \delta_5^{(-2)}(n), \quad \delta_5^{(-2)}(n+14) = \delta_5^{(-2)}(n).$$

Таблица 3: $\delta_5^{(-2)}(n)$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$28\delta_5^{(-2)}(n)$	24	-3	0	5	12	-7	4	17	4	-7	12	5	0	-3

Для $p_5^{(-1)}(n)$

$$p_5(-1) = 1, \quad p_5(-2) = p_5(0) = p_5(1) = p_5(2) = 0,$$

$$q_5(-2) = -2, \quad q_5(-1) = 1, \quad q_5(0) = 0,$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$q_5^{(-1)}(n)$	-2	1	0	0	-1	1	0	-1	0	1	-1	0	0	1	-2	1	0

$$q_5^{(-1)}(n+14) = q_5^{(-1)}(n),$$

$$p_5^{(-1)}(n) = -\frac{1}{28}n^2 - \frac{1}{14}n + \delta_5^{(-1)}(n), \quad \delta_5^{(-1)}(n+14) = \delta_5^{(-1)}(n).$$

Таблица 4: $\delta_5^{(-1)}(n)$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$28\delta_5^{(-1)}(n)$	0	27	0	3	8	15	-4	7	20	7	-4	15	8	3

Для $p_5^{(0)}(n)$

$$p_5(0) = 1, \quad p_5(-2) = p_5(-1) = p_5(1) = p_5(2) = 0,$$

$$q_5(-2) = 1, \quad q_5(-1) = -2, \quad q_5(0) = 1,$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$q_5^{(0)}(n)$	1	-2	1	0	0	-1	1	0	-1	0	1	-1	0	0	1	-2	1

$$q_5^{(0)}(n+14) = q_5^{(0)}(n),$$

$$p_5^{(0)}(n) = -\frac{1}{28}n^2 + \delta_5^{(0)}(n), \quad \delta_5^{(0)}(n+14) = \delta_5^{(0)}(n).$$

Таблица 5: $\delta_5^{(0)}(n)$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$28\delta_5^{(0)}(n)$	4	1	28	1	4	9	16	-3	8	21	8	-3	16	9

2.3. Сомос-6

Последовательности $p_6^{(j)}(n)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$p_6(n+3)+p_6(n-3)=\min\{p_6(n+2)+p_6(n-2),p_6(n+1)+p_6(n-1),2p_6(n)\},$$

и поэтому

$$q_6(n-3)+q_6(n-2)+q_6(n-1)+q_6(n)+q_6(n+1)+\\+\max\{0,q_6(n-2)+q_6(n-1)+q_6(n),q_6(n-2)+2q_6(n-1)+q_6(n)\}=0,$$

где

$$q_6(n)=\Delta^2 p_6(n).$$

В соответствии с замечанием 3 рассматриваем последовательности $p_6^{(j)}(n)$ при $j=-2,-1,0$. Для последовательности $p_6^{(-2)}(n)$

$$p_6(-2)=1,\quad p_6(-1)=p_6(0)=p_6(1)=p_6(2)=p_6(3)=0,$$

$$q_6(-2)=1,\quad q_6(-1)=q_6(0)=q_6(1)=0,$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_6^{(-2)}(n)$	1	0	0	0	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$q_6^{(-2)}(n)$	0	1	-1	0	0	0	1	-2	1	0	0	0

$$q_6^{(-2)}(n+20)=q_6^{(-2)}(n),$$

$$p_6^{(-2)}(n)=-\frac{1}{40}n^2-\frac{1}{10}n+\delta_6^{(-2)}(n),\quad \delta_6^{(-2)}(n+20)=\delta_6^{(-2)}(n).$$

Таблица 6: $\delta_6^{(-2)}(n)$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$40\delta_6^{(-2)}(n)$	36	-3	0	5	12	21	-8	5	20	-3

n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$40\delta_6^{(-2)}(n)$	16	-3	20	5	-8	21	12	5	0	-3

Для последовательности $p_6^{(-1)}(n)$

$$p_6(-1)=1,\quad p_6(-2)=p_6(0)=p_6(1)=p_6(2)=p_6(3)=0,$$

$$q_6(-1)=-2,\quad q_6(0)=1,\quad q_6(1)=q_6(2)=0,$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_6^{(-1)}(n)$	-2	1	0	0	0	-1	1	0	-1	1	-1	1

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$q_6^{(-1)}(n)$	-1	0	1	-1	0	0	0	1	-2	1	0	0

$$q_6^{(-1)}(n+20) = q_6^{(-1)}(n),$$

$$p_6^{(-1)}(n) = -\frac{1}{40}n^2 - \frac{1}{20}n + \delta_6^{(-1)}(n), \quad \delta_6^{(-1)}(n+20) = \delta_6^{(-1)}(n).$$

Таблица 7: $\delta_6^{(-1)}(n)$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$40\delta_6^{(-1)}(n)$	0	39	0	3	8	15	24	-5	8	23
n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$40\delta_6^{(-1)}(n)$	0	19	0	23	8	-5	24	15	8	3

Для последовательности $p_6^{(0)}(n)$

$$p_6(0) = 1, \quad p_6(-2) = p_6(-1) = p_6(1) = p_6(2) = p_6(3) = 0,$$

$$q_6(-2) = 1, \quad q_6(-1) = -2, \quad q_6(0) = 1, \quad q_6(2) = 0,$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_6^{(0)}(n)$	1	-2	1	0	0	0	-1	1	0	-1	1	-1
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$q_6^{(0)}(n)$	1	-1	0	1	-1	0	0	0	1	-2	1	0

$$q_6^{(0)}(n+20) = q_6^{(0)}(n),$$

$$p_6^{(0)}(n) = -\frac{1}{40}n^2 + \delta_6^{(0)}(n), \quad \delta_6^{(0)}(n+20) = \delta_6^{(0)}(n).$$

Таблица 8: $\delta_6^{(0)}(n)$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$40\delta_6^{(0)}(n)$	4	1	40	1	4	9	16	25	-4	9
n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$40\delta_6^{(0)}(n)$	24	1	20	1	24	9	-4	25	16	9

2.4. Сомос-7

Рекуррентное соотношение (3) имеет вид

$$p_7(n+4) + p_7(n-3) =$$
$$= \min\{p_7(n+3) + p_7(n-2), p_7(n+2) + p_7(n-1), p_7(n+1) + p_7(n)\}.$$

Следовательно,

$$q_7(n+1) + 2q_7(n) + 3q_7(n-1) + 3q_7(n-2) + 2q_7(n-3) + q_7(n-4) =$$
$$= \min\{q_7(n) + 2q_7(n-1) + 2q_7(n-2) + q_7(n-3), q_7(n-1) + q_7(n-2), 0\},$$

где
$$q_7(n) = \Delta^2 p_7(n)$$
— конечная разность второго порядка для $p_7(n)$.

Будем рассматривать последовательности $p_7^{(j)}(n)$ при $j = -3, -2, -1, 0$. Последовательность $p_7^{(-3)}(n)$ определяется начальными значениями
$$p_7(-3) = 1, \quad p_7(-2) = p_7(-1) = p_7(0) = p_7(1) = p_7(2) = p_7(3) = 0.$$
Следовательно,
$$q_7(-3) = 1, \quad q_7(-2) = q_7(-1) = q_7(0) = q_7(1) = 0,$$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_7^{(-3)}(n)$	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	-1	1	-1
n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$q_7^{(-3)}(n)$	1	0	-1	0	1	-1	1	-1	0	0	1	-1
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
$q_7^{(-3)}(n)$	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	

$$q_7^{(-3)}(n+30) = q_7^{(-3)}(n),$$
$$p_7^{(-3)}(n) = -\frac{1}{60}n^2 - \frac{1}{10}n + \delta_7^{(-3)}(n), \quad \delta_7^{(-3)}(n+30) = \delta_7^{(-3)}(n).$$

Таблица 9: $\delta_7^{(-3)}(n)$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$60\delta_7^{(-3)}(n)$	51	-8	-5	0	7	16	27	-20	-5	12	31	-8	15	-20	7
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$60\delta_7^{(-3)}(n)$	36	7	-20	15	-8	31	12	-5	-20	27	16	7	0	-5	-8

Для $p_7^{(-2)}(n)$
$$p_7(-2) = 1, \quad p_7(-3) = p_7(-1) = p_7(0) = p_7(1) = p_7(2) = p_7(3) = 0,$$
$$q_7(-3) = -2, \quad q_7(-2) = 1, \quad q_7(-1) = q_7(0) = q_7(1) = 0,$$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_7^{(-2)}(n)$	-2	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	-1	1
n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$q_7^{(-2)}(n)$	-1	1	0	-1	0	1	-1	1	-1	0	0	1
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
$q_7^{(-2)}(n)$	-1	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	

$$q_7^{(-2)}(n+30) = q_7^{(-2)}(n),$$
$$p_7^{(-2)}(n) = -\frac{1}{60}n^2 - \frac{1}{15}n + \delta_7^{(-2)}(n), \quad \delta_7^{(-2)}(n+30) = \delta_7^{(-2)}(n).$$

Таблица 10: $\delta_7^{(-2)}(n)$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$60\delta_7^{(-2)}(n)$	-3	56	-3	0	5	12	21	32	-15	0	17	36	-3	20	-15
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$60\delta_7^{(-2)}(n)$	12	41	12	-15	20	-3	36	17	0	-15	32	21	12	5	0

Для $p_7^{(-1)}(n)$

$$p_7(-1) = 1, \quad p_7(-3) = p_7(-2) = p_7(0) = p_7(1) = p_7(2) = p_7(3) = 0,$$

$$q_7(-3) = 1, \quad q_7(-2) = -2, \quad q_7(-1) = 1, \quad q_7(0) = q_7(1) = 0,$$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_7^{(-1)}(n)$	1	-2	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	-1
n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$q_7^{(-1)}(n)$	1	-1	1	0	-1	0	1	-1	1	-1	0	0
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
$q_7^{(-1)}(n)$	1	-1	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	

$$q_7^{(-1)}(n+30) = q_7^{(-1)}(n),$$

$$p_7^{(-1)}(n) = -\frac{1}{60}n^2 - \frac{1}{30}n + \delta_7^{(-1)}(n), \quad \delta_7^{(-1)}(n+30) = \delta_7^{(-1)}(n).$$

Таблица 11: $\delta_7^{(-1)}(n)$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$60\delta_7^{(-1)}(n)$	3	0	59	0	3	8	15	24	35	-12	3	20	39	0	23
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$60\delta_7^{(-1)}(n)$	-12	15	44	15	-12	23	0	39	20	3	-12	35	24	15	8

И, наконец, для $p_7^{(0)}(n)$

$$p_7(0) = 1, \quad p_7(-3) = p_7(-2) = p_7(-1) = p_7(1) = p_7(2) = p_7(3) = 0,$$

$$q_7(-3) = 0, \quad q_7(-2) = 1, \quad q_7(-1) = -2, \quad q_7(0) = 1, \quad q_7(1) = 0,$$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$q_7^{(0)}(n)$	0	1	-2	1	0	0	0	0	-1	1	0	0
n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$q_7^{(0)}(n)$	-1	1	-1	1	0	-1	0	1	-1	1	-1	0
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
$q_7^{(0)}(n)$	0	1	-1	0	0	0	0	1	-2	1	0	

$$q_7^{(0)}(n+30) = q_7^{(0)}(n),$$
$$p_7^{(0)}(n) = -\frac{1}{60}n^2 + \delta_7^{(0)}(n), \quad \delta_7^{(0)}(n+30) = \delta_7^{(0)}(n).$$

Таблица 12: $\delta_7^{(0)}(n)$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$60\delta_7^{(0)}(n)$	9	4	1	60	1	4	9	16	25	36	-11	4	21	40	1
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$60\delta_7^{(0)}(n)$	24	-11	16	45	16	-11	24	1	40	21	4	-11	36	25	16

3. Заключение

Определим последовательность a_n (двучленная последовательность Гейла-Робинсона) с помощью рекуррентного соотношения

$$a_n a_{n-k} = \alpha a_{n-l} a_{n-k+l} + \beta a_{n-m} a_{n-k+m}$$

с любыми $0 < l < m < k$, а последовательность b_n (трехчленная последовательность Гейла-Робинсона) — с помощью соотношения

$$b_n b_{n-k} = \alpha b_{n-p} b_{n-k+p} + \beta b_{n-q} b_{n-k+q} + \gamma b_{n-r} b_{n-k+r},$$

где $p, q, r < k$ — любые попарно различные целые числа, удовлетворяющие условию $p + q + r = k$. Последовательности Сомос-k при $k = 4, 5, 6, 7$ являются частными случаями последовательностей Гейла-Робинсона. Имеются основания считать, что доказанную в работе теорему можно распространить на последовательности Гейла-Робинсона общего вида.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Propp. The Somos Sequence Site. http://faculty.uml.edu/jpropp/somos.html.

2. Gale D. The strange and surprising saga of the Somos sequences // Math. Intelligencer. 1991. Vol. 13, № 1. P. 40-42.

3. Gale D. Somos sequence update // Math. Intelligencer. 1991. Vol. 13, № 4. P. 49-50 (reprinted in Tracking the Automatic Ant., Springer-Verlag, New York, 1998).

4. Hone A.N.W. Elliptic curves and quadratic recurrence sequences // Bull. Lond. Math. Soc. 2005. Vol. 37. P. 161–171. Corrigendum, Bull. Lond. Math. Soc. 2006. Vol. 38. P. 741–742.

5. van der Poorten A.J., Swart C.S. Recurrence relations for elliptic sequences: every Somos 4 is a Somos k // Bull. Lond. Math. Soc. 2006. Vol. 38. P. 546–554.

6. Hone A.N.W. Sigma function solution of the initial value problem for Somos 5 sequences // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. Vol. 359. P. 5019-5034.

7. Swart C.S., Hone A.N.W. Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 sequences // math.NT/0508094. 2008. 23 pp.

8. Yuri N. Fedorov, Anrew N.W. Hone. Sigma-function solution to the general Somos-6 recurrence via hyperelliptic Prym varieties // Journal of Integrable Systems. 2016. Vol. 1. P. 1–34.

9. Robinson R. Periodicity of Somos sequences // Proceedings of the AMS. 1992. Vol. 116, № 3. P. 613-619.

10. Fomin S., Zelevinsky A. The Laurent Phenomenon // Adv. Appl. Math. 2002. Vol. 28. P. 119-144.

11. Anrew N.W. Hone. Laurent Polynomials and Superintegrable Maps // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2007. Vol. 3, 022. 18 pp.

12. Nobe A. Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. Vol. 41, 125205. 12 pp.

13. Allan P. Fordy and Andrew Hone. Symplectic Maps from Cluster Algebras // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2011. Vol. 7, 091. 12 pp.

14. Nakata Y. The solution to the initial value problem for the ultradiscrete Somos-4 and 5 equations // arXiv:math/1701.04262v1. 2017. 13 pp.

15. Speyer D., Sturmfels B. Tropical mathematics // Math. Mag. 2009. Vol. 82, № 3. P. 163-173.

REFERENCES

1. J. Propp, “The Somos Sequence Site“, http://faculty.uml.edu/jpropp/somos.html.

2. Gale D. 1991, “The strange and surprising saga of the Somos sequences“, *Math. Intelligencer*, vol. 13, no.1, pp. 40-42.

3. Gale D. 1998, “Somos sequence update“, *Math. Intelligencer*, vol. 13, no. 4, pp. 49-50 (reprinted in Tracking the Automatic Ant., Springer-Verlag, New York, 1998).

4. Hone A.N.W. 2006, “Elliptic curves and quadratic recurrence sequences“, *Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 37, pp. 161–171. Corrigendum, *Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 38, pp. 741–742.

5. van der Poorten A.J., Swart C.S. 2006, “Recurrence relations for elliptic sequences: every Somos 4 is a Somos k“, *Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 38, pp. 546–554.

6. Hone A.N.W. 2007, “Sigma function solution of the initial value problem for Somos 5 sequences“, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 359, pp. 5019-5034.

7. Swart C.S., Hone A.N.W. 2008, “Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 sequences“, *math.NT/0508094.*, 23 pp.

8. Yuri N. Fedorov, Anrew N.W. Hone. 2016, “Sigma-function solution to the general Somos-6 recurrence via hyperelliptic Prym varieties“, *Journal of Integrable Systems*, vol. 1. pp. 1–34.

9. Robinson R. 1992, “Periodicity of Somos sequences“, *Proceedings of the AMS*, vol. 116, no. 3, pp. 613-619.

10. Fomin S. and Zelevinsky A. 2002, “The Laurent Phenomenon“, *Adv. Appl. Math.*, vol. 28, pp. 119-144.

11. Anrew N.W. Hone. 2007, “Laurent Polynomials and Superintegrable Maps“, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, vol. 3, 022, 18 pp.

12. Nobe A. 2008, “Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves“, *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 41, 125205, 12 pp.

13. Allan P. Fordy and Andrew Hone. 2011, “Symplectic Maps from Cluster Algebras“,*Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, vol. 7, 091, 12 pp.

14. Nakata Y. 2017, “ The solution to the initial value problem for the ultradiscrete Somos-4 and 5 equations“, *arXiv:math/1701.04262v1*, 13pp.

15. Speyer D., Sturmfels B. 2009, “Tropical mathematics“, *Math. Mag.*, vol. 82, no. 3, pp. 163-173.

Получено 14.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 519.724.2 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-133-151

Критерий существования корректного протокола в канале частичного стирания

И. Б. Казаков

Илья Борисович Казаков — Московский государственный университет им. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: i_b_kazakov@mail.ru

Аннотация

Скрытые каналы позволяют передавать информацию с использованием механизмов, изначально не предназначенных для передачи. В качестве примера можно рассмотреть процесс, в рамках которого передатчик передвигает своего персонажа в многопользовательской игре, кодируя информацию движениями, а приемник считывает сообщение, отслеживая перемещения. При этом в канале могут возникать ошибки, связанные с пропаданием персонажа из области видимости приемника и потерей сетевых пакетов. Естественным образом возникает задача организации надежного канала. В работе рассматривается формальная модель канала частичного стирания, описывающая процесс взаимодействия приемника и передатчика, вводится понятие корректности протокола передачи, формулируется и доказывается критериальное условие корректности протокола передатчика, а также строится оптимальное поведение приемника.

Ключевые слова: скрытый канал, канал частичного стирания, протокол передачи информации

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:
И. Б. Казаков. Критерий существования корректного протокола в канале частичного стирания // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 133–151.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 519.724.2 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-133-151

Criterion for the existence of a consistent protocol in a partial erasure channel

I. B. Kazakov

Ilya Borisovich Kazakov — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: i_b_kazakov@mail.ru

Abstract

Covert channels allow one to transmit information using mechanisms that were not originally intended for transmission. An example is a process in which a transmitter encodes information in moves of a character of a multiplayer game, and a receiver observes the moves and decodes the original message. This channel may be noisy, since the character may fall out of the receiver's sight, a number of network packets may be lost, etc. Thus there emerges a natural problem of ogranizing a reliable channel. We propose a formal model called a partial erasure channel that describes the interaction of a transmitter and a receiver, introduce the notion of a consistent transmission protocol, formulate and prove the consistency criterion on the transmitting side and construct the optimal receiver for the given consistent transmitter.

Keywords: covert channels, partial erasure channels, information transmission protocol

Bibliography: 25 titles.

For citation:
I. B. Kazakov, 2021 "Criterion for the existence of a consistent protocol in a partial erasure channel", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 133–151.

1. Введение

В настоящей работе предметом изучения является так называемый канал частичного стирания. Поясним сразу, в чем заключается его суть. Прежде всего, задан некий алфавит символов. Имеются два участника взаимодействия — передающий информацию и принимающий её. Передающего участника, следуя традиции, будем называть Алисой, принимающего, соответственно, Бобом. Алиса отправляет Бобу символ из данного алфавита, а Боб, в свою очередь, получает часть информации об отправленном символе. Определим, что конкретно означает «получение частичной информации»: на исходном алфавите определен некий набор разбиений, или, иначе выражаясь, отношений эквивалентности. В процессе передачи символа выбирается одно из данных отношений. Боб получает следующую информацию: какое именно отношение эквивалентности было выбрано, а также какому классу по данному отношению принадлежал отправленный Алисой символ. Общей задачей Алисы и Боба является корректная и эффективная передача информации по каналу с вышеописанными свойствами. Положим, что имеется также и алфавит «исходных символов», а у Алисы и Боба есть соответственно входная и выходная ленты. На входной ленте Алисы предварительно напечатаны символы указанного алфавита, а Боб может печать на выходной ленте символы из этого же алфавита. Зарезервируем специальный символ, который называется символом стирания. Этот символ имеет смысл «информация потеряна». Дозволим Бобу печатать также и его на выходной ленте.

Вышесказанное позволяет определить, что такое «корректность» передачи: совместное поведение Алисы и Боба, называемое протоколом, корректно, если в результате работы на выходной ленте отпечатывается то же самое, что было изначально напечатано на входной, при этом, может быть, заменяя некоторые символы на символ стирания. Таким образом, возникает задача построения корректного протокола. Точнее выражаясь, указанная задача, в том виде, в котором она решается в настоящей работе, формулируется следующим образом. Пусть поведение Алисы определено. Тогда требуется определить поведение Боба таковое, что в паре с ним данное поведение Алисы образует корректный протокол. Однако, не для всякого поведения Алиса соответствующее поведение Боба существует. Таким образом, следует определить, каким свойством должно обладать поведение Алисы, чтобы существовало поведение Боба, в паре с которым оно составляет корректный протокол. В настоящей работе будет изложена формализация представленных понятий, а также доказаны соответствующие теоремы, которые и являются ответами на эти вопросы. Однако перед указанным изложением, следует предварительно представить сведения о контексте настоящего исследования, т.е. обосновать его актуальность.

Во-первых, начальным пунктом является теория скрытых каналов. Скрытым канал — это коммуникационный канал, пересылающий информацию методом, который изначально не был для этого предназначен. Исторически первой работой, посвященной теории скрытых каналов, является статья [15]. Современный краткий обзор, посвященный скрытым каналам и их классификации имеется в [17], [19]. Следует упомянуть также о двух отечественных обзорных статьях [9], [1].

Скрытые каналы, как правило, [16] делятся на два типа: скрытые каналы по памяти и скрытые каналы по времени. Суть скрытого канала по памяти заключается в том, что один процесс записывает в некую информацию в хранилище, а другой процесс её прямо или косвенно считывает. Скрытый канал по времени характеризуется доступом отправителя и получателя к одному и тому же процессу или изменяемому во времени атрибуту.

В связи со стремительным ростом использования сети Интернет, в настоящее время особенно важны сетевые скрытые каналы. Упомянем некоторые способы, которым может быть организован скрытый канал в стеке протоколов TCP/IP. Во-первых, имеется модуляция значений полей заголовков пакетов, например, полей TTL [23], IP ID [10], ToS [14]. Другой способ заключается в изменении длин передаваемых пакетов и освещен, например, в работе [2]. Скрытые каналы по времени в IP-сетях могут быть построены путем изменения длин межпакетных интервалов [11], [20], и при помощи изменения скорости передачи пакетов [22]. Достаточно полный обзор и классификацию указанных каналов можно найти в работах [24], [21] соответственно.

Сетевые каналы по времени, как правило, всегда зашумлены, так как время следования пакета — случайная величина, распределение которой зависит от нагрузки на сеть [12]. В целях максимизации пропускной способности в условиях зашумления могут применяться [13] коды, исправляющие ошибки. Решению указанной задачи посвящен цикл работ [3], [4], [5], [6], [7], [8] автора, в который входит также и данная статья.

Выражаясь более определенным образом, предмет настоящего исследования связан с так называемым скрытым каналом блужданий по плоскости, возможность построения которого предоставляют многопользовательские online-игры. Этот скрытый канал также может быть отнесен к сетевым скрытым каналам, однако в отличие от упомянутых выше, относится не транспортному, а к прикладному уровню модели OSI.

Сделаем необходимые пояснения. В рассматриваемом классе игр имеется плоскость, на которой расположены игровые сущности. Сервер хранит местоположения этих сущностей на плоскости, т.е. их координаты. Предполагается также, что у каждого игрока, т.е. подключенного к серверу клиента, имеется сущность, поведением которой он может управлять. Как правило, данная сущность называется игровым персонажем. Один из клиентов передает серверу команды о перемещении управляемого им персонажа по плоскости, а другие клиенты могут получать от сервера данные о местоположении (и, следовательно, также об изменениях местоположения) данного игрового персонажа. Согласно представленному описанию, канал блужданий по плоскости относится к скрытым каналам по времени. Ранее задача построения скрытых каналов через online-шутеры исследовалась в статье [25]. Под online-играми могут пониматься не только «шутеры от первого лица», но также и игры с произвольной механикой. Упомянем, что построению скрытого канала в отмеченном общем случае посвящена, например, статья [18].

Однако, в упомянутых выше работах не рассматривается вопрос возможных ошибок, совершаемых при передаче информации, и обеспечения отказоустойчивости построяемого скрытого канала. Предполагалось, что каждый клиент получает от сервера информацию обо всех последовательных состояниях игры. Применительно к блужданиям по плоскости это означает получение сведений о местоположении всех других (точнее, находящихся в зоне видимости) игроков на плоскости во все моменты времени. В реальных условиях сформулированое предположение не соблюдается в силу переменности задержки между отправкой данных сервером и их получением клиентом, а также потому что сервер не обязан отправлять их на каждом такте. Таким образом, часть информации теряется, и клиент получает сведения о местоположениях прочих игроков лишь в некоторые моменты времени. Как следствие, возникает задача построения скрытого канала именно в условиях потери и/или зашумления информации.

Опишем способ передачи информации посредством блужданий по плоскости. Имеется игровое поле и два игрока: первый игрок движется по полю, а второй — наблюдает движение первого. Относительно этих движений принято следующее. Во-первых, время принимается дискретным, т.е. состоящим из последовательных тактов. Во-вторых, полагаем, что Алиса движется только лишь вдоль конечного числа направлений, отстоящих друг от друга на равные углы, причем может менять направление своего движения на каждом такте. Таковые допущения естественны в силу того, что в реальности может передаваться только лишь конечный объем информации. Подразумевается, что она «всегда движется», т.е. не может покоиться. В третьих, скорость движения Алисы постоянна. Также зафиксируем некое «начальное местоположение».

Таким образом, как это было показано в [3], фактически Алиса движется по некоторому счетному графу местоположений G_{loc}, на каждом такте переходя в смежную вершину. Далее, зафиксируем число N и рассмотрим множество путей длины N в G_{loc}, начинающихся в ранее упомянутой начальной точке. Таковые пути будем называть траекториями.

На протяжении N тактов Алиса движется по некоторой траектории, т.е. проходит последовательно N соответствующих местоположений. Боб, в свою очередь, посредством анализа получаемых с сервера данных, на протяжении этих же N тактов считывает местоположения Алисы. Полагаем, что Бобу удается считать местоположения Алисы не на всех прошедших тактах $\{1, 2, ..., N\}$, а только лишь на некоторых из них, т.е. на подмножестве $T \subseteq \{1, 2, 3, ...N\}$.

Для двух выбранных траекторий будем говорить, что они пересекаются на i-м такте, если на данном также совпадают соответствующие местоположения Алисы. Выбор множества T тактов задает разбиение (или, иначе выражаясь, отношение эквивалентности) на множестве траекторий: две траектории считаются эквивалентными, если они пересекаются на всех тактах $i \in T$, т.е если Боб не может в этом случае отличить их друг от друга. Таким образом, соответственно подмножествам $\{1, 2, ..., N\}$, на траекториях определено 2^N разбиений. Кроме того, разбиению, соответствующему множеству T, возможно приписать вероятность p_T того, что Боб «увидит Алису именно на тактах из T».

Далее, посредством абстрагирования от самих траекторий и конкретных определенных на них разбиений, была получена формальная модель, называемая структурой частичного стирания. Соответственно, имеется также канал частичного стирания, которой, таким образом, является «надстроенным» над каналом блужданий по плоскости. И, следовательно, можно говорить о протоколах передачи информации в указанном канале. В [4] рассматривался определенный класс таковых протоколов, называемый «схемой равномерного кодирования». Однако, как будет видно из дальнейшего формализованного изложения, указанный класс не исчерпывает собой все возможные протоколы. В настоящей работе изучен общий случай и тем самым решена поставленная в [4] задача.

Представим структуру дальнейшего изложения. В следующем разделе 2 вновь изложим введенные в предшествующей работе [3] понятия структуры частичного стирания и равномерного кодирования, а также произведем требуемое обобщение понятия протокола. Раздел 3 посвящен полученным результатам исследования, доказательства которых представлены в разделе 4. В заключительном разделе 5 подведены итоги и поставлены задачи для дальнейших исследований.

2. Основные определения и обозначения

Введенное выше множество траекторий Алисы обозначается как A. Множество всех слов в алфавите A, т.е. множество конечных последовательностей символов из A, (включая, в том числе, и пустую последовательность) обозначается как A^*.

Определение 1. *Структура частичного стирания — тройка, состоящая из алфавита A, множества определённых на нем разбиений (отношений эквивалентности) $\mathfrak{T}$, а также приписанных данным разбиениям неотрицательных весов p_T, сумма которых принимается равной 1.*

Опишем теперь канал частичного стирания. Алиса отправляет Бобу символ $a \in A$. Боб получает лишь часть информации об отправленном символе: выбранное отношение эквивалентности T, а также класс $\pi_T(a)$ по данному отношению. Множество всех пар $(\pi_T(a), T)$ обозначается как алфавит Боба B.

Определение 2. *Для символов $a \in A$, $b \in B$ полагаем $a \mapsto b$, если в структуре частичного стирания имеется разбиение T такое, что $b = (\pi_T(a), T)$. Также, для слов $\alpha \in A^*, \beta \in B^*$ полагаем $\alpha \mapsto \beta$, если $|\alpha| = |\beta| = l$ и для всех $i = 1...l$ выполнено $\alpha(i) \mapsto \beta(i)$.*

У Алисы есть входная лента, а у Боба, соответственно, выходная лента. На входной ленте находятся символы некоторого алфавита S, которые считывает Алиса. Боб печатает на выходную ленту те же символы из S плюс ещё один специальный символ $*$. Предполагается, что множество S конечно и не содержит само символа $*$. Общая цель как Алисы, так и Боба состоит в том, чтобы отпечатать на выходной ленте ту же самую последовательность символов, что и имеющуюся на входной ленте изначально, при этом, может быть, заменяя некоторые символы алфавита S на $*$.

Представим также описание вышеупомянутой схемы «равномерного кодирования». Прежде всего, зафиксировано некое число n — длина кодового слова.

Определение 3. *Равномерный код — это инъективное отображение $K : S \to A^n$, т.е. каждому символу $s \in S$ поставлено в соответствие кодовое слово α_s, $|\alpha_s| = n$*

Алиса, прочитав с ленты очередной символ $s \in S$, в течение последующих n тактов выбрасывает слово α_s, т.е. последовательно высылает по каналу символы $\alpha_s(1), ..., \alpha_s(n)$. Боб же в свою очередь, на протяжении этих тактов последовательно получает символы $\beta(1)...\beta(n)$, такие что $\beta(i) = (\pi_{T_i}(\alpha(i)), T_i)$, где T_i — разбиение, выбранное на i-ом такте. Иначе говоря, совокупно Боб получает слово $\beta = \beta(1)...\beta(n)$, для которого $\alpha \mapsto \beta$.

Получив слово β, Боб принимает решение относительно того, какой именно символ из множества $S \cup \{*\}$ ему следует отпечатать на выходной ленте. Возможны два случая. Если имеется только один символ $s \in S$ такой, что $\alpha_s \mapsto \beta$, то именно его и следует отпечатать. Иначе, т.е. если таковых имеется несколько, то следует напечатать символ стирания $*$. Отдельно отметим, что существование хотя бы одного такого $s \in S$, для которого $\alpha_s \mapsto \beta$, гарантировано вышеопределенным поведением Алисы.

Таким образом, схема равномерного кодирования надстраивает поверх канала частичного стирания так называемый канал полного стирания. Соответствующая ему структура полного стирания — это некий алфавит A', каждому символу которого приписана вероятность его замены на символ стирания $*$ в процессе передачи по указанному каналу. A' — это ничто иное, как множество кодовых слов α_s, $s \in S$. Упомянутые вероятности, в свою очередь, определяются входящими в состав структуры частичного стирания вероятностями p_T.

Легко заметить, что рассмотренная схема «равномерного кодирования» не исчерпывает множества всех возможных протоколов, так как были приняты два упрощающих предположения. Во-первых, выбрасываемое Алисой слово не зависит от предыстории чтения с ленты, а во-вторых, выбрасываемые слова имеют одинаковую длину для всех символов $s \in S$. И, следовательно, если эти предположения отбросить, то естественным образом получается общее понятие протокола. В качестве соображения, обосновывающего рассмотрение также и неравномерного кода, скажем, что ожидается уменьшение средней длины выбрасываемого слова (и, следовательно, увеличение пропускной способности) в случае неравномерного распределения частот встречаемости символов алфавита S на входной ленте.

Определение 4. *Протокол — это пара (F, G), состоящая из функции поведения Алисы $F : S^* \to A^*$ и функции поведения Боба $G : B^* \to S \cup \{*, \Lambda\}$. Наложено ограничение: $G(\Lambda) = \Lambda$*

Замечание 1. *Следует обратить внимание, что одно и то же обозначение «Λ» используется как для «пустого символа», так и для пустых слов (т.е. слов длины 0), которые являются элементами множеств A^*, B^*, S^*. Конкретный его смысл всегда будет ясен из контекста.*

Представим сведения, относящиеся к интерпретации введенных выше функций поведения. Пусть Алиса только что прочитала с входной ленты очередной символ $s \in S$, предварительно уже считав слово $\hat{s} = s_1 ... s_m$. Тогда считаем, что Алиса выбрасывает слово $F(\hat{s}s)$. До первого чтения с ленты Алиса выбрасывает $F(\Lambda)$. Что касается Боба, то на каждом такте он получает некий символ $b \in B$. Получив указанный символ, он должен принять решение о том, что печатать на выходной ленте: или какой-нибудь символ из $s \in S \cup \{*\}$, или же ничего не печатать. Полагаем, что если $G(\beta) \in S \cup \{*\}$, то Боб и печатает $G(\beta)$. Иначе, т.е. если $G(\beta) = \Lambda$, то Боб ничего не печатает.

В целях удобства изложения определим также производные функции $\hat{F}$, $\hat{G}$:

Определение 5. *Пусть $\hat{s} = s_1 ... s_m$. Тогда полагаем:*
$\hat{F}(\hat{s}) = F(\Lambda)F(s_1)F(s_1 s_2)...F(s_1...s_m)$
Для слова $\beta = b_1 ... b_n$ аналогично:
$\hat{G}(\beta) = G(\Lambda)G(b_1)G(b_1 b_2)...G(b_1...b_n)$

При этом относительно конкатенации с «пустым символом» Λ принимается: $\hat{s}\Lambda = \hat{s}$, $\Lambda\hat{s} = \hat{s}$

В дальнейшем часто будет использоваться свойство функции $\hat{G}$, непосредственно очевидное из представленного определения:

Утверждение 1. *Пусть β_1 — префикс β_2. Тогда также $\hat{G}(\beta_1)$ — префикс $\hat{G}(\beta_2)$.*

3. Результаты

Распространим на общий случай упомянутое ранее требование корректности «отпечатать на выходной ленте то же самое содержание, каковое имеется изначально на входной, при этом, может быть, заменяя некоторые символы алфавита S на символ стирания $*$». Для его формализации понадобится определить на словах из $(S \cup \{*\})^*$ соответствующий частичный порядок.

Определение 6. *Для слов $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in (S \cup \{*\})^*$ полагаем $\hat{s}_1 \preceq \hat{s}_2$, если выполнено $|\hat{s}_1| = |\hat{s}_2|$, и слово $\hat{s}_1$ может быть получено из слова $\hat{s}_2$ посредством замены некоторых его символов на символ частичного стирания $*$.*

Определение 7. *Протокол (F, G) называется корректным, если для всех слов $\hat{s} \in S^*$, $\beta \in B^*$ из выполнения $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta$ следует выполнение $\hat{G}(\beta) \preceq \hat{s}$. В целях удобства дальнейшего изложения, если (F, G) — корректный протокол, то будем также говорить, что функция поведения Боба G согласована с функцией поведения Алисы F.*

Указанное выше условие корректности накладывается на все такие слова β, для которых найдется $\hat{s} \in S^*$ такое, что $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta$. Обозначим их множество как H_F.

Пусть дана произвольная функция поведения Алисы $F : S^* \to A^*$. Первый вопрос, рассматриваемый в настоящей работе, формулируется следующим образом: «существует ли для данной функции поведения Алисы F согласованная с ней функция поведения Боба G».

Предположим, что ответ на данный вопрос положителен. В этом случае таковых функций поведения Боба может быть несколько: т.е. могут иметься две функции G_1, G_2, согласованных с G.

На множестве согласованных с F функций возможно определить частичный порядок, означающий, что одно поведение «лучше» другого. Это означает, что «худшее» поведение отпечатывает на выходной ленте то же самое, что и «лучшее», заменяя, может быть, некоторые символы на символ стирания $*$. Выражаясь более формально, для предварительно зафиксированной F и согласованных с ней G_1, G_2 полагаем $G_1 \preceq G_2$, если для всех $\beta \in H_F$ выполнено $G_1(\beta) \preceq G_2(\beta)$.

Достаточно очевидно, что если имеется «лучшее» поведение, то для передачи информации следует использовать именно его, а не «худшее». Таким образом, вторым рассматриваемым вопросом является существование среди всех поведений Боба наилучшего, т.е. максимального по отношению $\preceq$.

Определение 8. *Функция поведения Алисы F называется правильной, если из выполнения $\hat{F}(\hat{s}_1) \mapsto \beta_1$, $\hat{F}(\hat{s}_2) \mapsto \beta_2$, β_1 — префикс β_2 следует выполнение $|\hat{s}_1| \leqslant |\hat{s}_2|$*

Выразим представляемые в настоящей работе результаты в виде следующих теорем:

Теорема 1. *Пусть (F, G) — корректный протокол. Тогда F — правильная функция.*

Теорема 2. *Пусть F — правильная функция. Тогда существует функция G^F_{best} такая, что:*
1) (F, G^F_{best}) — корректный протокол.
2) Пусть (F, G) — корректный протокол. Тогда для любого слова $\beta \in H_F$ выполнено $G(\beta) \preceq G^F_{best}(\beta)$.

Следствие 1. *Таким образом, для заданной функции поведения Алисы F существует согласованная с ней функция поведения Боба G тогда и только тогда, когда F правильна.*

Замечание 2. *В число результатов исследования входит не только лишь факт существования наилучшего протокола, то также и его конкретное однозначное описание. Однако, поскольку данное описание требует некоторых вспомогательных понятий и утверждений, то определение G^F_{best} будет представлено в подразделе 4.4.*

Замечание 3. *Упомянутое ранее «равномерное кодирование» является, очевидно, частным случаем корректного протокола.*

4. Доказательства

Изложим доказательства представленных результатов. Теорема 1 доказывается в подразделе 4.1. В подразделах 4.2, 4.3 представлены вспомогательные понятия и утверждения, необходимые для осуществленного в подразделе 4.4 построения функции поведения Боба G^F_{best}, а также проверки соответствующих свойств, указанных в условии теоремы 2.

Отдельно отметим, что в подразделах 4.2 — 4.4 функция поведения Алисы F зафиксирована, а также считается правильной.

4.1. Доказательство теоремы 1

Утверждение 2. *Пусть (F, G) — корректный протокол. Тогда F — правильная функция.*

Доказательство.
1. Зафиксируем слова $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in S^*$, для которых найдутся $\beta_1, \beta_2 \in B^*$ такие, что β_1 — префикс β_2, $\hat{F}(\hat{s}_1) \mapsto \beta_1$, $\hat{F}(\hat{s}_2) \mapsto \beta_2$. Согласно определению правильной функции, необходимо доказать выполнение $|\hat{s}_1| \leqslant |\hat{s}_2|$.
2. Так как (F, G) — корректный протокол, то $\hat{G}(\beta_1) \preceq \hat{s}_1$, $\hat{G}(\beta_2) \preceq \hat{s}_2$, откуда немедленно следует $|\hat{G}(\beta_1)| = |\hat{s}_1|$, $|\hat{G}(\beta_2)| = |\hat{s}_2|$.
3. Согласно утверждению 1, выполнение β_1 — префикс β_2 влечет за собой выполнение $\hat{G}(\beta_1)$ — префикс $\hat{G}(\beta_2)$. И, следовательно, $|\hat{G}(\beta_1)| \leqslant |\hat{G}(\beta_2)|$.
4. Сопоставляя выводы п.2 и п.3, получаем требуемое: $|\hat{s}_1| = |\hat{G}(\beta_1)| \leqslant |\hat{G}(\beta_2)| = |\hat{s}_2|$
□

Теорема 1 доказана.

4.2. Правильные функции и их свойства

Данный подраздел посвящен изучению свойств предварительно зафиксированной правильной функции F. В 4.2.1 определена функции длин l_F. В 4.2.2 введено понятие элементарного отрезка. Наконец, в 4.2.3 представлено разбиение множества H_F на непересекающиеся классы.

4.2.1. Функция l_F

От правильной функции F возможно абстрагировать целочисленную функцию длин l_F, определенную на словах из H_F.

Утверждение 3. *Пусть F — правильная функция поведения Алисы. Тогда корректно определена функция длин функция длин $l_F : H_F \to \mathbb{Z}_+$, для которой выполняется $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta \Rightarrow l_F(\beta) = |\hat{s}|$*

Доказательство.
Действительно, пусть $\hat{F}(\hat{s}_1), \hat{F}(\hat{s}_2) \mapsto \beta$. Тогда, согласно определению правильной функции, одновременно выполнено $|\hat{s}_1| \leqslant |\hat{s}_2|$ и $|\hat{s}_2| \leqslant |\hat{s}_1|$, т.е. выполнено $|\hat{s}_1| = |\hat{s}_2|$.

И, следовательно, для всех слов $\beta \in H_F$ значение $l_F(\beta)$ определено однозначно. □

Определенная таковым образом функция l_F является «возрастающей»:

Утверждение 4. *Пусть $\beta_1, \beta_2 \in H_F$, β_1 — префикс β_2. Тогда $l_F(\beta_1) \leqslant l_F(\beta_2)$*

Доказательство.
1. Пусть $\hat{F}(\hat{s}_1) \mapsto \beta_1$, $\hat{F}(\hat{s}_2) \mapsto \beta_2$.
2. Так как β_1 — префикс β_2, то $|\hat{s}_1| \leqslant |\hat{s}_2|$ согласно определению правильности для функции F.
3. Далее, применяя утверждение 3, получаем: $l_F(\beta_1) = |\hat{s}_1| \leqslant |\hat{s}_2| = l_F(\beta_2)$.
ч.т.д.
□

Установим также связь с поведением Боба, входящим в соответствующий корректный протокол.

Утверждение 5. *Пусть (F, G) — корректный протокол, $\beta \in H_F$. Тогда $|G(\beta)| = l_F(\beta)$*

Доказательство.
Действительно, найдется $\hat{s}$ такое, что $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta$. И, следовательно, $l_F(\beta) = |\hat{s}|$. По определению корректности протокола, $\hat{G}(\beta) \preceq \hat{s}$, а значит $|\hat{G}(\beta)| = |\hat{s}| = l_F(\beta)$ □

4.2.2. Элементарные отрезки

Слово β_1 будем называть строгим префиксом слова β_2, если β_1 — префикс β_2, но при этом $\beta_1 \neq \beta_2$.

Определение 9. *Пусть β_1 — строгий префикс β_2. Отрезок $(\beta_1, \beta_2]$ — это множество слов β таких, что β_1 — строгий префикс β, а β — префикс β_2*

Пусть теперь имеется множество слов $H \subseteq B^*$, а также определенная на данном множестве целочисленная функция $l : H \to \mathbb{Z}_+$

Определение 10. *Отрезок $(\beta_1, \beta_2]$ называется элементарным в контексте функции $l : H \to \mathbb{Z}_+$, если $\beta_1, \beta_2 \in H$, а также из $\beta' \in (\beta_1, \beta_2]$ и $\beta' \neq \beta_2$ следует $\beta' \notin H$.*

Элементарные отрезки делятся на классы в соответствии с тем, на какую величину возрастает соответствующая функция l на их протяжении.

Определение 11. *Элементарный отрезок в контексте функции l называется n - элементарным, если выполнено $l(\beta_2) = l(\beta_1) + n$*

Представим также некоторые утверждения технического характера, на которые будут ссылаться дальнейшие рассуждения.

Утверждение 6. *Пусть имеются два отрезка $(\beta_1, \beta_2], (\beta_3, \beta_4]$ такие, что $\beta_2 \in (\beta_3, \beta_4]$. Пусть отрезок $(\beta_1, \beta_2]$ — элементарен в контексте $l : H \to \mathbb{Z}_+$, а также $\beta_3, \beta_4 \in H$. Тогда выполнено $(\beta_1, \beta_2] \subseteq (\beta_3, \beta_4]$*

Доказательство.
1. По условию, β_1 — префикс β_2, β_2 — префикс β_4. Следовательно, β_1 — префикс β_4.
2. По условию также β_3 — префикс β_4, откуда следует что или β_1 — строгий префикс β_3, или β_3 — префикс β_1.
3. Предположим, что β_1 — строгий префикс β_3. Так как по условию β_3 — строгий префикс β_2, то это означает, что $\beta_3 \in (\beta_1, \beta_2]$ и $\beta_3 \neq \beta_2$.
4. Однако, $\beta_3 \in H$, что противоречит элементарности отрезка $(\beta_1, \beta_2]$. Таким образом, предположение предыдущего пункта ложно, и, следовательно, β_3 — префикс β_1.
5. Зафиксируем теперь слово $\beta' \in (\beta_1, \beta_2]$. Следует доказать, что выполнено $\beta' \in (\beta_3, \beta_4]$
6. β_1 — строгий префикс β', β_3 — префикс β_1 (п.4). Следовательно, β_3 — строгий префикс β'.
7. β' — префикс β_2, β_2 — префикс β_4 (см. п.1). Следовательно, β' — префикс β_4.
8. Сопоставляя выводы п.6 и п.7, получаем требуемое.
□

Утверждение 7. *Пусть для слов $\hat{s}s \in S^*$, $\beta \in B^*$ выполнено $\hat{F}(\hat{s}s) \mapsto \beta$. Тогда существует β' такое, что $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta'$, β' — строгий префикс β.*

Доказательство.
1. В первую очередь заметим, что $\hat{F}(\hat{s}s) = \hat{F}(\hat{s})F(\hat{s}s)$. Далее будем обозначать $\alpha_1 = \hat{F}(\hat{s})$, $\alpha_2 = F(\hat{s}s)$. Примем также обозначение для длин: $|\alpha_1| = k_1$, $|\alpha_2| = k_2$
2. Так как $\alpha_1\alpha_2 \mapsto \beta$, то $|\beta| = k_1 + k_2$. Соответственно, β разделяется на два слова: $\beta = \beta'\beta''$, причем $|\beta'| = k_1$, $|\beta''| = k_2$
3. При этом достаточно очевидно, что $\hat{F}(\hat{s}) = \alpha_1 \mapsto \beta'$, $F(\hat{s}s) = \alpha_2 \mapsto \beta'$.
4. Предположим, что $\beta' = \beta$. Тогда $\hat{F}(\hat{s}), \hat{F}(\hat{s}s) \mapsto \beta$. Так как слово β — префикс самого себя, то из правильности F заключаем, что выполнено $|\hat{s}| + 1 = |\hat{s}s| \leqslant |\hat{s}|$. Противоречие. □

4.2.3. Разбиение множества H_F

Изучим теперь вопрос о том, какие элементарные отрезки имеются в контексте введенной выше функции $l_F : H_F \to \mathbb{Z}_+$.

Утверждение 8. *В контексте функции $l_F : H_F \to \mathbb{Z}_+$ элементарные отрезки могут быть или 0-элементарными, или 1-элементарными.*

Доказательство.
1. Пусть $(\beta_1, \beta_2]$ — n-элементарный отрезок в контексте l_F. Согласно утверждению 4, l_F неубывает, т.е. выполнено $n = l_F(\beta_2) - l_F(\beta_1) \geqslant 0$.
2. Так как $\beta_1, \beta_2 \in H_F$, то найдутся такие слова $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in S^*$, что $\hat{F}(\hat{s}_1) \mapsto \beta_1$, $\hat{F}(\hat{s}_2) \mapsto \beta_2$. И, следовательно, $|\hat{s}_2| = l_F(\beta_2) = l_F(\beta_1) + n = |\hat{s}_1| + n$.
3. Предположим теперь, что $n \geqslant 2$. Немедленно получаем, что $|\hat{s}_2| \geqslant 2$
4. И, следовательно, возможно положить $\hat{s}_2 = \hat{s}'_2 s_2$, $s_2 \in S$. Согласно утверждению 7, найдется слово β' такое, что $\hat{F}(\hat{s}'_2) \mapsto \beta'$, β' — строгий префикс β_2. Кроме того, $l_F(\beta') = |\hat{s}'_2| = |\hat{s}_2| - 1 = |\hat{s}_1| + n - 1 > |\hat{s}_1| = l_F(\beta_1)$.
5. Слова β_1, β' оба суть префиксы β_2. Следовательно, возможны два случая: или β_1 — строгий префикс β', или β' — префикс β_1.
6. Рассмотрим первый случай: β_1 — строгий префикс β'. Тогда верно $\beta' \in (\beta_1, \beta_2]$. Так как данный отрезок элементарен, а $\beta' \in H_F$, то выполнено $\beta' = \beta_2$, что противоречит п.4.
7. Теперь рассмотрим второй случай: β' — префикс β_1. Тогда, вновь применяя утверждение 4, получаем $l_F(\beta') \leqslant l_F(\beta_1)$, что также противоречит выводу из п.4.
8. Полученные в обоих случаях противоречия показывают, что предположение п.3 ложно. И, следовательно, или $n = 0$, или $n = 1$.
□

Представленное утверждение об элементарных отрезках позволяет разбить множество H_F на три класса. Введем для данных классов следующие обозначения:
$H_F^{00} = \{\beta \in H_F | \hat{F}(\Lambda) \mapsto \beta\}$
$H_F^{0} = \{\beta \in H_F | \beta$ — конец 0-элементарного отрезка в контексте $l_F\}$
$H_F^{1} = \{\beta \in H_F | \beta$ — конец 1-элементарного отрезка в контексте $l_F\}$

Утверждение 9. $H_F = H_F^{00} \sqcup H_F^0 \sqcup H_F^1$

Доказательство.
I. $H_F = H_F^{00} \cup H_F^0 \cup H_F^1$
1. Пусть дано некое $\beta \in H_F$. Тогда найдется $\hat{s}$ такое, что $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta$.
2. Если $\hat{s} = \Lambda$, то это означает, что $F(\Lambda) = \hat{F}(\Lambda) \mapsto \beta$, т.е. $\beta \in H_F^{00}$.
3. В случае, если $\hat{s} = \hat{s}'s$, то согласно утверждению 7 существует $\beta' \in H_F$ — строгий префикс β такой, что $\hat{F}(\hat{s}') \mapsto \beta'$. И, следовательно, среди префиксов β существует и максимальный лежащий в H_F префикс β''.
4. А значит, слово β является концом элементарного в контексте l_F отрезка $(\beta'', \beta]$. Согласно утверждению 8, он может быть только 0-элементарным или 1-элементарным, т.е. $\beta \in H_F^0 \cup H_F^1$
5. Таким образом, осталось только лишь показать, что множества H_F^0, H_F^1, H_F^{00} попарно не пересекаются.
II. $H_F^0 \cap H_F^1 = \emptyset$
1. Предположим, что найдется слово $\beta \in H_F^0 \cap H_F^1$. Тогда таковое β является концом двух элементарных отрезков $(\beta_1, \beta]$ и $(\beta_2, \beta]$. Также отметим, что так как это пара, состоящая из 0-элементарного и 1-элементарного отрезков, то $\beta_1 \neq \beta_2$. Также по определению отрезка $\beta_1, \beta_2 \neq \beta$.

2. И, следовательно, или β_1 — строгий префикс β_2, или β_2 — строгий префикс β_2. В первом случае выполнено $\beta_2 \in (\beta_1, \beta]$, а во втором $\beta_1 \in (\beta_2, \beta]$. Так как отрезки элементарны, то оба случая невозможны. Таким образом, $H_F^0 \cap H_F^1 = \emptyset$.
III. $H_F^{00} \cap (H_F^0 \cup H_F^1) = \emptyset$
1. Предположим теперь, что существует слово $\beta \in H_F^{00} \cap (H_F^0 \cup H_F^1)$. Это означает, что $\hat{F}(\Lambda) \mapsto \beta$, а также что найдется слово β' — строгий префикс β такой, что $(\beta', \beta]$ — элементарный отрезок в контексте l_F.
2. Тогда есть слово $\hat{s}$, для которого $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta'$. Согласно определению правильной функции, получаем: $|\hat{s}| \leqslant |\Lambda| = 0$. Таким образом, $\hat{F}(\Lambda) \mapsto \beta'$.
3. Из $\hat{F}(\Lambda) \mapsto \beta$, $\hat{F}(\Lambda) \mapsto \beta'$ следует $|\beta| = |\beta'| = |\hat{F}(\Lambda)|$. И, следовательно, $\beta' = \beta$, что противоречит п.III.1.
4. Таким образом, $H_F^{00} \cap H_F^0 = \emptyset$, $H_F^{00} \cap H_F^1 = \emptyset$. Вместе с выводом II это и означает, что множества H_F^0, H_F^1, H_F^{00} попарно не пересекаются.

□

Установим также связь между множеством H_F^1 и значениями функции l_F.

Утверждение 10. *Каждое слово $\beta \in H_F$ имеет ровно $l_F(\beta)$ префиксов, лежащих в H_F^1.*

Доказательство.
1. Пусть $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m = \beta$ — возрастающая последовательность, состоящая из всех префиксов слова β, лежащих в H_F.
2. Тогда $(\beta_0, \beta_1], ..., (\beta_{m-1}, \beta_m]$ — элементарные отрезки в контексте функции l_F. Будем считать, что среди них имеется n 1-элементарных и $m-n$ 0-элементарных. Среди слов $\beta_0, \beta_1 ... \beta_m$, таким образом, имеется n элементов множества H_F^1.
3. Согласно утверждению 9, так как β_0 не является концом какого-либо элементарного отрезка, то $\beta_0 \in H_F^{00}$, т.е. $\hat{F}(\Lambda) \mapsto \beta_0$. Откуда немедленно следует $l_F(\beta_0) = 0$
4. Подсчитаем: $l_F(\beta) = l_F(\beta_m) - l_F(\beta_0) = l_F(\beta_m) - l_F(\beta_{m-1}) + ... + (l_F(\beta_1) - l_F(\beta_0)) = n$. Действительно, если $(\beta_i, \beta_{i+1}]$ — 1-элементарный отрезок, то $l_F(\beta_{i+1}) - l_F(\beta_i) = 1$. В противном случае, т.е. если данный отрезок 0-элементарен, то $l_F(\beta_{i+1}) - l_F(\beta_i) = 0$

□

4.3. Связанные и приписанные символы

Изучим вопрос о том, какие символы на заданном слове β может печатать функция поведения Боба G, согласованная с функцией поведения Алисы F.

Определение 12. *Будем говорить, что со словом $\beta \in B^*$ связан символ $s \in S$, если найдутся слова $\beta_1, \beta_2 \in B^*$, $\hat{s} \in S^*$ такие, что β_1 — строгий префикс β_2, $\beta' \in (\beta_1, \beta_2]$, $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta_1$, $\hat{F}(\hat{s}s) \mapsto \beta_2$*

Определение 13. *Пусть дано некоторое слово $\beta \in B^*$. Определим для него приписанный символ из множества $S \cup \{*, \Lambda\}$ в соответствии со следующими правилами:*

1) Если с β не связан никакой символ, то считаем, что данному слову приписан символ Λ.

2) Если с β связан единственный символ $s \in S$, то считаем, что данному слову этот же символ s и приписан.

3) Если с β связаны хотя бы два различных символа $s_1, s_2 \in S$, то считаем, что данному слову приписан символ $*$

Установим связь представленных понятий с понятием элементарного отрезка.

Утверждение 11. *Пусть $(\beta_1, \beta_2]$ — элементарный отрезок в контексте l_F и с β_2 связан символ $s \in S$. Тогда данный символ s связан со всеми словами из этого элементарного отрезка.*

Доказательство.
1. По определению, найдутся слова $\hat{s} \in S^*$, β_3, β_4 такие, что β_3 — префикс β_4, $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta_3$, $\hat{F}(\hat{s}s) \mapsto \beta_4$, $\beta_2 \in (\beta_3, \beta_4]$. Отметим также, что символ s связан с каждым словом из отрезка $(\beta_3, \beta_4]$.
2. Согласно утверждению 6, из $\beta_2 \in (\beta_3, \beta_4]$ и элементарности $(\beta_1, \beta_2]$ вытекает включение $(\beta_1, \beta_2] \subseteq (\beta_3, \beta_4]$. И, следовательно, символ s связан со всеми словами из $(\beta_1, \beta_2]$.
□

Утверждение 12. *Пусть $(\beta_1, \beta_2]$ — элементарный отрезок в контексте l_F, концу отрезка β_2 приписан символ $*$. Тогда данный символ $*$ приписан всем словам из отрезка $(\beta_1, \beta_2]$*

Доказательство.
Действительно, так как β_2 приписан символ $*$, то с данным словом связаны два различных символа $s_1, s_2 \in S$. Которые, согласно утверждению 11, связаны со всеми словами из $(\beta_1, \beta_2]$. Следовательно, всем словам из данного отрезка приписан символ $*$. □

Приписанный слову β символ задает соответствующие ограничения на возможные значения функции поведения Боба на данном слове.

Утверждение 13. *Пусть (F, G) — корректный протокол, а также дано некое слово β, для которого $G(\beta) \neq \Lambda$. Тогда выполнено следующее:*

1) Если со словом β связан некий символ $s \in S$, то или $G(\beta) = s$, или $G(\beta) = *$.

2) Если слову β приписан символ $*$, то $G(\beta) = *$

Доказательство.
1. Рассмотрим сначала случай, когда со словом β связан символ s. По определению, это означает, что найдутся такие слова $\hat{s} \in S^*$, $\beta_1, \beta_2 \in B^*$, что β_1 — строгий префикс β_2, $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta_1$, $\hat{F}(\hat{s}s) \mapsto \beta_2$, $\beta \in (\beta_1, \beta_2]$.
2. Так как по условию (F, G) — правильный протокол, то применяя утверждение 5, а также основное свойство функции l_F, выраженное в утверждении 3, получаем: $|\hat{G}(\beta_1)| = l_F(\beta_1) = |\hat{s}|$, $|\hat{G}(\beta_2)| = l_F(\beta_2) = |\hat{s}s|$. И, следовательно, $|\hat{G}(\beta_2)| = |\hat{G}(\beta_1)| + 1$
3. Так как β_1 — строгий префикс β_2, то согласно утверждению 1 $\hat{G}(\beta_1)$ — префикс $\hat{G}(\beta_2)$. Таким образом, $\hat{G}(\beta_2) = \hat{G}(\beta_1)s'$, причем для символов s, s', рассматриваемых как слова длины 1, выполнено $s' \preceq s$, т.е. $s' \in \{s, *\}$.
4. Следовательно, функция G печатает на отрезке $(\beta_1, \beta_2]$ ровно один раз, причем печатает символ s'. Так как по условию $G(\beta) \neq \Lambda$, то $G(\beta) = s'$. Т.е. или $G(\beta) = s$, или $G(\beta) = *$.
5. Пусть теперь слову β приписан символ $*$. Это означает, что с данным словом связаны два различных символа $s_1, s_2 \in S$. Применяя уже доказанный пункт 1), получаем, что $G(\beta) = s'$, где $s' \in \{s_1, *\} \cap \{s_2, *\}$. Т.е. $G(\beta) = *$.
□

Утверждение 14. *Пусть $\beta \in H_F^1$. Тогда с этим словом β связан хотя бы один символ $s \in S$. И, следовательно, β не может быть приписан «пустой символ» Λ.*

Доказательство.
1. Пусть $(\beta', \beta]$ — 1-элементарный отрезок, концом которого является β. Соответственно, $\beta', \beta \in H_F$, $l_F(\beta) = l_F(\beta') + 1 \geqslant 1$.
2. Пусть также $\hat{s} \in S^*$ такое слово, что $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta$. Тогда $|\hat{s}| = l_F(\beta) \geqslant 1$, и, следовательно, $\hat{s} = \hat{s}'s$, $s \in S$.

3. Используя утверждение 7, установим, что найдется слово β_0 такое, что β_0 — строгий префикс β, $\hat{F}(\hat{s}') \mapsto \beta_0$.
4. Таким образом, $\hat{F}(\hat{s}') \mapsto \beta_0$, $\hat{F}(\hat{s}'s) \mapsto \beta$, β_0 — строгий префикс β, $\beta \in (\beta_0, \beta]$. Согласно определению, это означает, что слову β приписан символ s.

□

4.4. Построение G^F_{best}

В данном подразделе представим построение функции поведения Боба G^F_{best} и проверим её свойства, указанные в формулировке теоремы 2.

Определение 14. *Определим функцию G^F_{best} следующим образом. Если $\beta \in H^1_F$, то полагаем $G^F_{best}(\beta) = s$, где (см. утверждение 14) $s \in S \cup \{*\}$ — символ, приписанный β. В случае, если $\beta \notin H^1_F$, полагаем $G^F_{best}(\beta) = \Lambda$.*

Замечание 4. *Отдельно отметим, что так как пустое слово Λ не является концом какого-либо отрезка, то, согласно определению множества H^1_F, $\Lambda \notin H^1_F$. Таким образом, $G^F_{best}(\Lambda) = \Lambda$, т.е. пара (F, G^F_{best}) удовлетворяет ограничению, наложенному в соответствии с определением на понятие протокола.*

4.4.1. Проверка условия пункта 1) теоремы 2

Утверждение 15. *Пусть $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta$. Тогда $|\hat{G}^F_{best}(\beta)| = |\hat{s}|$.*

Доказательство.
Действительно, согласно утверждению 10, префиксов слова β, лежащих в H^1_F, т.е. именно тех префиксов, на которых печатает функция G^F_{best}, имеется $l_F(\beta) = |\hat{s}|$. И, следовательно, $|\hat{G}^F_{best}(\beta)| = |\hat{s}| = l_F(\beta)$. □

Утверждение 16. *(F, G^F_{best}) — корректный протокол.*

Доказательство.
1. Зафиксируем слова $\hat{s} \in S^*$, $\beta \in B^*$ такие, что $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta$. Согласно определению корректного протокола, необходимо доказать выполнение $\hat{G}^F_{best}(\beta) \preceq \hat{s}$.
2. Применяя утверждение 15, получаем $|\hat{G}^F_{best}(\beta)| = |\hat{s}|$. Таким образом, посимвольно возможно записать: $\hat{s} = s_1...s_m$, $\hat{G}^F_{best}(\beta) = s'_1...s'_m$. Предположим теперь, что $\hat{G}^F_{best}(\beta) \preceq \hat{s}$ не выполнено.
3. Это возможно, только лишь когда найдется i-я позиция такая, что $s'_i \not\preceq s_i$ для символов s_i, s'_i, рассматриваемых как слова длины 1. Так как $s_i \in S$, то из этого следует, что $s'_i \neq *$, а также $s'_i \neq s_i$.
4. Положим $\hat{s}_1 = s_1...s_i$. Установим существование слова β_1 такого, что $\hat{F}(\hat{s}_1) \mapsto \beta_1$, β_1 — строгий префикс β, последовательно применяя необходимое количество раз утверждение 7.
5. Вновь используя утверждение 15, установим выполнение $|\hat{G}^F_{best}(\beta_1)| = |\hat{s}_1|$. С другой стороны, так как β_1 — префикс β, то и $\hat{G}^F_{best}(\beta_1)$ — префикс $\hat{G}^F_{best}(\beta)$ (см. утверждение 1). И, следовательно, $\hat{G}^F_{best}(\beta_1) = s'_1...s'_i$.
6. Определим слово $\hat{s}'_1$ следующим образом. Если $i \neq 0$, то $\hat{s}'_1 = s_1...s_{i-1}$, иначе $\hat{s}'_1 = \Lambda$. Отметим, что в обоих случаях $\hat{s}_1 = \hat{s}_1 s_i$.
7. Ещё раз применяя утверждение 7, заключаем, что существует слово β'_1 такое, что β'_1 — строгий префикс β_1, и $\hat{F}(\hat{s}'_1) \mapsto \beta'_1$.
8. В очередной раз сославшись на утверждение 15, а также используя утверждение 1, получаем: $|\hat{G}^F_{best}(\beta'_1)| = |\hat{s}'_1| = |\hat{s}_1| - 1$, $\hat{G}^F_{best}(\beta'_1)$ — префикс $\hat{G}^F_{best}(\beta_1)$. И, следовательно, $\hat{G}^F_{best}(\beta'_1) = s'_1...s'_{i-1}$. Запишем вывод: $\hat{G}^F_{best}(\beta_1) = \hat{G}^F_{best}(\beta'_1)s'_i$.

9. Таким образом, так как $\hat{F}(\hat{s}'_1) \mapsto \beta'_1$, $\hat{F}(\hat{s}'_1 s_i) \mapsto \beta_1$, β'_1 — строгий префикс β_1, то со всеми словами из отрезка $(\beta'_1, \beta_1]$ связан символ s_i.
10. С другой стороны, так как $\hat{G}^F_{best}(\beta_1) = \hat{G}^F_{best}(\beta'_1)s'_i$, то G^F_{best} печатает символ s'_i на некотором слове $\beta_0 \in (\beta_1, \beta_2]$, а на всех остальных словах из этого отрезка ничего не печатает. Применяя пункт 1) утверждения 13, получаем, что слову β_0 приписан символ s'_i.
11. Одновременно слову β_0 приписан символ s'_i и с ним же связан символ s_i, причем $s_i \neq s'_i$, $s_i, s'_i \in S$. Согласно определению приписанного символа, это невозможно.
□

4.4.2. Проверка условия пункта 2) теоремы 2

Предварительно установим, что если на некотором отрезке функция G^F_{best} отпечатывает символ стирания $*$, то и любая согласованная с F функция G также отпечатывает на данном отрезке символ стирания.

Утверждение 17. *Пусть (F, G) — корректный протокол, $\beta_0, \beta_1 \in H_F$ — слова такие, что β_0 — строгий префикс β_1, а также выполнено $\hat{G}^F_{best}(\beta_1) = \hat{G}^F_{best}(\beta_0)*$. Тогда $\hat{G}(\beta_1) = \hat{G}(\beta_0)*$*

Доказательство.
1. Согласно утверждению 16, протокол (F, G^F_{best}) — корректен. Из корректности протоколов (F, G), (F, G^F_{best}) в соответствии с утверждением 5 следует выполнение $|\hat{G}(\beta_0)| = |\hat{G}^F_{best}(\beta_0)| = l_F(\beta_0)$, $|\hat{G}(\beta_1)| = |\hat{G}^F_{best}(\beta_1)| = l_F(\beta_1)$.
2. Таким образом, выполнено, $|\hat{G}(\beta_1)| - |\hat{G}(\beta_0)| = l_F(\beta_1) - l_F(\beta_0) = |\hat{G}^F_{best}(\beta_1)| - |\hat{G}^F_{best}(\beta_0)| = |\hat{G}^F_{best}(\beta_0) * | - |\hat{G}^F_{best}(\beta_0)| = 1$.
3. Таким образом, обе функции G, G^F_{best} печатают ровно один раз на отрезке $(\beta_0, \beta_1]$.
4. Полагаем далее, что $G^F_{best}(\beta) = *$ на слове $\beta \in (\beta_0, \beta_1]$. По определению функции G^F_{best}, это означает, что β является концом некоторого 1-элементарного отрезка $(\beta', \beta]$, причем слову β приписан символ $*$.
5. Так как отрезок $(\beta', \beta]$ элементарен и $\beta \in (\beta_0, \beta_1]$, то, применяя утверждение 6, получаем $(\beta', \beta] \subseteq (\beta_0, \beta_1]$.
6. Так как $(\beta', \beta]$ — элементарный отрезок, то $\beta', \beta \in H_F$. Вновь применяя утверждение 5, получаем $\hat{G}(\beta) - \hat{G}(\beta') = l_F(\beta) - l_F(\beta') = 1$. Таким образом, функция G печатает ровно один раз на отрезке $(\beta', \beta]$. Пусть она печатает на слове $\beta'' \in (\beta', \beta] \subseteq (\beta_0, \beta_1]$.
7. И, следовательно, также можно записать $\hat{G}(\beta_1) = \hat{G}(\beta_0)G(\beta'')$. Таким образом, осталось лишь доказать, что $G(\beta'') = *$.
8. Так как $(\beta, \beta']$ — элементарный отрезок, а слову β приписан символ $*$, то согласно утверждению 12, символ $*$ приписан всем словам из данного элементарного отрезка, в том числе и слову $\beta'' \in (\beta, \beta']$.
9. Таким образом, слову β'' приписан символ $*$, а также $G(\beta'') \neq \Lambda$. Сославшись на пункт 2) утверждения 13, получаем $G(\beta'') = *$.
□

Утверждение 18. *Пусть (F, G) — корректный протокол, $\beta \in H_F$. Тогда $\hat{G}(\beta) \preceq \hat{G}^F_{best}(\beta)$*

Доказательство.
1. Так как $\beta \in H_F$, то найдется $\hat{s} \in S^*$ такое, что $\hat{F}(\hat{s}) \mapsto \beta$. Запишем посимвольно: $\hat{s} = s_1 ... s_m$.
2. Протоколы (F, G) и (F, G^F_{best}) корректны, следовательно, $\hat{G}^F_{best}(\beta), \hat{G}(\beta) \preceq \hat{s}$. Также запишем посимвольно: $\hat{G}^F_{best}(\beta) = s'_1 ... s'_m$, $\hat{G}(\beta) = s''_1 ... s''_m$, где $s_k, s'_k \in S \cup \{*\}$ при $k = 1...m$. Из данных соотношений следует, что для всех $k = 1...m$ $s'_k, s''_k \in \{s_i, *\}$.

3. Предположим теперь, что $\hat{G}(\beta) \preceq \hat{G}^F_{best}(\beta)$ не выполняется. Это возможно, только если найдется i-ая позиция такая, что $s''_i \not\preceq s_i$ для символов s'_i, s''_i, рассматриваемых как слова длины 1. Откуда следует, что $s''_i = s_i \neq *$, $s'_i = *$.
4. Применяя утверждение 6, установим, что найдутся слова β_0, β_1 такие, что они оба — строгие префиксы β, β_0 — строгий префикс β_1, $\hat{F}(s_1 ... s_{i-1}) \mapsto \beta_0$, $\hat{F}(s_1 ... s_{i-1} s_i) \mapsto \beta_1$. Отдельно отметим, что в случае $i = 1$ под словом $s_1 ... s_{i-1}$ (и, аналогично, словами $s'_1 ... s'_{i-1}$, $s''_1 ... s''_{i-1}$) понимается пустое слово Λ.
5. Таким образом, $\beta_0, \beta_1 \in H_F$. Применяя утверждение 5, получаем $|\hat{G}(\beta_0)| = |\hat{G}^F_{best}(\beta_0)| = l_F(\beta_0) = |s_1 ... s_{i-1}| = i - 1$, а также $|\hat{G}(\beta_1)| = |\hat{G}^F_{best}(\beta_1)| = l_F(\beta_1) = |s_1 ... s_i| = i$
6. И, следовательно, возможно записать: $\hat{G}^F_{best}(\beta_0) = s'_1 ... s'_{i-1}$, $\hat{G}^F_{best}(\beta_1) = s'_1 ... s'_{i-1} s'_i = \hat{G}^F_{best}(\beta_0) s'_i$, $\hat{G}(\beta_0) = s''_1 ... s''_{i-1}$, $\hat{G}(\beta_1) = s''_1 ... s''_{i-1} s''_i = \hat{G}(\beta_0) s''_i$.
7. Таким образом, $\hat{G}^F_{best}(\beta_1) = \hat{G}^F_{best}(\beta_0)*$, так как $s'_i = *$. Согласно утверждению 17, отсюда следует $\hat{G}(\beta_1) = \hat{G}(\beta_0)*$, что неверно, так как $s''_i \neq *$. Противоречие означает, что предположение п.3 ложно, и, следовательно, выполняется $\hat{G}(\beta) \preceq \hat{G}^F_{best}(\beta)$.

□

Теорема 2 доказана.

5. Заключение

В настоящей работе решены две связанные между собой задачи. Во-первых, указано необходимое и достаточное условие существования функции поведения Боба G, согласованной с заданной функцией поведения Алисы F. В соответствии с доказанной в настоящей работе теоремой 1, такое условие есть ничто иное как условие правильности, представленное в определении 8. Во-вторых, установлено, что среди всех возможных G, согласованных с F, имеется «наилучшая функция», что позволяет исключить из рассмотрения все альтернативные варианты. Таковая функция, в соответствии с определением 14, имеет описание вида «печатать на конце 1-элементарного отрезка приписанный символ». Таким образом, было произведено «уменьшение количества степеней свободы», т.е. представлено однозначное построение поведения Боба по заданному поведению Алисы. Следовательно, в дальнейшем, само понятие протокола может быть переопределено следующим образом: функция F заведомо полагается правильной, а протоколом считается пара (F, G^F_{best}).

Отметим далее, что поведение Алисы имеет автоматное описание. Представим необходимые пояснения. Заметим, что функция поведения F детерминирована, и, следовательно, может быть представлена в виде (не обязательно конечного) абстрактного автомата. Действительно, рассмотрим множество слов S^* как множество состояний данного автомата, сам алфавит S примем как алфавит входных символов. В качестве выходного алфавита рассматривается множество слов A^*. Принимая символ $s \in S$, автомат из состояния $\hat{s}$ переходит в состояние $\hat{s}s$ и выбрасывает слово $F(\hat{s}s)$. Подвергнем полученный автомат преобразованию, отождествляющему его неотличимые состояния. Полученный приведенный автомат и является альтернативным описанием поведения Алисы. Интерес представляют именно ограниченно-детерминированные функции, т.е. те, которые представимы указанным образом в виде конечного автомата. Отдельно отметим, что в случае конечного числа состояний число слов, которые может выбрасывать Алиса, также конечно, и, таким образом, соответствующий автомат имеет конечный выходной алфавит.

Обозначим задачи дальнейших исследований. Во-первых, пусть дана некая ограниченно-детерминированная функция F. Требуется по виду соответствующего конечного автомата определить, является ли соответствующее поведение Алисы пригодным для построения протокола, т.е. является ли F правильной функцией. Таким образом, возникает задача построения алгоритма, проверяющего указанное условие правильности.

Во-вторых, пусть теперь F — ограниченно-детерминированная функция, про которую уже известно, что она правильна. Далее, таким образом, требуется построить соответствующую функцию поведения Боба G^F_{best}, т.е. требуется построить соответствующий автомат. Сделаем также пояснения относительно автоматного представления поведения Боба. Входным алфавитом является алфавит B, выходным — множество $S \cup \{*, \Lambda\}$. Выходной функцией является соответствующая функция поведения, т.е. G^F_{best}. Таким образом, во-первых, следует доказать, что если поведение Алисы задается конечным автоматом, то автомат, задающий соответствующее ему поведение Боба, также имеет конечное число состояний. Во-вторых, требуется привести в явном виде алгоритм, строящий второй из указанных автоматов по первому из них, в соответствии с представленным в настоящей работе описанием G^F_{best}.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галатенко А. В. О скрытых каналах и не только // Jet Info. 2002. Т. 14, № 114. С. 12 – 20.
2. Епишкина А. В., Когос К. Г. Об оценке пропускной способности скрытых информационных каналов, основанных на изменении длин передаваемых пакетов // Информация и космос. 2015. № 4. С. 78 — 82.
3. Казаков И. Б. Кодирование в скрытом канале перестановки пакетов // Программная инженерия. 2018. Т. 9, № 4. С. 163 — 173.
4. Казаков И. Б. Структура графа на множестве перестановок S_n, задаваемая моделью ошибки в скрытом канале перестановки пакетов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 22, № 2. С. 53 — 79.
5. Казаков И. Б. Разностный код и протокол циклической поблочной передачи в скрытом канале по памяти // Программная инженерия. 2019. Т. 10, № 5. С. 204 – 218.
6. Казаков И. Б. Критерий надежности канала с запрещениями // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2019. Т.23, № 2. С. 33 – 55.
7. Казаков И. Б. Передача информации в каналах, задаваемых структурами частичного стирания. Часть 1 // Программная инженерия. 2020. Т.11, № 5. С. 277 – 284.
8. Казаков И. Б. Передача информации в каналах, задаваемых структурами частичного стирания. Часть 2 // Программная инженерия. 2020. Т.11, № 6. С. 322 – 329.
9. Тимонина Е. Е. Скрытые каналы (обзор) // Jet Info. 2002. Т. 14, № 114. С. 3 – 11.
10. Ahsan K., Kundur D., Practical data hiding in TCP/IP // In proceedings of: Multimedia and Security Workshop at ACM Multimedia. 2002.
11. Berk, V., Giani A., Cybenko G. Detection of covert channel encoding in network packet delays // Technical report TR2005-536. 2005. 11 p.
12. Bovy C.J., Mertodimedjo H.T., Hooghiemstra G., Uijterwaal H., Mieghem P. Analysis of end-to-end delay measurements in Internet // Proc. 3rd Int. Workshop on Passive and Active Network Measurement. 2002. P. 1 – 8
13. Gallager R. G., Information Theory and Reliable Communications // New York: John Wiley and Sons Inc., 1968. 604 p.
14. Handel T., Sandford M. Hiding data in the OSI network model // Proc. of the first International workshop on information hiding. 1996. P. 23 – 38

15. Lampson B. W. A note on the confinement problem // Communications of ACM. 1973. Vol. 16, N. 10. P. 613 — 615.

16. Lipner S. B. A Comment on the Confinement Problem // Proceedings of the Fifth ACM Symposium on Operating Systems Principles. 1975. vol.9, no. 5. pp. 192 — 196.

17. McFarland J. Covert Channels: An Overview // Preprint. 2017.

18. Murdoch S., Zielinski P. Covert Channels for Collusion in Online Computer Games // IH'04: Proceedings of the 6th international conference on Information Hiding. 2004. pp. 355–369.

19. Salwan N., Singh S., Arora S., Singh A. An Insight to Covert Channels // arXiv:1306.2252. 2013.

20. Sellke S. H., Wang C. C., Bagchi S., Shroff N. B. Covert TCP/IP timing channels: theory to implementation // Proc. of the twenty-eighth Conference on computer communications. 2009. P. 2204 – 2212.

21. Wendzel S., Zander S., Fechner B., Herdin C. Pattern-Based Survey and Categorization of Network Covert Channel Techniques // ACM Comput. Surv. 2015. vol. 47, pp. 50:1 – 50:26.

22. Yao L., Zi X., Pan L., Li J. A study of on/off timing channel based on packet delay distribution // Computers and security. 2009. Vol. 28. No. 8. P. 785 – 794.

23. Zander S., Armitage G., Branch P. Covert channels in the IP time to live field // Proc. of the 2006 Australian telecommunication networks and applications conference. 2006. pp. 298 – 302.

24. Zander S., Armitage G., Branch P. A survey of covert channels and countermeasures in computer network protocols // IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2007. vol. 9, pp. 44 – 57.

25. Zander S., Armitage G., Branch P. Covert channels in multiplayer first person shooter online games // Proc. 33rd IEEE Conf. LCN. 2008. pp. 215 – 222.

REFERENCES

1. Galatenko, A. V. 2002, «On covert channels and not only», Jet Info, vol. 14, no. 114. pp. 12 – 20.

2. Epishkina, A. V. & Kogos, K. G. 2015, «On assessing throughput capacity of covert information channels by measuring the length of packets transmitted», Informaciya i kosmos, no. 4, pp. 78 — 82

3. Kazakov, I. B. 2018, «Coding in a covert channel of data packages' permutations», Programmnaya Ingeneria, vol. 9, no. 4, pp. 163 — 173

4. Kazakov, I. B. 2018, «The structure of a graph induced on the set of permutations Sn by an error model of a covert channel based on packet permutations», Intelligent systems. Theory and applications, vol. 22, no. 2, pp. 53 – 81

5. Kazakov, I. B. 2019, «Difference code and a protocol for cyclic blockwise transmission in a memory-based covert channel», Programmnaya Ingeneria, vol. 10, no. 5, pp. 204 — 218

6. Kazakov, I. B. 2019, «Reliabilty criterion for channels with prohibitions», Intelligent systems. Theory and applications, vol. 23, no. 2, pp. 33 – 55

7. Kazakov, I. B. 2020, «Transmission of information in channels specified by structures of partial erasure (part 1)», Programmnaya Ingeneria, vol. 11, no. 5. pp. 277 – 284

8. Kazakov, I. B. 2020, «Transmission of information in channels specified by structures of partial erasure (part 2)», Programmnaya Ingeneria, vol. 11, no. 6. pp. 322 – 329

9. Timonina, E. E. 2002, «Covert channels (survey)», Jet Info, vol. 14, no. 114, pp. 3 – 11

10. Ahsan, K. & Kundur, D. 2002, «Practical data hiding in TCP/IP», In proceedings of: Multimedia and Security Workshop at ACM Multimedia.

11. Berk, V., Giani, A. & Cybenko, G. 2005, «Detection of covert channel encoding in network packet delays», Technical report TR2005-536, 11 p.

12. Bovy, C.J., Mertodimedjo, H.T., Hooghiemstra, G., Uijterwaal, H. & Mieghem, P. 2002, «Analysis of end-to-end delay measurements in Internet», Proc. 3rd Int. Workshop on Passive and Active Network Measurement, pp. 1 – 8

13. Gallager, R. G. 1968, Information theory and reliable Communications, John Wiley & Sons Inc., New York, 604 p.

14. Handel, T. & Sandford, M. 1996, «Hiding data in the OSI network model», Proc. of the first International workshop on information hiding, pp. 23 – 38

15. Lampson, B. W. 1973, «A note on the confinement problem», Communications of ACM., vol. 16, no. 10, pp. 613 — 615

16. Lipner, S. B. 1975, «A comment on the confinement Problem», Proceedings of the Fifth ACM Symposium on Operating Systems Principles, vol.9, no. 5, pp. 192 — 196

17. McFarland, J. 2017, «Covert channels: an overview», Preprint.

18. Murdoch, S. & Zielinski, P. 2004, «Covert channels for collusion in online computer games», IH'04: Proceedings of the 6th international conference on Information Hiding, pp. 355 – 369

19. Salwan, N., Singh, S., Arora, S. & Singh A. 2013, «An insight to covert channels», arkhiv:1306.2252

20. Sellke, S. H., Wang, C. C., Bagchi, S. & Shroff, N. B. 2009, «Covert TCP/IP timing channels: theory to implementation», Proc. of the twenty-eighth Conference on computer communications, pp. 2204 – 2212

21. Wendzel, S., Zander, S., Fechner, B. & Herdin C. 2015, «Pattern-based survey and categorization of network covert channel techniques», ACM Comput. Surv., vol. 47, pp. 50:1 – 50:26

22. Yao, L., Zi, X., Pan, L. & Li, J. 2009, «A study of on/off timing channel based on packet delay distribution», Computers and security, vol. 28, no. 8, pp. 785 – 794

23. Zander, S., Armitage, G. & Branch, P. 2006, «Covert channels in the IP time to live field», Proc. of the 2006 Australian telecommunication networks and applications conference. pp. 298 – 302

24. Zander, S., Armitage, G. & Branch, P. 2007, «A survey of covert channels and countermeasures in computer network protocols», IEEE Communications Surveys & Tutorials, vol. 9, pp. 44 – 57

25. Zander, S., Armitage, G. & Branch, P. 2008, «Covert channels in multiplayer first person shooter online games», Proc. 33rd IEEE Conf. LCN, pp. 215 – 222

Получено 29.09.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 303.722 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-152-162

Исследование результатов краудфандинговых проектов с применением факторного анализа

А. Я. Канель-Белов, С. А. Тищенко, Н. К. Храбров

Алексей Яковлевич Канель-Белов — Университет им. Бар-Илана (Израиль).
e-mail: kanelster@gmail.com
Сергей Александрович Тищенко — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: tichtch@mai.ru
Никита Константинович Храбров — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).
e-mail: nkhrabrov@gmail.com

Аннотация

Активное распространение интернета в начале 21 века привело к объединению большого количества людей на единых интернет-платформах, на которых стало возможным непосредственное взаимодействие пользователей и предпринимателей. Это послужило основой для возникновения нового способа привлечения финансирования в рискованные предпринимательские проекты и стартапы – краудфандинга. Постоянное совершенствование методов анализа данных позволяет более эффективно изучать краудфандинг и его последствия для мировой и национальной экономической системы. Результаты о структуре проектов, которые организуются предпринимателями на краудфандинговой платформе Кикстартер (Kickstarter) для финансирования и реализации своих уникальных идей, позволяют более глубоко понять каким образом необходимо совершенствовать отрасль краудфандинга, чтобы обеспечивать наиболее эффективное развитие инновационной деятельности и малого и среднего бизнеса. В связи с этим возникает вопрос, каким образом можно проводить анализ краудфандинговых проектов. В этой статье на примере прикладного исследования данных о более чем 100 тыс. состоявшихся краудфандинговых проектов будет показано, как можно использовать один из статистических методов анализа взаимосвязей между переменными – факторный анализ.

Ключевые слова: факторный анализ, размерный анализ, краудфандинг.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
А. Я. Канель-Белов, С. А. Тищенко, Н. К. Храбров. Исследование результатов краудфандинговых проектов с применением факторного анализа // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 152–162.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 303.722 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-152-162

Factor analysis method applied to the results of crowdfunding projects

A. Y. Kanel-Belov, S. A. Tishchenko, N. K. Khrabrov

Alexey Yakovlevich Kanel-Belov — Bar-Ilan University (Israel).
e-mail: kanelster@gmail.com
Serge Alexandrovich Tishchenko — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: tichtch@mail.ru
Nikita Konstantinovich Khrabrov — National research university «Higher School of Economics» (Moscow).
e-mail: nkhrabrov@gmail.com

Abstract

The active spread of the Internet at the beginning of the 21st century led to the unification of a large number of people on single Internet platforms, on which direct interaction between users and entrepreneurs became possible. This served as the basis for the emergence of a new way to attract funding to risky entrepreneurial projects and startups - crowdfunding. Continuous improvement of data analysis methods makes it possible to more effectively study crowdfunding and its consequences for the global and national economic system. The results on the structure of projects that are organized by entrepreneurs on the Kickstarter crowdfunding platform to finance and implement their unique ideas provide a deeper understanding of how the crowdfunding industry needs to be improved to ensure the most effective development of innovation and small and medium-sized businesses. In this regard, the question arises of how to analyze crowdfunding projects. In this article, using the example of applied research of data on more than 100 thousand completed crowdfunding projects, it will be shown how one of the statistical methods for analyzing the relationships between variables - factor analysis, can be used.

Keywords: factor analysis, dimensional analysis, crowdfunding.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
A. Y. Kanel-Belov, S. A. Tishchenko, N. K. Khrabrov, 2021, "Method of factor analysis applied to the results of crowdfunding projects" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 152–162.

Авторы посвящают статью 80-летию проф. Михалёва Александра Васильевича и 70-летию проф. Семёнова Алексея Львовича

1. Введение

Определить краудфандинг можно следующим образом: основной его идеей является возможность привлечения относительно небольших инвестиций от относительно большого круга людей (часто неограниченного) с целью финансирования высокорискованных предпринимательских проектов посредством интернета без участия финансовых посредников. Подобные определения встречаются в наиболее ранних исследованиях на тему краудфандинга [1]. Механизм краудфандинга устроен следующим образом:

1. у предпринимателя (иногда команда предпринимателей) есть бизнес-идея, для реализации которой необходимы денежные средства (финансирование)

2. запускается краудфандинговый проект по привлечению финансирования на краудфандинговой платформе (специализированный веб-сайт), предпринимателя выступает в роли основателя проекта

3. пользователи краудфандинговой платформы, заинтересованные в участии в этом проекте, выступают в качестве инвесторов и называются участниками проекта

4. в зависимости от собранной суммы основатель проекта либо получает ее и реализует свою бизнес-идею, либо не получает, и идея не реализуется

Краудфандинг является удобным инструментом для привлечения финансирования в предпринимательские проекты, особенно инновационные креативные предпринимательские проекты и стартапы [1, 2], которые характеризуются высоким риском. С помощью традиционных источников финансирования (бизнес-ангелы, банковские кредиты, венчурное финансирование и т.д.) финансирование таких проектов зачастую невозможно, поэтому с развитием интернета появился альтернативный источник инвестиций краудфандинг приобрел большую популярность среди предпринимателей. Его главная особенность в возможности привлечения финансовых средств от большого количества интернет-пользователей [1].

Изучение особенностей краудфандинговых проектов – компаний по привлечению финансирования на краудфандинговых платформах представляет большой исследовательский интерес. Особенно это касается понимания того, как правильно организовать успешный проект, который в итоге соберет необходимое количество средств (результаты проекта), и какие факторы на это влияют (характеристики проекта). В связи с этим немало работ посвящено выявлению и изучению взаимосвязей между характеристиками и результатами проектов на краудфандинговых платформах. Таким образом «производственная» цепочка краудфандинга состоит из 3 основных элементов: предприниматель или основатель проекта (по-английски, founder, creator или entrepreneur), спонсоры или участники проекта (по-английски, backers) и краудфандинговая платформа (по-английски, crowdfunding platform).

Одним из способов анализа, который можно применить в отношении краудфандинговых проектов является факторный анализ, часто применяющийся для анализа корреляционных взаимосвязей между переменными на больших объемах данных. Факторный анализ представляет из себя статистический метод поиска скрытых (latent) переменных – факторов, которые описывают наблюдаемые переменные – характеристики. Он основывается на анализе корреляционных взаимосвязей между этими переменными и нахождении базиса из собственных векторов, который является набором из факторов. Обычно выделяют 2 вида факторов: общие для нескольких переменных и характерные только для определенных переменных. Только общие факторы вносят вклад в ковариацию между переменными и их количество обычно сильно меньше количества наблюдаемых характеристик, которые они объясняют.

Основной проблемой факторного анализа является то, что во многих случаях очень сложно восстановить факторную структуру исходя из взаимосвязей между наблюдаемыми характеристиками. Для его успешного проведения необходимо выполнение «внестатистических» постулатов – принципа факторной причинности и принципа экономии.

В прикладных научных исследованиях факторный анализ изначально использовался в психологии, но затем его стали применять и в других науках. Практическое применение факторного анализа для статистической обработки данных было впервые подробно описано в [3], и далее этот метод анализа данных стал применяться и для исследований в области экономики и финансов. Факторный анализ используется в качестве инструмента для выявления скрытых переменных и их использования вместо основных переменных для повышения точности регрессионого анализа[9]. Выявление факторов, объясняющих корреляцию доходности портфелей управляющих менеджеров, было проведено в [4]. Авторы выявили 9 основных факторов, которые совместно объясняют 99% сезонной корреляции, причем первый фактор является главным, и на него приходится около 90%. В данном случае факторы представляли из себя определенные изменения в структуре секторов финансового рынка. Из-за этого полученные факторы хорошо описывают классификацию портфельных менеджеров. Авторы определили факторы как: 1 фактор - «рыночный эффект» (market effect), 2 фактор – изменения небольших относительно крупных по капитализации компаний, 3 фактор – изменения быстрорастущих акций относительно акций с высокой дивидендной доходностью и т.д. Практическими результатами факторного анализа являются рекомендации по диверсификации портфелей с помощью выбора региона инвестиций. В [5, 7, 8] выявляются факторы, которые описывают эффективность маркетинговых кампаний. [6] акцентирует внимание на минимальном объеме наблюдений для факторного анализа, который должен составлять как минимум 2^n, где n количество переменных.

Основываясь на том, что большое количество работ по выявлению факторов успеха краудфандинговых проектов говорит о существовании взаимосвязей между их характеристиками и результатами, попытка выявления корреляционных взаимосвязей с использованием факторного анализа выглядит вполне рациональной. И, учитывая параметры данных (их размер и количество переменных), может привести к интересным выводам относительно выявления скрытых факторов, которые могут объяснять наблюдаемые характеристики краудфандинговых проектов.

2. Эмпирическая часть

Для наглядного представления применения факторного анализа для исследования структуры краудфандинговых проектов был проведен «разведочный» факторный анализ, который подразумевает выделение факторов при отсутствии первоначальных гипотез. Существует несколько наиболее распространенных методов его реализации, которые дают параллельные результаты: Kaiser's criterion [10], scree test [11].

Реализация факторного анализа методом критерия Кайзера подразумевает исследование ранга редуцированной корреляционной матрицы наблюдаемых характеристик – переменных [10]. Определение количества общих факторов происходит на основе вычисления собственных векторов этой матрицы, собственные значений которых ранжируются от 0 и выше. Вектора с собственными значениями выше 1 выбираются в качестве основных факторов, объясняющих большую часть дисперсии переменных.

Максимально возможное число полученных факторов равно числу исследуемых переменных, поэтому лишь в этом случае возможно объяснение 100% дисперсии каждой переменной. При выборе количества факторов на основе собственных значений часть факторов считается излишней и не рассматривается, обычно их количество больше половины от числа переменных. Оставшиеся факторы принимаются за основные и объясняют часть дисперсии переменных, а другая ее часть так и остается необъясненной.

Результатом факторного анализа является матрица загрузки переменных, которая представляет из себя матрицу размером "количество переменных * количество факторов"и показывает загрузку (или вес или корреляцию) каждого фактора в каждой переменной. Таким образом переменная может объясняться более чем одним фактором, что усложняет интерпретацию результатов. Для оценки качества данных могут использоваться наиболее широко используемые в таких случаях тесты: 1) тест на адекватность данных Kaiser-Meyer-Olkin test или КМО тест. КМО тест основан на вычислении собственных векторов корреляционной матрицы (рисунок 1) переменных и принимает значение от 0 до 1. Значение КМО теста более 0,5 является достаточным условием для проведения факторного анализа и целесообразности интерпретации его результатов [10, 12]. Значение в интервале 0.5 – 0.7 позволяет очень субъективно интерпретировать полученные результаты, значение выше 0.7 говорит о хорошо подобранных данных для проведения факторного анализа и достаточно интерпретируемых результатах [13]. 2) тест на степень тесноты корреляционных взаимосвязей Bartlett test of Sphericity [14], с помощью которого проверяется нулевая гипотеза о идентичности корреляционной матрицы и неприменимости факторного анализа [12].

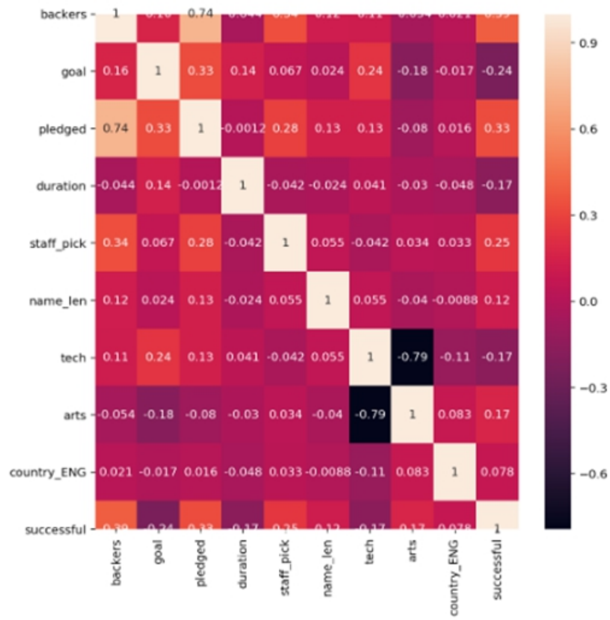


Рис. 1: Корреляционная матрица

Для проверки адекватности данных факторного анализа был проведен КМО тест и тест Барлетта. Оптимальным с точки зрения значения доли объясненной дисперсии (46%) и КМО теста, равного 0.601 (при уменьшении выборки результаты КМО теста почти не изменяются), оказался набор переменных количество спонсоров, цель проекта, собранная сумма, длительность, индикатор выбора платформы, длина названия, технологическая категория, креативная категория, страна проекта и успех.

Значение КМО теста превышает 0.5 и отвергается нулевая гипотеза об идентичности корреляционной матрицы, поэтому можно говорить о корректном восстановлении факторной структуры и целесообразности интерпретации результатов факторного анализа.

Выбранные переменные представляют все характеристики и результаты проектов, в том числе категорию, страну проекта и длину названия каждого проекта. Важно также отметить, что было проведено нормирование характеристик, так как абсолютные значения у разных проектов сильно отличаются, однако для корректности факторного анализа их включение является излишним, потому что они являются функциями от вышеперечисленных переменных.

3. Результаты

Для наглядности применения факторного анализа на реальных данных было проведено исследование краудфандинговых проектов платформе Кикстартер (Kickstarter). Факторный анализ, проведенный на выбранном наборе переменных для 164.5 тыс. проектов, показал, что для описания 10 характеристик и результатов необходимо 3 фактора , которые объясняют 46% дисперсии в данных (таблица 1).

Интерпретация должна подразумевать выделение базовых взаимосвязей наблюдаемых переменных. Однако, из-за того, что выбранные факторы вместе объясняют меньше половины дисперсии характеристик, интерпретация подразумевает определенные предположения и будет частично субъективной.

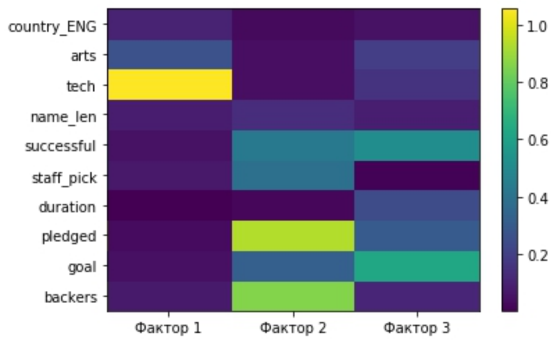


Рис. 2: Веса каждого фактора в соответствующей переменной

Необходимо напомнить, что 1) полученные факторы ортогональны и, соответственно, независимы, поэтому не возникает проблем с корреляцией между ними, 2) загрузка или вес факторов в каждой переменной является также коэффициентом корреляции из-за ортогональности факторов.

Таблица 1 Результаты факторного анализа

Параметр	Фактор 1	Фактор 2	Фактор 3
Собственное значение фактора	2.32	2.04	1.17
Доля дисперсии, объясненная фактором	20.5%	17.2%	8.3%
Накопленная доля дисперсии	20.5%	37.7%	46.0%

Таким образом можно видеть (таблица 2), что технологическая и креативная категории в большой степени объясняются 1 фактором. Количество спонсоров, собранная сумма и успех проекта объясняются 2 фактором. Цель проекта и успех объясняются 3 фактором. Страна проекта, длительность, креативная категория и длина названия проекта не объясняются этими 3-мя факторами.

Таблица 2 Вес каждого фактора для соответствующей переменной

Переменная	Фактор 1	Фактор 2	Фактор 3
количество спонсоров	17%	81%	-10%
цель проекта	28%	23%	57%
собранная сумма	21%	88%	11%
длительность	5%	-4%	25%
индикатор выбора платформы	-2%	37%	-10%
длина названия	7%	14%	-7%
технологич категория	97%	-7%	-3%
креативная категория	-81%	10%	2%
страна проекта	-11%	5%	-4%
успех	-15%	47%	-53%

4. Интерпретация

Высокая загрузка (таблица 2, рисунок 2) 1-м фактором технологической и креативной категорий говорит о том, что категория проекта в значительной степени определяется отдельным фактором, т. е. независима от других переменных. Можно предположить, что категория проекта не всегда определяет результат краудфандингового проекта, поэтому фактор 1 отвечает за «категорию проекта».

Высокая загрузка 2-м фактором количества спонсоров, собранной суммы и успеха говорит о том, что успех взаимосвязан с собранной суммой и количеством спонсоров. На первый взгляд, полученный результат является очевидным, а недостатком факторного анализа является невозможность более глубокого изучения структуры зависимостей переменных. Но можно посмотреть на этот фактор с точки зрения динамики пожертвований и трактовать его в качестве «сетевого эффекта». Проект, который начинают спонсировать на начальном этапе (проект, который заинтересовал хотя бы нескольких спонсоров) – положительная корреляция с собранной суммой и количеством участников, с большей вероятностью будет поддержан другими участниками и станет успешным. Такой своеобразный сетевой эффект является подтверждением того, что многие проекты не набирают вообще ничего, а многие проекты, которые начали привлекать средства – становятся успешными.

Собственное значение 3 фактора немного выше 1, что говорит о его более низкой значимости. Как видно из загрузок этого фактора по переменным, он положительно коррелирует с целью проекта и отрицательно с успехом. Этот результат подчеркивает тот факт, что цель проекта отрицательно связана с его успехом. Также 3 фактор на 25% объясняет длительность проекта, которая положительно коррелирована с целью и отрицательно с успехом. Таким образом, можно назвать этот фактор «пожелание предпринимателя», потому что у предпринимателя всегда есть желание собрать как можно больше средств.

Таким образом, в результате факторного анализа для исследования результатов краудфандинговых проектов были выделены 3 фактора (таблица 2):

1. Фактор - «категория проекта»
2. Фактор - «сетевой эффект»
3. Фактор - «пожелание предпринимателя»

5. Обсуждение

Исследование характеристик и результатов краудфандинговых проектов с помощью факторного анализа представляет определенный интерес. Применение факторного анализа в экономической науке достаточно ново, важна интерпретация получаемых данных.

С одной стороны, по результатам КМО теста (значение 0.601) и теста Барлетта (нулевая гипотеза о идентичности переменных отвергается) набор данных о завершенных краудфандинговых проектах оказался пригоден для факторного анализа. С другой стороны, интерпретация полученных результатов неочевидная по причинам:

1. 3 фактора объясняют менее половины (46%) всей дисперсии переменных (рисунок 3)
2. некоторые переменные объясняются сразу несколькими факторами, а другие не объясняются совсем
3. факторы не позволяют более глубоко изучать структуру зависимостей между переменными

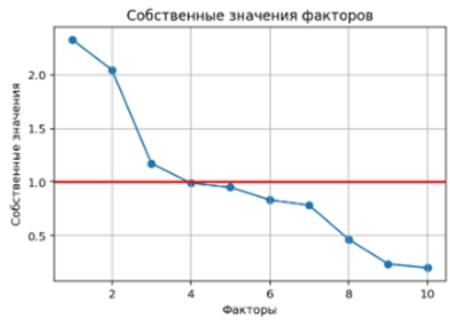


Рис. 3: Собственные значения факторов

Фактор 1 выделяет категорию проекта как независимую от других переменных характеристику. Независимость с фактором 2, который объясняет собранную сумму и количество спонсоров, говорит о том, что категория проекта предположительно не влияет на эти результаты. Это не согласуется с выводами о существовании влияния категории на результаты для проектов на платформе Кикстартер [1]. Возможные объяснения:

1. Переменная категории. В этой работе наиболее полным образом учтены категории проектов, которые разбиты на технологическую и креативную. Исследования в главе 2.1 рассматривают отдельные категории в качестве переменных [1]

2. Размер выборки и особенности данных. Большинство рассмотренных работ (глава 2.1) используют меньшее количество проектов (от нескольких тысяч до 48.5 тыс в [1], поэтому проведение факторного анализа на большом количестве наблюдений (164.5 тыс) позволяет значительно шире оценить все корреляционные связи между переменными.

Возможно, что размер выборки, наоборот, искажает результаты влияния категории проекта. Однако, уменьшение размера выборки ухудшило значение КМО теста.

Фактор 2, отвечающий за «сетевой эффект», можно сопоставить с результатами [15], где было выявлено значительное положительное влияние пожертвований на начальных этапах на успех проекта. Альтернативная трактовка фактора 2 отчасти подтверждает [1] - многие проекты не привлекают почти никаких средств, а те проекты, которые привлекают хотя бы немного средств в начале, скорее всего будут успешными в связи с тем, что начальные пожертвования привлекают новых участников, и в итоге проекты собирают больше средств, что является сетевым эффектом. Похожий вывод сделан [15] - в некоторых случаях выбор проекта для участия определяется на основе уже вложившихся спонсоров.

Фактор 3 представляет из себя вполне логичный результат - цель проекта отрицательно влияет на результаты проекта. Это подтверждается исследованиями [1, 15]. Учитывая первичный анализ данных, можно отметить, что это влияние особенно сильно для проектов в категории technology, которая характеризуется самыми высокими целями среди всех категорий, что и объясняется самыми низкими показателями успеха в этой категории. Полученная отрицательная корреляция объясняется также необходимостью для основателя проекта лучше обосновывать высокую цель [15], однако набор данных в этой работе не позволяют оценить эти параметры.

Положительная корреляция длительности проекта с целью и отрицательная с успехом подтверждает результаты [15]. Увеличение длительности сбора средств создает неопределенности для спонсоров и вызывает прокрастинацию, что ведет к пониженному интересу к проекту. Влияние характеристики длительности проекта на платформе Kickstater отличается от других платформ. Проведение факторного анализа для исследования характеристик краудфандинговых проектов можно считать удачным, потому что выделенные факторы выявляют зависимости между характеристиками и результатами краудфандинговых проектов. Как результат факторного аналиизa любой краудфандинговый проект можно представить в базисе из 3 факторов, которые являются собственными векторами.

6. Заключение

Основной целью настоящей работы было рассмотрение практического применения факторного анализа для исследования взаимосвязей между характеристиками и результатами краудфандинговых проектов. Как итог, этот метод оказался хорошим инструментом для исследования характеристик краудфандинговых проектов, в результате которого удалось выявить несколько базовых взаимосвязей, которые присущи большинству проектов на платформе Кикстартер (Kickstarter): 1) категория проекта оказалась независимой от его результатов – количества спонсоров, собранной суммы и успеха, что не нашло подтверждения в существующих исследованиях на эту тему [1]. Факторный анализ не позволяет более глубоко изучать структуру полученных результатов, поэтому этот вывод, возможно, является темой для дальнейших исследований. 2) предположительно был выявлен сетевой эффект, который характеризует большинство краудфандинговых проектов. Он заключается в том, что динамика собранных проектом средств частично определяется количеством текущих участников [15]. Сетевой эффект помогает объяснить тот факт, что много проектов не набирают вообще никаких пожертвований и много проектов являются успешными, а количество проектов с промежуточными результатами относительно невелико. Однако, из-за ограничений факторного анализа точно сказать про существование этого эффекта в анализируемом наборе данных невозможно. 3) любой краудфандинговый проект характеризуется отрицательной зависимостью между необходимой суммой сбора (цель) и его успехом, что подтверждается существующими исследованиями на тему факторов успеха краудфандинговых проектов [1, 15]. 4) факторный анализ помог выявить базис из 3 собственных векторов – факторов.

Практическое использование выявленных особенностей краудфандинговых проектов может состоять в более глубоком понимании того, каким образом предпринимателю необходимо организовывать краудфандинговую кампанию по финансированию своей бизнес-идеи. Важна ценность инструмента краудфандинговых платформ как элемента национальной инновационной системы. Метод факторного анализа, современные объемы доступных данных, методы их анализа и рост цифровой экономики делают возможным развитие экономической мысли и проведение исследований новыми более эффективными методами. Полученные результаты о структуре среды стартапов, прибегающих к сбору средств через краудфандинг, позволяют приблизиться к объективному пониманию влияния потенциальных национальных реформ по поддержке предпринимательской активности на эффективноть краудфандинговых платформ как инструмента развития малого и среднего бизнеса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mollick, E. (2014). The dynamics of crowdfunding: An exploratory study. Journal of business venturing, 29(1), 1-16.

2. Санин, М. К. (2015). История развития краудфандинга. Классификация видов. Анализ перспектив развития и преимуществ. Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Экономика и экологический менеджмент», (4).

3. Hotelling, H. (1957). The relations of the newer multivariate statistical methods to factor analysis. British Journal of Statistical Psychology, 10(2), 69-79.

4. Valadkhani, A., Chancharat, S., & Harvie, C. (2008). A factor analysis of international portfolio diversification. Studies in Economics and Finance.

5. Hadi, N. U., Abdullah, N., & Sentosa, I. (2016). An easy approach to exploratory factor analysis: Marketing perspective. Journal of Educational and Social Research, 6(1), 215.

6. Haszard, J. J., Williams, S. M., Dawson, A. M., Skidmore, P. M., & Taylor, R. W. (2013). Factor analysis of the comprehensive feeding practices questionnaire in a large sample of children. Appetite, 62, 110-118.

7. Dietz, W. H., & Gortmaker, S. L. (1985). Do we fatten our children at the television set? Obesity and television viewing in children and adolescents. Pediatrics, 75(5), 807-812.

8. Wipulanusat, W., Panuwatwanich, K., & Stewart, R. A. (2017). Exploring leadership styles for innovation: an exploratory factor analysis. Engineering Management in Production and Services, 9(1), 7-17.

9. Metaxas, T. (2010). Local characteristics and firm competitiveness in Southeastern Europe: A cluster analysis. Journal of Economic and Social Research, 12(2), 1.

10. Kaiser, H. F. (1960). The application of electronic computers to factor analysis. Educational and psychological measurement, 20(1), 141-151.

11. Cattell, R. B. (1966). The scree test for the number of factors. Multivariate behavioral research, 1(2), 245-276.

12. Pallant, J. (2013). SPSS survival manual. McGraw-Hill Education (UK).

13. Hutcheson, G. D., & Sofroniou, N. (1999). The multivariate social scientist: Introductory statistics using generalized linear models.

14. Bartlett, M. S. (1954). A note on the multiplying factors for various X_2 approximations. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 296-298.

15. Frydrych, D., Bock, A. J., Kinder, T., & Koeck, B. (2014). Exploring entrepreneurial legitimacy in reward-based crowdfunding. Venture capital, 16(3), 247-269.

REFERENCES

1. Mollick, E. (2014). The dynamics of crowdfunding: An exploratory study. Journal of business venturing, 29(1), 1-16.

2. Sanin, M. K. (2015). The history of the development of crowdfunding. Classification of species. Analysis of development prospects and benefits. Scientific journal of NRU ITMO. Series "Economics and Environmental Management (4).

3. Hotelling, H. (1957). The relations of the newer multivariate statistical methods to factor analysis. British Journal of Statistical Psychology, 10(2), 69-79.

4. Valadkhani, A., Chancharat, S., & Harvie, C. (2008). A factor analysis of international portfolio diversification. Studies in Economics and Finance.

5. Hadi, N. U., Abdullah, N., & Sentosa, I. (2016). An easy approach to exploratory factor analysis: Marketing perspective. Journal of Educational and Social Research, 6(1), 215.

6. Haszard, J. J., Williams, S. M., Dawson, A. M., Skidmore, P. M., & Taylor, R. W. (2013). Factor analysis of the comprehensive feeding practices questionnaire in a large sample of children. Appetite, 62, 110-118.

7. Dietz, W. H., & Gortmaker, S. L. (1985). Do we fatten our children at the television set? Obesity and television viewing in children and adolescents. Pediatrics, 75(5), 807-812.

8. Wipulanusat, W., Panuwatwanich, K., & Stewart, R. A. (2017). Exploring leadership styles for innovation: an exploratory factor analysis. Engineering Management in Production and Services, 9(1), 7-17.

9. Metaxas, T. (2010). Local characteristics and firm competitiveness in Southeastern Europe: A cluster analysis. Journal of Economic and Social Research, 12(2), 1.

10. Kaiser, H. F. (1960). The application of electronic computers to factor analysis. Educational and psychological measurement, 20(1), 141-151.

11. Cattell, R. B. (1966). The scree test for the number of factors. Multivariate behavioral research, 1(2), 245-276.

12. Pallant, J. (2013). SPSS survival manual. McGraw-Hill Education (UK).

13. Hutcheson, G. D., & Sofroniou, N. (1999). The multivariate social scientist: Introductory statistics using generalized linear models.

14. Bartlett, M. S. (1954). A note on the multiplying factors for various X_2 approximations. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 296-298.

15. Frydrych, D., Bock, A. J., Kinder, T., & Koeck, B. (2014). Exploring entrepreneurial legitimacy in reward-based crowdfunding. Venture capital, 16(3), 247-269.

Получено 28.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 517.948 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-163-176

О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа — Бельтрами в гильбертовом пространстве

О. Х. Каримов

Олимджон Худойбердиевич Каримов — кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан (Таджикистан, г. Душанбе).

e-mail: karimov_olim@mail.ru, karimov_olim72@mail.ru

Аннотация

Проблема разделимости дифференциальных операторов впервые рассмотрена в работах В. Н. Эверитта и М. Гирца. Дальнейшее развитие этой теории принадлежит К. Х. Бойматову, М.Отелбаеву и их ученикам. Основная часть опубликованных работ по этой теории относится к линейным операторам. Нелинейный случай рассматривался в случае слабого возмущения линейного оператора. Случай, когда исследуемый оператор не является слабым возмущением линейного оператора, рассмотрен лишь в некоторых отдельных работах. Полученные результаты в данной работе также относятся к этому малоизученному случаю. В работе исследованы коэрцитивные свойства нелинейного оператора Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве $L_2(R^n)$

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + V(x,u)u(x),$$

и на основе коэрцитивных оценок доказана его разделимость в этом пространстве. Исследуемый оператор не является слабым возмущением линейного оператора, т.е. является строго нелинейным. На основе полученных коэрцитивных оценок и разделимости изучалась разрешимость нелинейного уравнения Лапласа-Бельтрами в пространстве $L_2(R^n)$.

Ключевые слова: оператор Лапласа — Бельтрами, коэрцитивные неравенства, нелинейность, разделимость, разрешимость, гильбертово пространство.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

О. Х. Каримов. О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа — Бельтрами в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 163–176.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 517.948 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-163-176

On the coercitive solvability of the non-linear Laplace–Beltrami equation in Hilbert space

O. Kh. Karimov

Olimjon Khudoyberdievich Karimov — candidate of physical and mathematical sciences, docent, Mathematics institute. A. Dzhuraeva Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan (Tajikistan, Dushanbe).
e-mail: karimov_olim@mail.ru, karimov_olim72@mail.ru

Abstract

The problem of separability of differential operators is considered for the first time in the works of V. N. Everitt and M. Hirz. Further development of this theory belongs to K. H. Boymatov, M. Otelbaev and their students. The main part of the published papers on this theory relates to linear operators. The nonlinear case was considered mainly when studied operator was a weak perturbation of the linear one. The case when the operator under study is not a weak perturbation of the linear operator is considered only in some works. The results obtained in this paper also relate to this little-studied case. The paper studies the coercive properties of the nonlinear Laplace-Beltrami operator in the space $L_2(R^n)$

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + V(x,u)u(x)$$

and proves its separability in this space by coercivity estimates. The operator under study is not a weak perturbation of the linear operator, i.e. it is strongly nonlinear. Based on the obtained coercive estimates and separability, the solvability of the nonlinear Laplace-Beltrami equation in the space $L_2(R^n)$ is studied.

Keywords: Laplace–Beltrami operator, coercitive inequalities, nonlinearity, separability, solvability, Hilbert space.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
O. Kh. Karimov, 2021, "On the coercitive solvability of the non-linear Laplace–Beltrami equation in Hilbert space", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 163–176.

1. Введение

В настоящей работе исследуется разделимость нелинейного оператора Лапласа — Бельтрами

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right] + V(x,u)u(x) = f(x),$$

где $g(x) = (g_{ij}(x))$ — эрмитова матрица, а $V(x,z)$ — положительная функция.

Установлены соответствующие неравенства коэрцитивности для оператора $L[u]$ и получены новые достаточные условия разделимости этого оператора в пространстве $L_2(R^n)$. На основе полученных результатов по разделимости и коэрцитивных оценок изучается разрешимость уравнения Лапласа-Бельтрами в гильбертовом пространстве.

Фундаментальные результаты по теории разделимости дифференциальных операторов принадлежат В.Н.Эверитту и М.Гирцу. В работах [1]–[4] они получили ряд важных результатов относительно проблемы разделимости оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Ими был рассмотрен также многомерный случай оператора Шрёдингера. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[5]–[10] и имеющиеся там ссылки). Условия разрешимости нелинейных уравнений Шредингера и Дирака рассмотрены в [6]. Разделимость нелинейного оператора Шрёдингера изучена в работе [10]. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка рассматривалась в [11], а также для линейных операторов Гельмгольца, бигармонического и трижды гармонического операторов в работах [12]-[14]. Разделимость и коэрцитивные свойства строго нелинейных операторов рассматривались в работах [5], [16]-[19]

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в работе К.Х.Бойматова [5]. Разделимость линейного оператора Лапласа-Бельтрами

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + V(x)u(x),$$

ранее изучалась в работе [15]. Данная работа обобщает результаты работы [15] для нелинейного случая.

Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, исследовалась в случае, когда оператор является слабым возмущением линейного оператора. В отличие от этого, рассматриваемые ниже нелинейные дифференциальные операторы могут не являются слабым возмущением линейного оператора.

2. Формулировка основного результата

В пространстве $L_2(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + V(x,u)u(x) = f(x), \quad u(x) \in W^2_{2,loc}(R^n) \qquad (1)$$

где $g(x) = (g_{ij}(x))$- эрмитова матрица, а $V(x,z)$ -положительная функция.

Определение 1. *Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называется разделимым в* $L_2(R^n)$, *если* $\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]$, $V(x,u(x))u(x) \in L_2(R^n)$ *для всех* $u(x) \in L_2(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *таких, что* $f(x) \in L_2(R^n)$.

В дальнейшим предположим, что $V(x,z) \in C^1(R^n \times \mathbb{C})$. Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x,\xi,\eta) = V^{\frac{1}{2}}(x,z),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz,$$

$$Q(x,\xi,\eta) = V(x,z),\ \xi = Rez,\ \eta = Imz.$$

Предположим, что для всех $x \in R^n,\ \omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ функция $F(x,\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g^{-\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))];\mathbb{C}\right|^2 \leqslant \sigma_1, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}};C\right|^2 \leqslant \sigma_2, \tag{3}$$

$$\left|g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}(\frac{\partial F}{\partial \xi}\mu+\nu\frac{\partial F}{\partial \eta})\omega;\mathbb{C}\right| \leq \delta_1\left|F^{\frac{1}{2}}\Omega;\mathbb{C}\right|. \tag{4}$$

Также предполагается, что для всех $x \in R^n$, $\omega = (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}$, $\Omega = (\mu + i\nu) \in \mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g^{-\frac{1}{2}}F\frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))];\mathbb{C}\right|^2 \leqslant \sigma_3, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial x_i}F^{-2};\mathbb{C}\right|^2 \leqslant \sigma_4, \tag{6}$$

$$\left|g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-1}(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\mu+\nu\frac{\partial Q}{\partial \eta})\omega;\mathbb{C}\right| \leq \delta_2\left|F\Omega;\mathbb{C}\right|. \tag{7}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2) –(7), и пусть числа σ_j, δ_j ($j = \overline{1,4}$) такие, что*

$$n\sigma_1 + 2n\sigma_2 < 4,\ \sigma_1 + 2\sigma_2 + 4\delta_1 < 4,\ n\sigma_3 + 2n\sigma_4 < 4,\ \sigma_3 + 2\sigma_4 + 4\delta_2 < 4. \tag{8}$$

Тогда уравнение (1) разделяется в $L_2(R^n)$, и для всех функций $u(x) \in L_2(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$ таких, что $f(x) \in L_2(R^n)$ справедливы включения

$$\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right],$$

$$V(x,u)u, \quad g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(R^n), i = 1,2,...,n; j = 1,2,...,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right];L_2(R^n)\right\| + \|V(x,u)u;L_2(R^n)\| +$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j};L_2(R^n)\right\| \leq M\|f(x);L_2(R^n)\|, \tag{9}$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

3. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть в уравнении (1) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_2(R^n)$, и функция $u(x)$ принадлежит классу $L_2(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$. Тогда функции $V^{\frac{1}{2}}u(x)$, $g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)$ $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(R^n)$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ принадлежат пространству $L_2(R^n)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle f,\varphi_\varepsilon u\rangle = \langle -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right],\varphi_\varepsilon u\rangle + \langle V(x,u)u,\varphi_\varepsilon u\rangle,$$

и после интегрирования по частям получим

$$\langle f,\varphi_\varepsilon u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{1}{detg(x)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[detg(x)\right]\varphi_\varepsilon u\rangle + \langle V(x,u)u,\varphi_\varepsilon u\rangle,$$

где $\langle,\rangle$ - скалярное произведение в пространстве $L_2(R^n)$.

Так как функция φ_ε вещественнозначная и

$$\left|\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right| \le M_1\varepsilon, \qquad \left|\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial x_j\partial x_i}\right| \le M_0\varepsilon^2,\ \forall x\in R^n,$$

где

$$M_1 = sup|\nabla\varphi_\varepsilon(x)|,\ M_0 = sup|\Delta\varphi_\varepsilon(x)|,$$

то из равенства (12), переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, учитывая неравенство (2), находим

$$\operatorname{Re}(f,u) \ge \left(1-\frac{\alpha\sigma_1}{4}\right)\sum_{j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \left(1-\frac{\sigma_1}{4\alpha}\right)(V(x,u)u,u),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (2) –(4), и пусть функция $u(x)$ из класса $L_2(R^n)\cap\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ является решением уравнения (1) с правой частью $f(x)\in L_2(R^n)$. Тогда функции $F^{\frac{3}{2}}(x,u(x))u(x)$, $g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}(x,u(x))\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j=1,...,n$, принадлежат пространству $L_2(R^n)$.*

Доказательство. Пусть функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая же, как в доказательстве леммы 1. Очевидно, что

$$\langle f,\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right],\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle +$$
$$+\langle V(x,u)u,\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle.$$

Отсюда, учитывая равенство

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u)}{\partial x_i} &= \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}F(x,\xi,\eta)u + \varphi_\varepsilon\frac{\partial F(x,\xi,\eta)}{\partial x_i}u + \\ &+ \varphi_\varepsilon\frac{\partial F(x,\xi,\eta)}{\partial\xi}\operatorname{Re}\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \varphi_\varepsilon\frac{\partial F(x,\xi,\eta)}{\partial\eta}\operatorname{Im}\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial x_i},\end{aligned} \tag{10}$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f,\varphi_\varepsilon Fu\rangle = \frac{1}{2}A_1^\varepsilon(u) + A_2^\varepsilon(u) + A_3^\varepsilon(u) + A_4^\varepsilon(u) + A_5^\varepsilon(u) + \langle Vu,\varphi_\varepsilon Fu\rangle, \tag{11}$$

где

$$A_1^\varepsilon(u) = -\sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]\varphi_\varepsilon F u\rangle, \quad A_2^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} F u\rangle,$$

$$A_3^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x_i} u\rangle,$$

$$A_4^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial F}{\partial \eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i} u\rangle,$$

$$A_5^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon F \frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle.$$

Здесь и далее значения F, $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \eta}$ взяты в точке $(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Re}u(x), \mathrm{Im}u(x))$.

Поочередно оценивая абсолютные значение функционалов, находим, что в силу леммы 1 функционал $A_2^\varepsilon(u)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Относительно функционалов $A_m^\varepsilon(u),\ m = 1, 3, 4, 5$ получаем следующие оценки:

$$|A_1^\varepsilon(u)| = |-\sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]\varphi_\varepsilon F u\rangle| \geq$$
$$\geq -\sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\alpha}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12} g^{-\frac12}(x) F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\alpha}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12} g^{-\frac12}(x)[ln(detg(x))]F^{\frac12} u\|^2 \right\} \geq$$
$$\geq -\frac{n\alpha}{2}\sum_{j=1}^n \left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12} g^{-\frac12}(x) F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 - \frac{n\sigma_1}{2\alpha}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12} F^{\frac32} u\|^2,$$

$$|A_3^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x_i} u\rangle| \leq$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12} g^{-\frac12}(x) F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12} g^{-\frac12}(x) F^{-\frac12}\frac{\partial F}{\partial x_i} u\right\|^2 \right\} \leq$$
$$\leq \frac{n\beta}{2}\sum_{j=1}^n \left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12} g^{-\frac12}(x) F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n\sigma_2}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12} F^{\frac32} u\|^2,$$

$$|A_4^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial F}{\partial \eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i} u\rangle| \leq n\delta_1 \sum_{j=1}^n \left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12} g^{-\frac12}(x) F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2,$$

$$|A_5^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^n \langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon F \frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle| \leq n \sum_{j=1}^n \left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12} g^{-\frac12}(x) F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2.$$

Здесь α, β– произвольные положительные числа, а σ_1, σ_2 и δ_1 - константы из условий (2) – (4). На основе полученных оценок из равенства (11) имеем

$$|\langle f, \varphi_\varepsilon F u)\rangle| \geq \left(1 - \frac{n\sigma_1}{4\alpha} - \frac{n\sigma_2}{2\beta}\right)\cdot \langle V u, \varphi_\varepsilon F u\rangle - |A_2^\varepsilon(u)| +$$
$$+ n\cdot\left(1 - \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2} - \delta_1\right)\cdot \sum_{j=1}^n \left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12} g^{-\frac12}(x) F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2.$$

Далее применяем неравенство Коши-Буняковского и затем, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\|f; L_2(R^n)\| \|Fu; L_2(R^n)\| \geq |(f, Fu)| \geq \left(1 - \frac{n\sigma_1}{4\alpha} - \frac{n\sigma_2}{2\beta}\right) \cdot (Vu, Fu) + \\ +n \cdot \left(1 - \frac{\alpha\sigma_1}{4} - \frac{\beta\sigma_2}{2} - \delta_1\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2. \quad (12)$$

Теперь подбираем положительные числа α, β так,чтобы выполнялись условия

$$\frac{n\sigma_1}{4\alpha} + \frac{n\sigma_2}{2\beta} < 1, \ \frac{\alpha\sigma_1}{4} + \frac{\beta\sigma_2}{2} + \delta_1 < 1.$$

Так как по лемме 1 $Fu \in L_2(R^n)$, то из неравенства (12) следует, что функции $g^{-\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $(j = 1, 2, ..., n)$, $F^{\frac{3}{2}} u$ принадлежат пространству $L_2(R^n)$.

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Переходим к непосредственному доказательству теоремы 1. Поступая так же, как и выше, из равенства

$$\langle f, \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta) u \rangle = \langle -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{detg(x)} g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right], \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta) u \rangle + \\ +\langle V(x, u) u, \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta) u \rangle.$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \varphi_\varepsilon Q u \rangle = \frac{1}{2} B_1^\varepsilon(u) + B_2^\varepsilon(u) + B_3^\varepsilon(u) + B_4^\varepsilon(u) + B_5^\varepsilon(u) + \langle Vu, \varphi_\varepsilon Q u \rangle, \quad (13)$$

где

$$B_1^\varepsilon(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} [ln(detg(x))] \varphi_\varepsilon Q u \rangle, \quad B_2^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} Q u \rangle,$$

$$B_3^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \rangle,$$

$$B_4^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial \xi} \mathrm{Re} \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \frac{\partial Q}{\partial \eta} \mathrm{Im} \frac{\partial u}{\partial x_i} u \rangle,$$

$$B_5^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g^{-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon Q \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle.$$

Здесь и далее значения Q, $\dfrac{\partial Q}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial \eta}$ взяты в точке $(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Re}u(x), \mathrm{Im}u(x))$.

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $B_j^\varepsilon(u)$, $j = \overline{1, 5}$, находим, что функционалы $B_2^\varepsilon(u)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Относительно функционалов $B_m^\varepsilon(u)$, $m = 1, 3, 4, 5$ получаем следующие оценки:

$$|B_1^\varepsilon(u)| = |-\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]\varphi_\varepsilon Qu\rangle| \geq$$

$$\geq -\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\alpha_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\alpha_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)[ln(detg(x))]Q^{\frac{1}{2}}u\|^2\right\} \geq$$

$$\geq -\frac{n\alpha_1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 - \frac{n\sigma_3}{2\alpha_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Vu\|^2,$$

$$|B_3^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\rangle| \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{1}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\|^2\right\} \leq$$

$$\leq \frac{n\beta_1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + \frac{n\sigma_4}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Vu\|^2,$$

$$|B_4^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial \xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle| \leq n\cdot\delta_2\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2,$$

$$|B_5^\varepsilon(u)| = |\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon Q\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle| \leq n\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2.$$

Здесь α_1, β_1– произвольные положительные числа, а σ_3, σ_4, и δ_2 – константы из условий (5) – (7).

На основе полученных оценок из равенства (13) имеем

$$|\langle f, \varphi_\varepsilon Vu)\rangle| \geq \left(1 - \frac{n\sigma_3}{4\alpha_1} - \frac{n\sigma_4}{2\beta_1}\right)\cdot\langle Vu, \varphi_\varepsilon Vu\rangle - |B_2^\varepsilon(u)| +$$
$$+ n\cdot\left(1 - \frac{\alpha_1\sigma_3}{4} - \frac{\beta_1\sigma_4}{2} - \delta_2\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и затем переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\|f; L_2(R^n)\|\|Vu; L_2(R^n)\| \geq |(f, Vu)| \geq \left(1 - \frac{n\sigma_3}{4\alpha_1} - \frac{n\sigma_4}{2\beta_1}\right)\cdot(Vu, Vu) +$$
$$+ n\cdot\left(1 - \frac{\alpha_1\sigma_3}{4} - \frac{\beta_1\sigma_4}{2} - \delta_2\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2. \tag{14}$$

Далее подбираем положительные числа α_1, β_1 так,чтобы выполнялись условия

$$\frac{n\sigma_3}{4\alpha_1} + \frac{n\sigma_4}{2\beta_1} < 1,\ \frac{\alpha_1\sigma_3}{4} + \frac{\beta_1\sigma_4}{2} + \delta_2 < 1.$$

Теперь из полученных неравенств после несложных преобразований имеем коэрцитивное неравенство (9).

Разделимость нелинейного оператора (1) в пространстве $L_2(R^n)$ следует из коэрцитивного неравенства (9).

Теорема 1 доказана.

5. Разрешимость

В этом пункте изучается разрешимость уравнения (1). Как следствие выводов теоремы 1 получим следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть дифференциальный оператор*

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + Vu$$

разделяется в пространстве $L_2(R^n)$, и пусть положительная функция $\phi(x)$, принадлежащая в $C^1(R^n)$, удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]Q^{-\frac{1}{2}}\right|^2 \le \gamma_1 \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|^2 \le \gamma_2 \tag{16}$$

где $0 < \gamma_1 + 2\gamma_2 < 4$. Тогда уравнение (1) для всех $f \in L_2(R^n)$ имеет единственное решение в пространстве $L_2(R^n)$.

Доказательство.

Сначала докажем, что дифференциальное уравнение

$$L[u] = -\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + Vu = 0 \tag{17}$$

имеет нулевое решение $u(x) = 0$ для всех $x \in R^n$. Пусть $\psi(x)$ - произвольная положительная функция из $C^2(R^n)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned}\langle Vu, \phi\psi u\rangle &= \langle\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right], \phi\psi u\rangle = \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n}\langle\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\phi\psi u]\rangle = \\ &= -\langle\sum_{i,j=1}^{n}\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}]\phi\psi u\rangle - \\ &- \sum_{i,j=1}^{n}\langle\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle - \\ &- \sum_{i,j=1}^{n}\langle\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle - \\ &- \sum_{i,j=1}^{n}\langle\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle.\end{aligned} \tag{18}$$

Теперь находим реальную часть скалярного произведения

$$Re\langle Vu, t\psi u\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x)))\phi\psi u]\rangle -$$
$$- Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u\rangle - Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi\frac{\partial \psi}{\partial x_i}u)\rangle -$$
$$- Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle, \tag{19}$$

Имея в виду

$$2Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle \leq$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\left\|[\frac{\partial g^{-1}}{\partial x_j}\phi\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + g^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + g^{-1}\phi\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}]^{\frac{1}{2}}u; L_2(R^n)\right\|^2, \tag{20}$$

и применяя неравенства Коши-Буняковского, получим

$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle = -Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(g^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i})Q^{-\frac{1}{2}}u\rangle$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(g^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i})Q^{-\frac{1}{2}}u\|, \tag{21}$$

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]\phi\psi u]\rangle =$$
$$= Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(g^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]Q^{-\frac{1}{2}})Q^{\frac{1}{2}}u\rangle \leq$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(g^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]Q^{-\frac{1}{2}})Q^{\frac{1}{2}}u\|. \tag{22}$$

Учитывая неравенство (15), имеем

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[ln(detg(x))]\phi\psi u]\rangle \leq$$
$$\leqslant \frac{\alpha_1}{2}\sum_{j=1}^{n}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \frac{n\gamma_1}{2\alpha_1}\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}u\|^2, \tag{23}$$

$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle \leq \sum_{i,j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(g^{-\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i})Q^{\frac{1}{2}}u\| \leq$$
$$\leq \frac{n\alpha_2}{2}\sum_{j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \frac{n\gamma_2}{2\alpha_2}\|\psi^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}u\|^2. \tag{24}$$

Далее для равенства (19), применяя неравенства (23)-(24), получим

$$(1-\frac{n\gamma_1}{4\alpha_1}-\frac{n\gamma_2}{2\alpha_2})\|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u\|^2 \le \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|[\frac{\partial g^{-1}}{\partial x_j}\phi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+g^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+g^{-1}\phi\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}]^{\frac{1}{2}}u;L_2(R^n\right\|^2+$$

$$+(\frac{n\alpha_1}{4}+\frac{n\alpha_2}{2})\sum_{j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_2(R^n\|^2-n\cdot\sum_{j=1}^{n}\|g^{-\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_2(R^n\|^2. \quad (25)$$

Пусть $\psi(x)\equiv 1$ для любых $x\in R^n$ и $n\gamma_1+2n\gamma_2<4\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1+2\alpha_2=1$, тогда имеем

$$0<(1-\frac{n\gamma_1+2n\gamma_2}{4\alpha_1\alpha_2})\|\phi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u;L_2(R^n\|^2\le 0. \quad (26)$$

Следовательно, получим

$$0<(1-\frac{n\gamma_1+2n\gamma_2}{4\alpha_1\alpha_2})\int_{R^n}|\phi^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}u|^2dx\le 0. \quad (27)$$

Последнее неравенство имеет место только при $u(x)\equiv 0$. Это доказывает, что $u(x)=0$ является единственным решением уравнения (17).

Далее пусть $u(x)\in L_2(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ - решение уравнения

$$L[u]=-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]+Vu=f(x) \quad (28)$$

с правой частью $f(x)\in L_2(R^n)$. Теперь выберем последовательность функций $f_1,f_2,\ldots f_n\in C_0^\infty(R^n)$, сходящихся к f в $L_2(R^n)$. Положим $\vartheta_p=A^{-1}f_p$, где A-означает замыкание оператора $\acute{A}=-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right]+V,\ D(\acute{A}=C_0^\infty(R^n))$ в $L_2(R^n)$. Функция $\vartheta_p\in C^1(R^n)$ и является решением уравнения

$$-\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial\vartheta_p}{\partial x_j}\right]+V\vartheta_i=f_i$$

Используя коэрцитивное неравенство (9), находим

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_j}\right];L_2(R^n)\right\|+\|V(x)(\vartheta_i-\vartheta_j);L_2(R^n)\|+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left\|g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_j};L_2(R^n)\right\|\le M\|f_p-f_k;L_2(R^n)\|, \quad (29)$$

Переходя к пределу $p,\ k\to\infty$, заключаем, что последовательности $\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,V\vartheta_1,V\vartheta_2,\ldots,$

$$g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_j},g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_j},\ldots,\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_j}\right],$$

$\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_j}\right],\ldots$ будучи фундаментальными, сходятся в $L_2(R^n)$ соответственно к некоторым элементам $\vartheta,\vartheta^{(1)},\vartheta^{(2)},\vartheta^{(3)}\in L_2(R^n)$. Легко проверить, что $\vartheta\in W^2_{2,loc}(R^n)$, $\vartheta^{(1)}=V\vartheta$, $\vartheta^{(2)}=g^{-\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j}$, $\vartheta^{(3)}=\frac{1}{\sqrt{detg(x)}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sqrt{detg(x)}g^{-1}(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j}\right]$.

Переходя в неравенстве (29) к приделу при $p,\ k \to \infty$, получим $\vartheta_p = \vartheta_k = \vartheta$. Следовательно, для $f \in R^n$ таких, что $u \in L_2(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$, $Au = f$.

Пусть u_1 тоже является решением уравнения $Au = f$. Тогда имеем

$$A(u - u_1) = 0.$$

Так как уравнение $Au = 0$ имеет единственное решение $u = 0$, отсюда следует, что $u = u_1$, т.е. теорема полностью доказана. □

6. Заключение

В работе установлены коэрцитивные оценки для нелинейного оператора вида (1). Найдены достаточные условия разделимости оператора в гильбертовом пространстве. Изучена коэрцитивная разрешимость оператора Лапласа-Бельтрами в пространстве $L_2(R^n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W.N.,Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc.London Math.Soc., 1971, v.23, pp.301-324.

2. Everitt W.N.,Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions // Proc.London Math.Soc., 1972, v.24, pp.149-170.

3. Everitt W.N.,Gierz M. Some inequalities associated with certain differential operators // Math.Z., 1972, v.126, pp.308-326.

4. Everitt W.N.,Gierz M. Inequalities and separation for Schrodinger -type operators in $L_2(R^n)$ // Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect A, 1977, v.79 pp.149-170.

5. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости // ДАН СССР, 1973, т. 213, № 5, с. 1009-1011.

6. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР, 1984, т.170, с.37-76.

7. Бойматов К.Х., Шарипов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака // Доклады Академии наук России, 1992, т.326, № 3, с.393-398.

8. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка // Математические заметки, 1989, т.46, № 6, с.110-112.

9. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР, 1983, т.161, с.195-217.

10. Муратбеков М.Б., Отелбаев М. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера // Изв.вузов. Матем., 1989, № 3, с.44-48.

11. Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Оспанов К.Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Доклады Академии наук России, 2010, т.435, № 3, с.310-313.

12. Salem Omram and Khaled A.Gepreel Separation of the Helmholtz Partial Differential Education in Hilbert Space // Adv.Studies Theor. Phys., Vol.6, 2012, № 9, pp.399-410.

13. Zayed E.M.E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem // J. Math.Anal.Appl. 337(2008), pp.659-666.

14. Zayed E.M.E., Salem Omram Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert // International J. Math.Combin. Vol.4(2010), pp.13-23.

15. Zayed E.M.E., A.S.Mohamed, H.A.Atia Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces // J. Math.Anal.Appl. 336 (2007), pp.81-92.

16. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 3(157), с.42-50.

17. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. № 8(58), с.665-673.

18. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал. 2017. № 1(9), с.55-62.

19. Каримов О.Х. Коэрцитивная оценка и теорема разделимости для одного класса нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник. 2017. № 4(18), с.245-254.

REFERENCES

1. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1971, “Some properties of the domains of certain differential operators“, *Proc.London Math.Soc.*, vol. 23, pp. 301 – 324.

2. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1972, “On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions“, *Proc.London Math.Soc.*, vol.24, pp. 149 – 170.

3. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1972, “Some inequallities associated with certain differential operators“, *Math.Z.*, vol.126, pp. 308 – 326.

4. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1977, “Inequalities and separation for Schrodinger -tupe operators in $L_2(R^n)$“, *Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect A*, vol.79, pp. 149 – 170.

5. Boimatov, K. Kh. 1973, “Theorems of separability“, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 213, № 5, pp. 1009 – 1011.

6. Boimatov, K. Kh. 1984, “ Separability theorems, weighted spaces and their applications“ *Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova*, vol. 170, pp. 37 – 76.

7. Boimatov, K. Kh., & Saripov, A. 1992, “Coercitive properties of nonlinear Schrodinger and Dirac operators“ *Reports of the Russian Academy of Sciences*, vol. 326, № 3, pp. 393 – 398.

8. Boimatov, K. Kh. 1989, “Coercitive estimates and separability theorems for differential operators of the second order“ *Mathematical notes*, vol. 46, № 6, pp. 110 – 112.

9. Otelbaev, M. 1983, “Coercitive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n“ *Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova*, vol. 161, pp. 195 – 217.

10. Muratbekov, M. B., & Otelbaev, M. 1989, “Smoothness and approximation properties of solutions of a class of nonlinear equations of Schrodinger“ *Proc.of the univer. of math.*, № 3, pp. 44 – 48.

11. Muratbekov, M. B., & Muratbekov, M. M., & Ospanov, K. N. 2010, “Coercitive solvability of odd-order differential equations and its applications“ *Dokl. Mathematics*, vol. 435, № 3, pp. 310 – 313.

12. Salem, O. & Gepreel, Kh. A. 2012, “Separation of the Helmholtz Partial Differential Eduation in Hilbert Space“ *Adv.Studies Theor. Phys.*, vol.6, № 9, pp. 399 – 410.

13. Zayed, E. M. E. 2008, “Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem“ *J. Math.Anal.Appl.*, vol. 337, pp. 659 – 666.

14. Zayed, E. M. E., & Salem, O. 2010, “Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert“ *International J. Math.Combin.*, vol. 4, pp. 13 – 23.

15. Zayed, E. M. E., & Mohamed,A. S. & Atia, H. A. 2007, “Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces“ *J. Math.Anal.Appl.*, vol. 336, pp. 81 – 92.

16. Karimov, O. Kh. 2014, “On separation of second order nonlinear differential operators with matrix coefficients“ *News of the Academy of Sciences of the Republic of Talikistan. Department of physical, mathematical, chemical, geological and technical sciences.* № 3(157), pp. 42 – 50.

17. Karimov, O. Kh. 2015, “On separation of nonlinear second order nonlinear differential operators with matrix coefficients in a weighted space“ *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan.* № 8(58), pp. 665 – 673.

18. Karimov. O. Kh. 2017, “Coercitive properties and separability biharmonic operator with matrix potential“ *Ufa mathematical journal.* № 1(9), pp. 55 – 62.

19. Karimov. O. Kh. 2017, “Coercitive estimate and the separability theorem for a class of a nonlinear differential operator in a hilbert space“ *Chebyshevskii Sbornik.* № 4(18), pp.246-255, DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-245-254.

Получено 31.05.2019 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.579 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-177-187

Характеризация дистрибутивных решеток квазимногообразий унаров

В. К. Карташов, А. В. Карташова

Владимир Константинович Карташов — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).
e-mail: kartashovvk@yandex.ru
Анна Владимировна Карташова — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

Аннотация

Пусть $L_q(\mathfrak{M})$ означает решетку всех подквазимногообразий квазимногообразия $\mathfrak{M}$ относительно включения. Существует глубокая взаимосвязь между свойствами решетки $L_q(\mathfrak{M})$ и алгебраических систем из $\mathfrak{M}$. Впервые на этот факт обратил внимание А. И. Мальцев в докладе на Международном конгрессе математиков в 1966 году в Москве.

В данной работе получена характеризация класса всех дистрибутивных решеток, каждая из которых изоморфна решетке $L_q(\mathfrak{M})$ всех подквазимногообразий некоторого квазимногообразия унаров $\mathfrak{M}$.

Унаром называется алгебра с одной унарной операцией. Очевидно, что любой унар можно рассматривать как автомат с одним входным сигналом без выходных сигналов, либо – как полигон над циклической полугруппой. В работе построены частично упорядоченные множества P_∞ и $P_s (s \in \mathbf{N_0})$, где $\mathbf{N_0}$ означает множество всех неотрицательных целых чисел. Далее доказано, что дистрибутивная решетка L изоморфна решетке $L_q(\mathfrak{M})$ для некоторого квазимногообразия унаров $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда она изоморфна некоторому главному идеалу одной из решеток $O(P_s)(s \in \mathbf{N_0})$ или $O_c(P_\infty)$, где $O(P_s)(s \in \mathbf{N_0})$ – решетка идеалов частично упорядоченного множества $P_s(s \in \mathbf{N_0})$ и $O_c(P_\infty)$ – решетка идеалов с выделенным элементом c частично упорядоченного множества P_∞.

Доказательство основной теоремы существенно опирается на описание Q-критических унаров. Конечно порожденная алгебра называется Q-критической, если она не разлагается в подпрямое произведение своих собственных подалгебр. Ранее было установлено, что каждое квазимногообразие унаров определяется своими Q-критическими унарами. Этот факт часто используется для исследования квазимногообразий унаров.

Ключевые слова: квазимногообразие, унары, дистрибутивные решетки

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
В. К. Карташов, А. В. Карташова. Характеризация дистрибутивных решеток квазимногообразий унаров // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 177–187.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.579 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-177-187

Characterization of distributive lattices of quasivarieties of unars

V. K. Kartashov, A. V. Kartashova

Vladimir Konstantinovich Kartashov — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Social and Pedagogical University (Volgograd).
e-mail: kartashovvk@yandex.ru
Anna Vladimirovna Kartashova — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Social and Pedagogical University (Volgograd).
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

Abstract

Let $L_q(\mathfrak{M})$ denote the lattice of all subquasivarieties of the quasivariety $\mathfrak{M}$ under inclusion. There is a strong correlation between the properties of the lattice $L_q(\mathfrak{M})$ and algebraic systems from $\mathfrak{M}$. A. I. Maltsev first drew attention to this fact in a report at the International Congress of Mathematicians in 1966 in Moscow.

In this paper, we obtain a characterization of the class of all distributive lattices, each of which is isomorphic to the lattice of some quasivariety of unars. A unar is an algebra with one unary operation. Obviously, any unar can be considered as an automaton with one input signal without output signals, or as an act over a cyclic semigroup.

We construct partially ordered sets P_∞ and $P_s (s \in \mathbf{N_0})$, where $\mathbf{N_0}$ is the set of all non-negative integers. It is proved that a distributive lattice is isomorphic to the lattice $L_q(\mathfrak{M})$ for some quasivariety of unars $\mathfrak{M}$ if and only if it is isomorphic to some principal ideal of one of the lattices $O(P_s) (s \in \mathbf{N_0})$ or $O_c(P_\infty)$, where $O(P_s) (s \in \mathbf{N_0})$ is the ideal lattice of the poset $P_s (s \in \mathbf{N_0})$ and $O_c(P_\infty)$ is the ideal lattice with a distinguished element c of the poset P_∞.

The proof of the main theorem is based on the description of Q-critical unars. A finitely generated algebra is called Q-critical if it does not decompose into a subdirect product of its proper subalgebras. It was previously shown that each quasivariety of unars is determined by its Q-critical unars. This fact is often used to investigate quasivarieties of unars.

Keywords: quasivariety, unars, distributive lattices.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
V. K. Kartashov, A. V. Kartashova, 2021, "Characterization of distributive lattices of quasivarieties of unars" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 177–187.

1. Введение

Основные идеи теории квазимногообразий алгебраических систем были разработаны А. И. Мальцевым. К настоящему времени эта теория глубоко развита (см., например, [1], [2], [4] – [6], [11] – [15], [17]).

Одна из важнейших проблем теории квазимногообразий заключается в следующем. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное квазимногообразие алгебраических систем фиксированной сигнатуры и $L_q(\mathfrak{M})$ – решетка всех подквазимногообразий квазимногообразия $\mathfrak{M}$. А. И. Мальцев в докладе на Международном конгрессе математиков в 1966 году обратил внимание на наличие глубоких взаимосвязей между свойствами решетки $L_q(\mathfrak{M})$ и свойствами систем из квазимногообразия $\mathfrak{M}$. В связи с этим возникли следующие вопросы:

1) Описание квазимногообразий $\mathfrak{M}$, для которых решетка $L_q(\mathfrak{M})$ обладает фиксированным решеточным свойством.

2) Описание взаимосвязей между решеткой $L_q(\mathfrak{M})$ и базисами квазитождеств квазимногообразия $\mathfrak{M}$.

3) Вопросы характеризации решеток вида $L_q(\mathfrak{M})$. Здесь предполагается выяснить, в каком случае эта решетка изоморфна некоторой уже исследованной ранее решетке, либо получается из таких решеток с помощью стандартных или новых конструкций. Результаты такого типа получены, например, в работах [3], [9], [10].

Заметим, что список результатов исследования решеток квазимногообразий алгебраических систем выходит далеко за рамки указанных выше трёх направлений.

К настоящему времени вопросы первого и второго типа для решеток квазимногообразий унаров (т. е. алгебр с одной унарной операцией) в основном решены ([7] – [9]).

В данной работе получена характеризация класса всех дистрибутивных решеток, каждая из которых изоморфна решетке $L_q(\mathfrak{M})$ всех подквазимногообразий некоторого квазимногообразия $\mathfrak{M}$.

Доказательство основной теоремы существенно опирается на описание Q-критических унаров, полученное одним из авторов ранее.

Конечно порожденная алгебра называется *Q-критической* (или *квазикритической*), если она не разлагается в подпрямое произведение своих собственных подалгебр (т. е. подалгебр, неизоморфных самой алгебре).

Квазимногообразие унаров определяется своими Q-критическими унарами, поскольку любой конечно порожденный унар разлагается в подпрямое произведение Q-критических подунаров [7].

Этот факт неоднократно использовался и при получении других результатов о квазимногообразиях унаров ([7] – [10]).

2. Основные определения и вспомогательные результаты

В дальнейшем $\mathbf{N}$ всюду означает множество целых положительных чисел и $\mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Для любых целых чисел $m, n \in \mathbf{N_0}$ запись $m|n$ означает, что m делит n. Если дополнительно $m \neq n$, то будем писать $m \lhd n$. Наименьшее общее кратное чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ записывается как $[m_1, m_2, \ldots, m_k]$.

Для любого элемента a унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(a)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу a. При этом $f^0(a) = a$. Для любых целых чисел $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 0$ положим

$$C_m^n = \langle a | f^n(a) = f^{n+m}(a)\rangle$$

и

$$C_{m,n} = \langle a, b | f^m(a) = f^n(b), 0 < m \leqslant n\rangle.$$

Унар, порожденный одним элементом a, называется *моногенным* и обозначается через (a). Свободный моногенный унар будем обозначать через F_1.

Унар C_n^0 называется *циклом длины n*. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых чисел $t \in \mathbf{N_0}$ и $n \in \mathbf{N}$, и – *непериодическим* в противном случае.

Через $T(A)$ и $W(A)$ обозначается соответственно множество периодических и непериодических элементов унара A. Унар A называется *периодическим*, если $A = T(A)$ и *унаром без кручения*, если $A = W(A)$.

Объединение двух непересекающихся унаров B, C будем называть их *суммой* и обозначать через $B + C$. Ясно, что любой унар можно записать в виде $A = W(A) + T(A)$.

Если a – периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \in \mathbf{N}$, называется *глубиной элемента* a и обозначается через $t(a)$, а наименьшее из чисел $n \in \mathbf{N}$, для которых $f^{t(a)}(a) = f^{t(a)+n}(a)$, называется *периодом элемента* a и обозначается через $p(a)$.

Глубиной унара A называется $max\{t(a)|a \in T(A)\}$, если $T(A) \neq \emptyset$, и – нуль, если $T(A) = \emptyset$.

В работе [7] дано полное описание Q-критических унаров и доказано, что каждое квазимногообразие унаров порождается своими Q-критическими унарами.

Лемма 1. [7] *1) Конечный унар A тогда и только тогда является Q-критическим, когда либо $A \cong C_1^0 + C_1^0$, либо $A \cong C_{h_0}^t + C_{h_1}^0 + \cdots + C_{h_m}^0$ для некоторых попарно различных чисел $h_0, h_1, \ldots, h_m$, удовлетворяющих при $t = 0$ формулам*

$$x \lhd u \;\&\; y \lhd v \to u = v, [x_1, x_2, \ldots, x_n] = y \to \bigvee_{i=1}^{n} (x_i = y_i),$$

и при $t > 0$ – формуле

$$x \lhd y \to y = h_0.$$

2) Конечно порожденный унар A тогда и только тогда является Q-критическим, когда либо A – конечный Q-критический унар, либо его непериодическая часть $W(A)$ изоморфна одному из унаров F_1 или $C_{m,n}$ для некоторых $m, n \in \mathbf{N}$, а периодическая часть $T(A)$, если она не пуста, является суммой циклов, длины которых попарно не сравнимы по делимости.

3. Основной результат

Построим частично упорядоченные множества $P_s (s \in \mathbf{N_0})$ и P_∞, которые необходимы нам для формулировки основной теоремы.

Носитель $P_s (s \in \mathbf{N_0})$ является объединением трех множеств A, C, D координатной плоскости:
$A = \{a_i | a_i = (-2s + i - 1, e_i), e_i = \frac{1}{2}(1 - (-1)^i), i = 0, 1, \ldots, 2s\}$,
$C = \{c_{m,n} | 0 < m \le n, m, n \in \mathbf{N}\} \cup \{c\}$, где $c = (0, 0)$ и $c_{m,n} = (m, m + n - 1)$ при $0 < m \le n$,
$D = \{d_{m,n} | 0 < m \le n, m, n \in \mathbf{N}\} \cup \{d\}$, где $d = (-\frac{1}{2}, 1)$ и $d_{m,n} = (m - \frac{1}{2}, m + n)$ при $0 < m \le n$.

Порядок в P_s определяется следующим образом:

$$a_i \le a_j \Leftrightarrow i = j \vee i = 2k \;\&\; j = 2k \pm 1 \;\&\; k \geqslant 1, \tag{1}$$

$$c_{m,n} \le c_{m_1,n_1} \Leftrightarrow m \le m_1 \;\&\; n \le n_1, \tag{2}$$

$$d_{m,n} \le d_{m_1,n_1} \Leftrightarrow m \le m_1 \;\&\; n \le n_1,$$

$$c_{m,n} \le d_{m,n}, c \le d, a_{2s} \le d, c \le c_{m,n}, d \le d_{m,n}$$

для любых $a_i, a_j \in A$, $c_{m,n}, c_{m_1,n_1} \in C$, $d_{m,n}, d_{m_1,n_1} \in D$, и далее рассматривается транзитивное замыкание определенного выше отношения.

Через P_∞ будем обозначать частично упорядоченное множество, носитель которого является объединением двух множеств A и C, где C определяется также, как для носителей частично упорядоченных множеств $P_s (s \in \mathbf{N_0})$, и
$A = \{a_i | a_i = (i + 1, e_i), e_i = \frac{1}{2}(1 - (-1)^i), i \in \mathbf{N_0}\}$.

Порядок в P_∞ задаётся формулами (1) и (2).

Напомним (см., например, [16, с. 82], что *О-идеалом частично упорядоченного множества* P называется всякое непустое подмножество $S \subseteq P$, удовлетворяющее условию

$$\forall x, s(s \in S \ \&\ x \leq s \Rightarrow x \in S).$$

Решетка О-идеалов частично упорядоченного множества P обозначается через $O(P)$.

Зафиксируем некоторый элемент $a \in P$. О-идеал S называется *О-идеалом с выделенным элементом* a, если он либо конечен, либо содержит элемент a.

Очевидно, что О-идеалы с выделенным элементом a также образуют полную решетку относительно включения, которую мы будем обозначать через $O_a(P)$.

Теорема 1. *Дистрибутивная решетка L изоморфна решетке всех подквазимногообразий некоторого квазимногообразия унаров тогда и только тогда, когда L изоморфна либо главному идеалу решетки $O(P_s)$ для некоторого числа $s \in \mathbf{N_0}$, либо главному идеалу решетки $O_c(P_\infty)$.*

Основная идея доказательства этой теоремы исходит из следующего общего факта.

Пусть L – произвольная решетка квазимногообразий алгебраических систем фиксированной сигнатуры. Тогда L является коалгебраической решеткой [4, лемма 1], т. е. каждый её элемент является верхней гранью некоторого множества вполне $\vee$-неразложимых элементов из L. Сопоставив каждому подмножеству $S \subseteq P$, где P – множество всех вполне $\vee$-неразложимых элементов решетки L, множество

$$S^* = \{x | x \in P, x \leq \vee S\}, \tag{3}$$

получим оператор замыкания на решетке всех подмножеств множества P. При этом отображение $a \to \{x | x \in P, x \leq a\}$ осуществляет изоморфизм

$$L \cong C(P), \tag{4}$$

где $C(P)$ – решетка всех замкнутых подмножеств множества P относительно включения.

Поэтому *конкретное представление* решетки L будет *реализовано*, если описаны множество P всех её вполне $\vee$-неразложимых элементов и замкнутые подмножества соответствующего оператора замыкания.

Оказалось, что решетка $L_q(\mathfrak{M})$ квазимногообразий унаров дистрибутивна тогда и только тогда, когда множество P всех её вполне $\vee$-неразложимых элементов изоморфно некоторому О-идеалу одного из двух частично упорядоченных множеств $P_s (s \in \mathbf{N_0})$ и P_∞.

При этом замкнутые подмножества соответствующего оператора замыкания являются О-идеалами (быть может с выделенным фиксированным элементом).

В дальнейшем для любого квазимногообразия $\mathfrak{M}$ унаров через $K(\mathfrak{M})$ будем обозначать множество всех Q-критических унаров, содержащихся в $\mathfrak{M}$, а через $P(\mathfrak{M})$ – множество всех вполне $\vee$-неразложимых злементов решетки $L_q(\mathfrak{M})$.

Для любого класса унаров $\mathfrak{N}$ обозначим через $q\mathfrak{N}$ наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathfrak{N}$, и через qA, если $\mathfrak{N}$ состоит из одного унара A.

В силу теоремы 1 [9]

$$P(\mathfrak{M}) = \{qA | A \in K(\mathfrak{M})\}. \tag{5}$$

Следующее предложение содержит описание замкнутых подмножеств оператора замыкания на множестве $P(\mathfrak{M})$, определенного по правилу (3).

Лемма 2. [9, леммы 5 – 8] . *Пусть $\mathfrak{N} = \{A_i | i \in I\}$ – некоторый класс Q-критических унаров.*

1) Если $B \cong C_0^1 + C_0^1$, то $B \in q\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда $B \leq A_i$ для некоторого $i \in I$.

2) Если $B \cong C_{h_0}^{t_0} + C_{h_1}^0 + \cdots + C_{h_k}^0$ и $B \ncong C_0^1 + C_0^1$, то $B \in q\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда в классе $\mathfrak{N}$ найдутся унары $A_1, A_2, \ldots, A_s$; содержащие элементы $a_{ij} \in A_j$ $(i = 0, 1, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, s)$, такие, что $h_i = [p(a_{i1}), p(a_{i2}), \ldots, p(a_{is})]$ и $t_0 = max\{t(a_{0j})|$ $j = 1, 2, \ldots, s\}$.

3) Если $B \cong F_1$, то $B \in q\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда в классе $\mathfrak{N}$ существуют унары, содержащие моногенные подунары сколь угодно высокого порядка.

4) Если $B \cong C_{m,n}(0 < m \leq n)$„ то $B \in q\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:
a) $C_{m,n} \leq A_i$ для некоторого $i \in I$;
b) $F_1 \in q\mathfrak{N}$ и существует унар $A \in \mathfrak{N}$, который содержит подунар C_h^t такой, что $t \geqslant m$.

5) Если $B \cong C + C_{h_1}^0 + \cdots + C_{h_k}^0$, где либо $C \cong F_1$, либо $C \cong C_{m,n}(0 < m \leq n)$, то $B \in q\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда $C \in q\mathfrak{N}_{h_1,h_2,\ldots,h_k}$ и $C_{h_1}^0 + \cdots + C_{h_k}^0 \in q\mathfrak{N}_{h_1,h_2,\ldots,h_k}$, где $\mathfrak{N}_{h_1,h_2,\ldots,h_k}$ – подкласс класса $\mathfrak{N}$, состоящий из таких унаров, что в каждом из них для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ существует элемент, период которого делит число h_i.

Предложение **1.** [9, теорема 4] *. Если $\mathfrak{M} = q\mathfrak{N}$ для некоторого класса унаров, то решетка $L_q(\mathfrak{M})$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:*

1) длины циклов унаров из $\mathfrak{N}$ образуют образуют цепь по делимости;

2) если $C_n^1, C_k^0 \in \mathfrak{N}$, то $k|n$;

3) если $C_m^0 + C_n^0 \in \mathfrak{N}$ и $m \lhd k \lhd n$, то $C_k^0 \notin \mathfrak{N}$.

Далее C_0^0 означает свободный унар F_1.

Продолжим доказательство *теоремы 1.*

Пусть $L_q(\mathfrak{M})$ – дистрибутивная решетка для некоторого квазимногообразия $\mathfrak{M}$ унаров.

а) Пусть $|L_q(\mathfrak{M})| < \omega$. Тогда в силу теоремы 1 из [8] квазимногообразие $\mathfrak{M}$ содержит лишь конечное число циклов. Если $C_n^1 \in \mathfrak{M}$ для некоторого $n > 0$, то $F_1 \notin \mathfrak{M}$ согласно предложению 1. Отсюда в силу леммы 2 (пункт 3) вытекает, что порядки всех моногенных унаров, содержащихся в квазимногообразии $\mathfrak{M}$, ограничены в совокупности, откуда по теореме 2 [9] следует, что $L_q(\mathfrak{M})$ – алгебраическая решетка.

Поскольку любая решетка квазимногообразий является коалгебраической [4], то согласно [16, с. 83]

$$L_q(\mathfrak{M}) \cong O(P(\mathfrak{M})), \tag{6}$$

где $P(\mathfrak{M})$ – частично упорядоченное по включению множество всех $\vee$-неразложимых элементов решетки $L_q(\mathfrak{M})$.

Покажем, что в этом случае $P(\mathfrak{M})$ изоморфно некоторому идеалу частично упорядоченного множества $P_s (s \in \mathbf{N_0})$.

Пусть $H(\mathfrak{M})$ означает множество длин циклов, лежащих в квазимногообразии $\mathfrak{M}$. Поскольку порядки моногенных унаров квазимногообразия $\mathfrak{M}$ ограничены в совокупности, то $H(\mathfrak{M})$ конечно и, в силу предложения 1,

$$1 = h_0 \lhd h_1 \lhd \cdots \lhd h_s. \tag{7}$$

По той же причине в $\mathfrak{M}$ существует моногенный унар C_n^t наибольшей глубины t.

Пусть $t > 0$. Тогда по теореме 4 [9] получим $n = h_s$.

Обозначим через $\mathfrak{N}_{s,t}$ частично упорядоченное по включению множество всех квазимногообразий унаров вида

$$q(C_1^0 + C_1^0), q(C_{h_i}^0 + C_{h_{i+1}}^0), qC_{h_i}^0, q(C_{h_{s-1}}^0 + C_{h_s}^0), qC_{h_s}^r,$$

где $r \in \{0, 1, \ldots, t\}$ и $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ при $s > 0$.

При этом множество $\mathfrak{N}_{0,t}$ состоит из квазимногообразий вида $q(C_1^0 + C_1^0), qC_1^r$ $(0 \leq r \leq t)$.

Из (3), (5) и (7) в силу лемм 1 и 2, предложения 1, а также лемм 11 и 13 из [9] вытекает, что $P(\mathfrak{M})$ является О-идеалом в $\mathfrak{N}_{s,t}$.

При $s = 0$ отображение f_1 :

$q(C_1^0 + C_1^0) \to a_0$,

$qC_1^1 \to c$,

$qC_1^r \to c_{1,r-1}(r > 1)$

является инъекцией множества $\mathfrak{N}_{0,t}$ в P_0, сохраняющей порядок.

Кроме того, $f_1(\mathfrak{N}_{0,t})$ является О-идеалом в P_0, откуда следует, что $f_1(P(\mathfrak{M}))$ также является О-идеалом в P_0.

Пусть $s \neq 0$. Тогда отображение f_2 :

$q(C_1^0 + C_1^0) \to a_0$,

$q(C_{h_i}^0 + C_{h_{i+1}}^0) \to a_{2i+1}(1 \leq i \leq s-2)$,

$q(C_{h_{s-1}}^0 + C_{h_s}^0) \to d$,

$q(C_{h_{s-1}}^0 + C_{h_s}^r) \to d_{1,r}(1 \leq r \leq t)$,

$qC_{h_i}^0 \to a_{2i}(1 \leq i \leq s-1)$,

$qC_{h_s}^0 \to c$,

$qC_{h_s}^r \to c_{1,r}(1 \leq r \leq t)$

осуществляет изоморфизм $\mathfrak{N}_{s,t}$ в О-идеал частично упорядоченного множества P_{s-1}. Отсюда следует, что $f_2(P(\mathfrak{M}))$ является О-идеалом в P_{s-1}.

Предположим теперь, что $t = 0$, т. е. квазимногообразие $\mathfrak{M}$ не содержит унаров вида C_n^1.

Тогда из леммы 11 [9] и предложения 1 следует, что $P(\mathfrak{M})$ является О-идеалом частично упорядоченного множества $\mathfrak{N}_s$ всех квазимногообразий унаров следующего вида

$$q(C_1^0 + C_1^0), qC_{h_i}^0(1 \leq i \leq s), q(C_{h_i}^0 + C_{h_{i+1}}^0)(0 \leq i \leq s-1),$$

$$qF_1, qC_{m,n}, q(C_{m,n} + C_{h_s}^0)(m, n \in \mathbf{N}), q(F_1 + C_{h_0}^0),$$

где числа $h_0, h_1, \ldots, h_s$ удовлетворяют условию (7).

В этом случае отображение f_3 :

$q(C_1^0 + C_1^0) \to a_0$,

$qC_{h_i}^0 \to a_{2i}(1 \leq i \leq s)$,

$q(C_{h_i}^0 + C_{h_{i+1}}^0) \to a_{2i+1}(1 \leq i \leq s-1)$,

$qF_1 \to c$,

$q(F_1 + C_{h_s}^0) \to d$,

$qC_{m,n} \to c_{m,n}(1 \leq m \leq n)$,

$q(C_{m,n} + C_{h_s}^0) \to d_{m,n}(1 \leq m \leq n)$

является изоморфизмом частично упорядоченных множеств $\mathfrak{N}_s$ и P_s.

Отсюда, поскольку $P(\mathfrak{M})$ – О-идеал в $\mathfrak{N}_s$, $f_3(P(\mathfrak{M}))$ – О-идеал в P_s.

Обратно, допустим, что $L \cong O(I)$, где I – некоторый О-идеал в $P_s (s \in \mathbf{N_0})$. Зафиксируем произвольный набор чисел $\{h_i | i = 0, 1, \ldots, s\}$, удовлетворяющих условию (7).

Пусть $\mathfrak{N} = f_3^{-1}(I)$ и $\mathfrak{M}$ – квазимногообразие, порожденное всеми унарами A, для которых $qA \in \mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{M} = q\{A | qA \in \mathfrak{N}\}$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{N}$ является О-идеалом в $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N} \cong I$. Используя предложение 1 и лемму 2, получим

$$P(\mathfrak{M}) \cong \mathfrak{N} \tag{8}$$

и $L_q(\mathfrak{M})$ – конечная либо счётная дистрибутивная решётка. Поскольку $\mathfrak{N} \cong I$, то из (6) и (8) в силу леммы 11 [9] следует, что $L_q(\mathfrak{M}) \cong O(I)$.

б) Пусть $L_q(\mathfrak{M})$ – континуальная дистрибутивная решетка. Согласно теореме 1 [9] квазимногообразие $\mathfrak{M}$ содержит бесконечное множество $\{C^0_{h_i} | i \in \mathbf{N_0}\}$ циклов.

В силу предложения 1 при подходящей нумерации циклов получим

$$1 = h_0 \triangleleft h_1 \triangleleft \cdots . \tag{9}$$

Используя предложение 1, а также леммы 6 и 11 из [9], получим, что $P(\mathfrak{M})$ содержит квазимногообразие qF_1, порожденное свободным унаром F_1, и является О-идеалом частично упорядоченного по включению множества $\mathfrak{N}_\infty$ всех квазимногообразий вида

$$q(C^0_1 + C^0_1), qC^0_{h_i}(i \geqslant 1), q(C^0_{h_i} + C^0_{h_{i+1}})(i \geqslant 0), qF_1, qC_{m,n}(0 < m \leq n).$$

В силу (4)

$$L_q(\mathfrak{M}) \cong C(P(\mathfrak{M})),$$

где $C(P(\mathfrak{M}))$ – решетка замкнутых подмножеств множества $P(\mathfrak{M})$ относительно включения. Замкнутые подмножества при этом строятся по правилу (3).

Применяя леммы 1 и 2, а также леммы 11 и 13 из [9], получим, что любой идеал О-идеал в $P(\mathfrak{M})$ с выделенным элементом qF_1 замкнут.

Обратно, пусть T замкнуто в $P(\mathfrak{M})$, т. е. $T^* = T$. Очевидно, что T является О-идеалом в $P(\mathfrak{M})$.

Допустим, что T бесконечно. Тогда $qF_1 \in T$ в силу леммы 2, т. е. T – О-идеал с выделенным элементом qF_1.

Теперь для завершения доказательства остается отметить, что отображение f_4 :
$q(C^0_1 + C^0_1) \to a_0$,
$qC^0_{h_i} \to a_{2i}(i \in \mathbf{N_0})$,
$q(C^0_{h_i} + C^0_{h_{i+1}}) \to a_{2i+1}(i \in \mathbf{N_0})$,
$qF_1 \to c$,
$qC_{m,n} \to c_{m,n}(1 \leq m \leq n)$
осуществляет изоморфизм частично упорядоченных множеств $\mathfrak{N}_\infty$ и P_∞.

Таким образом,

$$L_q(\mathfrak{M}) \cong O_c(I),$$

где $I = f_4(P(\mathfrak{M}))$.

Обратно, если $L \cong O_c(I)$, где I – О-идеал в P_∞ с выделенным элементом c, то, полагая $\mathfrak{N} = f_4^{-1}(I)$ и $\mathfrak{M} = q\mathfrak{N}$, и рассуждая также, как и в пункте а), с учетом леммы 13 из [9] получим, что $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условиям предложения 1 и $L \cong L_q(\mathfrak{M})$, откуда следует, что L дистрибутивна. Теорема доказана.

Используя теорему 7 работы [9], получаем

Следствие 1. *Произвольная булева решетка L изоморфна некоторой решетке квазимногообразий унаров тогда и только тогда, когда L конечна.*

Аналогичным образом из основной теоремы данной работы и из теоремы 5 из [9] вытекает

Следствие 2. *Произвольная цепь L изоморфна некоторой решетке квазимногообразий унаров тогда и только тогда, когда L конечна.*

4. Заключение

В данной работе описан класс всех дистрибутивных решеток, каждая из которых изоморфна решетке некоторого квазимногообразия унаров. Аналогичные вопросы решены для классов булевых решеток и цепей.

К настоящему времени в теории квазимногообразий унаров открытых вопросов остается немного.

Возникает проблема исследования квазимногообразий унарных алгебр, в сигнатуре которых более одной унарной операции.

В этом направлении авторами работ [11], [12] получен ряд содержательных результатов.

Как отмечено выше, для исследования квазимногообразий унаров широко использовалось описание Q-критических унаров.

Однако, описание Q-критических унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одной операции, весьма затруднительно.

В работе [18] вводится понятие NQ-критической алгебры, которое, на наш взгляд, может иметь более широкий спектр применения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белкин В. П., Горбунов В. А. Фильтры решеток квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, №4. С. 373-392.

2. Будкин А. И., Горбунов В. А. К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, №2. С. 123-142.

3. Виноградов А. А. Квазимногообразия абелевых групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, №6. С. 15-19.

4. Горбунов В. А. Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, №5. С. 507-548.

5. Горбунов В. А., Туманов В. И. Об одном классе решеток квазимногообразий // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, №1. С. 59-80.

6. Горбунов В. А. Алгебраическая теория квазимногообразий. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 368 с.

7. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров // Мат. заметки. 1980. Т. 27, №1. С. 7-20.

8. Карташов В. К. Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, №2. С. 173-193.

9. Карташов В. К. О решетках квазимногообразий унаров // Сибирский математический журнал. 1985. Т. 26, №3. С. 49-62.

10. Карташов В. К. Характеризация решетки квазимногообразий алгебр $L_qA_{1,1}$ // Алгебраические системы. – Волгоград: изд-во Волгоградского государственного пединститута,, 1989. С. 37–45.

11. Кравченко А. В. Сложность решеток квазимногообразий для многообразий унарных алгебр // Математические труды. 2001. Т. 4, №2. С. 113-127.

12. Кравченко А. В., Нуракунов А. М., Швидефски М. В. О строении решеток квазимногообразий. I. Независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, №6. С. 684-710.

13. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. – 392 с.

14. Мальцев А. И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966г.) - М.: Мир, 1968. С.217-231.

15. Ольшанский А. Ю. Условные тождества в конечных группах // Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15, №6. С. 1409-1413.

16. Crawley P., Dilworth R. P. Algebraic Theory of Lattices. – New-Jersey: Prentice-Hall, Tnc, 1973.– 200 с.

17. Hyndman J., Nation J. B. The Lattice of Subquasivarieties of a Locally Finite Quasivariety, CMS Books in Mathematics. — Springer, 2018. – 162 p.

18. Kartashov V. K., Kartashova A. V. Remarks on NQ-critical commutative unary algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, №2. P. 204-206.

REFERENCES

1. Belkin, V. P., Gorbunov, V. A. 1975, "Filters in lattices of quasivarieties of algebraic systems", *Algebra and Logic*, vol. 14, no. 4, pp. 229-239. doi: 10.1007/BF01668999.

2. Budkin, A. I., Gorbunov, V. A. 1975, "Quasivarieties of algebraic systems", *Algebra and Logic*, vol. 14, no. 2, pp.73-84. doi: 10.1007/BF01668420.

3. Vinogradov, A. A. 1965, "Quasivarieties of abelian groups", *Algebra i Logica [Algebra and Logic]*, vol. 4, no. 6, pp.15-19.

4. Gorbunov, V. A. 1977, "Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability", *Algebra and Logic*, vol. 16, no. 5, pp.340-369. doi: 10.1007/BF01669475.

5. Gorbunov, V. A., Tumanov, V. I. 1980, "A class of lattices of quasivarieties", *Algebra and Logic*, vol. 19, no. 1, pp. 38-52. doi: 10.1007/BF01669103.

6. Gorbunov, V. A. 1998, *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Consultants Bureau, New-York.

7. Kartashov, V. K. 1980, "Quasivarieties of unars", *Mathematical Notes*, vol. 27, no. 1, pp. 5-12. doi: 10.1007/BF01149807.

8. Kartashov, V. K. 1980, "Quasivarieties of unary algebras with a finite number of cycles", *Algebra and Logic*, vol. 19, no. 2, pp. 106-120. doi: 10.1007/BF01669836.

9. Kartashov, V. K. 1985, "Lattices of quasivarieties of unars", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 26, no. 3, pp. 346-357. doi: 10.1007/BF00968621.

10. Kartashov, V. K. 1989, "Characterization of the lattice of quasivarieties of the algebras $L_qA_{1,1}$", *Algebraicheskie sistemy*, Izdatel'stvo Volgogradskogo gosudarstvennogo pedinstituta, Volgograd, pp. 37-45.

11. Kravchenko, A. V. 2002, "Complexity of lattices of quasivarieties for varieties of unary algebras", *Siberian Advances in Mathematics*, vol. 12, no. 1, pp. 63-76.

12. Kravchenko, A. V., Nurakunov, A. M. & Schwidefsky, M. V. 2018, "Structure of Quasivariety Lattices. I. Independent Axiomatizability", *Algebra and Logic*, vol. 57, no. 6, pp. 445-462. doi: 10.1007/s10469-019-09516-4.

13. Maltsev, A. I. 1973, *Algebraic systems*, Springer, Berlin.

14. Maltsev, A. I. “On some borderline problems of algebra and mathematical logic“, *Trudy Mezhdunarodnogo kongressa matematikov* ” (Proc. Int. Congr. of mathematicians). Mir, Moscow, 1968, pp. 217-231.

15. Ol’shanskii, A. Yu. 1985, “Conditional identities in finite groups“, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 15, no. 6, pp. 1000-1003. doi.org: 10.1007/BF00966568.

16. Crawley, P., Dilworth, R. P. 1973, *Algebraic Theory of Lattices*, Prentice-Hall, New-Jersey.

17. Hyndman, J., Nation, J. B. 2018, *The Lattice of Subquasivarieties of a Locally Finite Quasivariety*, CMS Books in Mathematics, Springer, Berlin.

18. Kartashov, V. K., Kartashova, A. V. 2020, “Remarks on NQ-critical commutative unary algebras“, *Lobachevskii J. of Mathematics*, vol. 41, no. 2, pp. 204-206. doi: 10.1134/S1995080220020080.

Получено 12.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.532.3 + 512.533.8 + 519.713.2 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-188-199

Коммутативные полугруппы с ограниченными в совокупности порядками подпрямо неразложимых полигонов[1]

И. Б. Кожухов

Игорь Борисович Кожухов — Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», Центр ФПМ Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Аннотация

Подпрямо неразложимые универсальные алгебры, т.е. алгебры, неразложимые в нетривиальное подпрямое произведение алгебр, играют в математике важную роль благодаря хорошо известной теореме Биркгофа, утверждающей, что любая алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразлодимых алгебр (в другой терминологии: любая алгебра аппроксимируется подпрямо неразложимыми алгебрами). В связи с этим кажется разумным исследовать классы алгебр с теми или иными ограничениями на подпрямо неразложимые алгебры. Одно из естественных ограничений – конечность всех подпрямо неразложимых алгебр. Более сильное ограничение: порядки подпрямо неразложимых алгебр ограничены в совокупности.

Полигон над полугруппой (или автомат, или унарная алгебра) – множество, на котором действует данная полугруппа. Полигоны над фиксированной полугруппой образуют многообразие, сигнатура которой совпадает с самой полугруппой. С другой стороны, это категория, морфизмы которой – гомоморфизмы одного полигона в другой.

Нетрудно видеть, что полугруппы, над которыми все подпрямо неразложимые полигоны конечны, – это в точности полугруппы, над которыми все полигоны финитно аппроксимируемы (в другой терминологии: резидуально конечны). Более узкий класс – полугруппы, над которыми все полигоны аппроксимируются полигонами, содержашими не более, чем n элементов, где n – фиксированное натуральное число.

В 2000 г. И.Б.Кожуховым было доказано, что все нетривиальные полигоны над полугруппой S аппроксимируются двухэлементными в том и только том случае, если S – полурешётка (коммутативная полугруппа идемпотентов). В работе И.Б.Кожухова и А.Р.Халиуллиной 2014 года было доказано, что всякая полугруппа с ограниченными в совокупности порядками подпрямо неразложимых полигонов является равномерно локально конечной, т.е. для каждого k порядки k-порождённых подполугрупп ограничены в совокупности. В работе И.Б.Кожухова и А.В.Царёва 2019 года были полностью описаны абелевы группы, над которыми все полигоны финитно аппроксимируемы, а также абелевы группы, над которыми все полигоны аппроксимируются конечными, порядки которых ограничены в совокупности.

В настоящей работе характеризуются коммутативные полугруппы, над которыми все полигоны аппроксимируются полигонами, состоящими из не более, чем n элементов.

Ключевые слова: коммутативная полугруппа, полигон над полугруппой, подпрямо неразложимый полигон, финитная аппроксимируемость

Библиография: 19 названий.

[1]Исследование выполнено при поддержке Международного Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ

Для цитирования:
И. Б. Кожухов. Коммутативные полугруппы с ограниченными в совокупности порядками подпрямо неразложимых полигонов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 188–199.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.532.3 + 512.533.8 + 519.713.2 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-188-199

Commutative semigroups with bounded orders of subdirectly irreducible acts

I. B. Kozhukhov

Igor Borisovich Kozhukhov — National Research University of Electronic Technology, Centre Fund. Appl. Math. of M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

Abstract

Subdirectly irreducible universal algebras, i.e., algebras which are not decomposable into non-trivial subdirect product, play an important role in mathematics due to well-known Birkhoff Theorem which states that any algebra is a subdirect product of subdirectly irreducible algebras (in another terminology: every algebra is approximated by the subdirectly irreducible algebras). In view of this, it seems reasonable to study algebras with certain conditions on subdirectly irreducible algebras. One of the natural restrictions is the finiteness of all subdirectly irreducible algebras. More stronger restriction is boundness of orders of all subdirectly irreducible algebras.

An act over a semigroup (it is also an automaton, and a unary algebra) is a set with an action of the given semigroup on it. The acts over a fixed semigroup form a variety whose signature coincides with self semigroup. On the other hand, it is a category whose morphisms are homomorphisms from one act into another.

It is not difficult to see that the semigroups over which all subdirectly ireducible acts are finite, are exactly the semigroups over which all subdirectly irreducible acts are finitely approximated (in another terminology: residually finite). A more narrow class form semigroups over which all acts are approximated by acts of n or less elements where n is a fixed natural number.

In 2000, I.B.Kozhukhov proved that all non-trivial acts over a semigroup S are approximated by two-element ones if and only if S is a semilattice (a commutative idempotent semigroup). In 2014, I.B.Kozhukhov and A.R.Haliullina proved that any semigroup with bounded orders of dubdirectly irreducible acts is uniformly locally finite, i.e., for every k, the orders of k-generated subsemigroups are bounded. In the work of I.B.Kozhukhov and A.V.Tsarev 2019, the authors described completely the abelian groups over which all acts are finitely approximated, and also abelian groups over which all acts are approximated by acts of bounded orders.

In this work, we characterize the commutative semigroups over which all acts are approximated by acts consisted of n or less elements.

Keywords: commutative semigroup, act over semigroup, subdirectly irreducible act, finite approximation

Bibliography: 19 titles.

For citation:
I. B. Kozhukhov, 2021, "Commutative semigroups with bounded orders of subdirectly irreducible acts", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 188–199.

1. Введение

Полигоном над полугруппой S (или S-полигоном, см. [15]) называется множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$ такое, что $x(ss') = (xs)s'$ при всех $x \in X$, $s, s' \in S$. Хорошо известно, что полигон является алгебраической моделью автомата, при этом X – множество состояний, а S – полугруппа входных сигналов (см. [10, 12]). Вместе с тем полигон является универсальной алгеброй сигнатуры S: каждый элемент $s \in S$ задаёт унарную операцию $x \mapsto xs$ на множестве X.

Пусть X – полигон над полугруппой S. Элемент $z \in X$ называется *нулём*, если $zs = z$ для всех $s \in S$. Полигон называется *унитарным*, если полугруппа S имеет единицу (обозначим её через e) и $xe = x$ для всех $x \in X$. *Конгруэнция* полигона X – это такое отношение эквивалентности ρ на множестве X, что $(x, y) \in \rho \to (xs, ys) \in \rho$ для всех $x, y \in X$, $s \in S$. Хорошо известно, что множество Con$X$ всех конгруэнций полигона X, частично упорядоченное отношением включения, образует полную решётку, являющуюся полной подрешёткой решётки EqX всех отношений эквивалентности на множестве X, причём наименьшим элементом обеих решёток является отношение равенства $\triangle_X = \{(x, x)|x \in X\}$, а наибольшим элементом – универсальное отношение $\nabla = X \times X$. В дальнейшем индекс у $\triangle$ и ∇ будем опускать, если понятно, о каком множестве идёт речь. Конгруэнция $\rho \in$ Con$A$ называется *нетривиальной*, если $\rho \neq \triangle$. Пусть Y – подполигон полигона X (т.е. непустое подмножество такое, что $YS \subseteq Y$). Отношение $\rho_Y = (Y \times Y) \cup \triangle_X$ является конгруэнцией на X, называемой *конгруэнцией Риса*. К любому полигону можно внешним образом присоединить нуль. А именно, пусть $\theta \notin X$. Положим $X^0 = X \cup \{\theta\}$ и $\theta \cdot s = \theta$ для всех $s \in S$. Как обычно, S^1 обозначает наименьшую полугруппу с единицей, содержащую S. Если A – универсальная алгебра и $M \subseteq A$ – непустое подмножество, то $\langle M \rangle$ – подалгебра, порождённая множеством M. Если X – какое-либо множество и ρ – отношение эквивалентности на X, то множество ρ-классов (фактор-множество) мы будем обозначать через X/ρ, а ρ-класс, содержащий элемент $x \in X$, – через $[x]_\rho$ или просто $[x]$.

Универсальная алгебра A называется *подпрямо неразложимой*, если она не может быть разложена в нетривиальное подпрямое произведение нетривиальных алгебр (алгебра A *нетривиальна*, если $|A| > 1$). Интерес к подпрямо неразложимым алгебрам объясняется замечательной теоремой Биркгофа о том, что всякая алгебра разлагается в подпрямое произведение подпрямо неразложимых алгебр (см. [8, теорема 7.3]). Хорошо известно (и легко следует из определений), что нетривиальная алгебра A подпрямо неразложима в том и только том случае, если решётка Con$A$ имеет наименьшую нетривиальную конгруэнцию. Эту конгруэнцию обозначим $\rho_0(A)$ (или просто ρ_0). Понятно, что в подпрямо неразложимой алгебре для любого семейства конгруэнций $\{\rho_i|i \in I\}$ выполняется соотношение $\bigcap_{i \in I} \rho_i \neq \triangle$, если $\rho_i \neq \triangle$ для каждого $i \in I$.

Подпрямо неразложимым алгебрам посвящена обширная литература. Что касается подпрямо неразложимых полигонов над полугруппами, то первой работой, по-видимому, можно считать работу [11]. Эти исследования были продолжены в работе [6], где были охарактеризованы подпрямо неразложимые полигоны над произвольными полугруппами "с точностью до ядра"(наименьшего нетривиального подполигона). В той же работе были описаны подпрямо неразложимые полигоны над прямоугольными связками (т.е. прямыми произведениями полугрупп правых и левых нулей, см. [6, теорема 7]). В работе [14] были описаны коммутативные подпрямо неразложимые полигоны (полигон X над полугруппой S называется коммутативным, если $x(st) = x(ts)$ для всех $x \in X$, $s, t \in S$). Подпрямо неразложимые полигоны над некоторыми другими классами полугрупп описывалмсь в работе [17]. Обобщения подпрямо неразложимых полигонов (однородные и конечно подпрямо неразложимые полигоны) исследовались в [19].

Пусть $\mathcal{K}$ – класс универсальных алгебр одной сигнатуры. Говорят, что алгебра A *аппрок-*

симируется алгебрами класса $\mathcal{K}$, если A может быть разложена в подпрямое произведению алгебр класса $\mathcal{K}$. В работе [3] был введён класс полугрупп S, удовлетворяющих следующему условию:

> ($\diamondsuit$) существует натуральное число n такое, что каждый S-полигон аппроксимируются полигонами, состоящими не более, чем из n элементов.

Эквивалентная формулировка условия ($\diamondsuit$): $|X| \leqslant n$ для любого подпрямо неразложимого S-полигона X.

В теореме 1 уже упоминавшейся работы [3] было доказано, что нильполугруппа удовлетворяет условию ($\diamondsuit$) тогда и только тогда, когда она конечна. Там же были охарактеризованы коммутативные полугруппы с условием ($\diamondsuit$), однако, эта характеризация довольно громоздка. В теореме 1 работы [16] доказывалось, что над полугруппой S все нетривиальные S-полигоны аппроксимируются двухэлементными в том и только том случае, если S – полурешётка (т.е. коммутативная полугруппа идемпотентов). В работе [5] исследования полугрупп с условием ($\diamondsuit$) продолжились. Было доказано, что полугруппа с этим условием равномерно локально конечна – т.е. для каждого $k \in \mathbb{N}$ порядки k-порождённых подполугрупп ограничены в совокупности. Для коммутативной полугруппы S равномерная локальная конечность, очевидно, эквивалентна равномерной периодичности, т.е. выполнению тождества $a^{m+r} = a^m$ при некоторых $m, r > 0$. Наконец, в [7] были охарактеризованы абелевы группы с условием ($\diamondsuit$). Оказалось, что это в точности ограниченные группы, т.е. группы, удовлетворяющие какому-либо тождеству $a^r = 1$.

Цель данной статьи – получить более прозрачную, чем в [3], характеризацию коммутативных полугрупп, удовлетворяющих условию ($\diamondsuit$). Кроме того, мы устанавливаем некоторые неравенства, связывающие числа m, r, n и некоторые другие числовые параметры полугруппы.

Необходимые сведения из теории полугрупп можно найти в [1], теории полигонов в [15], универсальной алгебры в [8].

2. Предварительные результаты

Для дальнейшего нам необходимо получить ряд предварительных результатов. *Ядро* полигона X – это наименьший нетривиальный подполигон. Понятно, что ядро существует тогда и только тогда, когда пересечение всех нетривиальных подполигонов нетривиально. Со всяким полигоном X можно связать граф, у которого множеством вершин является множество X, а рёбрами являются пары (x, xs), где $x \in X$, $s \in S$ и $x \neq xs$. Полигон называется *связным*, если соответствующий граф связен, компонентами связности полигона будем называть компоненты связности графа. Следующее утверждение доказывается непосредственно.

Предложение 1. *Пусть X – полигон над полугруппой S и $|X| > 1$. Тогда:*

(i) если X подпрямо неразложим, то всякий подполигон Y полигона X также подпрямо неразложим;

(ii) если X – полигон без нулей, то X^0 подпрямо неразложим в том и только том случае, если X подпрямо неразложим;

(iii) если X подпрямо неразложим, то X имеет ядро;

(iv) если X подпрямо неразложим, то X имеет не более двух компонент связности, причём если компонент связности две, то хотя бы одна из них состоит из одного элемента;

(v) подпрямо неразложимый полигон имеет не более двух нулей.

Наиболее простой для рассмотрения случай – когда у полигона ровно два нуля. В этом случае условие подпрямой неразложимости полигона даётся следующим утверждением.

Предложение 2. *[6, теорема 1] Полигон X с двумя нулями θ_1, θ_2 над полугруппой S является подпрямо неразложимым в том и только том случае, если для любых элементов $x \neq y$ из X существует $s \in S^1$ такое, что $\{xs, ys\} = \{\theta_1, \theta_2\}$.*

Ещё более простым оказывается этот случай, когда накладывается дополнительное условие коммутативности полигона.

Предложение 3. *Пусть X – коммутативный полигон с двумя нулями θ_1, θ_2. Тогда X подпрямо неразложим в том и только том случае, если $X = \{\theta_1, \theta_2\}$.*

Доказательство. Достаточность здесь очевидна, докажем необходимость. Пусть $x \in X \backslash \{\theta_1, \theta_2\}$. По предложению 1(iii) X имеет ядро, обозначим его через K. Так как $\{\theta_1, \theta_2\}$ – минимальный нетривиальный подполигон, то $K = \{\theta_1, \theta_2\}$. Так как xS^1 – нетривиальный подполигон, то $xS^1 \supseteq K$. Следовательно, существуют элементы $s, t \in S$, для которых $xs = \theta_1$ и $xt = \theta_2$. Отсюда, используя коммутативность полигона, получаем: $\theta_1 = \theta_1 t = xst = xts = \theta_2 s = \theta_2$, но это невозможно. Таким образом, $X = \{\theta_1, \theta_2\}$. $\square$

Пусть X – полигон, имеющий ядро K. В теоремах 2, 3, 5 работы [6] были получены условия подпрямой неразложимости полигона X в зависимости от K и количества нулей в полигоне X.

В работе [18] было замечено, что всякий идемпотент подпрямо неразложимой справа полугруппы (т.е. такой полугруппы S, что S – подпрямо неразложимый S-полигон) является левой единицей или левым нулём. Это утверждение было обобщено на полигоны (см. лемму 3 в [3]). Применительно к коммутативным полигонам мы получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть X – коммутативный подпрямо неразложимый полигон над полугруппой S и $e^2 = e \in S$. Тогда либо $|Xe| = 1$, либо $xe = x$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Так как полигон X коммутативный, то Xe – подполигон. Пусть $\rho_1 = \rho_{Xe}$ (конгруэнция Риса), $\rho_2 = e^{\perp} = \{(x, y) \in X \times X | xe = ye\}$. Очевидно, $\rho_1 \cap \rho_2 = \triangle$. Так как X подпрямо неразложим, то $\rho_1 = \triangle$ или $\rho_2 = \triangle$. Если $\rho_1 = \triangle$, то $|Xe| = 1$, а если $\rho_2 = \triangle$, то $xe = x$ для всех $x \in X$. $\square$

3. Сведе́ние к точному полигону

Пусть X – полигон над полугруппой S. Для каждого $a \in S$ обозначим через φ_a оператор умножения справа на a, т.е. отображение $\varphi_a : X \to X$, $x \mapsto xa$. Далее, обозначим через $T(X)$ полугруппу всех отображений $\alpha : X \to X$, в которой умножение осуществляется слева направо, т.е. $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$. Нетрудно проверить, что $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$, поэтому отображение $\Phi : S \to T(X)$, $a \mapsto \varphi_a$ является гомоморфизмом полугрупп. Пусть $\overline{S} = \Phi(S)$. По теореме об изоморфизме $\overline{S} \cong S/\sigma$, где $\sigma = \ker\Phi$ (ядро гомоморфизма Φ).

Полигон X над полугруппой S называется *точным*, если $\varphi_a \neq \varphi_b$ при $a \neq b$. Нетрудно видеть, что S-полигон X точный в том и только том случае, если $\ker\Phi = \triangle_S$. Полигон X можно рассматривать также как $\overline{S}$-полигон: если $\overline{a} \in \overline{S}$ – σ-класс, содержащий элемент $a \in S$, а $x \in X$, то полагаем $x\overline{a} = xa$. Будем обозначать X, рассматриваемый как S-полигон и как $\overline{S}$-полигон, соответственно через X_S и $X_{\overline{S}}$. Нетрудно видеть, что полигоны X_S и $X_{\overline{S}}$ имеют одни и те же конгруэнции. При этом полигон $X_{\overline{S}}$ точный. Очевидно, полигон X_S подпрямо неразложим в том и только том случае, если $X_{\overline{S}}$ подпрямо неразложим.

Переход от полигона над S к полигону над $\overline{S}$ аналогичен тому, как в теории колец и модулей переходят от произвольного модуля к точному. Роль ядра $\ker\Phi$ там выполняет аннулятор модуля.

При переходе от S к $\overline{S}$ сохраняются все полугрупповые тождества и, в частности, тождество $a^{m+r} = a^m$.

4. NG-образ коммутативной периодической полугруппы

Напомним, что полурешёткой называется частично упорядоченное множество, в котором любое двухэлементное подмножество (а значит, и всякое конечное подмножество) имеет точную нижнюю грань. Хорошо известно, что полурещётка – это в точности коммутативная полугруппа идемпотентов, связь между порядком и операцией такова: $a \cdot b = \inf\{a, b\}$, $a \leqslant b \leftrightarrow ab = a$.

Подполурешётка E_1 полурешётки E называется *направленной вверх*, если

$$\forall x, y \in E \ \ (x \in E' \wedge y \geqslant x \to y \in E').$$

Очевидно, в этом случае множество $E \backslash E_1$, если оно непусто, также является подполурешёткой.

Пусть S – периодическая полугруппа. Обозначим через E множество идемпотентов полугруппы S. Из периодичности следует, что для любого элемента $a \in S$ существует $k > 0$ такое, что $a^k \in E$. В циклической подполугруппе $\langle a \rangle = \{a, a^2, \ldots\}$ в этом случае имеется ровно один идемпотент. Для $e \in E$ положим

$$P(e) = \{a \in S | \exists k \ a^k = e\}.$$

Подмножества $P(e)$ называются *классами кручения*. Очевидно, $S = \bigcup_{e \in E} P(e)$ и $P(e_1) \cap P(e_2) = \emptyset$ при $e_1 \neq e_2$. Для подмножества $E_1 \subseteq E$ положим $S(E_1) = \cup\{P(e) | e \in E_1\}$.

Пусть теперь S – коммутативная периодическая полугруппа. Тогда множество E её идемпотентов и классы кручения $P(e)$ являются подполугруппами. Пусть E' – направленная вверх подполурешётка полурешётки E. Положим $E'' = E \backslash E'$. В этом разделе будет предполагаться, что $E'' \neq \emptyset$. Пусть $\rho_1 = \{(a, b) \in S \times S | \exists e \in E' \ \ ae = be\}$.

Лемма 2. *(i) ρ_1 – конгруэнция полугруппы S;*
(ii) $(e_1, e_2) \in \rho_1$ при $e_1, e_2 \in E'$;
(iii) $[e]_{\rho_1}$ – единица полугруппы S/ρ_1, если $e \in E'$;
(iv) $(a, b) \notin \rho_1$, если $a \in S(E')$, $b \in S(E'')$.
(v) $S/\rho_1 = N \cup G$, где N – идеал полугруппы S/ρ_1, G – подгруппа, причём единица группы G является единицей полугруппы S/ρ_1.

Доказательство. Положим $S_1 = S/\rho_1$. Утверждение (i) очевидно. Так как E' – подполурешётка полугруппы S, то $e_1 e_2 \in E'$ при $e_1, e_2 \in E'$ – отсюда получаем (ii). Так как $(ae, a) \in \rho_1$ при $a \in S$, $e \in E'$, то выполнено (iii). Утверждение (iv) докажем методом "от противного". Пусть $a \in S(E')$, $b \in S(E'')$ и $(a, b) \in \rho_1$. Тогда $ae = be$ при некотором $e \in E'$. Имеем: $a \in P(e_1)$, $b \in P(e_2)$ при некоторых $e_1 \in E'$, $e_2 \in E''$. Отсюда $ae \in P(e_1) \cdot E' \subseteq S(E')$, $be \in P(e_2) S \subseteq S(E'')$, и мы получаем противоречие с равенством $ae = be$.

Положим $N = \{[a]_{\rho_1} | a \in S(E'')\}$, $G = \{[a]_{\rho_1} | a \in S(E')]\}$. Тогда $S_1 = N \cup G$. Очевидно, N – идеал полугруппы S_1. Пусть $a \in S(E')$. Так как S перилдическая, то $a^k = e$ при некоторых $k \in \mathbb{N}$, $e \in E'$. Отсюда следует, что $[a]_{\rho_1} \cdot [e]_{\rho_1} = [a]_{\rho_1}$. Тем самым доказано, что всякий элемент из G имеет обратный, поэтому G – группа. □

Заметим, что ρ_1 – наименьшая конгруэнция среди таких конгруэнций σ, для которых все элементы из E' лежат в одном σ-классе, являющемся единицей полугруппы S/σ.

NG-образом коммутативной периодической полугруппы S мы будем называть гомоморфный образ S/ρ полугруппы S такой, что $S/\rho = N \cup G$, где N – пустое множество или идеал полугруппы S/ρ, являющийся нильполугруппой, G – пустое множество или группа, причём если $G \neq \emptyset$, то единица группы G является единицей полугруппы S/ρ.

Оказывается, что у любой коммутативной периодической полугруппы существует NG-образ. Этот факт нам далее не понадобится, поэтому приведём лишь эскиз доказательства. Пусть S – коммутативная периодическая полугруппа. Возьмём какую-либо направленную вверх подполурешётку E' полурешётки $E = E(S)$ такую, что $E' \neq E$, и положим $E'' = E \setminus E'$. Рассмотрим конгруэнцию ρ_1, определённую выше. Положим $\overline{S} = S/\rho_1$, По предыдущей лемме $\overline{S} = N \cup G$. Пусть $\overline{E}''$ – образ полурешётки E'' при естественном гомоморфизме $S \to \overline{S}$. Нетрудно проверить, что множество $\overline{S}\,\overline{E}''$ – идеал полугруппы $\overline{S}$, а фактор-полугруппа Риса $\overline{S}/\overline{S}\,\overline{E}'' = \overline{N} \cup G$, где $\overline{N}$ – нильидеал.

5. Формулировка основной теоремы. Доказательство необходимости

Следуя А.Г.Пинусу [9], назовём универсальную алгебру A *равномерно локально конечной*, если существует функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что $|\langle a_1, \ldots, a_t\rangle| \leqslant f(t)$ для любого $t \in \mathbb{N}$ и любых $a_1, \ldots, a_t \in A$. Если S – полугруппа и $|\langle a\rangle| \leqslant k$ при некотором k для всех $a \in S$, то полугруппу S естественно назвать *равномерно периодической.* Так как в случае коммутативной полугруппы S имеет место включение $\langle a_1, \ldots, a_t\rangle \subseteq (\langle a_1\rangle \cup \{1\}) \cdot \ldots \cdot (\langle a_t\rangle \cup \{1\})$, то коммутативная равномерно периодическая полугруппа является равномерно локально конечной, можно взять $f(t) = (k+1)^t$.

Основным результатом нашей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Коммутативная полугруппа S удовлетворяет условию $(\diamondsuit)$ при некотором n в том и только том случае, если в S выполняется тождество $a^{m+r} = a^m$ при некоторых $m, r > 0$ и существует функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что для любого NG-образа $\overline{S} = N \cup G$ полугруппы S такого, что G – циклическая группа порядка p^j, где p – простое число, $j \geqslant 0$ и $p^j \mid r$, выполняется неравенство $|N| \leqslant f(r)$.*

Докажем *необходимость.*

Доказательство. Пусть S – коммутативная полугруппа, удовлетворяющая условию $(\diamondsuit)$. Ввиду следствия 10 из [5] S равномерно локально конечна. То есть $|\langle a\rangle| \leqslant k$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ и всех $a \in S$. Имеем: $\langle a\rangle = \{a, a^2, \ldots, a^k\}$ (здесь a^i не обязательно различны). Отсюда $a^{k+1} = a^t$ при некотором $t \leqslant k$. Так как $k+1 > t$, то $k+1 = t+r$ при некотором $r > 0$. Следовательно, $a^{t+r} = a^t$. Существует $j \leqslant r$ такое, что $t + j \equiv 0 \pmod r$. Имеем: $(a^{t+j})^2 = a^{2(t+j)} = a^{t+j+kr} = a^{t+kr} \cdot a^j = a^t \cdot a^j = a^{t+j}$, т.е. a^{t+j} – идемпотент. Таким образом, нами доказано, что для любого $a \in S$ существует $l \leqslant k+1$ такое, что $a^l = a^{2l}$. Пусть $m =$НОК$(1, 2, \ldots, k+1)$. Тогда будем иметь $a^{2m} = a^m$ для всех $a \in S$. Это можно рассматривать как выполнение тождества $a^{m+r} = a^m$ при некоторых $m, r > 0$.

Будем считать, что $m \geqslant 2$, – это не ограничивает общности. Осталось доказать, что порядки $|N|$ нильидеалов N в разложениях $\overline{S} = N \cup G$ со сформулированными в теореме условиями на G ограничены в совокупности. Если это не выполнено, то можно найти такой NG-образ $\overline{S} = N \cup G$, что $|G| \leqslant r$, а $|N| > m^n r$. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на $\overline{S}$:

$$\tau = \{(\overline{a}, \overline{b}) \in \overline{S} \times \overline{S} | \exists g \in G \ \overline{a}g = \overline{b}\}.$$

Непосредственно проверяется, что τ – конгруэнция на $\overline{S}$. Пусть $S_1 = \overline{S}/\tau$. Очевидно, $S_1 = N_1 \cup \{1\}$, где N_1 – нильидеал. Каждый класс конгруэнции τ содержит не более $|G|$ элементов, поэтому $|N_1| > \frac{|N|}{r} \geqslant m^n$.

Так как нильполугруппа N_1 удовлетворяет тождеству $a^{m+r} = a^m$, то $a^m = 0$ для всех $a \in N_1$. Пусть $N_1 \setminus N_1^2 = \{a_1, \ldots, a_t\}$. Тогда любой ненулевой элемент из N_1 представим в виде $a_1^{i_1} \ldots a_t^{i_t}$, поэтому $|N_1| \leqslant m^t + 1$. Вместе с неравенством $|N_1| > m^n$ это даёт неравенство $n \leqslant t$. Полугруппа N_1/N_1^2 – это полугруппа с нулевыи умножением. Её порядок равен $|N_1/N_1^2| = t + 1 \geqslant n + 1$. По лемме 1 из [3] над полугруппой N_1/N_1^2 существует подпрямо неразложимый полигон X такой, что $|X| = n + 1$. Полигон X можно считать полигоном над полугруппой $N_1/N_1^2 \cup \{1\}$, причём свойство быть подпрямо неразложимым сохранится. В свою очередь, полугруппа $N_1/N_1^2 \cup \{1\}$ является гомоморфным образом полугруппы S, поэтому X можно рассматривать как полигон над S, и его подпрямая неразложимость сохранится. Таким образом, над полугруппой S есть плдпрямо неразложимый полигон порядка $n+1$, а это противоречит условию ($\diamondsuit$). $\square$

6. Окончание доказательства основной теоремы: достаточность

Пусть S – коммутативная полугруппа, удовлетворяющая условиям теореммы. В частности, полугруппа S удовлетворяет тождеству $a^{m+r} = a^m$. Очевидно, все гомоморфные образы этой полугруппы также удовлетворяют этому тождеству. Требуется доказать, что порядки $|X|$ подпрямо неразложимых S-полигонов X ограничены в совокупности.

Рассмотрим произвольный подпрямо неразложимый S-полигон X. Переходя от полугруппы S к полугруппе $\overline{S} = S/\ker\Phi$, как это делалось в разделе 3, мы получим, что X – точный $\overline{S}$-полигон.

Обозначим полугруппу $\overline{S}$ снова буквой S, убрав "старое" S из рассмотрения. То есть будем считать, что X – точный подпрямо неразложимый S-полигон, где S – коммутативная полугруппа, удовлетворяющая условию теоремы. Кроме того, будем считать, что $|X| \geqslant 3$, – это не ограничивает общности.

Лемма 3. *Каждый идемпотент полугруппы S – это 1 или 0.*

Доказательство. Пусть $e^2 = e \in S$. По лемме 1 либо $|Xe| = 1$, либо $xe = x$ для всех $x \in X$. Так как полигон X точный, то полугруппа S изоморфна подполугруппе полугруппы $T(X)$. Если $|Xe| = 1$, то ввиду коммутативности полугруппы S имеем: $Xe = \{\theta\}$, где θ – нуль полигона X. Этот нуль у полигона X единственный ввиду предложения 1(v), предложения 3 и условия $|X| \geqslant 3$. Так как полигон X точный, то e – нуль полугруппы S. Если $xe = x$ для всех $x \in X$, то e – единица полугруппы S. $\square$

Из лемм 2 и 3 непосредственно вытекает

Лемма 4. *Если $m + j \equiv 0 \pmod r$, то $a^{m+j} \in \{0, 1\}$ для каждого $a \in S$.*

Лемма 5. *Полугруппа S представима в виде $S = N \cup G$, где N – пустое множество или нильполугруппа, G – пустое множество или группа и N, если непусто, является идеалом полугруппы S.*

Доказательство. Положим $N = \{a \in S | a^{m+j} = 0\}$, $G = \{a \in S | a^{m+j} = 1\}$. По лемме 4 $S = N \cup G$, остальные утверждения проверяются непосредственно. $\square$

Если $N = \emptyset$, то $S = G$ – абелева группа с тождеством $a^r = 1$. По теореме 7 из [7] $|X| \leqslant r$.

Если $G = \emptyset$, то добавим единицу 1 к полугруппе S, положим $x \cdot 1 = x$ для всех $x \in X$ и будем вместо S рассматривать полугруппу $S \cup \{1\}$, обозначая теперь уже новую полугруппу буквой S.

Далее считаем, что $N, G \neq \emptyset$. Согласно предложению 1 X имеет не более двух нулей. Если X не имеет нулей или имеет ровно два нуля, то пл леммам 2 и 5 из [2] $|X| \leqslant \max\{2, r\}$. Нам осталось рассмотреть случай, когда X имеет ровно один нуль, скажем, θ.

Итак, X – подпрямо неразложимый точный полигон над полугруппой $S = N \cup G$, причёи X имеет единственный нуль θ. Кроме того, $a^{m+j} = 0$ при $a \in N$ и $a^{m+j} = 1$ при $a \in G$ для некоторого $j \leqslant r$.

Ввиду предложения 1 полигон X имеет ядро K.

Лемма 6. *Если $\theta \notin K$, то $|X| \leqslant r + 2$.*

Доказательство. Докажем вначале, что $X \setminus \{\theta\}$ – подполигон. Предположим, что это не так. Тогда $xs = \theta$ апм некоторых $x \in X \setminus \{\theta\}$ и $s \in S$. Если $s \in G$, то $s^{m+j} = 1$, откуда получаем, что $x = x \cdot 1 = xs^{m+j} = xs \cdot s^{m+j-1} = \theta$, что противоречит выбору элемента x. Таким образом, $s \in N$. Так как $x \neq \theta$, то $|xS^1| \geqslant 2$, т.е. xS^1 – нетривиальный подполигон. Следовательно, $xS^1 \supseteq K$, а значит, $xa \in K \setminus \{\theta\}$ при некотором $a \in S$. Имеем: $\theta = \theta a = xsa = xas \in K$, что противоречит условию леммы.

Теперь докажем, что $X = K \cup \{\theta\}$. Предлоложим, что это не так. Тогда найдётся $x \in X \setminus (K \cup \{\theta\})$. Так как xS^1 – нетривиальный подполигон, то $xS^1 \supseteq K$. Возьмём такое $s \in S$, что $xs \in K$. Если $s \in N$, то $s^{m+j} = 0$, а значит, $\theta = xs^{m+j} = xs \cdot s^{m+j-1} \in K$, что невозможно. Если $s \in G$, то $s^{m+j} = 1$, поэтому $x = x \cdot 1 = xs \cdot s^{m+j-1} \in K$, что противоречит выбору элемента x.

Итак, $X = K \cup \{\theta\}$. Ясно, что K – подпрямо неразложимый полигон над группой G

Так как G – абелева группа экспоненты, не превосходящей r (это следует из того, что полугруппа S удовлетворяет тождеству $a^{m+r} = a^m$, а значит, её подгруппа G – тождеству $a^r = 1$), то по теореме 7 из [7] $|K| \leqslant r + 1$. Следовательно, $|X| \leqslant r + 2$. □

Ввиду только что доказанной леммы мы можем далее считать, что $\theta \in K$.

Лемма 7. $KN = \{\theta\}$.

Доказательство. Пусть $a \in N$. Так как полугруппа S коммутативна, то Ka – подполигон полигона X. Если $|Ka| \geqslant 2$, то $Ka = K$, а значит, $K \cdot a^{m+j} = K$, $K \cdot 0 = K$, $K = \{\theta\}$, что невозможно. Следовательно, $|Ka| = 1$, т.е. $Ka = \{\theta\}$. □

Лемма 8. *G – циклическая группа порядка $p^j \,|\, r$, где p – простое число.*

Доказательство. Ввиду предложения 1 ядро K полигона X является подпрямо неразложимым S-полигоном, а так как $KN = \{\theta\}$ по только что доказанной лемме, то K является подпрямо неразложимым полигоном над полугруппой $G \cup \{0\}$. Конгруэнции K как $(G \cup \{0\})$-полигона и как G-полигона – одни и те же. Значит, K – подпрямо неразложимый G-полигон. Так как полигон K унитарный, то по теореме 6 из [5] $K \cong (G/H) \cup \{0\}$, где H – некоторая подгруппа. Группа G, а значит, и группа G/H удовлетворяет тождеству $a^r = 1$, т.е. G/H – ограниченная абелева группа. По первой теореме Прюфера (см. [13, теорема 17.2]) она является прямой суммой примарных циклических групп.

Если $G/H \cong A \times B$, где $|A|, |B| \geqslant 2$, то отношения $\rho_1 = \{(ab, ab')| a \in A,\, b, b' \in B\} \cup \Delta_K$, $\rho_2 = \{(ab, a'b)| a, a' \in A,\, b \in B\} \cup \Delta_K$ – конгруэнции полигона K, причём $\rho_1, \rho_2 \neq \Delta_K$, $\rho_1 \cap \rho_2 = \Delta_K$, а это противоречит тому, что K подпрямо неразложим. Таким образом, группа G/H неразложима в прямое произведение, а так как лна удовлетворяет тождеству $a^r = 1$, то G/H – циклическая группа порядка p^j для некоторого простого числа p и целого неотрицательного j, причём $p^j \,|\, r$.

Докажем, что $H = \{1\}$. Предположим, что $H \neq \{1\}$. Возьмём элемент $h_0 \in H \setminus \{1\}$. Так как X точный, то $x_0 h_0 \neq x_0$ при некотором $x_0 \in X$. Пусть $\rho_1 = \{(x, xh)| x \in X < h \in H\}$, $\rho_2 = (K \times K) \cup \Delta_X$. Нетрудно проверить, что $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Con}X$. Так как $(x_0, x_0 h_0) \notin \Delta_X$, то $\rho_1 \neq \Delta_X$. Так как $|K| \geqslant 2$, то $\rho_2 \notin \Delta_X$. Докажем, что $\rho_1 \cap \rho_2 = \Delta_X$. Пусть $(x, xh) \in \rho_2$ и $x \neq xh$. Тогда $x \in K$. Следовательно, либо $x = Hg$ при некотором $g \in G$, либо $x = \theta$. В обоих случаях $xh = x$, что противоречит выбору пары (x, xh). Таким образом, $\rho_1 \cap \rho_2 = \Delta_X$. Но это противоречит подпрямой неразложимости полигона X.

Итак, $H = \{1\}$. Следовательно, G – циклическая группа порядка $p^j \,|\, r$. □

Теперь мы можем завершить доказательство основной теоремы.

Доказательство. Пусть S – полугруппа, в которой выполняется тождество $a^{m+r} = a^m$ и $|N| \leqslant f(r)$ для любого NG-образа $N \cup G$ полугруппы S такого, что G – циклическая группа порядка $p^j \,|\, r$. Возьмём любой подпрямо неразложимый полигон X. Факторизуя полугруппу S

по $\ker \Phi$, как это делалось в разделе 3, мы получим, что X – точный подпрямо неразложимый полигон над NG-образом $N \cup G$ полугруппы S. Если X не имеет нулей или имеет ровно два нуля, то, как отмечалось выше, $|X| \leqslant \max\{2, r\}$. Пучть теперь X имеет единственный нуль. По лемме 8 тогда G – циклическая группа порядка $p^j \,|\, r$, следовательно, $|N| \leqslant f(r)$. Отсюда $|N \cup G| \leqslant f(r) + r$. Так как X – подпрямо неразложимый полигон над $N \cup G$, то по теореме 1 из [4] $|X| \leqslant 2^{f(r)+r+1}$. Этим завершается доказательство теоремы. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клиффорд А., Престон Г. "Алгебраическая теория полугрупп", 1872, т. 1,2. Мир, М., 286 + 432 с.

2. Кожухов И. Б. "Коммутативные полугруппы с ограничениями на подпрямо неразложимые полигоны", 2020, *Информатика и кибернетика (ДонНТУ)*, т. 21, вып. 3, с. 21–24.

3. Кожухов И. Б. "Полугруппы, над которыми все полигоны резидуально конечны", 1998, *Фундаментальная и прикладная математика*, т. 4, вып. 4, с. 1335–1344.

4. Кожухов И. Б. "Условия конечности для подпрямо неразложимых полигонов и модулей", 1998, *Фундаментальная и прикладная математика*, т. 4, вып. 2, с. 763–767.

5. Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. "Полугруппы с финитно аппроксимируемыми полигонами", 2014, *Математические заметки СВФУ*, т. 21, вып. 3 (83), с. 60–67.

6. Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. "Характеризация подпрямо неразложимых полигонов", 2015, *Прикладная дискретная математика*, т. 27, вып. 1, с. 5–16.

7. Кожухов И. Б., Царёв А. В. "Абелевы группы с финитно аппроксимируемыми полигонами", 2019, *Фундаментальная и прикладная математика*, т. 22, вып. 5, с. 81–89.

8. Кон П., "Универсальная алгебра", 1968, Мир, М., 353 с.

9. Пинус А. Г. "Внутренние гомоморфизмы и позитивно-условные термы", 2001, *Алгебра и логика*, т. 40, вып. 2, с. 158–173.

10. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. "Элементы алгебраической теории автоматов", 1994, Высш. школа, М., 191 с.

11. Ройз Е. Н. "О подпрямо неразложимых монарах", 1874, Межвуз. научн. сборник "Упорядоченные множества и решётки", вып. 2, с. 80–94.

12. Сб. статей под ред. М. Арбиба "Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп", 1875, Статистика, М., 335 с.

13. Фукс Л. "Бесконечные абелевы группы", т. 1, 1874, Мир, М., 336 с.

14. Esik Z., Imreh B. "Subdirectly irreducible commutative automata", 1981, *Acta Cybernetica*, vol. 5, iss. 3, pp. 251–260.

15. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. "Monoids, acts and categories", 2000, W. de Gruyter, N.Y., Berlin, xvii + 529 pp.

16. Kozhukhov I. B., "One characteristical property of semilattices", 1997, *Commun. Algebra*, vol. 25, iss. 8, pp. 2569–2577.

17. Moghaddasi Gh., Mahmoudi M., "Subdirectly irreducible acts over some semigroups", 2017, *Bull. Iranian Math. Soc.*, vol. 43, iss. 6, pp. n1913–1924.

18. Rankin S. A., Reis C. M., Thierrin G., "Right subdirectly irreducible semigroups", 1979, *Pacific J. Math.*, vol 85, iss. 2, pp. 403–412.

19. Roueentan M., Sedaghatjoo M. "The structure of subdirectly irreducible and uniform acts over rectangular bands", 2020, *Semigroup Forum*, vol. 101, no. 1, pp. 192–201.

REFERENCES

1. Clifford, A. H. & Preston, G. B. 1961, 1967 "The algebraic theory of semigroups". Vol. I and II, Mathematical Surveys, Number 7, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, xvi + 244 pp. and xv + 350 pp.

2. Kozhukhov, I. B. 2020 "Commutative semigroups with restrictions on subdirectly irreducible acts". Informatics and Cybernetics (DonNTU), vol. 21, no. 3, pp. 21–24. (in Russian)

3. Kozhukhov, I. B. 1998, “Semigroups over which all acts are residually finite”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 4, no. 4, pp. 1335–1344. (in Russian)

4. Kozhukhov, I. B. 1998, “Finiteness conditions for subdirectly irreducible S-acts and modules”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 4, no. 2, pp. 763–767. (in Russian)

5. Kozhukhov, I. B. & Khaliullina, A. R. 2014. "Semigroups with finitely approximated finite acts". Yakutian Math. J., vol. 21, no. 3(83), pp. 52-57. (in Russian)

6. Kozhukhov, I. B. & Khaliullina, A. R. 2015. “A characterization of subdirectly irreducible acts”. Prikl. Diskr. Mat., 2015, vol. 27, no. 1, pp. 5–16. (in Russian)

7. Kozhukhov, I. B. & Tsarev, A.V. 2019. “Abelian groups with finitely approximated acts”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 22, no. 5, pp. 81–89. (in Russian)

8. Cohn, P. M. 1965 "Universal algebra". , Harper & Row, xv + 333 pp.

9. Pinus, A. G. 2001, “Inner homomorphisms and positive-conditional terms”, Algebra and Logic, vol. 40, no. 2, pp. 87–95.

10. Plotkin, B. I. & Gringlaz, L. Ya. & Gvaramiya, A. A. 1994. "Elements of the algebraic theory of automata"Vysshaya Shkola, Moscow, 191 pp. (in Russian)

11. Roiz, E. N. 1974 "On subdirectly irreducible monars", Inter-Univ. Sci. Coll. "Ordered sets and lattices", Saratov, iss. 2, pp. 80–84. (in Russian)

12. "Algebraic theory of machines, languages and semigroups"(Ed. Arbib, M. A.) 1968. Acad. Press, N.Y. – London, 359 pp.

13. Fuchs, L. 1970 "Infinite abelian groups"1970. Acad. Press, N.Y. & Berlin, 290 pp.

14. Ésik, Z. & Imreh, B. 1981, "Subdirectly irreducible commutative automata", Acta Cybernetica, vol. 5, iss. 3, pp. 251–260.

15. Kilp, M. & Knauer, U. & Mikhalev, A. V. "Monoids, acts and categories"2000. W. de Gruyter, N.Y. & Berlin, xvii + 529 pp.

16. Kozhukhov, I. B. 1997 "One characteristical property of semilattices" , Commun. Algebra, vol. 25, iss. 8, pp. 2569–2577.

17. Moghaddasi, Gh. & Mahmoudi, M. 2017 "Subdirectly irreducible acts over some semigroups" , Bull. Iranian Math. Soc., vol. 43, no. 6, pp. 1913–1924.

18. Rankin, S. A. & Reis, C. M. & Thierrin, G. 1979 "Right subdirectly irreducible semigroups" , Pacific J. Math., vol 85, iss. 2, pp. 403–412.

19. Roueentan, M. & Sedaghatjoo, M. 2020 "The structure of subdirectly irreducible and uniform acts over rectangular bands" , Semigroup Forum, vol. 101, no. 1, pp. 192–201.

Получено 29.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-200-212

Филиальные кольца на прямых суммах и прямых произведениях абелевых групп без кручения

Е.И. Компанцева, Т.К.Ч. Нгуен, В.А. Газарян

Екатерина Игоревна Компанцева — Московский педагогический государственный университет; Финансовый университет при Правительстве РФ (г. Москва).
e-mail: kompantseva@yandex.ru
Нгуен Тхи Куинь Чанг — Вьетнамское акционерное общество по сотрудничеству в области образования (Вьетнам).
e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com
Варвара Арамовна Газарян — Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Финансовый университет при Правительстве РФ (г. Москва).
e-mail: vagazaryan@fa.ru

Аннотация

Кольцом на абелевой группе G называется кольцо, аддитивная группа которого совпадает с G. Абелева группа G называется TI-группой, если любое ассоциативное кольцо на G является филиальным. Если любое кольцо (ассоциативное кольцо) на абелевой группе G является SI-кольцом (гамильтоновым кольцом), то G называется SI-группой (SI_H-группой). В работе описаны TI-группы, SI_H-группы, SI-группы в классах почти вполне разложимых групп, сепарабельных групп без кручения и неизмеримых векторных групп. Кроме того, получено описание нередуцированных TI-групп, SI_H-групп и SI-групп, это сводит проблему исследования TI-групп к случаю редуцированных групп.

Ключевые слова: абелева группа, кольцо на абелевой группе, филиальное кольцо, TI-группа.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:
Е.И. Компанцева, Т.К.Ч. Нгуен, В.А. Газарян. Филиальные кольца на прямых суммах и прямых произведениях абелевых групп без кручения // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 200–212.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-200-212

Filial rings on direct sums and direct products of torsion-free abelian groups

E.I. Kompantseva, T.Q.T. Nguyen, V.A. Gazaryan

Ekaterina Igorevna Kompantseva — Moscow Pedagogical State University; Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).
e-mail: kompantseva@yandex.ru
Nguyen Thi Quynh Trang — Vietnam education cooperation joint stock company (Vietnam).
e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com
Varvara Aramovna Gazaryan — Moscow State University named after M.V. Lomonosov; Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow).
e-mail: vagazaryan@fa.ru

Abstract

A ring whose additive group coincides with an abelian group G is called a ring on G. An abelian group G is called a TI-group if every associative ring on G is filial. If every (associative) ring on an abelian group G is an SI-ring (a hamiltonian ring), then G is called an SI-group (an SI_H-group). In this article, TI-groups, SI_H-groups and SI-groups are described in the following classes of abelian groups: almost completely decomposable groups, separable torsion-free groups and non-measurable vector groups. Moreover, a complete description of non-reduced TI-groups, SI_H-groups and SI-groups is given. This allows us to only consider reduced groups when studying TI-groups.

Keywords: abelian group, ring on a group, filial ring, TI-group.

Bibliography: 26 titles.

For citation:
E.I. Kompantseva, T.Q.T. Nguyen, V.A. Gazaryan, 2021, “Filial rings on direct sums and direct products of torsion-free abelian groups”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 200–212.

1. Введение

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu: G \otimes G \to G$. Абелева группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на G. На любой группе G можно определить умножение $\mu: G \otimes G \to 0$, которое называется нулевым. Кольцо с таким умножением называется нуль-кольцом. Если на группе G не существует умножений (ассоциативных умножений), кроме нулевого, то G называется nil-группой (nil_a-группой). Проблема определения кольцевых структур на абелевой группе была поставлена Бьюмонтом [1], который рассматривал кольца на прямых суммах циклических групп.

Одним из направлений теории аддитивных групп колец является изучение абелевых групп, на которых любое кольцо принадлежит определённому классу. Мы рассматриваем классы филиальных, гамильтоновых и SI-колец. Согласно [2], SI-кольцом называется кольцо, в котором любое подкольцо является идеалом. Ассоциативное SI-кольцо называется гамильтоновым кольцом или H-кольцом, поскольку эти структуры в определенном смысле аналогичны гамильтоновым группам. Гамильтоновы кольца систематически изучались многими авторами, наиболее значительные результаты содержатся в [3, 4, 5]. Естественным обобщением гамильтоновых колец являются филиальные кольца, которые были введены в [6] и изучались в [7, 8, 9, 10, 11]. Ассоциативное кольцо называется филиальным, если любой его метаидеал конечного индекса является идеалом. Подкольцо A ассоциативного кольца R называется метаидеалом индекса n, если существует такой ряд $A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = R$, что A_i является идеалом A_{i+1} для всех $i = 0, \cdots, n-1$ [12]. Нетрудно видеть, что ассоциативное кольцо филиально тогда и только тогда, когда в нём отношение «быть идеалом» транзитивно. Отметим, что класс филиальных колец содержит не только гамильтоновы, но и регулярные (в смысле фон Неймана), и простые кольца. В настоящей работе изучаются абелевы группы, на которых любое ассоциативное кольцо является филиальным (гамильтоновым), такие группы называются TI-группами (SI_H-группами), а также SI-группы, то есть абелевы группы на которых любое кольцо является SI-кольцом. Проблема изучения TI-групп сформулирована в [13], там же получено описание периодических TI-групп. С. Фейгельстоком в [2] были введены SI-группы и SI_H-группы , там же и в [14] описаны такие группы в классе периодических абелевых групп. Кроме того, в [15] описаны TI-группы, SI-группы и SI_H-группы в классе алгебраически компактных абелевых групп. Отметим, что если $\mathcal{NIL}$ – класс всех nil-групп, $\mathcal{SI}$ – класс всех SI-групп, $\mathcal{SI_H}$ – класс всех SI_H-групп, $\mathcal{TI}$ – класс всех TI-групп, то из определений следует, что

$$\mathcal{NIL} \subseteq \mathcal{SI} \subseteq \mathcal{SI_H} \subseteq \mathcal{TI}.$$

Работа посвящена изучению TI-групп, SI_H-групп и SI-групп без кручения. В разделе 2, описаны нередуцированные TI-группы, SI_H-группы и SI-группы, это позволило в дальнейшем при исследовании TI-групп ограничиться редуцированным случаем. Известно, что прямое слагаемое TI-группы (SI-группы, SI_H-группы) является TI-группой [16] (SI-группой [2], SI_H-группой [14]). Однако каждый из этих классов не замкнут относительно взятия прямых сумм и прямых произведений групп. Этот факт определил выбор классов редуцированных абелевых групп для описания в них TI-групп, SI-групп, SI_H-групп. В разделах 3 и 4 такие группы описаны в следующих классах абелевых групп, так или иначе связанных с прямыми суммами и прямыми произведениями групп без кручения ранга 1: почти вполне разложимых групп, сепарабельных групп без кручения и векторных групп. Отметим, что ни один из этих классов не содержится в объединении двух других. В заключении показано, что для групп из рассмотренных классов, ранг которых больше 1, понятия TI-группы, SI_H-группы, SI-группы и nil-группы совпадают.

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа». Умножение $\mu : G \otimes G \to G$ на группе G часто обозначается знаком $\times$ и т. п., то есть $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением $\times$ определяет кольцо на группе G, которое обозначается $(G, \times)$. Кольцо $(G, \times)$ называется нуль-кольцом, если $g_1 \times g_2 = 0$ для любых $g_1, g_2 \in G$. Как обычно, $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{P}$ – множества натуральных, целых неотрицательных, всех простых чисел соответственно, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ – группа (поле) рациональных чисел, $\mathbb{Z}(n)$ – циклическая группа порядка n. Пусть G – группа, $g \in G$ и $(G, \times)$ – кольцо на G, через $(g)_\times$ и $\langle g \rangle_*$ будем обозначать соответственно идеал кольца $(G, \times)$ и сервантную подгруппу группы G, порожденные элементом g. Характеристика, тип и порядок элемента $g \in G$ обозначаются $\chi(g)$, $t(g)$ и $o(g)$ соответственно. Под $T(G)$ понимается периодическая часть группы G, $r(G)$ – ранг группы G, $\overline{G}$ – делимая оболочка группы G. Через π_A обозначается проекция группы $G = A \oplus B$ на подгруппу A. Циклический модуль над ассоциативным кольцом R, порожденный элементом e, будем записывать в виде Re. Запись $A \lhd R$ означает, что A – идеал кольца R. За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [17].

2. Нередуцированные TI-группы

В этом разделе описаны TI-группы, SI_H-группы и SI-группы в классе нередуцированных групп. Полученное описание позволяет свести проблему исследования TI-групп, SI_H-групп и SI-групп к случаю редуцированных групп.

Замечание 1. *Согласно теореме 1 в [8], кольцо $(G, \times)$ – филиально тогда и только тогда, когда*

$$(g)_\times = (g)_\times^2 + \mathbb{Z}g$$

для любого $g \in G$.

Лемма 1. *Пусть $G = \mathbb{Q} \oplus A$, где $A \neq T(A)$. Тогда G не является TI-группой.*

Доказательство. Запишем группу G в виде $G = \mathbb{Q}e \oplus A$, где $e \in G$ и выберём произвольный элемент $a \in A \setminus T(A)$. Делимую оболочку $\overline{G}$ группы G можно представить в виде $\overline{G} = \mathbb{Q}e \oplus \mathbb{Q}a \oplus B$ для некоторой группы B. Положим $a \times a = e$, $(\mathbb{Q}e \oplus B) \times \overline{G} = \overline{G} \times (\mathbb{Q}e \oplus B) = 0$. Эти соотношения определяют ассоциативное и коммутативное умножение на $\overline{G}$, при этом G – подкольцо кольца $(\overline{G}, \times)$. В кольце $(G, \times)$ рассмотрим множества

$$(a)_\times = a \times G + \mathbb{Z}a = \mathbb{Q}e + \mathbb{Z}a,$$

$$(a)_\times^2 + \mathbb{Z}a = \mathbb{Q}e \times (a)_\times + \mathbb{Z}a \times (a)_\times + \mathbb{Z}a = \mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}a.$$

Значит, $(a)_\times \neq (a)_\times^2 + \mathbb{Z}a$, откуда в силу замечания 1 кольцо $(G, \times)$ не является филиальным. Следовательно, G не является TI-группой. $\square$

Замечание 2. *Любая группа без кручения ранга 1 является TI-группой [13].*

Теорема 1. *1) Нередуцированная непериодическая группа G является TI-группой тогда и только тогда, когда $G = \mathbb{Q} \oplus \Big[\bigoplus\limits_{p \in P_0} \mathbb{Z}(p)\Big]$ при некотором $P_0 \subseteq \mathbb{P}$ (если $P_0 = \varnothing$, полагаем $\bigoplus\limits_{p \in P_0} \mathbb{Z}(p) = 0$).*

2) Нередуцированная периодическая группа G является TI-группой тогда и только тогда, когда

$$G = \Big[\bigoplus_{p \in P_0} D_p\Big] \oplus \Big[\bigoplus_{p \in P_0'} \mathbb{Z}(p)\Big] \oplus \Big[\bigoplus_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p^{n_p})\Big] \oplus \Big[\bigoplus_{p \in P_2} (\mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(p))\Big],$$

где P_0, P_1, P_2 – попарно непересекающиеся множества простых чисел, $P_0 \neq \varnothing$ и $P_0' \subseteq P_0$, D_p – делимая p-группа ($p \in P_0$), $n_p > 1$ для всех $p \in P_1$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть G – нередуцированная непериодическая TI-группа. По теореме 3 в [13] периодическая часть группы G имеет вид $T(G) = \bigoplus\limits_{p \in P_0} \mathbb{Z}(p)$ при некотором $P_0 \subseteq \mathbb{P}$. Следовательно, G содержит подгруппу, изоморфную группе $\mathbb{Q}$. По лемме 1 имеем $G = \mathbb{Q} \oplus T(G) = \mathbb{Q} \oplus \bigoplus\limits_{p \in P_0} \mathbb{Z}(p)$, где $P_0 \subseteq \mathbb{P}$.

Обратно, если $G = \mathbb{Q} \oplus \bigoplus\limits_{p \in P_0} \mathbb{Z}(p)$ при некотором $P_0 \subseteq \mathbb{P}$, то G является TI-группой в силу замечания 2 и замечания 3.4 в [16].

Утверждение 2) следует из теоремы 1 в [13]. $\square$

Замечание 3. *Прямое слагаемое TI-группы (SI-группы, SI_H-группы) является TI-группой [16] (SI-группой [2], SI_H-группой [14]).*

В следующей теореме описаны SI-группы и SI_H-группы в классе всех нередуцированных групп.

Теорема 2. *Для нередуцированной группы G следующие условия равносильны:*

1) G – SI-группа,

2) G – SI_H-группа,

3) $G = \Big[\bigoplus\limits_{p\in P_0} D_p\Big] \oplus \Big[\bigoplus\limits_{p\in P_0'} \mathbb{Z}(p)\Big] \oplus \Big[\bigoplus\limits_{p\in P_1} \mathbb{Z}(p^{n_p})\Big]$, где P_0, P_1 – непересекающиеся множества простых чисел, $P_0 \neq \varnothing$ и $P_0' \subseteq P_0$, D_p – делимая p-группа ($p \in P_0$), $n_p > 1$ для всех $p \in P_1$.

Доказательство. То, что из 1) следует 2), очевидно. Из 3) следует 1) в силу теоремы 7 в [2].

Докажем, что из 2) следует 3). Пусть G – нередуцированная SI_H-группа. Допустим, $G \neq T(G)$. Тогда по теореме 3.10 в [14] имеем $T(G) = \bigoplus\limits_{p\in S} \mathbb{Z}(p^{n_p})$, где $S \subseteq \mathbb{P}$, $n_p \in \mathbb{N}$ для всех $p \in S$. Значит, группа G содержит подгруппу, изоморфную группе $\mathbb{Q}$. Так как в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ существует подкольцо $\mathbb{Z}$, которое не является идеалом, то аддитивная группа $\mathbb{Q}$ не является SI_H-группой. Следовательно, SI_H-группой не является и группа G в силу замечания 3. Значит, любая нередуцированная SI_H-группа является периодической. По замечанию 2.4 в [14] и теореме 7 в [2] периодическая группа G является SI_H-группой тогда и только тогда, когда $G = \Big[\bigoplus\limits_{p\in P_0} D_p\Big] \oplus \Big[\bigoplus\limits_{p\in P_0'} \mathbb{Z}(p)\Big] \oplus \Big[\bigoplus\limits_{p\in P_1} \mathbb{Z}(p^{n_p})\Big]$, где P_0, P_1 – непересекающиеся множества простых чисел, $P_0 \neq \varnothing$ и $P_0' \subseteq P_0$, D_p – делимая p-группа ($p \in P_0$), $n_p > 1$ для всех $p \in P_1$. □

3. TI-группы в классе почти вполне разложимых групп

В этом разделе описаны TI-группы в классе почти вполне разложимых групп. Группа без кручения конечного ранга называется почти вполне разложимой (*ПВР*-группой), если она содержит вполне разложимую подгруппу конечного индекса. Теория *ПВР*-групп интенсивно развивается в последнее двацатилетие (см. [18, 19, 20] и др.), за эти годы она выделилась в самостоятельную ветвь общей теории абелевых групп. В ряде работ (см. [21, 22]) изучаются кольца на *ПВР*-группах.

Лемма 2. *Пусть $G = A \oplus B$, $m \in \mathbb{N}$, где $B \neq T(B)$, A – редуцированная группа, на которой существует такое ассоциативное кольцо $(A, \cdot)$, что $m(A \cdot A) \neq 0$. Тогда существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(G, \times)$, для которого $G \times G \subseteq mG$.*

Доказательство. Определим умножение $\times$ на G, положив

$$(a_1 + b_1) \times (a_2 + b_2) = m(a_1 \cdot a_2),$$

для любых $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$. По условию существует такие элементы $a, c \in A$ и такое $t \in \mathbb{Z}$, что $t \nmid m(a \cdot c)$. Отметим, что кольцо $(G, \times)$ – ассоциативно, $G \times G \subseteq mA \subseteq mG$ и $t \nmid a \times c$. Пусть $b \in B \setminus T(B)$ и $g = ta + b$. Тогда

$$(g)_\times \subseteq tA + \mathbb{Z}g,$$
$$(g)^2_\times + \mathbb{Z}g \subseteq t^2 A + \mathbb{Z}g.$$

Рассмотрим элемент $ta \times c = g \times c \in (g)_\times$. Допустим, $ta \times c \in (g)^2_\times + \mathbb{Z}g$, тогда $ta \times c = t^2 x + kta + kb$ при некоторых $x \in A$ и $k \in \mathbb{Z}$. Так как $o(b) = \infty$, то $k = 0$. Значит, $ta \times c = t^2 x$, откуда $a \times c = tx$, что противоречит выбору числа t и элементов a, c. Следовательно, $(g)_\times \neq (g)^2_\times + \mathbb{Z}g$, и поэтому кольцо $(G, \times)$ не является филиальным. □

Следствие 1. *Пусть $G = A \oplus B$, где $B \neq T(B)$, A – редуцированная группа без кручения, не являющаяся nil_a-группой. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(G, \times)$ такое, что $G \times G \subseteq mG$.*

Пусть $\mathfrak{T}$ – некоторая система типов, будем говорить, что $\mathfrak{T}$ удовлетворяет nil-условию, если $t_1 t_2 \nleq t_3$ для любых $t_1, t_2, t_3 \in \mathfrak{T}$ (среди типов t_1, t_2, t_3 которых могут быть совпадающие).

Лемма 3. *Пусть $G = \bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ – вполне разложимая группа, $r(G_i) = 1$ при $i \in I$. Пусть $r(G) \geq 2$ и система $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ не удовлетворяет nil-условию. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(G, \times)$ такое, что $G \times G \subseteq mG$.*

Доказательство. Если среди групп G_i есть группа идемпотентного типа, то G не является TI-группой в силу следствия 1. Пусть все группы G_i $(i \in I)$ имеют неидемпотентный тип. Возможны следующие случаи.

Случай 1. $t(G_k) \cdot t(G_k) \leq t(G_s)$ при некоторых $k, s \in I,\ k \neq s$.

Тогда группа G имеет вид $G = G_k \bigoplus G_s \bigoplus \bigoplus\limits_{i \notin \{k,s\}} G_i$. Группы G_k и G_s можно представить в виде $G_k = R_k e_k$, $G_s = R_s e_s$, где R_k, R_s – подгруппы группы $\mathbb{Q}$ такие, что $\mathbb{Z} \leq R_k \leq R_s$, $e_k \in G_k,\ e_s \in G_s$, причем $\chi(e_k) \cdot \chi(e_k) \leq \chi(e_s)$. Определим ассоциативное и коммутативное умножение $\times$ на группе G, положив $e_k \times e_k = me_s$ и $G_i \times G_j = 0$, если $i \neq k$ или $j \neq k$. Очевидно, $G \times G \subseteq mG$. В кольце $(G, \times)$ идеал $(e_k)_\times$ имеет вид $(e_k)_\times = mR_k e_s \oplus \mathbb{Z}e_k$. Тогда

$$(e_k)^2_\times + \mathbb{Z}e_k = m\mathbb{Z}e_s \oplus \mathbb{Z}e_k.$$

Так как $t(e_k)$ неидемпотентный тип, то найдется $p \in \mathbb{P}$ такое, что $p \nmid m$ и $\dfrac{1}{p}e_k \in R_k e_k$. Имеем $\dfrac{m}{p}e_s = \dfrac{1}{p}e_k \times e_k \in (e_k)_\times$. С другой стороны, так как $\dfrac{m}{p} \notin \mathbb{Z}$, то $\dfrac{m}{p}e_s \notin (e_k)^2_\times + \mathbb{Z}e_k$. Следовательно, кольцо $(G, \times)$ не является филиальным.

Случай 2. $t(G_k) \cdot t(G_s) \leq t(G_s)$ при некоторых $k, s \in I,\ k \neq s$.
Так как $t(G_k) \leq t(G_k) \cdot t(G_s) \leq t(G_s)$ по условию, то $t(G_k) \cdot t(G_k) \leq t(G_k) \cdot t(G_s) \leq t(G_s)$. Значит, группы G_k и G_s удовлетворяют случаю 1, поэтому существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(G, \times)$, для которого $G \times G \subseteq mG$.

Случай 3. $t(G_k) \cdot t(G_l) \leq t(G_s)$ при некоторых $k, l, s \in I,\ k \neq l,\ k \neq s,\ l \neq s$.

Тогда G имеет вид $G = G_k \bigoplus G_l \bigoplus G_s \bigoplus \bigoplus\limits_{i \notin \{k,l,s\}} G_i$. Группы G_k, G_l и G_s можно представить в виде $G_k = R_k e_k$, $G_l = R_l e_l$, $G_s = R_s e_s$, где R_k, R_l, R_s – подгруппы группы $\mathbb{Q}$, $e_k \in G_k,\ e_l \in G_l,\ e_s \in G_s$, причем $\chi(e_k) \cdot \chi(e_l) \leq \chi(e_s)$. На группе G определим ассоциативное и коммутативное кольцо $(G, \times)$, положив $e_k \times e_l = e_l \times e_k = me_s$, и $G_i \times G_j = 0$, если $(i, j) \neq (k, l)$ или $(i, j) \neq (l, k)$. Тогда $G \times G \subseteq mG$ и идеал $(e_k)_\times$ имеет вид $(e_k)_\times = R_k R_l e_s + \mathbb{Z}e_k$. Нетрудно видеть, что $(e_k)^2_\times = 0$, и, значит, $(e_k)^2_\times + \mathbb{Z}e_k = \mathbb{Z}e_k$. Так как $me_s = e_k \times e_l \in (e_k)_\times$ и $me_s \notin (e_k)^2_\times + \mathbb{Z}e_k$, то кольцо $(G, \times)$ не является филиальным. $\square$

Теорема 3. *Пусть $G = \bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ – вполне разложимая группа, $r(G_i) = 1$ при $i \in I$, $r(G) \geq 2$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) G – TI-группа;

2) система $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ удовлетворяет nil-условию;

3) G – nil-группа;

4) G – nil_a-группа.

Доказательство. Из 1) следует 2) по лемме 3. Согласно теореме 3.1 в [23], группа G является nil-группой тогда и только тогда, когда $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ удовлетворяет nil-условию, поэтому 2) влечет 3). То, что из 3) следует 4), а из 4) следует 1), легко получить из определений. □

Теорема 3 и замечание 2 позволяют описать TI-группы в классе вполне разложимых групп.

Следствие 2. *Вполне разложимая группа $G = \bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ является TI-группой тогда и только тогда, когда $r(G) = 1$ или система типов $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ удовлетворяет nil-условию.*

Замечание 4. *Для вполне разложимой группы $G = \bigoplus\limits_{i\in I} G_i$, где $r(G_i) = 1$, система $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ является инвариантом [25], поэтому описание вполне разложимых TI-групп в следствии 2 не зависит от разложения группы G в прямую сумму групп ранга 1.*

Рассмотрим теперь TI-группы в классе почти вполне разложимых групп (*ПВР*-групп). Любая *ПВР*-группа G содержит однозначно определенную вполне разложимую подгруппу $R(G)$ конечного индекса, которая является вполне характеристикой подгруппой группы G и называется её регулятором. Индекс регулятора $R(G)$ в группе G называется регуляторным индексом.

Пусть G – группа без кручения. Для произвольного типа t определим вполне характеристические подгруппы группы G:

$$G(t) = \{g \in G \mid t(g) \geq t\}, \qquad G^*(t) = \langle g \in G \mid t(g) > t\rangle,$$

$$G^\sharp(t)\ -\ \text{сервантная оболочка группы } G^*(t).$$

Тип t называется критическим для группы без кручения G, если $G(t)/G^\sharp(t) \neq 0$ [18, определение 2.4.6]. Множество $T_{cr}(G)$ всех критических типов группы G совпадает с множеством $T_{cr}(R(G))$ всех критических типов регулятора $R(G)$. При этом множество $T_{cr}(R(G))$ определяется разложением $R(G)$ в прямую сумму групп ранга 1 и является инвариантом группы G.

Лемма 4. *Редуцированная ПВР-группа G является nil-группой (nil_a-группой) тогда и только тогда, когда её регулятор $R(G)$ является nil-группой (nil_a-группой).*

Доказательство. Пусть G – nil-группа (nil_a-группа) и $\times$ – умножение (ассоциативное умножение) на $R(G)$. Пусть регуляторный индекс равен n. Определим умножение $\circ$ на G, положив $g_1 \circ g_2 = ng_1 \times ng_2$. Заметим, что если $\times$ – ассоциативное умножение, то и умножение $\circ$ ассоциативно. Так как G – nil-группа (nil_a-группа), то $\circ$ – нулевое умножение. Значит, $0 = a \circ b = n^2(a \times b)$ для любых $a, b \in R(G)$. Следовательно, $\times$ – нулевое умножение на $R(G)$, откуда $R(G)$ – nil-группа (nil_a-группа).

Пусть теперь $R(G)$ – nil-группа (nil_a-группа) и $\times$ – умножение (ассоциативное умножение) на G. Так как $R(G)$ – вполне характеристическая подгруппа группы G, то определено кольцо $(R(G), \times)$, которое является нуль-кольцом. Умножение $\times$ на группе G однозначно продолжается до умножения на её делимой оболочке $\overline{G}$, которая совпадает с делимой оболочкой регулятора $R(G)$. Значит, $(\overline{G}, \times) = (\overline{R(G)}, \times)$ – нуль-кольцо, откуда и $(G, \times)$ – нуль-кольцо. Следовательно, G – nil-группа (nil_a-группа). □

Лемма 5. *Пусть A – подгруппа индекса n группы без кручения G. Пусть на A существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(A, \times)$ такое, что $A \times A \subseteq n^2 A$. Тогда G не является TI-группой.*

Доказательство. Так как $nG \subseteq A$, то делимая оболочка $\overline{A}$ группы A совпадает с делимой оболочкой $\overline{G}$ группы G. Умножение $\times$ на A однозначно продолжается до умножения на группе

$\overline{A} = \overline{G}$. Нетрудно видеть, что G является подкольцом кольца $(\overline{G}, \times)$. Действительно, пусть $g_1, g_2 \in G$, тогда в кольце $(\overline{G}, \times)$ имеем $ng_1 \times ng_2 \in A \times A \subseteq n^2 A$. Значит, $n^2(g_1 \times g_2) = n^2 a$ при некотором $a \in A$, откуда $g_1 \times g_2 \in A$. Так как $G \times A \subseteq A$ и $A \times G \subseteq A$, то A – идеал кольца $(G, \times)$.

Так как кольцо $(A, \times)$ по условию не является филиальным, то найдутся подкольца J, K кольца $(A, \times)$ такие, что $J \lhd K \lhd A$ и J не является идеалом кольца A. Следовательно, в кольце $(G, \times)$ имеем $J \lhd K \lhd A \lhd G$ и J не является идеалом кольца G. Значит, кольцо $(G, \times)$ нефилиально, и группа G не является TI-группой. □

Теорема 4. *Пусть G – почти вполне разложимая группа с регулятором $R(G)$, $r(G) > 1$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) G является TI-группой;

2) $T_{cr}(G)$ удовлетворяет nil-условию;

3) $R(G)$ является TI-группой;

4) $R(G)$ является nil_a-группой;

5) $R(G)$ является nil-группой;

6) G является nil-группой;

7) G является nil_a-группой;

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть G – TI-группа, $A = R(G)$, n – регуляторный индекс группы G, $T_{cr}(G)$ не удовлетворяет nil-условию. Тогда по лемме 3 существует ассоциативное нефилиальное кольцо $(A, \times)$, для которого $A \times A \subseteq n^2 A$. Следовательно, G не является TI-группой по лемме 5.

По теореме 3 получаем 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5). По лемме 4 имеем 5) $\Rightarrow$ 6). Нетрудно видеть, что из 6) следует 7), а из 7) следует 1). □

Теорема 4 и замечание 2 позволяют описать TI-группы в классе *ПВР*-групп.

Следствие 3. *Почти вполне разложимая группа G является TI-группой тогда и только тогда, когда $r(G) = 1$ или множество $T_{cr}(G)$ крических типов группы G удовлетворяет nil-условию.*

4. Сепарабельные и векторные TI-группы

Далее мы перейдём к описанию сепарабельных TI-групп без кручения. Группа без кручения G называется сепарабельной, если каждое конечное подмножество элементов из G содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы G. Любая вполне разложимая группа является сепарабельной. Однако лишь несчетные сепарабельные группы представляют собой нечто новое, так как счетная сепарабельная группа вполне разложима [24].

Пусть A – сервантная подгруппа группы без кручения G. Согласно [24], элемент $g \in G \setminus A$ назовем собственным относительно A, если $\chi(g) \geq \chi(g + a)$ для всех $a \in A$. Это условие равносильно тому, что $\chi_G(g) = \chi_{G/A}(g + A)$. Элемент $g \in G$ назовем примитивным типа t, если $g \in G(t) \setminus G^*(t)$ и g – собственный элемент относительно $G^*(t)$.

Замечание 5. *[24] Пусть G – сепарабельная группа без кручения. Элементы $g_1, \cdots, g_n \in G$, имеющие различные типы, примитивны тогда и только тогда, когда $\langle g_1, \cdots, g_n \rangle_*$ – прямое слагаемое группы G, причём $\langle g_1, \cdots, g_n \rangle_* = \langle g_1 \rangle_* \oplus \cdots \oplus \langle g_n \rangle_*$.*

Теорема 5. *Пусть G – несчетная сепарабельная группа без кручения. Тогда следующие условия равносильны:*

1) G является TI-группой;

2) система типов всех примитивных элементов группы G удовлетворяет nil-условию;

3) G является nil-группой;

4) G является nil_a-группой.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть G – TI-группа и пусть $g_1, \cdots, g_n$ ($n \in \mathbb{N}$) – примитивные элементы группы G, причем типы элементов $g_1, \cdots, g_n$ различны, если $n \geq 2$. В силу замечания 5 группу G можно представить в виде $G = \langle g_1 \rangle_* \oplus \cdots \oplus \langle g_n \rangle_* \oplus A$ для некоторой группы A. Сумма $S = \langle g_1 \rangle_* \oplus \cdots \oplus \langle g_n \rangle_*$ является TI-группой в силу замечания 3. По следствию 1 все типы $t(g_1), \cdots, t(g_n)$ неидемпотентны. Поэтому, если $n = 1$, то множество $\{t(g_1)\}$ удовлетворяет nil-условию. Если $n \geq 2$, то множество $\{t(g_1), \cdots, t(g_n)\}$ удовлетворяет nil-условию по теореме 3. Таким образом, система типов всех примитивных элементов удовлетворяет nil-условию.

Покажем, что из 2) следует 3). Пусть система типов всех примитивных элементов группы G удовлетворяет nil-условию, и пусть $(G, \times)$ – произвольное кольцо на G. Пусть $x, y \in G$, тогда существует разложение $G = B \oplus C$ группы G, в котором C – группа без кручения, $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ – такая вполне разложимая группа, что $n \geq 2$, элементы x, y и $x \times y$ принадлежат B, $r(B_i) = 1$ ($i = \overline{1, n}$).

Определим умножение $\times_B$ на группе B, положив $a \times_B b = \pi_B(a \times b)$ для любых $a, b \in B$. Так как, согласно замечанию 5, каждый из типов $t(B_i)$, где $i = \overline{1, n}$, является типом некоторго примитивного элемента, то система $\{t(B_i) \mid i = \overline{1, n}\}$ удовлетворяет nil-условию. Следовательно, B является nil-группой по теореме 3, отсюда, $x \times y = \pi_B(x \times y) = x \times_B y = 0$. Значит, $(G, \times)$ – нуль-кольцо. Таким образом, G является nil-группой.

То, что из 3) следует 4), а из 4) следует 1), очевидно. □

Теоремы 3, 5 и замечание 2 позволяют описать TI-группы в классе сепарабельных групп без кручения.

Следствие 4. *Сепарабельная группа без кручения G является TI-группой тогда и только тогда, когда $r(G) = 1$ или система типов всех примитивных элементов группы G удовлетворяет nil-условию.*

Далее мы опишем TI-группы в классе неизмеримых векторных групп. Векторной группой называют прямое произведение групп без кручения ранга 1. Отметим, что векторная группа в общем случае не является сепарабельной, критерий сепарабельности векторных групп получен в [26]. Напомним, что множество I называется измеримым, если оно допускает счетно аддитивную меру η, принимающую значения 0 и 1, такую, что $\eta(I) = 1$, $\eta(\{x\}) = 0$ для любого $x \in I$ [17]. Отметим, что до сих пор неизвестно, противоречит ли аксиомам теории множеств гипотеза о существовании измеримых чисел.

Теорема 6. *Пусть $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$, где $r(G_i) = 1$, I – бесконечное неизмеримое множество. Тогда следующие условия равносильны:*

1) G является TI-группой;

2) система типов $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ удовлетворяет nil-условию;

3) G является nil-группой;

4) G является nil_a-группой.

Доказательство. Докажем, что из 1) следует 2). Допустим, система $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ не удовлетворяет nil-условию. Тогда группа G обладает вполне разложимым прямым слагаемым $B = \bigoplus_{i \in I_1} G_i$, где I_1 – конечное подмножество множества I, $|I_1| \geq 2$ и система $\{t(G_i) \mid i \in I_1\}$ не удовлетворяет nil-условию. По теореме 4 группа B не является TI-группой, значит, и группа G не является TI-группой.

Если система $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ удовлетворяет nil-условию, то G является nil-группой по теореме 3 в [23].

Нетрудно видеть, что из 3) следует 4), а из 4) следует 1). □

Замечание 6. *Для векторной группы $G = \prod_{i \in I} G_i$, где $r(G_i) = 1$ и множество I неизмеримо, система $\{t(G_i) \mid i \in I\}$ является инвариантом [25]. Поэтому описание векторных TI-групп в теореме 6 не зависит от разложения группы G в прямое произведение групп ранга 1.*

Замечание 7. *Отметим, что теоремы 3, 4, 5, 6, а также следствия 2, 3, 4 сформулированы для всех групп из соответствующих классов, а не только для редуцированных. Действительно, если в некотором множестве типов $\mathfrak{T}$ есть тип $t(\mathbb{Q}) = (\infty, \infty, \cdots)$, то $\mathfrak{T}$ не удовлетворяет nil-условию.*

5. Заключение

В заключение обобщим некоторые из полученных результатов. Пусть $\mathfrak{K}$ – объединение классов почти вполне разложимых групп, сепарабельных групп без кручения и неизмеримых векторных групп, $\mathfrak{K}_2 = \{G \in \mathfrak{K} \mid r(G) \geq 2\}$.

Теорема 7. *Пусть $G \in \mathfrak{K}_2$. Тогда следующие утверждения равносильны:*
1) G – nil-группа;
2) G – SI-группа;
3) G – SI_H-группа;
4) G – TI-группа.

Доказательство. Нетрудно видеть, что 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 4). То, что из 4) следует 1), получаем из теорем 4, 5, 6. □

Как уже отмечалось, имеют место включения

$$\mathcal{NIL} \subseteq \mathcal{SI} \subseteq \mathcal{SI}_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{TI}.$$

В общем случае данные включения нельзя заменить равенством ни на каком месте, соответствующие примеры приведены в [14, 16]. Однако в силу теоремы 7 для класса $\mathfrak{K}_2$ имеют мето равенства

$$\mathcal{NIL} \cap \mathfrak{K}_2 = \mathcal{SI} \cap \mathfrak{K}_2 = \mathcal{SI}_{\mathcal{H}} \cap \mathfrak{K}_2 = \mathcal{TI} \cap \mathfrak{K}_2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beaumont R. A. Rings with additive groups which is the direct sum of cyclic groups // Duke Math. J. 1948. Vol. 15, №2. P. 367-369.

2. Feigelstock S. Additive groups of rings whose subrings are ideals // Bull. Austral. Math. Soc. 1997. Vol. 55. P. 477-481.

3. Redei L. Vollidealringe im weiteren Sinn. I // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1952. Vol. 3. P. 243-268.
4. Андриянов В. И. Периодические гамильтоновы кольца // Матем. сб. 1967. Vol. 74(116). №2. С. 241-261
5. Kruse R. L. Rings in which all subrings are ideals // Canad. J. Math. 1968. Vol. 20. P. 862-871.
6. Ehrlich G. Filial rings // Portugal. Math. 1983-1984. Vol. 42. P. 185-194.
7. Sands A. D. On ideals in over-rings // Publ. Math. Debrecen. 1988. Vol. 35. P. 273-279.
8. Andruszkiewicz R., Puczylowski E. On filial rings// Portugal. Math. 1988. Vol. 45, №2. P. 139-149.
9. Filipowicz M., Puczylowski E. R. Left filial rings // Algebra Colloq. 2004. Vol. 11. P. 335-344.
10. Filipowicz M., Puczylowski E. R. On filial and left filial rings // Publ. Math. Debrecen 2005. Vol. 66. P. 257-267.
11. Andruszkiewicz R., Pryszczepko K. On fully filial torsion rings // Bull. Korean Math. Soc. 2019. Vol. 56. №1. P. 23-29.
12. Baer R. Meta ideals. Report conf. linear algebras. June. 1956. // Publ. National Acad. Sci. nat. Res. Counil. 1957. №502. P. 33-52.
13. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On TI-groups // Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie. 2014. P. 33-41.
14. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On SI-groups // Bull. of the Australian Math. Soc. 2015. Vol. 91. №1. P. 92-103.
15. Компанцева Е. И., Нгуен Т. К. Ч. Алгебраически компактные абелевы TI-группы // Чебышевский сборник. 2019. Vol. 20. №1. С. 202-211.
16. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On additive groups of associative and commutative rings // J. Quaest. Math. 2017. Vol. 40. №4. P. 527-537.
17. Fuchs L. Abelian Groups, Springer Int. Publ. Switzerland. 2015.
18. Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian Groups, Amsterdam: Gordon and Breach, 2000. (Algebra Logic Appl. Ser. Vol. 13).
19. Arnold D. M., Mader A., Mutzbauer O., Solak E. Almost completely decomposable groups and unbounded representation type // J. of Algebra. 2012. Vol. 349(1). P. 50-62.
20. Solak E. Classification of a class of torsion-free abelian groups // Math. Journal of the Univ. of Padova. 2016. Vol. 135. P. 111–131.
21. Компанцева Е. И. Кольца на почти вполне разложимых абелевых группах // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Vol. 14(5). С. 93-101.
22. Компанцева Е. И., Фомин А. А. Абсолютные идеалы почти вполне разложимых абелевых групп // Чебышевский сб. 2015. №4 (16). С. 200–211.
23. Чехлов А. Р. Об абелевых группах, все подгруппы которых являются идеалами // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2009. №3(7). С. 64-67.

24. Baer R. Abelian groups without elements of finite order // Duke Math. J. 1937. Vol. 3. P. 68-122.

25. Sasiada E. On the isomorphism of decompositions of torsion-free abelian groups into complete direct sums of groups of rank one // Bull. Acad. Polon. Sci. 1959. Vol. 7. P. 145-149.

26. Мишина А. П. Сепарабельность полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1 // Матем. сб. 1962. Vol. 57. С. 375-383.

REFERENCES

1. Beaumont, R. A. 1948, "Rings with additive groups which is the direct sum of cyclic groups", *Duke Math. J.*, vol. 15, no. 2, pp. 367-369.

2. Feigelstock, S. 1997, "Additive groups of rings whose subrings are ideals", *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 55, pp. 477-481.

3. Redei, L. 1952, "Vollidealringe im weiteren Sinn. I", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 3, pp. 243-268.

4. Andriyanov, V. I. 1967, "Periodic Hamiltonian rings", *Math. USSR-Sb.*, vol. 3, no. 2, pp. 225-242.

5. Kruse, R. L. 1968, "Rings in which all subrings are ideals", *Canad. J. Math.*, vol. 20, pp. 862-871.

6. Ehrlich, G. 1983-1984. "Filial rings", *Portugal. Math.*, vol. 42, pp. 185-194.

7. Sands, A. D. 1988, "On ideals in over-rings", *Publ. Math. Debrecen.*, vol. 35, pp. 273-279.

8. Andruszkiewicz, R. & Puczylowski, E. 1988, "On filial rings", *Portugal. Math.*, vol. 45, no. 2, pp. 139-149.

9. Filipowicz, M. & Puczylowski, E. R. 2004, "Left filial rings", *Algebra Colloq.*, vol. 11, pp. 335-344.

10. Filipowicz, M. & Puczylowski, E. R. 2005, "On filial and left filial rings", *Publ. Math. Debrecen*, vol. 66, pp. 257-267.

11. Andruszkiewicz, R. & Pryszczepko, K. 2019, "On fully filial torsion rings" *Bull. Korean Math. Soc.*, vol. 56, no. 1, pp. 23-29.

12. Baer, R. 1957, "Meta ideals", Report conf. linear algebras. June. 1956., *Publ. National Acad. Sci. nat. Res. Counil*, no.502, pp. 33-52.

13. Andruszkiewicz, R. & Woronowicz, M. 2014, "On TI-groups", *Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie.*, pp. 33-41.

14. Andruszkiewicz, R. & Woronowicz, M. 2015, "On SI-groups",*Bull. of the Australian Math. Soc.*, vol. 91, no. 1, pp. 92-103.

15. Kompantseva, E. I. & Nguyen, T. Q. T. 2019, "Algebraically compact abelian TI-groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 202-211.

16. Andruszkiewicz, R. & Woronowicz, M. 2017, "On additive groups of associative and commutative rings", *J. Quaest. Math.*, vol. 40, no. 4, pp. 527–537.

17. Fuchs, L. 2015, "Abelian groups", Switz.: Springer International Publishing.

18. Mader, A. 2000, "Almost Completely Decomposable Abelian Groups", Amsterdam: Gordon and Breach (*Algebra Logic Appl. Ser.*, vol. 13).

19. Arnold, D. M. & Mader, A. & Mutzbauer, O. & Solak, E. 2012, “Almost completely decomposable groups and unbounded representation type”, *J. of Algebra*, vol. 349(1), pp. 50-62.

20. Solak, E. 2016, “Classification of a class of torsion-free abelian groups”, *Math. Journal of the Univ. of Padova*, vol. 135, pp. 111–131.

21. Kompantseva, E. I. 2009, “Rings on almost completely decomposable Abelian groups”, *J. of Mathematical Sciences*, vol. 163, no. 6, pp. 688-693.

22. Kompantseva, E. I. & Fomin, A. A. 2015, “Absolute ideals of almost completely decomposable abelian groups”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 16, no. 4, pp. 200–211.

23. Chekhlov, A. R. 2009, “On abelian groups, in which all subgroups are ideals”, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, no. 3(7), pp. 64-67.

24. Baer, R. 1937, “Abelian groups without elements of finite order”, *Duke Math. J.*, vol. 3, pp. 68-122.

25. Sasiada, E. 1959, “On the isomorphism of decompositions of torsion-free abelian groups into complete direct sums of groups of rank one”, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, vol. 7, pp. 145-149.

26. Mishina, A. P. 1962, “Separability of fully direct sums of abelian groups of rank 1”, *Math. Sbornik*, vol. 57, pp. 375-383.

Получено 20.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.545+512.552 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-213-224

Проективная геометрия над частично упорядоченными телами, II [1]

А. В. Михалев, Е. Е. Ширшова

Александр Васильевич Михалев — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: aamikhalev@mail.ru
Елена Евгеньевна Ширшова — профессор кафедры алгебры, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Аннотация

В статье "Проективная геометрия над частично упорядоченными телами, II"продолжается исследование свойств частично упорядоченных линейных пространств над частично упорядоченными телами, начатое в части I «Проективная геометрия над частично упорядоченными телами». Рассматриваются производные решетки, ассоциированных с частично упорядоченными линейными пространствами над частично упорядоченными телами. Более точно, исследуются свойства выпуклой проективной геометрии $\mathcal{L}$ частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F. Под выпуклостью линейного подпространства в линейном пространстве ${}_FV$ понимается абелева выпуклость (ab-выпуклость), опирающаяся на определение выпуклой подгруппы частично упорядоченной группы. Доказываются вторая и третья теоремы о порядковых изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над частично упорядоченными телами. Получены некоторые результаты, касающиеся свойств главных линейных подпространств в интерполяционных линейных пространствах над направленными телами. Главным линейным подпространством I_a частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F является наименьшее ab-выпуклое направленное линейное подпространство линейного пространства ${}_FV$, содержащее данный положительный элемент $a \in V$. Для главных линейных подпространств в интерполяционных линейных пространствах над направленными телами доказан аналог третьей теоремы о порядковых изоморфизмах пространств.

Ключевые слова: частично упорядоченное кольцо, частично упорядоченное тело, частично упорядоченное линейное пространство, направленная группа, выпуклая подгруппа.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. В. Михалев, Е. Е. Ширшова Проективная геометрия над частично упорядоченными телами, II // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 213–224.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ "Структурная теория и комбинаторно-логические методы в теории алгебраических систем).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.545+512.552 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-213-224

The projective geometry over partially ordered skew fields, II

A. V. Mikhalev, E. E. Shirshova

Alexander Vasilyevich Mikhalev — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: aamikhalev@mail.ru
Elena Evgenievna Shirshova — professor of the department of algebra, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

Abstract

In this paper «The projective geometry over partially ordered skew fields, II» the investigation of properties for partially ordered linear spaces over partially ordered skew fields is prolonged. This investigation was started in part I «The projective geometry over partially ordered skew fields». Derivative lattices associated partially ordered linear spaces over partially ordered skew fields are examined. More exactly, properties of the convex projective geometry $\mathcal{L}$ of a partially ordered linear space ${}_FV$ over a partially ordered skew field F are considered. The convexity of linear subspaces has meaning the Abelian convexity (ab-convexity), which is based on the definition of a convex subgroup for a partially ordered group. Second and third theorems of linear spaces order isomorphisms for interpolation linear spaces over partially ordered skew fields are proved. Some theorems are proved for principal linear subspaces of interpolation linear spaces over directed skew fields. The principal linear subspace I_a of a partially ordered linear space ${}_FV$ over a partially ordered skew field F is the smallest ab-convex directed linear subspace of linear space ${}_FV$ which contains the positive element $a \in V$. The analog for the third theorem of linear spaces order isomorphisms for principal linear subspaces is demonstrated in interpolation linear spaces over directed skew fields.

Keywords: a partially ordered ring, a partially ordered skew field, a partially ordered linear space, a directed group, a convex subgroup.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. V. Mikhalev, E. E. Shirshova, 2021, "The projective geometry over partially ordered skew fields II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 213–224.

1. Введение

Пусть $F =< F, +, \cdot >$ – тело.

Напомним, что F называется *частично упорядоченным телом*, если $< F, +, \leqslant >$ – частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию:

если $a \leqslant b$ и $c > 0$ в $< F, +, \leqslant >$, то $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$.

Частично упорядоченная группа называется *направленной*, если любые два элемента имеют в этой группе верхнюю грань.

Если группа $< F, +, \leqslant >$ является направленной (линейно или решеточно упорядоченной), то F называется *направленным (линейно или решеточно упорядоченным) телом.*

Будем далее считать, что F – частично упорядоченное тело нулевой характеристики с положительной единицей. (Иначе порядок окажется тривиальным.)

Хотя данная работа является продолжением статьи авторов [5], для удобства читателя, мы приводим основные определения статьи [5] и краткие исторические комментарии.

Определение 1. *Левое линейное пространство* $_FV =< V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant>$ *над частично упорядоченным телом* F *называется частично упорядоченным (ч.у.) линейным пространством, если* $< V, +, \leqslant>$ *– частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию: из* $0 \leqslant v$ *следует* $0 \leqslant \alpha v$ *для всех* $v \in {_FV}$ *и* $\alpha > 0$ *из* F.

Частично упорядоченное линейное пространство $_FV$ *над частично упорядоченным телом* F *называют направленным (линейно или решеточно упорядоченным) пространством, если группа* $< V, +, \leqslant>$ *является направленной (линейно или решеточно упорядоченной) группой.*

В монографии Биркгофа «Теория решеток» [1] определяются частично упорядоченные линейные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ (глава XV, § 1).

В работах Л. В. Канторовича [12] и Риса [15] было начато изучение вещественных линейных пространств $_{\mathbb{R}}V$, для которых группа $< V, +, \leqslant>$ является решеточно упорядоченной группой. Такие линейные пространства принято называть *векторными решетками.*

Векторные решетки играют важную роль в функциональном анализе. В связи с этим, активно исследовались свойства действительных функциональных линейных пространств (см. [3]).

В статье авторов [5] рассматривались свойства частично упорядоченных линейных пространств над различными частично упорядоченными телами. Полученные результаты относятся к направлению, которое А. Г. Курош предлагал называть проективной алгеброй. В целом, это направление восходит к Гильберту. Его развивали Бэр [2] и Капланский [13].

В данной статье продолжается исследование свойств частично упорядоченных линейных пространств над различными частично упорядоченными телами.

Цель работы – рассмотрение производных решеток, ассоциированных с частично упорядоченными линейными пространствами над частично упорядоченными телами.

В статье используются терминология и обозначения, общепринятые в теории частично упорядоченных алгебраических систем (см. [1, 4, 6, 14, 16]).

При исследовании свойств частично упорядоченных алгебраических систем важную роль играет понятие «выпуклость». Мы рассматриваем абелеву выпуклость, которая опирается на следующее определение выпуклой подгруппы частично упорядоченной группы.

Подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для всех $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ следует $g \in M$.

Определение 2. *Линейное подпространство* M *частично упорядоченного линейного пространства* $_FV$ *над частично упорядоченным телом* F *называется* ab*-выпуклым, если группа* $< M, +, \leqslant>$ *является выпуклой подгруппой частично упорядоченной абелевой группы* $< V, +, \leqslant>$.

Предметом нашего исследования является множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}({_FV})$ всех ab-выпуклых направленных линейных подпространств частично упорядоченного линейного пространства $_FV$ над частично упорядоченным телом F, т.е. выпуклая проективная геометрия $\mathcal{L}$.

Пусть $_FV =< V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant>$ – частично упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом F.

Будем обозначать символом $_FV^+$ множество $\{v \in V|\ 0 \leqslant v\}$ всех положительных элементов ч.у. линейного пространства $_FV$.

Пусть $_FV =< V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant_1>$ и $_FU =< U, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant_2>$ – частично упорядоченные линейные пространства над частично упорядоченным телом F.

Определение 3. *Отображение $f : {}_FV \to {}_FU$ называется о-гомоморфизмом (порядковым гомоморфизмом) ч.у. линейных пространств, если выполняются условия:*

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ для всех $a, b \in V$;

2) $f(\alpha a) = \alpha \cdot f(a)$ для всех $a \in V$ и $\alpha \in F$;

3) $f({}_FV^+) \subseteq {}_FU^+$.

При этом, f называется строгим о-гомоморфизмом ч.у. линейных пространств, если выполняется условие

4) $f({}_FV^+) = {}_FU^+ \cap Imf$.

Если для о-гомоморфизма f существует о-гомоморфизм f^{-1}, то f называется о-изоморфизмом ч.у. линейных пространств.

В статье [5] приводится доказательство первой теоремы об o-изоморфизмах произвольных частично упорядоченных линейных пространств над произвольным частично упорядоченным телом (см. теорему 3). Для доказательства некоторых следствий из этой теоремы (второй и третьей теорем об o-изоморфизмах ч.у. линейных поостранств) нам пришлось рассмотреть более узкий класс частично упорядоченных линейных пространств над частично упорядоченными телами.

Напомним, что частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$. Класс интерполяционных групп включает классы решеточно упорядоченных групп, линейно упорядоченных групп и групп Рисса.

Известно, что не все теоремы об изоморфизмах групп непосредственно переносятся на произвольные частично упорядоченные группы (в книге [6] на стр. 36 можно найти соответствующий пример). В статьях [7] и [8] содержатся доказательства теорем об o-изоморфизмах в классе интерполяционных групп.

Определение 4. *Частично упорядоченное линейное пространство*

$$ {}_FV = < V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant > $$

над частично упорядоченным телом F будем называть интерполяционным линейным пространством, если группа $< V, +, \leqslant >$ является интерполяционной группой.

Во втором разделе данной статьи содержится доказательство второй теоремы о порядковых изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над произвольным частично упорядоченным телом.

Теорема 1. *Пусть ${}_FV$ – интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F, M и N – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в ч.у. линейном пространстве ${}_FV$, $M \subset N$. Тогда существует о-изоморфизм интерполяционного линейного пространства ${}_F(V/N)$ на интерполяционное линейное пространство ${}_F(V/M)/{}_F(N/M)$.*

Третий раздел данной статьи содержит доказательство третьей теоремы о порядковых изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над произвольным частично упорядоченным телом.

Теорема 2. *Пусть ${}_FV$ – интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F, M и N – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в ${}_FV$. Тогда:*

1) существует строгий o-гомоморфизм интерполяционного линейного пространства $_FM$ *на интерполяционное линейное пространство* $_F(M+N/N)$ *с ядром* $M \cap N$*;*

2) существует строгий o-гомоморфизм интерполяционного линейного пространства $_FN$ *на интерполяционное линейное пространство* $_F(M+N/M)$ *с ядром* $M \cap N$*;*

3) интерполяционное линейное пространство $_F(M/M \cap N)$ *o-изоморфно интерполяционному линейному пространству* $_F(M+N/N)$*;*

4) интерполяционное линейное пространство $_F(N/M \cap N)$ *o-изоморфно интерполяционному линейному пространству* $_F(M+N/M)$*.*

Определение 5. *Наименьшее ab-выпуклое направленное линейное подпространство* I_v *частично упорядоченного линейного пространства* $_FV$ *над частично упорядоченным телом* F*, содержащее элемент* $v \in {_FV}$ *(если оно существует), назовем главным линейным подпространством для элемента* v*.*

В статье [5] показано, что в частично упорядоченных линейных пространствах над направленными телами главные линейные подпространства существуют для всех положительных элементов этих пространств (см. теорему 4).

Свойства главных подпространств интерполяционных пространств над направленными телами рассматриваются в четвертом разделе данной статьи. В частности, там содержится доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $_FV$ *– интерполяционное линейное пространство над направленным телом* F*. Если* $a > 0$ *и* $b > 0$ *в* $_FV$*, то:*

1) существует строгий o-гомоморфизм интерполяционного линейного пространства $_FI_a$ *на интерполяционное линейное пространство* $_F(I_{a+b}/I_b)$ *с ядром* $I_a \cap I_b$*;*

2) существует строгий o-гомоморфизм интерполяционного линейного пространства $_FI_b$ *на интерполяционное линейное пространство* $_F(I_{a+b}/I_a)$ *с ядром* $I_a \cap I_b$*;*

3) интерполяционное линейное пространство $_F(I_a/I_a \cap I_b)$ *o-изоморфно интерполяционному линейному пространству* $_F(I_{a+b}/I_b)$*;*

4) интерполяционное линейное пространство $_F(I_b/I_a \cap I_b)$ *o-изоморфно интерполяционному линейному пространству* $_F(I_{a+b}/I_a)$*.*

2. Вторая теорема об o-изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над частично упорядоченными телами

Лемма 1. *Всякая выпуклая подгруппа интерполяционной группы сама является интерполяционной группой.*

Доказательство. См. статью [9] (лемма 1) или статью [10] (лемма 2). □

Лемма 2. *Если* $_FV$ *– интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом* F*,* M *– ab-выпуклое линейное подпространство в* $_FV$*, то* M *– интерполяционное линейное пространство над* F*.*

Доказательство. Утверждение является следствием определения 4 и леммы 1. □

Лемма 3. *Пусть* G *– интерполяционная группа,* M *– выпуклая направленная нормальная подгруппа в* G*. Тогда факторгруппа* G/M *является интерполяционной группой.*

Доказательство. См. статью [9] (лемма 2) или статью [10] (лемма 1). □

Лемма 4. *Пусть* $_FV =< V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant>$ *– частично упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом* F*. Если* M *– ab-выпуклое линейное подпространство в* $_FV$*, то факторпространство* V/M *является частично упорядоченным линейным пространством над* F*.*

Доказательство. См. статью [5] (теорема 1). □

Лемма 5. *Пусть* $_FV$ *– интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом* F*,* M *- ab-выпуклое направленное линейное подпространство в* $_FV$*. Тогда факторпространство* V/M *является интерполяционным линейным пространством над* F*.*

Доказательство. По лемме 4, пространство V/M является частично упорядоченным линейным пространством над F.

Из леммы 3 следует, что группа $< V/M, + >$ является интерполяционной группой.

Остается применить определение 4. □

Лемма 6. *Пусть* G *– интерполяционная группа,* M *– выпуклая направленная нормальная подгруппа в* G*,* $\pi : G \to G/M$ *– естественный o-гомоморфизм групп. Если* H *– выпуклая направленная подгруппа группы* G*, то* $\pi(H) = \{hM|\ h \in H\}$ *– выпуклая направленная подгруппа факторгруппы* G/M*.*

Доказательство. См. статью [9] (теорема 1). □

Лемма 7. *Пусть* $_FV$ *– интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом* F*,* M *- ab-выпуклое направленное линейное подпространство в* $_FV$*,* $\pi : {_FV} \to {_F(V/M)}$ *– естественный o-гомоморфизм ч.у. линейных пространств (по правилу* $\pi(v) = v + M$*). Если* A *– ab-выпуклое направленное линейное подпространство в* $_FV$*, то* $\pi(A) = \{v + M|\ v \in A\}$ *– ab-выпуклое направленное линейное подпространство в* $_F(V/M)$*.*

Доказательство. По лемме 5, пространство V/M является интерполяционным линейным пространством над F.

Из леммы 6 следует, что $< \pi(A), + >$ – выпуклая направленная подгруппа интерполяционной группы $< V/M, + >$.

Остается применить определение 4. □

Лемма 8. *Пусть* $_FV$ *– частично упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом* F*,* M *– ab-выпуклое линейное подпространство в* $_FV$*. Тогда сюръективный гомоморфизм* $\pi : {_FV} \to {_F(V/M)}$ *(по правилу* $\pi(v) = v + M$*) является строгим o-гомоморфизмом ч.у. линейных пространств.*

Доказательство. См. статью [5] (теорема 2). □

Замечание 1. *Пусть* $f : {_FV} \to {_FU}$ *– строгий сюръективный o-гомоморфизм частично упорядоченных линейных пространств. Тогда* $f(_FV^+) = {_FU^+}$*.*

Лемма 9. *Пусть* $_FV =< V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant_1>$ *и* $_FV =< V, +, \{\alpha|\ \alpha \in F\}, \leqslant_2>$ *– частично упорядоченные линейные пространства над частично упорядоченным телом* F*,* $f : {_FV} \to {_FU}$ *– строгий o-гомоморфизм ч.у. линейных пространств. Тогда существует o-изоморфизм ч.у. линейных пространств* $\varphi : {_F(V/\ker f)} \to {_F(Imf)}$ *по правилу* $\varphi(v + \ker f) = f(v)$ *для всех* $v \in {_FV}$*.*

Доказательство. См. статью [5] (теорема 3). □

Доказательство теоремы 1. По лемме 4, существуют частично упорядоченные линейные пространства $_F(V/M)$ и $_F(V/N)$.

По лемме 5, эти пространства являются интерполяционными линейными пространствами.

Рассмотрим отображение $f : {}_F(V/M) \to {}_F(V/N)$ по правилу: для любого элемента $v \in {}_FV$ положим $f(v+M) = v+N$.

Легко проверить, что f – биекция, удовлетворяющая условиям 1) и 2) определения 3.

Докажем, что f – строгий o-гомоморфизм ч.у. линейных пространств.

Из леммы 8 следует существование строгих сюръективных o-гомоморфизмов

$\pi_1 : {}_FV \to {}_F(V/M)$ и $\pi_2 : {}_FV \to {}_F(V/N)$.

В силу замечания 1, заключаем, что:

1) $\pi_1({}_FV^+) = {}_F(V/M)^+$;

2) $\pi_2({}_FV^+) = {}_F(V/N)^+$.

Если $a+M \in {}_F(V/M)^+$, то, по условию 1), существует элемент $v \in {}_FV^+$, для которого $a+M = v+M$.

Тогда, по условию 2), $f(a+M) = v+N \in {}_F(V/N)^+$.

Значит, $f({}_F(V/M)^+) \subseteq {}_F(V/N)^+$.

Следовательно, f – o-гомоморфизм ч.у. линейных пространств.

Если $b+N \in {}_F(V/N)^+$, то, по условию 2), существует элемент $u \in {}_FV^+$, для которого $b+N = u+N$.

В силу условия 1), $u+M \in {}_F(V/M)^+$, т.е. $b+N \in f({}_F(V/M)^+)$.

Таким образом, ${}_F(V/N)^+ \subseteq f({}_F(V/M)^+)$.

Следовательно, $f({}_F(V/M)^+) = {}_F(V/N)^+$, и f – строгий o-гомоморфизм ч.у. линейных пространств.

Из леммы 7 следует, что в ч.у. линейном пространстве ${}_F(V/M)$ существует ab-выпуклое направленное линейное подпространство $\pi(N) = \{v+M|\ v \in N\} = N/M$.

Если $v+M \in N/M$, то $f(v+M) = N \in \ker f$.

Если $v+M \in \ker f$, то $f(v+M) = v+N = N$, т.е. $v \in N$.

Значит, $\ker f = N/M$.

Остается применить лемму 9 с учетом леммы 5. □

3. Третья теорема об изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над частично упорядоченными телами

Замечание 2. Отметим, что М. Якубикова [11] привела пример частично упорядоченной группы, в которой пересечение выпуклых направленных подгрупп не является направленным.

Лемма 10. *Пусть ${}_FV$ – интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F. Если M и N – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в ${}_FV$, то подпространства $M+N$ и $M \cap N$ являются ab-выпуклыми направленными линейными подпространствами в ч.у. линейном пространстве ${}_FV$.*

Доказательство. См. статью [5] (теорема 5). □

Лемма 11. *Пусть ${}_FV$ – интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F. Если M и N – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в ${}_FV$, то:*

1) $M+N$ – интерполяционное линейное пространство над F;

2) $M \cap N$ является ab-выпуклым направленным линейным подпространством в ${}_FV$.

Доказательство. Утверждение 1) является следствием леммы 10 и леммы 2.

Утверждение 2) следует из леммы 10. □

Замечание 3. *Пусть G – частично упорядоченная группа, A и B – выпуклые направленные подгруппы группы G, и $B \subseteq A$. Тогда B – выпуклая направленная подгруппа группы A.*

Лемма 12. *Пусть $_FV$ – интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F. Если M и N – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в $_FV$, то:*

1) M, N, $M \cap N$ – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в ч.у. линейном пространстве $_F(M+N)$;

2) M и N – интерполяционные линейные пространства над F;

3) $M \cap N$ – ab-выпуклое направленное линейное подпространство в ч.у. линейных пространствах $_FM$ и $_FN$.

Доказательство. Утверждения 1) и 3) являются следствиями определения 2, леммы 11 и замечания 3.

Утверждение 2) справедливо в силу леммы 2. □

Лемма 13. *Для частично упорядоченной группы $G =< G, +, \leqslant>$ следующие условия равносильны:*

1) G – интерполяционная группа;

2) если $0 \leqslant x \leqslant a+b$, для $0 \leqslant a$ и $0 \leqslant b$ в группе G, то $x = y+z$, где $0 \leqslant y \leqslant a$ и $0 \leqslant z \leqslant b$.

Доказательство. См. статью [10] (теорема 1). □

Лемма 14. *Если $G =< G, + >$ – частично упорядоченная группа, то следующие условия равносильны:*

1) G является направленной группой;

2) для нуля группы G и каждого элемента $a \in G$ существует верхняя грань;

3) каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$, где a и b – положительные элементы группы G.

Доказательство. См. книгу [6] (см. предложение 1 на странице 23). □

Лемма 15. *Пусть $_FV$ – интерполяционное линейное пространство над частично упорядоченным телом F, M и N – ab-выпуклые направленные линейные подпространства в $_FV$. Если $0 \leqslant v \in M+N$, то существуют элементы $m \in M^+$ и $n \in N^+$, для которых $v = m+n$.*

Доказательство. Так как $v \in M+N$, то $v = x+y$ для некоторых элементов $x \in M$ и $y \in N$.

Так как группы $< M, +, \leqslant>$ и $< N, +, \leqslant>$ являются направленными, то, по условию 2) леммы 14, существуют элементы $a \in M^+$ и $b \in N^+$, для которых верны неравенства $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$.

Из последних неравенств следует, что $v \leqslant a+b$.

Так как группа $< V, +, \leqslant>$ является интерполяционной, то, по лемме 13, найдутся элементы $m, n \in V$, для которых $v = m+n$, где $0 \leqslant m \leqslant a$ и $0 \leqslant n \leqslant b$.

Так как $< M, +, \leqslant>$ и $< N, +, \leqslant>$, по определению 2, являются выпуклыми подгруппами группы $< V, +, \leqslant>$, то $m \in M$ и $n \in N$. □

Доказательство теоремы 2. По лемме 11, существует интерполяционное линейное пространство $_F(M+N)$.

По лемме 12, множества M и N являются ab-выпуклыми направленными линейными подпространствами в интерполяционном линейном пространстве $_F(M+N)$.

Докажем утверждение 1).

Из леммы 8 следует существование строгого сюръективного o-гомоморфизма $\pi : {_F(M+N)} \to {_F(M+N)}/{_FN}$ по правилу;

$$\pi(v) = v + N \quad \text{для каждого} \quad v \in M+N.$$

Рассмотрим отображение $f : {}_FM \to {}_F(M+N)/{}_FN$ по правилу:

$$f(m) = \pi(m) = m + N \quad \text{для каждого} \quad m \in M.$$

Если $v + N \in {}_F(M+N)/{}_FN$, то $v = m + n$ для некоторых элементов $m \in M$ и $n \in N$.

Значит, $v + N = m + N$, т.е. $f(m) = v + N$.

Таким образом, f – сюръективный гомоморфизм ч.у. линейных пространств.

В силу замечания 1, $\pi({}_F(M+N)^+) = ({}_F(M+N)/{}_FN)^+$.

Так как $f({}_FM) = \pi({}_FM)$, то $f({}_FM^+) \subseteq ({}_F(M+N)/{}_FN)^+$.

Следовательно, f – o-гомоморфизм ч.у. линейных пространств.

Если $a+N \in ({}_F(M+N)/{}_FN)^+$, то $a+N = v+N$ для некоторого элемента $v \in {}_F(M+N)^+$.

В силу леммы 15, $v = m + n$ для некоторых элементов $m \in {}_FM^+$ и $n \in {}_FN^+$.

Значит, $a + N = m + N$, т.е. $a + N = f(m)$.

Таким образом, $a + N \in f({}_FM^+)$, откуда, $({}_F(M+N)/{}_FN)^+ \subseteq f({}_FM^+)$.

Итак, $f({}_FM^+) = ({}_F(M+N)/{}_FN)^+$, и f – строгий o-гомоморфизм ч.у. линейных пространств.

Кроме того,

$$\ker f = \{m \in M |\ m + N = N\} = \{v \in V |\ v \in M \cap N\} = M \cap N.$$

Утверждение 2) доказывается аналогично.

Утверждение 3) является следствием утверждения 1) и леммы 9.

Утверждение 4) является следствием утверждения 2) и леммы 9. □

4. Главные подпространства интерполяционных пространств над направленными телами

Лемма 16. *Пусть ${}_FV$ - частично упорядоченное линейное пространство над частично упорядоченным телом F, A – направленное линейное подпространство в ${}_FV$, B – линейное подпространство линейном подпространстве ${}_FV$, и $A^+ \subset B$. Тогда $A \subseteq B$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения для абелевых групп

$$\overline{V} = < V, +, \leqslant >, \quad \overline{A} = < A, +, \leqslant >, \quad \overline{B} = < B, + > .$$

Из условия леммы следует, что $\overline{A}$ – направленная подгруппа частично упорядоченной группы $\overline{V}$, $\overline{B}$ – подгруппа группы $\overline{V}$, и каждый положительный элемент группы $\overline{A}$ принадлежит группе $\overline{B}$.

Если $a \in \overline{A}$, то, по условию 3) леммы 14, $a = x - y$ для некоторых положительных элементов x и y из подгруппы $\overline{A}$.

Так как $x, y \in \overline{B}$, то $a \in \overline{B}$, т.е. $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. □

Лемма 17. *Пусть ${}_FV = < V, +, \{\alpha |\ \alpha \in F\}, \leqslant >$ – частично упорядоченное линейное пространство над направленным телом F, и $0 < u \in V$. Тогда в ${}_FV$ существует ab-выпуклое направленное линейное подпространство I_u, в котором каждый положительный элемент $v \in I_u$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant v \leqslant \alpha u$ для некоторых элементов $\alpha > 0$ из F.*

Доказательство. См. статью [5] (теорема 4). □

Лемма 18. *Пусть ${}_FV$ – частично упорядоченное линейное пространство над направленным телом F. Если M – ab-выпуклое линейное подпространство в ${}_FV$, $a > 0$ и $a \in M$, то $I_a \subseteq M$.*

Доказательство. Так как $a \in M$, и M – линейное подпространство линейного пространства ${}_FV$, то $\alpha a \in M$ для любого $\alpha \in F$.

Пусть $0 \leqslant x \in I_a$.

Тогда, по лемме 17, $x \leqslant \alpha a$ для некоторого элемента $\alpha > 0$ из F.

Так как, по определению 2, подгруппа $< M, +, \leqslant>$ является выпуклой подгруппой частично упорядоченной группы $< V, +, \leqslant>$, то $x \in M$.

Значит, $(I_a)^+ \subset M$.

Так как I_a – направленное подпространство, то, по лемме 16, $I_a \subseteq M$. □

Лемма 19. *Пусть ${}_FV$ – частично упорядоченное линейное пространство над направленным телом F. Если $a > 0$ в ${}_FV$, то $a \in I_a$.*

Доказательство. Так как $a \leqslant a = 1 \cdot a$ для $1 \in F$, где $1 > 0$, то, по лемме 17, $a \in I_a$. □

Лемма 20. *Пусть ${}_FV$ – интерполяционное линейное пространство над направленным телом F, $a > 0$ и $b > 0$ в пространстве ${}_FV$. Тогда $I_{a+b} = I_a + I_b$.*

Доказательство. Так как $a + b > 0$, то, по лемме 17, в ${}_FV$ существуют ab-выпуклые направленные линейные подпространства I_a, I_b, I_{a+b}.

Согласно лемме 10, в ${}_FV$ существует ab-выпуклое направленное линейное подпространство $M = I_a + I_b$.

Пусть $m \in M^+$. Тогда, по лемме 15, найдутся элементы $x \in I_a^+$ и $y \in I_b^+$, для которых $m = x + y$.

Из леммы 17 следует, что $x \leqslant \alpha a$ для некоторого элемента $\alpha > 0$ из F, а $y \leqslant \beta b$ для некоторого элемента $\beta > 0$ из F.

Так как $a, b \leqslant a + b$, то, по определению 1, $x \leqslant \alpha(a + b)$ и $y \leqslant \beta(a + b)$.

Значит, по лемме 17, $x, y \in I_{a+b}$, т.е. $m \in I_{a+b}$.

Следовательно, $M^+ \subset I_{a+b}$.

Отсюда, по лемме 16, $M \subseteq I_{a+b}$.

С другой стороны, по лемме 19, $a \in I_a$ и $b \in I_b$, т.е. $a + b \in M$.

Применяя лемму 18, заключаем, что $I_{a+b} \subseteq M$. □

Доказательство теоремы 3. Так как $a + b > 0$, то, по лемме 17, в ч.у. линейном пространстве ${}_FV$ существуют ab-выпуклые направленные линейные подпространства I_a, I_b, I_{a+b}.

По лемме 11, существует интерполяционное линейное пространство ${}_F(I_a + I_b)$.

По лемме 12, в интерполяционном линейном пространстве ${}_F(I_a + I_b)$ существуют ab-выпуклые направленные линейные подпространства $I_a, I_b, I_a \cap I_b$.

Кроме того, в силу леммы 12, ${}_FI_a$ и ${}_FI_b$ являются интерполяционными линейными пространствами.

Из условия 1) теоремы 2 следует существование строгого o-гомоморфизма интерполяционного линейного пространства ${}_FI_a$ на интерполяционное линейное пространство ${}_F((I_a + I_b)/I_b)$ с ядром $I_a \cap I_b$.

В силу леммы 20, $I_a + I_b = I_{a+b}$.

Таким образом, утверждение 1) теоремы доказано.

Утверждение 2) доказывается аналогично.

Утверждение 3) является следствием утверждения 3) теоремы 2 и леммы 20.

Утверждение 4) является следствием утверждения 4) теоремы 2 и леммы 20. □

5. Заключение

В данном цикле из двух статей, развивая подход Л.В. Канторовича, мы исследуем свойства частично упорядоченных линейных пространств над различными частично упорядоченными телами. В работах рассматриваются производные решетки, ассоциированные с частично упорядоченными линейными пространствами над частично упорядоченными телами.

Используя понятие «выпуклость», мы рассматриваем абелеву выпуклость, которая опирается на определение выпуклой подгруппы частично упорядоченной группы.

Предметом нашего исследования является множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}({}_FV)$ всех ab-выпуклых направленных линейных подпространств частично упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F, т.е. выпуклая проективная геометрия $\mathcal{L}$.

Оказалось, что ab-выпуклые линейные подпространства играют в теории частично упорядоченных линейных пространств ту же роль, что выпуклые подгруппы в теории частично упорядоченных групп. Доказаны три теоремы об o-изоморфизмах интерполяционных линейных пространств над частично упорядоченными телами.

Получено поэлементное описание наименьшего ab-выпуклого направленного линейного подпространства, содержащего данный положительный элемент, в линейном пространстве над направленным телом F. В интерполяционном линейном пространстве над направленным телом для таких линейных подпространств доказан аналог третьей теоремы об o-изоморфизмах.

Доказано, что в случае интерполяционного линейного пространства ${}_FV$ над произвольным частично упорядоченным телом F, операция объединения в решетке $\mathcal{L}$ вполне дистрибутивна относительно операции пересечения.

Оказалось (см. [5]), что множество $\mathcal{L}$ всех ab-выпуклых направленных линейных подпространств псевдо решеточно упорядоченного линейного пространства ${}_FV$ над частично упорядоченным телом F образует полную дистрибутивнаю решетку с единицей и нулем, являющуюся брауэровой решеткой.

Рассматриваемая упорядоченная геометрическая алгебра составляет основу для перехода к рассмотрению геометрических задач в контексте упорядоченных модулей над упорядоченными кольцами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.

2. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. М.: ИЛ, 1955.

3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

4. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.

5. Михалев А. В., Ширшова Е. Е. Проективная геометрия над частично упорядоченными телами// Фундамент. и прикл. матем. 2020. Т. 23, № 2. С. 231-245.

6. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.

7. Ширшова Е. Е. О свойствах гомоморфизмов групп Рисса// УМН. 1991. Т. 46, № 5 (281). С. 157-158.

8. Ширшова Е. Е. Об обобщении понятия ортогональности и группах Рисса// Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 1. С. 122-132.

9. Ширшова Е. Е. О свойствах интерполяционных групп// Мат. заметки. 2013. Т. 93, № 2. С. 295-304.

10. Ширшова Е. Е. О выпуклых подгруппах групп с интерполяционным условием// Фундамент. и прикл. матем. 2011/2012. Т. 17, № 7. С. 187-199.

11. Jakubiková M. Konvexe gerichtete Untergruppen der Rieszschen Gruppen// Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied. 1971. Vol. 21, № 1. P. 3-8.

12. Kantorovitch L. V. Lineare halbgeordnete Råume // Матем. сб. 1937. Т. 2 (44), № 1. С. 121-168.

13. Kaplansky. I. Infinite Abelian groups. Ann Arbor. The University of Michigan Press. 1954 (2nd ed., 1969).

14. Ma F. Algebraic structure of lattice-ordered rings. World Scientific. New Jersy, 2014.

15. Riesz F. Sur la théorie générale des opérations linéaires// Ann.Math. 1940. Vol. 41. P. 174-206.

16. Steinberg A. S. Lattice ordered rings and modules. Springer. 2010.

REFERENCES

1. Birkhoff, G. *Lattice theory*, 3rd ed., Amer. Math. Soc., Providence, 1967.

2. Baer, R. *Linear algebra and projective geometry*, Academic Press, New York, 1952.

3. Fuchs, L. *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, Oxford; Addison-Wesley, Reading, 1963.

4. Jakubiková, M. 1971, "Konvexe gerichtete Untergruppen der Rieszschen Gruppen", *Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied.*, vol. 21, no. 1, pp. 3-8.

5. Kantorovitch, L. V. 1937, "Lineare halbgeordnete Råume", *Rec. Math. (Mat. Sbornik)*, vol. 2 (44), no. 1, pp. 121-168.

6. Kantorovich, L. V., Akilov, G. P. *Functional analysis*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1982.

7. I. Kaplansky, *Infinite Abelian groups*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1954 (2nd ed., 1969).

8. Kopytov, V. M. *Lattice-ordered groups* [in Russian], Nauka, Moscow, 1984.

9. Ma, F. *Algebraic structure of lattice-ordered rings*, World Scientific, New Jersy, 2014.

10. Mikhalev, A. V., Shirshova, E. E. 2020, "The projective geometry over partially ordered skew fields", *Fundam. Prikl. Mat.* [in Russian], vol. 23, no. 2, pp. 231-245.

11. Riesz, F. 1940, "Sur la théorie générale des opérations linéaires", *Ann.Math.*, vol. 41, pp. 174-206.

12. Shirshova, E. E. 1991, "Properties of homomorphisms of Riesz groups", *Russian Math. Surveys*, vol. 46, no. 5, pp. 201.

13. Shirshova, E. E. 2001, "On a generalization of the notion of orthogonality and on the Riesz groups", *Mathematical Notes*, vol. 69, no. 1, pp. 107-115.

14. Shirshova, E. E. 2013, "On properties of interpolation groups", *Mathematical Notes*, vol. 93, no. 2, pp. 324-331.

15. Shirshova, E. E. 2014, "On convex subgroups of groups with the interpolation property", *J. Math. Sci.*, vol. 197, no. 4, pp. 573-581.

16. Steinberg, A. S. *Lattice ordered rings and modules*, Springer, 2010.

Получено 21.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 517.444, 517.588 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-225-233

О двух формулах для функций Макдональда и их теоретико-групповом смысле

А. И. Нижников, И. А. Шилин

Александр Иванович Нижников — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: ainizhnikov@mail.ru
Илья Анатольевич Шилин — Национальный исследовательский унтверситет МЭИ; Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: ilyashilin@li.ru

Аннотация

С помощью интегральных билинейных функционалов, определенных на паре пространств представления трехмерной лоренцовой группы или квадрате такого пространства, получены две формулы для функций Макдональда — частном случае цилиндрических функции, широко используемом в математике и приложениях.

Ключевые слова: функции Макдональда, трехмерная лоренцева группа.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
А. И. Нижников, И. А. Шилин. О двух формулах для функций Макдональда и их теоретико-групповом смысле // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 225–233.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 517.444, 517.588 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-225-233

On two formulas for Macdonald functions and their group-theoretical sense

A. I. Nizhnikov, I. A. Shilin

Alexander Ivanovich Nizhnikov — Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: ainizhnikov@mail.ru
Ilya Anatolyevich Shilin — National Research University MPEI; Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: ilyashilin@li.ru

Abstract

Two formulas for Macdonald functions (which are a widely known in mathematics and applications particular case of cylinder functions) are obtained by using some integral bilinear functionals defined on a pair of representation spaces or a square of these spaces.

Keywords: Macdonald functions, three-dimensional Lorentz group.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
A. I. Nizhnikov, I. A. Shilin, 2021, "On two formulas for Macdonald functions and their group-theoretical sense" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 225–233.

1. Введение

Хорошо известно, что цилиндрические функции являются едва ли не самыми востребованными в различных задачах математической физики и квантовой механики. В англоязычной статье [15] читаем: «Если мы попробуем оценить важность специальной функции по числу появлений ее в математике и физике, то модифицированная функция Бесселя третьего рода окажется наиболее важной». В русскоязычной литературе эту функцию, обозначаемую $K_\tau(z)$, называют функцией Макдональда. В теории управления космическими аппаратами и самолетами, эта функция появляется при описании бокового движения самолета, точнее, через нее выражается функция Теодорсена

$$C(x) = \frac{K_1(x)}{K_0(x) + K_1(x)},$$

описывающая боковое движение [12]. В физике функция Макдональда используется в теории арифметического квантового хаоса [10], в теории метрических возмущений гиперболических вселенных [9], в математике в аналитической теории чисел [11, 13], в спектральной теории автоморфных форм [16], в гармоническом анализе на арифметических многообразиях [14], в эргодической теории [23].

Принадлежа к так называемому классу специальных функций математической физики, функции Макдональда естественным образом поддаются теоретико-групповой трактовке. В этой трактовке специальные функции являются функциями, зависящими от параметров матричных элементов представлений соответствующих групп. С теоретико-групповой точки зрения функции Макдональда были изучены многими авторами. Так, в классической работе [1] они появляются при изучении матричных элементов представлений группы движений псевдоевклидового пространства. В нашей работе [18] в терминах функций Макдональда были описаны матричные элементы между сферическим и параболическим базисами в пространстве представления четырехмерной лоренцевой группы.

В настоящей статье цилиндрические функции рассматриваются как значения некоторых интегральных билинейных функционалов, определенных либо на прямом произведении двух пространств представления, либо на квадрате одного такого пространства. Такие функционалы удовлетворяют некоторым свойствам инвариантности относительно трехмерного аналога

$$G = \left\{ g \in SL(3,\mathbb{R}) \mid g^{\mathrm{T}} e_{2,1} g = e_{2,1} \right\}$$

указанной выше группы, где $e_{2,1} = \operatorname{diag}(1,1,-1)$. С помощью этих инвариантные свойств в статье будут получены новые формулы для функций Бесселя и Макдональда.

Для нецелого комплексного числа σ неприводимое представление группы G определяется формулой $g \longmapsto T_\sigma(g)$, в которой операторы $T_\sigma(g)$ действуют по правилу $f \longmapsto f(g^{-1}x)$

в пространстве $\mathfrak{D}_\sigma$ бесконечно дифференцируемых и σ-однородных функций на конусе $C:\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Обозначим γ_1 окружность $x_2^2 + x_3^2 = 1$ на конусе C. Так как γ_1 пересекает все образующие конуса C, произвольную точку $x \in C$ можно записать в виде

$$x = (t, t\cos\alpha, t\sin\alpha).$$

В силу однородности функций $f \in \mathfrak{D}_\sigma$ представление $T - \sigma$ может быть реализовано в подпространстве $\mathfrak{D}_\sigma^{\mathrm{circle}}$ сужений f^{circle} функций f на окружность γ_1:

$$f(x) = t^\sigma f(x^{\mathrm{circle}}),$$

где x^{circle} — точка пересечения окружности γ_1 и образующей конуса, содержащей точку x. Подгруппа H_1 в G, состоящая из круговых поворотов в плоскости $x_1 = 1$ и изоморфная унимодулярной ортогональной группе $SO(2)$, действует транзитивно на γ_1. Так как

$$(x_2 + \mathbf{i}x_3)|_{x\in\gamma_1} = \exp(\alpha\mathbf{i})$$

и

$$T_\sigma(g(\varphi))(x_2 + \mathbf{i}x_3)|_{x\in\gamma_1} = \exp(\varphi\mathbf{i})\exp(\alpha\mathbf{i}),$$

то система $\{(x_2 + \mathbf{i}x_3)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ является базисом в $\mathfrak{D}_\sigma^{\mathrm{circle}}$, а

$$\{f_n(x) = x_1^{\sigma-n}(x_2 + \mathbf{i}x_3)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

есть базис в $\mathfrak{D}_\sigma$.

Проводя аналогичные рассуждения относительно подгрупп

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{ch} d & 0 & \operatorname{sh} d \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} d & 0 & \operatorname{ch} d \end{pmatrix} \mid d \in \mathbb{R} \right\}$$

и

$$H_3 = \exp[\mathbb{R}(e_{13} + e_{31} + e_{32} - e_{23})]$$

(здесь e_{ij} обозначают элементы канонического базиса линейного пространства вещественных матриц размера 3×3, а $\exp$ — экспоненциальное отображение касательной лиевой алгебры к группе G в точке $e = \operatorname{diag}(1,1,1)$ в группу G), действующих транзитивно на гиперболе $\gamma_2:\ x_1^2 - x_3^2 = 1$ и параболе $\gamma_3:\ x_1 + x_2 = 1$ соответственно, получаем соответствующие базисы «на γ_2 и γ_3», которые продолжаем по σ-однородности «на весь конус» C до базисов, состоящих из функций

$$f_{\rho,\pm}(x) = (x_1)_\pm^{\sigma-\mathbf{i}\rho}(x_0 + x_2)^{\mathbf{i}\rho},$$
$$f_\lambda(x) = (x_0 + x_1)^\sigma \exp\left(\frac{\mathbf{i}\lambda x_2}{x_0 + x_1}\right)$$

соответственно, где функции $(x)_\pm^\mu$, определенные на вещественной прямой и порождающие однородные обобщенные функции, задаются [3] формулой

$$(x)_\pm^\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } \operatorname{sign} x = \mp 1 \vee x = 0, \\ |x|^\mu & \text{при } \operatorname{sign} x = \pm 1. \end{cases}$$

Интегральные билинейные функционалы $\mathsf{F}_i : \mathfrak{D}_\sigma \times \mathfrak{D}_{\hat\sigma} \longrightarrow \mathbb{C}$ и $\mathsf{D}_i : \mathfrak{D}_\sigma^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ были определены в работах [8, 17, 18] формулами

$$\mathsf{F}_i : (u,v) \longmapsto \int\limits_{\gamma_i} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\mathsf{D}_i : (u,v) \longmapsto \int\limits_{\gamma_i}\int\limits_{\gamma_i} k(x,\tilde{x})u(x)v(\tilde{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tilde{x}.$$

Для изучения свойств представления особую роль играет инвариантность билинейного функционала относительно представления или пары представлений (см., например, [3, Глава 2]. Для функционалов F_i и D_i такая инвариантность означает, что для всякого $g \in G$ выполняются равенства

$$\mathsf{F}_i(T_\sigma(g)[u], T_{\hat\sigma}(g)[v]) = \mathsf{F}_i(u,v)$$
$$\mathsf{D}_i(T_\sigma(g)[u], T_{\hat\sigma}(g)[v]) = \mathsf{D}_i(u,v),$$

которые естественным образом могут быть использованы при выводе формул для специальных функций. В работах [8, 17, 18] показано, что указанная выше инвариантность равносильна тому, что $\hat\sigma = -\sigma - 1$ и ядро функционалов D_i имеет вид

$$k(x,\tilde{x})|_{\gamma_i\times\gamma_i} = C_i(x_1\tilde{x}_1 - x_2\tilde{x}_2 - x_3\tilde{x}_3)^{-\sigma-1},$$

где C_i обозначает константу. Оказывается [8, 20, 21], что это условие является достаточным для того, чтобы при всех i и j выполнялись равенства $\mathsf{F}_i = \mathsf{F}_j$ и $\mathsf{D}_i = \mathsf{D}_j$, то есть функционалы F_i и D_i были вдобавок инвариантны относительно контура пути интегрирования. Вычисляя, например, значения функционалов D_i и D_j при различных i и j и сравнивая получившиеся результаты, можно получить формулы для специальных функций.

2. Функции Макдональда как суммы рядов

Теорема 1. *При* $-1 < \operatorname{Re}(\sigma) < -\frac{1}{2}$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{i}\lambda)^l\,(l+2)}{\Gamma(1+l-\sigma)\,\exp\left(\frac{\mathbf{i}\pi l}{2}\right)} = \frac{(\mathbf{i}\lambda)^{2\sigma+1}\,\exp(\mathbf{i}\pi\sigma)\,\Gamma(-2\sigma-1)\,\Gamma^3(\sigma+1)}{2^{3/2}\,\pi^{5/2}\,|\lambda|^{2\sigma+\frac{1}{2}}\,\Gamma(-\sigma)\,\Gamma(-2\sigma)}\,K_{\sigma+\frac{1}{2}}(|\lambda|).$$

Доказательство. Чтобы вычислить интеграл

$$\mathsf{D}_3(f_n, f_\lambda) = 2C_3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y-z)^{-2\sigma-2}(1+\mathbf{i}y)^{\sigma+n}(1-\mathbf{i}y)^{\sigma-n}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\lambda z}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

сделаем замену $t = y - z$ и воспользуемся формулами [7, 2.3.3.1] и [7, 2.3.6.19]. Вычисляя интеграл

$$\mathsf{D}_1(f_n, f_\lambda) = C_1 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} [1-\cos(\alpha-\beta)]^{-\sigma-1}(1+\cos\beta)^\sigma \exp(\mathbf{i}n\alpha)\exp\left(\frac{\mathbf{i}\lambda\sin\beta}{1+\cos\beta}\right)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta,$$

сделаем замену $t = \alpha - \beta$, разложим функцию $\exp\left(\frac{\mathbf{i}\lambda\sin\beta}{1+\cos\beta}\right)$ в ряд Тейлора и применим формулу [4, 3.892.4]. Интеграл $\mathsf{D}_1(f_n, f_\lambda)$ после этого станет возможным представить в виде ряда, члены которого содержат гипергеометрическую функцию Гаусса. Подробно интегралы $\mathsf{D}_1(f_n, f_\lambda)$ и $\mathsf{D}_3(f_n, f_\lambda)$ были вычислены в [8]. Полагая $n = 0$, заменяем в равенстве $\mathsf{D}_1(f_0, f_\lambda) = \mathsf{D}_3(f_0, f_\lambda)$ функцию Гаусса произведениями гамма-функций по формуле

$$ {}_2F_1(a, b; 1 + a - b; -1) = 2^{-a}\sqrt{\pi}\Gamma(1 + a - b)\Gamma^{-1}\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{a}{2} - b + 1\right) $$

[5, 7.3.6.2].

Равенство $\mathsf{D}_1(f_n, f_\lambda) = \mathsf{D}_3(f_n, f_\lambda)$ содержит константы C_1 и c_3, которыми определяются функционалы D_1 и D_3 соответственно. Эти константы не зависят от значений n и λ, но зависят от числа σ, определяющего пространство $\mathfrak{D}_\sigma$. Взяв для n и λ конкретные значения, можно вычислить отношение $\frac{C_1}{C_3}$. В работе [8] при $n = 0$ и $\lambda = 1$ получено, что $\frac{C_1}{C_3} = \frac{\Gamma^2(-\sigma)}{\Gamma^2(\sigma+1)}$. $\square$

3. Об интеграле, содержащем произведение двух одинаковых функций Макдональда

Теорема 2. *При* $-1 < \mathrm{Re}(\sigma) < -\frac{1}{2}$

$$ \int\limits_0^{+\infty} \lambda^{\frac{1}{2}}\,[K_\tau(\lambda)]^2\,d\lambda = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sin^{-1}\left[\pi\left(\tau + \frac{1}{2}\right)\right]. $$

Доказательство. Домножим обе части разложения

$$ f_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c_{n\lambda}\, f_\lambda(x)\, d\lambda, $$

где функции $c_{\lambda,n}$, зависящие от λ и n, являются матричными элементами оператора перехода от базиса $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ к базису $\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, на однородную функцию $(x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)^{-\sigma-1} \in \mathfrak{D}_{-\sigma-1}$, где y принадлежит гиперболоиду $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1$, и проинтегрируем левую часть по γ_1, а правую по γ_2 . Иными словами, мы применим к левой и правой части разложения функций, составляющих первый базис, по функциям, из которых состоит второй базис, преобразование Пуассона Π [20, 21]:

$$ \Pi(f_k, \hat{q}^{-\sigma-1}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c_{n\lambda}\,\Pi(f_\lambda, \hat{q}^{-\sigma-1})\,d\lambda. $$

Получим

$$ \begin{aligned} e^{\mathbf{i}nq}\,P_\sigma^n(\operatorname{ch} p) = \sqrt{2\pi}\,\Gamma^{-1}(\sigma - n + 1) \times \\ \times \int\limits_0^{+\infty} K_{\sigma+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda}{\operatorname{ch} p + \operatorname{sh} p \cos\, q}\right) [\Gamma^{-1}(n - \sigma) \times \\ \times W_{n,\sigma+\frac{1}{2}}(2\lambda)\,\exp\frac{\mathbf{i}\lambda \operatorname{sh} p \sin q}{\operatorname{ch} p + \operatorname{sh} p \cos q} + \\ + \Gamma^{-1}(-\sigma - n)\,W_{-n,\sigma+\frac{1}{2}}(2\lambda)\,\exp\left(-\frac{\mathbf{i}\lambda \operatorname{sh} p \sin q}{\operatorname{ch} p + \operatorname{sh} p \cos q}\right)]\,d\lambda. \end{aligned} $$

Положив в этом равенстве $n = p = 0$, выразим функцию Уиттекера через функцию Макдональда по известной формуле

$$W_{0,\mu(z)} = \sqrt{\frac{z}{2}}\, K_\mu\left(\frac{z}{2}\right).$$

Воспользуемся тем, что

$$P^0_\sigma(1) = P_\sigma(1) = {}_2F_1(-\sigma,\, \sigma+1;\, 1;\, 0) = 1.$$

Остается учесть известное соотношение для гамма-функции

$$\Gamma(\sigma+1)\,\Gamma(-\sigma) = \frac{\pi}{\sin[\pi(\sigma+1)]}$$

и положить $\tau = \sigma + \frac{1}{2}$. □

4. Заключение

Теорему 2 можно рассматривать как полученный теоретико-групповыми способами частный случай формулы

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\, K_\mu(bx)\, K_\nu(cx)\, dx = 2^{\alpha-3}\, c^{-\alpha-\mu}\, b^\mu \times \\ \times\, \Gamma\left(\frac{\alpha+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-\mu-\nu}{2}\right) \times \\ \times\, \Gamma^{-1}(\alpha)\, {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\mu+\nu}{2},\, \frac{\alpha-\mu+\nu}{2};\, \alpha;\, 1-\frac{b^2}{c^2}\right),$$

которая выполняется при ограничениях $\mathrm{Re}\,(b+c) > 0, \mathrm{Re}\ \alpha > |\,\mathrm{Re}\ \mu| + |\,\mathrm{Re}\ \nu|$ [6, 2.16.33.1] (при этом следует учесть, что ${}_2F_1(a,\, b;\, c;\, 0) = 1$). Ряд других формул для функций Макдональда получен в статье [18] при изучении связи между сферическим и параболическим базисами пространства представления классической (четырехмерной) лоренцевой группы. Напротив, связь между сферическим и гиперболическим базисами приводит [17] к обобщению некоторых ранее известных формул для функций Лежандра второго рода и связанного с ними индексного интегрального преобразования Мелера – Фока [22, Глава 3]. Применение преобразования Пуассона к выводу формул для присоединенных функций Лежандра обсуждается в работах [20, 21]. В работе [19] показано, что связь между параболическим и гиперболическим базисами выражается через регулярную и иррегулярную кулоновские функции, а некоторые формулы для интегральных преобразований этих функций можно выразить на языке сужений представления трехмерной лоренцевой группы на отдельные ее однопараметрические подгруппы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. Наука, Москва, 1965.

2. Виленкин Н. Я., Шлейникова М. А. Интегральные соотношения для функций Уиттекера и представления трехмерной группы Лоренца // Мат. сб. 1970. Т. 81. С. 185-191.

3. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматлит, Москва, 1962.

4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматлит, Москва, 1963.

5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. Наука, Москва, 1986.

6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. Наука, Москва, 1983.

7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. Наука, Москва, 1981.

8. Шилин И. А. Двойные $SO(2,1)$-инвариантные интегралы и формулы для функций Уиттекера // Известия вузов. Математика. 2012. № 5. С. 56-66.

9. Aurich R., Lustig S., Steiner F. Hyperbolic universes with a horned topology and the cosmic microwave background anisotropy // Classical and Quantum Gravity. 2004. Vol. 21. P. 4901-4925.

10. Bolte J., Steil G., Steiner F. Arithmetical chaos and violation of universality in energy level statistics // Physical Review Letters. 1992. Vol. 69. P. 2188-2191.

11. Booker A. R. A test for identifying Fourier coefficients of automorphic forms and applications to Kloosterman sums // Experimental Mathematics. 2000. Vol. 9. P. 571-581.

12. Bryson A. E. Control of spacecraft and aircraft. Princeton University Press, Princeton, 1994.

13. Heijhal D. A. The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. – Lecture Notes in Mathematics, Volume 1001. Springer, Berlin, 1983.

14. Heijhal D. A., Rackner B. N. On the topography of Maass vaveforms for $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ // Experimental Mathematics. 1992. Vol. 1. P. 275-305.

15. Gil A., Seguna J., Temme N. M. Computation of the modified Bessel functions of the third kind of imaginary orders: uniform Airy-type asymptotic expansions // Journal Computational and Applied Mathematics. 2003. Vol. 153. P. 225-234.

16. Iwaniec H. Introduction to the spectral theory of automorphic forms. Revista Matematica Iberoamericana, Madrid, 1995.

17. Shilin I. A., Junesang Choi. Certain connections between the spherical and hyperbolic bases on the cone and formulas for related special functions // Integral Transforms and Special Functions. 2014. Vol. 25. No. 5. P. 374 – 383.

18. Shilin I. A., Junesang Choi. Some connections between the spherical and parabolic bases on the cone expressed in terms of the Macdonald functions // Abstract and Applied Analysis. 2014. Article ID 741079.

19. I. A. Shilin, J. Choi, J. W. Lee. Some integrals involving Coulomb functions associated with the three-dimensional proper Lorentz group // AIMS Mathematics. 2020. Vol. 5. No. 6. P. 5664–5682.

20. Shilin I. A., Nizhnikov A. I. Some formulas for Legendre functions induced by the Poisson transform // Acta Polytechnica. 2011. Vol. 51. No. 1, P. 70-73.

21. Shilin I. A., Nizhnikov A. I. Some formulas for Legendre functions related to the Poisson transform and Lorentz group representation // Journal of Physics. Conference series. 2012. Vol. 356. 012020.

22. Yakubivich S. V. Index transforms. World Scientific, Singapore, 1996.

23. Zhao P. Quantum variance of Maass-Hecke cusp forms // Communications in Mathematical Physics. 2010. Vol. 297. P. 475-514.

REFERENCES

1. Vilenkin N. Ja. 1965, Special functions and group representations theory, Nauka, Moscow. (In Russian.)

2. Gelfand I. M., Graev M. I., Vilenkin N. Ya. 1962, Integral geometry and related aspects in group representation theory, Fizmatlit, Moscow. (In Russian.)

3. Gradstein I. S., Ryzhik I.M. 1963, Tables of integrals, sums, series and products, Fizmatlit, Moscow. (In Russian.)

4. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1986, Integrals and series: Advanced chapters, Nauka, Moscow. (In Russian.)

5. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 198s, Integrals and series: Special functions, Nauka, Moscow. (In Russian.)

6. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1981, Integrals and series: Elementary functions, Nauka, Moscow. (In Russian.)

7. Shilin I. A. 2012, “Double $SO(2,1)$-invariant integrald and formulas for Whittaker functions“, *Izv. VUZ.*, no. 5, pp. 56-66.

8. Aurich R., Lustig S. & Steiner F. 2004, “Hyperbolic universes with a horned topology and the cosmic microwave background anisotropy“, *Classical and Quantum Gravity*, vol. 21, pp. 4901-4925.

9. Bolte J., Steil G. & Steiner F. 1992, “Arithmetical chaos and violation of universality in energy level statistics“, *Physical Review Letters*, vol. 69, pp. 2188-2191.

10. Booker A. R. 2000, “A test for identifying Fourier coefficients of automorphic forms and applications to Kloosterman sums“, *Experimental Mathematics*, vol. 9, pp. 571-581.

11. Bryson A. E. 1994, Control of spacecraft and aircraft, Princeton University Press, Princeton.

12. Heijhal D. A. 1983, The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Lecture Notes in Mathematics, Volume 1001, Springer, Berlin.

13. Heijhal D. A. & Rackner B. N. 1992, “On the topography of Maass vaveforms for $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$“, *Experimental Math.*, vol. 1, pp. 275-305.

14. Gil A., Seguna J. & Temme N. M. 2003, “Computation of the modified Bessel functions of the third kind of imaginary orders: uniform Airy-type asymptotic expansions“, *J. Comp. Appl. Math.*, vol. 153, pp. 225-234.

15. Iwaniec H. 1995, Introduction to the spectral theory of automorphic forms, Revista Matematica Iberoamericana, Madrid.

16. Shilin I. A. & Junesang Choi. 2014, “Certain connections between the spherical and hyperbolic bases on the cone and formulas for related special functions“, *Int. Transf. Spec. Func.*, vol. 25, no. 5, pp. 374–383.

17. Shilin I. A. & Junesang Choi. 2014, “Some connections between the spherical and parabolic bases on the cone expressed in terms of the Macdonald functions“, *Abstract and Appl. Analysis*, article ID 741079.

18. Shilin I. A., J. Choi & J. W. Lee. 2020, “Some integrals involving Coulomb functions associated with the three-dimensional proper Lorentz group“, *AIMS Math.*, vol. 5, no. 6, pp. 5664–5682.

19. Shilin I. A., Nizhnikov A. I. 2011, “Some formulas for Legendre functions induced by the Poisson transform“, *Acta Polytechnica*, vol. 51, no. 1, pp. 70-73.

20. Shilin I. A., Nizhnikov A. I. “Some formulas for Legendre functions related to the Poisson transform and Lorentz group representation“, *J. of Physics. Conference series*, vol. 356, article 012020.

21. Yakubivich S. V. 1996, Index transforms, World Scientific, Singapore.

22. Zhao P. 2010, “Quantum variance of Maass-Hecke cusp forms“, *Comm. Math/ Phys.*, vol. 297, pp. 475-514.

Получено 4.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.554.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-234-272

О локально нильпотентном радикале Джекобсона в специальных алгебрах Ли

О. А. Пихтилькова, Е. В. Мещерина, А. Н. Благовисная, Е. В. Пронина, О. А. Евсеева

Ольга Александровна Пихтилькова — кандидат физико-математических наук, доцент, Российский технологический университет МИРЭА (г. Москва).
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
Елена Владимировна Мещерина — кандидат физико-математических наук, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
Анна Николаевна Благовисная — кандидат физико-математических наук, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: matmet@bk.ru
Елена Владиславовна Пронина — кандидат физико-математических наук, доцент, Российский технологический университет МИРЭА (г. Москва).
e-mail: elenavladpronina@rambler.ru
Ольга Алексеевна Евсеева — Российский технологический университет МИРЭА (г. Москва).
e-mail: o_evseeva@mirea.ru

Аннотация

В статье проведено исследование возможности гомологического описания радикалов Джекобсона и локально нильпотентного для алгебр Ли, их связь с PI-неприводимо представленным радикалом, а также изучены некоторые свойства примитивных алгебр Ли. Доказывается аналог теоремы Ф. Кубо для почти локально разрешимых алгебр Ли с нулевым радикалом Джекобсона. Показано, что радикал Джекобсона специальной почти локально разрешимой алгебра Ли L над полем F характеристики нуль равен нулю тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где $Z(L)$ – центр алгебры L, S – конечномерная подалгебра L такая, что $J(L) = 0$. Теорема Е. Маршалла обобщена на случай почти локально разрешимых алгебр Ли. Для произвольной специальной алгебры Ли L показано включение $IrrPI(L) \subset J(L)$, которое в общем случае является строгим. Приведен пример алгебры Ли L, для которой выполнено строгое включение $J(L) \subset IrrPI(L)$. Показано, что для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль справедливо включение $N(L) \subset IrrPI(L)$, которое в общем случае является строгим. Показано, что большинство алгебр Ли над полем являются примитивными. Приведен пример абелевой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем не являющейся примитивной. Приведены примеры, показывающие, что бесконечномерные коммутативные алгебры Ли являются примитивными над любыми полями; конечномерная абелева алгебра, размерности больше 1, над алгебраически замкнутым полем не является примитивной; пример неартиновой некоммутативной алгебры Ли являющейся примитивной. Показано, что для специальных алгебр Ли над полем характеристики нуль PI-неприводимо представленный радикал совпадает с локально нильпотентным. Приведен пример алгебры Ли, локально нильпотентный радикал которой не является ни локально нильпотентным, ни локально разрешимым. Даются достаточные условия примитивности алгебры Ли, приводятся примеры примитивных алгебр Ли и алгебры Ли не являющейся примитивной.

Ключевые слова: алгебра Ли, примитивная алгебра Ли, специальная алгебра Ли, неприводимое PI-представление, радикал Джекобсона, локально нильпотентный радикал, редуктивная алгебра Ли, почти локально разрешимая алгебра Ли.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
О. А. Пихтилькова, Е.В. Мещерина, А.Н. Благовисная, Е.В.Пронина, О.А.Евсеева О локально нильпотентном радикале Джекобсона в специальных алгебрах Ли // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 234–272.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 512.554.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-234-272

On a locally nilpotent radical Jacobson for special Lie algebras

O. A. Pikhtilkova, E. V. Mescherina, A. N. Blagovisnaya, E. V. Pronina, O. A. Evseeva

Olga Alexandrovna Pikhtilkova — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Russian technological University MIREA (Moscow).
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
Elena Vladimirovna Meshcherina — candidate of physical and mathematical sciences, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
Anna Nikolaevna Blagovisnaya — candidate of physical and mathematical sciences, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: matmet@bk.ru
Elena Vladislavovna Pronina — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Russian technological University MIREA (Moscow).
e-mail: elenavladpronina@rambler.ru
Olga Alekseevna Evseeva — Russian technological University MIREA (Moscow).
e-mail: o_evseeva@mirea.ru

Abstract

In the paper investigates the possibility of homological description of Jacobson radical and locally nilpotent radical for Lie algebras, and their relation with a PI - irreducibly represented radical, and some properties of primitive Lie algebras are studied. We prove an analog of The F. Kubo theorem for almost locally solvable Lie algebras with a zero Jacobson radical. It is shown that the Jacobson radical of a special almost locally solvable Lie algebra L over a field F of characteristic zero is zero if and only if the Lie algebra L has a Levi decomposition $L = S \oplus Z(L)$, where $Z(L)$ is the center of the algebra L, S is a finite-dimensional subalgebra L such that $J(L) = 0$. For an arbitrary special Lie algebra L, the inclusion of $IrrPI(L) \subset J(L)$ is shown, which is generally strict. An example of a Lie algebra L with strict inclusion $J(L) \subset IrrPI(L)$ is given. It is shown that for an arbitrary special Lie algebra L over the field F of characteristic zero, the inclusion of $N(L) \subset IrrPI(L)$, which is generally strict. It is shown that most Lie algebras over a field are primitive. An example of an Abelian Lie algebra over an algebraically closed field that is not primitive is given. Examples are given showing that infinite-dimensional commutative Lie algebras are primitive over any fields; a finite-dimensional Abelian algebra of dimension greater than 1 over an algebraically closed field is not primitive; an example of a non-Cartesian noncommutative Lie algebra is primitive. It is shown that for special Lie algebras over a field of characteristic zero PI-an irreducibly represented radical coincides with a locally nilpotent one. An example of a Lie algebra whose locally nilpotent radical is neither locally nilpotent nor locally solvable is given. Sufficient conditions for the primitiveness of a Lie algebra are given, and examples of primitive Lie algebras and non-primitive Lie algebras are given.

Keywords: Lie algebra, primitive Lie algebra, special Lie algebra, irreducible PI-representation, Jacobson radical, locally nilpotent radical, reductive Lie algebra, almost locally solvable Lie algebra.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
O.A. Pikhtilkova, E.V. Mescherina, A.N. Blagovisnaya, E.V. Pronina, O.A. Evseeva, 2021, "On a locally nilpotent radical Jacobson for special Lie algebras", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 234–272.

1. Введение

Начало создания теории конечномерных алгебр Ли относится к концу XIX века. Оно связано с именами таких математиков как Софус Ли, Ф. Энгель, Э. Картан, В. Киллинг и др. [1, стр.453].

По аналогии с теорией групп было введено понятие разрешимой и нильпотентной алгебр Ли. В. Киллинг ввел понятие радикала и полупростой алгебры Ли.

В дальнейшем развитие теории конечномерных алгебр Ли привело к классификации конечномерных простых алгебр Ли над полем характеристики нуль, доказательству теоремы Леви-Мальцева и многих других.

Конечномерные алгебры Ли возникли при изучении групп Ли. В настоящее время они имеют хорошо разработанную теорию, которая находит приложение в различных областях математики.

При изучении теории гладких многообразий естественно возникают бесконечномерные алгебры Ли векторных полей.

Бесконечномерные алгебры Ли оказались полезным инструментом при построении примеров групп. Например, Ю. П. Размыслов использовал бесконечномерные алгебры Ли при построении примера группы, удовлетворяющей тождеству $x^p = 1$, где $p \geqslant 5$ – простое, которая не является разрешимой [2]. Бесконечномерные алгебры Ли широко использовались в работах А. И. Кострикина по проблеме Бернсайда [3]. Они находят и другие применения в математике.

Разработка структурной теории алгебр Ли является актуальной темой исследования. В настоящее время в этой области имеются тысячи научных работ.

Для различных алгебраических систем важную роль при построении структурной теории играет понятие радикала.

Радикал это такой класс идеалов, фактор по которым имеет нулевой радикал и хорошо устроен.

В теории ассоциативных колец используются радикалы Джекобсона, первичный, Левицкого и другие.

В общем случае нельзя утверждать, что полупростое в смысле некоторого радикала кольцо хорошо устроено.

Если наложить на полупростое кольцо дополнительно некоторое условие, то оно может стать хорошо устроенным. Такими условиями могут служить конечномерность, артиновость, наличие полиномиального тождества и другие.

Различные радикалы для алгебр Ли исследовались в работах [4], [5], [6] и других.

В теории конечномерных алгебр Ли в качестве радикала используют наибольший разрешимый идеал.

К числу часто используемых радикалов относится также нильпотентный радикал конечномерной алгебры Ли.

Определение 1. *Нильпотентным радикалом $N(L)$ для конечномерной алгебры Ли L называется пересечение ядер ее неприводимых конечномерных представлений [1].*

Для конечномерных алгебр был введен аналог радикала Джекобсона для ассоциативных алгебр.

Определение 2. *Назовем радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L пересечение максимальных идеалов и саму алгебру L, если их нет [7].*

Для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [7].

В 1963 г. В.Н. Латышев ввел новый класс алгебр Ли [8], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

Определение 3. *Скажем, что алгебра Ли L специальная алгебра Ли, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.*

С.А. Пихтильков и К.И.Бейдар показали, что в специальных алгебрах Ли первичный радикал является наибольшим локально разрешимым идеалом [9], [10].

С.А. Пихтильков ввел понятие локально нильпотентного радикала специальной алгебры Ли [11].

Определение 4. *Назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F.*

В работе [11] показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным идеалом.

В этой же работе были исследованы некоторые свойства локально нильпотентного радикала специальной алгебры Ли.

Определение 5. *Пусть M неприводимый L-модуль. Обозначим через $A(M)$ ассоциативную алгебру, порожденную элементами алгебры L в алгебре $\mathrm{End}(M)$. Назовем алгебру $A(M)$ ассоциированной алгеброй представления.*

Определение 6. *Назовем PI-представлением алгебры Ли L представление алгебры L в алгебре Ли эндоморфизмов $\mathrm{End}(M)^{(-)}$ модуля M над алгеброй L, для которого ассоциированная алгебра представления $A(L)$ является PI-алгеброй.*

Определение 7. *Обозначим через $IrrPI(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли L и саму алгебру L если их нет.*

2. Основной текст статьи

Исторический очерк. Основные определения и обозначения

Начало создания теории конечномерных алгебр Ли относится к концу XIX века. Оно связано с именами таких математиков как Софус Ли, Энгель, Э, Картан, Киллинг и др. [1].

По аналогии с теорией групп было введено понятие разрешимой и нильпотентной алгебр Ли.

Киллинг ввел понятие радикала и полупростой алгебры Ли.

В дальнейшем развитие теории конечномерных алгебр Ли привело к классификации конечномерных простых алгебр Ли над полем характеристики нуль, доказательству теоремы Леви-Мальцева и многих других.

Конечномерные алгебры Ли возникли при изучении групп Ли. В настоящее время они имеют хорошо разработанную теорию, которая находит приложение в различных областях математики.

При изучении теории гладких многообразий естественно возникают бесконечномерные алгебры Ли векторных полей.

Бесконечномерные алгебры Ли оказались полезным инструментом при построении примеров групп. Они находят и другие применения в математике.

В силу сказанного выше, были предприняты значительные усилия по разработке теории бесконечномерных алгебр Ли. В настоящее время в этой области имеются тысячи научных работ, изучающих бесконечномерные алгебры Ли с разных точек зрения.

К сожалению, не удалось создать удовлетворительную структурную теорию бесконечномерных алгебр Ли.

Создание структурной теории предполагает наличие хорошего радикала, хорошее описание фактора по радикалу и получение ряда результатов, описывающих отдельные классы алгебр.

Единый для всех классов алгебр Ли радикал был построен В.А.Парфеновым [12]. Он предложил рассматривать в качестве радикала наибольший слабо разрешимый идеал алгебры Ли.

Везде далее мы будем рассматривать алгебры Ли над полем.

Определение 8. *Алгебра Ли называется слабо разрешимой, если любое ее конечномерное подпространство удовлетворяет тождеству разрешимости некоторой степени.*

В.А.Парфенов показал, что сумма слабо разрешимых идеалов алгебры Ли является слабо разрешимым идеалом. Кроме того, класс всех слабо разрешимых алгебр Ли является радикальным в универсальном классе всех алгебр Ли.

Для дальнейшего развития структурной теории были найдены аналоги ряда теорем, справедливых для конечномерных алгебр Ли. Для класса всех алгебр Ли этого сделать невозможно.

В 1963 г. В.Н.Латышев ввел новый класс алгебр Ли [8], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

Определение 9. *Ассоциативная алгебра A называется PI-алгеброй, если существует $f(x_1, ..., x_n) \in F(X)$, где $F(X)$ – свободная ассоциативная алгебра над полем F, такой, что $f(a_1, ..., a_n) = 0$ для произвольных $a_1, ..., a_n \in A$.*

Определение 10. *Скажем, что алгебра Ли L специальная или SPI-алгебра Ли, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.*

Определение 11. *Назовем алгебру первичной, если из того, что некоторая степень ее идеала равна нулю $I^n = 0$ следует, что $I = 0$. Это определение относится как к ассоциативным алгебрам, так и к алгебрам Ли.*

Определение 12. *Назовем алгебру первичной, если из того, что произведение идеалов $UV = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$. Это определение относится как к ассоциативным алгебрам, так и к алгебрам Ли.*

Определение 13. *Идеал I алгебры Ли L называется первичным, если фактор-алгебра L/I по нему является первичной.*

Определение 14. *Назовем первичным радикалом $P(D)$ пересечение всех первичных идеалов алгебры (ассоциативной или алгебры Ли) D или саму алгебру D, если их нет.*

Теория алгебр Ли возникла позднее теории групп, теории ассоциативных колец и модулей.

Хорошо известно, что многие результаты, полученные в теории групп, переносятся на алгебры Ли и наоборот.

Алгебры Ли имеют также кольцевую структуру. Поэтому часть результатов переносится с ассоциативных алгебр на алгебры Ли.

К таким например относятся теоремы С.А. Пихтилькова о разрешимости первичного радикала артиновых специальных алгебр Ли и произвольных нётеровых алгебр Ли [13], [14].

Очень редко удается перенести результаты с алгебр Ли на ассоциативные алгебры.

Назовем ассоциативную алгебру слабо артиновой, если любая убывающая цепочка ее двусторонних идеалов стабилизируется.

В.М. Поляков и С.А. Пихтильков показали, что первичный радикал слабоартиной алгебры – нильпотентен [15].

Аналогичный результат был сперва получен для локально нильпотентных артиновых алгебр Ли. Было показано, что артинова локально нильпотентная алгебра Ли является разрешимой [15].

Изучение многообразий различных алгебраических систем было модной темой второй половины XX века.

Одной из наиболее известных проблем являлась проблема конечной базируемости многообразий. В настоящее время она исследована почти для всех классов широко изучаемых алгебраических систем. Пока неизвестно существуют ли не конечно базируемые многообразия для случая алгебр Ли над полем характеристики нуль.

Хотя проблема конечной базируемости многообразий носит абстрактный характер, при ее исследовании были разработаны новые методы для работы с тождествами.

При развитии теории многообразий были получены структурные результаты, или результаты имеющие широкое применение при изучении структурных вопросов.

К их числу относятся теоремы И.Капланского и Познера [16], теорема Размыслова-Кемера-Брауна о нильпотентности радикала конечно порожденной ассоциативной PI-алгебры [17], [18], лемма А.И.Ширшова о локальной ограниченности высот [19], теорема Ю.П.Размыслова о ранге [20] и другие. Создались предпосылки для применения результатов теории многообразий при изучении структуры различных алгебраических систем.

В теории ассоциативных колец и модулей были разработаны различные объекты, которые можно применять при построении структурной теории.

К их числу относятся радикалы Джекобсона и первичный [16], кольцо частных [21], [22], центроид Мартиндейла [23], [20], [22] и другие.

Развитие упомянутых выше разделов алгебры позволило приступить к созданию структурной теории специальных алгебр Ли – класса алгебр Ли близких к конечномерным, которые сочетают в себе свойства ассоциативных алгебр и алгебр Ли.

Для различных алгебраических систем важную роль при построении структурной теории играет понятие радикала.

Радикал это такой класс идеалов, фактор по которым имеет нулевой радикал и хорошо устроен.

В теории ассоциативных колец используются радикалы Джекобсона, первичный, Левицкого и другие.

К сожалению, в общем случае нельзя утверждать, что полупростое в смысле некоторого радикала кольцо хорошо устроено.

Так, например, свободная алгебра над полем полупроста [16] и даже примитивна [24] и, тем не менее, не имеет хорошего строения.

Если наложить на полупростое кольцо дополнительно некоторое условие конечности, то оно может стать хорошо устроенным. Такими условиями могут служить артиновость, наличие полиномиального тождества и другие.

Различные радикалы для алгебр Ли исследовались в работах [4], [5], [6] и других.

В теории конечномерных алгебр Ли в качестве радикала используют наибольший разрешимый идеал.

К сожалению, в бесконечномерных алгебрах Ли сумма всех разрешимых идеалов не всегда является разрешимым идеалом.

Естественным обобщением понятия разрешимого идеала является локально разрешимый идеал.

Р. Амайо и И.Стюарт сформулировали в своей книге [25] вопрос: будет ли сумма локально разрешимых идеалов бесконечномерной алгебры Ли – локально разрешимым идеалом?

Отрицательный ответ на этот вопрос был дан В.Н. Латышевым, А.В. Михалевым и С.А. Пихтильковым [26]. Поэтому исследовать локально разрешимый радикал для класса всех алгебр Ли нельзя.

Можно рассматривать для класса всех алгебр Ли слабо разрешимый радикал, построенный В.А.Парфеновым [12].

Для класса всех алгебр Ли не удается дать хорошую характеризацию ни примитивной ни первичной алгебр Ли. В работе [24] показано, что свободная ассоциативная алгебра над полем является примитивной. Такой же будет и свободная алгебра Ли.

Легко заметить, что свободная алгебра Ли является также первичной алгеброй.

В общем случае также не удается дать хорошую характеризацию полупростой в смысле Парфенова алгебры Ли, требуется наложить дополнительное условие.

Оказалось, что класс специальных алгебр Ли в некотором смысле близок к конечномерным алгебрам и, в то же время, содержит интересные примеры бесконечномерных алгебр Ли.

Так, например, Ю.А.Бахтурин доказал для почти разрешимых конечно порожденных специальных алгебр Ли над полем характеристики нуль аналог теоремы Леви-Мальцева [30]. Обобщить этот результат на класс всех алгебр Ли нельзя [28, с. 166].

Ю.П.Размыслов показал, что в конечно порожденных специальных алгебрах Ли существует наибольший разрешимый идеал, фактор по которому представим в виде подпрямого произведения полупростых алгебр Ли, конечномерных над соответствующими полями [29].

С.А. Пихтильков и К.И.Бейдар, показали, что в обобщенно специальных алгебрах Ли первичный радикал является наибольшим локально разрешимым идеалом и совпадает со слабо разрешимым идеалом [9], [10].

Напомним важное определение центроида Мартиндейла.

Для изучения строения специальных алгебр Ли полезна конструкция центроида Мартиндейла и понятие центрального замыкания. Мы будем рассматривать единый подход к алгебрам Ли и ассоциативным алгебрам. В неассоциативном случае он был разработан в [20], [23]. Мы будем следовать подходу, предложенному Ю.П.Размысловым для универсальных алгебр сигнатуры Ω [20].

При этом предполагается, что сигнатура Ω содержит хотя бы одну операцию арности не меньше двух.

Нам потребуется понятие инъективного модуля и инъективной оболочки.

Определение 15. *Модуль M над ассоциативной алгеброй с единицей A называется инъективным, если для любых двух модулей M_1,M_2, любого мономорфизма $\varphi : M_1 \to M_2$ и любого гомоморфизма $\psi : M_1 \to M$ существует гомоморфизм $\rho : M_2 \to M$, для которого $\rho \circ \varphi = \psi$.*

Определение 16. *Подмодуль M модуля P называется большим в P, если любой ненулевой подмодуль в P имеет с M ненулевое пересечение.*

Определение 17. *A-модуль P называется инъективной оболочкой A-модуля M, если выполнены условия:*

а) P – инъективный A-модуль;

б) M – подмодуль в P;

в) M – большой подмодуль в P.

Инъективная оболочка существует для каждого модуля M, и она единственна с точностью до изоморфизма.

Пусть L – F-алгебра сигнатуры Ω и $A = A(L)$ – ассоциированная с ней ассоциативная подалгебра в $End_F A$. Пусть P – инъективная оболочка A-модуля L, $E = End_A P$ – алгебра всех эндоморфизмов A-модуля P, $S = EL$–A-подмодуль в P.

В случае лиевых алгебр алгебра $A(L)$ является присоединенной алгеброй $\mathrm{Ad}L$ алгебры L.

Рассмотрим ассоциативный случай. Пусть D – ассоциативная F-алгебра,

$$a, x \in D, R_a(x) = xa, L_a(x) = ax.$$

Для любых $a, b \in D$ отображения R_a,L_a принадлежат $End_F D$. Обозначим через $B(D)$ подалгебру в $End_F D$, порожденную элементами вида R_a, L_b, где a, b пробегают алгебру D. Алгебра $B(D)$ называется алгеброй умножений алгебры D. Имеет место равенство алгебр $A(D) = B(D)$.

Приведем без доказательства ряд утверждений относительно введенных объектов.

Пусть L полупервичная F-алгебра сигнатуры Ω. Тогда ограничение ρ действия алгебры E на A-модуль S коммутативно.

Замечание. *Мы не даем определение первичных и полупервичных алгебр для случая универсальных алгебр, так как будем применять эти понятия только в случае ассоциативных алгебр и алгебр Ли. Для универсальных алгебр они определяются аналогично.*

Так как по определению $S = EL$ и согласно лемме 0.A алгебра $C(L) = E/Ker\rho$ коммутативна, то мы можем продолжить все операции сигнатуры Ω по C-линейности с алгебры L на алгебру S и наделить S структурой Z-алгебры сигнатуры Ω. Алгебру $C = C(L)$ мы будем называть центроидом Мартиндейла полупервичной алгебры L, а C-алгебру S – центральным замыканием алгебры L.

Предложение 0.A ([20]). *Если L – полупервичная F-алгебра сигнатуры Ω, то центроид $C = C(L)$ и центральное замыкание $S = S(L)$ являются полупервичными алгебрами, характеризующимися следующими свойствами:*

1) *C– коммутативная F алгебра с единицей и $S = CL$;*

2) *Произвольный ненулевой A-подмодуль в S пересекается с L по ненулевому идеалу алгебры L;*

3) *Для любого A-гомоморфизма φ ненулевого A-подмодуля I и A-модуля S в S существует элемент $c \in C$, для которого $ci = \varphi(i)$, где i – произвольный элемент модуля I. Более того, если I– большой A-подмодуль в S, то элемент z однозначно определяется гомоморфизмом φ.*

Предложение 0.B ([20]). *Если L – первичная F-алгебра сигнатуры Ω, то центроид $C(L)$ является полем, $S(L)$ – первичной F-алгеброй и C-алгебра S характеризуется следующими свойствами:*

1) *$S = CL$;*

2) *произвольный ненулевой A-подмодуль в S имеет ненулевое пересечение с L;*

3) *любой частичный A-эндоморфизм φ ненулевого идеала I алгебры L в L однозначно определяет эндоморфизм $c \in C$, ограничение которого на I совпадает с φ.*

Сформулирем важную теорему Ю.П. Размыслова о ранге.

Хотя теорема о ранге справедлива даже для универсальных алгебр [20], мы будем иметь в виду ассоциативные алгебры или алгебры Ли.

Определение 18. *Пусть A – алгебра Ли или ассоциативная алгебра над полем F. Любой полином*

$$d_k(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_l)$$

из свободной алгебры Ли $F(X)$ или ассоциативной соответственно, который полилинеен и кососимметричен относительно $x_1, ..., x_k$, называется полиномом Капелли порядка k. Пусть V – произвольное векторное F-подпространство в алгебре A. Скажем, что на V выполнены все тождества Капелли порядка k, если для любого полинома Капелли порядка k и любых элементов

$$v_1, ..., v_k \in V, a_1, ..., a_l \in A$$

в алгебре A выполняются равенства

$$d_k(v_1, ..., v_k, a_1, ..., a_l) = 0.$$

Определение 19. *Рангом векторного F-подпространства V относительно алгебры A называется наименьшее число k, для которого на V выполняются все тождества Капелли порядка k. Это число обозначается $\mathrm{rank}(A, V)$.*

Замечание. *Легко заметить, что для конечномерной алгебры A размерности n над F ранг любого подпространства относительно алгебры A не превосходит $n + 1$. То же можно сказать и про все алгебры, лежащие в многообразии, порожденном алгеброй A.*

Теорема 0.A (Размыслова о ранге, [20]). *Пусть V – векторное F-подпространство в первичной ассоциативной алгебре A или алгебре Ли. Если $\mathrm{rank}(A, V) < \infty$, то в центральном замыкании $S(A)$ алгебры A справедливо равенство*

$$dim_{C(A)}C(A)V = \mathrm{rank}(A, V) - 1.$$

Согласно теореме Размыслова о ранге, первичные специальные алгебры Ли являются конечномерными над своими центроидами Мартиндейла, что позволяет применять первичный радикал при решении различных задач.

При изучении строения специальной алгебры Ли полезно изучить возможные вложения алгебры Ли в ассоциативную PI-алгебру.

Следуя Ю.А.Бахтурину [30] скажем, что ассоциативная PI-алгебра $A^{(-)}$ является PI-оболочкой алгебры Ли L, если $L \subseteq A^{(-)}$ и алгебра A порождена множеством L как ассоциативная алгебра.

Ю.А.Бахтурин показал, PI-оболочки конечномерных редуктивных алгебр Ли над полем характеристики нуль являются конечномерными [30].

В.А. Парфеновым, И.Н. Балабой, А.В. Михалевым и С.А. Пихтильковым было проведено исследование слабо разрешимого радикала для алгебр Ли [31], [12].

Обозначим через $T(L)$ наибольший слабо разрешимый идеал алгебры Ли, который назовем слабо разрешимым радикалом алгебры Ли L.

В некотором смысле, слабо разрешимая алгебра Ли является аналогом ассоциативной ниль-алгебры.

Так же как и для ассоциативных алгебр [32], для алгебр Ли можно определить верхний и нижний слабо разрешимые радикалы.

Назовем наибольший слабо разрешимый идеал $T(L)$ алгебры Ли L верхним слабо разрешимым радикалом.

По аналогии с построением нижнего ниль-радикала в ассоциативных алгебрах, обозначим через $\rho(L)$ сумму всех разрешимых идеалов алгебры Ли L.

Так как сумма двух разрешимых идеалов алгебры Ли является разрешимым идеалом, идеал $\rho(L)$ является локально разрешимым.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\rho(\alpha)$ следующим образом.

1. $\rho(0) = 0$.

2. Предположим, что $\rho(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\rho(\beta)$ следующим образом.

а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\rho(\beta)$ это такой идеал алгебры L, что $\rho(\beta)/\rho(\gamma)) = \rho(L/\rho(L))$.

б) Если β – предельное порядковое число, то

$$\rho(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} \rho(\gamma).$$

Расширение локально разрешимой алгебры Ли с помощью локально разрешимой алгебры может не быть локально разрешимым [25], но оно будет слабо разрешимым [12].

Если $\rho(\beta) = \rho(\beta + 1)$ скажем, что $\rho(\beta)$ – нижний слабо разрешимый радикал алгебры Ли L.

Были получены следующие результаты.

Теорема 0.C ([31]) *Первичный радикал произвольной алгебры Ли над полем совпадает с нижним слабо разрешимым радикалом.*

Теорема 0.D ([31]) *Первичный радикал $P(L)$ произвольной алгебры Ли L над полем характеристики нуль является характеристическим.*

Предложение 0.D ([31]) *В любой специальной алгебре Ли L локально разрешимый радикал $R(L)$ совпадает с верхним и нижним слабо разрешимыми радикалами. Более точно $R(L) = \rho(2)$.*

Был получен следующий критерий полупервичности алгебры Ли.

Лемма 0.B ([31]) *Алгебра Ли L над полем является полупервичной тогда и только тогда, когда для всех $a \in L$ из равенства $(a)^2 = 0$ следует, что $a = 0$.*

Для построения хорошей структурной теории полезно наложить на алгебру дополнительные условия.

Такими условиями могут служить артиновость и нётеровость.

По аналогии с ассоциативными алгебрами скажем, что алгебра Ли является артиновой, если любая не пустая убывающая цепочка ее идеалов стабилизируется.

Назовем алгебру Ли нётеровой, если в ней стабилизируется любая возрастающая цепочка идеалов.

Важную роль в теории конечномерных алгебр Ли играет нильпотентный радикал.

Нильпотентным радикалом $N(L)$ для конечномерной алгебры Ли L называется пересечение ядер ее неприводимых конечномерных представлений [1].

Известно, что для произвольной конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль справедливо равенство $N(L) = R \cap L'$, где $L' = [L, L]$, R – наибольший разрешимый идеал конечномерной алгебры Ли, который называется ее радикалом.

Известно также [1, стр. 73], что $N(L) = [R, L]$.

Обобщение нильпотентного радикала для специальных алгебр было введено С.А. Пихтильковым.

Он определил локально нильпотентный радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F как пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F [11].

В работе [11] показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным идеалом.

Оказалось, что локально нильпотентный радикал специальных алгебр Ли обладает свойствами похожими на свойства нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли.

Следующая теорема является аналогом утверждения, справедливого для конечномерных алгебр Ли [1].

Теорема 0.Е (Пихтилькова [11]) *Пусть L – обобщенно специальная алгебра Ли над полем F характеристики нуль, $R(L)$ – ее локально разрешимый радикал. Тогда следующие условия эквивалентны*

1) *L – локально нильпотентно полупростая алгебра Ли.*

2) *L – редуктивна.*

3) *L^2 – полупервичная алгебра.*

Отметим, что некоторые утверждения справедливые для конечномерных алгебр Ли не переносятся на обобщенно специальные.

Так например, для конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль справедливо равенство $N(L) = [L, R(L)]$, где $N(L)$ – нильпотентный, а $R(L)$ – разрешимый радикалы [1].

Кроме того, для конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль равенство нулю нильпотентного радикала $N(L)$ равносильно тому, что радикал $R(L)$ совпадает с центром.

Оба этих утверждения не имеют места для обобщенно специальных алгебр Ли. Контрпримером к ним является известный пример Ю.В.Биллига [33].

Алгебра Ли L называется обобщенно специальной, если ее присоединенная ассоциативная алгебра является PI-алгеброй [34].

Ю.В.Биллиг построил пример обобщенно специальной алгебры Ли g над полем комплексных чисел C такой, что она является расширением центра при помощи первичной специальной алгебры Ли и не является специальной. При этом локально нильпотентно полупростая обобщенно специальная алгебра Ли над полем характеристики нуль является специальной [11].

К числу классических радикалов для алгебр Ли относится также радикал Джекобсона.

Следующее определение радикала Джекобсона было дано Е. Маршаллом.

Определение 20. *Назовем радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L пересечение максимальных идеалов и саму алгебру L, если их нет [7] (у Е.Маршалла было только пересечение максимальных идеалов, прибавка "сама алгебра L, если их нет" добавлена Ф.Кубо для бесконечномерных алгебр Ли [4]).*

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [7].

Е. Маршалл доказал следующую теорему.

Теорема 0.G *Если конечномерная алгебра Ли L над полем характеристики нуль имеет разложение Леви в прямую сумму $L = S \oplus \sigma(L)$, тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где S – полупростая алгебра, а $\sigma(L)$ – разрешимый радикал L.*

Идеал идеала алгебры Ли называется подидеалом.

Н. Камийя [35] доказал следующую теорему.

Теорема 0.H *Если алгебра Ли L порождена конечномерными локальными подидеалами L, тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где $\sigma(L)$ – максимальный локально разрешимый идеал L.*

Свойства радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли исследовал также Ф. Кубо [4].

Он показал, что результаты Е. Маршалла и Н. Камийя в общем случае неверны для бесконечномерных алгебр Ли даже в случае локально-конечных алгебр. Им были также изучены бесконечномерные алгебры Ли с нулевым радикалом Джекобсона.

Ф. Кубо доказал следующую теорему.

Теорема 0.I ([4]) *Пусть L – локально-конечная алгебра Ли. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда , когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где S – подалгебра L такая, что $J(S) = 0$, а $Z(L)$ – центр алгебры Ли L.*

На Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Г.Куроша (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008) Борис Исаакович Плоткин отметил важность изучения радикала Джекобсона для алгебр Ли.

Он поставил вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли.

Понятие радикала Джекобсона для ассоциативных алгебр тесно связано с понятием примитивной алгебры.

Скажем, что ассоциативная алгебра или алгебра Ли – примитивная, если она имеет точное неприводимое представление.

Радикал Джекобсона примитивной ассоциативной алгебры равен нулю.

Полупростая ассоциативная алгебра раскладывается в подпрямую сумму примитивных [32], [16].

Аналогичное утверждение справедливо для алгебр Ли при некоторых условиях на алгебру Ли.

Поэтому исследование примитивных алгебр Ли представляет интерес.

2.1. Радикал Джекобсона и связанные с ним радикалы алгебр Ли

В этом разделе рассматривается возможность гомологического описания радикала Джекобсона, его связь с другими радикалами алгебр Ли.

2.1.1. Радикал Джекобсона алгебр Ли

Следующее определение радикала Джекобсона было дано Е. Маршаллом.

Определение 21. *Назовем радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L пересечение максимальных идеалов и саму алгебру L, если их нет [7] (у Е.Маршалла было только пересечение максимальных идеалов, прибавка "сама алгебра L, если их нет" добавлена Ф.Кубо для бесконечномерных алгебр Ли [4]).*

Определение 22. *Нильпотентным радикалом $N(L)$ для конечномерной алгебры Ли L называется пересечение ядер ее неприводимых конечномерных представлений [1].*

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [7].

Е. Маршалл доказал следующую теорему.

Теорема 1.1.A. *Если конечномерная алгебра Ли L над полем характеристики нуль имеет разложение Леви в прямую сумму $L = S \oplus \sigma(L)$, тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где S – полупростая алгебра, а $\sigma(L)$ – разрешимый радикал L.*

Определение 23. *Идеал идеала алгебры Ли называется подидеалом.*

Н. Камийя [35] доказал следующую теорему.

Теорема1.1.B. *Если алгебра Ли L порождена конечномерными локальными подидеалами L, тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где $\sigma(L)$ – максимальный локально разрешимый идеал L.*

Свойства радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли исследовал также Ф. Кубо [4].

Он показал, что результаты Е. Маршалла и Н. Камийя в общем случае неверны для бесконечномерных алгебр Ли даже в случае локально-конечных алгебр. Им были также изучены бесконечномерные алгебры Ли с нулевым радикалом Джекобсона.

Определение Обозначим через $Z(L)$ центр алгебры Ли L, т.е. $Z(L) = \{z | \, (\forall x \in L) \, [z, x] = 0\}$.

Ф. Кубо доказал следующую теорему.

Теорема 1.1.C. ([4]) *Пусть L – локально-конечная алгебра Ли. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда , когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где S – подалгебра L такая, что $J(S) = 0$.*

В 1963 г. В. Н. Латышев ввел новый класс алгебр Ли [8], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

Определение 24. *Скажем, что алгебра Ли L специальная или SPI-алгебра Ли, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.*

Определение 25. *Назовем присоединенной ассоциативной алгеброй $\mathrm{Ad}\, L$ ассоциативную алгебру, порожденную в алгебре $End(L)$ линейными преобразованиями $\{\mathrm{ad}\, x | x \in L\}$, где $\mathrm{ad}\, x(y) = [x, y], x, y \in L$.*

Класс специальных алгебр Ли оказался не замкнутым относительно гомоморфизмов. Пример такой алгебры Ли был придуман Ю.В. Биллигом [33].

Следующее определение, обобщающее определение В.Н. Латышева, было дано С.А. Пихтильковым [34].

Определение 26. *Алгебра Ли L называется обобщенно специальной, если ее присоединенная алгебра $\mathrm{Ad}\, L$ является PI-алгеброй.*

Свойство быть обобщенно специальной алгеброй сохраняется при гоморфизмах [34].

Определение 27. *Назовем алгебру Ли L почти разрешимой (почти локально разрешимой), если в ней существует разрешимый (локально разрешимый) идеал R такой, что алгебра L/R – конечномерна.*

Определение 28. *Пусть R – идеал алгебры Ли L, G – подалгебра. Скажем, что L представима в виде полупрямого произведения $L = G \leftthreetimes R$, если: 1. $L = G + R$; 2. $G \cap R = 0$.*

Определение 29. *Пусть R – разрешимый (почти разрешимый) радикал алгебры Ли L, если он существует. Назовем полупростую конечномерную подалгебру G алгебры Ли L подалгеброй Леви, если L представима в виде полупрямого произведения $L = G \leftthreetimes R$.*

Теорема 1.1.D. (Леви [36]) *Пусть L – конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль с радикалом R. Тогда в L существует полупростая подалгебра G такая, что $L = G \leftthreetimes R$.*

Заметим, что подалгебра G является подалгеброй Леви.

Ю.А. Бахтурин доказал следующий аналог теоремы Леви.

Теорема 1.1.E. ([37, стр. 266-268]) *Пусть L – конечно порожденная почти разрешимая специальная алгебра Ли над полем характеристики нуль. Тогда в L существует подалгебра Леви.*

Ю.А. Терехова следующим образом обобщила теорему Ю.А. Бахтурина.

Теорема 1.1.F. ([38]) *Пусть L – специальная алгебра Ли над полем характеристики нуль, R – локально разрешимый радикал, фактор-алгебра L/R – конечномерна. Тогда в L существует полупростая конечномерная подалгебра G такая, что L представима в виде полупрямой суммы $L = G \leftthreetimes R$.*

Следующая теорема является обобщением теоремы Е. Маршалла на случай почти локально разрешимых алгебр Ли. Доказательство теоремы основано на идеях из [7].

Теорема 1.1.1. *Пусть L – почти локально разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Если алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus R$, где S – конечномерная подалгебра L такая, что $J(L) = 0$, а R – локально разрешимый радикал, то $J(L) = [L, R]$.*

Доказательство. Сделаем сначала очевидное замечание: радикал Джекобсона абелевой алгебры Ли равен нулю.

Можно также воспользоваться леммой 2.1.2 которая рассматривает более общий случай и будет доказана позднее.

Следовательно, $J(L) \subset L^2$.

Пусть I – максимальный идеал алгебры L. Фактор алгебра L/I не содержит собственных идеалов, является простой или абелевой.

Если алгебра L/I – простая, то идеал I содержит локально разрешимый радикал R и представим в виде $I = M + R$, где M – максимальный идеал S. Мы пользуемся тем, что алгебра $S \cap R$ является разрешимой и, следовательно, $S \cap R = 0$ (пересечение локально разрешимой алгебры и конечномерной является локально разрешимой).

Полупростая конечномерная алгебра S над полем характеристики нуль представима в виде суммы идеалов, являющихся простыми алгебрами Ли [1].

Следовательно, пересечение идеалов I таких, что фактор-алгебра L/I – простая, совпадает с R и $J(L) \subset R$.

Учитывая сделанное в начале доказательства замечание, получили $J(L) \subset L^2 \cap R$.

Если фактор-алгебра L/I – абелева, то I содержится в локально разрешимом радикале R (факторы алгебры Ли S не могут быть абелевыми).

Фактор-алгебра $L/(S + R^2)$ абелева.

Учитывая сделанное в начале доказательства замечание, получим, что радикал Джекобсона алгебры $L/(S+R^2)$ равен нулю.

Следовательно, $J(L) \subset S+R^2$, $S+R^2 = L^2$. Получили включение $J(L) \subset L^2 \cap R$.

Покажем, что пересечение всех максимальных идеалов содержит $L^2 \cap R$.

Снова рассмотрим фактор-алгебру L/I по максимальному идеалу I.

Если алгебра Ли $M = L/I$ простая, $I = D+R$, где D – полупростая алгебра или нуль (мы использовали разложение алгебры S в прямую сумму простых идеалов).

Радикал Джекобсона абелевой алгебры R/R^2 равен нулю. Следует, что $J(L) \supset J(R) \supset R^2$. Получили включение $J(L) \supset L^2 \cap R$.

Если алгебра Ли $M = L/I$ абелева, то $I \supset R^2$.

Мы доказали включение $J(L) \supset L^2 \cap R$.

Следовательно, $J(L) = L^2 \cap R$.

Запишем один из коммутаторов алгебры L.

Пусть $l_i = s_i + r_i$, где $i = 1, 2$, $s_i \in S, r_i \in R$.

Тогда

$$[l_1, l_2] = [s_1, s_2] + [s_1, r_2] + [r_1, s_2] + [r_1, r_2].$$

Если $[l_1, l_2] \in R$, то $[s_1, s_2] = 0$.

Тогда

$$[l_1, l_2] = [s_1, r_2] - [s_2, r_1] + [r_1, r_2].$$

Следует

$$L^2 \cap R \subset [L, R].$$

Включение $[L, R] \subset L^2 \cap R$ – очевидно.

Окончательно получили $J(L) = [L, R]$. □

Докажем следствие, которое является аналогом теоремы Ф. Кубо.

Следствие 1.1.1. *Пусть L – специальная почти локально разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где S – конечномерная подалгебра L такая, что $J(S) = 0$.*

Доказательство. Пусть L – специальная почти локально разрешимая алгебра Ли, R ее локально разрешимый радикал.

Согласно теореме F, для алгебры L имеет место разложение Леви $L = S + R$, где S – полупростая конечномерная алгебра, а R – локально разрешимый радикал.

Из теоремы 1.1.1 получаем $J(L) = [L, R]$.

Следовательно, $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда $R = Z(L)$. □

2.1.2. Конечно неприводимо представленный, PI-неприводимо представленный и неприводимо представленный радикалы для алгебр Ли

На Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Г.Куроша (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008) Борис Исаакович Плоткин поставил вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли.

Под гомологическим описанием идеалов колец, алгебр, алгебр Ли понимается понимается их задание через модули [39, статья "Гомологическая классификация колец", с. 1052].

Для сопоставления радикала Джекобсона алгебры Ли с естественными, гомологически заданными радикалами, дадим следующие определения.

Определение 30. *Обозначим через $Irr(L)$ пересечение аннуляторов неприводимых модулей над алгеброй Ли L и саму алгебру L если их нет.*

Определение 31. *Пусть M неприводимый L-модуль. Обозначим через $A(M)$ ассоциативную алгебру, порожденную элементами алгебры L в алгебре $\mathrm{End}(M)$. Назовем алгебру $A(M)$ ассоциированной алгеброй представления.*

Определение 32. *Назовем PI-представлением алгебры Ли L представление алгебры L в алгебре эндоморфизмов $\mathrm{End}(M)^{(-)}$ модуля M над алгеброй L, для которого ассоциированная алгебра представления $A(L)$ является PI-алгеброй.*

Определение 33. *Обозначим через $IrrPI(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли L и саму алгебру L если их нет.*

Ю. А. Бахтурин использовал пересечение аннуляторов конечномерных неприводимых представлений для доказательства аналога теоремы Леви-Мальцева для специальных алгебр Ли [37].

Известно, что для конечномерных алгебр Ли пересечение аннуляторов конечномерных представлений совпадает с нильпотентным радикалом [1] и, следовательно, с радикалом Джекобсона для поля нулевой характеристики [7].

Определение 34. *Обозначим через $IrrFin(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых конечномерных модулей над алгеброй Ли L и саму алгебру L если их нет.*

Л.А. Симонян рассматривал пары $L \subseteq A^{(-)}$, где L – алгебра Ли над полем F характеристики нуль, A – локально конечная ассоциативная алгебра [40]. Он ввел обозначение $J_A(L) = L \cap J(A)$.

В [40] было доказано:

1. Всякий идеал алгебры Ли L, состоящий из нильпотентных в A элементов, лежит в $J_A(L)$;
2. Если R – локально разрешимый идеал L, то $[R, L] \subseteq J_A(L)$.

Напомним определение радикала Джекобсона ассоциативной алгебры Ли.

Определение 35. *Назовем радикалом Джекобсона $J(R)$ ассоциативной алгебры R пересечение аннуляторов всех правых (или левых) неприводимых R-модулей.*

Известно [16], что радикал Джекобсона можно определять и через правые и через левые R-модули.

Рассмотрим радикал Л.А. Симоняна применительно к паре $L \subseteq U(L)$. Получим следующее соответствие с введенным радикалом.

Лемма 1.2.1. *Пусть L – произвольная алгебра Ли. Тогда*

$$Irr(L) = L \cap J(U(L)),$$

где $U(L)$ – универсальная обертывающая алгебра.

Доказательство. Пусть M – произвольный неприводимый $U(L)$-модуль. Тогда M также является неприводимым L-модулем.

Имеет место включение $Irr(L)$ содержится в аннуляторе $U(L)$ модуля M.

Так как радикал Джекобсона $J(U(L))$ ассоциативной алгебры $U(L)$ совпадает с пересечением аннуляторов всех неприводимых $U(L)$-модулей, получим $Irr(L) \subseteq J(U(L))$.

Пусть $x \in L \cap J(U(L))$ – произвольный, M – произвольный неприводимый L-модуль, $A(L)$ – ассоциированная с представлением L ассоциативная алгебра и $\alpha : L \to A(L)^{(-)}$ – гомоморфизм алгебр Ли, задающий L-модуль M.

Тогда существует его продолжение $\bar{\alpha} : U(L) \to A(L)$, где $\bar{\alpha}$ – гомоморфизм ассоциативных алгебр и $\bar{\alpha}(l) = \alpha(l)$ для всех $l \in L$.

Следовательно, M также является $U(L)$-модулем.

Модуль M неприводим над $U(L)$ тогда и только тогда, когда неприводимым является L-модуль M.

Следовательно, x содержится в аннуляторе модуля M и $x \in Irr(L)$.

Включение $L \cap J(U(L)) \subseteq Irr(l)$ завершает доказательство леммы.

□

Замечание. *Отметим, что доказательство можно проводить по-другому.*

Если M – модуль над алгеброй Ли L, то он является модулем над универсальной обертывающей алгеброй $U(L)$ и наоборот.

В этом случае отдельно надо рассматривать одномерные модули M с нулевым действием алгебры Ли L.

Такой модуль неприводим над $U(L)$ (согласно определению $U(L)$ содержит 1 [1]) и не является неприводимым над L.

Предложение 1.2.0. *Радикал Джекобсона универсальной обертывающей алгебры $U(L)$ произвольной алгебры Ли L над полем равен нулю.*

Доказательство. То,что $J(U(L)) = 0$ для произвольной алгебры Ли L над полем хорошо известный факт (см. например, [41, стр. 126]).

Для удобства чтения дадим другое доказательство этого утверждения.

Универсальную обертывающую алгебру $U(L)$ над полем F можно рассматривать с единицей и без. В учебнике Н.Бурбаки универсальная обертывающая алгебра рассматривается с единицей [1]. Мы также будем рассматривать универсальную обертывающую алгебру с единицей.

Если алгебра Ли L нулевая, то универсальная обертывающая алгебра $U(L) \simeq F$. Радикал Джекобсона поля $J(F)$ равен нулю.

Предположим, что алгебра Ли L ненулевая. Пусть элемент $x \in J(U(L))$ – ненулевой. Тогда существует правый квазиобратный элемент $y \in J(U(L))$. Условие квазиобратимости $x + y - xy = 0$.

Обозначим через $A_n = span(l_1 l_2 ... l_n | l_i \in L)$ множество элементов универсальной обертывающей алгебры $U(L)$ являющихся линейной оболочкой произведений n элементов из L.

Алгебра $A = A_1 \oplus A_1/A_2 \oplus ... \oplus A_{n+1}/A_n \oplus ...$, где множество A_{n+1}/A_n – фактор-векторное пространство, является градуированной и изоморфна алгебре многочленов от коммутирующих переменных над F, в которой в качестве образующих можно взять любой базис алгебры Ли L [1].

Пусть m и n наименьшие натуральные такие, что $x \in A_m, y \in A_n$.

Алгебра многочленов A является областью целостности.

Следовательно, $xy \in A_{m+n} \backslash A_{m+n-1}$. Учитывая, что $m, n < m + n$ получаем $x + y - xy \neq 0$.

Полученное противоречие доказывает равенство нулю радикала Джекобсона универсальной обертывающей алгебры $U(L)$. □

Предложение 1.2.1. *Пусть L – произвольная алгебра Ли над полем. Тогда $Irr(L) = 0$.*

Доказательство. Предложение следует из леммы 1.2.1 и предложения 1.2.0. □

Проиллюстрируем предложение 1.2.1 явным вычислением множества $Irr(L)$ для некоторых алгебр Ли.

Пример 1.2.1 Пусть $L = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in F\}$ – двумерная абелева алгебра Ли над полем F.

Рассмотрим представления $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha, \psi(\alpha x + \beta y) = \beta$. Эти представления одномерные неприводимые. Пересечение их ядер равно нулю.

Получили $Irr(L) = IrrPI(L) = IrrFin(L) = N(L) = 0$.

Нам потребуются следующие определения и теоремы.

Определение 36. *Назовем алгебру первичной, если из того, что произведение идеалов* $UV = 0$ *следует, что* $U = 0$ *или* $V = 0$. *Это определение относится как к ассоциативным алгебрам, так и к алгебрам Ли.*

Определение 37. *Назовем первичным радикалом* $P(D)$ *пересечение всех первичных идеалов алгебры (ассоциативной или алгебры Ли)* D *или саму алгебру* D*, если их нет.*

Определение 38. *Пусть* L *– алгебра Ли. Рассмотрим следующий ряд идеалов алгебры* L*:*

$$L' = [L, L], L'' = [L', L'], ..., L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}], ...$$

Скажем, что L *– разрешимая алгебра Ли, если* $L^{(n)} = 0$ *для некоторого натурального* n.

Определение 39. *Алгебра Ли называется локально разрешимой, если любая ее конечнопорожденная подалгебра – разрешима.*

Известно [10], что первичный радикал специальной алгебры Ли совпадает с наибольшим локально разрешимым радикалом, для конечномерных алгебр Ли – с разрешимым радикалом.

Теорема 1.2.A. (Капланского [16]). *Если* A *– примитивная* PI*-алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени* d*, то* A *– конечномерная простая над своим центром* Z *алгебра, и ее размерность над* Z *не превосходит* $[d/2]^2$*, где* $[d/2]$ *– целая часть числа* $d/2$. *При наложенных в теореме условиях алгебра* A *изоморфна алгебре матриц* Δ_n *над телом* Δ*, а ее центр* Z *изоморфен центру* Δ *и, следовательно, является полем.*

Теорема 1.2.B. (Ли [36, стр. 62]) *Если* L *– разрешимая алгебра Ли линейных преобразований конечномерного векторного пространства* M *над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, то матрицы из* L *могут быть приведены одновременно к треугольному виду.*

Теорема 1.2.C. (О нильпотентном радикале [1, стр. 59]) *Для произвольной конечномерной алгебры Ли* L *над полем характеристики нуль справедливо равенство* $N(L) = P(L) \cap L'$*, где* $L' = [L, L]$.

Известно также [1, стр. 73], что $N(L) = [P(L), L]$.

Теорема 1.2.D. (О радикале Джекобсона алгебры матриц [16]) $J(R_n) = J(R)_n$*, где* R *– произвольная ассоциативная алгебра над полем* F.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1.2.2. *Пусть* L *– конечномерная разрешимая алгебра Ли над полем* F *характеристики нуль. Тогда неприводимое* PI*-представление алгебры Ли* L *может быть только коммутативным.*

Доказательство. Пусть M – неприводимый модуль, задающий PI-представление алгебры L.

Тогда алгебра $A(L)$ порождена как ассоциативная алгебра гомоморфным образом $\bar{L}$ алгебры Ли L.

Алгебра $A(L)$ является примитивной PI-алгеброй. Согласно теореме Капланского [16] (теорема 1.2.A), она простая, конечномерная над своим центром Z, изоморфна алгебре матриц Δ_n над телом Δ, размерности не выше $[d/2]^2$ над Z.

Рассмотрим максимальное подполе E тела Δ. Согласно [16, стр. 151] справедлив изоморфизм

$$K \otimes_Z A(L) \simeq K_{mn}.$$

Тогда алгебра $K \otimes_Z A(L)$ имеет точное неприводимое представление в модуле V размерности mn над K.

Пусть $\bar{K}$ алгебраическое замыкание K.

Конечномерная алгебра $\bar{K} \otimes_Z A(L)$ над $\bar{K}$ имеет конечномерное представление в модуле $\bar{K} \otimes_Z V$.

Согласно теореме Ли, разрешимая алгебра $\bar{K} \otimes_Z \bar{L}$ представима треугольными матрицами в некотором базисе модуля $\bar{K} \otimes_Z V$, а, следовательно, и порожденная ей алгебра $\bar{K} \otimes_Z A(L)$.

Тогда простая алгебра $A(L)$ является коммутативной. Это означает, что $A(L)$ изоморфна некоторому полю, являющемуся расширением основного поля F.

Лемма доказана. $\square$

Пример 1.2.2. Дадим новую интерпретацию следующего известного примера.

Пусть F – поле характеристики нуль, $F[x]$ – кольцо многочленов.

Зададим для произвольного $f(x) \in F[x]$ три отображения:

$$a(f(x)) = f'(x),\ b(f(x)) = x \cdot f(x),\ e(f(x)) = f(x).$$

Легко проверить, что тождественное отображение e коммутирует с a и b, $[a, b] = e$.

Мы получили представление трехмерной разрешимой алгебры Ли

$$L = \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \in F\}$$

в алгебре эндоморфизмов $\mathrm{End}\,(F[x])$.

Легко проверить, что векторное пространство $F[x]$ является неприводимым L-модулем. Следовательно, $Irr(L) = 0$.

Согласно теореме 1.2.C, $N(L) = L' = \{\alpha e \mid \alpha \in F\}$.

Согласно лемме 1.2.2, неприводимое PI-представление алгебры Ли L может быть только коммутативным.

Это означает, что L' лежит в аннуляторе любого неприводимого PI-представления.

Следовательно, справедливо включение $L' \subseteq IrrPI(L)$.

Как уже было рассмотрено в примере 1.2.1, для двумерной абелевой алгебры Ли $IrrPI(L/Z(L)) = 0$. Следовательно,

$$IrrPI(L) = Z(L) = N(L).$$

Алгебра Ли L является разрешимой ступени 2. Получим, $P(L) = L$ (первичный радикал совпадает с разрешимым для конечномерных алгебр [10]).

Определение 40. *Конечномерная алгебра Ли называется полупростой, если ее разрешимый радикал равен нулю.*

Определение 41. *Алгебра Ли называется редуктивной, если она является произведением полупростой и коммутативной подалгебр.*

Докажем еще одну лемму.

Лемма 1.2.3. *Пусть Δ – тело характеристики нуль, удовлетворяющее полиномиальному тождеству. Рассмотрим алгебру матриц $L = \Delta_n^{(-)}$ как алгебру Ли по отношению к операции коммутирования над простым подполем $\mathbb{Q}$. Расмотрим лиевский разрешимый идеал I алгебры L. Тогда множество I лежит в центре алгебры матриц Δ_n.*

Доказательство. Обозначим через Z центр тела Δ. Согласно теореме Капланского, тело Δ является конечномерным над центром Z.

Рассмотрим представление Δ_n над Δ^n (пространство векторов-столбцов) с помощью левых умножений.

Хорошо известно, что такое представление матричной алгебры над телом – неприводимо.

Алгебра L имеет точное конечномерное над Z представление. Следовательно, $N(L) = 0$.

Согласно [1, предложение 5 e), стр. 71], алгебра Ли L – редуктивна как алгебра над Z.

Редуктивная алгебра L является произведением полупростой алгебры S и центра Z.

Полупростая конечномерная алгебра Ли S над полем характеристики нуль раскладывается в произведение простых подалгебр $\sigma_i, i = 1, ..., k$.

Подалгебры σ_i являются идеалами алгебры Ли L. Любой идеал алгебры L является суммой нескольких идеалов σ_i и, возможно, $\mathbb{Q}$-подпространства центра Z.

Множество ZI является разрешимым лиевским идеалом алгебры Ли L над Z. Оно не может содержать простых подалгебр σ_i.

Следовательно, $ZI \subset Z$ и $I \subset Z$. □

Теорема 1.2.1. *Пусть L – конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Тогда $IrrPI(L) = N(L)$, где $N(L)$ – нильпотентный радикал алгебры Ли L.*

Доказательство. Так как для конечномерной алгебр Ли L справедливо $IrrFin(L) = N(L)$ [1], получаем включение $IrrPI(L) \subseteq N(L)$.

Пусть M неприводимый модуль над конечномерной алгеброй Ли L задающий PI-представление алгебры Ли L.

Тогда алгебра $A(L)$ является примитивной PI-алгеброй.

Применяя теорему Капланского и лемму 1.2.3, получим: образ $\overline{P(L)}$ разрешимого идеала лежит в центре Z алгебры $A(L)$.

Следовательно, образ $N(L) = [L, P(L)]$ равен нулю.

Тогда справедливо включение $N(L) \subseteq IrrPI(L)$.

Из полученных включений следует равенство $IrrPI(L) = N(L)$.

Теорема доказана. □

Теорема 1.2.2. *Пусть основное поле имеет нулевую характеристику. Тогда следующее включение в общем случае строгое:*

$$IrrPI(L) \subset IrrFin(L).$$

Доказательство. Согласно теореме Амицура-Левицкого [16], алгебра матриц порядка n удовлетворяет стандартному тождеству

$$st_{2n}(x_1, ..., x_{2n}) = 0.$$

Пусть M – конечномерное представление алгебры Ли L над полем F. Тогда ассоциированная алгебра представления $A(M)$ вложена в алгебры $End(M)$, которая является PI-алгеброй так как изоморфна алгебре матриц.

Следовательно, конечномерное представление алгебры Ли является ее PI-представлением.

Докажем строгость включения.

Пусть $F \subseteq K$ – расширение поля F характеристики нуль, которое не является конечномерным. Таким, например, будет поле рациональных функций с коэффициентами из F.

Алгебра $sl_2(K)$ является простой алгеброй Ли над K. Несложно проверить, что $sl_2(K)$ является простым кольцом Ли и, следовательно, простой алгеброй Ли над F.

Алгебра $sl_2(K)$ имеет точное PI-представление над двумерным арифметическим векторным пространством K^2.

Следовательно, $IrrPI(sl_2K) = 0$.

В силу бесконечномерности над полем F и простоты алгебра $sl_2(K)$ не может иметь конечномерных неприводимых представлений над F.

Следовательно, $IrrFin(sl_2K) = sl_2K$.

Теорема доказана. □

Из примера 1.2.2 следует, что $IrrPI(L)$ может быть ненулевым.

Нам потребуется еще одна лемма.

Лемма 1.2.4. *Радикал Джекобсона $J(L)$ абелевой алгебры Ли над полем совпадает с $IrrFin(L)$ и равен нулю.*

Доказательство. В абелевой алгебре Ли любое подпространство коразмерности 1 является идеалом. Их пересечение равно нулю, а фактор-алгебра по такому идеалу – одномерна, имеет точное одномерное представление.

Следовательно, пересечения ядер конечномерных представлений алгебры Ли L равно нулю. □

Теорема 1.2.3. *Пусть L – специальная алгебра Ли. Тогда имеет место включение $IrrPI(L) \subset J(L)$, которое в общем случае строгое.)*

Доказательство. Пусть I – максимальный идеал алгебры Ли L.

Возможны два случая.

1. Алгебра $H = L/I$ – абелева.

Тогда, согласно лемме 2.1.2, $IrrFin(L) = 0$.

Следовательно, идеал I равен пересечению ядер точных конечномерных представлений.

2. Алгебра $H = L/I$ – простая.

Рассмотрим отображение $ad : H \to End(H)^{(-)}$.

Из простоты H следует, что $\mathrm{Ker}(H) = 0$ и представление является неприводимым.

Так как L – специальная алгебра, и следовательно, обобщенно специальная, алгебра $\mathrm{Ad}\, H$ является PI-алгеброй [34].

Следовательно, представление L в $End(H)^{(-)}$ является PI-представлением.

Мы доказали, что радикал Джекобсона специальной алгебры Ли L является пересечением ядер некоторых неприводимых PI-представлений алгебры L.

Следует включение $IrrPI(L) \subset J(L)$.

Строгость включения показывает пример 1 из [11]. В этом примере построена специальная алгебра Ли с нулевым локально нильпотентным радикалом и ненулевым радикалом Джекобсона. □

Из теоремы 1.2.1 и результата Маршалла следует, что $IrrPI(L) = J(L)$ для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль.

2.2. Локально нильпотентный радикал для алгебр Ли

2.2.1. Локально нильпотентный радикал специальных алгебр Ли

Нильпотентный радикал алгебры Ли играет важную роль в теории полупростых конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль.

Нам потребуется следующее определение.

Определение 42. *Если модуль M – конечномерный, то наибольший идеал U, алгебры L такой, что эндоморфизм x_M, соответствующий элементу x, является нильпотентным для всех $x \in L$, в алгебре $\mathrm{End}M$, – называется наибольшим идеалом нильпотентности представления.*

Для конечномерной алгебры Ли L нильпотентный радикал $N(L)$ характеризуется эквивалентным образом не только как пересечение ядер конечномерных представлений, но и как пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений алгебры L [1].

Для бесконечномерных алгебр Ли нильпотентный в смысле приведенного определения радикал может не быть нильпотентным.

Пример 2.1.1. Рассмотрим какую-нибудь бесконечномерную локально нильпотентную алгебру Ли L не являющуюся нильпотентной.

Пусть L – это алгебра Ли бесконечных верхнетреугольных матриц по отношению к операции коммутирования над полем F характеристики нуль, содержащих лишь конечное число элементов отличных от нуля.

Обозначим через N подалгебру матриц алгебры Ли L с нулевыми элементами на диагонали.

Покажем, что $N = [L, N]$. Пусть матрица $A \in N$ содержит ненулевые слагаемые $a_{ij_1}e_{ij_1}, a_{ij_2}e_{ij_2}, ..., a_{ij_k}e_{ij_k}, i \neq j_1, ...i \neq j_k$, где $e_{i,j}$ – матричная единица.

Элементы $e_{ii}, e_{j_1j_1}$ принадлежат L. Тогда

$$[e_{ii}, A] = \sum_{s=1}^{k} a_{ij_s}e_{ij_s} \Rightarrow \sum_{s=1}^{k} a_{ij_s}e_{ij_s} \in N,$$

$$[[e_{ii}, A], e_{j_1j_1}] = a_{ij_1}e_{ij_1} \Rightarrow a_{ij_1}e_{ij_1} \in N. \tag{1}$$

Из включения 1 следует $N \subset [L, N]$. Обратное включение $[L, N] \subset N$ следует из того, что N идеал.

Так как любое конечное множество матриц алгебры Ли L может быть вложено в алгебру Ли матриц конечного порядка (предполагается, что при вложении можно отбросить бесконечное множество нулевых элементов), можно утверждать, что алгебра Ли L является разрешимой, а N – локально нильпотентной.

Рассмотрим конечномерное представление M алгебры Ли L.

Пусть $\bar{L}, \bar{N}$ гомоморфные образы алгебр Ли L и N в алгебре Ли $\mathrm{End}(M)^{(-)}$.

Алгебра Ли $\bar{L}$ является конечномерной. Согласно теореме 1.2.C, нильпотентный радикал алгебры Ли $\bar{L}$ равен $N(\bar{L}) = \bar{N}$.

Согласно определению нильпотентного радикала, эндоморфизм x_M, соответствующий элементу x, является нильпотентным для всех $x \in \bar{L}$, в алгебре $\mathrm{End}M$.

Следовательно, алгебра Ли N содержится в наибольшем идеале нильпотентности представления M.

Учитывая произвольность конечномерного представления M, мы получили включение $N \subset N(L)$.

Покажем, что пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений совпадает с N.

Пусть для матрицы $A \in L$ слагаемое $a_{ii}e_{ii}$ отлично от нуля.

Алгебра Ли L представлена эндоморфизмами бесконечномерного векторного пространства V. Запись ее элементов в виде матриц получается после выбора базиса $t_1, t_2, ...$

После перенумерации элементов базиса можно считать, что слагаемое $a_{11}e_{11}$ матрицы A отлично от нуля.

Рассмотрим подпространство W, являющееся линейной оболочкой базисных элементов $t_2, t_3, ...$. Пусть $\bar{V} = V/W$ фактор-пространство.

Будем считать, что матрицы действуют справа на векторы V.

Покажем, что подпространство W инвариантно относительно алгебры Ли L.

Алгебра Ли L является линейной оболочкой матричных единиц $e_{ij}, i \leqslant j$.

Получим $t_k e_{ij} = \delta_{ki} t_j$, где δ_{ki} – символ Кронекера, $k \leqslant j$.

Можно считать, что L действует на фактор-пространстве $\bar{V}$.

Тогда $\bar{t}_1 A = a_{11}\bar{t}_1$. Следовательно, $\bar{t}_1 A^n = a_{11}^n \bar{t}_1 \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Мы показали, что матрица A не лежит в наибольшем идеале нильпотентности представления алгебры Ли L в пространстве $\bar{V}$.

Так как A – это произвольная матрица L с ненулевыми элементами на диагонали, мы доказали включение $N(L) \subset N$.

Следовательно, $N(L) = N$. Алгебра N не является нильпотентной.

Приведенный пример показывает, что для бесконечномерных алгебр Ли естественно ввести понятие локально нильпотентного радикала.

Такой радикал будет удовлетворять свойствам аналогичным свойствам нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли для специальных алгебр Ли.

Если алгебра Ли имеет точное PI-представление, то она является специальной. Для PI-представлений алгебр Ли можно ввести аналог наибольшего идеала нильпотентности.

Теорема 2.1.А. ([11]) *Пусть алгебра Ли L имеет PI-представление в кольце эндоморфизмов векторного пространства M. Тогда*

i) *Все идеалы J алгебры L такие, что x_M нильпотентно для любого $x \in L$, содержатся в одном из них, например U.*

ii) *Образ $\bar{U}$ идеала U является локально нильпотентным в алгебре $EndM$.*

iii) *Идеал U является множеством элементов $x \in L$ таких, что x_M принадлежит первичному радикалу P ассоциативной алгебры $A(L)$, ассоциированной с представлением алгебры L.*

Определение 43. *По аналогии с конечномерными алгебрами, назовем идеал U наибольшим идеалом локальной нильпотентности PI-представления.*

Определение 44. *Назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F.*

В работе [11] показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным идеалом.

Приведем еще одно важное определение.

Определение 45. *Скажем, что алгебра Ли L полупростая, если ее первичный радикал $P(L)$ равен нулю.*

Теорема 2.1.В. ([11]) *Пусть L – специальная алгебра Ли над полем F характеристики нуль, $N(L)$ – ее локально нильпотентный радикал. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $N(L) = 0$;

2) L – *редуктивна*;

3) L^2 – *полупростая алгебра.*

2.2.2. Соотношения между локально нильпотентным радикалом алгебры Ли и неприводимо представленными радикалами

Цель данного раздела исследовать соотношения между локально нильпотентным радикалом специальной алгебры Ли и радикалами $IrrPI(L)$ и $IrrFin(L)$.

Следующее включение непосредственно следуют из определения

$$IrrPI(L) \subset IrrFin(L) \tag{2}$$

В разделе 2.1.2 показана строгость этого включения в общем случае.

Нам потребуется определение примитивной ассоциативной алгебры.

Определение 46. *Скажем, что ассоциативная алгебра – примитивная, если она имеет точное неприводимое представление.*

Теорема 2.2.1 *Для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль справедливо включение*

$$N(L) \subset IrrPI(L), \tag{3}$$

которое в общем случае является строгим.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.2.1 *Пусть алгебра Ли L над полем F характеристики нуль имеет неприводимое PI-представление в алгебре эндоморфизмов $End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над F. Пусть I – некоторый локально разрешимый идеал L. Тогда образ $\bar{I}$ идеала I в алгебре* $\mathrm{End}(M)^{(-)}$ *лежит в центре алгебры $\bar{L}$.*

Доказательство. Пусть M-неприводимый $A(L)$-модуль, алгебра $A(L)$ порождена как ассоциативная алгебра гомоморфным образом $\bar{L}$ алгебры Ли L.

Алгебра $A(L)$ является примитивной PI-алгеброй.

Согласно теореме Капланского [16], она простая, конечномерная над своим центром Z изоморфна алгебре матриц над телом $A(L) \simeq \Delta_m$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\bar{I}$ – гомоморфный образ идеала I в алгебре $A(L)$. В конечномерной над центром алгебре локально разрешимый идеал является разрешимым.

Согласно лемме 2.1.2, идеал $\bar{I}$ лежит в центре Z алгебры $A(L)$.

Напомним, что алгебра $A(L)$ порождена элементами L.

Следовательно, идеал $\bar{I}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$. $\Box$

Доказательство. (Теоремы 2.2.1). Локально нильпотентный радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным [11]. Заметим, что локально нильпотентный идеал является локально разрешимым.

Пусть специальная алгебра Ли L имеет неприводимое PI-представление в алгебре эндоморфизмов $\varphi : L \to End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над полем F.

Тогда, согласно лемме 2.2.2, $\varphi(N(L)) \subset Z(\varphi(L))$.

Алгебра Ли $\varphi(L)$ порождает ассоциативную алгебру $A(L)$. Ее центр $Z(\varphi(L))$ лежит в центроиде неприводимого L-модуля M.

Согласно лемме Шура [16], центроид неприводимого модуля является телом. Вложение в тело можно было также вывести из теоремы Капланского.

Ненулевые элементы $Z(\varphi(L))$ в любой степени отличны от нуля.

Следовательно, ненулевые элементы $\varphi(N(L))$ не лежат в наибольшем идеале локальной нильпотентности модуля M. Получили $\varphi(N(L)) = 0$.

Из произвольности неприводимого PI-представления M следует включение $N(L) \subseteq IrrPI(L)$. $\Box$

Для построения примера, доказывающего строгость включения (3), напомним понятия алгебраического и трансцендентного расширения полей и теорему Гильберта о конечности базисов.

Определение 47. *Пусть K – расширение поля F.*

Элемент $\alpha \in F$ называется алгебраическим над F если он является корнем многочлена $f(x)$ положительной степени $f(x) \in F[x]$.

Расширение K поля F называется алгебраическим над F, если все его элементы алгебраические над F.

Подмножество $S \subset K$ называется алгебраически независимым над F если из соотношения

$$0 = \sum a(\nu) \prod_{x \in S} x^{\nu(x)}$$

с коэффициентами $a(\nu) \in F$, почти все из которых равны нулю, следует, что все $a(\nu) = 0$ [42, стр. 288].

Подмножество S в F, алгебраически независимое над F и максимальное относительно упорядоченности по включение, будет называться базисом трансцендентности поля K над полем F [42, стр. 288].

Известно, что любые два базиса трансцендентности расширения полей имеют одинаковую мощность, не превосходящую мощности множества образующих [42, теорема 1 на стр. 287]

Мощность множества базиса трансцендентности называется степенью трансцендентности расширения полей [42, стр. 289].

Теорема 2.2.A. ([42, стр. 169]) *Пусть A – нётерово коммутативное кольцо. Тогда кольцо многочленов $A[x_1, ..., x_n]$ также нётерово.*

Пример 2.2.1. Пример специальной алгебры Ли L над полем F, $char\ F \neq 2$,такой, что $IrrPI(L) \neq 0$, локально нильпотентный радикал которой равен нулю.

В частности, $IrrPI(L)$ радикальная специальная алгебра Ли.

Для алгебры Ли L справедливо строгое включение

$$N(L) \subset IrrPI(L) \tag{4}$$

Обозначим через B коммутативную алгебру над полем F формальных степенных рядов со свободным членом от одной коммутирующей переменной. Идеал рядов без свободного члена R это – известный пример коммутативной радикальной алгебры Ли [32].

Рассмотрим алгебру матриц второго порядка B_2 с элементами из B Известно, что ее радикал Джекобсона $J(B_2)$ равен R_2 [16], [32].

В частности, при гомоморфном отображении ψ алгебры B_2 в алгебру эндоморфизмов неприводимого B_2-модуля M справедливо $\psi(R_2) = 0$.

Рассмотрим алгебру Ли $L = B \otimes_F sl_2(F)$, где $sl_2(F)$ – алгебра Ли матриц второго порядка над F со следом нуль. Обозначим через H идеал $H = R \otimes_F sl_2(F)$.

Алгебра L вложена в PI-алгебру B_2 и, следовательно, является специальной.

Пусть $\varphi : L \to End(M)^{(-)}$ – неприводимое PI-представление алгебры L.

Предположим, $\varphi(H) \neq 0$.

Ассоциированная с представлением алгебра $A(L)$ является PI-алгеброй. Согласно теореме Капланского [16] (теорема 1.2.A), она простая, конечномерная над своим центром Z, изоморфна алгебре матриц Δ_n над телом Δ.

Можно считать, что алгебра L вложена в алгебру матриц $\Delta_n^{(-)}$.

Алгебра $sl_2(F)$ является простой (напомним, что характеристика поля F отлична от двух). Пусть элемент $l \in sl_2(F)$ – произвольный. Тогда существуют элементы

$$l'_1, ..., l'_k, l''_1, ..., l''_k \in sl_2(F)$$

такие, что

$$l = \sum_{i=1}^{n} [l'_i, l''_i].$$

Рассмотрим произвольный элемент b из B. Справедливо равенство

$$bl = \sum_{i=1}^{n} [bl'_i, l''_i].$$

Учитывая, что алгебра матриц Δ_n порождена как ассоциативная алгебра над F алгебра элементами алгебры Ли L, можно считать, что алгебра $\varphi(B)$ лежит в центре Z алгебры матриц Δ_n, который является полем. Так как матрицы из центра являются диагональными, с помощью отождествления матрицы

$$\begin{pmatrix} z & 0 & ... & 0 \\ 0 & z & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & z \end{pmatrix}$$

и элемента $z \in Z$ можно считать, что Z содержится в теле Δ.

Пусть в представлении элементов $e_{11}-e_{22}, e_{12}, e_{21}$ в виде матриц из Δ_n участвуют элементы $a_1, ..., a_s$ тела Δ.

Пусть K – максимальное подполе в Δ. Согласно теореме 4.2.1 [16, стр. 94] и конечномерности Δ над Z получим $K \otimes_Z \Delta \simeq K_m$ для некоторого натурального m.

Можно считать, что элементы $a_1, ..., a_s$ представимы матрицами порядка m от элементов $k_1, ..., k_l$ из K.

Пусть $Q_{\varphi(B)}$ – классическое кольцо частных алгебры $\varphi(B)$.

Обозначим через A расширение $A = Q_{\varphi(B)}(k_1, ..., k_l)$ поля F.

Отметим, что расширение K поля F может быть трансцендентным (K является алгебраическим расширение поля Z, а Z содержит $\varphi(B)$ и является трансцендентным расширением поля F).

Пусть E – множество алгебраических элементов поля A над F. Степень трансцендентности расширения A над E не превосходит l [42, теорема 1 на стр. 287].

Можно считать, что для каждого элемента r из A найдутся подполя $E_r, K_r \in A$ такие, что E_r конечное расширения поля F, K_r трансцендентное расширение E_r, степени трансцендентности не выше l и $r \in K_r$ или расширение $F(r)$ алгебраическое над F.

Пусть b произвольный элемент алгебры $Q_{\varphi(B)}$. Он лежит в центре алгебры $A(L)$.

Можно считать, что он выражен над F через образующие алгебры $B \otimes_F sl_2(F)$.

Тогда b лежит в конечно порожденном подполе поля $Q_{\varphi(B)}$ (напомним, что он выражается через конечное множество элементов $k_1, ..., k_l$ из K).

В знаменателях дробей из $\varphi(B)$ могут стоять только образы элементов из R (формальные степенные ряды с ненулевым свободным членом обратимы в B).

Пусть $T = \{t_1, ..., t_p\}$ конечное множество элементов R таких, что их образы $\varphi(t_1), ..., \varphi(t_p)$ стоят в знаменателях дробей участвующих в представлении b.

Кольцо R является радикальным. Следовательно, R не имеет максимальных идеалов.

Если бы R порождалось множеством T, то согласно теореме Гильберта о конечности базисов (теорема 2.2.A) оно было бы гомоморфным образом нётерова кольца многочленов от конечного числа образующих и само являлось бы нётеровым. Нётерово кольцо содержит максимальный идеал. Противоречие.

Полученное противоречие доказывает, что $F[T] \neq R$.

Обозначим через $I = ker\ \varphi$ ядро вложения R в Z. Мы предположили, что $\varphi(R) \neq 0$.

Следовательно, $I \neq R$. Фактор-алгебра R/I не является конечно порожденной из тех же соображений, что и выше.

Тогда существует элемент $t \in R \backslash (F(T) \cup I)$ такой что, $\varphi(t) \neq 0$.

Элемент $\frac{1}{t}$ не представим через дроби из Q_B со знаменателями из T. Противоречие.

Полученное противоречие доказывает, что $\varphi(H) = 0$.

Следовательно, $H \subset IrrPI(L)$.

Представление, полученное с помощью естественного гомоорфизма $\tau : B \to B/R$ задает неприводимое PI-представление алгебры Ли L в арифметическом векторном пространстве $\bar{\tau} : L \to F^2$. Алгебра H лежит в ядре $ker\ \tau$.

Получили включение $IrrPI(L) \subset H$.

Мы доказали равенство $IrrPI(L) = H$.

Пусть K кольцо частных алгебры B. Тогда $L \subseteq K_2^{(-)}$, которая имеет точное представление в K^2. Легко проверить, что наибольший идеал нильпотентности такого представления алгебры L равен нулю.

Следовательно, $N(L) = 0$.

Строгое включение $0 \subset H$ завершает обоснование примера.

Определение 48. *Также как и для специальных алгебр Ли, назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F и саму алгебру Ли, если их нет.*

Приведем еще один пример. Он основан на примере Ф.Кубо [4], но используется для других целей.

Пример 2.2.2. Пусть L – множество линейных отображений конечного ранга бесконечномерного векторного пространства V над полем F в себя.

Обозначим через S множество отображений из L со следом нуль. Рассмотрим L и S как алгебры Ли по отношению к операции коммутирования.

Легко проверить, что $L^2 = S$, S простая алгебра Ли.

Заметим, что диагональные матрицы из L не образуют идеал L.

Пусть матрица $A \in L$ – диагональная, с конечным числом ненулевых элементов на диагонали. Обозначим через $a_{ii}e_{ii}$ ненулевое слагаемое A с наибольшим номером i. Тогда коммутатор

$$[a_{ii}e_{ii}, e_{i,i+1}] = a_{ii}e_{i,i+1}$$

не является диагональной матрицей.

Идеал S алгебры Ли L является простым. Все нетривиальные идеалы L – это векторные простанства, содержащие S.

Алгебра Ли S не является специальной и, следовательно, содержится в аннуляторах неприводимых PI-представлений L.

Алгебра $H = L/S$ является абелевой. Следовательно, согласно лемме 2.1.2, $J(H) = 0$ и $IrrPI(H) = 0$.

Установили равенства $J(L) = S, IrrPI(L) = S$.

Фактор-алгебра $H = L/S$ – абелева и, следовательно, специальная. Согласно теореме 2.1.В локально нильпотентный радикал $N(H)$ алгебры H равен нулю. Получили $N(L) = S$.

Алгебра S не является ни локально разрешимой, ни локально нильпотентной.

Следовательно, радикал Джекобсона $J(L)$, $IrrPI(L)$ и локально нильпотентный радикал $N(L)$ произвольной алгебры Ли L могут не быть ни локально разрешимыми, ни локально нильпотентными.

Алгебра S простая, не является специальной алгеброй Ли.

Радикал Джекобсона простой алгебры Ли равен нулю $J(S) = 0$. Алгебра S не имеет неприводимых PI-представлений.

Получили $IrrPI(S) = S$.

Пример 2.2.2 показывает, что для произвольной алгебры Ли локально нильпотентный радикал может не быть локально нильпотентным.

Из примера 2.2.2 следует, что для произвольной алгебры Ли возможно строгое включение

$$J(L) \subset IrrPI(L). \qquad (5)$$

Согласно теореме 1.2.3, для специальных алгебр Ли имеет место включение

$$IrrPI(L) \subset J(L), \tag{6}$$

которое в общем случае является строгим.

Из включений (5) и (6) делаем вывод, что нельзя дать удовлетворительного гомологического описания радикала Джекобсона даже для специальных алгебр Ли.

Предлагаем вместо радикала Джекобсона для специальных алгебр Ли использовать локально нильпотентный радикал, который совпадает с радикалом Джекобсона для конечномерных алгебр Ли над полем нулевой характеристики.

2.3. Примитивные алгебры Ли

2.3.1. Основные определения и формулировки

Понятие радикала Джекобсона для ассоциативных алгебр тесно связано с понятием примитивной алгебры.

Радикал Джекобсона примитивной ассоциативной алгебры равен нулю.

Полупростая ассоциативная алгебра раскладывается в подпрямую сумму примитивных [32], [16].

В этой главе мы исследуем примитивные алгебры Ли.

Определение 49. *Скажем, что алгебра Ли – примитивная, если она имеет точное неприводимое представление.*

Для представления алгебр Ли L с нулевым радикалом $IrrPI(L)$ будут полезны следующие алгебры.

Определение 50. *Скажем, что алгебра Ли – PI-примитивная, если она имеет точное неприводимое PI-представление.*

Нам потребуется определение подпрямой суммы алгебр Ли.

Определение 51. *Алгебра Ли L называется подпрямой суммой алгебр Ли $L_\alpha, \alpha \in I$, если существуют гомоморфизмы $f_\alpha : L \to L_\alpha, \alpha \in I$ такие, что:*
а) все гомоморфизмы f_α – сюрьективны;
б) $\bigcap_{\alpha \in I} \operatorname{Ker} f_\alpha = 0$.

Сначала сформулирем одно очевидное утверждение.

Предложение. *Если PI-неприводимо представленный $IrrPI(L)$ радикал алгебры Ли L равен нулю, то алгебра L представима в виде подпрямой суммы PI-примитивных алгебр Ли.*

Доказательство. В монографии Джекобсона [32] приведено необходимое и достаточное условие разложимости ассоциативного кольца U в подпрямую сумму колец U_i: " ... утверждение о том, что кольцо U является подпрямой суммой колец $U_i, i \in I$ эквивалентно тому, что в кольце существует такое множество идеалов с нулевым пересечением J_i, фактор-кольца по которым изоморфны $U_i \simeq U/J_i, i \in I$ ".

Приведенное условие разложимости в прямую сумму справедливо также для ассоциативных алгебр и алгебр Ли.

Для завершения доказательства предложения осталось заметить, что в алгебре Ли L пересечение аннуляторов неприводимых PI-представлений равно нулю и гомоморфный образ алгебры L в алгебре эндоморфизмов представления является PI-примитивной алгеброй Ли.

□

Определение 52. *Идеал алгебры Ли назовем примитивным, если фактор-алгебра по нему примитивна.*

Пример 1.2.2 показывает, что даже нильпотентная конечномерная алгебра Ли степени 2 может быть примитивной.

Нильпотентная алгебра Ли является разрешимой, а разрешимая конечномерная алгебра Ли совпадает со своим разрешимым радикалом, что то же самое – первичным радикалом.

Парадоксальность примера состоит в том, что радикальная алгебра Ли является примитивной.

Напомним, что в ассоциативном случае радикал Джекобсона, а, следовательно, и первичный, примитивной алгебры равны нулю [16]. Более того, примитивная алгебра является первичной.

Оказалось, что примитивных алгебр Ли достаточно много.

Определение 53. *Скажем, что алгебра Ли является артиновой, если любая убывающая цепочка ее идеалов – стабилизируется.*

Для ассоциативных алгебр артиновость определяется через правые (правая артиновость) и левые (левая артиновость) идеалы. Известны примеры право, не не левоартиновых алгебр. Для двусторонних идеалов вводят понятие слабой артиновости, которое слабее артиновости.

В алгебрах Ли все идеалы двусторонние и нет понятия правой и левой артиновости. Поэтому некоторые математики предлагают определять артиновость через подалгебры. Определение артиновости через подалгебры более сильное.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1.1. *Пусть L – артинова алгебра Ли над полем, имеющая единственный минимальный идеал. Тогда алгебра Ли L – примитивна.*

Теорема 3.1.2. *Пусть L_1 и L_2 – примитивные алгебры Ли, имеющие точные неприводимые представления*

$$\varphi_i : L_i \to M_i$$

такие, что центродиды Δ_i модулей M_i совпадают с основным полем и $\varphi_i(L_i) \cap \Delta_i = 0$, где $i = 1, 2$. Тогда их прямая сумма $L_1 \oplus L_2$ также примитивна.

В 70-ых годах прошлого века была известна проблема: является ли универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ полупростой конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль примитивной?

Наибольших успехов в решении этой проблемы добился Ж. Диксмье [41]. Он исследовал не только примитивность универсальной обертывающей алгебры Ли, но и примитивность отдельных ее идеалов.

Очевидна следующая импликация: если $U(L)$ – примитивна, то алгебра Ли L также является примитивной. Обратное в общем случае неверно (смотри пример 3.2.1).

Относительно примитивности полупростых алгебр Ли справедливы следующие утверждения.

Следствие 1. *Полупростые конечномерные алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль – PI- примитивны.*

Определение 54. *Скажем, что простая алгебра Ли L – центральная простая, если центроид представления* $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Ad}\, L$ *совпадает с основным полем.*

Центральными простыми алгебрами над полем характеристики нуль являются, например, простые конечномерные алгебры Ли больших классов A, B, C, D [36].

Применяя теорему 2.3.1, получим утверждение.

Следствие 2. *Если полупростая конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль раскладывается в прямую сумму центральных простых алгебр, то она является примитивной.*

В [24] была доказана примитивность свободной ассоциативной алгебры с конечным или счетным множеством образующих.

Свободная ассоциативная алгебра является универсальной обертывающей свободной алгебры Ли. Следовательно, свободная алгебра Ли является примитивной.

Все коммутативные алгебры Ли над полями $\mathbb{Z}_p$, где p – простое, и $\mathbb{Q}$ также являются PI-примитивными. Бесконечномерные коммутативные алгебры Ли являются PI-примитивными над любыми полями (см. пример 3.2.2).

Показано, что конечномерная абелева алгебра, размерности больше 1, над алгебраически замкнутым полем не является примитивной (см. пример 3.2.3).

Легко указать целый класс неабелевых алгебр не являющихся PI-примитивными.

Согласно теореме 1.2.1, для любой конечномерной алгебры Ли L – над полем F характеристики нуль справедливо равенство $IrrPI(L) = N(L)$, где $N(L)$ – нильпотентный радикал алгебры Ли L.

Для конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль нильпотентный радикал равен $N(L) = [P(L), L]$ (теорема 1.2.C).

Неабелева разрешимая алгебра Ли L совпадает со своим первичным радикалом: $P(L) = L$.

Получим: нильпотентный радикал $N(L) = [L, L]$ неабелевой разрешимой алгебра Ли L над полем характеристики нуль отличен от нуля.

Мы доказали следствие.

Следствие 3. *Конечномерная неабелева разрешимая алгебра Ли L над полем характеристики нуль не является PI-примитивной.*

Приведен пример неартиновой некоммутативной алгебры Ли являющейся примитивной (см. пример 3.2.5).

В заключение сформулируем следующие вопросы, ответ на которые неизвестен авторам.

1) Существует ли неабелева алгебра Ли, которая не является примитивной?

2) Всегда ли полупростая алгебра Ли является примитивной?

3) Указать необходимое и достаточное условие PI-примитивности: а) конечномерных; б) специальных; в) произвольных алгебр Ли.

2.3.2. Примитивность некоторых алгебр Ли

Лемма 3.2.1. *Пересечение примитивных идеалов произвольной алгебры Ли равно нулю.*
Доказательство. Обозначим через X пересечение аннуляторов неприводимых представление алгебры Ли L или саму алгебру L если их нет.

Легко проверить, что модуль M – неприводим над алгеброй Ли L тогда и только тогда, когда M является $U(L)$ неприводимым модулем, где $U(L)$ – универсальная обертывающая алгебры Ли L.

Это означает, что $X = L \cap J(U(L))$.

Из предложений 1.2.0 следует, что $J(U(L)) = 0$ для произвольной алгебры Ли L.

Тогда множество X равное пресечению примитивных идеалов алгебры Ли L, равно 0, что завершает доказательство леммы. $\square$

Пример 3.2.1. Пусть $L = \mathbb{C}$ двумерная абелева алгебра Ли над $\mathbb{R}$.

Представление L умножениями на $\mathbb{C}$ задает точное неприводимое представление. Следовательно, алгебра Ли L – PI-примитивна.

Ее универсальная обертывающая, изоморфная алгебре многочленов над $\mathbb{R}$ от двух коммутирующих переменных, не является примитивной.

Согласно теореме Капланского, примитивная PI-алгебра изоморфна алгебре матриц Δ_n для некоторого тела Δ [16]. В силу коммутативности, примитивная алгебра многочленов от двух переменных должна быть полем, что не выполнено.

Пример 3.2.2. Пусть L – абелева алгебра Ли над полем F. Если размерность $\dim_F L = n$ – конечна и существует алгебраический элемент α степени n над F, то рассмотрим простое алгебраическое расширение $F(\alpha)$.

Поле $F(\alpha)$ является абелевой алгеброй Ли размерности n и имеет точное неприводимое PI-представление.

Следовательно, алгебра Ли L является PI-примитивной.

К числу полей, имеющих алгебраические элементы любой степени относятся поле рациональных чисел и кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_p$, где p – простое.

Если размерность алгебры Ли L – бесконечна, то рассмотрим бесконечное расширение K поля F.

Оно тоже является реализацией абелевой примитивной алгебры Ли над F.

Дадим одно важное определение.

Определение 55. *Область целостности R называется факториальным кольцом, если в ней каждый ненулевой элемент a является обратимым элементом кольца, либо представляется в виде произведения необратимых элементов $a = p_1 \cdots p_n (n \geqslant 1)$, причем данное разложение единственно в том смысле, что если $p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_m$, то $m = n$ и после перенумерции получим равенства $p_i = u_i q_i$ для всех i, где u_i – обратимый элемент кольца R.*

Пример 3.2.3. Покажем, что абелева алгебра $L = F \oplus ... \oplus F$ размерности k, где F – алгебраически замкнутое поле, $k \geqslant 2$, – не является примитивной.

Универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ алгебры Ли L изоморфна кольцу многочленов от k коммутирующих переменных

$$U(L) = F[x_1, ..., x_k].$$

Примитивность алгебры Ли L означает, что существует точный неприводимый правый L-модуль M. Тогда он является неприводимым правым $U(L)$ – модулем.

Все неприводимые правые модули над алгеброй являются факторами по максимальным регулярным правым идеалам [16].

Следовательно, в $U(L)$ существует максимальный регулярный правый идеал I.

Из точности неприводимого L-модуля M следует, что идеал I не содержит переменных $x_1, ..., x_k$.

Алгебра $U(L)$ коммутативна и содержит 1. Поэтому идеал I является максимальным и фактор-алгебра $H = U(L)/I$ является полем. Можно считать, что H расширение поля F.

Модуль M является неприводимым H-модулем.

Отметим, что алгебра H порождена образами образующих $U(L)$. Докажем, что элементы $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k$ не могут быть трансцендентными.

Предположим, что хотя бы один элемент $\bar{x}_i$ – трансцендентный над F.

Сначала рассмотрим подполе P полученное присоединением алгебраических элементов к F.

Тогда H является полем рациональных функций от m переменных $(0 < m \leqslant k)$, порожденным элементами $\frac{f_1}{g_1}, ..., \frac{f_s}{g_s}$ как кольцо, где $f_i, g_i, i = 1, ..., s$ - многочлены от m переменных над P.

Рассмотрим многочлен

$$g = \prod_{i=1}^{s} g_i.$$

Хорошо известно, что кольцо многочленов от одной переменной над факториальным кольцом является факториальным [42]. Следовательно, кольцо многочленов от нескольких переменных является факториальным.

Многочлен G раскладывается в произведение неприводимых многочленов.

Алгебраически замкнутое поле – бесконечно [42]. Найдется $\alpha \in F$ такое, что неприводимый многочлен $x - \alpha$ не входит в разложение g.

Тогда рациональная дробь $\frac{1}{x-\alpha}$ не может быть порождена элементами $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k$ с помощью кольцевых операций.

Противоречие.

Мы установили, что H – алгебраическое расширение поля F и, следовательно, $H = F$. Получили $x_1, ..., x_k \in I$ – противоречие.

Следовательно, алгебра L – не является примитивной.

Теорема 3.1.1 следует из леммы 3.2.1 и того, что любой ненулевой примитивный идеал артиновой алгебры Ли содержит единственный минимальный.

Доказательство теоремы 3.1.2.

Пусть алгебры Ли L_1 и L_2 имеют точные неприводимые представления в алгебре эндоморфизмов модулей M_1 и M_2, такие, что их центроиды совпадают с основным полем F.

Рассмотрим модуль $M_1 \otimes_F M_2$ над $\mathrm{End}(M_1) \otimes_F \mathrm{End}(M_2)$ и вложения алгебр Ли

$$\varphi_i : L_i \to \mathrm{End}(M_i), \quad i = 1, 2.$$

Построим следующие отображения L_1 и L_2 в алгебру

$$\mathrm{End}(M_1) \otimes_F \mathrm{End}(M_2) :$$

$\varphi_1'(l_1) = \varphi_1(l_1) \otimes 1$ и $\varphi_2'(l_2) = 1 \otimes \varphi(l_2)$, $l_1 \in L_1, l_2 \in L_2$

Тогда $\varphi_1 + \varphi_2$ задает вложение $L_1 \oplus L_2$ в $(\mathrm{End}(M_1) \otimes_F \mathrm{End}(M_2))^{(-)}$.

Покажем, что $M_1 \otimes_F M_2$ является $L_1 \oplus L_2$ неприводимым модулем.

Рассмотрим ненулевой элемент $x \in M_1 \otimes_F M_2$. Можно считать, что он представлен в виде

$$x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \alpha_{i,j} m_i \otimes n_j,$$

где хотя бы одно $\alpha_{i,j} \neq 0$ и элементы $m_1, ..., m_k \in M_1$ и $n_1, ..., n_l \in M_2$ – линейно независимы над центроидами соответствующих модулей и, следовательно, над полем F. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_{1,1} \neq 0$.

Обозначим через $A(L_i)$ ассоциативные алгебры, порожденные в $\mathrm{End}(M_1)$ множествами L_i, где $i = 1, 2$.

Возьмем произвольный элемент $u \otimes v \in M_1 \otimes_F M_2$. Согласно теореме плотности Джекобсона [16], существуют элементы $a \in A(L_1)$ и $b \in A(L_2)$ такие, что

$$am_1 = \frac{1}{\alpha_{1,1}} u, am_2 = 0, ..., am_k = 0, bn_1 = v, bn_2 = 0, ..., bn_l = 0.$$

Тогда $(a \otimes 1)(1 \otimes b)x = u \otimes v$.

Отметим, что произвольный элемент $M_1 \otimes_F M_2$ представим в виде линейной комбинации элементов вида $u \otimes v$, которые лежат в подмодуле, порожденном x.

Следовательно, модуль $M_1 \otimes_F M_2$ – неприводим и алгебра $L_1 \oplus L_2$ – примитивна.

Условие $\varphi_i(L_i) \cap \Delta_i = \varnothing$, где $i = 1, 2$ требуется для того, чтобы $a \otimes 1$ и $1 \otimes b$ не могли совпадать.

□

Отметим, что в общем случае тензорное произведение неприводимых модулей может не быть примитивным, что показывает следующий пример.

Пример 3.2.4. Мы уже использовали то, что поле комплексных чисел является двумерной абелевой примитивной алгеброй Ли над $\mathbb{R}$.

Рассмотрим модуль $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над алгеброй Ли $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Отметим, что ассоциативная подалгебра $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ алгебры $\mathbf{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, порожденная множествами $\mathbb{C} \otimes 1$ и $1 \otimes \mathbb{C}$ содержит также элементы $1 \otimes 1, i \otimes i$.

Покажем, что модуль $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ не является неприводимым.

Следующие элементы $1 \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes 1, i \otimes i$ образуют базис $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$.

Рассмотрим подпространство $M \subseteq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$, порожденное элементами $1 \otimes 1 + i \otimes i$, $1 \otimes i - i \otimes 1$ и подпространство N, порожденное элементами $1 \otimes 1 - i \otimes i, 1 \otimes i + i \otimes 1$.

Легко проверить, что M и N являются подмодулями $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ над $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ и $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = M \oplus N$.

Следовательно, модуль $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ не является неприводимым над алгеброй Ли $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Мы уже отмечали, что алгебра Ли $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^{(-)}$ не является примитивной.

Пример 3.2.4 дает одно из представлений алгебры $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^{(-)}$ не являющееся неприводимым.

Доказательство следствия 1.

Пусть L – простая конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики нуль.

Рассмотрим представление $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Ad}\, L^{(-)}$.

Тогда алгебра Ли L, рассматриваемая как модуль, является неприводимым L модулем, представление ad – PI-неприводимым.

Центроид этого представления Δ является полем (см., например, [36, с. 314]).

Из конечномерности L следует, что Δ – конечное расширение поля F. Конечным расширением алгебраически замкнутого поля может быть только оно само.

Следовательно, отображение ad является центральным представлением алгебры Ли L.

Из простоты L получим $ad(L) \cap \Delta = 0$.

Выполнены условия теоремы 3.1.2. Осталось использовать разложение полупростой конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль в прямую сумму простых [1], [36].

□

Пример 3.2.5. Пусть алгебра Ли G является прямой суммой счетного количества алгебр, изоморфных алгебре L из примера 1.2.2 над полем $\mathbb{Q}$.

Покажем, что она является примитивной. Очевидно, что G не является артиновой алгеброй Ли.

Рассмотрим различные иррациональные алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \ldots$.

Пусть $M = F[x_1, x_2, ..., x_n, ..]$ кольцо многочленов от счетного числа коммутирующих переменных с коэффициентами из поля $F = Q(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$.

Рассмотрим следующие линейные отображения векторного пространства M:

$$a_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_k}; b_k(f) = \alpha_k x_k \cdot f; e_k(f) = \alpha_k f, f \in M.$$

Легко проверить соотношение $[a_k, b_k] = e_k$. Рассмотрим представления

$$\varphi_k : L \to (End_{\mathbb{Q}} M)^{(-)},$$

заданные соотношениями

$$\varphi_k(a) = a_k, \varphi_k(b) = b_k, \varphi_k(e) = e_k, k = 1, 2, \dots .$$

Гомоморфизм $\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n + ...$ задает представление алгебры Ли G в $End_{\mathbb{Q}} M^{(-)}$.

Докажем, что модуль M является неприводимым G-модулем. Пусть элемент $f \in M$ произвольный ненулевой многочлен из M и одночлен $\alpha_{i_1,\dots,i_n} x^{\beta_1} \cdots x^{\beta_n}$ – одночлен старшей степени, входящий в запись f с ненулевым коэффициентом.

Тогда

$$\frac{1}{\alpha_{i_1,\dots,i_n \beta_1! \cdots \beta_1!}} a_{i_1}^{\beta_1} \cdots a_{i_n}^{\beta_n} \left(\alpha_{i_1,\dots,i_n} x^{\beta_1} \cdots x^{\beta_n}\right) = 1.$$

Действуя на 1 умножениями a_k на переменную x_k можно получить произвольный одночлен M.

Мы доказали неприводимость G-модуля M.

Аналогично можно показать, что прямая сумма конечного числа алгебр, изоморфных алгебре L из примера 1.2.2 над полем $\mathbb{Q}$ является примитивной алгеброй Ли.

Для этого пример 3.2.5 переписывается для конечного числа прямых слагаемых.

3. Заключение

В статье проведено исследование соотношений между радикалом Джекобсона, локально нильпотентным и неприводимо представленными радикалами для алгебр Ли.

Наибольший интерес представляет возможность гомологического описания радикала Джекобсона для алгебр Ли.

Наиболее вероятным кандидатом на гомологическое описание радикала Джекобсона алгебры Ли является радикал $IrrPI(L)$ – пересечение ядер неприводимых PI-представлений алгебры Ли L.

Из всего вышесказанного делаем вывод, что нельзя дать удовлетворительного гомологического описания радикала Джекобсона даже для специальных алгебр Ли.

Предлагаем вместо радикала Джекобсона для специальных алгебр Ли использовать локально нильпотентный радикал, который совпадает с радикалом Джекобсона для конечномерных алгебр Ли над полем нулевой характеристики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли (главы I-III).- М.: Мир, 1976.- 496 с.

2. Размыслов, Ю. П. Об энгелевых алгебрах Ли / Ю.П. Размыслов // Алгебра и логика.- 1971.- Т. 10.- № 10. С. 33-44.

3. Кострикин, А. И. Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986.- 232 с.

4. Kubo, F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. 1991. V. 38. P. 23-30.

5. Togo, S. Radicals of infinite-dimensional Lie algebras // Hiroshima Math. J. 1972. V. 2, P. 179-203.
6. Togo, S., Kavamoto N. Ascendantly coalescent classes and radicals of Lie algebras // Hiroshima Math. J. 1972. V. 2. P. 253-261.
7. Marshall, E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra. J. London Math. Soc. 1967. V. 42. P. 416-422.
8. Латышев, В.Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями / В.Н. Латышев// Сиб. мат. журнал.- 1963.- Т 4.- № 4.- С. 821-829.
9. Бейдар К.И., Пихтильков С.А. О первичном радикале специальных алгебр Ли // Успехи матем. наук. 1994. № 1. С. 233.
10. Бейдар, К.И. Первичный радикал специальных алгебр Ли / К.И. Бейдар, С.А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика.- 2000.- Т. 6.- № 3.- С. 643-648.
11. Пихтильков, С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика.- 2002.- Т. 8.- Вып. 3.- С. 769-782.
12. Парфенов, В.А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли / В.А. Парфенов// Сиб. мат. журнал.- 1971.- Т. 12.- № 1.- С. 171-176.
13. Пихтильков, С.А. Артиновые специальные алгебры Ли / С.А. Пихтильков // В мв. сб. Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп.- Тула:ТГПУ, 2001.- С. 189-194.
14. Пихтильков, С.А. Структурная теория специальных алгебр Ли.- Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2005.- 130 с.
15. Пихтильков, С.А. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли /С.А. Пихтильков, В.М. Поляков// Чебышевский сборник.- 2005.- Т. 6.- Вып. 1.- С. 163-169.
16. Херстейн, И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.- 191 с.
17. Кемер, А.Р. Тождества Капелли и нильпотентность радикала конечно порожденной PI-алгебры / А.Р. Кемер // ДАН СССР.- 1980.- Т.- 255.- № 4.- С. 793-797.
18. Braun, A. The nilpotency of the radical in a finitely generated PI-ring// J of Algebra. 1984. V. 89. № 2. P. 375-396.
19. Ширшов, А.И. О кольцах с тождественными соотношениями / А.И. Ширшов// Мат. сборник.- 1957.- Т. 43.- № 2.- С. 277-283.
20. Размыслов, Ю.П. Тождества алгебр и их представления. М.: Наука, 1989.
21. Ламбек, И. Кольца и модули.- М.: Мир, 1971.- 279 с.
22. Beidar K.I., Martindale W.S., Mikhalev A.V. Rings with generalized identities. Pure and Applied Mathematics. New-York: Marcel-Dekker, 1996.
23. Baxter, W.E., Martindale, W.S. Central closure of semiprime non-associative rings// Commun. of Algebra.- 1979.- V. 7. № 11.- P. 1105-1132.
24. Пихтильков, С.А. Примитивность свободной ассоциативной алгебры с конечным числом образующих / С.А. Пихтильков // Успехи матем. наук.- 1974.- № 1.- С. 183-184.

25. Amayo R., Stewart I. Infinite dimensional Lie algebras. Leyden: Noordhoof, 1974.

26. Латышев, В.Н. О сумме локально разрешимых идеалов алгебр Ли / В.Н. Латышев, А.В. Михалев, С.А. Пихтильков// Вестник МГУ.- Сер. 1. матем., мех.- 2003.- № 3.- С. 29-32.

27. Amitsur, S.A. Algebras over infinite fields // Proc. Amer. Math. Soc.- 1956.- V. 7.- P. 35-48.

28. Итоги науки и техники. Серия "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления".- Т. 18. Алгебра-2.- М.: ВИНИТИ, 1988.- 248 с.

29. Размыслов Ю.П. О радикале Джекобсона в PI-алгебрах / Ю.П. Размыслов // Алгебра и логика.- 1974.- Т. 13.- N 3.- С. 337-360.

30. Бахтурин, Ю.А. О строении PI-оболочки конечномерной алгебры Ли / Ю.А. Бахтурин // Изв. вузов. сер. Матем.- 1985.- № 11.- С. 60-62.

31. Балаба И.Н. Первичный радикал градуированных Ω-групп / И.Н. Балаба, А.В. Михалев, С.А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика.- 2006.- Т. 12.- № 2.- С. 159-174.

32. Джекобсон, Н. Строение колец.- М.: Изд-во иностр. литературы, 1961.- 392 с.

33. Биллиг, Ю.В. О гомоморфном образе специальной алгебры Ли// Матем. сборник.- 1988.- Т. 136.- № 3.- С. 320-323.

34. Пихтильков, С.А. О специальных алгебрах Ли / С.А. Пихтильков// Успехи матем. наук.- 1981.- Т. 36.- № 6.- С. 225-226.

35. Kamiya, N. On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras // Hiroshima Math. J.1979, v. 9, pp. 37-40.

36. Джекобсон, Н. Алгебры Ли.- М.:Мир, 1964.- 355 с.

37. Бахтурин, Ю. А. Тождества в алгебрах Ли.- М.: Наука, 1985.- 447 с.

38. Терехова, Ю.А. О теореме Леви для специальных алгебр Ли / Ю.А. Терехова // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов.- Тула: Изд-во ТГПИ им. Л.Н. Толстого, 1994.- с. 97-103.

39. Математическая энциклопедия / ред. И. М. Виноградов . - М. : Сов. энциклопедия, 1977-1985. - Т. 1 : А - Г. - , 1977. - 1151 с.

40. Симонян, Л. А. О радикале Джекобсона алгебры Ли / Л. А. Симонян // Латвийский математический ежегодник.- 1993.- Вып. 34.- С. 230-234.

41. Диксмье, Ж. Универсальные обертывающие алгебры.- М.: Мир, 1978.- 407 с.

42. Ленг, С. Алгебра.- М.: Мир, 1968.- 564 с.

REFERENCES

1. Burbaki, N. 1976, *Gruppy i algebry Li (glavy I-III) [Lie groups and algebras (chapters I-III)]*, Mir, Moscow, Russia.

2. Razmyslov, U. P. 1971, " Ob engelevyh algebrah Li [On Engel Lie algebras]", *Algebra i logika*, v. 10.- № 10, pp. 33-44.

3. Kostrikin, A. I. 1986, *Vokrug Bernsajda [Around Burnside]*, Nauka, Moscow, Russia.

4. Kubo, F. 1991, "Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical", *Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci.*, v. 38. pp. 23-30.

5. Togo, S. 1972, "Radicals of infinite-dimensional Lie algebras", *Hiroshima Math. J.*, v. 2, pp. 179-203.

6. Togo, S., Kavamoto, N. 1972, "Ascendantly coalescent classes and radicals of Lie algebras" *Hiroshima Math. J.*, v. 2, pp. 253-261.

7. Marshall, E. I. 1967, "The Frattini subalgebras of a Lie algebra", *J. London Math. Soc.*, v. 42, pp. 416-422.

8. Latyshev, V. N. 1963, "On Lie Algebras with Identities ratios", *Sib. mat. magazine*, v. 4. № 4. pp. 821-829.

9. Beidar, K. I., Pikhtilkov, S. A. 1994, "O pervichnom radikale special'nyh algebr Li [On a primary radical special Lie algebras]", *Uspekhi matem. nauk*, № 1, p. 233.

10. Beidar, K. I., Pikhtilkov, S. A. 2000, "Primary radical special Lie algebras", *Fundamental and applied mathematics*, t. 6, v. 3, pp. 643-648.

11. Pikhtilkov, S. A. 2002, "On a locally nilpotent radical special Lie algebras", *Fundamental and Applied Mathematics*, t. 8, v. 3, pp. 769-782.

12. Parfenov, V.A. 1971, "O slabo razreshimom radikale algebr Li [On the weakly solvable radical of Lie algebras]", *Siberian Mathematical Journal*, v. 12, № 1, pp. 171-176.

13. Pihtil'kov S.A. 2001, "Artinovy special'nye algebry Li [Artinian special Lie algebras]", *V mv. sb. Algoritmicheskie problemy teorii grupp i polugrupp*, Tula:TGPU, pp. 189-194.

14. Pikhtilkov, S.A., 2005, "Strukturnaya teoriya special'nyh algebr Li [The structural theory of special Lie algebras]", Izd-vo TGPU im. L.N. Tolstogo, Tula, pp. 45-48.

15. Pikhtilkov, S.A., Polyakov, V.M., 2005, "About locally nilpotent Artinian Lie algebras", *Chebyshevskii sbornik*, Tula, v. 6, № 1, pp. 163-169.

16. Herstein, I., 1972, *Nekommutativnye kol'ca [Noncommutative rings]*, Mir, Moscow, Russia.

17. Kemer, A.R. 1980, "Tozhdestva Kapelli i nil'potentnost' radikala konechno porozhdennoj PI-algebry [Capelli identities and the nilpotency of the radical of a finitely generated PI - algebra]", *DAN SSSR*, v. 255, № 4, pp. 793-797.

18. Braun, A. 1984, "The nilpotency of the radical in a finitely generated PI-ring", *J of Algebra*, v. 89, № 2, pp. 375-396.

19. SHirshov, A.I. 1957, "O kol'cah s tozhdestvennymi sootnosheniyami [On rings with identical relations]" *Mat. sbornik*, v. 43, № 2, pp. 277-283.

20. Razmyslov , YU.P. 1989, *Tozhdestva algebr i ih predstavleniya [Identities of algebras and their representations]*, Nauka, Moscow, Russia.

21. Lambek, I., 1971, *Kol'ca i moduli [Rings and modules]*, Mir, Moscow, Russia.

22. Beidar, K.I., Martindale, W.S., Mikhalev, A.V. 1996, *Rings with generalized identities*, Pure and Applied Mathematics, Marcel-Dekker, New-York, USA.

23. Baxter, W.E., Martindale, 1979, “W.S. Central closure of semiprime non-associative rings”, *Commun. of Algebra*, v. 7, № 11, pp. 1105-1132.

24. Pikhtilkov, S. A. 1974, “Primitive free associative algebra with a finite number of generators”, *Uspekhi matem. nauk*, № 1. pp. 183-184.

25. Amayo, R., Stewart, I. 1974, *Infinite dimensional Lie algebras*, Noordhoof, Leyden, Netherlands.

26. Latyshev, V.N., Mihalev, A.V., Pihtil’kov, S.A. 2003, “O summe lokal’no razreshimyh idealov algebr Li [On the sum of locally solvable ideals of Lie algebras]”, *MSU Bulletin*, ser. 1. matem., mekh., № 3, pp. 29-32.

27. Bahturin, Yu. 1980, “On Lie subalgebras of associative PI-algebras”, *J. Algebra*, v. 67, № 2, pp. 257-271.

28. Itogi nauki i tekhniki. Seriya “Sovremennye problemy matematiki. Fundamental’nye napravleniya”, vol. 18, Algebra-2, VINITI, Moscow, Russia.

29. Razmyslov, U. P. 1974, “ O radikale Dzhekobsona v PI-algebrah [On the Jacobson radical in PI - algebras]”, *Algebra i logika*, v. 13.- № 3, pp. 337-360.

30. Bahturin, YU.A. 1985, “O stroenii PI-obolochki konechnomernoj algebry Li [On the structure of the PI - shell of a finite-dimensional Lie algebra]”, *Izv. vuzov. ser. Matem.*, № 11, pp. 60-62.

31. Balaba, I.N., Mikhalev, A.V., Pikhtilkov, S.A., 2006, “The primary radical of graded Ω -groups”, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, Moscow, v. 12, № 2, pp. 159-174.

32. Jacobson, N. 1961 *Stroenie kolec*, Translated by Andrunakievich, V.A., in Kurosh, A.G. (ed.), Izd-vo inostr. literatury, Moscow, Russia.

33. Billig Yu. V. 1988, “On the homomorphic image of a special Lie algebras”, *Mat. sbornik*, v. 136, № 3, pp. 320-323.

34. Pikhtilkov, S. A. 1981, “On special Lie algebras”, *Uspehi Mat. nauk*, v. 36, № 6, pp. 225-226.

35. Kamiya, N. 1979, “On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras”, *Hiroshima Math. J.*, v. 9, pp.37-40.

36. Jacobson, N. 1964, *Lie Algebras*, Translated by ZHizhchenko, A.B., in Kurosh, A.G. (ed.), Mir, Moscow, Russia.

37. Bakhturin, Yu. A. 1985, *Tozhdestva v algebrakh Li [Identities in Lie algebras]*, Nauka, Moscow, Russia.

38. Terekhova, Yu. A. 1994, “On the Levi theorem for special Lie algebras”, *Algorithmic Problems group and semigroup theories. Interuniversity collection of scientific works*, Tula: Izd-vo TGPI im. L.N. Tolstogo, pp. 97-103.

39. *Matematicheskaya enciklopediya*, 1977, in Vinogradov, I. M. (ed.), M.: Sov. enciklopediya, 1977-1985, v. 1 : А - Г.

40. Simonyan, L. A. 1993, “O radikale Dzhekobsona algebry Li”, *Latvijskij matematicheskij ezhegodnik*, release 34, pp. 230-234.

41. Dixmier, J. 1978, *Universal’nyye obertyvayushchiye algebry [Universal enveloping algebras]*, Mir, Moscow, Russia.

42. Leng, S. 1968, *Algebra*, Mir, Moscow, Russia.

Получено 18.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517.958:530.145 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-273-291

Слабые алгебры Фаддеева — Тахтаджана — Волкова. Решеточные W_n алгебры[1]

Ф. Разавиниа

Фаррох Разавиниа — Московский физико-технический институт (г. Москва).
e-mail: f.razavinia@phystech.edu

Аннотация

В этой статье мы начнем с обсуждения исторического общего вида нашего проекта, а затем попытаемся построить новую скобку Пуассона на нашем простейшем примере sl_2, а затем попытаемся дать универсальную конструкцию на основе наших универсальных переменных, а затем постараемся построить решеточные W_2-алгебры, которые будут играть ключевую роль в других наших конструкциях на решетчатых W_3-алгебрах, и, наконец, мы попытаемся найти единственный нетривиальный зависимый генератор наших решеточных W_4-алгебр и т. д. для решетки W_n-алгебры.

Ключевые слова: Решетки, W алгебры, квантовые группы, гомоморфизмы Фейгина.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:
Ф. Разавиниа. Слабые алгебры Фаддеева — Тахтаджана — Волкова. Решеточные W_n алгебры // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 273–291.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 517.958:530.145 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-273-291

Weak Faddeev–Takhtajan–Volkov algebras. Lattice W_n algebras

F. Razavinia

Farrokh Razavinia — Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).
e-mail: f.razavinia@phystech.edu

Abstract

In this paper, we will start by deliberating at our project's historical general view and then we will try to construct a new Poisson bracket on our simplest example sl_2 and then we will try to give a universal construction based on our universal variables and then will try to construct lattice W_2 algebras which will play a key role in our other constructions on lattice W_3 algebras and finally we will try to find the only nontrivial dependent generator of our lattice W_4 algebras and so on for lattice W_n algebras.

Keywords: Lattice W algebras, quantum groups, Feigin's homomorphisms.

Bibliography: 11 titles.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 17-11-01377).

For citation:
Farrokh Razavinia, 2021, "Weak Faddeev–Takhtajan–Volkov algebras. Lattice W_n algebras" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 273–291.

Dedicated to the 80-th anniversary of A.V.Michalev and 70-th aniversary of A.L.Semenov

1. Introduction

There is an old problem which has been considered and introduced by Boris Feigin in 1992. It's been born in its new formulation on quantum Gelfand-Kirillov conjecture in a public talk at RIMS in 1992 based on the nilpotent part of $U_q(g)$ i.e. $U_q(\mathfrak{n})$ for g a simple Lie algebra.
Now, this problem is known as ″Feigin's Conjecture″.
In the mentioned talk, Feigin proposed the existence of a certain family of homomorphisms on the quantized enveloping algebra $U_q(g)$ to the ring of skew-polynomials which will led us to a deffinition of lattice $W-$algebras.
These ”homomorphisms” has been turned to a very useful tool for to study the fraction field of quantized enveloping algebras. [6]
There have been many attempt for to construct lattice W-algebras in Feigin's sence, which ensures the simplicity of the construction process of lattice W-algebra; for example the best known articles in the subject has been written by Kazuhiro Hikami and Rei Inoue who tried to obtain the algebra structure by using lax operators and generalized R matrices. [7] [8]
Or Alexander Belov and Alexander Antonov and Karen Chaltikian, who first tried to follow Feigin's construction but finaly they also solved part of the conjecture by getting help of lax operators, and it made very difficult to follow their publication.[9] [10]
But here in this paper we will proceed and will introduce the most simplest way of constructing such kind of algebras by just employing Feigin's homomorphisms and screening operators by defining a Poisson bracket on our variables just based on our Cartan matrix. [1] [2]
In [2], Yaroslav Pugai has constructed lattice W_3 algebras already, but here we will introduce its weaker version based on a Poisson bracket as mentioned before, constructed on just Cartan matrix A_n, which will make our job more easier and more elegant.
For to do this, let us set C an arbitrary symmetrizable Cartan matrix of rank r and let $n = n_+$ be the standard maximal nilpotent sub-algebra of the Kac-Moody algebra associated with C.
So n is generated by elements $E_1, \cdots, E_r$ which are satisfying in Serre relations. [11] Where r stands for rank(C).
In [1], we proved that screening operators $S_{X_i^{ji}} = \sum\limits_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ \text{for } i \text{ fixed}}}^{n} X_i^{ji}$; for X_i^{ji} generators of the $q-$commutative ring $\mathbb{C}_q[X_i^{ji}] := \frac{\mathbb{C}[X_i^{ji}]}{\left\langle X_i^{ji}X_k^{jk} - q^{<\alpha_i,\alpha_j>}X_k^{jk}X_i^{ji}\right\rangle}$ and for $<\alpha_i, \alpha_j >= a_{ij}$ the ij's components of our Cartan matrix C; are satisfying in quantum Serre relations $\mathrm{ad}_q(X_i)^{1-a_{ij}}(X_j)$ for adjoint action $\mathrm{ad}_q(X_i)(X_j) = X_iX_j - q^{a_{ij}}X_jX_i$ and $X_i \in (U_q)_\alpha$, $X_j \in (U_q)_\beta$ [5], for $(U_q)_\alpha = \{u \in U_q(g)|q^{\mathfrak{h}}uq^{-\mathfrak{h}} = q^{\alpha(\mathfrak{h})}u \quad \text{for all } \mathfrak{h} \in \overset{\vee}{P}\}$ and $U_q(g) = \bigoplus\limits_{\alpha\ in\ Q}(U_q)_\alpha$, for $Q = \bigoplus\limits_{i\in I}\mathbb{Z}_{\alpha_i}$ the root lattice and for $\overset{\vee}{P}$ a free abelian group of rank $2|I| - \mathrm{rank}C$ with $\mathbb{Z}-$basis $\{h_i|i \in I\} \cup \{d_s|s = 1, \cdots, |I| - \mathrm{rank}C\}$ and $\mathfrak{h} = \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\vee}{P}$ be the $\mathbb{F}-$linear space spanned by $\overset{\vee}{P}$. [5]
$\overset{\vee}{P}$ will be called dual weight lattice and $\mathfrak{h}$ the Cartan subalgebra. And $\mathbb{F}$ will stand for our ground field.[5]
Here for our Cartan matrix C, the quantum Serre relation will be

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_q(X_i)^{1-(-1)}(X_j) &= \mathrm{ad}_q^2(X_i)(X_j)\\ &= X_i^2X_j - [2]_qX_iX_jX_i + X_jX_i^2\\ &= X_i^2X_j - (q+q^{-1})X_iX_jX_i + X_jX_i^2\end{aligned}$$

Where $[2]_q$ stands for quantum number $[n]_q = \frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}$ in general.
And again as what we had in [1], we can define

$$U_q(n) := \langle S_{X_i^{ji}}, S_{X_k^{jk}} \mid (\mathrm{ad}_q(S_{X_i^{ji}}))^2(S_{X_k^{jk}}) = 0\rangle$$

and for $\mathbb{C}_q[X]$ the quantum polynomial ring in one variable and twisted tensor product $\bar{\otimes}$, we can define

$$\begin{aligned}U_q(n)\bar{\otimes}\mathbb{C}_q[X_l^{jl}] := \langle S_{X_i^{ji}}, S_{X_k^{jk}}, X_l^{jl} \mid & (\mathrm{ad}_q(S_{X_i^{ji}}))^2(S_{X_k^{jk}}) = 0\\ &, S_{X_i^{ji}}X_l^{jl} = q^2X_l^{jl}S_{X_i^{ji}}, S_{X_k^{jk}}X_l^{jl} = q^{-1}X_l^{jl}S_{X_k^{jk}}\rangle\end{aligned}$$

such that we have the following embeding

$$U_q(n) \hookrightarrow U_q(n)\bar{\otimes}\mathbb{C}_q[X_l^{jl}] \hookrightarrow U_q(n)\bar{\otimes}\mathbb{C}_q[X_l^{jl}]\bar{\otimes}\mathbb{C}_q[X_m^{jm}]$$

where $\mathbb{C}_q[X_l^{jl}]\bar{\otimes}\mathbb{C}_q[X_m^{jm}] = \mathbb{C}\langle X_l^{jl}, X_m^{jm} \mid X_l^{jl}X_m^{jm} = q^{a_{lm}}X_m^{jm}X_l^{jl}$.[1]
Which will ensure the well definedness of our definition of lattice $W-$algebras.

2. Weak Faddeev-Takhtajan-Volkov algebras

As it has been mentioned already in [1], the main tools that we use, will be difference equations, screening operators, Feigin's homomorphisms, adjoint actions, partial differential equations and Cartan matrices, etc
We know that from an abstract view $g = sl_{m+1}$ is an algebra related to the Cartan matrix (a_{ij}), for $a_{ij} = \begin{cases}2 & \text{if } i=j\\ -1 & \text{if } |i-j|=1\\ 0 & \text{if } |i-j|>1\end{cases}$ and so for sl_2 it will consist of just one row and one column, i.e. we have $A_1 = (2)$ and let us denote by $C\langle X\rangle$ the skew polynomial ring on generators $X = (X_i)_i$ labeled by $i \in \{-\infty, \cdots -1, 0, 1, \cdots, +\infty\}$ and defining $q-$commutation relations $X_iX_j = q^2X_jX_i$ for if $i \leq j$ with all having the same color.

Definition . *Let's define our Poisson bracket as follows in the case of sl_2:*

$$\begin{cases}\{X_i, X_j\} := 2X_iX_j & \text{if } i<j\\ \{X_i, X_i\} := 0\end{cases} \tag{1}$$

The main problem is to find solutions of the system of difference equations from infinite number of non-commutative variables in quantum case and commutative variables in classical case. It is significant that commutation relations (1) depend on the sign of the difference $(i-j)$ only and is based on our Cartan matrix. We should try to find all solutions of the system:

$$\begin{cases}\mathfrak{D}_x^{(n)} \triangleleft \tau_1 = 0\\ H_x^{(n)} \triangleleft \tau_1 = 0\end{cases} \tag{2}$$

Let us define our system of variables as follows

$$\begin{array}{cccccc}\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \cdots & X_1^{(11)} & X_1^{(21)} & X_1^{(31)} & X_1^{(41)} & \cdots\\ \cdots & X_2^{(12)} & X_2^{(22)} & X_2^{(32)} & X_2^{(42)} & \cdots\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \cdots & X_3^{(13)} & X_3^{(23)} & X_3^{(33)} & X_3^{(43)} & \cdots \\ \cdots & X_4^{(14)} & X_4^{(24)} & X_4^{(34)} & X_4^{(44)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

And let us equip this system of variables with lexicographic ordering, i.e. $j_{k_m}i < j_{k_n}i$ if $j_{k_m} < j_{k_n}$ and $ji_{k_m} < ji_{k_n}$ if $i_{k_m} < i_{k_n}$. And we need this kind of ordering because we have different kind of set of variables with a proper coloring such that each set has its own color different of its neighbors. We have $\tau_1 := \tau_1[\cdots, X_1^{(11)}, X_1^{(21)}, X_1^{(31)}, \cdots, X_2^{(12)}, X_2^{(22)}, X_2^{(32)}, \cdots]$, a multi-variable function depend on $\{X_i^{(ji)}\}$'s for $i, j \in \{-\infty, \cdots, 1, \cdots, n, \cdots, +\infty\}$ and $\mathfrak{D}_x^{(n)}$ comes from

$$\{S_{X_i^{ji}}, \tau_1\}_p = S_{X_i^{ji}}\tau_1 - p^{\deg\tau_1 <\alpha_i,\alpha_j>}\tau_1 S_{X_i^{ji}} \tag{3}$$

where $<\alpha_i, \alpha_j>= a_{ij}$ is related to our Cartan matrix and $S_{X_i^{ji}}$ is a screening operator on one of our variable sets, i.e. $S_{X_i^{ji}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} X_i^{ji}$. Then we will obtain the whole set of solutions by using the following shift operator:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \tau_1[X_1^{(11)} \to X_1^{(21)}, X_1^{(21)} \to X_1^{(31)}, \cdots], \\ \tau_3 &= \tau_2[X_1^{(21)} \to X_1^{(31)}, X_1^{(31)} \to X_1^{(41)}, \cdots] \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4}$$

Definition . *Let us define our lattice W-algebra based on its generators according to [2] [1]. Generators of lattice W-algebra associated with simple Lie algebra g constitute of the functional basis of the space of invariants*

$$\tau_i := Inv_{U_q(n_+)}(\mathbb{C}_q[X_i^{ji}|i \in \mathbb{Z}]) \tag{5}$$

with additional requirements

$$H_{X_i^{ji}}(\tau_i) = 0 \qquad \textit{and} \qquad D_{X_i^{ji}}(\tau_i) = 0 \tag{6}$$

where $H_{X_i^{ji}}$ and $D_{X_i^{ji}}$ will be specified later.

Equation (4) means that the generators have to satisfy in quantum Serre relations and the first equation (5) means that they should have zero degree.

Here in this paper we just will work on $g = \mathrm{sl}_n$ and will use $\tau_i^{(n)}$ instead of τ_i.

Where (n) sits for n in sl_n.

2.1. Lattice W_2 algebra

Let us first consider the sl_2 case for to open out the concepts of (2) and (4). And also for to simplifying out notations, let us consider our set of variables as $X_i := X_i^{ji}$.

And as it has shown in [1], it is enough just to work with $S_{X_i^{ji}} =: S_{X_i} = \sum_{i=1}^{3} X_i$, because the other parts for $i > 3$ and $i < 1$ will tend to zero.

By setting $q = e^{-\mathfrak{h}}$, for the Planck constant $\mathfrak{h}$, we will try to find generators of our lattice W_2-algebra, in the case of sl_2.

First step:

First let us try to find $D_X^{(2)}$.

For to do this and for simplicity, we will set $\tau_1 := \tau_1[\cdots, X_1, X_2, X_3, , \cdots]$. And as it has been defined already, we have

$$\begin{aligned} D_X^{(2)} &:= \{S_{X_i}, \tau_1\} \\ &= \{X_1 + X_2 + X_3, \tau_1\} \\ &= \{X_1, \tau_1\} + \{X_2, \tau_1\} + \{X_3, \tau_1\} \end{aligned}$$

$$= (D_{X_1} + D_{X_2} + D_{X_3})\tau_1 \tag{7}$$

Now for to understand what is (6), we note that partial $D_{X_i} = \{X_i, \tau_1\}$ and also note that our function $\tau_1[\cdots, X_1, X_2, X_3, \cdots]$ is a polynomial function consist of powers of X_i. What I mean is that, it is enough to find D_{X_i} on just powers of X_j for different values of $j \in \mathbb{Z}$.
So

$$(6) = \sum_j (\{X_1, X_j^n\} + \{X_2, X_j^n\} + \{X_3, X_j^n\}) \tag{8}$$

Where according to rules which has been showed out in [1], we have

$$\begin{aligned} \{X_1, X_j^n\} &= X_1 X_j^n - q^{2n} X_j^n X_1 \\ &= \begin{cases} 0, & \text{if } j > 1 \\ (1 - q^{4n}) X_1 X_j^n, & \text{if } j < 1 \\ (1 - q^{2n}) X_1 X_j^n, & \text{if } j = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Where by setting $q = e^{-\mathfrak{h}}$ and letting $\mathfrak{h} = 1$ at the end, we will have:

First case: $j > 1$;

$$\{X_1, X_j^n\} = 0;$$

Second case: $j < 1$;

$$\begin{aligned} \{X_1, X_j^n\} &= (1 - e^{-4n\mathfrak{h}}) X_1, X_j^n \\ &\sim (1 - (1 - 4n\mathfrak{h})) X_1, X_j^n \\ &= 4n\mathfrak{h} X_1, X_j^n \sim 4n X_1, X_j^n \\ &= 4 X_1 X_j \tfrac{\partial X_j^n}{\partial X_j}. \end{aligned}$$

Third case: $j = 1$;

$$\begin{aligned} \{X_1, X_1^n\} &= (1 - q^{2n}) X_1 X_1^n \\ &= (1 - e^{-2n\mathfrak{h}}) X_1 X_1^n \\ &\sim (1 - (1 - 2n\mathfrak{h})) X_1 X_1^n \\ &= 2n\mathfrak{h} X_1 X_1^n \sim 2n X_1 X_1^n \\ &= 2 X_1^2 \tfrac{\partial X_1^n}{\partial X_1}. \end{aligned}$$

And so we have

$$\begin{aligned} (7) = &\{X_1, X_1^n\} + \textstyle\sum_{j<1} \{X_1, X_j^n\} + \sum_{j>1} \{X_1, X_j^n\} \\ &+ \{X_2, X_2^n\} + \textstyle\sum_{j<2} \{X_2, X_j^n\} + \sum_{j>2} \{X_2, X_j^n\} \\ &+ \{X_3, X_3^n\} + \textstyle\sum_{j<3} \{X_3, X_j^n\} + \sum_{j>3} \{X_3, X_j^n\} \\ &= 2X_1^2 \tfrac{\partial}{\partial X_1} + 0 + 0 \\ &+ 2X_2^2 \tfrac{\partial}{\partial X_2} + 4X_2 X_1 \tfrac{\partial}{\partial X_1} + 0 \\ &+ 2X_3^2 \tfrac{\partial}{\partial X_3} + 4X_3 X_2 \tfrac{\partial}{\partial X_2} + 4X_3 X_1 \tfrac{\partial}{\partial X_1} \\ &= 2X_1(X_1 + 2X_2 + 2X_3) \tfrac{\partial}{\partial X_1} + 2X_2(X_2 + 2X_3) \tfrac{\partial}{\partial X_2} \\ &+ 2X_3^2 \tfrac{\partial}{\partial X_3}. \end{aligned}$$

So we found $D_X^{(2)}$ which is as follows and we can omit 2, because finally we will make the action equal to zero and we can cancel 2 out from both sides. So we have

$$D_X^{(2)} = X_1(X_1+2X_2+2X_3)\frac{\partial}{\partial X_1} + X_2(X_2+2X_3)\frac{\partial}{\partial X_2} + X_3^2\frac{\partial}{\partial X_3} \tag{9}$$

Second step:

Now we will try to find $H_X^{(2)}$.

For to find $H_X^{(2)}$, we note that it resembles degree of our polynomial function. So if for example $H_X^{(2)}$ acts on $X_1^n X_2^m X_3^l$, then we should get $(n+m+l)$.

So let us define

$$H_X^{(2)} := \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial X_i} \tag{10}$$

and then we have;

$$\begin{aligned} H_X^{(2)}(X_1^n X_2^m X_3^l) &= (\textstyle\sum_i X_i \frac{\partial}{\partial X_i})(X_1^n X_2^m X_3^l) \\ &= \textstyle\sum_i X_i \frac{\partial X_1^n X_2^m X_3^l}{\partial X_i} \\ &= X_1 \frac{\partial X_1^n X_2^m X_3^l}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial X_1^n X_2^m X_3^l}{\partial X_2} + X_3 \frac{\partial X_1^n X_2^m X_3^l}{\partial X_3} \\ &= nX_1^n X_2^m X_3^l + mX_1^n X_2^m X_3^l + lX_1^n X_2^m X_3^l \\ &= (n+m+l)X_1^n X_2^m X_3^l. \end{aligned}$$

Which gives us

$$H_X^{(2)}(X_1^n X_2^m X_3^l) = (n+m+l)X_1^n X_2^m X_3^l$$

and in the other side we have

$$\begin{aligned} (n+m+l)X_1^n X_2^m X_3^l &= nX_1X_1^{n-1}X_2^mX_3^l + mX_1^nX_2X_2^{m-1}X_3^l + lX_1^nX_2^m x_3 X_3^{l-1} \\ &= X_1\frac{X_2^mX_3^l\partial X_1^n}{\partial X_1} + X_2\frac{X_1^nX_3^l\partial X_2^m}{\partial X_2} + X_3\frac{X_1^nX_2^m\partial X_3^l}{\partial X_3} \\ &= X_1\frac{\partial}{\partial X_1} + X_2\frac{\partial}{\partial X_2} + X_3\frac{\partial}{\partial X_3} \end{aligned}$$

Which gives us

$$(n+m+l)X_1^n X_2^m X_3^l = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial X_i}$$

And it shows that (2.9) is well defined.

Now the only thing which remains is just to find the solutions of the following system of 2-linear homogeneous equations in one unknown τ_1:

$$\begin{cases} (X_1(X_1+2X_2+2X_3)\frac{\partial}{\partial X_1} + X_2(X_2+2X_3)\frac{\partial}{\partial X_2} + X_3^2\frac{\partial}{\partial X_3})\tau_1[\cdots, X_1, X_2, X_3, \\ \quad \cdots] = 0, \\ (X_1\frac{\partial}{\partial X_1} + X_2\frac{\partial}{\partial X_2} + X_3\frac{\partial}{\partial X_3})\tau_1[\cdots, X_1, X_2, X_3, \cdots] = 0; \end{cases} \tag{11}$$

Now the goal is to find such $\tau_1[\cdots, X_1, X_2, X_3, \cdots]$ which satisfies in our system of equations (10). The second equation ensures that the solution has degree 0 and also the partial differentials will fix us a multi-variable function dependent on just X_1, X_2, X_3.

The system of PDEs (10) can be solved using the procedure described in Chapter V, Sec IV of [3]. And after all it became clear that the system (10) has only one functional dependent nontrivial solution:

$$\tau_1^{(2)}[X_1, X_2, X_3] = \frac{(X1+X2)(X2+X3)}{X2(X1+X2+X3)} = \frac{(\sum_{1\le i_1\le 2} X_{i_1}^{(1)})(\sum_{1\le i_1\le 2} X_{i_1+1}^{(1)})}{X_2^{(1)}(\sum_{1\le i_1\le 3} X_{i_1}^{(1)})} \tag{12}$$

And again as before, (2) goes back to 2 in Sl_2 and 1 is a default index which will be used later for to employ shifting operator.

According to the number of variables, we will have two shifts and then everything will be in a loop.

So here in sl_2 case we have three solutions for our system of linear equations (2.10) which belong to the fraction ring of polynomial functions.

$$\begin{cases} \tau_1^{(2)}[X_1, X_2, X_3] = \frac{(\sum_{1\le i_1\le 2} X_{i_1}^{(1)})(\sum_{1\le i_1\le 2} X_{i_1+1}^{(1)})}{X_2^{(1)}(\sum_{1\le i_1\le 3} X_{i_1}^{(1)})}; \\ \tau_2^{(2)}[X_2, X_3, X_4] = \frac{(\sum_{2\le i_1\le 3} X_{i_1}^{(1)})(\sum_{2\le i_1\le 3} X_{i_1+1}^{(1)})}{X_2^{(1)}(\sum_{2\le i_1\le 4} X_{i_1}^{(1)})}; \\ \tau_3^{(2)}[X_3, X_4, X_5] = \frac{(\sum_{3\le i_1\le 4} X_{i_1}^{(1)})(\sum_{3\le i_1\le 4} X_{i_1+1}^{(1)})}{X_2^{(1)}(\sum_{3\le i_1\le 5} X_{i_1}^{(1)})}; \end{cases} \tag{13}$$

And as it already has mentioned we go to define our non-commutative Poisson algebra according to definition of Poisson brackets given by Poisson himself [4] with the difference that here we work on $q-$commutative ring $\frac{\mathbb{C}[X_i^{ji}]}{X_i^{ji}X_k^{jk} - q^{<\alpha_i,\alpha_k>}X_k^{jk}X_i^{ji}}$, based on the generators which are the solutions of PDEs system (2.10).
For to do this we will use the following bracket based on

$$\tau_i^{(n)}[\cdots, X_1, X_2, X_3, \cdots] \qquad \text{and} \qquad \tau_j^{(n)}[\cdots, X_1, X_2, X_3, \cdots]$$

So we have to define our Poisson brackets as follows:

$$F_j^{(n)} := \{\tau_i^{(n)}, \tau_j^{(n)}\} = \sum_i \frac{\partial \tau_i^{(n)}}{\partial X_i} \sum_j \frac{\partial \tau_j^{(n)}}{\partial X_j} \{X_i, X_j\} \tag{14}$$

Where $\{X_i, X_j\}$ is our previously defined Poisson bracket on our set of variables.
For instance in the case of sl_2 we have

$$\begin{aligned} \{\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}\} &= \Big(\frac{\partial \tau_1^{(2)}}{\partial X_1}\Big)\Big(\frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_2}\{X_1, X_2\} + \frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_3}\{X_1, X_3\} + \frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_2}\{X_1, X_4\}\Big) \\ &+ \Big(\frac{\partial \tau_1^{(2)}}{\partial X_2}\Big)\Big(\frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_2}\{X_2, X_2\} + \frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_3}\{X_2, X_3\} + \frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_2}\{X_2, X_4\}\Big) \\ &+ \Big(\frac{\partial \tau_1^{(2)}}{\partial X_3}\Big)\Big(\frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_2}\{X_3, X_2\} + \frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_3}\{X_3, X_3\} + \frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_2}\{X_3, X_4\}\Big) \\ &= \Big(\frac{\partial \tau_1^{(2)}}{\partial X_1}\Big)\Big(\frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_2}(2X_1X_2) + \frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_3}(2X_1X_3) + \frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_2}(2X_1X_4)\Big) \\ &+ \Big(\frac{\partial \tau_1^{(2)}}{\partial X_2}\Big)\Big(\frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_2}(0) + \frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_3}(2X_2X_3) + \frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_2}(2X_2X_4)\Big) \\ &+ \Big(\frac{\partial \tau_1^{(2)}}{\partial X_3}\Big)\Big(\frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_2}(-2X_3X_2) + \frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_3}(0) + \frac{\partial \tau_2^{(2)}}{\partial X_2}(2X_3X_4)\Big) \\ &= 2\frac{X_1X_2^2X_3^2X_4(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)}{(X_1 + X_2)^2(X_2 + X_3)^3(X_3 + X_4)^2} \end{aligned}$$

So we have

$$F_2^{(2)} = \{\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}\} = \frac{2X_1X_2^2X_3^2X_4(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)}{(X_1 + X_2)^2(X_2 + X_3)^3(X_3 + X_4)^2} \tag{15}$$

And it is enough to find our brackets on just first generator, because then we are able to find other brackets based on the other generators, so for $\tau_3^{(2)}$ we have in a same process as follows

$$F_3^{(2)} = \{\tau_1^{(2)}, \tau_3^{(2)}\}$$

$$= \Big(\frac{\partial\tau_1^{(2)}}{\partial X_1}\Big)\Big(\frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_3}\{X_1,X_3\} + \frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_4}\{X_1,X_4\} + \frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_5}\{X_1,X_5\}\Big)$$

$$+\Big(\frac{\partial\tau_1^{(2)}}{\partial X_2}\Big)\Big(\frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_3}\{X_2,X_3\} + \frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_4}\{X_2,X_4\} + \frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_5}\{X_2,X_5\}\Big)$$

$$+\Big(\frac{\partial\tau_1^{(2)}}{\partial X_3}\Big)\Big(\frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_3}\{X_3,X_3\} + \frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_4}\{X_3,X_4\} + \frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_5}\{X_3,X_5\}\Big)$$

$$= \Big(\frac{\partial\tau_1^{(2)}}{\partial X_1}\Big)\Big(\frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_3}(2X_1X_3) + \frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_4}(2X_1X_4) + \frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_5}(2X_1X_5)\Big)$$

$$+\Big(\frac{\partial\tau_1^{(2)}}{\partial X_2}\Big)\Big(\frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_3}(2X_2X_3) + \frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_4}(2X_2X_4) + \frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_5}(2X_2X_5)\Big)$$

$$+\Big(\frac{\partial\tau_1^{(2)}}{\partial X_3}\Big)\Big(\frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_3}(0) + \frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_4}(2X_3X_4) + \frac{\partial\tau_3^{(2)}}{\partial X_5}(2X_3X_5)\Big)$$

$$= \frac{-2X_1X_2X_3^2X_4X_5}{(X_1+X_2)(X_2+X_3)^2(X_3+X_4)^2(X_4+X_5)} \tag{16}$$

We have to note that we almost are done with our Poisson algebra in sl_2 case, but for our further plan i.e. to find our Volterra system, the differential-difference chain of non-linear equations

$$\begin{cases} H = \sum_i [\ln(\tau_i)]; \\ \dot{\tau_j} = \{\tau_j, H\} = \tau_j \times \sum_i \Gamma_i; \end{cases} \tag{17}$$

Where Γ_i stands for $\frac{\tau_1,\tau_i}{\tau_1\tau_i}$ [2]. Which means that we have to write down the brackets $\{\tau_1,\tau_i\}$ in terms of their decompositions to τ_j's for $1 \le j \le i$.
So we need to write it as decomposition of our generators and it will be done by using the Mathematica coding which we have produced in Appendix C.
And the result will be as follows

$$\begin{cases} F_2^{(2)} = \{\tau_1^{(2)},\tau_2^{(2)}\} = 2(1-\tau_1^{(2)})(1-\tau_2^{(2)})(-1+\tau_1^{(2)}+\tau_2^{(2)}); \\ F_3^{(2)} = \{\tau_1^{(2)},\tau_3^{(2)}\} = -2(1-\tau_1^{(2)})(1-\tau_2^{(2)})(1-\tau_3^{(2)}); \\ F_i^{(2)} = \{\tau_1^{(2)},\tau_i^{(2)}\} = 0 \qquad\qquad \text{for } |i-1| \ge 3; \end{cases} \tag{18}$$

This result are weaker than Faddeev-Takhtajan-Volkov algebra which has been mentioned in [2] and if we continue this for sl_3, then we will have again a weaker version of what which has been mentioned in [2].

2.2. Lattice W_3 algebra

In this case we will use the following defined Poisson bracket based on Cartan matrix $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, but for to do this according to our previous ordering and list of variables, let us for simplicity set our variables as follows
Set $X_i^{(1i)} := X_i$ and $X_i^{(2i)} := Y_i$.

Definition . *Let's define our Poisson bracket as follows in the case of sl_3:*

$$\begin{cases} \{X_i, X_j\} := 2X_iX_j & \text{if } i < j; \\ \{Y_i, Y_j\} := 2Y_iY_j & \text{if } i < j; \\ \{X_i, X_i\} := 0; \\ \{Y_i, Y_i\} := 0; \\ \{X_i, Y_j\} := X_iY_j & \text{if } i > j; \\ \{X_i, Y_j\} := -X_iY_j & \text{if } i \leq j; \end{cases} \tag{19}$$

And instead of (2.1) we will have the following $q-$commutation relations

$$\begin{cases} X_iX_j = q^2X_jX_i & \text{if } i \leq j; \\ Y_iY_j = q^2Y_jY_i & \text{if } i \leq j; \\ X_iY_j = q^{-1}Y_jX_i & \text{if } i \leq j; \end{cases} \tag{20}$$

And we will get the following equations in a same manner as in sl_2:

First case: $i < j$;

$$\begin{aligned} \{X_i, Y_j^n\} &= X_iY_j^n - q^{-n}Y_j^nX_i \\ &= X_iY_j^n - q^0X_iX_j^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Second case: $i \geq j$;

$$\begin{aligned} \{X_i, Y_j^n\} &= X_iY_j^n - q^{-n}Y_j^nX_i \\ &= (1 - q^{-2n})X_iY_j^n \\ &= (1 - e^{2n\mathfrak{h}})X_iY_j^n \\ &\sim (1 - (1 + 2n\mathfrak{h}))X_iY_j^n \\ &= -2n\mathfrak{h}X_iY_j^n \\ &\sim -2nX_iY_j^n \\ &= -2X_iY_j\frac{\partial Y_j^n}{\partial Y_j} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \{X_i, X_j^n\} = 0 & \text{if } i \leq j; \\ \{X_i, X_j^n\} = 4X_iX_j\frac{\partial X_j^n}{\partial X_j} & \text{if } i > j; \\ \{X_i, Y_j^n\} = 0 & \text{if } i < j; \\ \{X_i, Y_j^n\} = -2X_iY_j\frac{\partial Y_j^n}{\partial Y_j} & \text{if } i \geq j; \\ \{Y_j, X_i^n\} = -2Y_jX_i\frac{\partial X_i^n}{\partial X_i} & \text{if } i \leq j; \end{cases} \tag{21}$$

According to (2.20) we will try to find $H_X^{(3)}$ as follows

$$\begin{aligned} &\{X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}X_3^{\alpha_3}Y_1^{\beta_1}Y_2^{\beta_2}Y_3^{\beta_3}, X_0\} \\ &= X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}X_3^{\alpha_3}Y_1^{\beta_1}Y_2^{\beta_2}Y_3^{\beta_3}X_0 - X_0X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}X_3^{\alpha_3}Y_1^{\beta_1}Y_2^{\beta_2}Y_3^{\beta_3} \\ &= (1 - q^{2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3-\beta_1-\beta_2-\beta_3})X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}X_3^{\alpha_3}Y_1^{\beta_1}Y_2^{\beta_2}Y_3^{\beta_3}X_0 \\ &\sim (1 - (1 - n\mathfrak{h}(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3)))X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}X_3^{\alpha_3}Y_1^{\beta_1}Y_2^{\beta_2}Y_3^{\beta_3}X_0 \\ &= (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3)n\mathfrak{h}X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}X_3^{\alpha_3}Y_1^{\beta_1}Y_2^{\beta_2}Y_3^{\beta_3}X_0 \\ &\sim (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3)nX_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}X_3^{\alpha_3}Y_1^{\beta_1}Y_2^{\beta_2}Y_3^{\beta_3}X_0 \\ &= (2X_1\frac{\partial}{\partial X_1} + 2X_2\frac{\partial}{\partial X_2} + 2X_3\frac{\partial}{\partial X_3} - Y_1\frac{\partial}{\partial Y_1} - Y_2\frac{\partial}{\partial Y_2} - Y_3\frac{\partial}{\partial Y_3})\tau_1^{(3)}. \end{aligned}$$

Now let us as usual suppose $i > j$ and then we will define the following quantities Here we have for X_is:

$$\begin{aligned} {}_{X_j}D_{X_i} &:= \{X_i, X_j^n\} \\ &= X_iX_j^n - q^{2n}X_j^nX_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (1-q^{4n})X_iX_j^n\\&= (1-e^{-4n\mathfrak{h}})X_iX_j^n\\&\sim (1-(1-4n\mathfrak{h}))X_iX_j^n\\&= 4n\mathfrak{h}X_iX_j^n\\&\sim 4nX_iX_j^n\\&= 4nX_iX_j\tfrac{\partial X_j^n}{\partial X_j}.\end{aligned}$$

And the same will be for Y_is.
And for the different quantities X_i and Y_js we have:

First case: for $i > j$;

$$\begin{aligned}{}_{Y_j}D_{X_i} &:= \{X_i, Y_j^n\}\\&= X_iY_j^n - q^{-n}Y_j^nX_i\\&= (1-q^{-2n})X_iY_j^n\\&= (1-e^{-2n\mathfrak{h}})X_iY_j^n\\&\sim (1-(1-2n\mathfrak{h}))X_iY_j^n\\&= 2n\mathfrak{h}X_iY_j^n\\&\sim 2nX_iY_j^n\\&= 2X_iY_j\tfrac{\partial Y_j^n}{\partial Y_j}.\end{aligned}$$

Second case: for $i \leq j$;

According to what has just mentioned we have

$$\begin{aligned}{}_{Y_j}D_1^Y &:=_{Y_j} D_{Y_1}\\&= 4Y_1Y_j\tfrac{\partial Y_j^n}{\partial Y_j}.\end{aligned}$$

And

$$\begin{aligned}{}_{Y_1}D_1^Y &:=_{Y_1} D_{Y_1}\\&= 2Y_1^2\tfrac{\partial Y_1^n}{\partial Y_1}.\end{aligned}$$

And in a same way we can find the desired results for ${}_{Y_j}D_2^Y$ and ${}_{Y_j}D_3^Y$,
So let us define

$$\begin{cases}{}_YD_1^Y :=_{Y_1} D_1^Y +_{Y_j}^{j<1} D_1^Y +_{Y_j}^{j>1} D_1^Y;\\{}_YD_2^Y :=_{Y_2} D_2^Y +_{Y_j}^{j<2} D_2^Y +_{Y_j}^{j>2} D_2^Y;\\{}_YD_3^Y :=_{Y_3} D_3^Y +_{Y_j}^{j<3} D_3^Y +_{Y_j}^{j>3} D_3^Y;\end{cases} \tag{22}$$

And then we will have

$${}_YD_1^Y = Y_1^2\frac{\partial}{\partial Y_1} + \sum_{j<1} 2Y_1Y_j\frac{\partial}{\partial Y_j} + 0$$

And

$${}_YD_2^Y = Y_2^2\frac{\partial}{\partial Y_2} + \sum_{j<2} 2Y_2Y_j\frac{\partial}{\partial Y_j} + 0$$

And

$${}_YD_3^Y = Y_3^2\frac{\partial}{\partial Y_3} + \sum_{j<2} 2Y_3Y_j\frac{\partial}{\partial Y_j} + 0$$

And finally we get

$$\begin{aligned}{}_YD_Y^{(3)} &:=_Y D_1 +_Y D_2 +_Y D_3\\&= Y_1(Y_1+2Y_2+2Y_3)\tfrac{\partial}{\partial Y_1} + Y_2(Y_2+2Y_3)\tfrac{\partial}{\partial Y_2} + Y_3^2\tfrac{\partial}{\partial Y_3}.\end{aligned}$$

For $j \geq 1$ we have

$${}_{X_1}D_{Y_j} := \{Y_j, X_1^n\}$$

$$
\begin{aligned}
&= Y_jX_1^n - q^{-n}X_1^nY_j\\
&= (1-q^{-2n})Y_jX_1^n\\
&= (1-e^{2n\mathfrak{h}})Y_jX_1^n\\
&\sim (1-(1+2n\mathfrak{h}))Y_jX_1^n\\
&= -2n\mathfrak{h}Y_jX_1^n\\
&\sim -2nY_jX_1^n\\
&= -2Y_jX_1\tfrac{\partial}{\partial X_1}\\
&= -2X_1(Y_1+Y_2+Y_3)\tfrac{\partial}{\partial X_1}.
\end{aligned}
$$

For $j \geq 2$ we have

$$
\begin{aligned}
{}_{X_2}D_{Y_j} &:= \{Y_j, X_2^n\}\\
&= Y_jX_2^n - q^{-n}X_2^nY_j\\
&= (1-q^{-2n})Y_jX_2^n\\
&= (1-e^{2n\mathfrak{h}})Y_jX_2^n\\
&\sim (1-(1+2n\mathfrak{h}))Y_jX_2^n\\
&= -2n\mathfrak{h}Y_jX_2^n\\
&\sim -2nY_jX_2^n\\
&= -2Y_jX_2\tfrac{\partial}{\partial X_2}\\
&= -2X_2(Y_2+Y_3)\tfrac{\partial}{\partial X_2}.
\end{aligned}
$$

For $j \geq 3$ we have

$$
\begin{aligned}
{}_{X_3}D_{Y_j} &:= \{Y_j, X_3^n\}\\
&= Y_jX_3^n - q^{-n}X_3^nY_j\\
&= (1-q^{-2n})Y_jX_3^n\\
&= (1-e^{2n\mathfrak{h}})Y_jX_3^n\\
&\sim (1-(1+2n\mathfrak{h}))Y_jX_3^n\\
&= -2n\mathfrak{h}Y_jX_3^n\\
&\sim -2nY_jX_3^n\\
&= -2Y_jX_3\tfrac{\partial}{\partial X_3}\\
&= -2X_3Y_3\tfrac{\partial}{\partial X_3}.
\end{aligned}
$$

And after all these, let us define

$$
\begin{aligned}
{}_XD_Y^{(3)} &:= {}_{X_1}D_{Y_j} + {}_{X_2}D_{Y_j} + {}_{X_3}D_{Y_j}\\
&= -2X_1(Y_1+Y_2+Y_3)\tfrac{\partial}{\partial X_1} - 2X_2(Y_2+Y_3)\tfrac{\partial}{\partial X_2}\\
&\quad -2X_3Y_3\tfrac{\partial}{\partial X_3}.
\end{aligned}
$$

And finally let us define

$$
\begin{aligned}
D_Y^{(3)} &:= {}_YD_Y^{(3)} + {}_XD_Y^{(3)}\\
&= Y_1(Y_1+2Y_2+2Y_3)\tfrac{\partial}{\partial Y_1} + Y_2(Y_2+2Y_3)\tfrac{\partial}{\partial Y_2}\\
&\quad +Y_3^2\tfrac{\partial}{\partial Y_3} - 2X_1(Y_1+Y_2+Y_3)\tfrac{\partial}{\partial X_1} - 2X_2(Y_2\\
&\quad +Y_3)\tfrac{\partial}{\partial X_2} - 2X_3Y_3\tfrac{\partial}{\partial X_3}.
\end{aligned}
$$

Next step:

Now let us try to find $D_X^{(3)}$:

For $i > 1$, let us define ${}_{Y_1}D_{X_i}$ as follows:

$$
\begin{aligned}
{}_{Y_1}D_{X_i} &:= \{X_i, Y_1^n\}\\
&= X_iY_1^n - q^{-n}Y_1^nX_i\\
&= (1-q^{-2n})X_iY_1^n\\
&= (1-e^{2n\mathfrak{h}})X_iY_1^n\\
&\sim (1-(1+2n\mathfrak{h}))X_iY_1^n\\
&= -2n\mathfrak{h}X_iY_1^n\\
&\sim -2nX_iY_1^n = -2X_iY_1\tfrac{\partial}{\partial Y_1}\\
&= -2Y_1(X_2+X_3)\tfrac{\partial}{\partial Y_1}.
\end{aligned}
$$

For $i > 2$ we have

$$\begin{aligned}
{}_{Y_2}D_{X_i} &:= \{X_i, Y_2^n\} \\
&= X_iY_2^n - q^{-n}Y_2^nX_i \\
&= (1-q^{-2n})X_iY_2^n \\
&= (1-e^{2n\mathfrak{h}})X_iY_2^n \\
&\sim (1-(1+2n\mathfrak{h}))X_iY_2^n \\
&= -2n\mathfrak{h}X_iY_2^n \\
&\sim -2nX_iY_2^n \\
&= -2X_iY_2\tfrac{\partial}{\partial Y_2} \\
&= -2Y_2X_3\tfrac{\partial}{\partial Y_2}.
\end{aligned}$$

For $i > 3$ we have 0.
Let us again have the following definitions

$$_{Y_1}D_2^X :=_{Y_1} D_{X_2} = -2Y_1X_2\frac{\partial Y_1^n}{\partial Y_1};$$

$$_{Y_1}D_3^X :=_{Y_1} D_{X_3} = -2Y_1X_3\frac{\partial Y_1^n}{\partial Y_1};$$

$$_{Y_2}D_3^X :=_{Y_2} D_{X_3} = -2Y_2X_3\frac{\partial Y_1^n}{\partial Y_2};$$

Now let us define

$$_XD_Y^{(3)} :=_{Y_1} D_2^X +_{Y_1} D_3^X +_{Y_2} D_3^X = -Y_1(X_2+X_3)\frac{\partial}{\partial Y_1} - Y_2X_3\frac{\partial}{\partial Y_2};$$

And now as before we have

$$\begin{aligned}
{}_{X_j}D_1^X &:=_{X_j} D_{X_1} \\
&= 4X_1X_j\tfrac{\partial X_j^n}{\partial X_j}. \\
{}_{X_1}D_1^X &:=_{X_1} D_{X_1} \\
&= 2X_1^2\tfrac{\partial X_1^n}{\partial X_1}.
\end{aligned}$$

And in a same way we are able to define for $_{X_j}D_2^X$ and $_{X_j}D_3^X$. So let us define

$$\begin{cases}
_XD_1^X :=_{X_1} D_1^X +_{X_j}^{j<1} D_1^X +_{X_j}^{j>1} D_1^X; \\
_XD_2^X :=_{X_2} D_2^X +_{X_j}^{j<2} D_2^X +_{X_j}^{j>2} D_2^X; \\
_XD_3^X :=_{X_3} D_3^X +_{X_j}^{j<3} D_3^X +_{X_j}^{j>3} D_3^X;
\end{cases} \tag{23}$$

Then we will have

$$_XD_1^X = X_1^2\frac{\partial}{\partial X_1} + \sum_{j<1} 2X_1X_j\frac{\partial}{\partial X_j} + 0$$

And

$$_XD_2^X = X_2^2\frac{\partial}{\partial X_2} + \sum_{j<2} 2X_2X_j\frac{\partial}{\partial X_j} + 0$$

And

$$_XD_3^X = X_3^2\frac{\partial}{\partial X_3} + \sum_{j<2} 2X_3Y_j\frac{\partial}{\partial X_j} + 0$$

So we will have

$$_XD_X^{(3)} :=_X D_1 +_X D_2 +_X D_3$$

$$= X_1(X_1+2X_2+2X_3)\frac{\partial}{\partial X_1} + X_2(X_2+2X_3)\frac{\partial}{\partial X_2}$$
$$+X_3^2\frac{\partial}{\partial X_3}.$$

And therefore as in (10) we will have the following system of PDEs

$$\begin{cases}(X_1(X_1+2X_2+2X_3)\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial X_1} + X_2(X_2+2X_3)\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial X_2} + X_3^2\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial X_2}\\ -Y_1(X_1+X_2+X_3)\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_1} - Y_2(X_2+X_3)\frac{\partial f}{\partial Y_2} - Y_3X_3\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_3}) = 0;\\ (2X_1\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial X_1} + 2X_2\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial X_2} + 2X_3\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial X_3} - Y_1\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_1} - Y_2\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_2} - Y_3\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_3}) = 0;\\ D_Y^{(3)} = (Y_1(Y_1+2Y_2+2Y_3)\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_1} + Y_2(Y_2+2Y_3)\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_2} + Y_3^2\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_2}\\ -Y_1(X_1+X_2+X_3)\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_1} - Y_2(X_2+X_3)\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_2} - Y_3X_3\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_3}) = 0;\\ (2X_1\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial X_1} + 2X_2\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial X_2} + 2X_3\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial X_3} - Y_1\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_1} - Y_2\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_2} - Y_3\frac{\partial\tau_1^{(3)}}{\partial Y_3}) = 0;\end{cases} \tag{24}$$

And according to appendix A we have the following functional dependent nontrivial solution for the whole system of PDEs (23)

$$\tau_1^{(3)} = \frac{(\Sigma_{1\le i\le j\le 2}\quad X_iY_j)(\Sigma_{1\le i\le j\le 2}\quad X_{i+1}Y_{j+1})}{X_2Y_2(\Sigma_{1\le i\le j\le 3}\quad X_iY_j)}; \tag{25}$$

And again as before, (3) goes back to 3 in the Sl_3 and 1 is a default index which later we will use it for to employ our shifting operators.
According to the number of variables, we will have 6 shifts and then after that it will be in a loop. So here in sl_3 case we have six solutions which belong to the fraction ring of polynomial functions.

$$\begin{cases}\tau_1^{(3)}[X_1,Y_1,X_2,Y_2,X_3,Y_3] = \frac{X_2Y_2(X_3Y_3+X_2(Y_2+Y_3)+X_1(Y_1+Y_2+Y_3))}{(X_2Y_2+X_1(Y_1+Y_2))(X_3Y_3+X_2(Y_2+Y_3))};\\ \tau_2^{(3)}[Y_1,X_2,Y_2,X_3,Y_3,X_4] = \frac{X_3Y_2(X_2Y_1+(X_3+X_4)(Y_1+Y_2)+X_4Y_3)}{(X_2Y_1+X_3(Y_1+Y_2))(X_3Y_2+X_4(Y_2+Y_3))};\\ \tau_3^{(3)}[X_2,Y_2,X_3,Y_3,X_4,Y_4] = \frac{X_3y_3(X_4Y_4+X_3(Y_3+Y_4)+X_2(Y_2+Y_3+Y_4))}{(X_3Y_3+X_2(Y_2+Y_3))(X_4Y_4+X_3(Y_3+Y_4))};\\ \tau_4^{(3)}[Y_2,X_3,Y_3,X_4,Y_4,X_5] = \frac{X_4Y_3(X_3Y_2+(X_4+X_5)(Y_2+Y_3)+X_5Y_4)}{(X_3Y_2+X_4(Y_2+Y_3))(X_4Y_3+X_5(Y_3+Y_4))};\\ \tau_5^{(3)}[X_3,Y_3,X_4,Y_4,X_5,Y_5] = \frac{X_4Y_4(X_5Y_5+X_4(Y_4+Y_5)+X_3(Y_3+Y_4+Y_5))}{(X_4Y_4+X_3(Y_3+Y_4))(X_5Y_5+X_4(Y_4+Y_5))};\\ \tau_6^{(3)}[Y_3,X_4,Y_4,X_5,Y_5,X_6] = \frac{X_5Y_4(X_4Y_3+(X_5+X_6)(Y_3+Y_4)+X_6Y_5)}{(X_4Y_3+X_5(Y_3+Y_4))(X_5Y_4+X_6(Y_4+Y_5))};\end{cases} \tag{26}$$

Where $\tau_1^{(3)} := \tau_1^{(3)}[\cdots, X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3\cdots]$.
Again by setting $X_i^{(1i)} := X_i$ and $X_i^{(2i)} := Y_i$ and $X_i^{(3i)} := Z_i$ and according to (2.4) we have to write down the following brackets as a composition of $\tau_i^{(3)}$s, because of algebra structure and it will be done by using Mathematica coding in appendix A.

$$\begin{cases}F_2^{(3)} = \{\tau_1^{(3)},\tau_2^{(3)}\} = -(1-\tau_1^{(3)})(1-\tau_2^{(3)})(\tau_1^{(3)}\tau_2^{(3)});\\ F_3^{(3)} = \{\tau_1^{(3)},\tau_3^{(3)}\} = (1-\tau_1^{(3)})(1-\tau_3^{(3)})(\tau_1^{(3)}\tau_2^{(3)} + \tau_2^{(3)}\tau_3^{(3)} - \tau_2^{(3)});\\ F_4^{(3)} = \{\tau_1^{(3)},\tau_4^{(3)}\} = -(1-\tau_1^{(3)})(1-\tau_4^{(3)})\\ \qquad (\tau_1^{(3)}\tau_2^{(3)} + \tau_2^{(3)}\tau_3^{(3)} + \tau_3^{(3)}\tau_4^{(3)} - \tau_1^{(3)} - \tau_2^{(3)} - \tau_3^{(3)} - \tau_4^{(3)} + 1);\\ F_5^{(3)} = \{\tau_1^{(3)},\tau_5^{(3)}\} = (1-\tau_1^{(3)})(1-\tau_5^{(3)})(\tau_2^{(3)}\tau_3^{(3)} + \tau_3^{(3)}\tau_4^{(3)} - \tau_2^{(3)}\\ \qquad -\tau_3^{(3)} - \tau_4^{(3)} + 1);\\ F_6^{(3)} = \{\tau_1^{(3)},\tau_6^{(3)}\} = -(1-\tau_1^{(3)})(1-\tau_6^{(3)})(\tau_3^{(3)}\tau_4^{(3)} - \tau_4^{(3)} - \tau_3^{(3)} + 1);\\ F_i^{(3)} = \{\tau_1^{(3)},\tau_i^{(3)}\} = 0 \qquad\qquad \text{for } |i-1|\ge 6;\end{cases} \tag{27}$$

2.3. Lattice W_4 algebra; main generator

In this case we will use the following defined Poisson bracket based on Cartan matrix

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & \text{-1} & 0 \\ \text{-1} & 2 & \text{-1} \\ 0 & \text{-1} & 2 \end{bmatrix}.$$

But for to do this according to our previous ordering and list of variables, and the same as what we din in sl_3 case, let us for simplicity set our set of variables as follows:
Set $X_i^{(1i)} := X_i$ and $X_i^{(2i)} := Y_i$ and $X_i^{(3i)} := Z_i$ and so on.

Definition . *Let's define our Poisson bracket as follows in the case of sl_3:*

$$\begin{cases} \{X_i, X_j\} := 2X_iX_j & \textit{if } i < j; \\ \{Y_i, Y_j\} := 2Y_iY_j & \textit{if } i < j; \\ \{Z_i, Z_j\} := 2Z_iZ_j & \textit{if } i < j; \\ \{X_i, X_i\} := 0; \\ \{Y_i, Y_i\} := 0; \\ \{Z_i, Z_i\} := 0; \\ \{X_i, Y_j\} := X_iY_j & \textit{if } i > j; \\ \{X_i, Y_j\} := -X_iY_j & \textit{if } i \leq j; \\ \{X_i, Z_j\} := 0; \\ \{Y_i, Z_j\} := Y_iZ_j & \textit{if } i > j; \\ \{Y_i, Z_j\} := -Y_iZ_j & \textit{if } i \leq j; \end{cases} \tag{28}$$

And instead of (1) we will have the following $q-$commutation relations for $j \in \{1, 2, 3\}$ and as always $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{cases} X_iX_j = q^2X_jX_i & \text{if } i \leq j \\ Y_iY_j = q^2Y_jY_i & \text{if } i \leq j \\ Z_iZ_j = q^2Z_jZ_i & \text{if } i \leq j \\ X_iY_j = q^{-1}Y_jX_i & \text{if } i \leq j \\ Y_iZ_j = q^{-1}Z_jY_i & \text{if } i \leq j \\ X_iZ_j = Z_jX_i \end{cases} \tag{29}$$

And by using the same approach as what we did for sl_2 and sl_3, it became clear that the equations $D_X^{(4)}$, $D_Y^{(4)}$ and $D_Z^{(4)}$ and also $H_X^{(4)}$, $H_Y^{(4)}$ and $H_Z^{(4)}$ will have the following forms:

$$\mathfrak{D}_X^{(4)} = X_1(X_1 + 2X_2 + 2X_3)\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial X_1} + X_2(X_2 + 2X_3)\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial X_2} + X_3^2\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial X_3} - Y_1(X_2 + X_3) \tag{30}$$

$$\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial Y_1} - Y_2X_3\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial Y_2};$$

$$\mathfrak{D}_Y^{(4)} = Y_1(Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3)\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial Y_1} + Y_2(Y_2 + 2Y_3)\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial Y_2} + Y_3^2\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial Y_3} - X_1(Y_1 + Y_2 + Y_3) \tag{31}$$

$$\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial X_1} - X_2(Y_2 + Y_3)\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial X_2} - X_3Y_3\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial X_3} - Z_1(Y_2 + Y_3)\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial z_1} - Z_2y_3\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial Z_2};$$

$$\mathfrak{D}_Z^{(4)} = Z_1(Z_1 + 2Z_2 + 2Z_3)\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial Z_1} + Z_2(Z_2 + 2Z_3)\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial Z_2} + Z_3^2\frac{\partial \tau_1^{(4)}}{\partial Z_3} - Y_1(Z_1 + Z_2 + Z_3) \tag{32}$$

$$\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Y_1} - Y_2(Z_2+Z_3)\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Y_2} - Y_3Z_3\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Y_3};$$

$$H_X^{(4)} = 2X_1\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial X_1} + 2X_2\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial X_2} + 2X_3\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial X_3} - Y_1\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Y_1} - Y_2\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Y_2} - Y_3\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Y_3}; \tag{33}$$

$$H_Y^{(4)} = 2Y_1\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Y_1} + 2Y_2\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Y_2} + 2Y_3\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Y_3} - X_1\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial X_1} - X_2\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial X_2} - X_3\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial X_3} - z_1\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Z_1} \tag{34}$$

$$-Z_2\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Z_2} - Z_3\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Z_3};$$

$$H_Z^{(4)} = 2Z_1\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Z_1} + 2Z_2\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Z_2} + 2Z_3\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Z_3} - Y_1\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Y_1} - Y_2\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Y_2} - Y_3\frac{\partial\tau_1^{(4)}}{\partial Y_3}; \tag{35}$$

And the functional dependent nontrivial solutions for the whole system of first order partial differential equation is as follows:

$$\tau_1^{(4)} = \frac{(\Sigma_{1\le i\le j\le m\le 2} \quad x_iy_jz_m)(\Sigma_{1\le i\le j\le m\le 2} \quad x_{i+1}y_{j+1}z_{m+1})}{x_2y_2z_2(\Sigma_{1\le i\le j\le m\le 3} \quad x_iy_jz_m)}; \tag{36}$$

And again as before, (4) goes back to 4 in the Sl_4 and 1 is a default index which later we will use it for to employ our shifting operators.
According to the number of variables, we will have 9 shifts and then after that it will be in a loop. So here in sl_4 case we have nine solutions:
$\tau_1^{(4)} := \tau_1^{(4)}[X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3]$;
$\tau_2^{(4)} := \tau_1^{(4)}[X_1 \to Y_1, Y_1 \to Z_1, Z_1 \to X_2, X_2 \to Y_2, Y_2 \to Z_2, Z_2 \to X_3, X_3 \to Y_3, Y_3 \to Z_3]$;
$\tau_3^{(4)} := \tau_2^{(4)}[Y_1 \to Z_1, Z_1 \to X_2, X_2 \to Y_2, Y_2 \to Z_2, Z_2 \to X_3, X_3 \to Y_3, Y_3 \to Z_3, Z_3 \to X_4]$;
$\tau_4^{(4)} := \tau_3^{(4)}[Z_1 \to X_2, X_2 \to Y_2, Y_2 \to Z_2, Z_2 \to X_3, X_3 \to Y_3, Y_3 \to Z_3, Z_3 \to X_4, X_4 \to Y_4]$;
$\tau_5^{(4)} := \tau_4^{(4)}[X_2 \to Y_2, Y_2 \to Z_2, Z_2 \to X_3, X_3 \to Y_3, Y_3 \to Z_3, Z_3 \to X_4, X_4 \to Y_4, Y_4 \to Z_4]$;
$\tau_6^{(4)} := \tau_5^{(4)}[Y_2 \to Z_2, Z_2 \to X_3, X_3 \to Y_3, Y_3 \to Z_3, Z_3 \to X_4, X_4 \to Y_4, Y_4 \to Z_4, Z_4 \to X_5]$;
$\tau_7^{(4)} := \tau_6^{(4)}[Z_2 \to X_3, X_3 \to Y_3, Y_3 \to Z_3, Z_3 \to X_4, X_4 \to Y_4, Y_4 \to Z_4, Z_4 \to X_5, X_5 \to Y_5]$;
$\tau_8^{(4)} := \tau_7^{(4)}[X_3 \to Y_3, Y_3 \to Z_3, Z_3 \to X_4, X_4 \to Y_4, Y_4 \to Z_4, Z_4 \to X_5, X_5 \to Y_5, Y_5 \to Z_5]$;
$\tau_9^{(4)} := \tau_8^{(4)}[Y_3 \to Z_3, Z_3 \to X_4, X_4 \to Y_4, Y_4 \to Z_4, Z_4 \to X_5, X_5 \to Y_5, Y_5 \to Z_5, Z_5 \to X_6]$;
which belong to the fraction ring of polynomial functions.

2.4. Lattice W_5 algebra; main generator

In this case we will use the following defined Poisson bracket based on Cartan matrix

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & \text{-1} & 0 & 0 \\ \text{-1} & 2 & \text{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \text{-1} & 2 \end{bmatrix}.$$

But for to do this according to our previous ordering and list of variables, and the same as what we din in sl_4 case, let us for simplicity set our set of variables as follows:
Set $X_i^{(1i)} := X_i$ and $X_i^{(2i)} := Y_i$ and $X_i^{(3i)} := Z_i$ and $X_i^{(4i)} := K_i$ and so on.

Definition . *Let's define our Poisson bracket as follows in the case of sl_4:*

$$\begin{cases} \{X_i, X_j\} := 2X_iX_j & \textit{if } i < j; \\ \{Y_i, Y_j\} := 2Y_iY_j & \textit{if } i < j; \\ \{Z_i, Z_j\} := 2Z_iZ_j & \textit{if } i < j; \\ \{K_i, K_j\} := 2K_iK_j & \textit{if } i < j; \\ \{X_i, X_i\} := 0; \\ \{Y_i, Y_i\} := 0; \\ \{Z_i, Z_i\} := 0; \\ \{K_i, K_i\} := 0; \\ \{X_i, Y_j\} := X_iY_j & \textit{if } i > j; \\ \{X_i, Y_j\} := -X_iY_j & \textit{if } i \leq j; \\ \{X_i, Z_j\} := 0; \\ \{X_i, K_j\} := 0; \\ \{Y_i, Z_j\} := Y_iZ_j & \textit{if } i > j; \\ \{Y_i, Z_j\} := -Y_iZ_j & \textit{if } i \leq j; \\ \{Y_i, K_j\} := Y_iK_j & \textit{if } i > j; \\ \{Y_i, K_j\} := -Y_iK_j & \textit{if } i \leq j; \end{cases} \tag{37}$$

And instead of (2.1) we will have the following $q-$commutation relations for $j \in \{1, 2, 3\}$ and as always $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{cases} x_ix_j = q^2x_jx_i & \text{if } i \leq j \\ y_iy_j = q^2y_jy_i & \text{if } i \leq j \\ z_iz_j = q^2z_jz_i & \text{if } i \leq j \\ k_ik_j = q^2k_jk_i & \text{if } i \leq j \\ x_iy_j = q^{-1}y_jx_i & \text{if } i \leq j \\ y_iz_j = q^{-1}z_jy_i & \text{if } i \leq j \\ z_ik_j = q^{-1}k_jz_i & \text{if } i \leq j \\ x_iz_j = z_jx_i \\ y_ik_j = k_jy_i \\ x_ik_j = k_jx_i \end{cases}$$

And by using the same approach as what we did for sl_2 and sl_3 and sl_4 , it became clear that the equations $D_X^{(5)}$, $D_Y^{(5)}$, $D_Z^{(5)}$ and $D_K^{(5)}$ and also $H_X^{(5)}$, $H_Y^{(5)}$, $H_Z^{(5)}$ and $H_K^{(5)}$ will have the following forms:

$$\mathfrak{D}_X^{(5)} = X_1(X_1 + 2X_2 + 2X_3)\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial X_1} + X_2(X_2 + 2X_3)\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial X_2} + X_3^2\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial X_3} - Y_1(X_2 + X_3) \tag{38}$$

$$\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial Y_1} - Y_2X_3\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial Y_2};$$

$$\mathfrak{D}_Y^{(5)} = Y_1(Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3)\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial Y_1} + Y_2(Y_2 + 2Y_3)\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial Y_2} + Y_3^2\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial Y_3} - X_1(Y_1 + Y_2 + Y_3) \tag{39}$$

$$\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial X_1} - X_2(Y_2 + Y_3)\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial X_2} - X_3Y_3\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial X_3} - Z_1(Y_2 + Y_3)\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial z_1} - Z_2y_3\frac{\partial \tau_1^{(5)}}{\partial Z_2};$$

$$\mathfrak{D}_Z^{(5)} = Z_1(Z_1+2Z_2+2Z_3)\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_1} + Z_2(Z_2+2Z_3)\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_2} + Z_3^2\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_3} - Y_1(Z_1+Z_2+Z_3) \tag{40}$$

$$\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Y_1} - Y_2(Z_2+Z_3)\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Y_2} - Y_3Z_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Y_3} - K_1(Z_2+Z_3)\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial k_1} - K_2Z_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial K_2};$$

$$\mathfrak{D}_K^{(5)} = K_1(K_1+2K_2+2K_3)\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial K_1} + K_2(K_2+2K_3)\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial K_2} + K_3^2\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_3} - Z_1(K_1+K_2 \tag{41}$$

$$+K_3)\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_1} - Z_2(K_2+K_3)\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial z_2} - Z_3X_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_3};$$

$$H_X^{(5)} = 2X_1\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial X_1} + 2X_2\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial X_2} + 2X_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial X_3} - Y_1\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Y_1} - Y_2\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Y_2} - Y_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Y_3}; \tag{42}$$

$$H_Y^{(5)} = 2Y_1\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Y_1} + 2Y_2\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Y_2} + 2Y_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Y_3} - X_1\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial X_1} - X_2\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial X_2} - X_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial X_3} - Z_1\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_1} \tag{43}$$

$$-Z_2\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_2} - Z_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_3};$$

$$H_Z^{(5)} = 2Z_1\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_1} + 2Z_2\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_2} + 2Z_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial z_3} - Y_1\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Y_1} - y_2\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Y_2} - Y_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Y_3} - K_1\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial K_1} \tag{44}$$

$$-K_2\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial K_2} - K_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial K_3};$$

$$H_K^{(5)} = 2K_1\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial K_1} + 2K_2\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial K_2} + 2K_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial K_3} - Z_1\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_1} - Z_2\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_2} - Z_3\frac{\partial\tau_1^{(5)}}{\partial Z_3}; \tag{45}$$

And the functional dependent nontrivial solutions for the whole system of first order partial differential equation is as follows:

$$\tau_1^{(5)} = \frac{(\Sigma_{1\le i\le j\le m\le l\le 2} \quad x_iy_jz_mk_l)(\Sigma_{1\le i\le j\le m\le l\le 2} \quad x_{i+1}y_{j+1}z_{m+1}k_{l+1})}{x_2y_2z_2k_2(\Sigma_{1\le i\le j\le m\le l\le 3} \quad x_iy_jz_mk_l)}; \tag{46}$$

And again as before, (5) goes back to 5 in the Sl_5 and 1 is a default index which later we will use it for to employ our shifting operators.
According to the number of variables, we will have 12 shifts and then after that it will be in a loop. So here in sl_5 case we have twelve solutions just as what we did in sl_4, and here skip to write them down.

2.5. Lattice W_n algebra; main generator

Here for sl_n, we skip to write down all steps which we have done in previous sections and just will write down our main generator of the lattice W_n algebra.
The functional dependent nontrivial solution for the whole system of first order partial differential equations will be as what comes in follow:

$$\tau_1^{(n)} = \tag{47}$$

$$\frac{(\Sigma_{1\le i_1\le i_2\cdots\le i_{n-1}\le 2} \quad x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(2)}\cdots x_{i_{n-1}}^{(n-1)})(\Sigma_{1\le i_1\le i_2\cdots\le i_{n-1}\le 2} \quad x_{i_1+1}^{(1)}x_{i_2+1}^{(2)}\cdots x_{i_{n-1}+1}^{(n-1)})}{x_2^{(1)}\cdots x_2^{(n-1)}(\Sigma_{1\le i_1\le i_2\cdots\le i_{n-1}\le 3} \quad x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(2)}\cdots x_{i_{n-1}}^{(n-1)})};$$

We should notice that $x_{i_j}^{(j)}$s are different of each other for any $j\in\{1,\cdots n-1\}$

Acknowledgement

The research in this article would have taken far longer to complete without the encouragement from many others. It is a delight to acknowledge those who have supported me over the last three years during the preparation of this paper.
I would like to thank my supervisors, prof. Alexey Kanel-Belov and prof. Yaroslav Pugai, for his guidance and relaxed, thoughtful insight.
I thank all of Institute for information transmission problems (Kharkevich institute)'s staff for their hospitality over the last one year.
I am particularly thankful for the help and advice of Prof. Brendan Godfrey, without whom the learning Mathematica would have been very much steeper and unimaginable. I thank prof. Andrey Raygorodsky for everything. And finally I would like to thank Professor Boris Feigin for to suggesting me this interesting problem and enlightening discussions during the preparation for my first paper which was my first step in this subject!

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Antonov, A., Belov, A.A. and Chaltikian, K., 1997. Lattice conformal theories and their integrable perturbations.// Journal of Geometry and Physics, 22(4), pp.298-318.

2. Belov, A.A. and Chaltikian, K.D., 1993. Lattice analogues of W-algebras and classical integrable equations.// Physics Letters B, 309(3-4), pp.268-274.

3. Berenstein, A., 1996. Group-like elements in quantum groups, and Feigin's conjecture.// arXiv preprint q-alg/9605016.

4. Caressa, P., 2000. The algebra of Poisson brackets.// In Young Algebra Seminar, Roma Tor Vergata.

5. Feigin, B.L. //talk at RIMS 1992.

6. Faddeev, L. and Volkov, A.Y., 1993. Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice. //Physics Letters B, 315(3-4), pp.311-318.

7. Gainutdinov, A.M., Saleur, H. and Tipunin, I.Y., 2014. Lattice W-algebras and logarithmic CFTs. //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 47(49), p.495401.

8. Goursat, E., 1916. A Course in Mathematical Analysis: pt. 2. Differential equations.//[c1917 (Vol. 2). Dover Publications.

9. Hikami, K., 1997. Lattice WN algebra and its quantization.// Nuclear Physics B, 505(3), pp.749-770.

10. Hikami, K. and Inoue, R., 1997. Classical lattice W algebras and integrable systems.// Journal of Physics A: Mathematical and General, 30(19), p.6911.

11. Hong, J. and Kang, S.J., 2002. Introduction to quantum groups and crystal bases (Vol. 42).// American Mathematical Soc..

12. Kassel, C., 2012. Quantum groups (Vol. 155).// Springer Science & Business Media.

13. Majid, S., 2002. A quantum groups primer (Vol. 292). //Cambridge University Press.

14. Pugay, Y.P., 1994. LatticeW algebras and quantum groups.// Theoretical and Mathematical Physics, 100(1), pp.900-911.

15. Razavinia, F., 2016. Local coordinate systems on quantum flag manifolds.// arXiv preprint arXiv:1610.09443.

REFERENCES

1. Antonov, A., Belov, A.A. and Chaltikian, K., 1997. ”Lattice conformal theories and their integrable perturbations.” *Journal of Geometry and Physics*, 22(4), pp.298-318.

2. Belov, A.A. and Chaltikian, K.D., 1993. ”Lattice analogues of W-algebras and classical integrable equations.” *Physics Letters* B, 309(3-4), pp.268-274.

3. Berenstein, A., 1996. ”Group-like elements in quantum groups, and Feigin’s conjecture.” arXiv preprint q-alg/9605016.

4. Caressa, P., 2000. ”The algebra of Poisson brackets.” *In Young Algebra Seminar*, Roma Tor Vergata.

5. Feigin, B.L. talk at RIMS 1992.

6. Faddeev, L. and Volkov, A.Y., 1993. ”Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice”. Physics Letters B, 315(3-4), pp.311-318.

7. Gainutdinov, A.M., Saleur, H. and Tipunin, I.Y., 2014. ”Lattice W-algebras and logarithmic CFTs”. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 47(49), p.495401.

8. Goursat, E., 1916. ”A Course in Mathematical Analysis: pt. 2. Differential equations.” [c1917 (Vol. 2). Dover Publications.

9. Hikami, K., 1997. ”Lattice WN algebra and its quantization.” *Nuclear Physics* B, 505(3), pp.749-770.

10. Hikami, K. and Inoue, R., 1997. ”Classical lattice W algebras and integrable systems.” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 30(19), p.6911.

11. Hong, J. and Kang, S.J., 2002. ”Introduction to quantum groups and crystal bases” (Vol. 42). *American Mathematical Soc.*.

12. Kassel, C., 2012. ”Quantum groups” (Vol. 155). Springer Science & Business Media.

13. Majid, S., 2002. ”A quantum groups primer” (Vol. 292). Cambridge University Press.

14. Pugay, Y.P., 1994. ”LatticeW algebras and quantum groups.” *Theoretical and Mathematical Physics*, 100(1), pp.900-911.

15. Razavinia, F., 2016. ”Local coordinate systems on quantum flag manifolds.” arXiv preprint arXiv:1610.09443.

Получено 11.07.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.548.2 + 512.579 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-292-303

Умеренно частичные алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями[1]

А. В. Решетников

Артём Владимирович Решетников — Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»; Центр ФПМ Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: a_reshetnikov@hush.com

Аннотация

Рассматриваются частичные алгебры, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией. Вопрос о характеризации таких частичных алгебр может быть сведён к вопросу о характеризации частичных n-арных группоидов с тем же условием. В работе используется понятие умеренно частичной операции. Приводится характеристика умеренно частичных операций, сохраняющих любое отношение эквивалентности на заданном множестве.

Пусть A – непустое множество, f – умеренно частичная операция, заданная на A (т.е. если зафиксировать все аргументы частичной операции f, кроме какого-то одного, то получится частичная операция φ, у которой область определения $\operatorname{dom}\varphi$ удовлетворяет условию $|\operatorname{dom}\varphi| \geqslant 3$), и любое отношение эквивалентности на множестве A стабильно относительно f (иначе говоря, решётка конгруэнций частичной алгебры $(A, \{f\})$ совпадает с решёткой отношений эквивалентности на множестве A). В работе доказано, что в таком случае f можно продолжить до некоторой полной операции g, также заданной на множестве A, которая тоже сохраняет любое отношение эквивалентности на A. Более того, если f – конечноарная частичная операция, то либо f – частичная константа (т.е. $f(x) = f(y)$ для всех $x, y \in \operatorname{dom} f$), либо f – частичная проекция (существует индекс i такой, что для любого кортежа $x = (x_1, ..., x_n) \in \operatorname{dom} f$ выполняется условие $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = x_i$).

Ключевые слова: умеренно частичная алгебра, частичный бесконечноарный группоид, решётка конгруэнций, решётка отношений эквивалентности.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
А. В. Решетников. Умеренно частичные алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 292–303.

[1]Работа выполнена при поддержке Московского Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.548.2 + 512.579 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-292-303

Moderately partial algebras whose equivalence relations are congruences

A. V. Reshetnikov

Artem Vladimirovich Reshetnikov — National Research University of Electronic Technology; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics of M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: a_reshetnikov@hush.com

Abstract

Consider partial algebras whose equivalence relations are congruences. The problem of description of such partial algebras can be reduced to the problem of description of partial n-ary groupoids with the similar condition. In this paper a concept of moderately partial operation is used. A description is given for the moderately partial operations preserving any equivalence relation on a fixed set.

Let A be a non-empty set, f be a moderately partial operation, defined on A (i.e. if we fix all of the arguments of f, except one of them, we obtain a new partial operation φ such that its domain $\operatorname{dom}\varphi$ satisfies the condition $|\operatorname{dom}\varphi| \geqslant 3$). Let any equivalence relation on the set A be stable relative to f (in the other words, the congruence lattice of the partial algebra $(A, \{f\})$ coinsides the equivalence relation lattice on the set A). In this paper we prove that in this case the partial operation f can be extended to a full operation g, also defined on the set A, such that g preserves any equivalence relation on A too. Moreover, if the arity of the partial operation f is finite, then either f is a partial constant (i.e. $f(x) = f(y)$ for all $x, y \in \operatorname{dom} f$), or f is a partial projection (there is an index i such that all of the tuples $x = (x_1, ..., x_n) \in \operatorname{dom} f$ satisfy the condition $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = x_i$).

Keywords: moderately partial algebra, partial infinite-ary groupoid, congruence lattice, equivalence relation lattice.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
A. V. Reshetnikov, 2021, "Moderately partial algebras whose equivalence relations are congruences", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 292–303.

1. Введение

В работе [1] были охарактеризованы операции, заданные на некотором множестве A, сохраняющие все отношения эквивалентности на A: по сути это означает, что для произвольной универсальной алгебры (A, Ω) авторы работы [1] приводят необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять каждая операция $f \in \Omega$, чтобы решётка отношений эквивалентности на множестве A совпадала с решёткой конгруэнций алгебры (A, Ω). Для частичных алгебр аналогичное условие неизвестно, однако в статье [2] автором был опубликован ряд вспомогательных результатов, позволивших охарактеризовать некоторый класс частичных алгебр, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией [2, теорема

12]. В настоящей работе мы усиливаем эту характеристику и получаем критерий, применимый к весьма широкому классу частичных алгебр, названных нами умеренно частичными алгебрами.

Существенно, что в сигнатуру рассматриваемых частичных алгебр мы допускаем включение бесконечноарных частичных операций.

2. Определения и обозначения

Будем придерживаться следующей терминологии. Произвольное отображение $f : A' \to B$, где $A' \subseteq A$ – некоторое подмножество, назовём *частичным отображением, заданным на множестве* A; при этом множество A' будем называть *областью определения* частичного отображения f и использовать для него следующее обозначение: $A' = \operatorname{dom} f$. В тех случаях, когда $A' \subseteq A^n$ для некоторого ординала n, отображение $f : A' \to A$ будем называть *частичной операцией, заданной на множестве* A, а точнее – *частичной* n*-арной операцией*; если при этом справедливо $\operatorname{dom} f = A^n$, то будем говорить, что f – *полная* операция, или просто *операция*. Если частичное отображение f удовлетворяет условию $f(x) = f(y)$ для всех $x, y \in \operatorname{dom} f$, то будем говорить, что f – *константное* частичное отображение.

Произвольное множество A будем называть *частичной алгеброй с набором частичных операций* Ω, если каждый элемент $f \in \Omega$ является частичной операцией, заданной на множестве A; будем обозначать такую частичную алгебру через (A, Ω). В случае $\Omega = \{f\}$, где f – частичная n-арная операция на множестве A, будем называть частичную алгебру (A, Ω) *частичным* n*-арным группоидом* и использовать для него обозначение (A, f). Если все частичные операции частичной алгебры A являются полными, то будем говорить, что A – *полная* алгебра, или просто *алгебра*.

Пусть f – частичная n-арная операция, заданная на некотором множестве A. Рассмотрим произвольное отношение эквивалентности $\rho \subseteq A^2$. Введём следующее обозначение (здесь I – произвольное множество; $\varphi, \psi : I \to A$ – произвольные отображения):

$$\varphi\rho\psi \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } i \in I : \quad (\varphi(i), \psi(i)) \in \rho.$$

Упорядоченные наборы элементов множества A будем рассматривать как отображения $I \to A$, где $I = \{i \mid i < n\}$ – множество ординалов. Если для всех упорядоченных наборов $x, y \in A^n \cap \operatorname{dom} f$ выполняется условие

$$x\rho y \quad \Rightarrow \quad (f(x), f(y)) \in \rho,$$

то мы говорим, что отношение эквивалентности ρ *стабильно* относительно частичной операции f.

Конгруэнцией частичной алгебры (A, Ω) называется отношение эквивалентности $\rho \subseteq A^2$, стабильное относительно всех частичных операций $f \in \Omega$. Известно, что конгруэнции любой частичной алгебры A образуют алгебраическую решётку [3, §16, теорема 1], а любая алгебраическая решётка, в свою очередь, изоморфна решётке конгруэнций некоторой *полной* алгебры [3, §18, теорема 3].

Для произвольной частичной алгебры (A, Ω) решётку отношений эквивалентности на множестве A и решётку конгруэнций частичной алгебры (A, Ω) будем обозначать, соответственно, через $\operatorname{Eq} A$ и $\operatorname{Con}(A, \Omega)$. Если A – полная алгебра, то решётка её конгруэнций является подрешёткой решётки $\operatorname{Eq} A$. В случае частичной алгебры аналогичное утверждение неверно, как показывает следующий пример.

Пример 1. *Рассмотрим частичную алгебру* (A, f) *с множеством элементов* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *и частичным отображением*

$$f : \{1, 2\} \to A : \quad 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 3.$$

Введём следующие обозначения:

$$\Delta = \{(a,a) | a \in A\} \text{ (отношение равенства на множестве } A);$$

$$\nabla = A \times A \text{ (универсальное отношение)};$$

для произвольных различных элементов $a, b \in A$*:*

$$\rho_{ab} = \{(a,b), (b,a)\} \cup \Delta \text{ (атом решётки } \operatorname{Eq} A).$$

Легко видеть, что отношения ρ_{14} *и* ρ_{24} *являются конгруэнциями частичной алгебры* (A, f)*. Их точной верхней гранью в решётке отношений эквивалентности на* A *является отношение эквивалентности*

$$\rho = \{(1,2),\ (2,1),\ (1,4),\ (4,1),\ (2,4),\ (4,2)\} \cup \Delta.$$

Однако, ρ *– не конгруэнция в* (A, f)*. Таким образом,*

$$\rho_{14} \vee \rho_{24} = \rho \quad \text{в решётке } \operatorname{Eq} A;$$

$$\rho_{14} \vee \rho_{24} = \nabla \neq \rho \quad \text{в решётке } \operatorname{Con} A.$$

Следовательно, $\operatorname{Con} A$ *не является подрешёткой* $\operatorname{Eq} A$*.*

3. Теорема Галвина – Хорна

Напомним определение γ-полного ультрафильтра[2].

Определение 1. *Пусть* X *– произвольное множество,* F *– семейство подмножеств множества* X*, удовлетворяющее четырём*[3] *условиям:*

(i) $\emptyset \notin F$*;*

(ii) для некоторого бесконечного кардинала γ *справедливо утверждение:*

$$\text{для любого } F' \subseteq F: \quad 0 < |F'| < \gamma \quad \Rightarrow \quad \cap F' \in F;$$

(iii) для любых подмножеств $A, B \subseteq X$*,*

$$\text{если } A \subseteq B \text{ и } A \in F, \text{ то } B \in F;$$

(iv) каким бы ни было подмножество $A \subseteq X$*, имеет место альтернатива:*

$$A \in F \quad \text{или} \quad (X \backslash A) \in F.$$

Тогда F *называется* γ*-полным ультрафильтром, заданным на множестве* X*.*

Легко видеть, что $\aleph_0$-полный ультрафильтр – это то же самое, что обычный ультрафильтр. Имеет место следующий критерий:

Лемма 1. *Пусть* X *– произвольное множество,* γ *– произвольный бесконечный кардинал. Множество* F*, состоящее из подмножеств множества* X*, является* γ*-полным ультрафильтром тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:*

[2]Англ. *γ-complete ultrafilter* или *γ-complete prime filter*.

[3]На самом деле, условие (iii) является следствием из (i), (ii) и (iv).

каким бы ни было представление множества X в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств, если число этих подмножеств строго меньше γ, то ровно одно из них является элементом множества F.

Доказательство. *Необходимость* условий (i) и (ii) очевидна. *Достаточность* этих условий напрямую следует из леммы, доказанной в работе [1]. □

Теорема, которую мы сейчас приведём, является прямым следствием основной теоремы работы [1]. В её формулировке используется следующее обозначение: пусть A – произвольное множество, $a \in A$ – произвольный элемент; тогда положим

$$\sigma_a = \quad \{(a,a)\} \quad \cup \quad (A \setminus \{a\})^2. \tag{1}$$

Понятно, что σ_a – отношение эквивалентности, имеющее ровно два класса: $\{a\}$ и $A \setminus \{a\}$.

Теорема 1 ([1]). *Пусть (A, Ω) – полная алгебра. Следующие условия равносильны:*

1) *любое отношение эквивалентности на множестве A является конгруэнцией алгебры (A, Ω);*

2) *для любого элемента $a \in A$ отношение эквивалентности σ_a (см. формулу (1)) является конгруэнцией алгебры (A, Ω);*

3) *если $|A| \neq 2$, то для каждой операции $f \in \Omega$ (обозначим её арность через n) имеет место альтернатива: f – константное отображение или для некоторого бесконечного кардинала $\gamma > |A|$ на множестве ординалов $I = \{i \mid i < n\}$ существует γ-полный ультрафильтр F, удовлетворяющий условию*

$$\text{для всех } x \in A^n, a \in A: \quad f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid x(i) = a\} \in F,$$

(здесь x рассматривается как отображение $I \to A$).

4. Характеристика умеренно частичных алгебр (A, Ω) с условием $\mathrm{Con}\,(A, \Omega) = \mathrm{Eq}\,A$

Рассмотрим далее вопрос о переносе утверждения теоремы 1 на частичные алгебры. Очевидно, что *отношение эквивалентности ρ является конгруэнцией частичной алгебры (A, Ω) тогда и только тогда, когда для любой частичной операции $f \in \Omega$ отношение ρ является конгруэнцией частичного n-арного группоида (A,f)*. Поэтому для изучения частичных алгебр A, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией, достаточно рассмотреть случай, когда A – частичный n-арный группоид.

Возьмём какую-либо частичную n-арную операцию f, заданную на множестве A, и зафиксируем значения всех её аргументов, кроме какого-то одного. Тогда мы получим унарную частичную операцию φ, которую называют *элементарной трансляцией*[4] частичной операции f. Другими словами, φ – элементарная трансляция для f, если существуют такие ординал $k < n$ и отображение $p : I \setminus \{k\} \to A : i \mapsto p_i$, где $I = \{i \mid i < n\}$, что для любого элемента $t \in A$ и любого кортежа

$$x = (\underbrace{p_0, p_1, ..., p_i, ...,}_{i<k} t, \underbrace{p_{k+1}, p_{k+2}, ..., p_j, ...}_{k<j<n})$$

выполняется условие: $x \in \mathrm{dom}\, f \Rightarrow \varphi(t) = f(x)$.

[4]Для полных операций понятие элементарной трансляции введено, например, в монографии [4]. В некоторых работах вместо «элементарная трансляция» используется термин «редукт».

Определение 2. *Частичную операцию f назовём умеренно частичной операцией, если для любой её элементарной трансляции φ выполняется условие* $|\mathrm{dom}\,\varphi| \geqslant 3$.

Перейдём к основному результату настоящей работы – приведём утверждение, усиливающее теорему 1 в случае умеренно частичной алгебры A. Говорят, что частичная n-арная операция f' *продолжается* до частичной n-арной операции f, если $\mathrm{dom}, f' \subseteq \mathrm{dom}, f$ и $f'(x) = f(x)$ для всех $x \in \mathrm{dom}, f'$. Если Ω' – множество частичных операций, заданных на множестве A, каждая из которых продолжается до какой-либо частичной операции из множества Ω, то будем говорить, что частичная алгебра (A, Ω') *продолжается* до частичной алгебры (A, Ω).

Теорема 2. *Пусть $A \neq \emptyset$. Тогда класс умеренно частичных алгебр, заданных на множестве A, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией, совпадает с классом умеренно частичных алгебр (A, Ω'), каждая из которых продолжается до некоторой полной алгебры (A, Ω) такой, что каждое отношение эквивалентности на A является конгруэнцией алгебры (A, Ω). В частности, если $\Omega = \{f\}$, то*

$$\left.\begin{array}{r} f - \textit{умеренно частичная операция} \\ \mathrm{Con}\,(A, f) = \mathrm{Eq}\,A \\ A \neq \emptyset \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \exists g: \quad \left\{\begin{array}{l} g - \textit{полная операция} \\ f \textit{ продолжается до } g \\ \mathrm{Con}\,(A, g) = \mathrm{Eq}\,A \end{array}\right. \tag{2}$$

Доказательство существенно опирается на результаты статьи [2] и использует введённое в ней понятие *выделенного множества*[5] . Как было отмечено выше, достаточно рассмотреть случай, когда A – частичный n-арный группоид. Ясно, что если частичный n-арный группоид (A, f) (не обязательно умеренно частичный) продолжается до некоторого частичного n-арного группоида (A, g) (не обязательно полного), удовлетворяющего условию $\mathrm{Con}\,(A, g) = \mathrm{Eq}\,A$, то условие $\mathrm{Con}\,(A, f) = \mathrm{Eq}\,A$ оказывается выполненным. Поэтому данная теорема будет доказана полностью, как только будет установлена истинность импликации (2).

Покажем сначала, что условие (2) выполняется в случае, когда f – константная умеренно частичная операция. Возможны два подслучая.

1-й подслучай: $\mathrm{dom}\,f \neq \emptyset$. Тогда среди элементов множества A найдётся, по определению, такой элемент c, что равенство $f(x) = c$ имеет место для всех $x \in \mathrm{dom}\,f$. В таком случае в качестве g можно взять константную операцию $g(x) \equiv c$.

2-й подслучай: $\mathrm{dom}\,f = \emptyset$. По условию теоремы $A \neq \emptyset$. Утверждение (2) будет верным, если в качестве g взять любую полную операцию (арность которой совпадает[6] с арностью операции f), удовлетворяющую условию $\mathrm{Con}\,(A, g) = \mathrm{Eq}\,A$. Например, можно произвольным образом выбрать элемент $c \in A$ и положить $g(x) = c$ для всех $x \in A$.

Далее будем считать, что f не является константной частичной операцией. Тогда её арность $n > 0$. Положим $I = \{I \mid i < n\}$ и обозначим через F семейство всех *выделенных* подмножеств множества I (в смысле определения выделенного подмножества, принятого в работе [2]). Ввиду предложения 9 работы [2] достаточно показать, что F является γ-полным ультрафильтром, заданным на множестве I, для *наименьшего* бесконечного кардинала γ, удовлетворяющего условию $\gamma > |A|$. Для этого воспользуемся критерием, сформулированным в лемме 1. Рассмотрим какое-либо представление

$$I = \bigcup_{\alpha} K_\alpha \tag{3}$$

множества I в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств K_α и покажем, что если их количество не превышает $|A|$, то ровно для одного значения α множество K_α является выделенным подмножеством (т.е. принадлежит семейству F).

[5]Точное определение данного понятия приведено в следующем разделе.

[6]Нетрудно заметить, что в данном случае арность частичной операции f заведомо равна 0, так как по условию f – умеренно частичная операция.

Так как для любых выделенных подмножеств K_α и K_β выполняется условие $K_\alpha \cap K_\beta \neq \emptyset$ [2, предложение 10], то доказательство теоремы будет полностью завершено, как только мы покажем, что *хотя бы для одного* значения α множество K_α из правой части равенства (3) является выделенным подмножеством (при условии, что общеее количество подмножеств K_α в формуле (3) не превышает $|A|$).

Поскольку пустое множество не выделено ([2, предложение 6]; напомним, что мы рассматриваем случай, когда f не является константной частичной операцией), то можно считать, что количество подмножеств K_α в точности равно мощности $|A|$ и значениями индекса α являются элементы множества A:

$$I = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha; \quad \alpha \neq \beta \Rightarrow K_\alpha \cap K_\beta = \emptyset. \tag{4}$$

Проведём доказательство от противного. Предположим, что ни для какого значения α подмножество K_α из разбиения (4) не является выделенным. Так как $I \neq \emptyset$, то $K_a \neq \emptyset$ хотя бы для одного элемента $a \in A$. Так как K_a не выделено, то из предложения 11 работы [2] следует, что $I \setminus K_a$ – выделенное подмножество. Следовательно, ввиду [2, предложение 6], $I \setminus K_a \neq \emptyset$, откуда $K_a \neq I$. Поэтому найдётся ещё один элемент $b \in A$, для которого $K_b \neq \emptyset$.

Итак, $a \neq b$, $K_a \neq \emptyset$, $K_b \neq \emptyset$. Зафиксируем какие-либо ординалы $i \in K_a$, $j \in K_b$. Для каждого $t \in A$ построим следующим образом кортеж $x_t \in A^n$:

$$x_t\,(i) = t; \quad x_t\,(k) = a \quad \text{при } k \in K_a \setminus \{i\}\,;$$

$$x_t\,(k) = \xi \quad \text{при } k \in K_\xi\,, \quad \xi \in A \setminus \{a\}\,.$$

Поскольку f – умеренно частичная операция, то существует хотя бы одно значение $t \in A \setminus \{a, b\}$, при котором $x_t \in \operatorname{dom} f$. Введём обозначение:

$$c = f(x_t).$$

Далее рассмотрим два случая.

1-й случай: $c \notin \{a, b\}$. Для каждого $u \in A$ определим кортеж $y_u \in A^n$ равенствами

$$y_u\,(k) = x_t\,(k) \quad \text{при } k \in K_a \cup K_c;$$

$$y_u\,(j) = u; \quad y_u\,(k) = x_t\,(k) \quad \text{при } k \in K_b \setminus \{j\}\,;$$

$$y_u\,(k) = a \quad \text{при } k \in K_\xi\,, \quad \xi \in A \setminus \{a, b, c\}\,.$$

По определению умеренно частичной операции, хотя бы для одного значения $u \in A \setminus \{c\}$ справедливо условие $y_u \in \operatorname{dom} f$. Но тогда $(x_t(k), y_u(k)) \in \sigma_c$ при всех $k \in I$. Так как $\sigma_c \in \operatorname{Con} A$, то $(f(x_t), f(y_u)) \in \sigma_c$, откуда

$$f(y_u) = c. \tag{5}$$

С другой стороны, по нашему предположению, ни одно из множеств K_a, K_b и K_c не выделено. Поэтому, согласно предложению 11 работы [2], $I \setminus K_a$, $I \setminus K_b$ и $I \setminus K_c$ – выделенные подмножества множества I. Выше мы отмечали тот факт, что семейство F, состоящее из всех выделенных подмножеств, является ультрафильтром на I. Следовательно (по определению ультрафильтра), $(I \setminus K_a) \cap (I \setminus K_b) \cap (I \setminus K_c) \in F$, то есть $I \setminus (K_a \cup K_b \cup K_c)$ – выделенное подмножество. Оно не пусто [2, предложение 6], поэтому из предложения 7 работы [2] (устанавливающего важнейшее свойство выделенных подмножеств) и формул, определяющих компоненты кортежа y_u, следует:

$$f(y_u) = a. \tag{6}$$

Из (5) и (6) вытекает равенство $a = c$, которое противоречит предположению $c \notin \{a, b\}$.

2-й случай: $f(x_t) \in \{a,b\}$. Для всех $v, w \in A$ определим следующими равенствами кортежи $g_v, h_w \in A^n$:

$$g_v(i) = v; \quad h_w(i) = t; \quad g_v(k) = h_w(k) = x_t(k) \quad \text{при } k \in K_a \setminus \{i\};$$

$$g_v(j) = b; \quad h_w(j) = w; \quad g_v(k) = h_w(k) = x_t(k) \quad \text{при } k \in K_b \setminus \{j\};$$

$$g_v(k) = a; \quad h_w(k) = b \quad \text{при } k \in K_\xi, \quad \xi \in A \setminus \{a,b\}.$$

Используя определение умеренно частичной операции, выберем элементы v и w таким образом, чтобы оказались выполненными условия

$$v \neq b; \quad w \neq a; \quad g_v, h_w \in \operatorname{dom} f.$$

Путём рассуждений, аналогичных тем, которые были проведены в 1-ом случае, мы приходим к выводу, что множество $I \setminus (K_a \cup K_b)$ является выделенным, и имеют место равенства

$$f(g_v) = a; \quad f(h_w) = b. \tag{7}$$

Нетрудно заметить, что

$$(x_t(k), g_v(k)) \in \sigma_b; \quad (x_t(k), h_w(k)) \in \sigma_a \quad \text{при всех } k \in I.$$

Тогда из условия $\sigma_a, \sigma_b \in \operatorname{Con} A$ следует:

$$(f(x_t), f(g_v)) \in \sigma_b; \quad (f(x_t), f(h_w)) \in \sigma_a.$$

То есть (см. (7)):

$$(f(x_t), a) \in \sigma_b; \quad (f(x_t), b) \in \sigma_a.$$

Но полученные соотношения не могут быть выполнены ни в случае $f(x_t) = a$, ни в случае $f(x_t) = b$, поскольку $a \neq b$.

$\square$

Частичную n-арную операцию f, удовлетворяющую условию

$$f\underbrace{(x_0, x_1, ..., x_i, ...)}_{i<n} = x_k$$

для некоторого ординала $k < n$, назовём *частичной проекцией.*

Следствие 1 (из теоремы 2). *Пусть (A, Ω) – умеренно частичная алгебра. Если каждая частичная операция $f \in \Omega$ имеет конечную арность, то следующие условия равносильны:*

1) *любое отношение эквивалентности на множестве A является конгруэнцией частичной алгебры (A, Ω);*

2) *каждая частичная операция $f \in \Omega$ является константной частичной операцией или частичной проекцией.*

5. О выделенных подмножествах множества индексов, которыми индексируются аргументы частичной операции f, заданной на множестве A и удовлетворяющей условию $\mathrm{Con}\,(A,f)=\mathrm{Eq}\,A$

Теореме 2 можно придать формулировку, схожую с формулировкой теоремы 1. Для этого нам понадобятся новые определения.

Рассмотрим произвольную частичную n-арную операцию f, заданную на некотором множестве A. Предположим, что $A\neq\emptyset$. Введём обозначение: $I=\{i\mid i<n\}$ (все элементы множества I – ординалы). Зафиксируем значения некоторых аргументов частичной операции f. То есть, выберем какое-либо подмножество $J\subseteq I$ и зафиксируем какое-либо отображение $p: I\setminus J\to A$. Мы получим таким образом новую частичную операцию f_p^J, которую будем называть *сечением* частичной операции f. Более строго, обозначим через m ординальный тип вполне упорядоченного множества J. Для каждого кортежа $t\in A^m$ поставим ему в соответствие кортеж $x_t\in A^m$ следующим образом: рассмотрим на время кортеж t как отображение $J\to A$ (мы имеем право так поступить, поскольку вполне упорядоченные множества $\{j\mid j<m\}$ и J изоморфны) и положим

$$x_t\,(j)=\begin{cases} t\,(j)\,, & \text{если } j\in J;\\ p\,(j)\,, & \text{если } j\in I\backslash J.\end{cases}$$

После чего определим на множестве A частичную m-арную операцию f_p^J следующими соотношениями:

$$\mathrm{dom}\, f_p^J=\{t\in A^m|x_t\in\mathrm{dom}\, f\}\,;$$

$$f_p^J\,(t)=f\,(x_t)\quad \text{для всех } t\in\mathrm{dom}\, f_p^J.$$

Частичную операцию f_p^J назовём *сечением* частичной операции f.

Предположим теперь, что умеренно частичная n-арная операция f, заданная на некотором множестве A, удовлетворяет условию $\mathrm{Con}\,(A,f)=\mathrm{Eq}\,A$. Через I, как и раньше, обозначим множество ординалов $\{i\mid i<n\}$.

Определение 3. *Множество $K\subseteq I$ назовём выделенным подмножеством множества I, если для некоторого константного отображения $p: K\to A$ сечение $f_p^{I\backslash K}$ является константной частичной операцией.*

Теорема 3. *Пусть (A,f) – умеренно частичный n-арный группоид. Следующие условия равносильны:*

1) *любое отношение эквивалентности на множестве A является конгруэнцией частичного n-арного группоида (A,f);*

2) *имеет место альтернатива: f – константная частичная операция или на множестве ординалов $I=\{i\mid i<n\}$ множество всех выделенных подмножеств множества I является γ-полным ультрафильтром для наименьшего бесконечного кардинала γ, удовлетворяющего условию $\gamma>|A|$.*

Доказательство. Истинность импликации 1) $\Rightarrow$ 2) была установлена в процессе доказательства теоремы 2. Покажем, что утверждение 2) $\Rightarrow$ 1) также является верным. Справедливость данной импликации очевидна в том случае, если f – константная частичная операция. Если же частичная операция f не является константной, то согласно предложению 9 работы [2] её можно продолжить до полной операции g, удовлетворяющей условию $\mathrm{Con}\,(A,g)=\mathrm{Eq}\,A$. Но тогда условие $\mathrm{Con}\,(A,f)=\mathrm{Eq}\,A$ также оказывается выполненным. $\square$

6. Заключение

Понятие конгруэнции универсальной алгебры естественным образом обобщает понятие конгруэнции полугруппы. В теории полугрупп решётки конгруэнций играют важную роль в различных вопросах структурной теории (см., например, результаты работ [5] и [6]). В случае унарной алгебры (A, Ω), то есть когда элементы семейства Ω являются преобразованиями множества A, к понятию конгруэнии мы можем прийти, рассматривая A как полигон над полугруппой Ω^+, содержащей всевозможные композиции преобразований из семейства Ω. В приложениях теории полгрупп конгруэнции возникают, например, при изучении гомоморфизмов детерминированных автоматов (сведения о конгруэнциях автоматов приведены, например, в монографиях [7] и [8]): это связано с тем, что класс алгебраических автоматов совпадает с классом унарных алгебр.

Дальнейшее обобщение понятия конгруэнции мы получаем, переходя от полных алгебр к частичным. О конгруэнциях частичных алгебр см., например, главу 2 монографии [3] и главу 2 монографии [9]. Теория частичных алгебр – активно развивающийся раздел современной алгебры. Немало работ в данной теории было посвящено вопросу о продолжении различных классов частичных операций до полных операций (к такому направлению исследований относятся, например, статьи [10], [11], [12], [13], [14], [15]).

В данной работе продолжаемость частичных операций также оказывается в центре внимания: если некоторая частичная алгебра A' продолжается до частичной алгебры A, то любая конгруэнция частичной алгебры A также является конгруэнцией частичной алгебры A'.

Автор выражает благодарность И. Б. Кожухову за постоянное внимание к данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Galvin F., Horn A. Operations preserving all equivalence relations // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 24, №3. P. 521–523.

2. Решетников А. В. О частичных бесконечноарных группоидах, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией // Информатика и кибернетика. 2020. Т. 20, №2. С. 48–58.

3. Grätzer. G. Universal algebra. Second Edition. 2nd ed. with updates, Springer, New York, 2008; Second Edition, Springer Science+Business Media, LLC, 1979. 586 p.

4. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968. 351 с.

5. Mitsch H. Semigroups and their lattice congruences // Semigroup Forum. 1983. Vol. 26, №1–2. P. 1–64.

6. Mitsch H. Semigroups and their lattice congruences II // Semigroup Forum. 1997. Vol. 54, №1. P. 1–42.

7. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М., Мир, 1985. 440 с.

8. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997. 368 с.

9. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Частичные алгебраические действия. Росс. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена: Образование, С.-Петербург, 1991. 163 с.

10. Ляпин Е. С. О внутреннем продолжении частичных действий до полных ассоциативных // Изв. вузов. Матем. 1982. Т. 7. С. 40–44.

11. Ляпин Е. С. Частичные группоиды, получаемые из полугрупп ограничениями и гомоморфизмами // Изв. вузов. Матем. 1989. Т. 10. С. 30–36.

12. Ляпин Е. С. О возможности полугруппового продолжения частичного группоида // Изв. вузов. Матем. 1989. Т. 12. С. 68–70.

13. Ляпин Е. С. Внутреннее полугрупповое продолжение некоторых полугрупповых амальгам // Изв. вузов. Матем. 1993. Т. 11. С. 20–26.

14. Апраксина Т. В., Максимовский М. Ю. Полигоны и частичные полигоны над полурешётками // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, №1. С. 3–7.

15. Коробов М. С., Петриков А. О. Продолжение частичных операций в универсальных алгебрах // Информатика и кибернетика. 2018. Т. 11, №1. С. 60–64.

REFERENCES

1. Galvin,F. & Horn, A. 1970, "Operations preserving all equivalence relations", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 24, no. 3, pp. 521–523.

2. Reshetnikov, A. 2020, "On partial infinitary groupoids whose equivalence relations are congruences", *Informatika i Kibernetika*, vol. 20, no. 2 (in Russian), pp. 48–58.

3. Grätzer, G. "Universal algebra". 2008. – Second Edition. 2nd ed. with updates, Springer, New York; 1979 – Second Edition, Springer Science+Business Media, LLC, 586 p.

4. Cohn, P. M. "Universal Algebra". 1965. – Harper & Row, 333 p.

5. Mitsch, H. 1983, "Semigroups and their lattice congruences", *Semigroup Forum*, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–64.

6. Mitsch, H. 1997, "Semigroups and their lattice congruences II", *Semigroup Forum*, vol. 54, no. 1, pp. 1–42.

7. Lallement, G. "Semigroups and combinatorial applications". 1979. – John Wiley & Sons, 197 p.

8. Bogomolov, A. M. & Salii, V. N. "Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem" [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. 1997. – Moscow, Nauka (in Russian). 368 p.

9. Ljapin, E. S. & Evseev, A. E. "The Theory of Partial Algebraic Operations". 1997. – Springer Science + Business Media, B.V., 237 p.

10. Ljapin, E. S. 1982, "Internal extension of partial actions to complete associative ones", *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, vol. 26, no. 7, pp. 49–55.

11. Ljapin, E. S. 1989, Partial groupoids that can be obtained from semigroups by restrictions and homomorphisms *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, vol. 33, no. 10, pp. 37–45.

12. Ljapin, E. S. 1989, The possibility of semigroup continuation of a partial groupoid *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, vol. 33, no. 12, pp. 82–85.

13. Ljapin, E. S. 1993, Inner semigroup continuation of some semigroup amalgams *Russian Math. (Iz. VUZ)*, vol. 37, no. 11, pp. 18–24.

14. Apraksina T. V. & Maksimovskiy M. Yu. 2012, Acts and Partial Acts over Semilattices // *Izvestiya Saratovskogo Universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 12, no. 1 (in Russian), pp. 3–7.

15. Korobov M. S. & Petrikov A. O. 2018, "Continued partial operations in universal algebras", *Informatika i Kibernetika*, vol. 11, no. 1 (in Russian), pp. 60–64.

Получено 21.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-304-327

Решетка определимости. Источники и направления исследований[1]

А. Л. Семенов, С. Ф. Сопрунов

Алексей Львович Семенов — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Институт кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).
e-mail: alsemno@ya.ru
Сергей Федорович Сопрунов — Центр педагогического мастерства Департамента образования и науки Москвы, Институт кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).
e-mail: soprunov@mail.ru

Аннотация

В статье представлены результаты и открытые проблемы, относящиеся к пространствам определимости (редуктам), а также источникам этой области, начиная с XIX века. Исследуются условия конечности и ограничения, в том числе глубина чередования кванторов и число аргументов. Описаны результаты, относящиеся к описанию решеток пространств определимости для числовых и других естественных структур. Методы исследования включают изучение групп автоморфизмов элементарных расширений рассматриваемых структур, использование теоремы Свенониуса.

Ключевые слова: определимость, пространство определимости, редукты, теорема Свенониуса, элиминация кванторов, разрешимость, автоморфизмы.

Библиография: 68 названий.

Для цитирования:
А. Л. Семенов, С. Ф. Сопрунов. Решетка определимости. Источники и направления исследований // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 304–327.

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (А. Л. Семенов, грант № 17-11-01377 – разделы 1, 3, 5) и РФФИ (С. Ф. Сопрунов, грант № 19-29-14199 – разделы 2, 4).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-304-327

The lattice of definability. Origins and Directions of Research

A. L. Semenov, S. F. Soprunov

Alexey Lvovich Semenov — Lomonosov Moscow State University, Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC SCS of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: alsemno@ya.ru
Sergey Fedorovich Soprunov — Center for pedagogical excellence, Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC SCS of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: soprunov@mail.ru

Abstract

The article presents results and open problems related to definability spaces (reducts) and sources of this field since the XIX century. Finiteness conditions and constraints are investigated, including the depth of quantifier alternation and the number of arguments. Results related to the description of lattices of definability spaces for numerical and other natural structures are described. Research methods include the study of automorphism groups of elementary extensions of the structures under consideration, application of the Svenonius theorem.

Keywords: definability, definability space, reducts, Svenonius theorem, quantifier elimination, decidability, automorphisms.

Bibliography: 68 titles.

For citation:
Semenov, A. L., Soprunov, S. F., 2021, "The lattice of definability. Origins and Directions of Research" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 304–327.

"Mathematicians, in general, do not like
to operate with the notion of definability;
their attitude towards this notion
is one of distrust and reserve".
Alfred Tarski [1]

1. Введение. Основное понятие

Одной из «самых экзистенциальных» проблем человечества является «Как определить что-то новое через что-то уже известное?». Иногда это оказывается даже более важным вопросом, чем «Что есть истина?» [Ин. 18:38].

В контексте современной математики этот вопрос формулируется следующим образом.

Мы начинаем с *языка*, в котором мы формулируем наши определения. Это – язык логики отношений (иногда называемой в отечественной литературе логикой предикатов первого порядка), в ее алфавите есть логические связки, переменные: x_0, x_1, ..., кванторы и равенство =. К этому базовому ядру языка мы добавляем *имена отношений* (иногда также имена объектов и операций). Набор этих имен называется *сигнатурой*. Каждое имя имеет свое число аргументов (свою -арность).

Структура сигнатуры Σ – это тройка $\langle D, \Sigma, \mathsf{Int}\rangle$. Здесь D – это множество (обычно счетное бесконечное в этой статье), называемое *универсумом* (или областью) структуры, Int – это *интерпретация*, которая отображает каждое n-арное имя отношения в n-арное отношение на D, другими словами – в подмножество D^n. Если задана структура сигнатуры Σ, то каждая формула в языке с этой сигнатурой *определяет* отношение на D.

Мы описали наиболее распространенный язык, в котором используются кванторы по элементам D. Но иногда мы рассматриваем другие варианты, в частности, с переменными по подмножествам D и кванторами по этим подмножествам (*монадический* язык), или по конечным подмножествам D (*слабый монадический* язык), или вообще без кванторов (*бескванторный* язык).

Зафиксируем универсум D и любое семейство отношений S на D.

Возьмем произвольное конечное подмножество элементов из S и дадим имена его элементам, взяв их из какого-то множества Σ. Теперь у нас есть структура $\langle D, \Sigma, \mathsf{Int}\rangle$. Любая формула в построенном языке определяет отношение на D. Все такие отношения мы называем *определимыми через* отношения из S, другими словами, *определимыми в* S (над D).

Все отношения, определимые в S, составляют *замыкание* S. Мы говорим, что S *порождает* свое замыкание, а S является *базисом* своего замыкания. Описанная операция действительно является замыканием в обычном алгебраическом смысле. Любое замкнутое множество отношений называется *пространством определимости* (над D).

Любое пространство определимости S имеет свою *группу автоморфизмов* $\mathsf{Aut}(S)$, образованную перестановками на D, сохраняющими все отношения из пространства S.

Все пространства определимости над D составляют решетку с естественными решеточными операциями: операция объединения решетки – это замыкание теоретико-множественного объединения, операция пересечения – теоретико-множественное пересечение. Очевидно, что эти решетки для различных счетных бесконечных D изоморфны. Другими словами, мы изучаем только одну решетку.

Исследование этой решетки является основной темой нашей работы. В частности, рассматривается решетка подпространств заданного пространства определимости. Эту решетку мы называем *решеткой определимости* этого пространства или *решеткой определимости* соответствующей структуры. Подпространства, а также порождающие их множества называют также редуктами (reducts) исходного пространства.

Мы будем рассматривать в основном конечно порожденные пространства. Конечно, наша основная решетка таким пространством не является.

Если задан набор порождающих (базис) для пространства, мы получаем теорию пространства. Выбор системы порождающих подобен выбору порождающих для линейного пространства. Для конечно порожденных пространств такие свойства, как разрешимость их теории, инвариантны относительно выбора различных конечных множеств порождающих. Мы часто будем говорить о свойстве пространства, имея в виду свойство теории, возникающей при произвольном выборе конечного порождающего множества. С другой стороны, буквально формулируемое понятие размерности не имеет смысла для пространств определимости: как легко видеть, всякий конечный базис можно заменить на одноэлементный. Некоторым аналогом размерности является «ширина», см. далее.

Сегодня мы считаем, что понятие определимости пространства (независимо от формального определения и терминологии) является одним из основных и центральных для математической логики и даже для математики вообще.

Как мы увидим из следующей главы, оно использовалось все то время, пока развивалась сама дисциплина математической логики. Тем не менее основные результаты, касающиеся этого понятия, в том числе точные определения и фундаментальные теоремы, были получены довольно поздно и пользовались гораздо меньшим вниманием, чем те, которые касались понятий «истинности» и «доказуемости».

Мы стараемся сохранить наш текст самодостаточным и ввести необходимые определения, при этом проследить первоисточники и мотивировки понятий. В некоторых важных случаях понимание проблем и значения понятий существенно уточнялись, менялись с течением времени. Вклад в данную область внесли ученые из ряда стран.

В следующем кратком историческом обзоре используются материалы из [2, 3, 4].

2. Отношения, логика, языки. Ранние подходы XIX века. Возникновение и мотивировка проблематики

Центральное в данной работе понятие отношения, определяемого формулой, неявно имелось уже у Джорджа Пикока (George Peacock) [5] и более конкретно у Джорджа Буля (George Boole) [6], хотя и без точного понятия «формулы».

В 1860–1890 годах Готлоб Фреге (Gottlob Frege) развил представления об отношениях и формулах, в том числе – кванторах [7, 8].

Чарлз Пирс (Charles Peirce) независимо от Фреге установил фундаментальные законы исчисления классов и построил теорию отношений. По сути, это и была постановка проблем определимости. Начиная со статьи 1870 года [9], Пирс представил окончательную форму своей логики отношений, завершенную в статье 1885 года [10]. Теория Пирса уже была контекстом, в котором стало возможным доказательство Леопольдом Лёвенгеймом (Leopold Löwenheim) первой метаматематической теоремы в его [11]. Лёвенгейм доказал, что каждое утверждение (Zählausdrücke) – это либо противоречие, либо имеет счетную модель (см. [12]). По существу, в работах Лёвенгейма, а также у Торалфа Сколема (Скулема) (Thoralf Skolem), была построена семантика логики отношений, хотя формальные определения не были даны.

Эрнст Шрёдер (Ernst Schröder) предложил первую полную аксиоматизацию исчисления классов и значительно расширил исчисление и теорию отношений [13, 14].

2.1. Как определить основные математические структуры? Геометрия и числа. Ширина пространств отношений

В конце XIX века итальянские (Джузеппе Пеано, Алессандро Падоа, Марио Пьери, ...) и немецкие (Готлоб Фреге, Мориц Паш, Давид Гильберт и др.) математики пытались найти «лучший» набор базовых понятий для геометрии и арифметики, рассматриваемых как дедуктивные системы. Речь шла именно о том, «как определить что-то через что-то».

В 1900 году в Париже состоялся Первый международный философский конгресс (1–5 августа) [15] и сразу следом за ним Второй международный конгресс математиков (6–12 августа) [16]. Они проходили во время Всемирной выставки в Париже.

На конгрессе математиков Давид Гильберт (David Hilbert) представил свой список проблем [17], некоторые из которых стали центральными в математической логике. В частности, Десятая проблема Гильберта относилась, по существу, к теории определимости. Алессандро Падоа (Alessandro Padoa) сделал два доклада по аксиоматизации: целых чисел и геометрии.

На философском конгрессе Бертран Рассел (Bertrand Arthur William Russell, 3rd Earl Russell) прочитал доклад о применении теории отношений к проблеме порядка и абсолютного положения в пространстве и времени. Роль математики в философском конгрессе видна хотя бы по докладу на нем видного российского математика А. В. Васильева «Принципы исчисления вероятностей». Итальянская школа логического анализа математики была представлена Джузеппе Пеано (Giuseppe Peano) и его учениками Чезаре Бурали-Форти (Cesare Burali-Forti), Алессандро Падоа и Марио Пьери (Mario Pieri). Пеано и Бурали-Форти говорили об определениях, Пьери говорил о геометрии, рассматриваемой как чисто логическая система. Падоа прочитал свое знаменитое эссе, содержащее «логическое введение в любую теорию», где он утверждает [18]:

> «Чтобы доказать, что система неопределенных символов неприводима по отношению к системе недоказываемых утверждений [аксиом], необходимо и достаточно найти для любого неопределенного символа интерпретацию системы неопределенных символов, которая верифицирует систему недоказываемых утверждений и продолжает делать это, если мы изменим значение только одного символа».

Марио Пьери сформулировал около 1900 года и завершил в своей работе «Точка и сфера» 1908 года полную аксиоматизацию евклидовой геометрии, основанную на неопределяемых понятиях точки и равноудаленности двух точек от третьей точки [19].

Как указано в [3], «в 1904 году Освальд Веблен (Oswald Veblen) предложил альтернативу аксиоматике Пьери. Аксиоматика Веблена была проще и рассматривала в качестве неопределяемых понятий только точку и отношение «лежать между». Однако в 1907 г. Федериго Энрикес (Federigo Enriques) нашел ошибку в работе Веблена».

2.2. Ширина

Стремление построить простейшую систему понятий для исторически важнейшей математической теории – геометрии – привело, в частности, к «погоне» за сокращением количества аргументов у отношений. Уже в 1930-е гг. Альфред Тарский (Alfred Tarski) и Адольф Линденбаум (Adolf Lindenbaum) показали в [20], что выбор Пьери равноудаленности в качестве единственного неопределенного отношения для евклидовой геометрии был оптимальным. Не существует семейства бинарных отношений, через которое можно определить все отношения евклидовой геометрии.

Сам Тарский для определения геометрии использовал два отношения: четырехместное отношение конгруэнтности двух пар точек и трехместное отношение: «точка лежит на отрезке между двумя другими».

В общем контексте теории определимости можно дать следующее определение.

Определение 1. *Пусть задано пространство определимости S. Его* ширина *– это минимальное n такое, что S порождается отношениями с n или меньшим количеством аргументов.*

Следующая теорема отвечает на естественно возникающий вопрос.

Теорема 1. *Существуют пространства определимости любой конечной или счетной ширины.*

Важнейшую американскую группу, занимавшуюся основаниями математики в начале XX в., образовывали «Американские теоретики постулатов» (American Postulate Theorists). Ее лидерами были Эдвард Хантингтон (Edward Huntington) (Президент Американской математической ассоциации и изобретатель системы выделения мест в Палате представителей США) и Освальд Веблен (первый член Принстонского института перспективных исследований). Хантингтон, в частности, занимался аксиоматикой действительных чисел и других упорядоченных множеств. Ему принадлежит и работа 1935 г. [21], где он, по существу, дает описание всех подпространств определимости для порядка рациональных (или действительных) чисел:

> «Четыре типа порядка, взаимосвязи которых рассматриваются в этой статье, можно для краткости назвать (1) линейный порядок; (2) «между»; (3) «цикл» и (4) «разделение».

Эти «четыре типа порядка», с шириной 2, 3, 4, будут играть особую роль в дальнейшем развитии событий, обсуждаемых в настоящей работе. Имеет смысл их выписать в виде формул в современном стиле:

$$x \leqslant y$$

– линейный порядок;

$$(x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3) \vee (x_3 \leqslant x_2 \leqslant x_1)$$

– «между»;

$$(x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3) \vee (x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_1) \vee (x_3 \leqslant x_1 \leqslant x_2)$$

– «цикл»;

$$\begin{aligned}&(x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4) \vee (x_3 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant x_4) \vee\\ \vee &(x_1 \leqslant x_4 \leqslant x_3 \leqslant x_2) \vee (x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_1 \leqslant x_2) \vee\\ \vee &(x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_1) \vee (x_2 \leqslant x_1 \leqslant x_4 \leqslant x_3) \vee\\ \vee &(x_4 \leqslant x_3 \leqslant x_2 \leqslant x_1) \vee (x_4 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3)\end{aligned}$$

– «разделение».

Последняя формула выглядит не очень обозримой, но имеет ясный геометрический смысл: отрезки с концами x_1, x_3 и с концами x_2, x_4 пересекаются, но не вложены один в другой.

2.3. Определимость формулы отношением. Элиминация кванторов. Глубина пространства отношений

Вероятно, Тарский впервые ясно сформулировал и использовал понятие отношения, определяемого формулой, в обычной индуктивной форме около 1930 г., в частности, в [1], [22]. В неявной форме, однако, понятие определимости использовалось намного раньше. В частности, оно присутствовало в описаниях элиминации кванторов в работах Сколема, Пресбургера и Лэнгфорда.

Элиминация кванторов. Кванторная глубина

По-видимому, упомянутые авторы рассматривали элиминацию кванторов прежде всего как способ задания семантики, понимания формулы, содержащей кванторы и доказательства «разрешимости» соответствующей теории, то есть установления «метаматематической» теоремы о том, что всякое утверждение теории или доказуемо, или опровержимо.

Купер Лэнгфорд (Cooper Langford) использовал этот метод в 1927 году [23, 24], чтобы доказать разрешимость теории плотного порядка без первого и последнего элемента. Тарский расширил результаты Лэнгфорда до теории первого порядка дискретного порядка без первого или последнего элемента и для теории дискретного порядка с первым и последним элементом.

Мойжеш Пресбургер (Mojżesz Presburger) [25] элиминировал кванторы в сложении и порядке целых чисел.

Сколем продемонстрировал в 1929 году элиминацию кванторов [26] для умножения и порядка натуральных чисел. Полное доказательство было опубликовано Мостовским в 1952 году [27].

Сам Тарский объявил в 1931 году, что он доказал элиминируемость кванторов для элементарной алгебры и геометрии (опубликовано это было, однако, только в 1948 году, см. [28]).

Указанные авторы не давали формального определения элиминации кванторов. Такое определение было бы естественно дать, обращаясь к конечной сигнатуре и потребовав, чтобы всякая формула была эквивалентна бескванторной. Однако многие из упомянутых конструкций этому определению не соответствуют: таких конечных сигнатур там нет. Например, в теории сложения целых чисел, даже если дополнительно использовать фиксированное конечное число функциональных символов, нельзя записать для каждого натурального n, что число делится на m. Тем паче это невозможно в случае (как в данной работе), когда функциональных символов нет.

Естественный выход, как нам кажется, состоит в рассмотрении несколько более общей ситуации и более общего понятия. Это понятие также хорошо известно – это кванторная глубина.

Определение 2. *Пусть S – пространство определимости, порожденное конечным множеством отношений F.*

Кванторная иерархия для S – это возрастающая последовательность классов отношений $F_0, F_1, \ldots$. Здесь F_0 – это бескванторное (булево) замыкание F, для каждого $i = 0, 1 \ldots F_{i+1}$ получается из F_i путем взятия всех проекций отношений из F_i (добавления некоторого числа кванторов существования) и последующего булева замыкания. (Альтернативное определение может быть дано путем подсчета чередований кванторов.) Иерархия может быть бесконечной длины, если F_{i+1} отличается от F_i для всех i, или конечной длины n – минимальной, для которой $F_{n+1} = F_n$. Глубина пространства определимости – это минимальная (по всем конечным множествам образующих) длина кванторной иерархии для него.

В работе [29] была сформулирована задача о возможных значениях глубины. Ответ был получен в 2010 году [30]:

Теорема 2. *Существуют пространства определимости любой конечной или счетной глубины.*

Вот несколько хорошо известных примеров. Мы неформально указываем структуру и ожидаемую глубину иерархии для нее:

- $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ – глубина 0.
- Плотный порядок без первого и последнего элемента – глубина 0.
- Плотный порядок $[0, 1]$ – глубина 0 (если мы включим 0 и 1 в сигнатуру).
- $\langle \mathbb{Z}; +1 \rangle$ – глубина 1.
- Арифметика Пресбургера – глубина 1. (Линейные формы, сравнения по модулю m могут быть введены с помощью кванторов существования.)
- Расширения Арифметики Пресбургера быстро растущими функциями – глубина 1 [31].
- Арифметика Сколема – глубина 1.
- Алгебра Тарского – глубина 1. (Многочлены вводятся с помощью кванторов существования.)
- Арифметика нескольких следований – глубина 2, может быть 1 (доказательство с помощью автоматов).
- Арифметика $+$ и $\times$ – бесконечность.

Априори длина иерархии для пространства S может зависеть от выбора (конечного) F.

Проблема 1. *Может ли длина иерархии действительно различаться для разных конечных базисов?*

В частности:

Проблема 2. *Существуют ли естественные примеры «большой» (2, 3, 4, ...) конечной глубины?*

Проблема 3. *Какова глубина пространства Рабина [32], [33]?*

2.4. Разрешимость в пространствах отношений. Проблема Элгота – Рабина

Разрешимость в смысле существующего алгоритма решения вопроса о том, является ли утверждение (замкнутая формула) истинным или ложным, в большинстве случаев – не побочный продукт элиминации кванторов или прояснения семантики, а основная цель исследования. Тарский свой результат, относящийся к элиминации кванторов для поля действительных чисел (и очень важный как таковой), формулирует как «разрешающий метод для элементарной алгебры и геометрии» (хотя практически применимого варианта такого метода пришлось ждать еще несколько десятилетий – вплоть до появления мощных цифровых технологий и систем компьютерной алгебры).

В нашем контексте естественно рассматривать не только разрешимость теории, но и разрешимость элементов пространства определимости. Конечно, нам нужна «конструктивизация» области D. Не вдаваясь в тонкости теории конструктивных моделей, договоримся, например, взять в качестве области множество натуральных чисел. Кроме того, как в большей части данной работы, будем предполагать, что пространство обладает конечным базисом.

Определение 3. *Мы называем пространство* разрешимым*, если существует алгоритм, вычисляющий значение всякой формулы на всяком аргументе (наборе натуральных чисел).*

Конечно, разрешимость пространства влечет разрешимость теории соответствующей структуры, и если в языке можно определить любой элемент универсума, то разрешимость пространства эквивалентна разрешимости теории этого пространства.

В то же время, как было показано в [31], существует одноместный предикат R, для которого пространство, порожденное $+$, R на натуральных числах имеет неразрешимую теорию, хотя в этой теории определимы все натуральные числа и каждое отношение, входящее в пространство определимости этой структуры, разрешимо.

Проблема 4. *[29] Существуют ли пространства произвольной конечной или бесконечной глубины с разрешимой теорией?*

Проблема 5. *Существуют ли разрешимые пространства произвольной конечной или бесконечной глубины?*

Следуя Калвину Элготу (Calvin Elgot) и Майклу Рабину (Michael Rabin), мы говорим, что конечно порожденное пространство определимости имеет *максимально разрешимую теорию*, если его теория разрешима, а теория любого большего пространства определимости не разрешима.

Проблема 6. *[34] Существует ли структура с максимально разрешимой теорией?*

В [35] С. Ф. Сопрунов доказал (используя метод форсинга), что каждое пространство, содержащее ветвящийся порядок, не является максимальным. Частичный порядок $\langle B; \succ\rangle$ называется *ветвящимся*, если для каждого $a \in B$ существуют различные элементы $b_1, b_2 \in B$ такие, что $a \succ b_1, \quad a \succ b_2$, и ни один элемент $c \in B$ не удовлетворяет как $b_1 \succ c$, так и $b_2 \succ c$. В качестве следствия он также доказал, что проблема Элгота – Рабина имеет отрицательное решение, если рассматривать в качестве языка определимости слабый монадический язык (мы уже говорили, что всюду, если не оговорено противное, мы рассматриваем «элементарный» язык). При этом в самой статье Элгот и Рабин параллельно рассматривали и элементарный, и слабый монадический, и монадический случаи. Вопрос для слабого монадического случая – естествен.

Теорема 3. *[35] Если в структуре с разрешимой теорией выразим ветвящийся порядок, то теория такой структуры не является максимально разрешимой.*

Типичным примером ветвящегося порядка является порядок $\succ$, на словах в конечном алфавите, определенный так, что $a \succ b \leftrightarrows$ (слово a является началом слова b).

Следствие 1. *Разрешимая теория натурального ряда, с несколькими следованиями, не является максимально разрешимой. То же самое верно для любого обогащения данной структуры.*

В случае слабо монадических структур порядок определяется на парах конечных непересекающихся множеств $\langle a, b\rangle$ так, $\langle a_1, b_1\rangle \succ \langle a_2, b_2\rangle \leftrightarrows (a_1 \subset a_2 \wedge b_1 \subset b_2)$ — очевидно, что данный порядок ветвящийся.

Следствие 2. *Не существует структуры с максимально разрешимой слабой монадической теорией.*

Проблема 7. *Существует ли структура с максимально разрешимой монадической теорией?*

Проблема 8. *Верно ли, что у структуры $\langle \mathbb{N}, \{<\}\rangle$ нет максимально разрешимого расширения?*

В [36] Алексис Бес (Alexis Bés) и Патрик Сежелски (Patrick Cégielski) рассматривают ослабление вопроса Элгота – Рабина, а именно вопрос о том, любая ли структура, теория которой разрешима, может быть расширена некоторой константой таким образом, что результирующая структура все еще имеет разрешимую теорию. Они отрицательно отвечают на этот вопрос, доказывая, что существует структура с разрешимой теорией (даже ее монадическая теория разрешима) такая, что любое расширение ее константой имеет неразрешимую теорию.

В [37] они же указывают достаточное условие для того, чтобы структура имела максимально разрешимую теорию.

В силу результата Бес и Сежелски естественно делать различие между структурами с разрешимыми теориями и разрешимыми структурами.

Проблема 9. *Существует ли максимальное разрешимое пространство?*

Наконец, в контексте проблем разрешения для алгебраических систем естественно следующее определение.

Определение 4. *Пусть пространство задано своим конечным базисом и сигнатурой для него.* Проблема определимости *для него состоит в выяснении по двум отношениям, заданным формулами этой сигнатуры, определимо ли первое из этих отношений через второе.*

Несложно доказывается следующее утвреждение:

Теорема 4. *Пусть разрешимое пространство задано конечным базисом и сигнатурой для него. Пусть далее, все подпространства пространства можно без повторения перечислить их базисами (в этой сигнатруе). Тогда проблема определимости для этого пространства разрешима.*

Как будет отмечено далее, для следования на целых числах указанное перечисление существует, таким образом, для этого пространства проблема определимости разрешима. Другим очевидным примером является пространство порядка рациональных чисел.

3. Общие фундаментальные теоремы об определимости. Полнота автоморфизмов. 1950-е годы

Ричард Бюхи (Richard Buchi) и Кеннет Данхоф (Kenneth Danhof) констатировали, что кардинальный прогресс в теории определимости произошел в 1940–1950-х гг. [2]:

> «В то время [1930-е гг.] могло показаться, что большинство основных проблем элементарных систем аксиом были решены. Однако более внимательный наблюдатель, прочитав статьи Тарского [38, 39], возможно, задавался вопросом о существовании общих теорем, которые объясняли бы элементарную определимость. Одной из таких теорем является теорема Бета, доказанная в 1953 г. [40]. В 1959 году Свенониус опубликовал дальнейший результат об элементарной определимости [41]. Так же как и в случае результатов Бета и Крейга, логики не торопились признать важность теоремы Свенониуса как основного инструмента теории определимости – возможно потому, что были плохо о ней осведомлены».

Эти теоремы были получены на пути, который исходно предвидели Падоа и Тарский.

3.1. Автоморфизмы. Изоморфизмы

С появлением Эрлангенской программы Клейна в 1872 г. [42] стало ясно, что группы автоморфизмов являются полезным средством изучения математических теорий.

В определении категоричности у Хантингтона [43] появилось слово «изоморфизм». Там Хантингтон говорит, что «особое внимание можно обратить на обсуждение понятия изоморфизма между двумя системами и понятия достаточного, или категоричного, набора постулатов».

Подводя итоги этой исторической перспективе, Тарский в своей статье «Что такое логические понятия?», опубликованной в 1963 году [1], объясняет предмет логики как изучение «всего... с точностью до перестановок»: «Я попытаюсь расширить его [Клейна] метод за пределы геометрии и применить его также к логике... Я использую термин «понятие» в довольно свободном и общем смысле. Таким образом, понятия включают индивидов, классы индивидов, отношения на индивидах».

3.2. Полнота. Теорема Свенониуса

В 1959 году Ларс Свенониус (Lars Svenonius) [41] опубликовал фундаментальный результат об определимости. Несмотря на его фундаментальность, сравнимую, как мы полагаем, с фундаментальностью теремы о полноте (связываемой с именем Гёделя), этот реультат цитируется намного меньше, не включается в базовые, а часто – и в продвинутые курсы математической логики. Результат Свенониуса может рассматриваться как уточнение и реализация идеи (или «метода») Падоа. Начнем со вспомогательных определений, продолжающих нашу линию базовых определений из введения к настоящей работе.

Пусть S_1 – пространство определимости на носителе A, множество $B \subseteq A$, и пусть S_2 – семейство отношений на B, являющихся ограничениями отношений из S_1. Предположим, что заданы имена для отношений из конечного подмножества F множества S_1, и те же самые имена используются для ограничения отношений из набора F на B. Каждая формула, содержащая только эти имена, определяет два отношения: одно на A и второе на B. Второе отношение не обязано быть ограничением первого на множестве B, но если оно является ограничением для любой формулы, то пространство S_2 называется *элементарным ограничением* пространства S_1 (а S_1 является *элементарным расширением* пространства S_2). Любое элементарное ограничение пространства определимости является пространством определимости.

В нашем контексте теорема Свенониуса является чрезвычайно полезным инструментом.

Вот ее формулировка:

Теорема Свенониуса 1. *Пусть S^-, S — счетные пространства определимости на носителе A, причем $S^- \subset S$. Тогда для любого отношения $R \in S$ следующие два утверждения равносильны:*

(a) $R \in S^-$;

и

(b) для любого счетного пространства определимости S', являющегося элементарным расширением пространства S, и любых $S_0 \subset S', R_0 \in S'$, таких, что ограничение S_0 на A совпадает с S^-, ограничение R_0 на A совпадает с R, группа перестановок носителя пространства S', сохраняющая все отношения из S_0, сохраняет и R_0.

Таким образом, Теорема Свенониуса утверждает, что если мы рассматриваем перестановки не только исходного пространства, но и перестановки элементарных расширений, то возможно различить подпространства исходного пространства. Теорему Свенониуса можно считать «Теоремой полноты для определимости». Замечательными ее чертами является естественность формулировки и прозрачность доказательства. Можно выразить уверенность в том, что число ее применений будет существенно возрастать в ближайшие десятилетия.

Фактически, мы можем модифицировать теорему так, чтобы использовать один универсум, как было показано в [44].

Через $\mathcal{F}$ обозначим множество всюду определенных функций $f\colon \mathbb{N} \to D$. Если R является n-арным отношением на D и φ – это отображение $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$, тогда мы говорим, что φ *почти сохраняет* R, если $\{i \mid R(f_1(i), \ldots, f_n(i)) \not\equiv R(\varphi(f_1)(i), \ldots, \varphi(f_n)(i))\}$ конечна для любых $f_1, \ldots, f_n$ в $\mathsf{Dom}(\varphi)$.

Теорема 5. (CH) *Пусть S – пространство определимости. Следующие условия эквивалентны:*

(1) отношение $R \in S$,

(2) любая перестановка φ на $\mathcal{F}$, который почти сохраняет все отношения из S, почти сохраняет R.

Примечательной особенностью этой формы теоремы Свенониуса является то, что условие (2) является чисто комбинаторным, не апеллирующим ни к какому логическому языку.

3.3. Автоморфизмы и соответствие Галуа

Как мы видим в теореме Свенониуса, группа автоморфизмов является важным объектом при изучении пространств определимости. Введем стандартное понятие: *симметрическая группа $Sym(D)$* на множестве D – это группа, состоящая из всех перестановок D. На симметрической группе имеется естественная топология поточечной сходимости: базис окрестностей элемента состоит из всех перестановок, которые совпадают с ним на некотором конечном множестве.

Введем еще одно стандартное обозначение: для пространства S обозначим через $\mathsf{Aut}(S)$ группу всех автоморфизмов S, то есть перестановок носителя пространства, сохраняющих значения всех элементов пространства.

Легко видеть, что для любых пространств S и T мы имеем

$$S \subseteq T \Rightarrow \mathsf{Aut}(S) \supseteq \mathsf{Aut}(T)$$

и что группы автоморфизмов для пространств замкнуты в смысле упомянутой выше топологии. Таким образом, группы, соответствующие подпространствам пространства S, оказываются надгруппами для $\mathsf{Aut}(S)$. Соответствие между пространствами определимости и их группами автоморфизмов – антимонотонное соответствие Галуа. Группы для разных подпространств одного пространства могут совпадать. Теорема Свенониуса помогает обойти это обстоятельство.

Примеры использования групп перестановок для описания решеток определимости см., в частности, в [45].

3.4. ω-категоричность. Максимальность

Пространство (конечно порожденное) называется *ω-категоричным*, если все счетные пространства, элементарно эквивалентные ему, изоморфны ему.

Для ω-категоричных структур определимые подпространства находятся во взаимно однозначном соответствии с замкнутыми группами автоморфизмов:

$$S \subseteq T \iff \mathsf{Aut}(S) \supseteq \mathsf{Aut}(T)$$

Это сразу же следует из теоремы Свенониуса, или из так называемой теоремы Энгелера – Рыль-Нардзевского – Свенониуса (см. напр. [46]).

Простым обобщением понятия ω-категоричности является понятие (счетной) *максимальности.* А именно: счетное пространство S назовем максимальным, если любое его счетное элементарное расширение изоморфно S.

Из теормы Свенониуса непосредственно следует:

Следствие 3. *Пусть S^-, S – счетные пространства определимости на носителе A, причем $S^- \subset S$ и пространство S максимально. Тогда для любого отношения $R \in S$ следующие два утверждения равносильны:*
(a) $R \in S^-$;
и
(b) группа перестановок на A, сохраняющая все отношения из S^-, сохраняет R.

4. Решетки определимости. Что известно? Открытые вопросы

4.1. Примеры. Соотношения в решетках определимости

Многочисленные результаты были посвящены изучению специфических пространств определимости. Приведем два типичных примера.

Иван Корец (Ivan Korec) в [47] исследовал различные естественные базисы для арифметики сложения и умножения целых чисел.

Теорема Кобхэма – Семенова [48] утверждает, что в нетривиальном случае пересечение пространств, порожденных автоматами, работающими в разных системах счисления, совпадает с арифметикой Пресбургера (пространством, порожденным сложением натуральных чисел).

4.2. Рациональный порядок. Однородные структуры

Начнем с самого известного пространства определимости, где впервые была описана нетривиальная решетка подпространств. Это пространство структуры $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$. Описание подпространств было получено Клодом Фрасне (Claude Frasnay) в 1965 году [49]. Все подпространства указанного пространства задаются следующими группами, которые мы описываем, добавляя что-то к автоморфизмам порядка:

- Группа, порожденная сменой знака – она сохраняет отношение «между».

- Группа, возникающая, если мы сворачиваем рациональные числа в окружность и ее поворачиваем. Иначе можно представить отображения из этой группы как переставляющие два открытых луча рациональных чисел, получающихся сечением по иррациональному числу. Эта группа сохраняет отношение «цикл».
- Используем оба упомянутых выше класса отображений. Группа сохраняет отношение «разделение».

Примечательно, что это именно те отношения, которые в аксиоматической форме были описаны Хантингтоном в работе 1935 года [21], упомянутой выше.

Чтобы получить полный список подпространств порядка на рациональных числах, нужно добавить еще два очевидных пространства, отвечающих отношениям порядка и равенства.

Структура $\langle\mathbb{Q};<\rangle$ является ω-категоричной. Это установил Хантингтон, видимо, впервые применивший челночный метод («back-and-forth» method), открытие которого иногда приписывается Кантору [50]. На самом деле доказательство Хантингтона показывает, что $\langle\mathbb{Q};<\rangle$ однородна в следующем смысле.

Определение 5. *Структура называется* однородной*, если каждый изоморфизм между ее конечными подструктурами продолжается до автоморфизма всей структуры.*

Это определение является обобщением его «группового аналога».

Определение 6. *Группа перестановок называется* однородной*, если любое ее конечное подмножество может быть переведено в любое другое подмножество той же мощности посредством элемента группы.*

Очевидно, что если группа $\mathsf{Aut}(S)$ однородна, то и структура S однородна. На самом деле не только структура $\langle\mathbb{Q};<\rangle$ однородна, но и группа $\mathsf{Aut}(\langle\mathbb{Q};<\rangle)$ однородна.

Питер Кэмерон [51] показал, что на счетном множестве существует всего пять однородных групп перестановок. В качестве следствия мы получаем, что в случае $\langle\mathbb{Q};<\rangle$, помимо $\mathsf{Aut}(\langle\mathbb{Q};<\rangle)$ и $\mathsf{Sym}(\mathbb{Q})$, есть только три однородные группы. Это – именно те, которые были описаны выше.

Всякое конечно порожденное счетное однородное пространство является ω-категоричным.

Для ω-категоричных структур однородность эквивалентна элиминируемости кванторов. (см., например, [45] , стр. 1607, Proposition 3.1.6).

Все подпространства для $\langle\mathbb{Q};<\rangle$ однородны и допускают элмиминацию кванторов.

Хорошим источником информации, связанной с однородными структурами, является [45].

4.3. Случайный Граф. Гипотеза Томаса

Наш следующий пример – еще одна замечательная однородная структура.

Определение 7. *Счетный граф называется* случайным*, если для для любых двух конечных непересекающихся множеств U, V его вершин существует вершина z, соединенная с каждой вершиной в U и не соединенная ни с одной вершиной в V.*

Свойство из определения называется «Свойством ресторана Алисы». Последний термин был придуман Питером Винклером [52] со ссылкой на знаменитую песню «Alice's Restaurant Massacree» Арло Гатри (Arlo Guthrie) 1967 г., где в припеве говорится: «Вы можете получить все, что захотите, в ресторане Алисы».

Любые два случайных графа изоморфны. Доказательство аналогично доказательству изоморфизма для любых двух счетных плотных неограниченных порядков (случай $\mathbb{Q}$). Термин «случайный» может быть объяснен следующим свойством:

> Если граф X на фиксированном счетном множестве вершин выбирается путем выбора ребер независимо случайным образом с вероятностью $1/2$ из неупорядоченных пар вершин, то с вероятностью 1 он будет случайным.

Явная конструкция R есть в [53]:

> Множество вершин – это $\mathbb{N}$, и x соединена с y тогда и только тогда, когда x-я цифра в двоичной записи y равна 1 или наоборот.

Вот описание подпространств определимости для случайного графа R из [54].

> Пусть $R(a,b)$ означает, что «(ab) – ребро в R», $R^{(k)}$ – k-арное отношение, содержащее все k-наборы попарно различных вершин $x_1, \ldots, x_k$, для которых количество (неориентированных) ребер между этими вершинами нечетно. Тогда подпространства определимости для случайного графа задаются следующими порождающими: R; $R^{(3)}$; $R^{(4)}$; $R^{(5)}$; $=$.

Легко видеть, что структура $R^{(3)}$ не однородна и не допускает элиминации кванторов.

Саймон Томас (Simon Thomas) получил это описание в [55] и выдвинул следующую гипотезу:

> Решетка всякого конечно порожденного однородного пространства конечна.

Проблема 10. *Доказать или опровергнуть гипотезу Томаса.*

4.4. Примеры конечных решеток

Для проверки гипотезы Томаса в [56] была рассмотрена суперпозиция двух однородных структур: $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ и случайного графа $\langle G; E \rangle$.

Было показано, что без учета очевидных пространств $\langle D; <, E \rangle$ и $\langle D; = \rangle$ существует ровно 42 таких пространства.

В [57] полностью описана решетка подпространств для структуры, получающейся добавлением одной константы к $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$. Это расширение, конечно, можно представить как добавление двух одноместных отношений $x \leqslant a$ и $a \leqslant x$. В этой статье рассматриваются и другие расширения $\langle \mathbb{Q}; < \rangle$ с помощью унарных предикатов в ситуациях, где возможна элиминация кванторов. Получающиеся решетки определимости всегда оказываются конечными. В частности, в простейшем случае разбиения рациональных чисел на два открытых выпуклых подмножества (иррациональное сечение рациональных чисел) существует ровно 53 подпространства, отвечающих 5 стандартным надгруппам на элементах сечения, а также перестановкам, сохраняющим, переставляющим и смешивающим элементы сечения.

4.5. ω-категоричные неоднородные пространства

Примером ω-категоричной структуры, имеющей бесконечно много подпространств определимости, является бесконечномерное векторное пространство над полем из двух элементов $\mathbb{F}_2$ [58].

4.6. Не ω-категоричные пространства

Мы не так уж много знаем о решетках определимости не ω-категоричных структур. Проясняя ситуацию с гипотезой Томаса, можно спросить, влечет ли конечность решетки однородность? В работе [59] строится пример не ω-категоричной структуры с тривиальной конечной решеткой определимости – в решетке ровно два элемента. Приведем описание структуры из этой работы. Универсумом M структуры является множество «дважды бесконечных», т. е. индексированных целыми числами, последовательностей 0 и 1, у которых число 1 конечно. Определим отношение $C(x, y, z)$ на M: $C(x, y, z)$ выполнено, если на некотором месте последовательности x и y различаются, а y и z на этом и всех предшествующих местах совпадают. Теперь определим отношение D: $D(x, y, z, w)$ выполнено, если выполнено одно из двух условий $C(x, z, w) \wedge C(y, z, w)$; $C(z, x, y) \wedge C(w, x, y)$. Требуемый пример структуры – это $\langle M; D(x, y, z)\rangle$.

Другой пример представлен в [60]. Авторы показывают, что пространство $\langle \mathbb{Q}; S(x, y, z)\rangle$, где $S(x, y, z)$ интерпретируется как $(z{=}(x{+}y)/2)$ (или, то же самое, структура $\langle \mathbb{Q}; f(x, y, z)\rangle$, где $f(x, y, z) = x{-}y{+}z$)), не имеет нетривиальных подпространств (вопрос о существовании нетривиальных подпространств у данного пространства был поставлен в [59]). Общий план доказательств несложен: авторы замечают, что структура $\langle \mathbb{Q}^{<\omega}; +\rangle$ (здесь $\mathbb{Q}^{<\omega}$ – последовательности рациональных чисел, равные 0 почти всюду, сложение определяется покомпонентно) является насыщенным элементарным расширением $\langle \mathbb{Q}; +\rangle$, свойства которого близки к свойствам максимальной структуры (максимальность см. ниже), поэтому достаточно рассмотреть только перестановки структуры $\langle \mathbb{Q}^{<\omega}; +\rangle$. После этого доказывается и используется, что $\mathsf{Aut}(\langle \mathbb{Q}^{<\omega}; f\rangle)$ – это максимальная замкнутая нетривиальная подгруппа в группе всех перестановок универсума.

Упомянем также исследования решеток определимости в структурах действительных [61, 62] и комплексных [63] чисел.

4.7. Следование на целых числах: явное описание бесконечной решетки определимости. Предмаксимальные пространства

Структура $\langle \mathbb{Z}; +1\rangle$ – целые числа с отношением следования – не является ω-категоричной и имеет глубину 1. Для любого натурального числа n мы определяем пространства $A_{i,n}$ их одноэлементными порождающими:

$$|x_1 - x_2| = n \text{ — } A_{0,n}(x_1, x_2)$$
$$(x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = n) \vee (x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = -n) \text{ — } A_{1,n}(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ и}$$
$$x_1 - x_2 = n \text{ — } A_{2,n}(x_1, x_2)$$

Теорема 6. [64] *Любое подпространство пространства $\langle \mathbb{Z}; +1\rangle$ совпадает с $A_{i,n}$ для некоторого $i \leqslant 2$ и натурального n.*
$A_{i,n} \succ A_{i-1,n}$ для любого $0 < i \leqslant 2$ и натурального n
и если $0 < i \leqslant 2$ и $n \neq m$, то $A_{i,n} \succ A_{i,m} \iff n$ является делителем m.
$[A_{i,d}] \cup [A_{j,k}] = [A_{m,n}]$, где $m = \max\{i, j\}, n =$ НОД(d, k); и
$[A_{i,d}] \cap [A_{j,k}] = [A_{m,n}]$, где $m = \min\{i, j\}, n =$ НОК(d, k).
Все $A_{i,n}$ различны.

Доказательство теоремы использует понятие субмаксимальности (пред-максимальности).

Определение 8. *Пространство называется предмаксимальным, если оно элементарно эквивалентно максимальному.*

В данном случае максимальное пространство – это непересекающееся объединение счетного числа копий целых чисел, добавление единицы к элементу какой-то копии действует внутри этой копии. Это пространство является максимальным, и оно элементарно эквивалентно целым числам с отношением следования.

Проблема 11. *Описать решетку подпространств для $\langle \mathbb{N}; +1\rangle$.*

Проблема 12. *Описать решетку подпространств для натуральных чисел с несколькими следованиями.*

5. Разрешимость в решетках. Самоопределимость Мучника

Естественная алгоритмическая проблема для алгебраической структуры, в нашем случае – решетки определимости: принадлежит ли элемент пространства (заданный формулой) подпространству, порожденному заданным набором элементов? Положительные и отрицательные результаты по этому вопросу для однородных структур были получены в [65].

Андрей Мучник в своей работе [66] ввел следующее определение:

Определение 9. *Пространство определимости S называется* самоопределимым, *если существует конечная сигнатура Σ для S и последовательность формул $F_1, \ldots, F_n, \ldots$ такая, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$*

1. F_n – замкнутая формула в сигнатуре $\Sigma \cup \{P\}$, где P – имя n-арного отношения.

2. Истинность F_n эквивалентна тому, что интерпретация P принадлежит S.

Ан. Мучник доказал следующую теорему.

Теорема 7. *Пространство $\langle \mathbb{N}; + \rangle$ самоопределимо.*

Источником этой теоремы для Мучника было доказательсто Семенова теоремы Кобхэма–Семенова. За счет введения понятия самоопределимости доказательство Мучника не только существенно проще доказательства Семенова, но и показывает, видимо, довольно редкое (если не уникальное) свойство арифметики Пресбургера. В то же время введенное Мучником понятие вполне соответствует духу исследований Тарского по определимости.

Мучник пишет:

> «К сожалению, мы не знаем других хороших примеров самоопределяющихся структур.
>
> Структуры с неразрешимой элементарной теорией обычно взаимно интерпретируются с помощью арифметики сложения и умножения целых чисел, не самоопределимость которых доказана в [67] (с использованием соображений категории и [68] исходя из соображений меры).
>
> Мы считаем, что структура, образованная алгебраическими вещественными числами (со сложением и умножением) не является самоопределимой; однако формальное доказательство отсутствует (и, вероятно, довольно сложно).
>
> (Нетрудно доказать, что структура, образованная всеми вещественными числами со сложением и умножением, не является самоопределимой. Действительно, предположим, что $\Phi(A)$ истинно тогда и только тогда, когда A определимо. Теперь мы заменим $A(x)$ на $x = y$. Новая формула $\Phi'(y)$ истинна тогда и только тогда, когда y – алгебраическое число. Но мы можем исключить кванторы в $\Phi'(y)$ и получить конечное объединение сегментов в качестве множества истинности для $\Phi'(y)$. Противоречие.)»

Проблема 13. *Найти еще примеры структур со свойством самоопределимости.*

6. Благодарности

Авторы выражают благодарность Альберту Абрамовичу Мучнику за первоначальную потановку проблемы, Андрею Мучнику за вклад в решение возникавших задач, Сергею Ивановичу Адяну, Владмиру Андреевичу Успенскому и участникам семинаров кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ за активное обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tarski Alfred. What are logical notions? // History and philosophy of logic, 1986, 7.2. — Pp. 143–154.

2. Buchi J. Richard, Danhof Kenneth J. Definibility in normal theories. // Israel Journal of Mathematics, 1973, 14.3. — Pp. 248–256.

3. Smith James T. Definitions and nondefinability in geometry. // The American Mathematical Monthly, 2010, 117.6. — Pp. 475–489.

4. Hodges Wilfrid. Model Theory (Draft 20 Jul 2000) // 2000. [Электронный ресурс] URL: http://wilfridhodges.co.uk/history07.pdf (дата обращения 25 декабря 2020 г.).

5. Peacock George. Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis. // Report of the third meeting of the British Association for the Advancement of Science held at Cambridge in 1833, John Murrary, London, 1834. — Pp. 185–352.

6. Boole George. The mathematical analysis of logic. // Philosophical Library, 1847.

7. Frege Gottlob. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. // Halle, 1879. Translated in van Heijenoort J. Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic. 1931. — Pp. 3–82.

8. Frege Gottlob. Grundgesetze der Arithmetik. // 1893. Publ. by Jena: Verlag Hermann Pohle, Band I/II. Partial translation of Band I, The Basic Laws of Arithmetic, by M. Furth. Berkeley: U. of California Press, 1964.

9. Peirce Charles Sanders. Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic. // Memoirs of the American academy of arts and sciences, 1873, vol. 9, part 2. — Pp. 317–378.

10. Peirce Charles Sanders. On the algebra of logic: A contribution to the philosophy of notation. // American journal of mathematics, 1885, 7.2. – Pp. 180–196.

11. Löwenheim Leopold. Über möglichkeiten im relativkalkül. // Mathematische Annalen, 1915, 76.4. – Pp. 447–470.

12. Skolem Thoralf. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfullbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sdtze nebst einem Theorem über dichte Mengen. // Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 4, 1920.

13. Schröder Ernst. On Pasigraphy. Its Present State and the Pasigraphic Movement in Italy. // The Monist, 1898, 9.1. – Pp. 44–62.

14. Schröder E. Vorlesungen über die Algebra der Logik. Volumes 1 to 3. // Teubner, Leipzig. Reprinted by Chelsea, New York, 1966.

15. International Congress of Philosophy. // Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, Four volumes. Paris: Librairie Armand Colin, 1900–1903.

16. Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900: procès-verbaux et communications. // Publies par Ernest Duporcq. Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, 1902. – 455 pp.

17. Hilbert David. Mathematische probleme. // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1900. – Pp. 253–297.

18. Padoa Alessandro. Logical introduction to any deductive theory. // 1900. Опубл. в сб. From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Ed. by Jean van Heijenoort. Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967. – Pp. 118—123.

19. Pieri Mario. La geometria elementare istituita sulle nozioni 'punto' é 'sfera'. // Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze, 1908, 15. – Pp. 345–450.

20. Lindenbaum A., Tarski A. Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien. // Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, Heft 7, 1935. – Pp. 15–22. Пер. на англ.: On the Limitations of the Means of Expression of Deductive Theories. // Alfred Tarski. Logic, Semantics, Metamathematics. // J. Corcoran, ed., Hackett, Indianapolis, 1956. – Pp. 384–392.

21. Huntington Edward V. Inter-Relations Among the Four Principal Types of Order. // Transactions of the American Mathematical Society, 1935, 38.1. – Pp. 1–9.

22. Tarski Alfred. The Concept of Truth in Formalized Languages. // Alfred Tarski: Logic, Semantics, Metamathematics. Trans. J. H. Woodger, second edition ed. and introduced by John Corcoran, Hackett, Indianapolis, 1983. – Pp. 152–278.

23. Langford Cooper Harold. Some theorems on deducibility. // Annals of Mathematics Second Series, 1926–1927, vol. 28, No. 1/4. – Pp. 16–40.

24. Langford Cooper Harold. Theorems on Deducibility (Second paper). // Annals of Mathematics, Second Series, 1926–1927,Vol. 28, No. 1/4. – Pp. 459–471.

25. Presburger M. Über die vollständigkeit eines gewissen systems der arithmetik ganzer zahlen, in welchem die addition als einzige operation hervortritt. // Sprawozdanie z 1 Kongresu Matematyków Krajow Slowianskich, Ksiaznica Atlas, 1930. – Pp. 92–10. Пер. на англ.: On the completeness of a certain system of arithmetic of whole numbers in which addition occurs as the only operation. // History and Philosophy of Logic, 12(2), 1991. – Pp. 225–233.

26. Skolem Torlaf. Über gewisse Satzfunktionen in der Arithmetik. // Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. klasse 7, 1930.

27. Mostowski Andrzej. On direct products of theories. // Journal of Symbolic Logic, 1952, vol. 17. – Pp. 1—31.

28. Tarski Alfred. A decision method for elementary algebra and geometry. // Prepared for publication with the assistance of J. C. C. McKinsey. Second edition, revised. Lithoprinted. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951. – 63 pp.

29. Семенов А. Л. Условия конечности для алгебр отношений. // Труды математического института им. В. А. Стеклова, 2003, т. 242. — С. 103–107.

30. Семенов А. Л., Сопрунов С. Ф. Конечные кванторные иерархии в алгебрах отношений. // Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 2011, т. 274. – С. 291–296.

31. Семенов А. Л. О некоторых расширениях арифметики сложения натуральных чисел // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1979. Т. 43, № 5. – С. 1175–1195.

32. Rabin Michael O. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. // Transactions of the American Mathematical Society, 1969, 141. – Pp. 1–35.

33. Muchnik An. A. Games on infinite trees and automata with dead-ends. A new proof for the decidability of the monadic second order theory of two successors. // Bull. EATCS, 1992, 48. – Pp. 220–267.

34. Elgot Calvin C., Rabin Michael O. Decidability and Undecidability of Extensions of Second (First) Order Theory of (Generalized) Successor. // J. Symb. Log., 1966, vol. 31, No. 2. – Pp. 169–181.

35. Сопрунов С. Ф. Разрешимые обогащения структур. // Вопросы кибернетики, 1988, т. 134. – С. 175–179.

36. Bès Alexis, Cégielski Patrick. Weakly maximal decidable structures. // RAIRO – Theoretical Informatics and Applications, 2008, 42.01. – Pp. 137–145.

37. Bès Alexis, Cégielski Patrick. Nonmaximal decidable structures. // Journal of Mathematical Sciences, 2009, 158.5. – Pp. 615–622.

38. Tarski Alfred. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. // Studia Philosophica, 1935, vol. 1. – Pp. 261–405.

39. Tarski Alfred. Einige methodologifche Unterfuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe. // Erkenntnis, 1935, 5.1. – Pp. 80–100.

40. Beth Evert W. On Padoa's method in the theory of definition. // Indag. Math, 1953, 15. – Pp. 330–339.

41. Svenonius Lars. A theorem on permutations in models. // Theoria, 1959, 25.3. – Pp. 173–178.

42. Klein Felix. Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forsuchungen. // A. Deichert, 1872.

43. Huntington Edward V. The fundamental laws of addition and multiplication in elementary algebra. // The Annals of Mathematics, 1906, 8.1. – Pp. 1–44.

44. Semenov A. L., Soprunov S. F. *A combinatorial version of the Svenonius theorem on definability*, Logic Journal of IGPL. – 23.6 (2015): 966–975.

45. Macpherson D. A survey of homogeneous structures. // Discrete Mathematics, 2011, vol. 311, No. 15. – Pp. 1599–1634.

46. Hodges Wilfrid. Model theory. // Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1993, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge.

47. Korec Ivan. A list of arithmetical structures complete with respect to the first-order definability. // Theoretical computer science, 2001, 257.1. – Pp. 115–151.

48. Семенов А. Л. Пресбургеровость предикатов, регулярных в двух системах счисления. // Сибирский математический журнал, 1977, т. 18, № 2. — С. 403–418.

49. Frasnay Claude. Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes. // Annales de l'institut Fourier, 1965, vol. 15, No. 2. – Pp. 415–524.

50. Huntington Edward V. The continuum as a type of order: an exposition of the model theory. // Ann. Math., 1904, 6. – Pp. 178–179.

51. Cameron Peter J. Transitivity of permutation groups on unordered sets. // Mathematische Zeitschrift, 1976, 148.2, Pp. 127–139.

52. Winkler Peter. Random structures and zero-one laws. Finite and infinite combinatorics in sets and logic, Springer Netherlands, 1993. – Pp. 399–420.

53. Rado Richard. Universal graphs and universal functions. // Acta Arithmetica, 1964, 9.4. – Pp. 331–340.

54. Thomas Simon. Reducts of random hypergraphs. // Annals of Pure and Applied Logic, 1996, 80.2. – Pp. 165–193.

55. Thomas Simon. Reducts of the random graph. // Journal of Symbolic Logic, 1991, 56(1). – Pp. 176–181.

56. Bodirsky Manuel, Pinsker Michael, Pongrácz András. The 42 reducts of the random ordered graph. // 2013, arXiv:1309.2165.

57. Junker Markus, Ziegler Martin. The 116 reducts of $(\mathbb{Q}, <, a)$. // Journal of Symbolic Logic, 2008, vol. 73, issue 3. – Pp. 861–884. DOI: https://doi.org/10.2178/jsl/1230396752.

58. Ahlbrandt Gisela, Ziegler Martin. Invariant subgroups of ${}^VV$. // J. Algebra, 1992, 151, no. 1. – Pp. 26–38.

59. Bodirsky M., Macpherson D. Reducts of structures and maximal-closed permutation groups. // 2013, arXiv:1310.6393.

60. Kaplan I., Simon P. The affine and projective groups are maximal. // 2013, arXiv:1310.8157.

61. Marker D., Peterzil Y. A., Pillay A. Additive reducts of real closed fields. // The Journal of symbolic logic, 1992, vol. 57, issue 1. – Pp. 109–117. DOI: https://doi.org/10.2307/2275179.

62. Peterzil Ya'acov. Reducts of some structures over the reals. // Journal of Symbolic Logic, 1993, 58.3. – Pp. 955–966. DOI: https://doi.org/10.2307/2275107.

63. Marker D., Pillay A. Reducts of $(C, +, \cdot)$ which contain $+$. // Journal of Symbolic Logic, 1990, vol. 55, issue 3. – Pp. 1243–1251.

64. Semenov A. L., Soprunov S. F. Lattice of relational algebras definable in integers with successor. // 2012, arXiv:1201.4439

65. Bodirsky Manuel, Pinsker Michael, Tsankov Todor. Decidability of definability. // IEEE 26th Annual Symposium on Logic in Computer Science, 2011. – Pp. 321–328.

66. Muchnik An. A. The definable criterion for definability in Presburger arithmetic and its applications. // Theoretical Computer Science, 2003, 290.3. – Pp. 1433–1444.

67. Addison Jr. J. W. The undefinability of the definable. // Notices Amer. Math. Soc., 1965, 12. – Pp. 347.

68. Tanaka Hisao. Some results in the effective descriptive set theory. // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 1967, 3.1. – Pp. 11–52.

REFERENCES

1. Addison, Jr. J. W. 1965, "The undefinability of the definable", *Notices Amer. Math. Soc.*, 12, pp. 347.
2. Ahlbrandt, Gisela & Ziegler, Martin. 1992, "Invariant subgroups of ${}^V V$", *J. Algebra*, 151, no. 1, pp. 26–38.
3. Bès, Alexis & Cégielski, Patrick. 2008, "Weakly maximal decidable structures", *RAIRO – Theoretical Informatics and Applications*, 42.01, pp. 137–145.
4. Bès, Alexis & Cégielski, Patrick. 2009, "Nonmaximal decidable structures", *Journal of Mathematical Sciences*, 158.5, pp. 615–622.
5. Beth, Evert W. 1953, "On Padoa's method in the theory of definition", *Indag. Math*, 15, pp. 330–339.
6. Bodirsky, M. & Macpherson, D. 2013, "Reducts of structures and maximal-closed permutation groups", *arXiv:1310.6393.*
7. Bodirsky, Manuel, Pinsker, Michael & Pongrácz, András. 2013, "The 42 reducts of the random ordered graph", *arXiv:1309.2165.*
8. Bodirsky, Manuel, Pinsker, Michael & Tsankov, Todor. 2011, "Decidability of definability." *IEEE 26th Annual Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 321–328.
9. Boole, George. 1847, *The mathematical analysis of logic*, Philosophical Library.
10. Buchi, J. Richard & Danhof, Kenneth J. 1973, "Definibility in normal theories", *Israel Journal of Mathematics*, 14.3, pp. 248–256.
11. Cameron, Peter J. 1976, "Transitivity of permutation groups on unordered sets". *Mathematische Zeitschrift,* 148.2. – Pp. 127–139.
12. Duporcq, Ernest, ed. 1902, *Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900: procès-verbaux et communications*, Gauthier-Villars, imprimeur-library, 455 pp.
13. Elgot, Calvin C. & Rabin, Michael O. 1966, "Decidability and Undecidability of Extensions of Second (First) Order Theory of (Generalized) Successor", *J. Symb. Log.*, Vol. 31, No. 2, pp. 169–181.
14. Frasnay, Claude. 1965, "Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes", *Annales de l'institut Fourier*, vol. 15, No. 2, pp. 415–524.
15. Frege, G. 1879, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle. Translated in van Heijenoort J. 1931, *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, pp. 3–82.
16. Frege, G. 1893, *Grundgesetze der arithmetik*, Publ. in 1964 by Jena: Verlag Hermann Pohle, Band I/II. Partial translation of Band I, *The Basic Laws of Arithmetic*, by M. Furth, Berkeley: U. of California Press.
17. Hilbert, David. 1900, "Mathematische probleme", *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 253–297.

18. Hodges, Wilfrid. 1993, “Model theory“, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge.

19. Hodges, Wilfrid. 2000, *Model Theory (Draft 20 Jul 2000)*. Available at: `http://wilfridhodges.co.uk/history07.pdf` (accessed 25 December 2020).

20. Huntington, Edward V. 1904, “The continuum as a type of order: an exposition of the model theory“, *Ann. Math.*, 6, pp. 178–179.

21. Huntington, Edward V. 1906, “The Fundamental Laws of Addition and Multiplication in Elementary Algebra“, *The Annals of Mathematics*, 8.1, pp. 1–44.

22. Huntington, Edward V. 1935, “Inter-Relations Among the Four Principal Types of Order“, *Transactions of the American Mathematical Society*, 38.1, pp. 1–9.

23. International Congress of Philosophy. 1900–1903, *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie*, Four volumes. Paris: Librairie Armand Colin.

24. Junker, Markus & Ziegler, Martin. 2008, “The 116 reducts of $(\mathbb{Q}, <, a)$“, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 73, issue 3, pp. 861–884. DOI: `https://doi.org/10.2178/jsl/1230396752`

25. Kaplan, I. & Simon, P. 2013, “The affine and projective groups are maximal“, *arXiv:1310.8157*.

26. Klein, Felix. 1872, *Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forsuchungen*, A. Deichert.

27. Korec, Ivan. 2001, “A list of arithmetical structures complete with respect to the first-order definability“, *Theoretical computer science*, 257.1, pp. 115–151.

28. Langford, Cooper Harold. 1926–1927, “Some theorems on deducibility“, *Annals of Mathematics Second Series*, Vol. 28, No. 1/4, pp. 16–40.

29. Langford, Cooper Harold. 1926–1927, “Theorems on Deducibility (Second paper)“, *Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 28, No. 1/4, pp. 459–471.

30. Lindenbaum, A. & Tarski, A. 1935, “Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien“, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, Heft 7, pp. 15–22. (Engl. trans.: “On the Limitations of the Means of Expression of Deductive Theories“, *In Alfred Tarski: Logic, Semantics, Metamathematics*, J. Corcoran, ed., Hackett, Indianapolis, 1956, pp. 384–392.

31. Löwenheim, Leopold. 1915, “Über möglichkeiten im relativkalkül“, *Mathematische Annalen*, 76.4, pp. 447–470.

32. Macpherson, D. 2011, “A survey of homogeneous structures“, *Discrete Mathematics*, vol. 311, No 15, pp. 1599–1634.

33. Marker, D.& Pillay, A. 1990, “Reducts of $(C, +, \cdot)$ which contain +“, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 55, issue 3, pp. 1243–1251.

34. Marker, D., Peterzil, Y. A.& Pillay, A. 1992, “Additive reducts of real closed fields“, *The Journal of symbolic logic*, vol. 57, issue 1, pp. 109–117. DOI: `https://doi.org/10.2307/2275179`.

35. Mostowski, Andrzej. 1952, “On direct products of theories“, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 17, pp. 1–31.

36. Muchnik, An. A. 1992, "Games on infinite trees and automata with dead-ends. A new proof for the decidability of the monadic second order theory of two successors", *Bull. EATCS*, 48, pp. 220–267.

37. Muchnik, An. A. 2003, "The definable criterion for definability in Presburger arithmetic and its applications", *Theoretical Computer Science*, 290.3, pp. 1433–1444.

38. Padoa Alessandro. 1900, "Logical introduction to any deductive theory", In From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Ed. by Jean van Heijenoort. Cambridge, Mass., Harvard University Press, pp. 118—123.

39. Peacock, George. 1834, "Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis", *Report of the third meeting of the British Association for the Advancement of Science held at Cambridge in 1833*, John Murrary, London, pp. 185–352.

40. Peirce, Charles Sanders. 1873, "Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic", *Memoirs of the American academy of arts and sciences*, vol. 9, part 2, pp. 317–378.

41. Peirce, Charles Sanders. 1885, "On the algebra of logic: A contribution to the philosophy of notation", *American journal of mathematics*, 7.2, pp. 180–196.

42. Peterzil, Ya'acov. 1993, "Reducts of some structures over the reals", *Journal of Symbolic Logic*, 58.3, pp. 955–966. DOI: https://doi.org/10.2307/2275107.

43. Pieri, Mario. 1908, "La geometria elementare istituita sulle nozioni 'punto' é 'sfera'", *Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze*, 15, pp. 345–450.

44. Presburger, M. 1930, "Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt", *Sprawozdanie z 1 Kongresu Matematyków Krajow Slowianskich*, Ksiaznica Atlas. pp. 92–10. (Translated: "On the completeness of a certain system of arithmetic of whole numbers in which addition occurs as the only operation", *History and Philosophy of Logic*, 12(2), 1991, pp. 225–233.)

45. Rabin, Michael O. 1969, "Decidability of second-order theories and automata on infinite trees", *Transactions of the American Mathematical Society*, 141, pp. 1–35.

46. Rado, Richard. 1964, "Universal graphs and universal functions", *Acta Arithmetica*, 9.4, pp. 331–340.

47. Schröder, Ernst. 1898, "On Pasigraphy. Its Present State and the Pasigraphic Movement in Italy", *The Monist*, 9.1, pp. 44–62.

48. Schröder, Ernst. 1966, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Volumes 1 to 3. Teubner, Leipzig. Reprinted by Chelsea, New York.

49. Semenov, A. L. 1977, "Presburgerness of Predicates Regular in Two Number Systems", *Siberian Math. J.*, 18.2, pp. 289–300.

50. Semenov, A. L. 1980, "On certain extensions of the arithmetic of addition of natural numbers", *Izvestiya: Mathematics*, 15.2, pp. 401–418.

51. Semenov, A. L. 2003, "Finiteness Conditions for Algebras of Relations", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 242, pp. 92–96.)

52. Semenov, A. & Soprunov, S. 2011, “Finite quantifier hierarchies in relational algebras“, *Proceedings of the Steklov I Institute of Mathematics*, 274.1, pp. 267–272.

53. Semenov, A. L. & Soprunov, S. F. 2012, “Lattice of relational algebras definable in integers with successor“, *arXiv:1201.4439.*

54. Semenov, A. L. & Soprunov, S. F. 2013, *A combinatorial version of the Svenonius theorem on definability*, Logic Journal of IGPL. – 23.6 (2015): 966–975.

55. Skolem, Thoralf. 1920, “Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfullbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sdtze nebst einem Theorem über dichte Mengen“, *Videnskapsselskapets skrifter*, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 4.

56. Skolem, Torlaf. 1930, “Über gewisse Satzfunktionen in der Arithmetik“, *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania*, I. klasse 7.

57. Smith, James T. 2010, “Definitions and Nondefinability in Geometry“, *The American Mathematical Monthly*, 117.6, pp. 475–489.

58. Soprunov, S. 1988, “Razreshimye obogashchenia struktur – Decidable expansions of structures“, *Vopr. Kibern.*, 134, pp. 175–179 (in Russian).

59. Svenonius, Lars. 1959, “A theorem on permutations in models“, *Theoria*, 25.3, pp. 173–178.

60. Tanaka, Hisao. 1967, “Some results in the effective descriptive set theory“, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 3.1, pp. 11–52.

61. Tarski, Alfred. 1935, “Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen“, *Studia Philosophica*, vol. 1, pp. 261–405.

62. Tarski, Alfred. 1935, “Einige methodologifche Unterfuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe“, *Erkenntnis*, 5.1, pp. 80–100.

63. Tarski, Alfred. 1951, *A decision method for elementary algebra and geometry.* Prepared for publication with the assistance of J. C. C. McKinsey. Second edition, revised. Lithoprinted. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, iii + 63 pp.

64. Tarski, Alfred. 1983, “The Concept of Truth in Formalized Languages“, *Alfred Tarski: Logic, Semantics, Metamathematics.* Trans. J. H. Woodger, second edition ed. and introduced by John Corcoran, Hackett, Indianapolis, pp. 152–278.

65. Tarski, Alfred. 1986, “What are logical notions?“ *History and philosophy of logic*, 7.2, pp. 143–154.

66. Thomas, Simon. 1991, “Reducts of the random graph“, *Journal of Symbolic Logic*, 56(1), pp. 176–181.

67. Thomas, Simon. 1996, “Reducts of random hypergraphs“, *Annals of Pure and Applied Logic*, 80.2, pp. 165–193.

68. Winkler, Peter. 1993, *Random structures and zero-one laws. Finite and infinite combinatorics in sets and logic*, Springer Netherlands, pp. 399–420.

Получено 20.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517.382 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-328-339

Условие сходимости несобственных кратных интегралов в терминах многогранников Ньютона

Т. Ю. Семенова

Татьяна Юрьевна Семенова — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: station@list.ru

Аннотация

В статье рассматриваются многомерные несобственные интегралы от функций, являющихся произведением обобщенных многочленов в некоторых степенях. Такие интегралы встречаются во многих разделах математики и теоретической физики. В частности, к ним относятся интегралы Фейнмана, возникающие при изучении различных объектов квантовой теории поля. Точное вычисление этих интегралов является сложной и не всегда возможной задачей, поэтому определение условий их сходимости и получение их асимптотического разложения по одному из параметров представляет значительный практический интерес. Условия сходимости рассмотренных в работе интегралов ещё могут быть использованы, например, при исследовании кратных рядов, представляющих сумму значений рациональной функции в узлах целочисленной решетки.

В статье рассмотрена задача, когда областью интегрирования является $\mathbb{R}^n_+$, а обобщенные многочлены, входящие в подынтегральную функцию, либо положительны всюду, кроме нуля, либо имеют положительные коэффициенты. Описано множество сходимости этих интегралов и доказана равносильность условия сходимости условию на многогранники Ньютона многочленов в подынтегральных функциях.

Доказанный в работе критерий сходимости совпадает по формулировке с соответствующим результатом работ А. К. Циха и Т. О. Ермолаевой, но он получен другими методами и для немного более широкого множества подынтегральных функций.

Доказательства утверждений в работе основаны на простейших свойствах выпуклых многогранников и базовых фактах из теории несобственных кратных интегралов.

Ключевые слова: сходимость несобственных кратных интегралов, многогранники Ньютона.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Т. Ю. Семенова Условие сходимости несобственных кратных интегралов в терминах многогранников Ньютона // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 328–339.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 517.382 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-328-339

The convergence condition for improper short integrals in terms of Newton polytopes

T. Yu. Semenova

Tatyana Yuryevna Semenova — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: station@list.ru

Abstract

The article considers multidimensional improper integrals of functions that are the product of generalized polynomials in some degrees. Such integrals are found in many branches of mathematics and theoretical physics. In particular, they include Feynman integrals arising in the study of various objects of quantum field theory. The exact calculation of these integrals is a difficult and not always possible task; therefore, determining the conditions for their convergence and obtaining their asymptotic expansion in one of the parameters is of considerable practical interest. The convergence conditions for the integrals considered in the article can still be used, for example, in the study of multiple series representing the sum of the values of a rational function at the nodes of an integer lattice.

The article considers the problem when the integration area is $\mathbb{R}^n_+$, and the generalized polynomials included in the integrand are either positive everywhere except zero or have positive coefficients. The convergence set of these integrals is described and the equivalence of the convergence condition to the condition on the Newton polytopes of polynomials in integrands is proved.

The convergence criterion proved in the paper coincides in formulation with the corresponding result of the work of A. K. Tsikh and T. O. Ermolaeva, but it was obtained by other methods and for a slightly wider set of integrands.

The proofs of the statements in the paper are based on the simplest properties of convex polytopes and basic facts from the theory of improper multiple integrals.

Keywords: convergence of improper multiple integrals, Newton polytopes.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
T. Yu. Semenova, 2021, "The convergence condition for improper short integrals in terms of Newton polytopes *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 328–339.

1. Введение

Обобщенными многочленами, определенными на $\mathbb{R}^n_+$, будем называть выражения вида $\sum\limits_w c_w x^w$, где $w = (w_1, \ldots, w_n)$ — $n-$мерный мультииндекс, составленный из неотрицательных (необязательно целых) чисел, $x^w = x_1^{w_1} \ldots x_n^{w_n}$, коэффициенты $c_w \in \mathbb{R}$.

Обозначим $\mathcal{P}_{c+}$ — множество обобщенных многочленов с положительными коэффициентами, $\mathcal{P}_+$ — множество обобщенных многочленов, принимающих положительные значения на $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$. Понятно, что $\mathcal{P}_{c+} \not\subset \mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_+ \not\subset \mathcal{P}_{c+}$.

Исследуем сходимость интеграла

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx_1 \ldots dx_n. \tag{1}$$

Здесь знаменатель $Q(x) = Q_1^{\beta_1}(x) \cdot \ldots \cdot Q_m^{\beta_m}(x)$, где $Q_j(x) \in \mathcal{P}_{c+} \cup \mathcal{P}_+$, числа $\beta_j > 0$. Для числителя $P(x)$ будем рассматривать два варианта: либо это произвольный обобщенный многочлен, либо выражение вида $P_1^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot P_k^{\alpha_k}(x)$, где $P_i(x) \in \mathcal{P}_{c+} \cup \mathcal{P}_+$, числа $\alpha_i > 0$. Изучение подобных интегралов связано с различными задачами в математике и физике, например, с исследованием фейнмановских интегралов (см. [1]-[7]), с исследованием сходимости кратных рядов (см. [8]-[9]).

Частный случай этой задачи для (1) разбирался в работе [10] при получении асимптотического разложения при $t \to 0+$ интеграла

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty (Q(x,t))^{-\beta} dx_1 \ldots dx_n,$$

здесь $\beta > 0$, а $Q(x,t)$ — многочлен с положительными коэффициентами, зависящий от переменных интегрирования $x_1, \ldots, x_n$ и параметра t.

Ранее исследование аналогичного вопроса проводилось в работах А. К. Циха, Т. О. Ермолаевой, Е. В. Зубченковой (см. [11], [12], [8]), там рассматривались интегралы вида

$$\int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx_1 \ldots dx_n, \tag{2}$$

где числитель $P(x)$ — многочлен $\sum c_w x^w$, $w \in \mathbb{N}_0^n$, знаменатель $Q(x)$ — квазиэллиптический многочлен $\sum c_h x^h$, $h \in \mathbb{N}_0^n$ (или произведение степеней квазиэллиптических многочленов), который нигде не обращается в нуль, то есть интеграл не имеет особенностей внутри $\mathbb{R}^n$.

Основной результат данной работы (теоремы 1 и 2) согласуется с результатами работы [12]: необходимым и достаточным условием сходимости интеграла является условие того, что сдвиг многогранника Ньютона, соответствующего числителю $P(x)$, на вектор $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ содержится во внутренности многогранника, соответствующего $Q(x)$.

В некоторых случаях при помощи подходящей замены переменных исследование сходимости интеграла вида (1) сводится к исследованию интеграла вида (2). Однако переход от одной задачи к другой осуществим, если знаменатель нигде не обращается в нуль, показатели степеней переменных в обобщенных многочленах рациональны, а числа α_i, β_j — натуральные. В то же время исследование сходимости интеграла вида (2) всегда может быть сведено к исследованию интегралов вида (1).

Дополнительно, как следствие основных результатов, в статье описано множество сходимости интеграла (1).

2. Формулировка основных результатов

Далее для краткости обобщенные многочлены иногда будем называть просто многочленами. Если $G(x) = \sum\limits_{w \in S} c_w x^w$ — многочлен, $S \subset \mathbb{R}_+^n$ — носитель многочлена, обозначим через $\mathcal{N}_G$ многогранник Ньютона многочлена $G(x)$ — выпуклую оболочку S в $\mathbb{R}_+^n$. Также обозначим $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)$ — элемент пространства $\mathbb{R}^n$.

По определению считаем $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ — сумма Минковского двух подмножеств линейного пространства, $\lambda A = \{\lambda a | a \in A\}$ — произведение подмножества линейного пространства на число $\lambda > 0$, $Int(A)$ — внутренность множества A. Заметим, что если A и B — выпуклые многогранники, то λA и $A + B$ — выпуклые многогранники (см. [13]-[16]).

Теорема 1. *Пусть* $P(x) = P_1^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot P_k^{\alpha_k}(x)$, $Q(x) = Q_1^{\beta_1}(x) \cdot \ldots \cdot Q_m^{\beta_m}(x)$, *где* $P_i(x)$, $Q_j(x) \in \mathcal{P}_{c+} \cup \mathcal{P}_+$, *числа* $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0$. *Интеграл* (1) *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{N}_{P_i} + \mathbf{e} \subset Int\Big(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathcal{N}_{Q_j}\Big). \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть* $P(x)$ — *обобщенный многочлен,* $Q(x) = Q_1^{\beta_1}(x) \cdot \ldots \cdot Q_m^{\beta_m}(x)$, *где* $Q_j(x) \in \mathcal{P}_{c+} \cup \mathcal{P}_+$, *числа* $\beta_j > 0$. *Интеграл* (1) *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{N}_P + \mathbf{e} \subset Int\Big(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathcal{N}_{Q_j}\Big).$$

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 1 множество значений параметров* $\{(\alpha, \beta)\}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *и* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, *для которых интеграл* (1) *сходится, является открытым полиэдральным множеством в* $\mathbb{R}_+^{k+m}$. *Аналогично, при выполнении условий теоремы 2 множество значений параметров* $\{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)\}$, *для которых интеграл* (1) *сходится, является открытым полиэдральным множеством в* $\mathbb{R}_+^m$.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть многочлен* $G(x) = \sum\limits_{w \in S} c_w x^w \in \mathcal{P}_+$ *и* S_G — *множество вершин многогранника* $\mathcal{N}_G$. *Тогда верны следующие утверждения:*

(I) коэффициенты c_w *многочлена* $G(x)$, *где* $w \in S_G$, *положительны;*

(II) существуют такие положительные постоянные k *и* K, *что для любого* $x \in \mathbb{R}_+^n$ *выполняется неравенство*

$$k \cdot \sum_{w \in S_G} x^w \le G(x) \le K \cdot \sum_{w \in S_G} x^w.$$

Доказательство.

(I) Возьмём $w^* \in S_G$ — одну из вершин многогранника $\mathcal{N}_G$. В силу выпуклости множества $\mathcal{N}_G$ существует гиперплоскость $a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n + a_0 = 0$ (или, если кратко, $(a, w) + a_0 = 0$), разделяющая w^* и $\mathcal{N}_G \setminus \{w^*\}$. Гиперплоскость можно взять такую, что для точки w^* верно $(a, w^*) + a_0 = 0$, а для всех точек $w = (w_1, \ldots w_n) \in \mathcal{N}_G \setminus \{w^*\}$ выполняется неравенство $(a, w) + a_0 < 0$.

Среди чисел a_i, где $i = 1, \ldots, n$, есть не равные нулю. Без ограничения общности можно считать, что это $a_1, \ldots, a_l$. В многочлене $G(x)$ сделаем невырожденную замену переменных $x_i = y_i^{a_i}$ для $i = 1, \ldots l$:

$$G(y_1, \ldots y_l, x_{l+1}, \ldots x_n) = \sum_{w \in S} c_w y_1^{a_1 w_1} \ldots y_l^{a_l w_l} \cdot x_{l+1}^{w_{l+1}} \ldots x_n^{w_n}.$$

Далее, от координат $y_1, \ldots, y_l$ перейдём к стандартным гиперсферическим координатам $r \in [0, +\infty)$, $\theta_1, \ldots, \theta_{l-1} \in [0; \pi/2]$. Тогда многочлен G представляется в виде

$$\sum_{w \in S} c_w \psi_w r^{(a,w)} = r^{-a_0} \cdot \Big(c_{w^*} \psi_{w*} + \sum_{w \in S \setminus \{w^*\}} c_w \psi_w r^{(a,w)+a_0}\Big),$$

где ψ_w – функции, зависящие от $\theta_1, \ldots, \theta_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n$, и они почти всюду положительны, показатель степени с основанием r в последней сумме меньше нуля. При фиксированных

$\theta_1,\ldots,\theta_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_n$, и таких, что $\psi_{w*}\neq 0$, существует такое значение r_0, что при $r>r_0$ выражение в скобках будет одного знака с коэффициентом c_{w^*} почти всюду. Поскольку $G(x)$ положителен при любом $x\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$, коэффициент $c_{w^*}>0$. Первая часть леммы доказана.

(II) Докажем оценку сверху. Очевидно, что $G(x)\leq\sum\limits_{w\in S_+}c_wx^w$, где $S_+=\{w\in S,c_w>0\}$. При этом $S_G\subset S_+$ в силу доказанного первого утверждения леммы. Поскольку выпуклый многогранник является выпукой комбинацией своих вершин, любое $h\in\mathcal{N}_G$ можно представить в виде $h=\sum\limits_{w\in S_G}\lambda_w\cdot w$, где $\lambda_w\in[0;1]$ и $\sum\lambda_w=1$. Тогда в силу теоремы о средних (см. [17], глава 2.5), выполняется неравенство

$$x^h=\prod_{w\in S_G}(x^w)^{\lambda_w}\leq\sum_{w\in S_G}\lambda_w\cdot x^w\leq\sum_{w\in S_G}x^w.$$

Отсюда можно получить, что существует $K>0$ такое, что

$$G(x)\leq\sum_{w\in S_+}c_wx^w=\sum_{w\in S_G}c_wx^w+\sum_{h\in S_+\setminus S_G}c_hx^h\leq K\sum_{w\in S_G}x^w.$$

Теперь докажем оценку снизу. По условию для любых $x\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$ выполнено $G(x)=\sum\limits_{w\in S_+}c_wx^w-\sum\limits_{w\in S\setminus S_+}|c_w|x^w>0$. Введем функцию

$$F(x)=\sum_{w\in S\setminus S_+}|c_w|x^w\cdot\Big(\sum_{w\in S_+}c_wx^w\Big)^{-1},$$

которая будет определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$ и значения которой принадлежат промежутку $[0;1)$. Докажем, что существует такое $\varepsilon<1$, что $F(x)\leq\varepsilon$, тогда из этого будет следовать неравенство $G(x)\geq(1-\varepsilon)\sum\limits_{w\in S_+}c_wx^w\geq(1-\varepsilon)\sum\limits_{w\in S_G}c_wx^w$, то есть пункт (II) леммы.

Сначала сделаем это при двух допущениях: носитель S многочлена G содержит $w=0$ и значения $(w_1+...+w_n)$ различны для всех $w\in S$. Первое допущение даёт дополнительное условие $G(x)|_{x=0}>0$, и тогда функция $F(x)$ определена при $x=0$ и непрерывна на $\mathbb{R}^n_+$.

Предположим, нет такого значения $\varepsilon<1$, что $F(x)\leq\varepsilon$. Тогда существует последовательность $\{x^N\}$, такая, что $F(x^N)\to 1$ при $N\to+\infty$. Если последовательность ограничена, из нее можно выбрать сходящуюся к некоторому $x^*\in\mathbb{R}^n_+$ подпоследовательность, и тогда, в силу непрерывности F, будет выполнено $F(x^*)=1$, что невозможно. Значит, последовательность $\{x^N\}$ неограничена. От переменных x_1,...,x_n перейдём к гиперсферическим координатам $r\in[0,+\infty)$, $\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}\in[0;\pi/2]$. Из последовательности $\{x^N\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x^{N_p}\}$, такую, что $r^{N_p}\to+\infty$, $\theta_1^{N_p}\to\theta_1^*$, ..., $\theta_{n-1}^{N_p}\to\theta_{n-1}^*$ при $p\to+\infty$, при этом θ_1^*, ...,θ_{n-1}^* – некоторые значения из $[0;\pi/2]$. Теперь, в силу непрерывности F, имеем

$$1=\lim_{p\to+\infty}F(x^{N_p})=\lim_{p\to+\infty}F(r^{N_p},\theta_1^*,\,...,\theta_{n-1}^*).$$

Поскольку $F(r,\theta_1^*,\,...,\theta_{n-1}^*)$ представляет из себя отношение двух многочленов от переменной r, предел может быть равен 1, если максимальный показатель степени r в числителе равен максимальному показателю степени r в знаменателе. Показатели степеней r совпадают со значениями $(w_1+...+w_n)$ и различны для всех $w\in S$. Получили противоречие, значит, наше предположение неверно и существует $\varepsilon<1$, что $F(x)\leq\varepsilon$.

Теперь разберёмся, почему утверждение достаточно доказать при сделанных допущениях. Действительно, если множество S не содержит $w=0$, то, поскольку $G(x)|_{x=(1,0,...,0)}>0$, множество S_+ должно содержать элементы вида $w=(w_1,0,....,0)$. Сделаем замену $x_i=y_i^{a_i}$, где числа $a_i>0$ подбираются таким образом, что для новых показателей w степеней переменной y будет выполняться $\min\limits_w(w_1+...+w_n)=w_1^*$ для некоторого $w^*=(w_1^*,0,...,0)$. Теперь сделаем ещё одну замену $y_1 = \widetilde{x}_1$, $y_2 = \widetilde{x}_1^{w_1^*} \cdot \widetilde{x}_2$, ..., $y_n = \widetilde{x}_1^{w_1^*} \cdot \widetilde{x}_n$, после которой дробь, представляющая функцию F, может быть сокращена на множитель $\widetilde{x}_1^{w_1^*}$, и задача сведётся к случаю, когда S содержит нуль. Сделав обратные замены, останется отдельно рассмотреть значения F при $x_1 = 0$. Оценка $F(x) \le \varepsilon$ для $x_1 = 0$ будет следовать из непрерывности $F(x)$ на $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$.

Выполнения второго условия, при котором мы провели доказательство, — различия значений $(w_1 + ... + w_n)$ при разных w — можно добиться заменой $x_i = y_i^{a_i}$, подобрав соответствующие $a_i > 0$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть $G(x) = \sum\limits_{w \in S} c_w x^w \in \mathcal{P}_{c+}$, число $\gamma > 0$. Тогда существуют такие положительные постоянные k и K, что для любого $x \in \mathbb{R}^n_+$ выполняется неравенство*

$$k \cdot \sum_{w \in \gamma S} x^w \le G^\gamma(x) \le K \cdot \sum_{w \in \gamma S} x^w.$$

Доказательство. Очевидно, что лемму достаточно доказать для многочлена $G(x)$ с коэффициентами $c_w = 1$.

Сначала рассмотрим случай $\gamma > 1$. Пусть a_i, $i = 1, \ldots, k$, — неотрицательные числа. В силу выпуклости вниз функции $z(t) = t^\gamma$, верно соотношение $\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^\gamma \le \frac{a_1^\gamma + a_2^\gamma}{2}$ или $(a_1 + a_2)^\gamma \le 2^{\gamma - 1}(a_1^\gamma + a_2^\gamma)$. Далее, $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right)^\gamma \le 2^{\gamma-1}\left(a_1^\gamma + \left(\sum\limits_{i=2}^{k} a_i\right)^\gamma\right) \le \ldots \le C(k, \gamma) \sum\limits_{i=1}^{k} a_i^\gamma$. Применив это неравенство, получаем

$$G^\gamma(x) = \Big(\sum_{w \in S} x^w\Big)^\gamma \le C(|S|, \gamma) \sum_{w \in S} x^{\gamma w}. \tag{4}$$

В силу неравенства $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^\gamma \le \left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right)^\gamma$, верного для любых неотрицательных a_i и любого $\gamma > 1$ (см. [17], глава 2.12), будем иметь оценку

$$\sum_{w \in S} x^{\gamma w} \le \Big(\sum_{w \in S} x^w\Big)^\gamma = G^\gamma(x). \tag{5}$$

Из неравенств (4) и (5) и того факта, что $\sum\limits_{w \in S} x^{\gamma w} = \sum\limits_{w \in \gamma S} x^w$, получаем утверждение леммы.

Аналогичный результат можно получить и при $0 < \gamma < 1$, только там уже будет использована оценка $C(|S|, \gamma) \cdot \sum\limits_{w \in S} x^{\gamma w} \le \left(\sum\limits_{w \in S} x^w\right)^\gamma \le \sum\limits_{w \in S} x^{\gamma w}$.

Случай $\gamma = 1$ тривиален. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть функция $f(x)$, определеннная на $\mathbb{R}^n_+$, неотрицательна и интегрируема по Риману на любом замкнутом кубируемом подмножестве $\mathbb{R}^n_+$. Для любых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, и $\beta_1, \ldots, \beta_m$, для любых многочленов $P_1, \ldots, P_k$ и $Q_1, \ldots, Q_m$, принадлежащих множеству $\mathcal{P}_+ \cup \mathcal{P}_{c+}$, верно*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x) \cdot \frac{P_1^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot P_k^{\alpha_k}(x)}{Q_1^{\beta_1}(x) \cdot \ldots \cdot Q_m^{\beta_m}(x)} dx < +\infty \Longleftrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x) \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} dx < +\infty,$$

где $P(x) = \sum\limits_{w \in S_P} x^w$, $Q(x) = \sum\limits_{w \in S_Q} x^w$, S_P и S_Q — множества вершин многогранников $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{N}_{P_i}$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \mathcal{N}_{Q_j}$ соответственно.

Доказательство. Пусть S_{P_i} и S_{Q_j} — множества вершин многогранников $\mathcal{N}_{P_i}$ и $\mathcal{N}_{Q_j}$ соответственно. Применив несколько раз утверждение пункта (II) леммы 1, можно получить равносходимость интегралов от функции $f(x)\cdot\frac{P_1^{\alpha_1}(x)\cdot\ldots\cdot P_k^{\alpha_k}(x)}{Q_1^{\beta_1}(x)\cdot\ldots\cdot Q_m^{\beta_m}(x)}$ и функции $f(x)\cdot\frac{\widetilde{P_1}^{\alpha_1}(x)\cdot\ldots\cdot\widetilde{P_k}^{\alpha_k}(x)}{\widetilde{Q_1}^{\beta_1}(x)\cdot\ldots\cdot\widetilde{Q_m}^{\beta_m}(x)}$, где $\widetilde{P}_i(x)=\sum\limits_{w\in S_{P_i}}x^w$, а $\widetilde{Q_j}(x)=\sum\limits_{w\in S_{Q_j}}x^w$.

Воспользовавшись несколько раз леммой 2, будем иметь равносходимость интегралов от функций $f(x)\cdot\frac{\widetilde{P_1}^{\alpha_1}(x)\cdot\ldots\cdot\widetilde{P_k}^{\alpha_k}(x)}{\widetilde{Q_1}^{\beta_1}(x)\cdot\ldots\cdot\widetilde{Q_m}^{\beta_m}(x)}$ и $f(x)\cdot\frac{P_1^*(x)\cdot\ldots\cdot P_k^*(x)}{Q_1^*(x)\cdot\ldots\cdot Q_m^*(x)}$, где многочлены $P_i^*(x)=\sum\limits_{w\in\alpha_i S_{P_i}}x^w$, а $Q_j^*(x)=\sum\limits_{w\in\beta_j S_{Q_j}}x^w$. Так как многогранник Ньютона для многочлена $P_1^*(x)\cdot\ldots\cdot P_k^*(x)$ совпадает с многогранником $\sum\limits_{i=1}^k\alpha_i\mathcal{N}_{P_i}$, а многогранник Ньютона для многочлена $Q_1^*(x)\cdot\ldots\cdot Q_m^*(x)$ совпадает с многогранником $\sum\limits_{i=1}^m\beta_i\mathcal{N}_{Q_j}$, применив ещё раз результат леммы 1, получаем, что интеграл от функции $f(x)\cdot\frac{P_1^*(x)\cdot\ldots\cdot P_k^*(x)}{Q_1^*(x)\cdot\ldots\cdot Q_m^*(x)}$ равносходим с интегралом от функции $f(x)\cdot\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены вида $\sum x^w$ с носителями, являющимися множествами вершин многогранников $\sum\limits_{i=1}^k\alpha_i\mathcal{N}_{P_i}$ и $\sum\limits_{j=1}^m\beta_j\mathcal{N}_{Q_j}$ соответственно. Лемма доказана. □

4. Доказательство теоремы 1

Доказательство. Из леммы 3 следует, что теорему достаточно доказать для случая $I=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $P(x)=\sum\limits_{\delta\in T}x^\delta$, $Q(x)=\sum\limits_{w\in S}x^w$ — многочлены с произвольными носителями T и S из $\mathbb{R}_+^n$. Доказательство проведем в несколько шагов.

(I) Докажем, что интеграл $I=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}Q^{-1}(x)dx$, где $Q(x)=\sum\limits_{w\in S}x^w$, сходится тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}\in Int(\mathcal{N}_Q)$.

Начнем с необходимого условия сходимости. Предположим противное, что интеграл I сходится, но при этом $\mathbf{e}$ не принадлежит внутренности многогранника $\mathcal{N}_Q$. В силу выпуклости множества $\mathcal{N}_Q$ существует гиперплоскость $a_1w_1+\ldots+a_nw_n+a_0=0$, разделяющая $Int(\mathcal{N}_Q)$ и $\mathbf{e}$. Пусть для внутренних точек $w=(w_1,\ldots,w_n)$ многогранника $\mathcal{N}_Q$ выполняется неравенство $a_1w_1+\ldots+a_nw_n+a_0<0$, тогда для точки $\mathbf{e}$ верно $a_1+\ldots+a_n+a_0\geq 0$. Далее сделаем замену, такую же как в пункте (1) леммы 1, получим:

$$I=\prod_{i=1}^l|a_i|\cdot\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{i=1}^l y_i^{a_i-1}\cdot\Big(\sum_{w\in S}y_1^{a_1w_1}\ldots y_l^{a_lw_l}\cdot x_{l+1}^{w_{l+1}}\ldots x_n^{w_n}\Big)^{-1}dy_1\ldots dy_l dx_{l+1}\ldots dx_n.$$

После перехода от $y_1,\ldots,y_l$ к гиперсферическим координатам $r\in[0,+\infty)$, $\theta_1,\ldots,\theta_{l-1}\in[0;\pi/2]$, которые изменяются независимо друг от друга, для сходимости интеграла нам будет необходима сходимость интеграла по переменной r, то есть

$$\int_0^\infty\frac{r^{a_1+\ldots+a_l-l}\cdot r^{l-1}dr}{Q(r,\theta_1,\ldots,\theta_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_n)}.$$

Заметим, что теперь функция $Q(r,\theta_1,\ldots,\theta_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_n)$ — многочлен от переменной r, в него входят слагаемые вида $r^{a_1w_1+\ldots+a_lw_l}$ с коэффициентами, зависящими от $\theta_1,\ldots,\theta_{l-1}$, $x_{l+1},\ldots,x_n$, которые почти всюду положительны. Поэтому для сходимости в $+\infty$ необходимо, чтобы

$$\max_{w\in S}(a_1w_1+\ldots+a_lw_l)-(a_1+\ldots+a_l)>0$$

или

$$\max_{w\in S}(a_1w_1+\ldots+a_nw_n)-(a_1+\ldots+a_n)>0.$$

Поскольку для всех $w\in S$ выполнено неравенство $a_1w_1+\ldots+a_nw_n<-a_0$ и при этом $a_1+\ldots+a_n\geq -a_0$, левая часть неравенства отрицательна. Противоречие. Необходимое условие сходимости доказано.

Для доказательства достаточного условия заметим, что если $\mathcal{K}$ — произвольное конечное подмножество $\mathcal{N}_Q$, то интеграл $I=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}Q^{-1}(x)dx$ равносходим с интегралом $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\big(\sum\limits_{w\in S\cup\mathcal{K}}x^w\big)^{-1}dx$. Это следует из леммы 1. Поэтому, если интеграл I расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\big(\sum\limits_{w\in S\cup\mathcal{K}}x^w\big)^{-1}dx$. Тогда, из признака сравнения несобственных интегралов следует, что расходится и интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\big(\sum\limits_{w\in\mathcal{K}}x^w\big)^{-1}dx$.

Предположим, что интеграл I расходится, но при этом $\mathbf{e}\in Int(\mathcal{N}_Q)$. Возьмем $n-$мерный куб, лежащий внутри многогранника $\mathcal{N}_Q$ и содержащий $\mathbf{e}$, такой, что его грани параллельны координатным плоскостям. Пусть $\mathcal{K}$ — множество вершин куба и тогда, по замечанию выше, интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\big(\sum\limits_{w\in\mathcal{K}}x^w\big)^{-1}dx$ расходится. Так как $\mathcal{K}$ — вершины специальным образом выбранного куба, существуют положительные q и p такие, что этот интеграл представляется в виде:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\prod_{i=1}^n(x_i^q(1+x_i^p))^{-1}\,dx=\Big(\int_0^\infty(x_1^q(1+x_1^p))^{-1}\,dx_1\Big)^n=$$

$$=\Big(\frac{1}{q}B\Big(\frac{1-q}{q},\frac{(q+p)-1}{q}\Big)\Big)^n.$$

Поскольку $\mathbf{e}$ лежит внутри куба, выполнено условие $q<1<q+p$. Тогда бета-функция, через которую выражается значение интеграла, определена, то есть интеграл сходится. Противоречие. Достаточное условие доказано.

(II) Теперь докажем, что интеграл $I=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}x^\delta\cdot Q^{-1}(x)dx$, где $Q(x)=\sum\limits_{w\in S}x^w$, $\delta_i>-1$ для любого $i=1,\ldots,n$, сходится тогда и только тогда, когда $\delta+\mathbf{e}\in Int(\mathcal{N}_Q)$.

Сделаем замену переменных $y_i=x_i^{\delta_i+1}$. Тогда I преобразуется к виду

$$I=\prod_{i=1}^n(\delta_i+1)^{-1}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\Big(\sum_{w\in S}y_1^{\frac{w_1}{\delta_1+1}}\ldots y_n^{\frac{w_n}{\delta_n+1}}\Big)^{-1}dy.$$

Применим утверждение пункта (I). Интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}$ попадает внутрь многогранника Ньютона многочлена с носителем

$$\Big\{\Big(\frac{w_1}{\delta_1+1},\ldots,\frac{w_n}{\delta_n+1}\Big),w\in S\Big\},$$

что равносильно тому, что $\delta+\mathbf{e}\in Int(\mathcal{N}_Q)$. Утверждение пункта доказано.

(III) Последний шаг доказательства: необходимое и достаточное условие сходимости интеграла $I=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $P(x)=\sum\limits_{\delta\in T}x^\delta$, $Q(x)=\sum\limits_{w\in S}x^w$. Используя свойства несобственного интеграла и результат пункта (II), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{P(x)}{Q(x)}dx<+\infty\Longleftrightarrow\forall\delta\in T\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{x^\delta}{Q(x)}dx<+\infty\Longleftrightarrow\forall\delta\in T\,\delta+\mathbf{e}\in Int(\mathcal{N}_Q).$$

Последнее условие в силу выпуклости $\mathcal{N}_Q$ равносильно условию $\mathcal{N}_P+\mathbf{e}\subset Int(\mathcal{N}_Q)$. Теорема доказана. $\square$

5. Доказательство теоремы 2

Доказательство. Для одномерного случая утверждение теоремы легко получается из признака сравнения несобственных интегралов.

Рассмотрим случай $n \geq 2$. Числитель в подынтегральной функции представим в виде $P(x) = P_1(x) - P_2(x)$, где P_1 и P_2 — многочлены с положительными коэффициентами, причём их носители S_1 и S_2 не пересекаются. Из равносильности сходимости и абсолютной сходимости несобственного интеграла и утверждения леммы 3 следует, что доказательство достаточно провести для интеграла

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{P_1(x) - P_2(x)}{Q(x)} dx,$$

где $Q(x)$ — многочлен с положительными коэффициентами.

Достаточность условия $\mathcal{N}_P + \mathbf{e} \subset Int(\mathcal{N}_Q)$ для сходимости интеграла I очевидно следует из оценки $|P_1(x) - P_2(x)| \leq P_1(x) + P_2(x)$. Докажем необходимость. Предположим, что $\mathcal{N}_P + \mathbf{e} \not\subset Int(\mathcal{N}_Q)$, но при этом I сходится. Поскольку добавление к подынтегральной функции слагаемых $\frac{(-1)^i c_w x^w}{Q(x)}$, где $w + \mathbf{e} \in \big(S_i + \mathbf{e}\big) \cap Int(\mathcal{N}_Q)$, не меняет сходимости интеграла, утверждение можно доказать для такого $P(x)$, что $(S_P + \mathbf{e}) \cap Int(\mathcal{N}_Q) = \varnothing$.

Пусть W — множество вершин многогранника $\mathcal{N}_Q$, v — фиксированная точка $\mathcal{N}_Q$, $\lambda \geq 1$. Определим $W_v^\lambda = \{v + \lambda\cdot(w - v), w \in W\}$ — "$\lambda-$раздутие"множества W относительно точки v, $\mathcal{N}(W_v^\lambda)$ — многогранник, множество вершин которого есть W_v^λ. Очевидно, что $\mathcal{N}(W_v^1) = \mathcal{N}_Q$ и для любых $\lambda_1 < \lambda_2$ выполняется $\mathcal{N}(W_v^{\lambda_1}) \subsetneqq \mathcal{N}(W_v^{\lambda_2})$.

Обозначим $\mathcal{S} = S_P + \mathbf{e}$. Возьмём произвольную внутреннюю точку v многогранника $\mathcal{N}_Q$ и минимально возможное число λ, чтобы $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}(W_v^\lambda)$. Если точки множества $\mathcal{S} \cap \partial(\mathcal{N}(W_v^\lambda))$ лежат на одной грани γ многогранника $\mathcal{N}(W_v^\lambda)$, положим $\mathcal{B} = W_v^\lambda$. Если точки множества $\mathcal{S} \cap \partial(\mathcal{N}(W_v^\lambda))$ не лежат на одной грани многогранника $\mathcal{N}(W_v^\lambda)$, то возьмём любую точку $u \in \mathcal{S} \cap \partial(\mathcal{N}(W_v^\lambda))$ и достаточно большое μ, чтобы множество $\mathcal{S} \cap \mathcal{N}((W_v^\lambda)_u^\mu)$ содержало только точки, принадлежащие одной из граней многогранника $\mathcal{N}((W_v^\lambda)_u^\mu)$ (то есть той грани, назовём её Γ, которой принадлежит точка u). В этом случае положим $\mathcal{B} = (W_v^\lambda)_u^\mu$.

По признаку сравнения несобственных интегралов из сходимости интеграла I следует сходимость интеграла от функции $\frac{P_1(x) - P_2(x)}{Q(x) + \sum\limits_{w\in\mathcal{B}} x^w}$, и тогда сходится интеграл от функции

$$\frac{P_1(x) - P_2(x) + \sum\limits_{\substack{w\in S_i \\ w+\mathbf{e}\in Int(\mathcal{N}(\mathcal{B}))}} (-1)^i c_w x^w}{Q(x) + \sum\limits_{w\in\mathcal{B}} x^w}.$$

После приведения подобных числитель последней функции есть сумма слагаемых $(-1)^{i+1} c_w x^w$ по всем $w \in S_i$ $(i = 1, 2)$, но таких, что $w + \mathbf{e}$ принадлежат грани Γ многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{B})$.

Далее можно провести рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта (I) в доказательстве теоремы 1, а именно: разделить гиперплоскостью внутренность многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ и множество $\{w + \mathbf{e}\}$, где w принадлежат носителю многочлена в числителе подынтегральной функции — в данном случае это будет гиперплоскость, которая содержит грань Γ. Для w, принадлежащих носителю многочлена в числителе будет выполняться равенство $(a, w+\mathbf{e}) + a_0 = 0$, для точек из внутренности многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ неравенство $(a, w) + a_0 < 0$. После соответствующих замен переменных (как в пункте (I) доказательства теоремы 1) нам будет необходима сходимость интеграла

$$\int_0^\infty \frac{r^{-a_0-1} dr}{Q(r, \theta_1, \ldots, \theta_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n)},$$

где $Q(r, \theta_1, \ldots, \theta_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n)$ — многочлен от переменной r, с показателями степеней, равными (a, w), причём для $w \in \mathcal{B} \cap \Gamma$ они равны $-a_0$, для $w \in \mathcal{B} \setminus \Gamma$ они меньше $-a_0$. Такой интеграл расходится. Противоречие. Теорема доказана. $\square$

6. Доказательство следствия

Доказательство. Пусть A — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. Тогда для любых $\lambda, \widehat{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ выполняется неравенство:

$$\sup_{w \in A} \rho(\lambda w, \widehat{\lambda} A) \leq \sup_{w \in A} \rho(\lambda w, \widehat{\lambda} w) \leq |\lambda - \widehat{\lambda}| \cdot \sup_{w \in A} ||w||,$$

где ρ — обычное евклидово расстояние в $\mathbb{R}^n$. Из этой оценки следует, что при достаточно малых изменениях α_i и β_j включение $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{N}_{P_i} + \mathbf{e} \subset Int\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \mathcal{N}_{Q_j}\Big)$ остается справедливым. То есть существует $\varepsilon > 0$, что для любых $\widehat{\alpha_i} \in U_\varepsilon(\alpha_i)$, $i = 1, \ldots k$ и для любых $\widehat{\beta_i} \in U_\varepsilon(\beta_j)$, $j = 1, \ldots m$, выполняется $\sum\limits_{i=1}^{k} \widehat{\alpha_i} \mathcal{N}_{P_i} + \mathbf{e} \subset Int\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \widehat{\beta_j} \mathcal{N}_{Q_j}\Big)$. Таким образом, область сходимости интеграла — открытое множество.

Покажем, что множество сходимости интеграла — полиэдральное. Сначала сделаем два небольших замечания.

(I) Если A произвольное полиэдральное множество, то оно может быть задано системой неравенств вида $(w, d) + c \leq 0$ — как пересечение полупространств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Здесь d — вектор нормали к гиперплоскости, ограничивающей соответствующее полупространство. Тогда полиэдральное множество αA задается системой неравенств $(w, d) + \alpha c \leq 0$, то есть нормали к гиперплоскостям, задающим границу αA, не зависят от α.

(II) Пусть A и B — два произвольных полиэдральных множества. Рассмотрим $\alpha A + B$, где $\alpha > 0$, и систему неравенств $(w, d) + c \leq 0$, задающих это множество. Граница множества $\alpha A + B$ содержится в множестве, являющейся суммой границ множеств αA и B, при этом нормали к гиперплоскостям, задающим границу αA, не зависят от α. Из этого следует, что нормали d не зависят от α.

Вернемся к доказательству утверждения. Вложение (3) равносильно тому, что для всех элементов вида $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$, где u_i — вершина многогранника $\mathcal{N}_{P_i}$, выполняются неравенства $(u + \mathbf{e}, d) + c < 0$, где $(w, d) + c \leq 0$ — система неравенств, определяющая многогранник $\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \mathcal{N}_{Q_j}$. Из (I) и (II) следует, что система задаётся так, что нормали d не будут зависеть от $\beta_1, \ldots, \beta_m$, а будут зависеть от параметров многогранников $\mathcal{N}_{Q_1}, \ldots, \mathcal{N}_{Q_m}$. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i (u_i, d) + (\mathbf{e}, d) + c < 0$. В свою очередь, так как многогранник $\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \mathcal{N}_{Q_j}$ задается неравенствами $(w, d) + c \leq 0$, есть точки вида $w = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m$, где w_j — какие-то из вершин многогранников $\mathcal{N}_{Q_j}$, на каждой из которых достигается равенство в одном из неравенств системы, то есть все значения свободных членов в неравенствах представляются виде $c = -(w, d) = -\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j (w_j, d)$. В итоге имеем условия, полностью определяющие α_i и β_j, — линейную систему из конечного числа неравенств

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (u_i, d) + (\mathbf{e}, d) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j (w_j, d) < 0,$$

что и доказывает следствие.

$\square$

7. Заключение

Доказанные в работе результаты могут быть использованы при исследовании сходимости кратных несобственных интегралов, возникающих в прикладных задачах физики и математики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хуа Р., Теплиц В. Гомологии и фейнмановские интегралы // Москва, Мир. 1969.

2. Фам Ф. Введение в топологические исследования особенностей Ландау // Москва, Мир. 1967.

3. Beneke M., Smirnov V. A. Asymptotic expansion of Feynman integrals near threshold // Nuclear Physics B. 1998. Vol. 522, p. 321-344.

4. Pak A., Smirnov A. V. Geometric approach to asymptotic expansion of Feynman integrals // European Physical Journal C. 2011. Vol. 71, p. 1626-1631.

5. Lee R. N., Pomeransky A. A. Critical points and number of master integrals // Journal of High Energy Physics. 2013. Vol. 165, pp. 1311-1326.

6. Семенова Т. Ю. Асимптотика интегралов Фейнмана в одномерном случае // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика и механика. 2019. № 4, с. 46-50.

7. Semenova T. Yu. Asymptotic Series for a Feynman Integral in the One-Dimensional Case // Russian Journal of Mathematical Physics. 2020. Vol. 27, no. 1, p. 126-136.

8. Зубченкова Е. В. Интегральный признак сходимости некоторых кратных рядов // Журнал СФУ. Серия Математика и физика. 2011. 4 (3), с. 344-349.

9. Зубченкова Е. В. Об интегральном признаке сходимости для многомерных рядов Дирихле // Сибирские электронные математические известия. 2014. № 11, с. 76-86.

10. Semenova T. Yu., Smirnov A. V., Smirnov V. A. On the status of expansion by regions // European Physical Journal C. 2019. Vol. 79, p. 136-147.

11. Цих А. К. Интегралы от рациональных функций по пространству R^n // ДАН СССР. 1989. Т. 307, № 6, с. 1325-1329.

12. Ермолаева Т. О., Цих А. К. Интегрирование рациональных функций по R^n с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов // Математический сборник. 1996. 187 (9), с. 45-64.

13. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ // Москва, Мир. 1973.

14. Александров А. Д. Выпуклые многогранники // Москва, Мир. 1950.

15. Брёнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников // Москва, Мир. 1988.

16. Grünbaum B. Convex polytopes // London, Interscience Publ. 1967.

17. Харди Г., Литльвуд Дж., Полиа Г. Неравенства // Москва, УРСС. 2008.

REFERENCES

1. Hwa, R., Teplitz, V. 1966, “Homology and Feynman integrals“, *New York, Amsterdam.*
2. Pham, F. 1967, “ Introduction a l’etude topologique des singularites de Landau“, *Gauthier-villars Editeur, Paris.*
3. Beneke, M., Smirnov, V. A. 1998, “Asymptotic expansion of Feynman integrals near threshold“, *Nuclear Physics B*, vol. 522, pp. 321-344.
4. Pak, A., Smirnov, A. V. 2011, “Geometric approach to asymptotic expansion of Feynman integrals“, *European Physical Journal C*, vol. 71, pp. 1626-1631.
5. Lee, R. N., Pomeransky, A. A. 2013, “Critical points and number of master integrals“, *Journal of High Energy Physics*, vol. 165, pp. 1311-1326.
6. Semenova, T. Yu . 2019, “Asymptotics of Feynman integrals in one-dimensional case“, *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 74, no. 4, pp. 163-166.
7. Semenova, T. Yu. 2020, “Asymptotic series for a Feynman integral in the one-dimensional case“, *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 27, no. 1, pp. 126-136.
8. Zubchenkova, E. V. 2011, “ Integral convergence criterion for the multiple series“, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 4 (3), pp. 344–349.
9. Zubchenkova, E. V. 2014, “On the integral criterion of convergence for multidimensional Dirichlet series“, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, no. 11, pp. 76-86.
10. Semenova, T. Yu., Smirnov, A. V. & Smirnov, V. A. 2019, “On the status of expansion by regions“, *European Physical Journal C*, vol. 79, pp. 136-147.
11. Tsikh, A. K. 1989, “Integrals of rational functions over space R^n“, *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, vol. 307, no. 6, pp. 1325-1329.
12. Ermolaeva, T. O., Tsikh, A. K. 1996, “Integration of rational functions over R^n by means of toric compactifications and multidimensional residues“, *Sb. Math.*, 187 (9), pp. 1301-1318.
13. Rockafellar, R. 1973, “Convex analysis“, *Princeton, New Jersey, Princeton University Press.*
14. Alexandrov, A. D. 1950, “Convex polytopes“, *Moscow, World.*
15. Brøndsted, A. 1983, “An introduction to convex polytopes“, *New York–Heidelberg–Berlin, Springer-Verlag.*
16. Grünbaum, B. 1967, “Convex polytopes“, *London, Interscience Publ.*
17. Hardy, G., Littlewood, J. & Polia, G. 2008, “Inequalities“, *Moscow, URSS.*

Получено 3.03.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.548 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-340-352

Гомоморфизмы из бесконечных полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу

Н. А. Щучкин

Николай Алексеевич Щучкин — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).
e-mail: nikolaj_ shchuchkin@mail.ru

Аннотация

Одной из основных проблем для полуабелевых n-групп является нахождение полуабелевых n-групп, которые изоморфны n-группам гомоморфизмов из некоторых n-групп в полуабелеву n-группу. Такие n-группы найдены для бесконечных полуциклических n-групп.

Известно, что множество $Hom(G, C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в полуабелеву (абелеву) n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с n-арной операцией g, заданной по правилу

$$g(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(x) = f_2(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), x \in G,$$

образует полуабелеву (абелеву) n-группу. Доказано, что изоморфизмы ψ_1 n-групп $\langle G, f_1\rangle$ и $\langle G', f_1'\rangle$ и ψ_2 полуабелевых n-групп $\langle C, f_2\rangle$ и $\langle C', f_2'\rangle$ индуцируют изоморфизм τ n-групп гомоморфизмов $\langle Hom(G, C), g\rangle$ и $\langle Hom(G', C'), g'\rangle$, который действует по правилу $\tau : \alpha \to \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}$.

На аддитивной группе целых чисел Z строим абелеву n-группу $\langle Z, f_1\rangle$ с n-арной операцией $f_1(z_1, \dots, z_n) = z_1 + \dots + z_n + l$, где l — любое целое число. На Z строим также полуабелеву (не абелеву) n-группу $\langle Z, f_1'\rangle$ для $n = 2k + 1$, $k \in N$, с n-арной операцией $f_1'(z_1, \dots, z_n) = z_1 - z_2 + \dots + z_{2k-1} - z_{2k} + z_{2k+1}$. Известно, что любая бесконечная полуциклическая n-группа изоморфна n-группе $\langle Z, f_1\rangle$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, либо n-группе $\langle Z, f_1'\rangle$ для нечетных n. В первом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(\infty, 1, l)$, а во втором случае — имеет тип $(\infty, -1, 0)$.

При изучении n-группы гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle$ $(0 \le l \le \frac{n-1}{2})$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ строим на n-группе $\langle C, f_2\rangle$ абелеву группу C с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, в которой имеются элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$. Выбираем множество P_1 таких упорядоченных пар (a, u) элементов из C, которые удовлетворяют равенству $la = d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u)$, где $\widetilde{\varphi}_2(x) = x + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_2^{n-2}(x), x \in C$ — эндоморфизм группы C, а для первой компоненты этих пар верно равенство $\varphi_2(a) = a$. На этом множестве определим n-арную операцию h_1 по правилу $h_1((a_1, u_1), \dots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \dots + a_n, f_2(u_1, \dots, u_n))$. Доказано, что $\langle P_1, h_1\rangle$ — полуабелева n-группа, которая изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle$ $(0 \le l \le \frac{n-1}{2})$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$. Следствием этого изоморфизма является изоморфизм n-группы $\langle P_1, h_1\rangle$ и n-группы гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы типа $(\infty, 1, l)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

При изучении n-группы гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1'\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ в абелевой группе C выбираем подгруппу $H = \{a \in C \mid \varphi_2(a) = -a\}$. На H определим полуабелеву n-группу $\langle H, h\rangle$, где h действует по правилу $h(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = a_1 + \varphi_2(a_2) + \dots + \varphi_2^{n-2}(a_{n-1}) + a_n$. Затем в

n-группе $\langle C, f_2\rangle$ выбираем подгруппу $\langle T, f_2\rangle$ всех идемпотентов, если $T \neq \emptyset$. Доказано, что для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение полуабелевых n-групп $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1'\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с не пустым множеством идемпотентов T. Следствием этого изоморфизма является изоморфизм n-группы $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ и n-группы гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы типа $(\infty, -1, 0)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

Аналогичные факты получены при изучении n-группы гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ из n-групп $\langle Z, f_1\rangle$ и $\langle Z, f_1'\rangle$ в абелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

Ключевые слова: n-группа, полуабелева n-группа, абелева n-группа, гомоморфизм.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Н. А. Щучкин. Гомоморфизмы из бесконечных полуциклических n-групп в полуабелеву n-группу // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 340–352.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 512.548 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-340-352

Homomorphisms from infinite semilcyclic n-groups to a semiabelian n-group

N. A. Shchuchkin

Nikolay Alekseevich Shchuchkin — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Socio-Pedagogical University (Volgograd).
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Abstract

One of the main problems for semiabelian n-groups is the finding of semiabelian n-groups, which are isomorphic to (n)-groups of homomorphisms from certain n-groups to a semiabelian n-group. Such n-groups are found for infinite semicyclic n-groups.

It is known that the set $Hom(G, C)$ of all homomorphisms from n-groups $\langle G, f_1\rangle$ to a semiabelian (abelian) n-group $\langle C, f_2\rangle$ with n-ary operation g given by the rule

$$g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), x \in G,$$

forms a semiabelian (abelian) n-group. It is proved that the isomorphisms ψ_1 of n-groups $\langle G, f_1\rangle$ and $\langle G', f_1'\rangle$ and psi_2 of semiabelian n-groups $\langle C, f_2\rangle$ and $\langle C', f_2'\rangle$ induce an isomorphism τ of n-groups of homomorphisms $\langle Hom(G, C), g\rangle$ and $\langle Hom(G', C'), g'\rangle$, which acts according to the rule $\tau : \alpha \to \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}$.

On the additive group of integers Z we construct an abelian n-group $\langle Z, f_1\rangle$ with n-ary operation $f_1(z_1, \ldots, z_n) = z_1 + \ldots + z_n + l$, where l is any integer. For a nonidentical automorphism $\varphi(z) = -z$ on Z, we can specify semiabelian n-group $\langle Z, f_2\rangle$ for $n = 2k + 1$, $k \in N$, with the n-ary operation $f_2(z_1, \ldots, z_n) = z_1 - z_2 + \ldots + z_{2k-1} - z_{2k} + z_{2k+1}$. Any infinite semicyclic n-group is isomorphic to either the n-group $\langle Z, f_1\rangle$, where $0 \leq l \leq [\frac{n-1}{2}]$, or the n-group $\langle Z, f_2\rangle$ for odd n. In the first case we will say that such n-group has type $(\infty, 1, l)$, and in the second case, it has type $(\infty, -1, 0)$.

In studying the n-groups of homomorphisms $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ from an infinite abelian semicyclic n-group $\langle Z, f_1\rangle$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ to a semiabelian n-group $\langle C, f_2\rangle$ we construct on the n-group $\langle C, f_2\rangle$ an abelian group C with the addition operation $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, in which there is an element $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ and an automorphism $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$. Choose a set P_1 of such ordered pairs (a, u) of elements from C that satisfy the equality $la = d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u)$, where $\widetilde{\varphi}_2(x) = x + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(x), x \in C$ is an endomorphism of the group C, and for the first component of these pairs the equality is true $\varphi_2(a) = a$. On this set, we define a n-ary operation h_1 by the rule $h_1((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, f_2(u_1, \ldots, u_n))$. It is proved that $\langle P_1, h_1\rangle$ is a semiabelian n-group, which is isomorphic to the n-group of homomorphisms from an infinite abelian semicyclic n-group $\langle Z, f_1\rangle$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ to an n-group $\langle C, f_2\rangle$. The consequence of this isomorphism is an isomorphism of n-groups of $\langle P_1, h_1\rangle$ and n-groups of homomorphisms from an infinite abelian semicyclic n-group of type $(\infty, 1, l)$ to a semiabelian n-group $\langle C, f_2\rangle$.

When studying the n-group of homomorphisms $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ from the infinite semicyclic n-group $\langle Z, f_1'\rangle$ to the semiabelian n-group $\langle C, f_2\rangle$ in the abelian group C choose the subgroup $H = \{a \in C \mid \varphi_2(a) = -a\}$. On H we define a semiabelian n-group $\langle H, h\rangle$, where h acts according to the rule $h(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = a_1 + \varphi_2(a_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(a_{n-1}) + a_n$. Then in the n-group $\langle C, f_2\rangle$ we select the subgroup $\langle T, f_2\rangle$ of all idempotents, if $T \neq \emptyset$. It is proved that for an odd number $n > 1$ a direct product of semiabelian n-groups $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ is isomorphic to n-group of homomorphisms from infinite semicyclic n-groups of $\langle Z, f_1'\rangle$ to a semiabelian n-group $\langle C, f_2\rangle$ with a non empty set of idempotents T. The consequence of this isomorphism is the isomorphism of the n-group $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ and n-groups of homomorphisms from an infinite semicyclic n-group of type $(\infty, -1, 0)$ to the semiabelian n-group $\langle C, f_2\rangle$.

Similar facts were obtained when studying the n-group of homomorphisms $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ from n-groups $\langle Z, f_1\rangle$ and $\langle Z, f_1'\rangle$ to an abelian n-group $\langle C, f_2\rangle$.

Keywords: n-group, semiabelian $(n, 2)$-group, abelian $(n, 2)$-group, homomorphism.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

N. A. Shchuchkin, 2021, "Homomorphisms from infinite semilcyclic n-groups to a semiabelian n-group", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 340–352.

1. Введение

Одним из основных объектов изучения в теории универсальных алгебр в 60-тых и 70-тых годах прошлого века была абелева алгебра (смотри, например, [1], [2], [3]), это такая универсальная алгебра A сигнатуры Ω (смотри [4], стр. 87), для которой гомоморфизмы в A любой алгебры B этой же сигнатуры суммируемы, т.е. а) для любых гомоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : B \to A$ и любого $\omega \in \Omega_n$, $n \geq 1$, отображение $\omega(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, заданное по правилу

$$\omega(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(b) = \omega(\varphi_1(b), \ldots, \varphi_n(b)), \quad b \in B,$$

является гомоморфизмом; б) для любого $\omega \in \Omega_0$, где 0_ω — выделенный операцией ω элемент алгебры A, отображение $(\varphi_\omega) : B \to A$, заданное по правилу $\varphi_\omega(b) = 0_\omega$, $\quad b \in B$, является гомоморфизмом. Известно (смотри там же в [4]), что алгебра A сигнатуры Ω является абелевой тогда и только тогда, когда а) для любых $\omega \in \Omega_n$, $\omega' \in \Omega_m$, $n, m \geq 1$, в A верно тождество

$$\omega'(\omega(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, \omega(x_{m1}, \ldots, x_{mn})) = \omega(\omega'(x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, \omega'(x_{1n}, \ldots, x_{mn}));$$

б) все $\omega \in \Omega_0$ отмечают в A один и тот же элемент, который является подалгеброй в A.

Для многих многообразий классических алгебр описаны все абелевы алгебры. Так, например, в многообразии групп абелевыми алгебрами будут в точности абелевы группы. Непосредственным обобщением понятия группы является определение n-группы ($n \geq 2$). В многообразии n-групп абелевыми алгебрами будут в точности полуабелевы группы (теорема 3, [3]).

Алгебру $\langle G, f\rangle$ называют n-группой, если выполняется закон ассоциативности

$$f(f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n), x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}) =$$
$$= f(x_1, f(x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}), \ldots, x_{2n-1}) = \ldots$$
$$\ldots = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1})),$$

и для любых элементов $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ из G $(i = 1, \ldots, n)$ существует и притом единственный элемент z такой, что верно равенство $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n) = x_0$. При $n = 2$ получим определение группы. Мы будем изучать n-группы для $n > 2$. Более подробную информацию о теории n-групп можно найти в работах [5], [6], [7].

При действии n-арной операции f для сокращения записи используют стандартные обозначения $f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+s}, x_{k+s+1}, \ldots, x_n) = f(x_1^k, \overset{(s)}{x}, x_{k+s+1}^n)$, где $x_{k+1} = \ldots = x_{k+s} = x$ (x_i^j - пустой символ при $i > j$, также $\overset{(0)}{x}$ - пустой символ).

Обобщением абелевой группы являются полуабелева и абелева n-группы. Если в n-группе верно тождество $f(x_1, x_2^{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2^{n-1}, x_1)$ $(f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ для любой подстановки $\sigma \in S_n)$, то ее называют полуабелевой (абелевой). Ясно, что любая абелева n-группа является полуабелевой, обратно неверно.

Известно, что гомоморфизмы любой группы в абелеву группу образуют абелеву группу по сложению гомоморфизмов. В общем случае аналогичным свойством обладают абелевы алгебры произвольной сигнатуры (смотри, например, [4], стр. 87). В [3] построена n-группа гомоморфизмов из произвольной n-группы в полуабелеву n-группу.

Рассмотрим множество $Hom(G, C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ и на этом множестве определим n-арную операцию g по правилу

$$g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = f_2(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), x \in G. \tag{1}$$

Отметим, что множество $Hom(G, C)$ может быть пустым, в отличие от множества всех гомоморфизмов из группы в абелеву группу, в этом множестве, по крайней мере, есть нулевой гомоморфизм. Дальше будем считать, что если рассматривается множество всех гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу, то это множество не пусто. Множество $Hom(G, C)$ всех гомоморфизмов из n-группы $\langle G, f_1\rangle$ в полуабелеву (абелеву) n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с n-арной операцией g образует полуабелеву (абелеву) n-группу [3].

У изоморфных n-групп и изоморфных полуабелевых n-групп n-группы гомоморфизмов также изоморфны, более того, верна

Теорема 1. *Изоморфизмы ψ_1 n-групп $\langle G, f_1\rangle$ и $\langle G', f_1'\rangle$ и ψ_2 полуабелевых n-групп $\langle C, f_2\rangle$ и $\langle C', f_2'\rangle$ индуцируют изоморфизм τ n-групп гомоморфизмов $\langle Hom(G, C), g\rangle$ и $\langle Hom(G', C'), g'\rangle$, который действует по правилу $\tau : \alpha \to \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}$.*

Доказательство. Докажем вначале, что $\tau(\alpha) \in Hom(G', C')$. Действительно, если элементы $x_1, \ldots, x_n \in G'$, то $\tau(\alpha)(f_1'(x_1, \ldots, x_n)) = \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}(f_1'(x_1, \ldots, x_n)) =$

$$= \psi_2 \circ \alpha(\psi_1^{-1}(f_1'(x_1, \ldots, x_n))) = \psi_2(\alpha(f_1(\psi_1^{-1}(x_1), \ldots, \psi_1^{-1}(x_n)))) =$$
$$= \psi_2(f_2(\alpha(\psi_1^{-1}(x_1)), \ldots, \alpha(\psi_1^{-1}(x_n)))) = f_2'(\psi_2(\alpha(\psi_1^{-1}(x_1))), \ldots, \psi_2(\alpha(\psi_1^{-1}(x_n)))) =$$
$$= f_2'(\psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}(x_1), \ldots, \psi_2 \circ \alpha \circ \psi_1^{-1}(x_n)).$$

Докажем теперь инъективность отображения τ. Пусть для некоторых гомоморфизмов α_1 и α_2 из $Hom(G, C)$ верно равенство $\tau(\alpha_1) = \tau(\alpha_2)$. Тогда для любого элемента $x \in G$ полагаем $y = \psi_1(x)$. Из выше указанного верного равенства получаем $\psi_2 \circ \alpha_1 \circ \psi_1^{-1}(y) = \psi_2 \circ \alpha_2 \circ \psi_1^{-1}(y)$ или

$\psi_2\circ\alpha_1(x) = \psi_2\circ\alpha_2(x)$. Последнее равенство домножаем слева на ψ_2^{-1} и получаем $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$. Тем самым доказана инъективность отображения τ.

Настало время доказать сюръективность отображения τ. Пусть $\beta \in Hom(G', C')$. Обозначим $\alpha = \psi_2^{-1}\circ\beta\circ\psi_1$, причем $\alpha \in Hom(G, C)$. Тогда $\tau(\alpha) = \tau(\psi_2^{-1}\circ\beta\circ\psi_1) = \psi_2\circ\psi_2^{-1}\circ\beta\circ\psi_1\circ\psi_1^{-1} = \beta$. Итак, отображение τ является биективным.

Осталось проверить сохранение действия n-арной операции при отображении τ. Для любых гомоморфизмов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из $Hom(G, C)$ и любого элемента $x \in G'$ имеем

$$\tau(g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))(x) = \psi_2 \circ g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \circ \psi_1^{-1}(x) = \psi_2(f_2(\alpha_1(\psi_1^{-1}(x)), \ldots, \alpha_n(\psi_1^{-1}(x)))) =$$
$$= f_2'(\psi_2(\alpha_1(\psi_1^{-1}(x))), \ldots, \psi_2(\alpha_n(\psi_1^{-1}(x)))) = f_2'(\psi_2 \circ \alpha_1 \circ \psi_1^{-1}(x), \ldots, \psi_2 \circ \alpha_n \circ \psi_1^{-1}(x)) =$$
$$= f_2'(\tau(\alpha_1)(x), \ldots, \tau(\alpha_n)(x)) = g'(\tau(\alpha_1), \ldots, \tau(\alpha_n))(x).$$

Теорема доказана.

Одной из основных проблем, касающихся n-групп гомоморфизмов из n-группы в полуабелеву n-группу, является отыскание полуабелевой n-группы, которая была бы изоморфна n-группе гомоморфизмов из некоторой известной n-группы в полуабелеву n-группу. Если такая n-группа будет найдена, то можно сказать, что удалось описать n-группу гомоморфизмов из некоторой известной n-группы в полуабелеву n-группу. Ниже приведено описание n-группы гомоморфизмов из бесконечной (абелевой и не абелевой) полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу.

2. Некоторые сведения из теории полуабелевых n-групп

Имеется тесная связь между группами и n-группами, поэтому хорошо развитая теория групп помогает изучать n-группы. Отметим частный случай основных результатов работ [8], [9], [10] для полуабелевых n-групп. На любой полуабелевой n-группе $\langle G, f\rangle$ для фиксированного элемента c определяем сложение $a + b = f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, здесь $\bar{c}$ — решение уравнения $f(\overset{(n-1)}{c}, x) = c$. Получим абелеву группу G с этим сложением, где элемент c будет нулем. Кроме того, для отображения $\varphi(x) = f(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$, которое является автоморфизмом группы G, и элемента $d = f(\overset{(n)}{c})$ верны равенства

$$\varphi(d) = d, \quad \varphi^{n-1}(x) = x \text{ для любого элемента } x \in G, \tag{2}$$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \varphi(a_2) + \ldots + \varphi^{n-2}(a_{n-1}) + a_n + d \tag{3}$$

для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in G$. Группу G в этом случае называют ретрактом n-группы $\langle G, f\rangle$ и обозначают $ret_c\langle G, f\rangle$. Известно, что любые два ретракта одной и той же n-группы изоморфны (смотри [9],[10]).

Верно и обратно: в любой аддитивной абелевой группе G для выбранных автоморфизма φ и элемента d с условиями (2) задается полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle$, где f действует по правилу (3). В этом случае n-группу $\langle G, f\rangle$ называют (φ, d)-определенной на группе G и обозначают $der_{\varphi,d}G$.

Применяя теорему 3 из [11] для абелевых групп, получим результат: для абелевой группы G с автоморфизмом φ и элементом d, которые удовлетворяют (2), верно

$$G = ret_0 der_{\varphi,d}G. \tag{4}$$

Применяя теорему 4 из [11] для полуабелевых n-групп, получим результат: для полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ верно

$$\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d} ret_c\langle G, f\rangle \tag{5}$$

для любого элемента $c \in G$, где автомрфизм φ и элемент d группы $ret_c\langle G, f\rangle$ определены выше.

Известно (смотри, например, [12]), что для абелевых n-групп и только для них автоморфизм φ, построенный выше, является тождественным.

Следующий результат является следствием структурной теоремы о гомоморфизмах n-групп, которая доказана в [13].

Теорема 2. *Пусть $\langle G, f_1\rangle = der_{\varphi_1,d_1}G$ — n-группа и $\langle C, f_2\rangle = der_{\varphi_2,d_2}C$ — полуабелева n-группа. Отображение ψ из G в C является гомоморфизмом из $\langle G, f_1\rangle$ в $\langle C, f_2\rangle$ тогда и только тогда, когда отображение $\sigma = \psi - \psi(c_1)$, где c_1 — нуль группы G, является гомоморфизмом из группы G в группу C и верны условия*

$$\sigma(d_1) = \varphi_2(\psi(c_1)) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(\psi(c_1)) + \psi(c_1) + d_2; \qquad \sigma \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \sigma. \tag{6}$$

3. Бесконечные полуциклические n-группы

n-Группу называют полуциклической, если ее ретракт является циклической группой [6]. Рассмотрим аддитивную группу целых чисел Z, в которой всего два автоморфизма: тождественный 1_Z и φ, где $\varphi(z) = -z$ для любого целого числа z. Строим абелеву n-группу $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где l — любое целое число, она является примером бесконечной абелевой полуциклической n-группы (согласно равенству (4)). Операция f_1 действует по правилу: $f_1(z_1, \ldots, z_n) = z_1 + \ldots + z_n + l$. Для не тождественного автоморфизма φ бесконечной циклической группы Z равенство $\varphi^{n-1}(x) = x$ для любого целого числа x верно только при нечетных n, причем элемент d может быть только нулем. Тогда на бесконечной циклической группе Z можно задать полуциклическую n-группу $\langle Z, f_1'\rangle = der_{\varphi,0}Z$ для $n = 2k+1$, $k \in N$, с n-арной операцией $f_1'(z_1, \ldots, z_n) = z_1 - z_2 + \ldots + z_{2k-1} - z_{2k} + z_{2k+1}$, она является примером бесконечной не абелевой полуциклической n-группы.

Любая бесконечная абелева (не абелева) полуциклическая n-группа изоморфна n-группе $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$ ($\langle Z, f_1'\rangle = der_{\varphi,0}Z$ для нечетных n). В этом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(\infty, 1, l)$ ($(\infty, -1, 0)$) (смотри [14]).

Если n-группа порождается одним элементом a, то ее называют (как и в группах) циклической с порождающим элементом a. Примером бесконечной циклической n-группы служит n-группа $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,1}Z$ с порождающим элементом 0. Любая другая бесконечная циклическая n-группа изоморфна этой n-группе (смотри, например, [14]).

4. n-Группа гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу

Рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ ($0 \le l \le \frac{n-1}{2}$) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$. На n-группе $\langle C, f_2\rangle$ строим ретракт $C = ret_c\langle C, f_2\rangle$ с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, нулем этой группы будет элемент c, причем, имеются элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы C, которые удовлетворяют равенствам

$$f_2(x_1^n) = x_1 + \varphi_2(x_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(x_{n-1}) + x_n + d_2, \ x_1, \ldots, x_n \in C; \tag{7}$$

$$\varphi_2(d_2) = d_2; \tag{8}$$

$$\varphi_2^{n-1}(x) = x, \quad x \in C. \tag{9}$$

В группе C для фиксированного целого числа l выделим множество P_1 таких упорядоченных пар элементов (a, u), которые удовлетворяют равенству

$$la = d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u), \tag{10}$$

где $\widetilde{\varphi}_2(x) = x+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_2^{n-2}(x), x \in C$ — эндоморфизм группы C, а для первой компоненты этих пар верно равенство

$$\varphi_2(a) = a. \tag{11}$$

На этом множестве определим n-арную операцию h_1 по правилу

$$h_1((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, f_2(u_1, \ldots, u_n)).$$

Проверим замкнутость этой операции на множестве P_1. Пусть $(a_i, u_i) \in P_1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда с учетом очевидного равенства $\varphi_2(d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u)) = d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u)$, используя равенства (8) и (7), получаем $\quad l(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = la_1 + la_2 + \ldots + la_{n-1} + la_n =$

$$= d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_1) + d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_2) + \ldots + d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_{n-1}) + d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_n) =$$

$$= d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_1) + \varphi_2(d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_2)) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_{n-1})) + d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_n) + d_2 - d_2 =$$

$$= f_2(d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_1), d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_2), \ldots, d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_{n-1}), d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_n)) - d_2.$$

Но для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, n-1, n$ верно равенство $d_2 + \widetilde{\varphi}_2(u_i) = f_2(\overset{(n-1)}{u_i}, c)$. Продолжая последнюю цепочку равенств с использованием признака полуабелевости n-группы (теорема 2.6.13 из [6]), получаем $\quad l(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) =$

$$= f_2(f_2(\overset{(n-1)}{u_1}, c), f_2(\overset{(n-1)}{u_2}, c), \ldots, f_2(\overset{(n-1)}{u_{n-1}}, c), f_2(\overset{(n-1)}{u_n}, c)) - d_2 =$$

$$= f_2(\overbrace{f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)}^{(n-1)}, f_2(\overset{(n)}{c})) - d_2 =$$

$$= f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n) + \varphi_2(f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)) + \ldots$$

$$\ldots + \varphi_2^{n-2}(f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)) + d_2 + d_2 - d_2 =$$

$$= d_2 + \widetilde{\varphi}_2(f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)).$$

Доказана замкнутость операции h_1 на множестве P_1.

Теперь можно утверждать, что $\langle P_1, h_1 \rangle$ — полуабелева n-группа.

Теорема 3. *Полубелева n-группа $\langle P_1, h_1 \rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1 \rangle = der_{1_Z, l} Z$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ в n-группу $\langle C, f_2 \rangle$.*

Доказательство. По теореме 2, каждое отображение $\psi : Z \to C$ является гомоморфизмом из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1 \rangle = der_{1_Z, l} Z$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2 \rangle$ тогда и только тогда, когда найдутся гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C и элемент $u \in C$ такие, что ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x (здесь $+$ — сложение в группе C) и выполнены условия

$$\sigma(l) = u + \varphi_2(u) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u) + d_2, \tag{12}$$

$$\sigma(x) = \varphi_2(\sigma(x)) \quad \text{для всех целых чисел} \quad x. \tag{13}$$

Каждый гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = a$ и действует по правилу $\sigma(z) = za, z \in Z$ (смотри, например, [15], стр. 212). Тогда из равенства (12) следует $la = d_2 + \widetilde{\varphi_2}(u)$, а из равенства (13) при $x = 1$ получим равенство (11). Таким образом, каждому гомоморфизму ψ из n-группы $\langle Z, f_1\rangle$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$ однозначно соответствует упорядоченная пара элементов (a, u) из P_1. Обозначим это соответствие (которое будет отображением) через τ. Верно и обратно, для каждой пары элементов (a, u) из P_1 однозначно определяется гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C, действующий по правилу $\sigma(z) = za, z \in Z$, из равенства (10) следует равенство (12), используя равенство (11), для любого целого числа x получим $\varphi_2(\sigma(x)) = \varphi_2(xa) = x\varphi_2(a) = xa = \sigma(x)$, т.е. верно равенство (13). Таким образом, каждая пара элементов (a, u) из P_1 однозначно определяет гомоморфизм ψ из n-группы $\langle Z, f_1\rangle$ в n-группу $\langle C, f_2\rangle$, действующий по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$, $x \in Z$. Итак, τ — биективное отображение из n-группы гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ в n-группу $\langle P_1, h_1\rangle$.

Докажем сохранение n-арной операции при отображении τ. Выбираем $\psi_1, \ldots, \psi_n \in Hom$ (Z, C) и $\tau(\psi_i) = (a_i, u_i)$, $i = 1, \ldots, n$, где $\psi_i(x) = \sigma_i(x) + u_i$ для любого целого числа x, $\sigma_i(1) = a_i$. Действуем n-арной операцией g на гомоморфизмы $\psi_1, \ldots, \psi_n$ по правилу (1) (здесь $x \in Z$), а затем используем (7) и (13):

$$g(\psi_1, \ldots, \psi_n)(x) = f_2(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)) = f_2(\sigma_1(x) + u_1, \ldots, \sigma_n(x) + u_n) =$$

$$= \sigma_1(x) + u_1 + \varphi_2(\sigma_2(x) + u_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(\sigma_{n-1}(x) + u_{n-1}) + \sigma_n(x) + u_n + d_2 =$$

$$= \sigma_1(x) + \sigma_2(x) + \ldots + \sigma_{n-1}(x) + \sigma_n(x) + u_1 + \varphi_2(u_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u_{n-1}) + u_n + d_2.$$

Обозначим $\sigma_g = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n$ и $u_g = u_1 + \varphi_2(u_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u_{n-1}) + u_n + d_2 = f_2(u_1, \ldots, u_n)$. С учетом этих обозначений гомоморфизм $g(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ действует по правилу

$$g(\psi_1, \ldots, \psi_n)(x) = \sigma_g(x) + u_g \quad \text{для любого целого числа } x, \tag{14}$$

причем гомоморфизм σ_g и элемент u_g удовлетворяют равенствам (12), (13).

С учетом правила (14) и вычисления $\sigma_g(1) = (\sigma_1 + \ldots + \sigma_n)(1) = \sigma_1(1) + \ldots + \sigma_n(1) = a_1 + \ldots + a_n$, получаем $\tau(g(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, f_2(u_1, \ldots, u_n)) = h_1((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = h_1(\tau(\psi_1), \ldots, \tau(\psi_n))$.

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 3 имеем

Следствие 1. *Полубелева n-группа $\langle P_1, h_1\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, 1, l)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Для бесконечных циклических n-групп верно

Следствие 2. *Полубелева n-группа $\langle P_1, h_1\rangle$, построенная при $l = 1$, изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной циклической n-группы $\langle G, f\rangle$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.*

Теперь рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, A), g\rangle$ из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z, l} Z$ $(0 \le l \le \frac{n-1}{2})$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$. На n-группе $\langle A, f_2\rangle$ также строим ретракт $A = ret_c\langle A, f_2\rangle$ с операцией сложение $a + b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$, причем, имеется элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$, а автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы A будет тождественным, кроме того, верно равенство

$$f_2(x_1^n) = x_1 + \ldots + x_n + d_2, \ x_1, \ldots, x_n \in A; \tag{15}$$

В группе A для фиксированного целого числа l выделим множество R_1 таких упорядоченных пар элементов (a, u), которые удовлетворяют равенству

$$la = d_2 + (n-1)u. \tag{16}$$

На этом множестве определим n-арную операцию h_1 по правилу

$$h_1((a_1, u_1), \ldots, (a_n, u_n)) = (a_1 + \ldots + a_n, u_1 + \ldots + u_n + d_2).$$

Так как каждая абелева n-группа является полуабелевой, то, согласно выше приведенным рассуждениям перед теоремой 3, можно утверждать, что $\langle R_1, h_1\rangle$ — абелева n-группа. Из теоремы 3 получаем

Следствие 3. *Абелева n-группа $\langle R_1, h_1\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z, l}Z$ $(0 \leq l \leq \frac{n-1}{2})$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.*

Из теоремы 1 и следствия 3 имеем

Следствие 4. *Абелева n-группа $\langle R_1, h_1\rangle$ изоморфна n-группе гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, 1, l)$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.*

Если при построении абелевой n-группы $\langle R, h_1\rangle$ положить $l = 1$, то из следствия 3 получаем

Следствие 5. *Абелева n-группа $\langle R_1, h_1\rangle$, построенная для $l = 1$, изоморфна n-группе гомоморфизмов $\langle Hom(G, A), g\rangle$ из бесконечной циклической n-группы $\langle G, f\rangle$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.*

5. n-Группа гомоморфизмов из бесконечной не абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву n-группу

Пусть n — нечетное число и $n > 1$. Рассмотрим n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, C), g\rangle$ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1, 0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

На n-группе $\langle C, f_2\rangle$ строим ретракт $C = ret_c\langle C, f_2\rangle$ с операцией сложение $a+b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$. Элемент $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$ и автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы C удовлетворяют равенствам (7), (8) и (9).

В группе C выделим множество H таких элементов a, для которых верно равенство $\varphi_2(a) = -a$, т.е. $H = \{a \in C \mid \varphi_2(a) = -a\}$. Очевидно H подгруппа в C и ограничение автоморфизма φ_2 на H будет автоморфизмом подгруппы H, причем это ограничение и нуль группы H удовлетворяют равенствам (2). На подгруппе H определим полуабелеву n-группу $\langle H, h\rangle = der_{\varphi_2, 0}H$, где h действует по правилу

$$h(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = a_1 + \varphi_2(a_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(a_{n-1}) + a_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in H$.

Далее, обозначим через T множество всех таких элементов u из C, что образ этих элементов при эндоморфизме $\widetilde{\varphi}_2 = 1_C + \varphi_2 + \ldots + \varphi_2^{n-2}$ группы C (этот эндоморфизм нам уже встречался перед теоремой 3) равен $-d_2$, т.е. $T = \{u \in C \mid \widetilde{\varphi}_2(u) = -d_2\}$. Заметим, что элемент u является идемпотентом тогда и только тогда, когда верно равенство $\widetilde{\varphi}_2(u) = -d_2$ (проверяется непосредственно). Значит, T — множество всех идемпотентов полуабелевой n-группы $\langle C, f_2\rangle$. Согласно предложению 44 из [16], $\langle T, f_2\rangle$ — подгруппа n-группы $\langle C, f_2\rangle$, если $T \neq \emptyset$.

Теорема 4. *Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение полуабелевых n-групп $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1, 0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с не пустым множеством идемпотентов T.*

Доказательство. Согласно теореме 2, каждое отображение $\psi : Z \to C$ является гомоморфизмом из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ тогда и только тогда, когда найдутся гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C и элемент $u \in C$ такие, что ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x (здесь $+$ — сложение в группе C) и выполнены условия

$$\sigma(0) = u + \varphi_2(u) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u) + d_2, \tag{17}$$

$$\sigma(-x) = \varphi_2(\sigma(x)) \quad \text{для всех целых чисел} \ \ x. \tag{18}$$

Среди всех гомоморфизмов σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C, которые определяются однозначно образом единицы $\sigma(1) = a$ и действуют по правилу $\sigma(z) = za, z \in Z$, выбираем такие гомоморфизмы, для которых $\sigma(1) \in H$. Для каждого такого гомоморфизма σ и для каждого элемента $u \in T$ определим отображение $\psi : Z \to C$ по правилу:

$$\psi(z) = \sigma(z) + u = za + u, \quad z \in Z.$$

Так как $\sigma(0) = 0$ и $\widetilde{\varphi_2}(u) = -d_2$, то для выбранных гомоморфизма σ и элемента u группы C верно равенство (17). Кроме того, для всех целых чисел x имеем $\sigma(-x) = -xa$ и $\varphi_2(\sigma(x)) = \varphi_2(xa) = x\varphi_2(a) = -xa$, значит, верно равенство (18). Согласно теореме 2, построенное выше отображение ψ будет гомоморфизмом из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$.

Верно и обратно, для каждого гомоморфизма ψ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$, по теореме 2, найдутся гомоморфизм σ из аддитивной группы целых чисел Z в абелеву группу C и элемент $u \in C$ такие, что ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x и выполнены условия (17) и (18). Из (17) следует $u \in T$. Если положить $\sigma(1) = a$, то из (18) при $x = 1$ получаем $\varphi_2(a) = \varphi_2(\sigma(1)) = \sigma(-1) = -a$, т.е. $\sigma(1) \in H$.

Таким образом, между множествами $Hom(Z, C)$ и $H \times T$ имеется взаимно однозначное соответствие $\tau : \psi \to (a, u)$, где $\psi(x) = \sigma(x) + u$ для любого целого числа x, $\sigma(1) = a \in H$ и $u \in T$. Докажем сохранение n-арной операции при соответствии τ. Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n \in Hom(Z, C)$ и $\tau(\psi_i) = (a_i, u_i)$, $i = 1, \ldots, n$, где $\psi_i(x) = \sigma_i(x) + u_i$ для любого целого числа x, $\sigma_i(1) = a_i$ и $u_i \in T$. Действуем n-арной операцией g на гомоморфизмы $\psi_1, \ldots, \psi_n$ по правилу (1) (здесь $x \in Z$), а затем используем (7) и (13):

$$g(\psi_1, \ldots, \psi_n)(x) = f_2(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)) = f_2(xa_1 + u_1, \ldots, xa_n + u_n) =$$

$$= xa_1 + u_1 + \varphi_2(xa_2 + u_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(xa_{n-1} + u_{n-1}) + xa_n + u_n + d_2 =$$

$$= x(a_1 + \varphi_2(a_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(a_{n-1}) + a_n) + u_1 + \varphi_2(u_2) + \ldots + \varphi_2^{n-2}(u_{n-1}) +$$

$$+ u_n + d_2 = xh(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) + f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n).$$

Значит, $\tau(g(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = (h(a_1, \ldots, a_n), f_2(u_1, \ldots, u_n))$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 4 имеем

Следствие 6. *Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение полуабелевых n-групп $\langle H, h\rangle \times \langle T, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в полуабелеву n-группу $\langle C, f_2\rangle$ с не пустым множеством идемпотентов T.*

Заметим, что если в полуабелевой n-группе нет идемпотентов, то нет и гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в эту n-группу.

Для нечетного числа $n > 1$ рассмотрим теперь n-группу гомоморфизмов $\langle Hom(Z, A), g\rangle$ из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$.

На n-группе $\langle A, f_2\rangle$ строим ретракт $A = ret_c\langle A, f_2\rangle$ с операцией сложение $a+b = f_2(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b)$. Автоморфизм $\varphi_2(x) = f_2(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$ группы A будет тождественным, n-арная операция f_2 удовлетворяет равенству

$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n + d_2, \quad x_1, \ldots, x_n \in A,$$

где $d_2 = f_2(\overset{(n)}{c})$.

В группе A выбираем множество M таких элементов a, для которых верно равенство $a = -a$, т.е. $M = \{a \in A \mid a = -a\}$. Очевидно M подгруппа в A. На подгруппе M определим абелеву n-группу $\langle M, h\rangle = der_{1_M,0}M$, где h действует по правилу $h(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \ldots + a_n$, $a_1, \ldots, a_n \in M$.

Далее, обозначим через E множество всех таких элементов u из A, для которых верно равенство $(n-1)u = -d_2$, т.е. $E = \{u \in A \mid (n-1)u = -d_2\}$. Все элементы из E будут идемпотентами и каждый идемпотент n-группы $\langle A, f_2\rangle$ принадлежит E (проверяется непосредственно). Кроме того, в абелевой n-группе каждый идемпотент является единицей. Значит, E — множество всех единиц абелевой n-группы $\langle A, f_2\rangle$. Согласно [17], $\langle E, f_2\rangle$ — подгруппа n-группы $\langle A, f_2\rangle$, если $E \neq \emptyset$.

Из теоремы 4 получаем

Следствие 7. *Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение абелевых n-групп $\langle M, h\rangle \times \langle E, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{\varphi_1,0}Z$ (Z — аддитивная группа целых чисел, $\varphi_1(x) = -x, x \in Z$) в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$ с не пустым множеством единиц E.*

Из теоремы 1 и следствия 6 имеем

Следствие 8. *Для нечетного числа $n > 1$ декартово произведение абелевых n-групп $\langle M, h\rangle \times \langle E, f_2\rangle$ изоморфно n-группе гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в абелеву n-группу $\langle A, f_2\rangle$ с не пустым множеством единиц E.*

Вновь заметим, что если в абелевой n-группе нет единиц, то нет и гомоморфизмов из бесконечной полуциклической n-группы $\langle G, f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$ в эту n-группу.

6. Заключение

В работе рассматривалась n-группа гомоморфизмов из произвольной n-группы в полуабелеву n-группу, которая была построена в работе [3]. Получены следующие основные результаты:

1) Доказано, что у изоморфных n-групп и изоморфных полуабелевых n-групп n-группы гомоморфизмов также изоморфны (теорема 1).

2) Построена полуабелева (абелева) n-группа гомоморфизмов из бесконечной абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву (абелеву) n-группу (следствие 1 (следствие 4)).

3) Построена полуабелева (абелева) n-группа гомоморфизмов из бесконечной циклической n-группы в полуабелеву (абелеву) n-группу (следствие 2 (следствие 5)).

4) Для нечетного числа $n > 1$ построена полуабелева (абелева) n-группа гомоморфизмов из бесконечной не абелевой полуциклической n-группы в полуабелеву (абелеву) n-группу (следствие 6 (следствие 8)).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиев И. Ш. О наименьшем многообразии симметрических алгебр // Алгебра и логика (семинар). 1966. Т. 5, №6. С. 5-14.
2. Чакани Б. Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр // Acta scient. math. 1964. Vol. 25. P. 202-208.
3. Glazek K., Gleichgewicht B. Abelian n-groups // Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai Esztergom (Hungaru). 1977. Vol. 29. P. 321-329.
4. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 уч. М.: Наука, 1974. 158 с.
5. Русаков С. А. Алгебраические n-арные системы. Минск: Навука i тэхнiка, 1992. 263 с.
6. Гальмак А. М. n-Арные группы. Часть 1. Гомель: Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, 2003. 195 с.
7. Гальмак А. М. n-Арные группы. Часть 2. Минск: Издательский центр БГУ, 2007. 323 с.
8. Post E. L. Poluadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48. P. 208-350.
9. Глускин Л. М. Позиционные оперативы // Мат. сборник. 1965. Т. 68 (110), № 3, С. 444-472.
10. Hosszu M. On the explicit form of n-group operacions // Publ. Math. 1963. Vol. 10. P. 88-92.
11. Щучкин Н. А. Прямое произведение n-арных групп // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, Выпуск 2. С. 101-121.
12. Glazek K., Michalski J., SierockiA I. On evaluation of some polyadic groups // Contributions to General Algebra. 1985. Vol. 3. P. 159-171 .
13. Khodabandeh H., Shahryari M. On the representations and automorphisms of polyadic groups // Commun. Algebra. 2012. Vol. 40. P. 2199-2212.
14. Щучкин Н. А. Полуциклические n-арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. Т. 3 (54). С. 186-194.
15. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: "Мир 1974. 335 с.
16. Щучкин Н. А. Введение в теорию n-групп. Волгоград. ООО "Принт 2019. 234 с.
17. Гальмак А. М. n-Арная подгруппа единиц // Препринты Гомельского гос. ун-та, 1998. 23 с.

REFERENCES

1. Aliev, I. S. 1966, “On minimal varieties of symmetric algebras”, Algebra and Logic (seminar). 5, №6. pp. 5-14. (In Russian)
2. Chakany, B. 1964, “Abelian properties of primitive classes of universal algebras”, Acta Scient. Math. , 25 : 3–4 (1964) pp. 202–208 (In Russian)
3. Glazek, K., Gleichgewicht, B. 1977, “Abelian n-groups”, Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai Esztergom (Hungaru) 29 pp. 321-329.

4. Kurosh, A. G. 1974, "General algebra, Lections 1969-1970", Nauka, Moscow, 158 pp. (In Russian)

5. Rusakov, S. F. 1992, "Algebraic n-ary systems", Navuka i technika, Minsk, 264 pp. (In Russian)

6. Gal'mak, A. M. 2003, "n-Ary groups", Part I, Gomel university, Gomel, 195 pp. (In Russian)

7. Gal'mak, A. M. 2007, "n-Ary groups", Part 2, Publishing center of BSU, Minsk, 325 pp. (In Russian)

8. Post, E. L. 1940, "Polyadic groups", Trans. Amer. Math. Soc. 48, pp. 208-350.

9. Gluskin, L. M. 1965, "Positional oeratives", Math. collection, V.68 (110), No 3, pp. 444-472. (In Russian)

10. Hosszu, M. 1963, "On the explicit form of n-group operacions", Publ. Math. 10, pp. 88-92.

11. Shchuchkin, N.A. 2014, "Direct product of n-ary groups", Chebyshev's collection 15, Issue 2, pp. 101-121. (In Russian)

12. Glazek, K., Michalski, J., SierockiA, I. 1985, "On evaluation of some polyadic groups", Contributions to General Algebra 3, Proc. Conf., Vienna. pp. 159-171.

13. Khodabandeh, H., Shahryari, M. 2012, "On the representations and automorphisms of polyadic groups", Commun. Algebra 40, pp. 2199-2212.

14. Shchuchkin, N.A. 2009, "Semicyclic n-ary groups", Izv. Gomel State Univ. 3(54), pp. 186-194. (In Russian)

15. Fuchs L. 1970, "Infinite abelian groups". Vol. I, Moskow: Mir publishing, 335 pp.. (In Russian)

16. Shchuchkin, N.A. 2019, "Introduction to the theory of n-groups". Volgograd. Print ltd, 234 pp. (In Russian)

17. Gal'mak, A. M. 1998, "n-Ary subgroup of units". Preprints of Gomel State Univ., 23 pp. (In Russian)

Получено 12.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.548 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-353-369

Эндоморфизмы полуциклических n-групп

Н. А. Щучкин

Николай Алексеевич Щучкин — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).
e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Аннотация

Одной из основных проблем для полуабелевых n-групп является нахождение $(n,2)$-почтиколец, которые изоморфны $(n,2)$-почтикольцам эндоморфизмов некоторых полуабелевых n-групп. Такие $(n,2)$-почтикольца найдены для полуциклических n-групп.

На аддитивной группе целых чисел Z строим абелеву n-группу $\langle Z, f_1\rangle$ с n-арной операцией $f_1(z_1,\ldots,z_n) = z_1+\ldots+z_n+l$, где l — любое целое число. Для не тождественного автоморфизма $\varphi(z) = -z$ на Z можно задать полуабелеву n-группу $\langle Z, f_2\rangle$ для $n = 2k+1$, $k \in N$, с n-арной операцией $f_2(z_1,\ldots,z_n) = z_1 - z_2 + \ldots + z_{2k-1} - z_{2k} + z_{2k+1}$. Любая бесконечная полуциклическая n-группа изоморфна n-группе $\langle Z, f_1\rangle$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, либо n-группе $\langle Z, f_2\rangle$ для нечетных n. В первом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(\infty, 1, l)$, а во втором случае — имеет тип $(\infty, -1, 0)$.

В Z выделим множество $P = \{m | ml \equiv l \pmod{n-1}\}$ и на нем определим n-арную операцию h по правилу $h(m_1,\ldots,m_n) = m_1+\ldots+m_n$. Тогда алгебра $\langle P, h, \cdot\rangle$, где $\cdot$ — умножение целых чисел, будет $(n,2)$-кольцом. Доказано, что $\langle P, h, \cdot\rangle$ изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа $(\infty, 1, l)$.

В n-группе $\langle Z\times Z, h\rangle = \langle Z, f_2\rangle \times \langle Z, f_2\rangle$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу $(m_1,u_1)\diamond(m_2,u_2) = (m_1m_2, m_1u_2+u_1)$. Тогда $\langle Z\times Z, h, \diamond\rangle$ будет $(n,2)$-почтикольцом. Доказано, что $\langle Z\times Z, h, \diamond\rangle$ изоморфно $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа $(\infty, -1, 0)$.

Доказано, что $(n,2)$-кольцо $\langle Z, f, *\rangle$, где $f(z_1,\ldots,z_n) = z_1+\ldots+z_n+1$ и $z_1 * z_2 = z_1z_2(n-1)+z_1+z_2$, изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов бесконечной циклической n-группы.

На аддитивной группе кольца классов вычетов Z_k определим n-группу $\langle Z_k, f_3\rangle$, где n-арная операция f_3 действует по правилу $f_3(z_1,\ldots,z_n) = z_1+mz_2+\ldots+m^{n-2}z_{n-1}+z_n+l$, $1 \le m < k$ и m взаимно прост с k. Кроме того, m удовлетворяет сравнению $lm \equiv l \pmod k$ и показатель числа m по модулю k делит $n-1$. Любая конечная полуциклическая n-группа порядка k изоморфна n-группе $\langle Z_k, f_3\rangle$, где $l \mid$ НОД $(n-1,k)$ при $m = 1$ и $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$ при $m \ne 1$. Будем говорить, что такая n-группа имеет тип (k, m, l).

В n-группе $\langle P, h\rangle = \langle Z_k, f_3\rangle \times \langle Z_l, f_4\rangle$, где $f_4(z_1,\ldots,z_n) = z_1+rz_2+\ldots+r^{n-2}z_{n-1}+z_n$, r — остаток от деления m на l, определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу

$$(u_1,v_1)\diamond(u_2,v_2) = (u_2s_1+u_1, v_2s_1+v_1)$$

где $s_1 \in Z_k$ и $s_1 - 1 = s_0 + v_1\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{(n-1)u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ при $m = 1$ и $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ при $m \ne 1$. Доказано, что алгебра $\langle P, h, \diamond\rangle$ будет $(n,2)$-кольцом при $m = 1$ и $(n,2)$-почтикольцом при $m \ne 1$, которое изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов абелевой полуциклической n-группы типа $(k,1,l)$ при $m = 1$ и $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа (k,m,l) при $m \ne 1$.

Доказано, что $(n,2)$-кольцо $\langle Z_k, f, *\rangle$, где $f(z_1,\ldots,z_n) = z_1+\ldots+z_n+1$ и $u_1 * u_2 = u_1\cdot u_2\cdot(n-1)+u_1+u_2$, изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов конечной циклической n-группы порядка k.

Ключевые слова: n-группа, $(n, 2)$-кольцо, $(n, 2)$-почтикольцо, эндоморфизм.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Н. А. Щучкин. Эндоморфизмы полуциклических n-групп // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 353–369.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.548 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-353-369

Endomorphisms of semicyclic n-groups

N. A. Shchuchkin

Nikolay Alekseevich Shchuchkin — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Socio-Pedagogical University (Volgograd).
e-mail: nikolaj_ shchuchkin@mail.ru

Abstract

One of the main problems for semiabelian n-groups is the finding of $(n, 2)$-nearrings, which are isomorphic to $(n, 2)$-nearrings of endomorphisms of certain semiabelian n-groups. Such almost $(n, 2)$-nearrings are found for semicyclic n-groups.

On the additive group of integers Z we construct an abelian n-group $\langle Z, f_1\rangle$ with n-ary operation $f_1(z_1, \dots, z_n) = z_1 + \dots + z_n + l$, where l is any integer. For a nonidentical automorphism $\varphi(z) = -z$ on Z, we can specify semiabelian n-group $\langle Z, f_2\rangle$ for $n = 2k + 1$, $k \in N$, with the n-ary operation $f_2(z_1, \dots, z_n) = z_1 - z_2 + \dots + z_{2k-1} - z_{2k} + z_{2k+1}$. Any infinite semicyclic n-group is isomorphic to either the n-group $\langle Z, f_1\rangle$, where $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, or the n-group $\langle Z, f_2\rangle$ for odd n. In the first case we will say that such n-group has type $(\infty, 1, l)$, and in the second case, it has type $(\infty, -1, 0)$.

In Z we select the set $P = \{m|ml \equiv l \pmod{n-1}\}$ and define an n-ary operation h by the rule $h(m_1, \dots, m_n) = m_1 + \dots + m_n$ on this set. Then the algebra $\langle P, h, \cdot\rangle$, where $\cdot$ is the multiplication of integers, is a $(n, 2)$-ring. It is proved that $\langle P, h, \cdot\rangle$ is isomorphic to $(n, 2)$-ring of endomorphisms of semicyclic n-group of type $(\infty, 1, l)$.

In the n-group $\langle Z \times Z, h\rangle = \langle Z, f_2\rangle \times \langle Z, f_2\rangle$ we define the binary operation $\diamond$ by the rule $(m_1, u_1) \diamond (m_2, u_2) = (m_1m_2, m_1u_2 + u_1)$. Then $\langle Z \times Z, h, \diamond\rangle$ is an $(n, 2)$-nearringsg. It is proved that $\langle Z \times Z, h, \diamond\rangle$ is isomorphic to $(n, 2)$-nearrings of endomorphisms of a semicyclic n-group of type $(\infty, -1, 0)$.

It is proved that $(n, 2)$-ring $\langle Z, f, *\rangle$, where $f(z_1, \dots, z_n) = z_1 + \dots + z_n + 1$ and $z_1 * z_2 = z_1z_2(n - 1) + z_1 + z_2$, is isomorphic to $(n, 2)$-rings of endomorphisms of infinite cyclic n-group.

On additive group of the ring of residue classes of Z_k we define n-group $\langle Z_k, f_3\rangle$, where the n-ary operation f_3 operates according to the rule $f_3(z_1, \dots, z_n) = z_1+mz_2+\dots+m^{n-2}z_{n-1}+z_n+l$, $1 \le m < k$ and m is relatively prime to k. In addition, m satisfies the congruence $lm \equiv l \pmod{k}$ and multiplicative order of m modulo k divides $n - 1$. Any finite semicyclic n-group of order k is isomorphic to n-group $\langle Z_k, f_3\rangle$, where $l \mid \gcd(n - 1, k)$ for $m = 1$ and $l \mid \gcd(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$ for $m \ne 1$. We will say that such n-group has type (k, m, l).

In the n-group $\langle P, h\rangle = \langle Z_k, f_3\rangle \times \langle Z_l, f_4\rangle$, $f_4(z_1, \dots, z_n) = z_1 + rz_2 + \dots + r^{n-2}z_{n-1} + z_n$, where r is the remainder of dividing m by l, we define the binary operation $\diamond$ by the rule

$$(u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2) = (u_2s_1 + u_1, v_2s_1 + v_1)$$

where $s_1 \in Z_k$, $s_1 - 1 = s_0 + v_1\frac{k}{l}$, and s_0 is solution of congruence $x \equiv \frac{(n-1)u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ for $m = 1$ and $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ for $m \neq 1$. It is proved that the algebra $\langle P, h, \diamond\rangle$ is $(n,2)$-ring for $m = 1$ and $(n,2)$-nearring for $m \neq 1$, which is isomorphic to $(n,2)$-ring of endomorphisms of abelian semicyclic n-group of type $(k,1,l)$ with $m = 1$ and $(n,2)$-nearring of endomorphisms of semicyclic n-groups of type (k,m,l) for $m \neq 1$.

It is proved that $(n,2)$-ring $\langle Z_k, f, *\rangle$, where $f(z_1, \ ldots, z_n) = z_1 + \ ldots + z_n + 1$ and $u_1 * u_2 = u_1 \ cdot u_2 \ cdot (n-1) + u_1 + u_2$, is isomorphic to $(n,2)$-ring of endomorphisms of finite cyclic n-group of order k.

Keywords: n-group, $(n,2)$-ring, $(n,2)$-nearring, endomorphism.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
N. A. Shchuchkin, 2021, “Endomorphisms of semicyclic n-groups”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 353–369.

1. Введение

В 60-тые и 70-тые годы прошлого века в теории универсальных алгебр активно изучались абелевы алгебры (смотри, например, [1], [2], [3]). Подробную информацию об абелевых алгебрах можно найти в [4], стр. 87. Для многих многообразий классических алгебр описаны все абелевы алгебры. Так, например, в многообразии групп абелевыми алгебрами будут в точности абелевы группы. Непосредственным обобщением понятия группы является определение n-группы для $n \geq 2$.

На непустом множестве G рассмотрим n-арную операцию f, где $n \geq 2$. Алгебру $\langle G, f\rangle$ называют n-группоидом. При действии n-арной операции f для сокращения записи используют стандартные обозначения

$$f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+s}, x_{k+s+1}, \ldots, x_n) = f(x_1^k, \overset{(s)}{x}, x_{k+s+1}^n),$$

где $x_{k+1} = \ldots = x_{k+s} = x$ (x_i^j - пустой символ при $i > j$, также $\overset{(0)}{x}$ - пустой символ).

Если в n-группоиде $\langle G, f\rangle$ выполняется закон ассоциативности

$$\begin{gathered} f(f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n), x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}) = \\ = f(x_1, f(x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}), \ldots, x_{2n-1}) = \ldots \\ \ldots = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1})), \end{gathered} \tag{1}$$

то его называют n-полугруппой. Для удобства в n-полугруппе $\langle G, f\rangle$, используя закон (1), определяют новую $(k(n-1)+1)$-арную операцию $f_{(k)}$ по правилу

$$f_{(k)}(x_1^{k(n-1)+1}) = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{k \text{ раз}}(x_1^n), x_{n+1}^{2n-1}) \ldots), x_{(k-1)(n-1)+2}^{k(n-1)+1}).$$

Если в n-полугруппе $\langle G, f\rangle$ для любых элементов $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ $(i = 1, \ldots, n)$ существует и притом единственный элемент z такой, что

$$f(x_1^{i-1}, z, x_{i+1}^n) = x_0, \tag{2}$$

то ее называют n-группой. При $n = 2$ имеем хорошо знакомое нам определение группы. Мы будем изучать n-группы для $n > 2$. Более подробную информацию о теории n-групп можно найти в работах [5], [6], [7].

Одним из обобщений абелевых групп являются полуабелевы n-группы. Если в n-группе верно тождество
$$f(x_1, x_2^{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2^{n-1}, x_1), \tag{3}$$
то ее называют полуабелевой. В многообразии n-групп именно полуабелевы n-группы и только они являются абелевыми алгебрами (теорема 3 из [3]).

Если в n-группе верны тождества
$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$
для любой подстановки $\sigma \in S_n$, то ее называют абелевой. Ясно, что любая абелева n-группа является полуабелевой, обратно неверно.

Известно, что на множестве E всех эндоморфизмов абелевой алгебры A сигнатуры Ω можно определить операции той же сигнатуры, вместе с которыми E образует абелеву алгебру. Кроме того, композиция эндоморфизмов в E связана с операциями из Ω законами дистрибутивности. Так построенная алгебра E является дистрибутивным кольцоидом над абелевой алгеброй (смотри [4], стр. 89). Например, дистрибутивные кольцоиды над абелевой группой совпадают с ассоциативными кольцами.

Рассмотрим обобщения определений почтикольца и ассоциативного кольца (напомним, алгебру $\langle A, +, \circ \rangle$ называют почтикольцом, если $\langle A, + \rangle$ — группа, не обязательно абелева, $\langle A, \circ \rangle$ — полугруппа и выполнен правый закон дистрибутивности). Алгебру $\langle A, g, \circ \rangle$ с n-арной операцией g и бинарной операцией $\circ$ называют $(n, 2)$-почтикольцом ($(n, 2)$-кольцом), если $\langle A, g \rangle$ является n-группой (абелевой n-группой), $\langle A, \circ \rangle$ является полугруппой и выполнен правый закон дистрибутивности
$$g(x_1, \ldots, x_n) \circ y = g(x_1 \circ y, \ldots, x_n \circ y) \tag{4}$$
(оба закона дистрибутивности: $y \circ g(x_1, \ldots, x_n) = g(y \circ x_1, \ldots, y \circ x_n)$ и (4)) [3], [8]. Множество E всех эндоморфизмов полуабелевой (абелевой) n-группы $\langle G, f \rangle$ является $(n, 2)$-почтикольцом ($(n, 2)$-кольцом) $\langle E, g, \circ \rangle$ с единицей, где n-арная операция g действует по правилу $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(x) = f(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$ $(x \in G)$, и $\circ$ — композиция эндоморфизмов (Следствие 9 (Следствие 10) из [3]).

У изоморфных полуабелевых (абелевых) n-групп $(n, 2)$-почтикольца ($(n, 2)$-кольца) эндоморфизмов изоморфны, более того, верна

Теорема 1. *Изоморфизм ψ полуабелевых (абелевых) n-групп $\langle G_1, f_1 \rangle$ и $\langle G_2, f_2 \rangle$ индуцирует изоморфизм τ $(n, 2)$-почтиколец ($(n, 2)$-колец) эндоморфизмов $\langle E_1, g_1, \circ \rangle$ и $\langle E_2, g_2, \circ \rangle$, который определяется по формуле $\tau : \alpha \to \psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi$.*

Доказательство. Проверяется непосредственно.

Обратное утверждение неверно, т.е. можно найти примеры неизоморфных полуабелевых n-групп с изоморфными $(n, 2)$-почтикольцами эндоморфизмов.

Как и в теории абелевых групп, одной из основных проблем для полуабелевых n-групп, касающихся $(n, 2)$-почтиколец эндоморфизмов, является нахождение $(n, 2)$-почтиколец, которые были бы изоморфны $(n, 2)$-почтикольцам эндоморфизмов некоторых полуабелевых n-групп. Для полуциклических n-групп такие $(n, 2)$-почтикольца найдены ниже.

2. Некоторые сведения из теории полуабелевых n-групп

Теория групп помогает изучать n-группы. Отметим частный случай основных результатов работ [9], [10], [11] для полуабелевых n-групп. На любой полуабелевой n-группе $\langle G, f \rangle$ для фиксированного элемента c определяем сложение
$$a + b = f(a, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c}, b),$$

здесь $\bar{c}$ — решение уравнения $f(\overset{(n-1)}{c}, x) = c$. Получим абелеву группу G с этим сложением, причем элемент c будет нулем в этой группе. Далее, для отображения $\varphi(x) = f(c, x, \overset{(n-3)}{c}, \bar{c})$, которое является автоморфизмом группы G, и элемента $d = f(\overset{(n)}{c})$ верны равенства

$$\varphi(d) = d, \quad \varphi^{n-1}(x) = x \ \text{ для любого элемента } x \in G, \tag{5}$$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_1 + \varphi(a_2) + \ldots + \varphi^{n-2}(a_{n-1}) + a_n + d \tag{6}$$

для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in G$. Группу G в этом случае называют ретрактом n-группы $\langle G, f\rangle$ и обозначают $ret_c\langle G, f\rangle$. Известно, что любые два ретракта одной и той же n-группы изоморфны (смотри [10],[11]).

Верно и обратно: в любой аддитивной абелевой группе G для выбранных автоморфизма φ и элемента d с условиями (5) задается полуабелева n-группа $\langle G, f\rangle$, где f действует по правилу (6). В этом случае n-группу $\langle G, f\rangle$ называют (φ, d)-определенной на группе G и обозначают $der_{\varphi,d}G$.

Применяя теорему 3 из [12] для абелевых групп, получим результат: для абелевой группы G с автомрфизмом φ и элементом d, которые удовлетворяют (5), верно

$$\langle G, +\rangle = ret_0 der_{\varphi,d}\langle G, +\rangle. \tag{7}$$

Применяя теорему 4 из [12] для полуабелевых n-групп, получим результат: для полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ верно

$$\langle G, f\rangle = der_{\varphi,d} ret_c\langle G, f\rangle \tag{8}$$

для любого элемента $c \in G$, где автомрфизм φ и элемент d группы $ret_c\langle G, f\rangle$ определены выше.

Известно (смотри, например, [13]), что для абелевых n-групп и только для них автоморфизм φ, построенный выше, является тождественным.

Следующий результат является следствием структурной теоремы о гомоморфизмах n-групп, которая доказана в [14].

Теорема 2. . *Отображение ψ является эндоморфизмом полуабелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ тогда и только тогда, когда отображение $\sigma = \psi - \psi(c)$ является эндоморфизмом ретракта $ret_c\langle G, f\rangle$ и верны условия*

$$\sigma(d) = \varphi(\psi(c)) + \ldots + \varphi^{n-2}(\psi(c)) + \psi(c) + d; \qquad \sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma. \tag{9}$$

Следствие 1. *Отображение ψ является эндоморфизмом абелевой n-группы $\langle G, f\rangle$ тогда и только тогда, когда отображение $\sigma = \psi - \psi(c)$ является эндоморфизмом ретракта $ret_c\langle G, f\rangle$ и верны условия*

$$\sigma(d) = (n-1)\psi(c) + d. \tag{10}$$

3. Полуциклические n-группы

Если ретракт полуабелевой n-группы является циклической группой, то эту n-группу называют полуциклической [6]. Рассмотрим аддитивную группу целых чисел Z, в которой всего два автоморфизма: тождественный 1_Z и φ, где $\varphi(z) = -z$ для любого целого числа z. Строим абелеву n-группу $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где l — любое целое число, она является примером бесконечной абелевой полуциклической n-группы (согласно равенству (7)). Операция f_1 действует по правилу: $f_1(z_1, \ldots, z_n) = z_1 + \ldots + z_n + l$. Для не тождественного автоморфизма φ бесконечной циклической группы Z равенство $\varphi^{n-1}(x) = x$ для любого целого числа x верно только при нечетных n, причем элемент d может быть только нулем. Тогда на бесконечной циклической группе Z можно задать полуциклическую n-группу $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$ для $n = 2k+1$, $k \in N$, с n-арной операцией $f_2(z_1, \ldots, z_n) = z_1 - z_2 + \ldots + z_{2k-1} - z_{2k} + z_{2k+1}$.

Любая бесконечная полуциклическая n-группа изоморфна n-группе $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$, либо n-группе $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$ для нечетных n (смотри [15]). В первом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(\infty, 1, l)$, а во втором случае — имеет тип $(\infty, -1, 0)$.

Если n-группа порождается одним элементом a, то ее называют (как и в группах) циклической с порождающим элементом a. Примером бесконечной циклической n-группы служит n-группа $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,1}Z$ с порождающим элементом 0. Любая другая бесконечная циклическая n-группа изоморфна этой n-группе (смотри, например, [15]).

Примером конечной полуциклической n-группы порядка k служит n-группа $\langle Z_k, f\rangle = der_{\varphi,l}Z_k$, (φ, l)-определенная на аддитивной группы кольца классов вычетов по модулю k. Если φ — тождественный автоморфизм, то n-арная операция f действует по правилу $f(z_1^n) = z_1 + \ldots + z_n + l$ и $\langle Z_k, f\rangle$ будет абелевой полуциклической n-группой. Среди таких абелевых полуциклических n-групп имеются циклические, в этом случае НОД $(l, n-1, k) = 1$. Если же φ отличен от тождественного автоморфизма, то $\varphi(z) = mz$ для любого элемента $z \in Z_k$, где $1 < m < k$ и m взаимно прост с k. Кроме того, число m удовлетворяет сравнению $lm \equiv l \pmod k$ (согласно первому равенству из (5)) и показатель числа m по модулю k делит $n-1$ (согласно второму равенству из (5)). В этом случае n-арная операция f действует по правилу $f(z_1^n) = z_1 + mz_2 + \ldots + m^{n-2}z_{n-1} + z_n + l$.

Любая конечная абелева полуциклическая n-группа порядка k изоморфна абелевой полуциклической n-группе $der_{1_{Z_k},l}Z_k$, где $l \mid$ НОД $(n-1, k)$, в этом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип $(k, 1, l)$. Любая конечная циклическая n-группа порядка k изоморфна циклической n-группе $der_{1_{Z_k},1}Z_k$. Любая конечная не абелева полуциклическая n-группа порядка k изоморфна полуциклической n-группе $der_{\varphi,l}Z_k$, где $\varphi(z) = mz$ для любого элемента $z \in Z_k$, $1 < m < k$, m взаимно прост с k, число m удовлетворяет сравнению $lm \equiv l \pmod k$, показатель числа m по модулю k делит $n-1$ и $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$, в этом случае будем говорить, что такая n-группа имеет тип (k, m, l) (смотри [15]).

4. $(n,2)$-Почтикольца эндоморфизмов полуциклических n-групп

В следующей теореме найдено $(n,2)$-кольцо, которое изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$.

Теорема 3. *Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$, где $0 \le l \le [\frac{n-1}{2}]$. В Z выделим множество $P = \{m | ml \equiv l \pmod{n-1}\}$ и на этом множестве определим n-арную операцию h по правилу $h(m_1^n) = m_1 + \ldots + m_n$. Тогда алгебра $\langle P, h, \cdot\rangle$, где $\cdot$ — умножение целых чисел, будет $(n,2)$-кольцом, которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.*

Доказательство. Рассмотрим абелеву n-группу $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$. Каждый эндоморфизм σ_m кольца целых чисел Z определяется однозначно образом единицы $\sigma_m(1) = m$, т.е. для любого целого числа z верно $\sigma_m(z) = mz$. В кольце целых чисел Z выделим подмножество $P = \{m | ml \equiv l \pmod{n-1}\}$. Для каждого эндоморфизма σ_m, где $m \in P$, находим u — частное от деления числа $l(m-1)$ на число $n-1$ и на аддитивной группе целых чисел Z определим отображение $\psi_m = \sigma_m + u$. Тогда $\psi_m(0) = u$ и отображение $\sigma_m = \psi_m - \psi_m(0)$ — эндоморфизм в Z, кроме того верны условия (9). Согласно теореме 2, отображение ψ_m является эндоморфизмом полуабелевой n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$. По этой же теореме для каждого эндоморфизма ψ полуабелевой n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ отображение $\sigma = \psi - \psi(0)$ является эндоморфизмом Z и, согласно первому равенству из (9), имеем $\sigma(l)=(n-1)\psi(0)+l$. Если эндоморфизм σ определяется однозначно образом единицы $\sigma(1)=m$, то $\psi_m(0)=u$ — частное от деления числа $l(m-1)$ на число $n-1$. Таким образом, между всеми эндоморфизмами E полуциклической n-группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{1_Z,l}Z$ и множеством P имеется взаимно однозначное соответствие $\tau:\psi_m\to m$.

На множестве P определим n-арную операцию h по правилу $h(m_1^n)=m_1+\ldots+m_n$. Докажем замкнутость этой операции на множестве P. Для любых целых чисел $m_1^n\in P$ из сравнений $m_il\equiv l \pmod{n-1}$ $(i=1,\ldots,n)$ получим $(m_1+\ldots+m_n)l\equiv nl \pmod{n-1}$ или $(m_1+\ldots+m_n)l\equiv l \pmod{n-1}$, т.е. $h(m_1^n)\in P$.

Очевидно $\langle P,h\rangle$ является n-полугруппой. Выбираем $m_0,m_1,\ldots,m_{i-1},m_{i-1},\ldots,m_n\in P$, где индекс i равен одному из чисел $1,\ldots,n$. Находим $z=m_0-(m_1+\ldots+m_{i-1}+m_{i-1}+\ldots+m_n)$, очевидно $z\in P$. Тогда $h(m_1^{i-1},z,m_{i+1}^n)=m_0$. Единственность нахождения числа z также очевидна. Таким образом, n-полугруппа $\langle P,h\rangle$ является n-группой, кроме того, она будет абелевой.

Докажем замкнутость множества P относительно умножения целых чисел. Пусть целые числа $m_1,m_2\in P$. Обе части верного сравнения $m_2l\equiv l \pmod{n-1}$ домножаем на m_1, получаем $m_1m_2l\equiv m_1l \pmod{n-1}$, но $m_1l\equiv l \pmod{n-1}$, значит, $m_1m_2l\equiv l \pmod{n-1}$, т.е. $m_1\cdot m_2\in P$.

Выполнимость обоих законов дистрибутивности для n-арной операции h и умножения целых чисел очевидна. Итак, $\langle P,h,\cdot\rangle$ — $(n,2)$-кольцо.

Докажем, что биективное отображение τ является изоморфизмом $(n,2)$-колец $\langle E,g,\circ\rangle$ и $\langle P,h,\cdot\rangle$. Так как для любых эндоморфизмов $\psi_{m_1},\ldots,\psi_{m_n}\in E$ и для любого целого числа z получим

$$g(\psi_{m_1},\ldots,\psi_{m_n})(z)=f_1(\psi_{m_1}(z),\ldots,\psi_{m_n}(z))=f_1(\sigma_{m_1}(z)+\psi_{m_1}(0),\ldots,\sigma_{m_n}(z)+\psi_{m_n}(0))=$$

$$=f_1(m_1z+\frac{l(m_1-1)}{n-1},\ldots,m_nz+\frac{l(m_n-1)}{n-1})=m_1z+\frac{l(m_1-1)}{n-1}+\ldots+m_nz+\frac{l(m_n-1)}{n-1}+l=$$

$$=(m_1+\ldots+m_n)z+\frac{l}{n-1}(m_1+\ldots+m_n-n)+l=(m_1+\ldots+m_n)z+\frac{l(m_1+\ldots+m_n-1)}{n-1},$$

то $\tau(g(\psi_{m_1},\ldots,\psi_{m_n}))=h(\tau(\psi_{m_1}),\ldots,\tau(\psi_{m_n}))$. Далее, так как для любых эндоморфизмов $\psi_{m_1},\psi_{m_2}\in E$ и для любого целого числа z получим

$$\psi_{m_1}\circ\psi_{m_2}(z)=\psi_{m_1}(\sigma_{m_2}(z)+\psi_{m_2}(0))=\psi_{m_1}(m_2z+\frac{l(m_2-1)}{n-1})=$$

$$=\sigma_{m_1}(m_2z+\frac{l(m_2-1)}{n-1})+\psi_{m_1}(0)=m_1(m_2z+\frac{l(m_2-1)}{n-1})+\frac{l(m_1-1)}{n-1}=$$

$$=m_1m_2z+\frac{m_1m_2l-lm_1+lm_1-l}{n-1}=m_1m_2z+\frac{l(m_1m_2-1)}{n-1},$$

то $\tau(\psi_{m_1}\circ\psi_{m_2})=\tau(\psi_{m_1})\cdot\tau(\psi_{m_2})$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 3 имеем

Следствие 2. *Построенное в теореме 3 $(n,2)$-кольцо $\langle P,h,\cdot\rangle$ изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа $(\infty,1,l)$.*

Доказательство. Согласно теореме 1, из изоморфизма полуциклической n-группы типа $(\infty,1,l)$ и бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z,f_1\rangle=der_{1_Z,l}Z$, где $0\le l\le[\frac{n-1}{2}]$, следует изоморфизм $(n,2)$-колец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 3. Следствие доказано.

Следствие 3. *Построенное в теореме 3 $(n,2)$-кольцо $\langle P,h,\cdot\rangle$ при $l=1$ изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов бесконечной циклической n-группы.*

Доказательство. Согласно теореме 1, из изоморфизма бесконечной циклической n-группы и бесконечной абелевой полуциклической n-группы $\langle Z,f_1\rangle = der_{1_Z,1}Z$ следует изоморфизм $(n,2)$-колец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 3 при $l=1$. Следствие доказано.

В теореме 3 найденое $(n,2)$-кольцо $\langle P,h,\cdot\rangle$ определяется на подмножестве целых чисел Z. Можно ли построить такое же $(n,2)$-кольцо на всем множестве целых чисел (по аналогии как в группах кольцо эндоморфизмов кольца целых чисел изоморфно кольцу целых чисел)? На этот вопрос положительно отвечает следующая

Теорема 4. *На абелевой полуциклической n-группе $\langle Z,f_3\rangle = der_{1_Z,v}Z$, где $v=$НОД$(n-1,l)$, $0\le l\le[\frac{n-1}{2}]$, определим бинарную операцию $*$ по правилу $z_1*z_2=z_1z_2t+z_1+z_2$, где $t=\frac{n-1}{v}$. Тогда алгебра $\langle Z,f_3,*\rangle$ будет $(n,2)$-кольцом, которое изоморфно $(n,2)$-кольцу $\langle P,h,\cdot\rangle$, построенному в теореме 3.*

Доказательство. Проверим ассоциативность операции $*$. Если $z_1,z_2,z_3\in Z$, то

$$(z_1*z_2)*z_3=(z_1z_2t+z_1+z_2)*z_3=(z_1z_2t+z_1+z_2)z_3t+z_1z_2t+z_1+z_2+z_3=$$
$$=z_1z_2z_3t^2+z_1z_3t+z_2z_3t+z_1z_2t+z_1+z_2+z_3=$$
$$=z_1(z_2z_3t+z_3+z_2)t+z_1+z_2z_3t+z_2+z_3=z_1*(z_2z_3t+z_2+z_3)=z_1*(z_2*z_3).$$

Пусть $z_1,\ldots,z_n,z_{n+1}\in Z$. Проверим правую дистрибутивность операций f_3 и $*$.

$$f_3(z_1,\ldots,z_n)*z_{n+1}=(z_1+\ldots+z_n+v)z_{n+1}t+z_1+\ldots+z_n+v+z_{n+1}=$$
$$=z_1z_{n+1}t+\ldots+z_nz_{n+1}t+vz_{n+1}t+z_1+\ldots+z_n+v+z_{n+1}=$$
$$=z_1z_{n+1}t+\ldots+z_nz_{n+1}t+(n-1)z_{n+1}+z_1+\ldots+z_n+v+z_{n+1}=$$
$$=z_1z_{n+1}t+z_1+z_{n+1}+\ldots+z_nz_{n+1}t+z_n+z_{n+1}+v=f_3(z_1*z_{n+1},\ldots,z_n*z_{n+1}).$$

Аналогично проверяется левая дистрибутивность операций f_3 и $*$. Итак, $\langle Z,f_3,*\rangle$ — $(n,2)$-кольцо.

Докажем изоморфизм этого $(n,2)$-кольца и $(n,2)$-кольца $\langle P,h,\cdot\rangle$ из теоремы 3. Каждому целому числу z ставим в соответствие τ число $z\frac{n-1}{v}+1$. Так как $(z\frac{n-1}{v}+1)l\equiv l \pmod{n-1}$, то $z\frac{n-1}{v}+1\in P$, т.е. соответствие τ является отображением из Z в P. Если $\tau(z_1)=\tau(z_2)$ некоторых целых чисел z_1,z_2, то $z_1\frac{n-1}{v}+1=z_2\frac{n-1}{v}+1$, откуда получим $z_1=z_2$. Инъективность отображения τ доказана. Докажем сюръективность отображения τ. Пусть $m\in P$, тогда $ml\equiv l \pmod{n-1}$, т.е. $(m-1)l=(n-1)q$ для некоторого целого числа q. Полагаем $l=l_1v$ и $n-1=n_1v$ для некоторых целых чисел l_1 и n_1. Тогда $(m-1)l_1=n_1q$ и l_1, n_1 взаимно просты. Значит, $m-1$ делится на n_1 и $\tau(\frac{m-1}{n_1})=m$. Итак, отображение τ биективно.

Для $z_1,\ldots,z_n\in Z$ получим

$$\tau(f_3(z_1,\ldots,z_n))=(z_1+\ldots+z_n+v)\frac{n-1}{v}+1=$$
$$=(z_1\frac{n-1}{v}+1)+\ldots+(z_n\frac{n-1}{v}+1)=h(\tau(z_1),\ldots,\tau(z_n)),$$

кроме того, для $z_1,z_2\in Z$ будем иметь

$$\tau(z_1*z_2)=\tau(z_1z_2\frac{n-1}{v}+z_1+z_2)=(z_1z_2\frac{n-1}{v}+z_1+z_2)\frac{n-1}{v}+1=$$
$$=(z_1\frac{n-1}{v}+1)(z_2\frac{n-1}{v}+1)=\tau(z_1)\tau(z_2).$$

Теорема доказана

Следствие 4. *Построенное в теореме 4 $(n,2)$-кольцо $\langle Z, f_3, *\rangle$ будет изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа $(\infty, 1, l)$.*

Доказательство. Достаточно учесть следствие 2 и теорему 4. Следствие доказано.

Следствие 5. *Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов бесконечной циклической n-группы. Тогда $(n,2)$-кольцо $\langle Z, f, *\rangle$, где $f(z_1^n) = z_1 + \ldots + z_n + 1$ и $z_1 * z_2 = z_1 z_2(n-1) + z_1 + z_2$, будет изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.*

Доказательство. Достаточно учесть следствие 3 и теорему 4 при $l = 1$. Следствие доказано.

В следующей теореме найдено $(n,2)$-почтикольцо, которое изоморфно $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов бесконечной не абелевой полуциклической n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, где n — нечетное натуральное число.

Теорема 5. *Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n,2)$-почтикольцо эндоморфизмов бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, где n — нечетное натуральное число и $\varphi(z) = -z$ для любого целого числа z. Выбираем n-группу $\langle Z\times Z, h\rangle = \langle Z, f_2\rangle \times \langle Z, f_2\rangle$ и на множестве $Z\times Z$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу*

$$(m_1, u_1) \diamond (m_2, u_2) = (m_1 m_2, m_1 u_2 + u_1).$$

Тогда $\langle Z\times Z, h, \diamond\rangle$ будет $(n,2)$-почтикольцом, которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим полуабелеву n-группу $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, где n — нечетное натуральное число и $\varphi(z) = -z$ для любого целого числа z. Для каждого эндоморфизма σ_m кольца целых чисел Z, который определяется однозначно образом единицы $\sigma_m(1) = m$, и для каждого целого числа u определим отображение $\psi_{(m,u)}$ на множестве целых чисел Z по правилу $\psi_{(m,u)}(z) = \sigma_m(z) + u = mz + u$. Тогда $\psi_{(m,u)}(0) = u$ и для σ_m и $\psi_{(m,u)}(0)$ верны условия (9). Согласно теореме 2, отображение $\psi_{(m,u)}$ является эндоморфизмом полуабелевой n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$. Далее, для любого эндоморфизма ψ полуабелевой n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$, согласно теореме 2, определяем эндоморфизм σ аддитивной группы Z по правилу $\sigma = \psi + \psi(0)$. Но эндоморфизм σ определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = m$. Таким образом, между всеми эндоморфизмами E полуциклической n-группы $\langle Z, f_2\rangle = der_{\varphi,0}Z$ и декартовым квадратом Z^2 имеется взаимно однозначное соответствие $\tau : \psi_{(m,u)} \to (m, u)$.

Выбираем n-группу $\langle Z\times Z, h\rangle = \langle Z, f_2\rangle \times \langle Z, f_2\rangle$ и на множестве $Z\times Z$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу, указанному в теореме. Так как для любых трех пар целых чисел $(m_1, u_1), (m_2, u_2), (m_3, u_3)$ имеем

$$((m_1, u_1) \diamond (m_2, u_2)) \diamond (m_3, u_3) = (m_1 m_2, m_1 u_2 + u_1) \diamond (m_3, u_3) =$$

$$= ((m_1 m_2) m_3, m_1 m_2 u_3 + m_1 u_2 + u_1) = (m_1(m_2 m_3), m_1(m_2 u_3 + u_2) + u_1) =$$

$$= (m_1, u_1) \diamond (m_2 m_3, m_2 u_3 + u_2) = (m_1, u_1) \diamond ((m_2, u_2) \diamond (m_3, u_3)),$$

то $\langle Z\times Z, \diamond\rangle$ является полугруппой.

Далее, для любых пар целых чисел $(m_1, u_1), \ldots, (m_n, u_n), (m_{n+1}, u_{n+1})$ имеем

$$h((m_1, u_1), \ldots, (m_n, u_n)) \diamond (m_{n+1}, u_{n+1}) = (f_2(m_1^n), f_2(u_1^n)) \diamond (m_{n+1}, u_{n+1}) =$$

$$= ((m_1 - m_2 + \ldots + m_{n-2} - m_{n-1} + m_n) m_{n+1}, (m_1 - m_2 + \ldots + m_{n-2} - m_{n-1} + m_n) u_{n+1} +$$

$$+ (u_1 - u_2 + \ldots + u_{n-2} - u_{n-1} + u_n)) =$$

$$= (m_1 m_{n+1} - m_2 m_{n+1} + \ldots + m_{n-2} m_{n+1} - m_{n-1} m_{n+1} + m_n m_{n+1},$$

$$m_1u_{n+1}+u_1-m_2u_{n+1}-u_2+\ldots+m_{n-2}u_{n+1}+u_{n-2}-m_{n-1}u_{n+1}-u_{n-1}+m_nu_{n+1}+u_n=$$
$$=h((m_1,u_1)\diamond(m_{n+1},u_{n+1}),\ldots,(m_n,u_n)\diamond(m_{n+1},u_{n+1})).$$

Итак, $\langle Z\times Z,h,\diamond\rangle$ — $(n,2)$-почтикольцо.

Докажем, что биективное отображение τ является изоморфизмом $(n,2)$-почтиколец $\langle E, g,\circ\rangle$ и $\langle Z\times Z,h,\diamond\rangle$. Так как для любого целого числа z и для любых эндоморфизмов $\psi_{(m_1,u_1)},\ldots,\psi_{(m_n,u_n)}\in E$ получим

$$g(\psi_{(m_1,u_1)},\ldots,\psi_{(m_n,u_n)})(z)=f_2(\psi_{(m_1,u_1)}(z),\ldots,\psi_{(m_n,u_n)}(z))=$$
$$=f_2(\sigma_{m_1}(z)+u_1,\ldots,\sigma_{m_n}(z)+u_n)=f_2(m_1z+u_1,\ldots,m_nz+u_n)=$$
$$=m_1z+u_1-m_2z-u_2+\ldots+m_{n-2}z+u_{n-2}-m_{n-1}z-u_{n-1}+m_nz+u_n=$$
$$=(m_1-m_2+\ldots+m_{n-2}-m_{n-1}+m_n)z+u_1-u_2+\ldots+u_{n-2}-u_{n-1}+u_n=$$
$$=f_2(m_1^n)z+f_2(u_1^n),$$

то $\tau(g(\psi_{(m_1,u_1)},\ldots,\psi_{(m_n,u_n)}))=h(\tau(\psi_{(m_1,u_1)}),\ldots,\tau(\psi_{(m_n,u_n)}))$. Далее, так как для любых эндоморфизмов $\psi_{(m_1,u_1)},\psi_{(m_2,u_2)}\in E$ и для любого целого числа z получим

$$\psi_{(m_1,u_1)}\circ\psi_{(m_2,u_2)}(z)=\psi_{(m_1,u_1)}(\sigma_{m_2}(z)+\psi_{(m_2,u_2)}(0))=\psi_{(m_1,u_1)}(m_2z+u_2)=$$
$$=\sigma_{m_1}(m_2z+u_2)+\psi_{(m_1,u_1)}(0)=m_1(m_2z+u_2)+u_1=m_1m_2z+m_1u_2+u_1,$$

то $\tau(\psi_{(m_1,u_1)}\circ\psi_{(m_2,u_2)})=\tau(\psi_{(m_1,u_1)})\diamond\tau(\psi_{(m_2,u_2)})$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 5 имеем

Следствие 6. *Построенное в теореме 5 $(n,2)$-почтикольцо $\langle Z\times Z,h,\diamond\rangle$ будет изоморфно $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов полуциклической n-группы типа* $(\infty,-1,0)$.

Доказательство. Согласно теореме 1, из изоморфизма полуциклической n-группы типа $(\infty,-1,0)$ и бесконечной полуциклической n-группы $\langle Z,f_2\rangle=der_{\varphi,0}Z$, где n — нечетное натуральное число и $\varphi(z)=-z$ для любого целого числа z, следует изоморфизм $(n,2)$-почтиколец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 5. Следствие доказано.

Теперь приступим к изучению $(n,2)$-почтиколец эндоморфизмов конечных полуциклических n-групп. Сначала изучим $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов конечной не абелевой полуциклической n-группы.

Теорема 6. *Пусть $\langle E,g,\circ\rangle$ — $(n,2)$-почтикольцо эндоморфизмов полуциклической n-группы $der_{\varphi,l}Z_k$, где $\varphi(z)=mz$ для любого элемента $z\in Z_k$, $1<m<k$, m взаимно прост с k, число m удовлетворяет сравнению $lm\equiv l \pmod k$, показатель числа m по модулю k делит $n-1$ и $l\mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1},k)$. В полуабелевой n-группе $\langle P,h\rangle=der_{\varphi,l}Z_k\times der_{\varphi,0}Z_l$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу*

$$(u_1,v_1)\diamond(u_2,v_2)=(u_2s_1+u_1,v_2s_1+v_1)$$

где $s_1\in Z_k$ и $s_1-1=s_0+v_1\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x\equiv\frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Тогда алгебра $\langle P,h,\diamond\rangle$ будет $(n,2)$-почтикольцом, которое изоморфно $\langle E,g,\circ\rangle$.

Доказательство. Для каждого эндоморфизма $\psi\in E$ полагаем $\psi(0)=u$. Согласно теореме 2, отображение $\sigma=\psi-u$ является эндоморфизмом аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, который определяется однозначно образом единицы $\sigma(1)=s$, т.е. для любого целого числа $z\in Z_k$ верно $\sigma(z)\equiv sz \pmod k$. Кроме того, согласно первому равенству из (9), верно сравнение

$$sl\equiv(1+m+\ldots+m^{n-2})u+l \pmod k,$$

или, что то же самое, $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u \equiv l(s-1) \pmod{k}$, а значит, целое число $s-1$ является решением сравнения $lx \equiv \frac{m^{n-1}-1}{m-1}u \pmod{k}$. Так как $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k)$, то НОД $(l,k) = l$, а значит, $s-1 = s_0 + v\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$, $0 \le v < l$. Заметим, что второе равенство из (9) верно в силу коммутативности умножения в кольце Z_k.

Таким образом, мы имеем отображение $\tau : E \to P$, заданное по правилу $\tau(\psi) = (u,v)$, где $u = \psi(0)$, а v участвует в процессе вычисления образа единицы s при эндоморфизме $\psi - u$ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, т.е. $s-1 = s_0+v\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$.

Докажем инъективность отображения τ. Пусть $\tau(\psi_1) = \tau(\psi_2)$ для некоторых эндоморфизмов $\psi_1, \psi_2 \in E$ и $\tau(\psi_1) = (u_1, v_1)$, $\tau(\psi_2) = (u_2, v_2)$. Тогда $u_1 = u_2$ и $v_1 = v_2$. Для каждого индекса $i = 1, 2$ находим образ единицы s_i при эндоморфизме $\psi_i - u_i$ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k: $s_i - 1 = s_{0i} + v_i\frac{k}{l}$, где s_{0i} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_i}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Так как $u_1 = u_2$, то $s_{01} = s_{02}$, а так как $v_1 = v_2$, то $s_1 = s_2$. Каждый эндоморфизм ψ_i $(i = 1, 2)$ действует по правилу $\psi_i(z) = s_i z + u_i$ для любого целого числа $z \in Z_k$, значит, $\psi_1 = \psi_2$. Итак, τ — инъективное отображение.

Докажем сюръективность отображения τ. Пусть $(u, v) \in Z_k \times Z_l$. Находим s_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ и $0 \le s_0 < \frac{k}{l}$. Далее, находим $s-1 = s_0 + v\frac{k}{l}$ — решение сравнения $lx \equiv \frac{m^{n-1}-1}{m-1}u \pmod{k}$. Эндоморфизм σ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, действующий по правилу $\sigma(z) = sz$ для любого целого числа $z \in Z_k$, удовлетворяет обоим условиям из (9), а значит, согласно теореме 2, отображение $\psi = \sigma - u$ является эндоморфизмом полуабелевой n-группы $der_{\varphi,l}Z_k$ и $\tau(\psi) = (u, v)$. Доказана сюръективность отображения τ.

Бинарная операция $\diamond$, определенная на множестве $Z_k \times Z_l$ в теореме, является ассоциативной, так как для любых пар (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) из $Z_k \times Z_l$ получим

$$((u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2)) \diamond (u_3, v_3) = (u_2 s_1 + u_1, v_2 s_1 + v_1) \diamond (u_3, v_3) =$$
$$= (u_3 s' + u_2 s_1 + u_1, v_3 s' + v_2 s_1 + v_1),$$

где $s_1 - 1 = s_{01} + v_1\frac{k}{l}$, s_{01} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$ и $s'-1 = s'_0 + (v_2 s_1 + v_1)\frac{k}{l}$, s'_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}(u_2 s_1 + u_1)}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. С другой стороны,

$$(u_1, v_1) \diamond ((u_2, v_2) \diamond (u_3, v_3)) = (u_1, v_1) \diamond (u_3 s_2 + u_2, v_3 s_2 + v_2) =$$
$$= ((u_3 s_2 + u_2)s_1 + u_1, (v_3 s_2 + v_2)s_1 + v_1) = (u_3 s_1 s_2 + u_2 s_1 + u_1, v_3 s_1 s_2 + v_2 s_1 + v_1),$$

где $s_2 - 1 = s_{02} + v_2\frac{k}{l}$, s_{02} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_2}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Так как $s_2 - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_2}{l} + v_2\frac{k}{l} \pmod{k}$, то, домножая обе части этого сравнения на s_1 и складывая с верным сравнением $s_1 - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_1}{l} + v_1\frac{k}{l} \pmod{k}$, получим

$$s_1 s_2 - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}(s_1 u_2 + u_1)}{l} + (s_1 v_2 + v_1)\frac{k}{l} \pmod{k}. \tag{11}$$

Но $s' - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}(s_1 u_2 + u_1)}{l} + (s_1 v_2 + v_2)\frac{k}{l} \pmod{k}$, значит, $s' \equiv s_1 s_2 \pmod{k}$. Из верности последнего сравнения следует $u_3 s' + u_2 s_1 + u_1 \equiv u_3 s_1 s_2 + u_2 s_1 + u_1 \pmod{k}$ и $s' \equiv s_1 s_2 \pmod{l}$ (так как $l \mid k$), из верности последнего сравнения следует $v_3 s' + v_2 s_1 + v_1 \equiv v_3 s_1 s_2 + v_2 s_1 + v_1 \pmod{l}$. Мы доказали равенство

$$((u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2)) \diamond (u_3, v_3) = (u_1, v_1) \diamond ((u_2, v_2) \diamond (u_3, v_3)).$$

Итак, $\langle P, \diamond\rangle$ является полугруппой. Докажем, что для n-арной операции h и бинарной операции $\diamond$ выполнен правый закон дистрибутивности (4). Пусть $(u_i, v_i) \in Z_k \times Z_l$, $i = 1, \ldots, n, n+1$. Тогда

$$h((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1}) =$$

$$= (u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l, v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1}) =$$

$$= (u_{n+1}s' + u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l, v_{n+1}s' + v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n),$$

где $s' - 1 = s'_0 + (v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n)\frac{k}{l}$, s'_0 — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}(u_1+mu_2+\ldots+m^{n-2}u_{n-1}+u_n+l)}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. С другой стороны,

$$h((u_1, v_1) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1}), \ldots, (u_n, v_n) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1})) =$$

$$= h((u_{n+1}s_1 + u_1, v_{n+1}s_1 + v_1), \ldots, (u_{n+1}s_n + u_n, v_{n+1}s_n + v_n)) =$$

$$= (u_{n+1}s_1 + u_1 + m(u_{n+1}s_2 + u_2) + \ldots + m^{n-2}(u_{n+1}s_{n-1} + u_{n-1}) + u_{n+1}s_n + u_n + l,$$

$$v_{n+1}s_1 + v_1 + m(v_{n+1}s_2 + v_2) + \ldots + m^{n-2}(v_{n+1}s_{n-1} + v_{n-1}) + v_{n+1}s_n + v_n),$$

где $s_i - 1 = s_{0i} + v_i\frac{k}{l}$, s_{0i} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_i}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$, $i = 1, \ldots, n$. Верные n сравнений $s_i - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}u_i}{l} + v_i\frac{k}{l} \pmod{k}$ складываем, предварительно умножив каждое i-тое сравнение на m^{i-1} $(i = 1, \ldots, n)$, получим

$$s_1 + ms_2 + \ldots + m^{n-2}s_{n-1} + s_n - 1 - (1 + m + \ldots + m^{n-2}) \equiv$$

$$\equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}}{l}(u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n) + (v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n)\frac{k}{l} \pmod{k},$$

но $1 + m + \ldots + m^{n-2} = \frac{m^{n-1}-1}{m-1}$, тогда

$$s_1 + ms_2 + \ldots + m^{n-2}s_{n-1} + s_n - 1 \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1}}{l}(u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l)+$$

$$+(v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n)\frac{k}{l} \pmod{k}. \tag{12}$$

Заметим, что правая часть последнего сравнения также сравнима с целым числом $s' - 1$, значит, $s_1 + ms_2 + \ldots + m^{n-2}s_{n-1} + s_n - 1 \equiv s' \pmod{k}$. Обе части последнего сравнения домножаем на целое число u_{n+1}, а затем прибавляем к обеим частям сравнения сумму $u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l$, получим

$$u_{n+1}s_1 + u_1 + m(u_{n+1}s_2 + u_2) + \ldots + m^{n-2}(u_{n+1}s_{n-1} + u_{n-1}) + u_{n+1}s_n + u_n + l \equiv$$

$$\equiv u_{n+1}s' + u_1 + mu_2 + \ldots + m^{n-2}u_{n-1} + u_n + l \pmod{k}.$$

Аналогично обе части последнего сравнения домножаем на целое число v_{n+1}, а затем прибавляем к обеим частям сравнения сумму $v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n$, получим

$$v_{n+1}s_1 + v_1 + m(v_{n+1}s_2 + v_2) + \ldots + m^{n-2}(v_{n+1}s_{n-1} + v_{n-1}) + v_{n+1}s_n + v_n \equiv$$

$$\equiv v_{n+1}s' + v_1 + mv_2 + \ldots + m^{n-2}v_{n-1} + v_n \pmod{k}.$$

Из последних двух сравнений имеем верное равенство

$$h((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1}) =$$

$$= h((u_1, v_1) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1}), \ldots, (u_n, v_n) \diamond (u_{n+1}, v_{n+1})).$$

Итак, алгебра $\langle P, h, \diamond \rangle$ является $(n, 2)$-почтикольцом. Докажем, что биективное отображение τ сохраняет n-арную и бинарную операции. Пусть $\psi_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$, тогда для любого целого числа $z \in Z_k$ имеем $\psi_i(z) = s_i z + u_i$, где s_i — образ единицы при эндоморфизме $\psi_i - u_i$ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k и $s_i - 1 = s_{0i} + v_i \frac{k}{l}$, s_{0i} — решение сравнения $x \equiv \frac{\frac{m^{n-1}-1}{m-1} u_i}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$, $0 \le v_i < l$. Тогда эндоморфизм $g(\psi_1^n)$ из E действует по правилу (для любого целого числа $z \in Z_k$)

$$g(\psi_1^n)(z) = \psi_1(z) + m\psi_2(z) + \ldots + m^{n-2}\psi_{n-1}(z) + \psi_n(z) + l =$$

$$= s_1 z + u_1 + m(s_2 z + u_2) + \ldots + m^{n-2}(s_{n-1} z + u_{n-1}) + s_n z + u_n + l =$$

$$= (s_1 + m s_2 + \ldots + m^{n-2} s_{n-1} + s_n) z + u_1 + m u_2 + \ldots + m^{n-2} u_{n-1} + u_n + l.$$

Так как верно сравнение (12), то

$$\tau(g(\psi_1^n)) = (u_1 + m u_2 + \ldots + m^{n-2} u_{n-1} + u_n + l, v_1 + m v_2 + \ldots + m^{n-2} v_{n-1} + v_n).$$

С другой стороны, согласно правилу действия n-арной операции h, получим

$$h(\tau(\psi_1), \ldots, \tau(\psi_n)) = h((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)) =$$

$$= (u_1 + m u_2 + \ldots + m^{n-2} u_{n-1} + u_n + l, v_1 + m v_2 + \ldots + m^{n-2} v_{n-1} + v_n).$$

Значит, $\tau(g(\psi_1^n)) = h(\tau(\psi_1), \ldots, \tau(\psi_n))$. Пусть теперь $\psi_1, \psi_2 \in E$. Эндоморфизм $\psi_1 \circ \psi_2$ из E действует по правилу (для любого целого числа $z \in Z_k$)

$$\psi_1 \circ \psi_2(z) = \psi_1(s_2 z + v_2) = s_1(s_2 z + u_2) + u_1 = s_1 s_2 z + s_1 u_2 + u_1.$$

Так как верно сравнение (11), то $\tau(\psi_1 \circ \psi_2) = (s_1 u_2 + u_1, s_1 v_2 + v_1)$. С другой стороны, согласно правилу действия бинарной операции $\diamond$, получим

$$\tau(\psi_1) \diamond \tau(\psi_2) = (u_1, v_1) \diamond (u_2, v_2) = (s_1 u_2 + u_1, s_1 v_2 + v_1).$$

Значит, $\tau(\psi_1 \circ \psi_2) = \tau(\psi_1) \diamond \tau(\psi_2)$. Теорема доказана.

Заметим, что в теореме 6 при построении n-группы $der_{\varphi,0} Z_l$ автоморфизм φ задается целым числом m, на которое накладываются условия, указанные в теореме 6. Но при определении n-группы $der_{\varphi,0} Z_l$ автоморфизм φ аддитивной группы кольца целых чисел Z_l должен задаваться целым числом m' таким, что $1 \le m' < l$, m' взаимно прост с l, показатель числа m' по модулю l делит $n-1$. Поэтому m' выбирается как остаток от деления числа m на l. Понятно, что в этом случае $mz \equiv m'z \pmod{l}$ для любого целого числа $z \in Z_l$. Кроме того, m' взаимно прост с l, так как m взаимно прост с l в силу того, что $l \mid k$ и m взаимно прост с k. Далее, показатель числа m по модулю k делится на показатель этого числа по модулю l (так как $l \mid k$), значит, показатель числа m по модулю l делит $n-1$, так как показатель этого числа по модулю k делит $n-1$. Но показатели чисел m и m' по модулю l совпадают (так как $m \equiv m' \pmod{l}$), тогда показатель числа m' по модулю l делит $n-1$. Таким образом, задания автоморфизма φ целыми числами m и m' при построении n-группы $der_{\varphi,0} Z_l$ совпадают.

Из теорем 1 и 6 имеем

Следствие 7. *Построенное в теореме 6 $(n,2)$-почтикольцо $\langle P, h, \diamond \rangle$ будет изоморфно $(n,2)$-почтикольцо эндоморфизмов не абелевой полуциклической n-группы типа (k, m, l).*

Доказательство. Согласно теореме 1, из изоморфизма не абелевой полуциклической n-группы типа (k,m,l) и полуциклической n-группы $der_{\varphi,l}Z_k$, где $\varphi(z)=mz$ для любого элемента $z\in Z_k$, $1<m<k$, m взаимно прост с k, число m удовлетворяет сравнению $lm\equiv l \pmod k$, показатель числа m по модулю k делит $n-1$ и $l \mid$ НОД $(\frac{m^{n-1}-1}{m-1},k)$, следует изоморфизм $(n,2)$-почтиколец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 6. Следствие доказано.

Теперь изучим $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов конечной абелевой полуциклической n-группы.

Теорема 7. *Пусть $\langle E,g,\circ\rangle$ — $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов абелевой полуциклической n-группы $der_{1_{Z_k},l}Z_k$, где $l\mid$ НОД $(n-1,k)$. В абелевой n-группе $\langle P,h\rangle = der_{1_{Z_k},l}Z_k\times der_{1_{Z_l},0}Z_l$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу*

$$(u_1,v_1)\diamond(u_2,v_2)=(u_2s_1+u_1,v_2s_1+v_1),$$

где $s_1\in Z_k$ и $s_1-1=s_0+v_1\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x\equiv\frac{(n-1)u_1}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Тогда алгебра $\langle P,h,\diamond\rangle$ будет $(n,2)$-кольцом, которое изоморфно $\langle E,g,\circ\rangle$.

Доказательство. Так же, как в доказательстве теоремы 6, для каждого эндоморфизма $\psi\in E$ полагаем $\psi(0)=u$. Согласно следствию 1, отображение $\sigma=\psi-u$ является эндоморфизмом аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, который определяется однозначно образом единицы $\sigma(1)=s$, т.е. для любого целого числа $z\in Z_k$ верно $\sigma(z)\equiv sz \pmod k$. Кроме того, согласно равенству (10), верно сравнение $sl\equiv(n-1)u+l \pmod k$, или, что то же самое, $(n-1)u\equiv l(s-1) \pmod k$, а значит, целое число $s-1$ является решением сравнения $lx\equiv(n-1)u \pmod k$. Так как $l\mid$ НОД $(n-1,k)$, то НОД $(l,k)=l$, а значит, $s-1=s_0+v\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x\equiv\frac{(n-1)u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$, $0\le v<l$.

Таким образом, как и в доказательстве теоремы 6, мы имеем отображение $\tau: E\to P$, заданное по правилу $\tau(\psi)=(u,v)$, где $u=\psi(0)$, а v участвует в процессе вычисления образа единицы s при эндоморфизме $\psi-u$ аддитивной группы кольца классов вычетов Z_k, т.е. $s-1=s_0+v\frac{k}{l}$, где s_0 — решение сравнения $x\equiv\frac{(n-1)u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. Инъективность и сюръективность отображения τ доказывается так же, как при доказательстве этих свойств отображения τ в теореме 6, заменив дробь $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на $n-1$.

Бинарная операция $\diamond$, определенная на множестве $Z_k\times Z_l$ в теореме, является ассоциативной, доказывается так же, как в теореме 6, заменив дробь $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на $n-1$. Итак, $\langle P,\diamond\rangle$ является полугруппой. Правый закон дистрибутивности (4) для n-арной операции h и бинарной операции $\diamond$ вновь доказывается как в теореме 6, заменив дробь $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на $n-1$. Докажем левый закон дистрибутивности для этих операций. Пусть $(u_i,v_i),(u,v)\in Z_k\times Z_l$, $i=1,\ldots,n$. Тогда

$$(u,v)\diamond h((u_1,v_1),\ldots,(u_n,v_n))=(u,v)\diamond(u_1+\ldots+u_n+l,v_1+\ldots+v_n)=$$
$$=((u_1+\ldots+u_n+l)s+u,(v_1+\ldots+v_n)s+v),$$

где $s-1=s_0+v\frac{k}{l}$, s_0 — решение сравнения $x\equiv\frac{(n-1)u}{l} \pmod{\frac{k}{l}}$. С другой стороны,

$$h((u,v)\diamond(u_1,v_1),\ldots,(u,v)\diamond(u_n,v_n))=h((u_1s+u,v_1s+v),\ldots,(u_ns+u,v_ns+v))=$$

$$=(u_1s+u+\ldots+u_ns+u+l,v_1s+v+\ldots+v_ns+v)=((u_1+\ldots+u_n)s+nu+l,(v_1+\ldots+v_n)s+nv),$$

но $(n-1)u+l\equiv sl \pmod k$ и $(n-1)v\equiv 0 \pmod l$ (так как $l\mid(n-1)$), значит, последнее выражение равно

$$((u_1+\ldots+u_n+l)s+u,(v_1+\ldots+v_n)s+v).$$

Тогда

$$(u,v)\diamond h((u_1,v_1),\ldots,(u_n,v_n))=h((u,v)\diamond(u_1,v_1),\ldots,(u,v)\diamond(u_n,v_n)).$$

Итак, алгебра $\langle P, h, \diamond\rangle$ является $(n,2)$-кольцом. Сохранение n-арной и бинарной операции при биективном отображении τ доказывается так же, как в доказательстве теоремы 6, заменив дробь $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ на $n-1$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 7 имеем

Следствие 8. *Построенное в теореме 7 $(n,2)$-кольцо $\langle P, h, \diamond\rangle$ будет изоморфно $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов абелевой полуциклической n-группы типа $(k,1,l)$.*

Доказательство. Согласно теореме 1, из изоморфизма абелевой полуциклической n-группы типа $(k,1,l)$ и полуциклической n-группы $der_{1_{Z_k},l}Z_k$, где $l \mid$ НОД $(n-1,k)$, следует изоморфизм $(n,2)$-колец эндоморфизмов этих n-групп. Осталось применить теорему 7. Следствие доказано.

Изучим $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов конечной циклической n-группы.

Следствие 9. *Пусть $\langle E, g, \circ\rangle$ — $(n,2)$-кольцо эндоморфизмов конечной циклической n-группы порядка k. В циклической n-группе $\langle Z_k, f\rangle = der_{1_{Z_k},1}Z_k$ определим бинарную операцию $\diamond$ по правилу*

$$u_1 \diamond u_2 = u_1 \cdot u_2 \cdot (n-1) + u_1 + u_2,$$

где $\cdot$ — умножение по модулю k. Тогда алгебра $\langle Z_k, f, \diamond\rangle$ будет $(n,2)$-кольцом, которое изоморфно $\langle E, g, \circ\rangle$.

Доказательство. Заметим, что при $l=1$ в теореме 7 n-группа $der_{1_{Z_l},1}Z_l$ будет одноэлементной, а операция $\diamond$ преобразуется в указанную операцию. Осталось применить теорему 7. Следствие доказано.

5. Заключение

В работе строились $(n,2)$-кольца и $(n,2)$-почтикольца, которые изоморфны $(n,2)$-кольцам и $(n,2)$-почтикольцам эндоморфизмов различных полуциклических n-групп. Получены следующие основные результаты:

1) Построено $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов бесконечной абелевой полуциклической n-группы (теорема 3).

2) Построено $(n,2)$-почтикольцо, изоморфное $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов бесконечной не абелевой полуциклической n-группы (теорема 5).

3) Построено $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов бесконечной циклической n-группы (следствие 3).

4) Построено $(n,2)$-почтикольцо, изоморфное $(n,2)$-почтикольцу эндоморфизмов конечной не абелевой полуциклической n-группы (теорема 6).

5) Построено $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов конечной абелевой полуциклической n-группы (теорема 7).

6) Построено $(n,2)$-кольцо, изоморфное $(n,2)$-кольцу эндоморфизмов конечной циклической n-группы (следствие 9).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиев И. Ш. О наименьшем многообразии симметрических алгебр // Алгебра и логика (семинар). 1966. Т. 5, №6. С. 5-14.

2. Чакани Б. Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр // Acta scient. math. 1964. Vol. 25. P. 202-208.

3. Glazek K., Gleichgewicht B. Abelian n-groups // Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai Esztergom (Hungaru). 1977. Vol. 29. P. 321-329.

4. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 уч. М.: Наука, 1974. 158 с.

5. Русаков С. А. Алгебраические n-арные системы. Минск: Навука i тэхнiка, 1992. 263 с.

6. Гальмак А. М. n-Арные группы. Часть 1. Гомель: Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, 2003. 195 с.

7. Гальмак А. М. n-Арные группы. Часть 2. Минск: Издательский центр БГУ, 2007. 323 с.

8. Crombez G. On (n,m)-rings // Abh. Math. Sem. Univ. 1972. Vol. 37. P. 180-199.

9. Post E. L. Poluadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48. P. 208-350.

10. Глускин Л. М. Позиционные оперативы // Мат. сборник. 1965. Т. 68 (110), № 3, С. 444-472.

11. Hosszu M. On the explicit form of n-group operacions // Publ. Math. 1963. Vol. 10. P. 88-92.

12. Щучкин Н. А. Прямое произведение n-арных групп // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, Выпуск 2. С. 101-121.

13. Glazek K., Michalski J., SierockiA I. On evaluation of some polyadic groups // Contributions to General Algebra. 1985. Vol. 3. P. 159-171 .

14. Khodabandeh H., Shahryari M. On the representations and automorphisms of polyadic groups // Commun. Algebra. 2012. Vol. 40. P. 2199-2212.

15. Щучкин Н. А. Полуциклические n-арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. Т. 3 (54). С. 186-194.

REFERENCES

1. Aliev, I. S. 1966, “On minimal varieties of symmetric algebras”, Algebra and Logic (seminar). 5, №6. pp. 5-14. (In Russian)

2. Chakany, B. 1964, “Abelian properties of primitive classes of universal algebras”, Acta Scient. Math. , 25 : 3–4 (1964) pp. 202–208 (In Russian)

3. Glazek, K., Gleichgewicht, B. 1977, “Abelian n-groups”, Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai Esztergom (Hungaru) 29 pp. 321-329.

4. Kurosh, A. G. 1974, “General algebra, Lections 1969-1970”, Nauka, Moscow, 158 pp. (In Russian)

5. Rusakov, S. F. 1992, “Algebraic n-ary systems”, Navuka i technika, Minsk, 264 pp. (In Russian)

6. Gal’mak, A. M. 2003, “n-Ary groups”, Part I, Gomel university, Gomel, 195 pp. (In Russian)

7. Gal’mak, A. M. 2007, “n-Ary groups”, Part 2, Publishing center of BSU, Minsk, 325 pp. (In Russian)

8. Crombez, G. 1972, “On (n,m)-rings”, Abh. Math. Sem. Univ. 37, pp. 180-199.

9. Post, E. L. 1940, “Polyadic groups”, Trans. Amer. Math. Soc. 48, pp. 208-350.

10. Gluskin, L. M. 1965, “Positional oeratives”, Math. collection, V.68 (110), No 3, pp. 444-472. (In Russian)

11. Hosszu, M. 1963, “On the explicit form of n-group operacions”, Publ. Math. 10, pp. 88-92.

12. Shchuchkin, N.A. 2014, “Direct product of n-ary groups”, Chebyshev’s collection 15, Issue 2, pp. 101-121. (In Russian)

13. Glazek, K., Michalski, J., SierockiA, I. 1985, “On evaluation of some polyadic groups”, Contributions to General Algebra 3, Proc. Conf., Vienna. pp. 159-171.

14. Khodabandeh, H., Shahryari, M. 2012, “On the representations and automorphisms of polyadic groups”, Commun. Algebra 40, pp. 2199-2212.

15. Shchuchkin, N.A. 2009, “Semicyclic n-ary groups”, Izv. Gomel State Univ. 3(54), pp. 186-194. (In Russian)

Получено 12.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-370-377

Математический вариационный метод определения эффективного предела текучести двухкомпонентных композиционных материалов

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев

Игорь Константинович Архипов — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).
Влада Игоревна Абрамова — кандидат технических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: abramova_vi@mail.ru
Ольга Владимировна Кузовлева — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Александр Евгеньевич Гвоздев — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Аннотация

В работе предлагается развитие математического вариационного метода Хашина-Штрикмана, который применялся ранее для определения вилки возможных значений эффективных упругих характеристик. В этом случае определяются эффективные характеристики пластичности двухкомпонентных композитов. В частности, определена вилка возможных значений эффективного предела текучести таких композиционных материалов.

Ключевые слова: вариационный метод, композиционные материалы, характеристики пластичности.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:
И. К. Архипов, В. И. Абрамова, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев. Математический вариационный метод определения эффективного предела текучести двухкомпонентных композиционных материалов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 370–377.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-370-377

Mathematical variational method for determining the effective yield strength of two-component composite materials

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev

Igor Konstantinovich Arkhipov — doctor of technical sciences, professor, Tula State Pedagogical University L. N. Tolstoy (Tula).
Vlada Igorevna Abramova — candidate of technical sciences, associate professor, Tula State Pedagogical University L. N. Tolstoy (Tula).
e-mail: abramova_vi@mail.ru
Olga Vladimirovna Kuzovleva — candidate of technical sciences, docent, Russian State University of justice (Moscow).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Alexandr Evgenyevich Gvozdev — doctor of engineering, professor, Tula State Pedagogical University L.N. Tolstoy (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Abstract

The paper proposes the development of the mathematical variational Hashin-Strickman method, which was previously used to determine the maximum possible values of effective elastic characteristics. In this case, the effective plasticity characteristics of two-component composites are determined. In particular, the fork of possible values of the effective yield strength of such composite materials is determined.

Keywords: variational method, composite materials, plasticity characteristics.

Bibliography: 29 titles.

For citation:
I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, O. V. Kuzovleva,A. E. Gvozdev, 2021, "Mathematical variational method for determining the effective yield strength of two-component composite materials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 370–377.

1. Введение

Вариационный метод Хашина-Штрикмана [1, 2] основан на поиске стационарных значений функционалов, представляющих потенциальную и дополнительную энергию деформации упругого тела. С помощью этого метода найдена вилка возможных значений эффективных модулей упругости микронеоднородных материалов.

2. Основная часть

В частности, для двухкомпонентных композитов получены формулы:

а) для эффективного объемного модуля K_*:

$$K_2 + \frac{c_1(K_1 - K_2)}{1 + c_2 a_2 (K_1 - K_2)} \leqslant K_* \leqslant K_1 + \frac{c_2(K_2 - K_1)}{1 + c_1 a_1 (K_2 - K_1)}, \tag{1}$$

где $a_1 = \dfrac{3}{3K_1 + 4\mu_1}$; $a_2 = \dfrac{3}{3K_2 + 4\mu_2}$;
K_1, K_2 — объемные упругие модули компонентов, μ_1, μ_2 — модули сдвига компонентов, c_1, c_2 — объемные концентрации компонентов.

б) для эффективного модуля сдвига μ_*:

$$\mu_2 + \frac{c_1(\mu_1 - \mu_2)}{1 + c_2 b_2 (\mu_1 - \mu_2)} \leqslant \mu_* \leqslant \mu_1 + \frac{c_2(\mu_2 - \mu_1)}{1 + c_1 b_1 (\mu_2 - \mu_1)}, \tag{2}$$

где $b_1 = \dfrac{6(K_1 + 2\mu_1)}{5\mu_1(3K_1 + 4\mu_1)}; b_2 = \dfrac{6(K_2 + 2\mu_2)}{5\mu_2(3K_2 + 4\mu_2)}$.

В работе [3] получена зависимость между упругими характеристиками композитов и эффективным пределом текучести σ_s^* в виде:

$$\sigma_s^* = \frac{\mu_*}{\mu_2} \varepsilon \sigma_{s2}. \tag{3}$$

В работе [3] доказано, что эффективная начальная поверхность текучести Генки-Мизеса для двухкомпонентного композита подобна такой же поверхности в однородной матрице с коэффициентом подобия ε, который определяется цепочкой формул:

$$\varepsilon = \frac{1 + c_1 D_2 + c_2 D_1}{1 + D_1} \tag{4}$$

$$D_1 = 4 g_{\nu 1} \mu_1; \quad D_2 = 4 g_{\nu_1 \mu_2} \tag{5}$$

$$g_{\nu 1}^{(s)} = \frac{g_{11}^{(s)} - g_{12}^{(s)}}{4}$$

$$g_{11}^{(s)} = -\frac{2\lambda_s + 7\mu_s}{15\mu_s(\lambda_s + 2\mu_s)}; \quad g_{12}^{(s)} = \frac{\lambda_s + \mu_s}{15\mu_s(\lambda_s + 2\mu_s)}; \quad s = 1; 2 \tag{6}$$

При выводе формулы (3) в работе [3] использовался упруго-пластический вариант метода обобщенного сингулярного приближения [4], когда для вычисления коэффициента подобия ε необходимо знать упругие модули тела сравнения [4] λ и μ При использовании метода Хашина–Штрикмана в работе [4] рекомендовано последовательно вычислять для левого (меньшего) предела в формулах (1) и (2) значения этих модулей для менее жесткого компонента, для правого (большего) предела — значения модулей для более жесткого компонента.

Таким образом, для каждого из пределов неравенств (1) и (2) должно быть вычислено в соответствии с (4)-(6), то или иное значение коэффициента подобия ε.

Для меньшего значения вилки (1)-(2) в формулах (6) принимается значение $s = 1$. Для большего значения вилки в (6) принимается значение $s = 2$. Формула для определения вилки значений эффективного предела текучести композита $\sigma_{s_1}^*$ имеет вид:

$$\sigma_{s_1}^* \leqslant \sigma_s^* \leqslant \sigma_{s_2}^*, \tag{7}$$

где

$$\sigma_{s_1}^* = \frac{\mu_*^{(1)}}{\mu_2} \varepsilon_1 \sigma_{s_2}; \quad \sigma_{s_2}^* = \frac{\mu_*^{(2)}}{\mu_2} \varepsilon_2 \sigma_{s_1}. \tag{8}$$

$$\mu_*^{(1)} = \mu_2 + \frac{c_1(\mu_1 - \mu_2)}{1 + c_1 b_2 (\mu_1 - \mu_2)} \quad \mu_*^{(2)} = \mu_1 + \frac{c_2(\mu_2 - \mu_1)}{1 + c_1 b_1 (\mu_2 - \mu_1)}.$$

Численный расчет σ_s^* проведен для двухкомпонентного композита с матрицей из порошка стали 07Х18Н12М2 с пропиткой медными включениями. Значения упругих модулей матрицы взяты из [5]. Для включений эти значения соответствуют [6]. Объемные концентрации матрицы и включений: $c_1 = 0,152$, $c_2 = 0,848$. Величины $\mu_1 = 27,7$ ГПа, $\mu_2 = 80$ ГПа, $\lambda_1 = 51,4$ ГПа, $\lambda_2 = 120$ ГПа, $\varepsilon_1 = 0,967$, $\varepsilon_2 = 1,01$. В итоге получена вилка возможных значений эффективного предела текучести композита в виде: $0,858\sigma_{s2} \leqslant \sigma_s^* \leqslant 0,869\sigma_{s2}$ где σ_{s2} — предел текучести однородной матрицы.

3. Заключение

Полученные результаты могут быть использованы для создания ресурсосберегающих технологий обработки слитковых, порошковых и композиционных металлических систем с учетом рекомендаций автором работ [7]-[29].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hashin Z. 1964, «Theory of mechanical behavior of heterogeneous media», Appl. Mech. Rev., 17, №1.

2. Hashin Z., Shtrikman S. 1962, «On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity», J. Mech. Phys. Solids, 10, №4, p.335.

3. Архипов И. К. 1995, «Характеристики свойств упругости и пластичности композиционных материалов», Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Тула, 218 с.

4. Шермергор Т. Д. 1977. Теория упругости микронеоднородных сред. Москва, Наука, 399 с.

5. Зубченко А. С. 2003. Марочник сталей и сплавов. Москва, Машиностроение, 715 с.

6. Штанов Е. Н., Штанова И. А. 2001. Цветные металлы и сплавы. Справочник. Н. Новгшород, Вента-2, 277 с.

7. Gvozdev A. E., Golyshev I. V., Minayev I. V., Sergeyev A. N., Sergeyev N. N., Tikhonova I. V., Khonelidze D. M., Kolmakov A. G. 2015, «Multiparametric optimization of lasercutt in gofsteel sheets», InorganikcMaterials: AppliedResearch, vol.6, No.1, pp. 305-310.

8. Gvozdev A. E., Sergeev N. N., Minaev I. V., Tikhonova I. V. 2015, «Role of nucleation in the development of first-order phase transformations», Inorganic Materials: Applied Research, vol.6, №4, pp. 283-288.

9. Патент на изобретение 2014135667/02 (2590045) Российская Федерация / Способ получения металлического порошка из отходов быстрорежущей стали в керосине // Е. В. Агеев, Е. А. Воробьев, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеева. Заявитель и патентообладатель: Юго-Западный государственный университет. №2014135667/02, опубл. 10.07.2016. Бюл. №19.

10. Патент на изобретение 2014135539 (2597445) Российская Федерация / Способ получения нанопорошка меди из отходов // Е. В. Агеев, Н. М. Хорьякова, А. Е. Гвоздев, Е. В. Агеева, В. С. Малюхов. Заявитель и патентообладатель: Юго-Западный государственный университет. №2014135539/02, опубл. 10.09.2016. Бюл. №25.

11. Патент на изобретение 2014135563 (2599476) Российская Федерация / Способ получения медного порошка из отходов // Е. В. Агеев, Е. В. Агеева, Н. М. Хорьякова, А. Е. Гвоздев. Заявитель и патентообладатель: Юго-Западный государственный университет. №2014135563, опубл. 10.10.2016.

12. Бреки А. Д., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г. 2016, «Использование обобщенного треугольника Паскаля для описания колебаний силы трения материалов», Материаловедение, №11, С. 3–8.

13. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е., Афанаскин А. В., Гвоздев Е. А. 2002, «Расчет кластерной структуры расплава, ее влияние на образование наноаморфных твердых фаз и их структурную релаксацию при последующем нагреве», Металловедение и термическая обработка металлов, №6, С. 12–16.

14. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е. 2004, «О механизмах и кинетике процессов аккомодации зерен при сверхпластической деформации металлических сплавов в условиях одноосного растяжения», Материаловедение, №7 (88), С. 13–17.

15. Gvozdev A. E., Sergeev N. N., Minaev I. V., Tikhonova I. V. 2015, «Role of nucleation in the development of first-order phase transformations», Inorganic Materials: Applied Research, vol.6, №4, pp. 283–288.

16. Гвоздев А. Е., Колмаков А .Г., Кузовлева О. В., Сергеев Н. Н., Тихонова И. В. 2013, «Механические свойства конструкционных и инструментальных сталей в состоянии предпревращения при термомеханическом воздействии», Деформация и разрушение материалов, №11, С. 39–43.

17. Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Bogolyubova D. N., Sergeev N. ., Tikhonova I. V. 2015, «Features of Softening Processes of Aluminum, Copper, and Their Alloys under Hot Deformation», Inorganic Materials: Applied Research, vol.6, No.1, pp. 32–40.

18. Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Minaev I. V., Sergeev N. N., Tikhonova I. V. 2015, «Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low and medium carbon low alloy steels», Inorganic Materials: Applied Research, vol.6, No.1, pp. 41–44.

19. Журавлев Г. М., Гвоздев А. Е., Сергеев Н. Н., Провоторов Д. А. 2016, «Вариант расчета максимального упрочнения малоуглеродистых сталей в процессах пластической деформации», Производство проката, №7, С. 9–13.

20. Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Колмаков А. Г., Сергеев Н. Н. 2016, «Расчет деформационной повреждаемости в процессах обратного выдавливания металлических изделий», Технология металлов, №1, С. 23–32.

21. Breki A. D., Vasilyeva E. S., Tolochko O. V., Didenko A. L., Kudryavtsev V. V., Kolmakov A. G., Sergeev N. N., Gvozdev A. E., Starikov N. E., Provotorov D. A., Fadin Y. A. 2016, «Synthesisand tribotechnical properties of composite coatings with PM-DAD PE polyimide matrix and fillers of tung stendich alcogenide nanoparticle supon dry sliding friction», Inorganic Materials: Applied Research, T.7, №4, pp. 542–546.

22. Журавлев Г. М., Гвоздев А. Е. 2016. Обработка сталей и сплавов в интервале температур фазовых превращений. Тула, Издательство ТулГУ, 320 с.

23. Кузовлева О. В., Гвоздев А. Е., Тихонова И. В., Сергеев Н. Н., Бреки А. Д., Стариков Н. Е., Сергеев А. Н., Калинин А. А., Малий Д. В., Титова Ю. Е., Александров С. Е., Крылов Н. А.

2016. О состоянии предпревращения металлов и сплавов, Тула: Издательство ТулГУ, 245 с.

24. Breki A. D., Didenko A. L., Kudryavtsev V. V., Vasilyeva E. S., Tolochko O. V., Gvozdev A. E., Sergeyev N.N., Provotorov D. A., Starikov N. E., Fadin Yu. A., Kolmakov A. G. 2017, «Composite coatings based on A-OOO polyimide and WS2 nanoparticles with enhanced dry sliding characteristics», Inorganic Materials: Applied Research, T.8. №1. pp. 56–59.

25. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. 2017, «Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces», Inorganic Materials: Applied Research, T.8, №4, С. 509–514.

26. Гвоздев А. Е. 2019. Экстремальные эффекты прочности и пластичности в металлических высоколегированных слитковых и порошковых системах. 2-е изд., испр. и доп. Тула: Издательство ТулГУ, 476 с.

27. Гвоздев А. Е., Сергеев Н. Н., Стариков Н. Е., Сапожников С. В., Кутепов С. Н., Маляров А. В., Калинин А. А. 2019. Малоотходные технологии получения инструмента из горячекатаных, порошковых и литых заготовок быстрорежущих сталей 2-е изд., испр. и доп. Под ред. проф. Н.Н. Сергеева. Тула, Издательство ТулГУ, 282 с.

28. Минаев И. В., Тихонова И. В., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г., Архипова Е. А. 2020, «Формирование поверхности реза и поверхностное упрочнение при лазерной резке звездочкой для цепей из сталей Ст.3 и 30ХГСА», Деформация и разрушение материалов, №9, С. 16–21.

29. Sergeev N. N., Minaev I. V., Tikhonova I. V., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Malii D. V., 2020, «Selecting Laser Cutting Modes for Engineering Steel Sheets Aiming at Provision of the Required Properties of Surface Quality», Inorganic Materials: Applied Research, v.11, №4, pp. 815–822.

REFERENCES

1. Hashin Z. 1964, «Theory of mechanical behavior of heterogeneous media», *Appl. Mech. Rev.*, 17, №1.

2. Hashin Z., Shtrikman S. 1962, «On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity», *J. Mech. Phys. Solids*, 10, №4, p.335.

3. Arkhipov I.K. 1995, «Characteristics of the properties of elasticity and plasticity of composite materials», Dissertation for the degree of doctor of technical Sciences. Tula, 218 p.

4. Shermergor T.D. 1977, *Theory of elasticity of micro-homogeneous media.* Moscow. Nauka, 399 pp.

5. Zubchenko A.S. 2003. *Vintage of steels and alloys.* Moscow, Mashinostroenie, 715 p.

6. Shtanov E.N., Shtanova I.A. 2001. *Non-ferrous metals and alloys.* Directory. N. Novgorod, Venta-2, 277 p.

7. Gvozdev A.E., Golyshev I.V., Minayev I.V., Sergeyev A.N., Sergeyev N.N., Tikhonova I.V., Khonelidze D.M., Kolmakov A.G. 2015, «Multiparametric optimization of lasercutt in gofsteel sheets», I*norganikcMaterials: AppliedResearch*, vol.6, No.1, pp. 305–310.

8. Gvozdev A.E., Sergeev N.N., Minaev I.V., Tikhonova I.V. 2015, «Role of nucleation in the development of first-order phase transformations», *Inorganic Materials: Applied Research*, vol.6, №4, pp. 283–288.

9. The patent for the invention 2014135667/02 (2590045) Russian Federation / Method for obtaining metal powder from high-speed steel waste in kerosene / / E. V. Ageev, E. A. Vorobyov, A. E. Gvozdev, E. V. Ageeva. Applicant and patent holder: Southwestern state University. No. 2014135667/02, publ. 10.07.2016. Byul. no. 19.

10. The patent for the invention 2014135539 (2597445) Russian Federation / Method for obtaining copper nanopowder from waste / / E. V. Ageev, N. M. Horyakova, A. E. Gvozdev, E. V. Ageeva, V. S. Malyukhov. Applicant and patent holder: Southwestern state University. No. 2014135539/02, publ. 10.09.2016. Byul. 25.

11. The patent for invention 2014135563 (2599476) Russian Federation / Method of obtaining copper powder from the waste // E.V. Ageev, E.V. Ageeva, N.M. Horakova, A.E. Gvozdev. Applicant and patent holder: Southwestern state University. No. 2014135563, publ. 10.10.2016.

12. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2016, «Using the generalized Pascal triangle to describe vibrations of the friction force of materials», *Materials science*, No.11, pp. 3–8.

13. Shorshorov M.H., Gvozdev A.E., Afanaskin A.V., Gvozdev E.A. 2002, «The calculation of the cluster structure of the melt, its impact on education anamorph solid phases and their structural relaxation upon subsequen*t heating»,* The Metallography and heat treatment of metals, No. 6, pp. 12–16.

14. Shorshorov M.Kh., Gvozdev A.E. 2004, «On mechanisms and kinetics of grain accommodation processes under superplastic deformation of metal alloys under uniaxial tension», *Materials Science*, No. 7 (88), pp. 13–17.

15. Gvozdev A.E., Sergeev N.N., Minaev I.V., Tikhonova I.V. 2015, «Role of nucleation in the development of first-order phase transformations», *Inorganic Materials: Applied Research*, vol.6, №4, pp. 283–288.

16. Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Kuzovleva O.V., Sergeev N.N., Tikhonova I.V. 2013, «Mechanical properties of structural and tool steels in the state of pre-rotation under thermomechanical action», *Deformation and destruction of materials*, No.11, pp. 39–43.

17. Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Provotorov D.A., Bogolyubova D.N., Sergeev N.N., Tikhonova I.V. 2015, «Features of Softening Processes of Aluminum, Copper, and Their Alloys under Hot Deformation», *Inorganic Materials: Applied Research*, vol.6, No.1, pp. 32–40.

18. Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Provotorov D.A., Minaev I.V., Sergeev N.N., Tikhonova I.V. 2015, «Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low and medium carbon low alloy steels», *Inorganic Materials: Applied Researc*h, vol.6, No.1, pp. 41–44.

19. Zhuravlev G.M., Gvozdev A.E., Sergeev N.N., Provotorov D.A. 2016, «The calculation of maximum hardening of low carbon steels in plastic deformation processes», *Production of rolled*, No.7, pp. 9–13.

20. Gvozdev A.E., Zhuravlev G.M., Kolmakov A.G., Sergeev N.N. 2016, «Calculation of strain damage in the process of reverse extrusion of metal products», *Technology of metals*, No.1, pp. 23–32.

21. Breki A.D., Vasilyeva E.S., Tolochko O.V., Didenko A.L., Kudryavtsev V.V., Kolmakov A.G., Sergeev N.N., Gvozdev A.E., Starikov N.E., Provotorov D.A., Fadin Y.A. 2016, «Synthesisand tribotechnical properties of composite coatings with PM-DAD PE polyimide matrix and fillers of tung stendich alcogenide nanoparticle supon dry sliding friction», *Inorganic Materials: Applied Research*, T.7, №4, pp. 542–546.

22. Zhuravlev G.M., Gvozdev A.E. 2016. *Processing of steels and alloys in the temperature range of phase transformations.* Tula, Tula state University Publishing house, 320 p.

23. Kuzovleva O.V., Gvozdev A.E., Tikhonova I.V., Sergeev N.N., Breki A.D., Starikov N.E., Sergeev A.N., Kalinin A.A., Maliy D.V., Titova Yu.E., Aleksandrov S.E., Krylov N.A. 2016. *On the state of pre-conversion of metals and alloys.* Tula: Tulsu Publishing house, 245 p.

24. Breki, A.D., Didenko, A.L., Kudryavtsev, V.V., Vasilyeva, E.S., Tolochko, O.V., Gvozdev, A.E., Sergeyev, N.N., Provotorov, D.A., Starikov, N.E., Fadin, Yu.A., Kolmakov, A.G. 2017, «Composite coatings based on A-OOO polyimide and WS2 nanoparticles with enhanced dry sliding characteristics», *Inorganic Materials: Applied Research*, T.8. №1. pp. 56–59.

25. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2017, «Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces», *Inorganic Materials: Applied Research*, T.8, №4, C. 509–514.

26. Gvozdev A. E. 2019. *Extreme strength and ductility effects in high-alloy metal ingot and powder systems.* 2nd ed., ISPR. and add. Tula: Publishing house of Tula state University, 476 p.

27. Gvozdev A.E., Sergeev N.N., Starikov N.E., Sapozhnikov S.V., Kutepov S.N., Malyarov A.V., Kalinin A.A. 2019. *Low-waste technologies for obtaining tools from hot-rolled, powder and cast billets of high-speed steels* 2nd ed., ISPR. and add. Edited by Prof. N.N. Sergeev. Tula, Tula state University Publishing house, 282 p.

28. Minaev I.V., Tikhonova I.V., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Arkhipova E.A. 2020, «Formation of the cutting surface and surface hardening during laser cutting with an asterisk for chains made of St.3 and 30KHGSA steels», *Deformation and destruction of materials*, No.9, pp. 16–21.

29. Sergeev N.N., Minaev I.V., Tikhonova I.V., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Sergeev A.N., Kutepov S.N., Malii D.V., 2020, «Selecting Laser Cutting Modes for Engineering Steel Sheets Aiming at Provision of the Required Properties of Surface Quality», *Inorganic Materials: Applied Research*, v.11, №4, pp. 815–822.

Получено 24.09.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 621.785.539 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-378-389

Математические закономерности процесса трения скольжения пористого материала на основе железа, пропитанного смазочным маслом с дисперсными частицами фторированного графена[1]

А. Д. Бреки, С. Г. Чулкин, Н. М. Добровольский, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Е. В. Мазин

Александр Джалюльевич Бреки — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).
e-mail: albreki@yandex.ru
Сергей Георгиевич Чулкин — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru
Николай Михайлович Добровольский — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).
Ольга Владимировна Кузовлева — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Александр Евгеньевич Гвоздев — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Евгений Владимирович Мазин — ООО НПО «Графеновые материалы» (г. Санкт-Петербург).
e-mail: mazinev@mail.ru

Аннотация

В работе приведены результаты исследования процесса трения скольжения пористого материала на основе железа, пропитанного смазочным маслом с дисперсными частицами фторированного графена. Установлено, что закономерности кинетики внешнего трения скольжения имеют сигмоидальный и сигмоидально-линейный характер. Получены экспериментальные результаты, показывающие, что с увеличением концентрации агрегатов из чешуек фторированного графена в смазочном масле средняя сила и коэффициент трения снижаются, при этом наблюдается хороший антифрикционный эффект.

Ключевые слова: закономерности трения, математические закономерности, пористый материал, смазочная композиция, трение, фторированный графен.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
А. Д. Бреки, С. Г. Чулкин, Н. М. Добровольский, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Е. В. Мазин. Математические закономерности процесса трения скольжения пористого материала на основе железа, пропитанного смазочным маслом с дисперсными частицами фторированного графена // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 378–389.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки Россси в рамках реализации программы Научного центра мирового уровня по направлению "Передовые цифровые технологии"СПбПУ (соглашение от 17.11.2020 № 075-15-2020-934).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 621.785.539 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-378-389

Mathematical regularities of the sliding friction process of a porous material based on iron impregnated with lubricating oil with dispersed particles of fluorinated graphene

A. D. Breki, S. G. Chulkin, N. M. Dobrovolsky, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, E. V. Mazin

Alexander Dzhalyulyevich Breki — candidate of technical sciences, associate professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Institute of Problems of Machine Science of the Russian Academy of Sciences (Saint Petersburg).
e-mail: albreki@yandex.ru
Sergey Georgievich Chulkin — doctor of technical Sciences, Professor, Saint Petersburg state marine technical University (Saint Petersburg).
e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru
Nikolay Mikhaylovich Dobrovolsky — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor, Tula state pedagogical University, Russia. L. N. Tolstoy (Tula).
Olga Vladimirovna Kuzovleva — candidate of technical Sciences, docent, docent, Russian State University of justice (Moscow).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Alexandr Evgenyevich Gvozdev — doctor of engineering, Professor, Professor, Tula state pedagogical University L.N. Tolstoy (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Evgeny Vladimirovich Mazin — LLC NPO «Graphene materials» (Saint Petersburg).
e-mail: mazinev@mail.ru

Abstract

The paper presents the results of a study of the sliding friction process of a porous material based on iron impregnated with lubricating oil with dispersed particles of fluorinated graphene. It is established that the regularities of the kinetics of external sliding friction have a sigmoidal and sigmoidal-linear character. Experimental results have been obtained showing that with an increase in the concentration of aggregates from flakes of fluorinated graphene in the lubricating oil, the average force and coefficient of friction decrease, while a good anti-friction effect is observed.

Keywords: friction regularities, mathematical regularities, porous material, lubricant composition, friction, fluorinated graphene.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

A. D. Breki, S. G. Chulkin, N. M. Dobrovolsky, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, E. V. Mazin, 2021, "Mathematical regularities of the sliding friction process of a porous material based on iron impregnated with lubricating oil with dispersed particles of fluorinated graphene", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 378–389.

1. Введение

В различных областях промышленности для снижения энергетических потерь на трение и повышения работоспособности и долговечности трибосопряжений широко применяется целый ряд смазочных композиций на основе смазочных масел, содержащих присадки конкретного функционального назначения, в том числе [1]: кондиционеры металлов, реметаллизанты (восстановители) твёрдые смазочные материалы и т.п. Множество смазочных композиций постоянно увеличивается за счёт разработки новых составов, содержащих металлы, бинарные сплавы и химические соединения.

В 2010 г. А. Гейм и К. Новоселов получили Нобелевскую премию за открытие графена [2]. Графен — это слой углерода толщиной в один атом, состоящий из конденсированных шестичленных колец, атомы углерода в графене соединены sp^2-связями в гексагональную двумерную решетку [3, 4]. Различные научные исследования показали, что однослойный графен обладает особым комплексом электрофизических, механических, оптических и тепловых свойств [4, 5, 6]. С другой стороны, появляются исследования как в области физики: «квантовое трение и графен» [7], таки в области машиностроения [8, 9], в которых рассматриваются трибологические свойства графена. Антифрикционные свойства графена при трении стальных поверхностей показаны в работе [10]. Также графен исследуется как элемент жидких смазочных композиций [8, 11]. Это является актуальным в современных условиях функционирования техники.

При создании порошкообразного графена, в силу высокой поверхностной энергии однослойные чешуйки графена соединяются и образуют агрегаты различных размеров и формы, которые легко разрушаются при внешнем воздействии. Исследований жидких смазочных композиций, состоящих из современных смазочных масел, содержащих агрегаты графена в настоящее время мало. В связи с этим в данной работе реализовано исследование влияния агрегатов фторированного графена на трение пористых тел из железа, пропитанных смазочным маслом.

2. Материалы и методика исследования

В качестве дисперсионной среды для создания смазочных композиций с высокодисперсными агрегатами фторированного графена использовали базовое смазочное масло марки Kluber Constant GLY 2100.

Технические характеристики выбранного смазочного масла приведены в таблице 1.

Таблица 1: Технические характеристики базового масла

№	Технические характеристики изделия	CONSTANT GLY 2100
1.	Цвет	Светло-коричневый
2.	Структура	Гомогенное высоко-вискозное
3.	Температурный диапазон использования, $^\circ$ С	$-40, +140$
4.	Плотность при 20° С, г/мл	0,84
5.	Показатель преломления при 20° С	1,464
6.	Кинематическая вязкость при 40° С / мм/с^2	55
7.	Кинематическая вязкость при 100° С/ мм/с^2	9

В качестве наполнителя для данного смазочного масла использовали высокодисперсные агрегаты из чешуек фторированного графена, произведённого в ООО НПО «Графеновые материалы» (рис. 1).

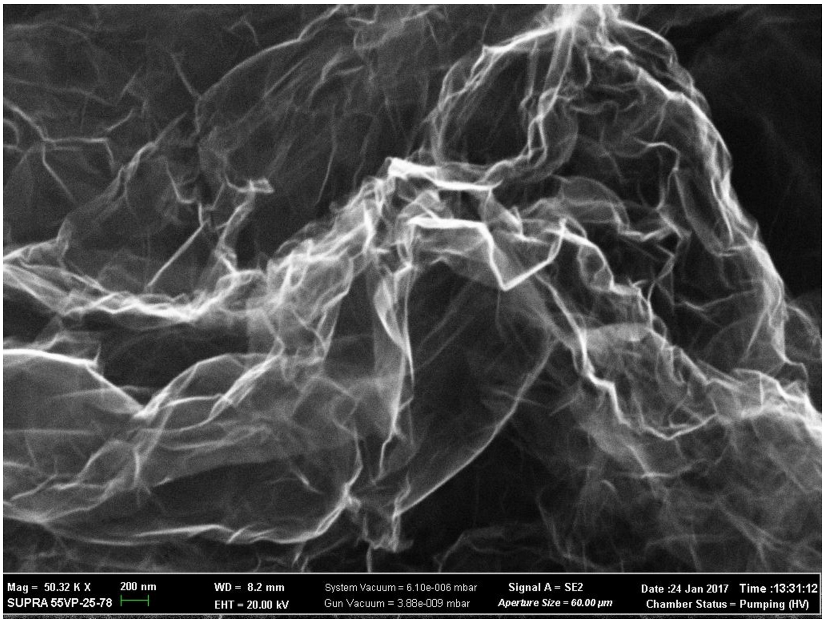


Рис. 1: Деформированные (смятые) чешуйки фторированного графена

Предварительно был проведён анализ исследуемой порошкообразной добавки. Спектры комбинационного рассеивания были записаны при комнатной температуре, в качестве источника монохроматического излучения использовался аргоновый лазер (514,5 нм, с мощностью 30 мВт).

Спектр комбинационного рассеяния графеновых агрегатов, представленных на рис. 2, показывают наличие пика при 1580 см$^{-1}$ (графитовая G-линия), а так же характерный для графена симметричный пик при 2687 см$^{-1}$ (2D линия). Высокое отношение IG/I2D свидетельствует о многослойности графена. Наличие пика с высокой интенсивностью при 1350 см$^{-1}$ (D-линия), подтверждает присутствие дефектов (относится к неупорядоченным дезориентированным графитовым слоям) [12].

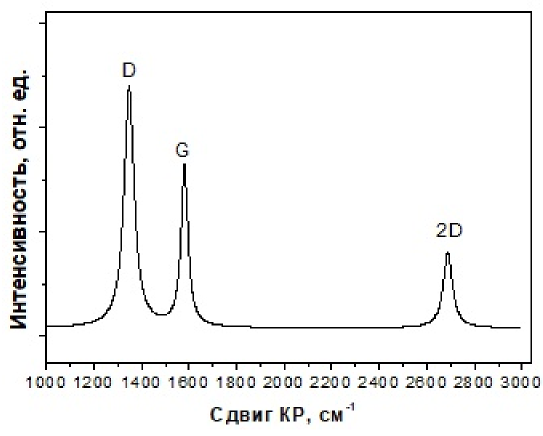


Рис. 2: Спектр КР графеновых агрегатов

Таким образом, углеродный продукт представляет собой многослойные графеновые агрегаты (дефектные слои).

Образцы для пропитки смазочной композицией с агрегатами фторированного графена были получены прессованием из химически чистого порошка железа (углерод — 0,001-0,02%, окислы — 0,1-0,2%, железо — основа) марки АНС100.29 с размерами частиц 45-212 мкм. Пористость образцов составляла 30%. Геометрические размеры образцов прямоугольной формы составляли $10,5 \times 6 \times 3$ мм. Перед испытаниями чистые образцы погружались с базовое масло и смазочные композиции с концентрацией 0,01 и 0,1% по массе фторированного графена на 10 суток для пропитки.

Для реализации сравнительного исследования антифрикционных свойств пропитанных образцов, в условиях трения скольжения по круговой траектории по схеме «ролик – плоскость» была использована универсальная машина трения модели ИИ 5018 для получения математических зависимостей сил и коэффициентов трения.

Подвижный образец (ролик) состоял из стали ШХ15, пропитанные образцы были жёстко фиксированы и неподвижны в процессе трения. Трущиеся образцы предварительно приводились в контактное взаимодействие. Смазывание трибосистемы в процессе трения реализовывалось за счёт выдавливания смазочной композиции из пропитанного образца. Контактное взаимодействие подвижного и неподвижного образцов реализовывалось с нормальной силой $N = 40$ Н. Частота вращения подвижного образца составляла $n = 300$ мин$^{-1}$. Диаметр ролика (подвижного образца) составлял 50 мм. Время одного полного испытания составляло 10 минут. Пропитанные образцы прижимались к ролику стороной с площадью 18 мм^2.

При проведении статистических оценок и анализе экспериментальных данных применены авторские разработки [1, 13], а также псевдо-случайный поиск, основанный на использовании различных теоретико-числовых сеток [20, 21, 22], применение, которых показало свою эффективность при обработке геофизических данных [23].

3. Результаты исследований и их обсуждение

Графики зависимости силы трения от времени для образцов, пропитанных базовым смазочным маслом, не содержащим агрегатов деформированных чешуек фторированного графена, показаны на рис. 3.

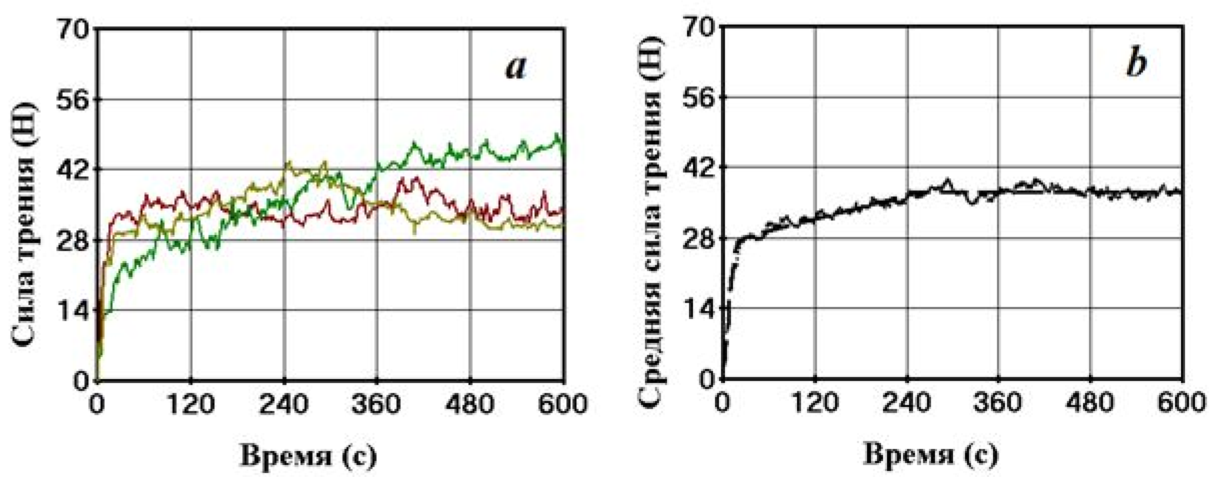


Рис. 3: Зависимости от времени для базового масла: a) силы трения скольжения; b) средней силы трения скольжения

Представленная на рис. 3 b зависимость средней силы трения от времени аналитически выражается следующим образом:

$$F_f(t) = \frac{0,039t + 27}{1 + \exp(-0,3(t-8))} - \frac{0,039t - 10}{1 + \exp(-0,3(t-250))}, \tag{1}$$

где F_f — средняя сила трения, t — время. Средняя сила трения за некоторый интервалвремени определяется по формуле:

$$F_f = \frac{\int\limits_{t_0}^{t_k} F_f(t)dt}{t_k - t_0} = \frac{I_f}{\triangle\, t_f}, \qquad (2)$$

где I_f — импульс силы трения за интервал времени длиной $\triangle\, t_f$, t_0, t_k — начальная и конечная точки интервала времени.

Соответственно средняя сила трения за весь интервал времени трения равна:

$$F_f = \frac{\int\limits_{0}^{600} \left(\frac{0,039t + 27}{1 + \exp(-0,3(t-8))} - \frac{0,039t - 10}{1 + \exp(-0,3(t-250))}\right) dt}{600c} = \frac{20694Hc}{600c} \approx 34,5H. \qquad (3)$$

Средний коэффициент трения в этом случае равен:

$$f = \frac{\int\limits_{t_0}^{t_k} F_f(t)dt}{N(t_k - t_0)} = \frac{I_f}{N \triangle\, t_f} = \frac{34,5H}{40H} \approx 0,86, \qquad (4)$$

где N – фиксированная нормальная нагрузка.

Графики зависимости силы трения от времени для образцов, пропитанных базовым смазочным маслом, содержащем 0,01% порошкафторированного графена, показаны на рис. 4.

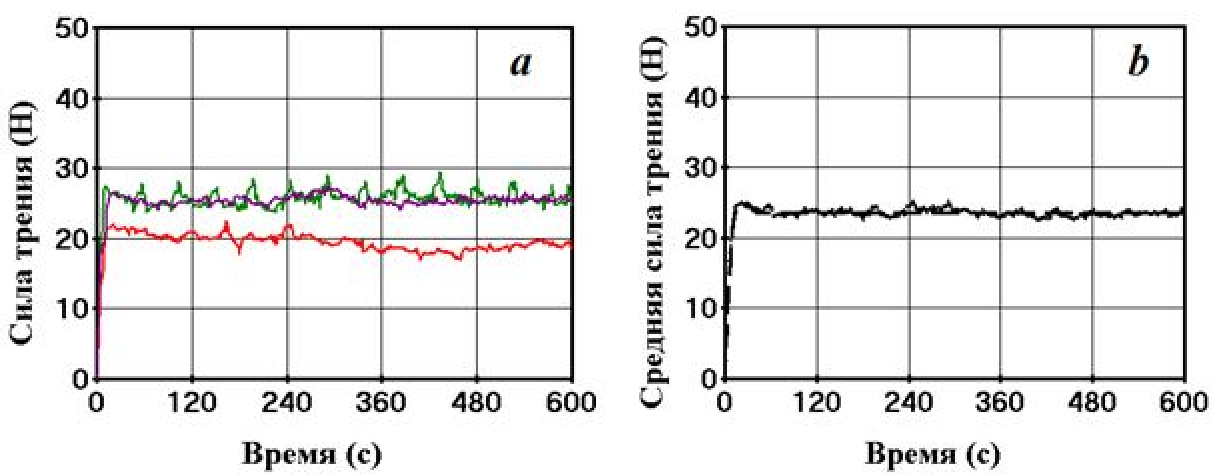


Рис. 4: Зависимости от времени для масла с 0,01% графена: a) силы трения скольжения; b) средней силы трения скольжения

Представленная на рис. 4 b зависимость средней силы трения от времени при использовании масла, содержащего 0,01% порошка фторированного графена, аналитически выражается следующим образом:

$$F_f(t) = \frac{25}{1 + \exp(-0,35(t-5))} - \frac{1,5}{1 + \exp(-0,35(t-35))}. \qquad (5)$$

Соответственно средняя сила трения за весь интервал времени трения равна:

$$F_f = \frac{\int\limits_0^{600} \left(\frac{25}{1+\exp(-0,35(t-5))} - \frac{1,5}{1+\exp(-0,35(t-35))} \right) dt}{600c} = \frac{14016Hc}{600c} \approx 23,4H. \qquad (6)$$

Средний коэффициент трения в этом случае равен:

$$f = \frac{I_f}{N \vartriangle t_f} = \frac{23,4H}{40H} \approx 0,58. \qquad (7)$$

Графики зависимости силы трения от времени для образцов, пропитанных базовым смазочным маслом, содержащем 0,1% порошка фторированного графена, показаны на рис. 5.

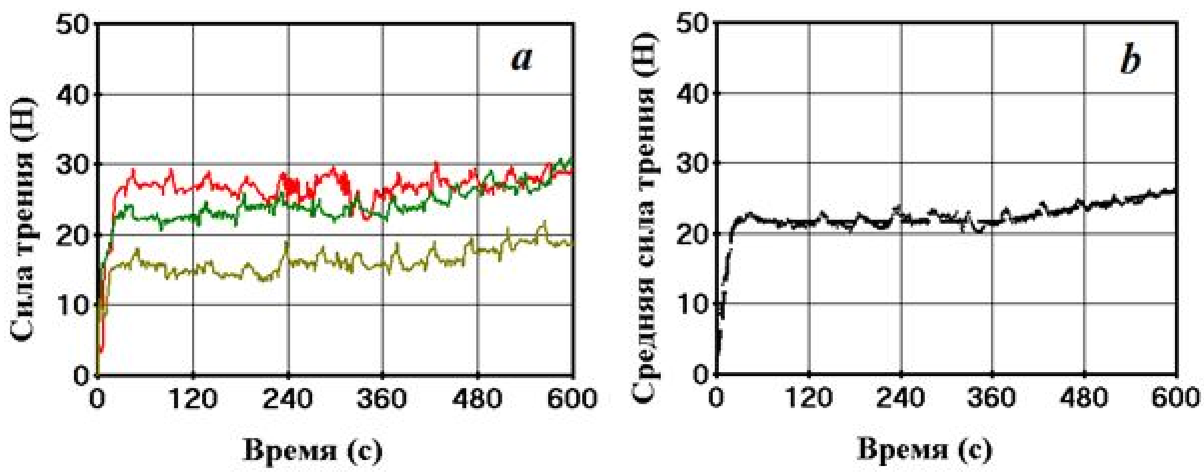


Рис. 5: Зависимости от времени для масла с 0,1% графена: a) силы трения скольжения; b) средней силы трения скольжения

Представленная на рис. 5 *b* зависимость средней силы трения от времени при использовании масла, содержащего 0,1% порошка фторированного графена, аналитически выражается следующим образом:

$$F_f(t) = \frac{22,5}{1+\exp(-0,21(t-10))} - \frac{0,8}{1+\exp(-0,35(t-55))} + \frac{0,019t-7}{1+\exp(-0,35(t-370))} \qquad (8)$$

Соответственно средняя сила трения за весь интервал времени трения равна:

$$F_f = \frac{\int\limits_0^{600} \left(\frac{22,5}{1+\exp(-0,21(t-10))} - \frac{0,8}{1+\exp(-0,35(t-55))} + \frac{0,019t-7}{1+\exp(-0,35(t-370))} \right) dt}{600c} = \frac{13335,8HC}{600c} \approx 22H \qquad (9)$$

Средний коэффициент трения в этом случае равен:

$$f = \frac{I_f}{N \vartriangle t_f} = \frac{22H}{40H} \approx 0,55. \qquad (10)$$

Аппроксимация и анализ экспериментальных данных осуществлялись по аналогии с работами [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

При анализе смазочного действия смазочной композиции следует отметить следующее:

1. При создании смазочной композиции полярно-активные молекулы масла адсорбируются на агрегаты из чешуек фторированного графена (рис. 6 *a).*

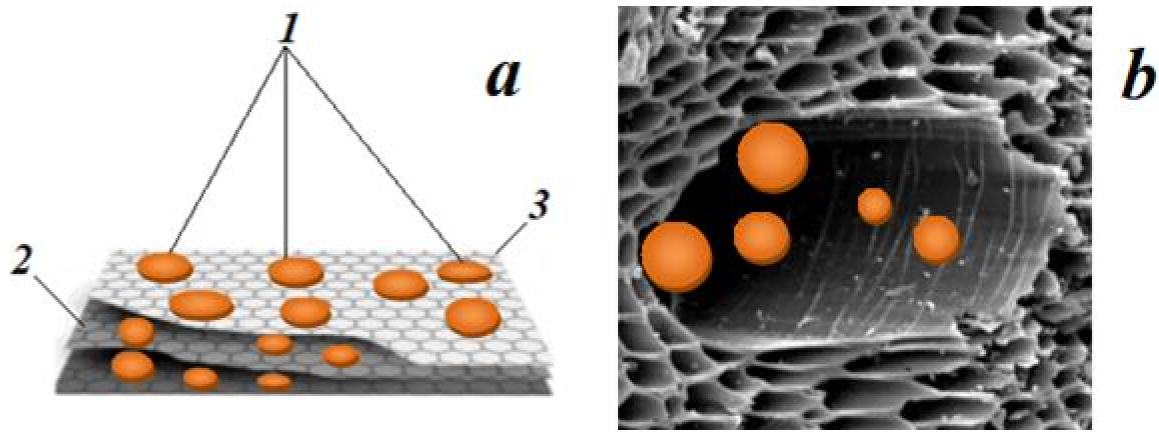


Рис. 6: Схематическое представление адсорбции полярно-активных молекул масла (1): a) между чешуйками (2) и на поверхности (3) агрегата графена; b) на поверхности поры

2. В процессе пропитки в поры приникают агрегаты фторированного графена с адсорбированными на них полярно-активными молекулами масла, часть которых адсорбируется на поверхность внутри пор (рис. 6 *b).*

3. При контактном взаимодействии пропитанного образца с цилиндром происходит выдавливание смазочной композиции с агрегатами графена, в результате чего происходит взаимодействие полярно-активных веществ адсорбированных на поверхности графена с поверхностью цилиндра (рис. 7).

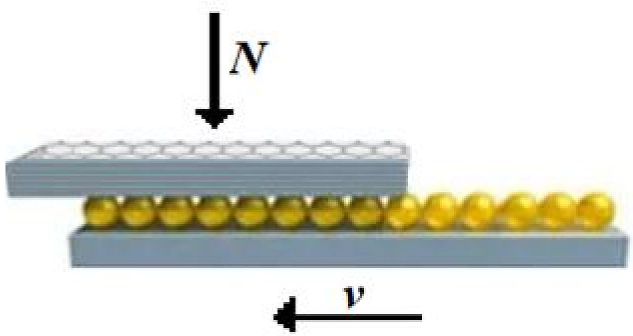


Рис. 7: Схематическое представление взаимодействия агрегата графена с поверхностью твёрдого тела через слой полярно-активных молекул смазочного масла

4. При относительном перемещении трущихся тел трение снижается, с одной стороны, за счёт наличия полярно-активных молекул масла, а с другой стороны, за счёт слабых связей между чешуйками агрегатов фторированного графена.

5. В процессе изнашивания, наряду с частицами износа в зону трения попадают частицы графена, обладающие антифрикционным действием. В связи с этим, смазочные композиции снижают трение лучше, чем базовое смазочное масло.

6. Повышение концентрации в масле агрегатов фторированного графена не приводит к существенному снижению трения относительно меньшей концентрации, что может быть связано с выдавливанием из пор относительно равных объемов смазочного вещества в зону трения, с учётом повышения вязкости [19].

4. Выводы

На основе проведённого исследования трения скольжения пористого материала на основе железа, пропитанного смазочным маслом с дисперсными частицами фторированного графена, можно сделать следующие основные выводы:

1. Установлено, что кинетические закономерности характеристик процесса внешнего трения скольжения пористого материала на основе железа, пропитанного смазочным маслом с дисперсными частицами фторированного графена по поверхности цилиндра из стали ШХ15 имеют сигмоидальный и сигмоидально-линейный характер.

2. Показано, что с увеличением концентрации агрегатов из чешуек фторированного графена в смазочном масле средняя сила и коэффициент трения снижаются.

3. Выявлено, что средний коэффициент трения при добавлении в смазочное масло 0,01% агрегатов из чешуек фторированного графена уменьшается на 32,6%, а при добавлении 0,1% — на 36%.

4. Обосновано, что для пропитки экономически целесообразно использовать смазочное масло с 0,01% агрегатов из чешуек фторированного графена, поскольку существенное повышение концентрации не приводит к ощутимому антифрикционному эффекту.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреки А. Д. Триботехнические свойства модифицированных смазочных масел. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Институт проблем машиноведения Российской академии наук. Санкт-Петербург, 2011. 161 с.

2. Novoselov K. S., Geim A. K., Morozov S. V. et. al. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films // Science. 2004. V. 306. № 5696. P. 666–669.

3. Ткачев С. В. Графен – новый углеродный наноматериал / С. В. Ткачев, Е. Ю. Буслаева, С. П. Губин // Неорганические материалы. 2011. Т. 47. № 1. С. 5–14.

4. Ткачев С. В. Графен, полученный восстановлением оксида графена / С. В. Ткачев, Е. Ю. Буслаева, А. В. Наумкин, С. Л. Котова, И. В. Лауре, С. П. Губин // Неорганические материалы. 2012. Т. 48. № 8. С. 909.

5. Geim A. K., Novoselov K. S. The Rise of Graphene // Nature Mater. 2007. V. 6. № 3. P. 183–191.

6. Губин С. П., Ткачев С. В. Графен и родственные наноформы углерода / С. П. Губин, С. В. Ткачев. М.: Книжный дом «Либроком», 2012. 104 с.

7. Волокитин А. И. Квантовое трение и графен / А. И. Волокитин // Природа. 2011. № 9 (1153). С. 13-21.

8. Легконогих Н. И. Смазочная способность графена при использовании в парах трения «сталь-железо» и «сталь-бронза» / Н. И. Легконогих // Автоматизированное проектирование в машиностроении. 2020. № 8. С. 48-50.

9. Novikova A. A., Burlakova V. E., Varavka V. N., Uflyand I. E., Drogan E. G., Irkha V. A. Influence of glycerol dispersions of graphene oxide on the friction of rough steel surfaces // Journal of Molecular Liquids, 2019, 284, 1-11.

10. Berman D., Erdemir A., Sumant A.V. Few layer graphene to reduce wear and friction on slidingsteel surfaces // Carbon, 2013, 54, 454-459.

11. Restuccia P., Righi M. C. Tribochemistry of graphene on iron and its possible role in luBr1ication of steel // Carbon, 2016, 106, 118-124.

12. Obraztsova E. A., Osadchy A. V., Obraztsova E. D., Lefrant S., Yaminsky I. V. Statistical Analysis of Atomic Force Microscopy and Raman Spectroscopy Data for Estimation of Graphene Layer Numbers // Phys. Stat. Sol. B. 2008. V.245 (№10) – P.2055-2059.

13. Breki A., Nosonovsky M. Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition // Applied Physics Letters. 2018. T. 113. № 24. C. 241602.

14. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. Semiempirical mathematical models of the pivoting friction of SHKH15 steel over R6M5 steel according to the ball–plane scheme with consideration of wear // Inorganic Materials: Applied Research. 2019. T. 10. № 4. C. 1008-1013.

15. Breki A. D., Vasilyeva E. S., Tolochko O. V., Didenko A. L., Nosonovsky M. Frictional properties of a nanocomposite material with a linear polyimide matrix and tungsten diselinide nanoparticle reinforcement // Journal of Tribology. 2019. T. 141. № 8. C. 082002.

16. Breki A. D., Kolmakov A. G., Gvozdev A. E., Sergeev N. N. Investigation of the pivoting friction of SHKH15 steel over R6M5 and 10R6M5-MP steel with the use of mathematical modeling // Inorganic Materials: Applied Research. 2019. T. 10. № 4. C. 927-932.

17. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Starikov N. E., Provotorov D. A., Sergeyev N. N., Khonelidze D. M. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon / Inorganic Materials: Applied Research. 2017. T. 8. № 1. pp. 126-129.

18. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces / Inorganic Materials: Applied Research. 2017. T. 8. № 4. pp. 509-514.

19. Breki A. D., Nosonovsky M. Einsteins viscosity equation for nanoluBr1icated friction // Langmuir: the ACS journal of surfaces and colloids. 2018. T. 34. № 43. C. 12968-12973.

20. Реброва И. Ю., Чубариков В. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. / О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. № 4 (68). С. 118-176.

21. Добровольский Н. Н., Добровольская Л. П., Серегина Н. К., Бочарова О. Е. Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов: Монография / Под. ред. Н. М. Добровольского. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. 223 с.

22. Добровольская Л. П., Шелобаев С. И. Теоретико-числовой метод в эконометрике // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 280-283.

23. Nikitin A. N., Rusakova E. I., Parkhomenko Eh. I., Ivankina T. I., Dobrovol'skij N. M., «Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using Data on Piezoelectric Texstures of Rocks», Izvestiya Earth Physics, 24:9 (1988), 728–734.

REFERENCES

1. Breki A. D., 2011, «Tribotechnical properties of modified luBr1icating oils. Dissertation for the degree of candidate of technical Sciences», *Institute of machine science problems of the Russian Academy of Sciences*, Saint Petersburg. 161 pp.
2. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V. et. al. 2004, «Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films», *Science*, V. 306. № 5696. pp. 666–669.
3. Tkachev S.V., Buslaeva E.Yu., Gubin S.P. 2011, «Graphene – a new carbon nanomaterial», *Inorganic material*, Vol. 47. No. 1. pp. 5-14.
4. Tkachev S.V., Buslaeva E.Yu., Naumkin A.V., Kotova S.L., Laure I.V., Gubin S.P. 2012, «Graphene obtained by reduction of graphene oxide», *Inorganic material*, Vol. 48. No. 8. pp. 909.
5. Geim A.K., Novoselov K.S. 2007, «The Rise of Graphene», *Nature Mater.* V. 6. № 3. P. 183–191.
6. Gubin S.P., Tkachev S.V. 2012, *Graphene and related carbon nanoforms.* Moscow. Book house «LiBr1ocom». 104 pp.
7. Volokitin A.I. 2011, «Quantum friction and grapheme», *Nature.* No. 9 (1153). pp. 13-21.
8. Legkonogikh N.I. 2020, «The luBr1icating ability of graphene when used in friction pairs «steel-iron» and «steel-Br1onze»», *Computer-aided design in mechanical Engineering*, No. 8. pp. 48-50.
9. Novikova A.A., Burlakova V.E., Varavka V.N., Uflyand I.E., Drogan E.G., Irkha V.A. 2019, «Influence of glycerol dispersions of graphene oxide on the friction of rough steel surfaces», *Journal of Molecular Liquids*, 284, pp.1-11.
10. Berman D., Erdemir A., Sumant A.V. 2013, «Few layer graphene to reduce wear and friction on slidingsteel surfaces», *Carbon*, 54, pp. 454-459.
11. Restuccia P., Righi M.C. 2016, «Tribochemistry of graphene on iron and its possible role in luBr1ication of steel», *Carbon*, 106, pp. 118-124.
12. Obraztsova E.A., Osadchy A.V., Obraztsova E.D., Lefrant S., Yaminsky I.V. 2008, «Statistical Analysis of Atomic Force Microscopy and Raman Spectroscopy Data for Estimation of Graphene Layer Numbers», *Phys. Stat.* Sol. B. V.245 (№10) pp. 2055-2059.
13. Breki A. D., Nosonovsky M. 2018, «Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition», *Applied Physics Letters*, T. 113. № 24. pp. 241602.
14. Breki A. D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2019, «Semiempirical mathematical models of the pivoting friction of SHKH15 steel over R6M5 steel according to the ball–plane scheme with consideration of wear», *Inorganic Materials: Applied Research*, T. 10. № 4. pp. 1008-1013.
15. Breki A. D., Vasilyeva E.S., Tolochko O.V., Didenko A.L., Nosonovsky M. 2019, «Frictional properties of a nanocomposite material with a linear polyimide matrix and tungsten diselinide nanoparticle reinforcement», *Journal of Tribology*, T. 141. № 8. pp. 082002.

16. Breki A. D., Kolmakov A.G., Gvozdev A.E., Sergeev N.N. 2019, «Investigation of the pivoting friction of SHKH15 steel over R6M5 and 10R6M5-MP steel with the use of mathematical modeling», *Inorganic Materials: Applied Research*, T. 10. № 4. pp. 927-932.

17. Breki A. D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Starikov N.E., Provotorov D.A., Sergeyev N.N., Khonelidze D.M. 2017, «On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon», *Inorganic Materials: Applied Research*, T. 8. № 1. pp. 126-129.

18. Breki A. D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2017, «Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces», *Inorganic Materials: Applied Research*, T. 8. № 4. pp. 509-514.

19. Breki A. D., Nosonovsky M. 2018, «Einsteins viscosity equation for nanoluBr1icated friction», *Langmuir: the ACS journal of surfaces and colloids*, T. 34. № 43. pp. 12968-12973.

20. Rebrova I.Yu., Chubarikov V.N., Dobrovolsky N.N., Dobrovolsky M.N., Dobrovolsky N.M. 2018, «On classical number-theoretic grids», *Chebyshev collection*, Vol. 19. No. 4 (68). pp. 118-176.

21. Dobrovolsky N.N., Dobrovolskaya L.P., Seregina N.K., Bocharova O.E. 2016, *Algorithms for calculating optimal coefficients.* Tula: publishing house of Tula state pedagogical University named after L.N. Tolstoy, 223 pp.

22. Dobrovolskaya L.P., Shelobaev S.I. 2019, «Number-theoretic method in econometrics», *AlgeBra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: materials of the XVI International conference dedicated to the 80th anniversary of the birth of Professor Michel DEZ.* Tula: Tula state pedagogical University named after L.N. Tolstoy, pp. 280-283.

23. Nikitin A.N., Rusakova E.I., Parkhomenko Eh.I., Ivankina T.I., Dobrovol'skij N.M., 1988, Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using Data on Piezoelectric Texstures of Rocks», *Izvestiya Earth Physics*, 24:9, pp. 728–734.

Получено 30.08.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 621.785.539 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-390-402

Математические закономерности изменения характеристик процесса трения пористого композиционного материала на основе меди, содержащего масло с частицами графена[1]

А. Д. Бреки, С. Г. Чулкин, А. Г. Колмаков, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Е. В. Мазин, А. М. Кузьмин

Александр Джалюльевич Бреки — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).
e-mail: albreki@yandex.ru
Сергей Георгиевич Чулкин — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru
Алексей Георгьевич Колмаков — доктор технических наук, профессор, ИМЕТ РАН (г. Москва).
e-mail: kolmakov@imet.ac.ru
Ольга Владимировна Кузовлева — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Александр Евгеньевич Гвоздев — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Евгений Владимирович Мазин — ООО НПО «Графеновые материалы» (г. Санкт-Петербург).
e-mail: mazinev@mail.ru
Алексей Михайлович Кузьмин — АО «ЦКБМ» (г. Санкт-Петербург).
e-mail: kuzmin_am@ckbm.ru

Аннотация

В работе приведены результаты исследования процессов трения скольжения пористого материала на основе меди, пропитанного смазочным маслом с дисперсными частицами фторированного графена. Установлены математические закономерности изменения характеристик фрикционного взаимодействия. Показано, что закономерности изменения средней силы трения имеют сигмоидально-ступенчатый характер. Получены экспериментальные результаты, показывающие, что с увеличением концентрации агрегатов из чешуек фторированного графена в смазочном масле средняя сила трения и коэффициент трения снижаются, при этом наблюдается хороший антифрикционный эффект. Показано, что средняя работа силы трения, а соответственно и энергетические потери на трение, при добавлении в смазочное масло 0,01% агрегатов из чешуек фторированного графена уменьшается на 3721 Дж, а при добавлении 0,1% — на 4098 Дж. Установлено, что средний коэффициент трения при добавлении в смазочное масло 0,01% агрегатов из чешуек фторированного графена уменьшается на 27%, а при добавлении 0,1% — на 30%.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки Россси в рамках реализации программы Научного центра мирового уровня по направлению "Передовые цифровые технологии"СПбПУ (соглашение от 17.11.2020 № 075-15-2020-934).

Ключевые слова: пористый материал на основе меди, сигмоидально-ступенчатые закономерности трения, смазочная композиция, трение, фторированный графен.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
А. Д. Бреки, С. Г. Чулкин, А. Г. Колмаков, О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, Е. В. Мазин, А. М. Кузьмин, Математические закономерности изменения характеристик процесса трения пористого композиционного материала на основе меди, содержащего масло с частицами графена // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 390–402.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 621.785.539 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-390-402

Mathematical regularities of changes in the characteristics of the friction process of a porous composite material based on copper containing oil with graphene particles

A. D. Breki, S. G. Chulkin, A. G. Kolmakov, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, E. V. Mazin, A. M. Kuzmin

Alexander Dzhalyulyevich Breki — candidate of technical sciences, associate professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Institute of Problems of Machine Science of the Russian Academy of Sciences (Saint Petersburg).
e-mail: albreki@yandex.ru
Sergey Georgievich Chulkin — doctor of technical sciences, professor, Saint Petersburg State Marine Technical University (Saint Petersburg).
e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru
Alexey Georgievich Kolmakov — doctor of technical sciences, professor, IMET RAS (Moscow).
e-mail: kolmakov@imet.ac.ru
Olga Vladimirovna Kuzovleva — candidate of technical Sciences, docent, Russian State University of justice (Moscow).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Alexandr Evgenyevich Gvozdev — doctor of engineering, professor, Tula State Pedagogical University L.N. Tolstoy (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Evgeny Vladimirovich Mazin — LLC NPO «Graphene materials» (Saint Petersburg).
e-mail: mazinev@mail.ru
Alexey Mikhaylovich Kuzmin — JSC «TSKBM» (Saint Petersburg).
e-mail: kuzmin_am@ckbm.ru

Abstract

The paper presents the results of a study of the sliding friction processes of a porous copper-based material impregnated with lubricating oil with dispersed particles of fluorinated graphene. Mathematical regularities of changes in the characteristics of the friction interaction are established. It is shown that the regularities of changes in the average friction force have a sigmoid-step character. Experimental results have been obtained showing that with an increase in the concentration of aggregates from flakes of fluorinated graphene in the lubricating oil, the average friction force and coefficient of friction decrease, while a good anti-friction effect is observed. It is shown that the average work of the friction force, and consequently the energy losses due to friction, when adding 0.01% of aggregates from fluorinated graphene flakes to the lubricating oil decreases by 3721 j, and when adding 0.1% — by 4098 j. It was found that the average coefficient of friction when adding 0.01% of fluorinated graphene flake aggregates to the lubricating oil decreases by 27%, and when adding 0.1% — by 30%.

Keywords: copper-based porous material, sigmoid-step friction patterns, lubricant composition, friction, fluorinated graphene.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
A. D. Breki, S. G. Chulkin, A. G. Kolmakov, O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, E. V. Mazin, A. M. Kuzmin, 2021, "Mathematical regularities of changes in the characteristics of the friction process of a porous composite material based on copper containing oil with graphene particles" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 390–402.

1. Введение

Известно, что терморасширенный графит обладает рядом ценных свойств [1]: чрезвычайно низкой плотностью и высокой адсорбционной способностью, этот материал хорошо прессуется, что позволяет изготавливать на его основе графитовую фольгу, а также различные функциональные материалы, особое место среди которых занимают антифрикционные, а среди них отдельную группу образуют порошкообразные добавки в смазочные масла.

В 2010 г. было реализовано открытие графена [2] — слоя углерода толщиной в один атом, состоящего из конденсированных шестичленных колец. Атомы углерода в графене соединены sp^2-связями в гексагональную двумерную решетку [3, 4].

Различные научные исследования показали, что однослойный графен обладает особым комплексом электрофизических, механических, оптических и тепловых свойств [4, 5, 6]. С другой стороны, появляются исследования как в области физики: «квантовое трение и графен» [7], так и в области машиностроения [8, 9], в которых рассматриваются трибологические свойства графена. Антифрикционные свойства графена при трении стальных поверхностей представлено в работе [10]. Также графен исследуется как элемент жидких смазочных композиций [8, 11]. Действительно, естественно предположить, что поскольку графит обладает хорошими антифрикционными свойствами, то и графен, и материалы на его основе также могут способствовать снижению трения. Соответственно, поскольку порошкообразные добавки графита в смазочные масла приводят к снижению трения, то и порошкообразные добавки графена могут приводить к подобным результатам.

Исследований жидких смазочных композиций, состоящих из современных смазочных масел, содержащих конгломераты (агрегаты) графена, в настоящее время мало. В связи с этим в данной работе реализовано исследование влияния агрегатов фторированного графена на трение пористых тел из железа, пропитанных смазочной композицией.

2. Материалы и методика исследования

В качестве дисперсионной среды для создания смазочных композиций с высокодисперсными агрегатами фторированного графена использовали смазочное масло марки Kluber Constant GLY 2100.

Технические характеристики выбранного смазочного масла приведены в таблице 1.

Таблица 1: Технические характеристики базового масла

№	Технические характеристики изделия	CONSTANT GLY 2100
1.	Цвет	Светло-коричневый
2.	Структура	Гомогенное высоко-вискозное
3.	Температурный диапазон использования, $^\circ$ C	$-40, +140$
4.	Плотность при 20° C, г/мл	0,84
5.	Показатель преломления при 20° C	1,464
6.	Кинематическая вязкость при 40° C / мм/с^2	55
7.	Кинематическая вязкость при 100° C/ мм/с^2	9

Наполнителем для данного смазочного масла выбраны высокодисперсные конгломераты из чешуек фторированного графена, произведённого в ООО НПО «Графеновые материалы» (рис. 1).

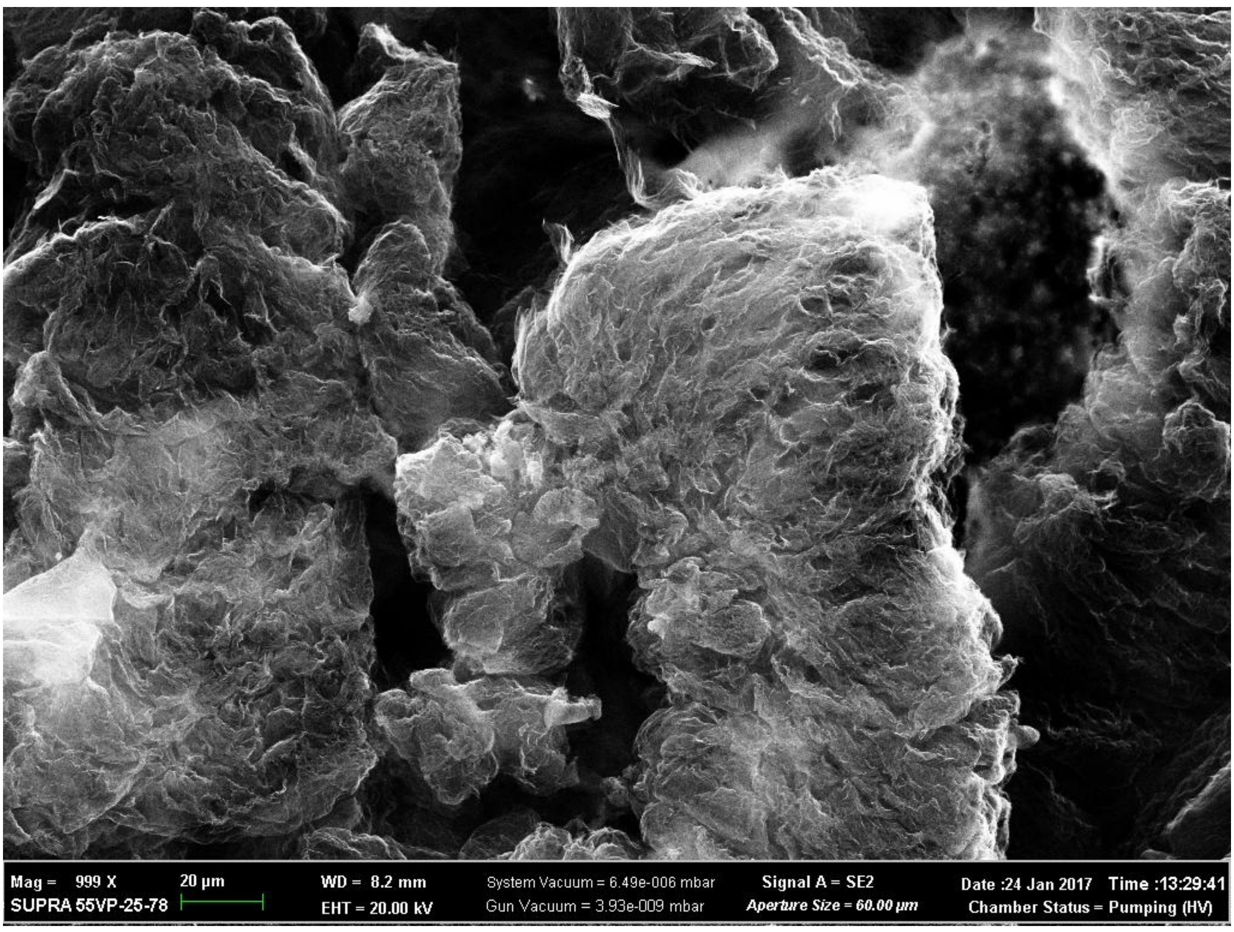


Рис. 1: Конгломераты из чешуек фторированного графена

Предварительно был проведён анализ исследуемой порошкообразной добавки. Спектры комбинационного рассеивания записаны при комнатной температуре. В качестве источника монохроматического излучения использовался аргоновый лазер (514,5 нм, мощностью 30 мВт).

Спектр комбинационного рассеяния (КР) графеновых агрегатов, представленных на рис. 2, показывают наличие пика при 1580 см$^{-1}$ (графитовая G-линия), а также характерный для графена симметричный пик при 2687 см$^{-1}$ ($2D$ линия). Высокое отношение IG/I2D свидетельствует о многослойности графена. Наличие пика с высокой интенсивностью при 1350 см$^{-1}$ (D-линия), подтверждает присутствие дефектов (относится к неупорядоченным дезориентированным графитовым слоям) [12].

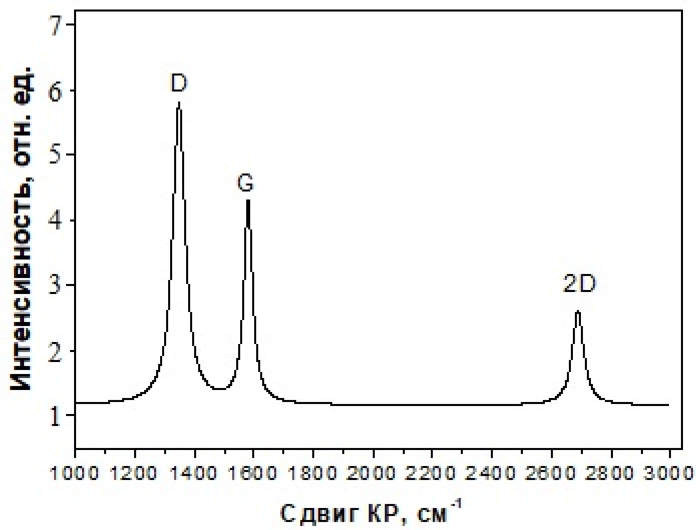


Рис. 2: Спектр КР графеновых агрегатов

Таким образом, выбранный углеродный продукт представляет собой многослойные графеновые агрегаты (дефектные слои).

Образцы для пропитки смазочной композицией с агрегатами фторированного графена были получены прессованием из порошка меди марки ПМС-1, соответствующего ГОСТ 4960-2009, с размерами частиц до 100 мкм. Пористость образцов составляла 30%. Геометрические размеры образцов прямоугольной формы составляли $10,5 \times 6 \times 3$ мм. Перед испытаниями чистые образцы погружались с базовое масло и смазочные композиции с концентрацией 0,01 и 0,1% по массе фторированного графена на 10 суток для пропитки.

Для реализации сравнительного исследования антифрикционных свойств пропитанных образцов, в условиях трения скольжения по круговой траектории по схеме «ролик – плоскость» была использована универсальная машина трения модели ИИ 5018.

Подвижный образец (ролик) состоял из стали ШХ15. Пропитанные образцы были жёстко фиксированы и неподвижны в процессе трения. Трущиеся образцы предварительно приводились в контактное взаимодействие. При установлении математических закономерностей изменения характеристик фрикционного взаимодействия и анализе экспериментальных данных использовали авторские методики и псевдослучайный поиск, основанный на применении теоретико-числовых сеток [14, 18, 20, 21, 22, 23]. Смазывание трибосистемы в процессе трения реализовывалось за счёт выдавливания смазочной композиции из пропитанного образца. Контактное взаимодействие подвижного и неподвижного образцов реализовывалось с нормальной силой $N = 40$ Н. Частота вращения подвижного образца составляла $n = 300$ мин$^{-1}$ ($v = 0,785$ м/с). Диаметр ролика (подвижного образца) составлял 50 мм. Время одного полного испытания составляло 600 с ($s = 471$ м). Пропитанные образцы прижимались к ролику стороной с площадью 18 мм^2.

3. Результаты исследований и их обсуждение

Графики зависимости силы трения от времени для медных образцов, пропитанных смазочным маслом, не содержащих агрегатов деформированных чешуек фторированного графена, показаны на рис. 3.

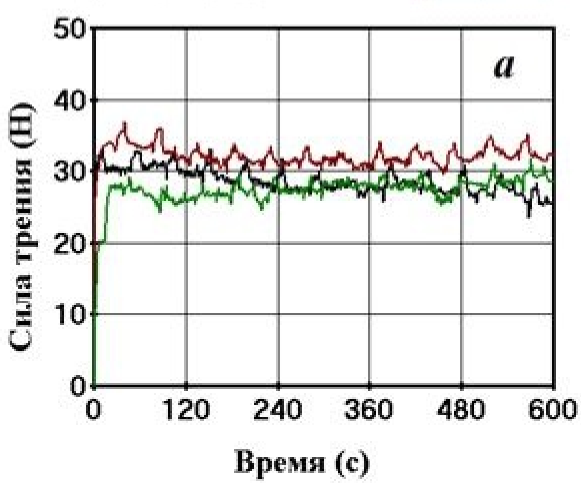


Рис. 3: Зависимости от времени для базового масла: a) силы трения скольжения; b) средней силы трения скольжения

Представленная на рис. 3 b зависимость средней силы трения от времени аналитически выражается следующим образом:

$$F_f(t) = \frac{18}{1+\exp(-7,3(t-0,5))} + \frac{10,7}{1+\exp(-0,55(t-3))} + \frac{2}{1+\exp(-2,1(t-17))} - \frac{1,4}{1+\exp(-0,5(t-100))}, \quad (1)$$

где F_f — средняя сила трения, t — время. Средняя сила трения за некоторый интервал времени определяется по формуле:

$$F_f = \frac{\int\limits_{t_0}^{t_k} F_f(t)dt}{t_k - t_0} = \frac{I_f}{\triangle\, t_f}, \quad (2)$$

где I_f импульс силы трения за интервал времени длиной $\triangle\, t_f$, t_0, t_k начальная и конечная точки интервала времени.

Соответственно средняя сила трения за весь интервал времени трения составила:

$$F_f = \frac{\int\limits_0^{600} \left(\frac{18}{1+\exp(-7,3(t-0,5))} + \frac{10,7}{1+\exp(-0,55(t-3))} + \frac{2}{1+\exp(-2,1(t-17))} - \frac{1,4}{1+\exp(-0,5(t-100))} \right) dt}{600c} = \frac{17641,4Hc}{600c} \approx 29,4H \quad (3)$$

Средняя работа силы трения равна:

$$A_f = \frac{s \cdot \int\limits_{t_0}^{t_k} F_f(t)dt}{t_k - t_0} = \frac{s \cdot I_f}{\triangle\, t_f} = 29,4H \cdot 471\text{м} = 13847,4\text{Дж}, \tag{4}$$

где s — путь трения.

Средний коэффициент трения в этом случае равен:

$$f = \frac{\int\limits_{t_0}^{t_k} F_f(t)dt}{N(t_k - t_0)} = \frac{I_f}{N \triangle\, t_f} = \frac{29,4H}{40H} \approx 0,74, \tag{5}$$

где N — фиксированная нормальная нагрузка.

Графические зависимости силы трения от времени для медных образцов, пропитанных базовым смазочным маслом, содержащем 0,01% порошка фторированного графена, показаны на рис. 4.

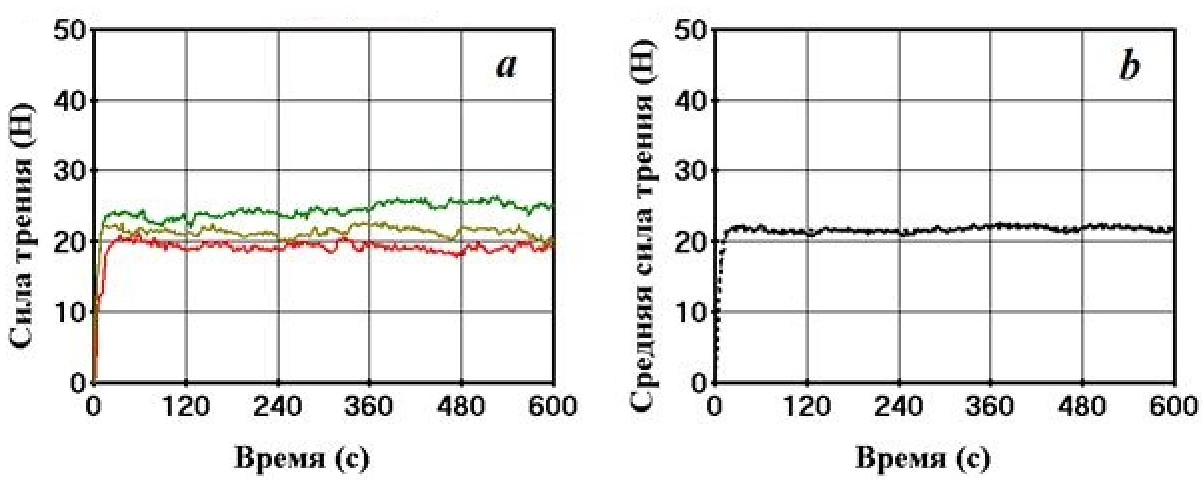


Рис. 4: Зависимости от времени для масла с 0,01% графена: a) силы трения скольжения; b) средней силы трения скольжения

Представленная на рис. 4 *b* зависимость средней силы трения от времени при использовании масла, содержащего 0,01% порошка фторированного графена, аналитически выражается следующим образом:

$$F_f(t) = \frac{21,5}{1 + \exp(-0,47(t-5))} + \frac{0,39}{1 + \exp(-0,37(t-330))}. \tag{6}$$

Соответственно средняя сила трения за весь интервал времени трения равна:

$$F_f = \frac{\int\limits_{0}^{600} \left(\frac{21,5}{1 + \exp(-0,47(t-5))} + \frac{0,39}{1 + \exp(-0,37(t-330))} \right) dt}{600c} = \frac{12893,6Hc}{600c} \approx 21,5H. \tag{7}$$

Средняя величина работа силы трения равна:

$$A_f = \frac{s \cdot I_f}{\triangle\, t_f} = 21,5H \cdot 471\text{м} = 10126,5\text{Дж}. \tag{8}$$

Средний коэффициент трения в этом случае равен:

$$f = \frac{I_f}{N \bigtriangleup t_f} = \frac{21,5H}{40H} \approx 0,54. \tag{9}$$

Графики зависимости силы трения от времени для медных образцов, пропитанных базовым смазочным маслом, содержащем 0,1% порошка фторированного графена, показаны на рис. 5.

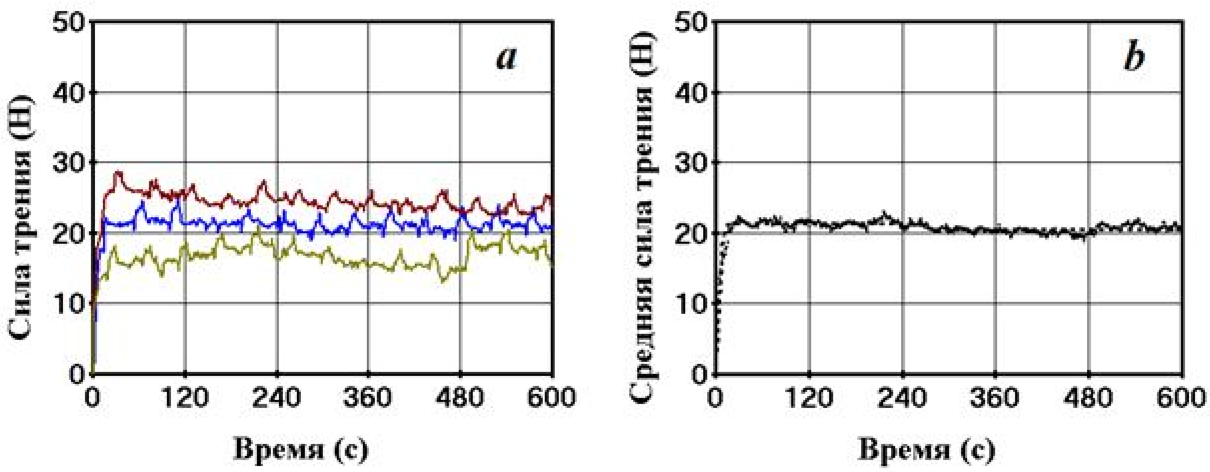


Рис. 5: Зависимости от времени для масла с 0,1% графена: a) силы трения скольжения; b) средней силы трения скольжения

Представленная на рис. 5 *b* зависимость средней силы трения от времени при использовании масла, содержащего 0,1% порошка фторированного графена, аналитически выражается следующим образом:

$$F_f(t) = \frac{21,3}{1+\exp(-0,47(t-5))} - \frac{0,8}{1+\exp(-0,37(t-270))}. \tag{10}$$

Соответственно средняя сила трения за весь интервал времени трения равна:

$$F_f = \frac{\int\limits_0^{600} \left(\frac{21,3}{1+\exp(-0,47(t-5))} - \frac{0,8}{1+\exp(-0,37(t-270))} \right) dt}{600c} = \frac{12405,37Hc}{600c} \approx 20,7H \tag{11}$$

Средняя работа силы трения равна:

$$A_f = \frac{s \cdot I_f}{\bigtriangleup t_f} = 20,7H \cdot 471\text{м} = 9749,7\text{Дж}. \tag{12}$$

Средний коэффициент трения в этом случае равен:

$$f = \frac{I_f}{N \bigtriangleup t_f} = \frac{20,7H}{40H} \approx 0,52. \tag{13}$$

Аппроксимация и анализ экспериментальных данных осуществлялись по аналогии с работами [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

При анализе смазочного действия смазочной композиции следует отметить следующее:

1. При создании смазочной композиции полярно-активные молекулы масла адсорбируются на агрегаты из чешуек фторированного графена (рис. 6 *a*).

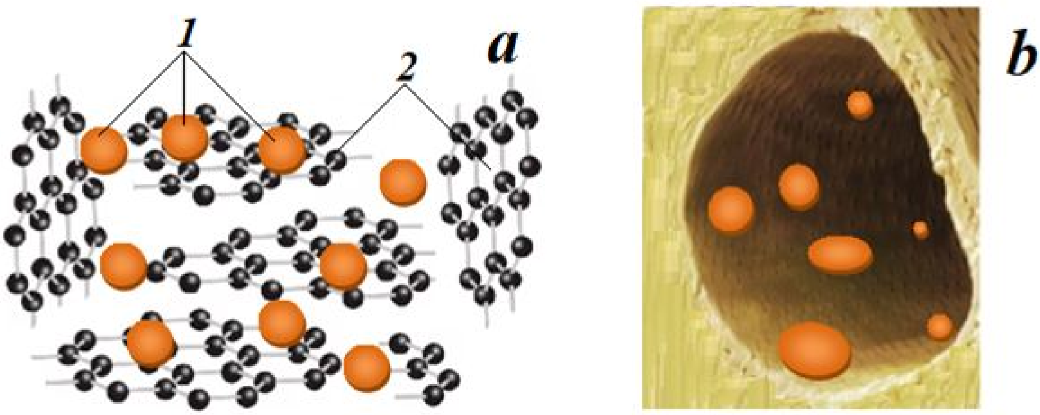


Рис. 6: Схематическое представление адсорбции полярно-активных молекул масла (1): a) на поверхности чешуек (2) агрегата графена; b) на поверхности поры

2. В процессе пропитки в поры приникают агрегаты фторированного графена с адсорбированными на них полярно-активными молекулами масла, часть которых адсорбируется на поверхность внутри пор (рис. 6 *b*).

3. При контактном взаимодействии пропитанного образца с цилиндром происходит выдавливание смазочной композиции с агрегатами графена, в результате чего происходит взаимодействие полярно-активных веществ, адсорбированных на поверхности графена и его чешуек с поверхностью цилиндра (рис. 7).

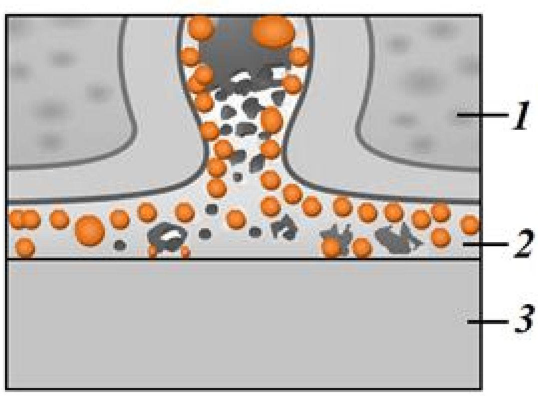


Рис. 7: Схематическое представление выдавливания смазочного масла с агрегатами графена в область фрикционного контакта: 1 – пропитанное пористое тело; 2 – смазочный слой; 3 – тело без пор

4. При относительном перемещении трущихся тел трение снижается, с одной стороны, за счёт наличия полярно-активных молекул масла, а с другой стороны, за счёт слабых связей между чешуйками агрегатов фторированного графена.

5. В процессе изнашивания, наряду с частицами износа в зону трения попадают частицы

графена, обладающие антифрикционным действием. В связи с этим, смазочные композиции снижают трение лучше, чем базовое смазочное масло.

6. Повышение концентрации в масле агрегатов фторированного графена не приводит к существенному снижению трения относительно меньшей концентрации, что может быть связано с выдавливанием из пор относительно равных объёмов смазочного вещества в зону трения, с учётом повышения вязкости [19].

4. Выводы

На основе проведённого исследования трения скольжения пористого материала на основе меди, пропитанного смазочным маслом с дисперсными частицами фторированного графена, можно сделать следующие основные выводы:

1. Установлено, что математические закономерности кинетических изменений средней силы внешнего трения скольжения пористого материала на основе меди, пропитанного смазочным маслом с дисперсными частицами фторированного графена, по поверхности цилиндра из стали ШХ15 имеют сигмоидально-ступенчатый характер.

2. Выявлено, что с увеличением концентрации агрегатов из чешуек фторированного графена в смазочном масле средняя сила и коэффициент трения снижаются.

3. Показано, что средняя работа силы трения, а соответственно и энергетические потери на трение, при добавлении в смазочное масло 0,01% агрегатов из чешуек фторированного графена уменьшается на 3720,9 Дж, а при добавлении 0,1% — на 4097,7 Дж.

4. Обосновано, что средний коэффициент трения при добавлении в смазочное масло 0,01% агрегатов из чешуек фторированного графена уменьшается на 27%, а при добавлении 0,1% — на 30%.

5. Рекомендовано, что для пропитки экономически целесообразно использовать смазочное масло с 0,01% агрегатов из чешуек фторированного графена, поскольку существенное повышение концентрации не приводит к ощутимому антифрикционному эффекту.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соловьев М. Е. Моделирование и синтез оксида графена из терморасширенного графита / М. Е. Соловьев, А. Б. Раухваргер, Н. Г. Савинский, В. И. Иржак // Журнал общей химии. 2017. Т. 87. № 4. С. 677-683.

2. Novoselov K. S., Geim A. K., Morozov S. V. et. al. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films // Science. 2004. V. 306. № 5696. P. 666–669.

3. Ткачев С. В. Графен — новый углеродный наноматериал / С. В. Ткачев, Е. Ю. Буслаева, С. П. Губин // Неорганические материалы. 2011. Т. 47. № 1. С. 5–14.

4. Ткачев С. В. Графен, полученный восстановлением оксида графена / С. В. Ткачев, Е. Ю. Буслаева, А. В. Наумкин, С. Л. Котова, И. В. Лауре, С. П. Губин // Неорганические материалы. 2012. Т. 48. № 8. С. 909.

5. Geim A. K., Novoselov K. S. The Rise of Graphene // Nature Mater. 2007. V. 6. № 3. P. 183–191.

6. Губин С. П., Ткачев С. В. Графен и родственные наноформы углерода / С. П. Губин, С. В. Ткачев. М.: Книжный дом «Либроком», 2012. 104 с.

7. Волокитин А. И. Квантовое трение и графен / А. И. Волокитин // Природа. 2011. № 9 (1153). С. 13-21.

8. Легконогих Н. И. Смазочная способность графена при использовании в парах трения «сталь-железо» и «сталь-бронза» / Н. И. Легконогих // Автоматизированное проектирование в машиностроении. 2020. № 8. С. 48-50.

9. Novikova A. A., Burlakova V. E., Varavka V. N., Uflyand I. E., Drogan E. G., Irkha V. A. Influence of glycerol dispersions of graphene oxide on the friction of rough steel surfaces // Journal of Molecular Liquids, 2019, 284, 1-11.

10. Berman D., Erdemir A., Sumant A. V. Few layer graphene to reduce wear and friction on slidingsteel surfaces // Carbon, 2013, 54, 454-459.

11. Restuccia P., Righi M. C. Tribochemistry of graphene on iron and its possible role in lubrication of steel // Carbon, 2016, 106, 118-124.

12. Obraztsova E. A., Osadchy A. V., Obraztsova E. D., Lefrant S., Yaminsky I. V. Statistical Analysis of Atomic Force Microscopy and Raman Spectroscopy Data for Estimation of Graphene Layer Numbers // Phys. Stat. Sol. B. 2008. V.245 (№10) – P.2055-2059.

13. Breki A., Nosonovsky M. Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition // Applied Physics Letters. 2018. T. 113. № 24. C. 241602.

14. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. Semiempirical mathematical models of the pivoting friction of SHKH15 steel over R6M5 steel according to the ball–plane scheme with consideration of wear // Inorganic Materials: Applied Research. 2019. T. 10. № 4. C. 1008-1013.

15. Breki A. D., Vasilyeva E. S., Tolochko O. V., Didenko A. L., Nosonovsky M. Frictional properties of a nanocomposite material with a linear polyimide matrix and tungsten diselinide nanoparticle reinforcement // Journal of Tribology. 2019. T. 141. № 8. C. 082002.

16. Breki A. D., Kolmakov A. G., Gvozdev A. E., Sergeev N. N. Investigation of the pivoting friction of SHKH15 steel over R6M5 and 10R6M5-MP steel with the use of mathematical modeling // Inorganic Materials: Applied Research. 2019. T. 10. № 4. C. 927-932.

17. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Starikov N. E., Provotorov D. A., Sergeyev N. N., Khonelidze D. M. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon / Inorganic Materials: Applied Research. 2017. T. 8. № 1. pp. 126-129.

18. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces / Inorganic Materials: Applied Research. 2017. T. 8. № 4. pp. 509-514.

19. Breki A., Nosonovsky M. Einsteins viscosity equation for nanolubricated friction // Langmuir: the ACS journal of surfaces and colloids. 2018. T. 34. № 43. C. 12968-12973.

20. Реброва И. Ю., Чубариков В. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. / О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. № 4 (68). С. 118-176.

21. Добровольский Н. Н., Добровольская Л. П., Серегина Н. К., Бочарова О. Е. Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов: Монография / Под. ред. Н. М. Добровольского. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. 223 с.

22. Добровольская Л. П., Шелобаев С. И. Теоретико-числовой метод в эконометрике // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 280-283.

23. Nikitin A. N., Rusakova E. I., Parkhomenko Eh. I., Ivankina T. I., Dobrovol'skij N. M., «Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using Data on Piezoelectric Texstures of Rocks», Izvestiya Earth Physics, 24:9 (1988), C. 728–734.

REFERENCES

1. Solov'ev M.E., Raukhvarger A.B., Savinsky N.G., Irzhak V.I. 2017, «Modeling and synthesis of graphene oxide from thermally expanded graphite», *Journal of General chemistry*, Vol. 87. No. 4. pp. 677-683.

2. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V. et. al. 2004, «Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films», *Science*, V. 306. № 5696. pp. 666–669.

3. Tkachev S.V., Buslaeva E.Yu., Gubin S.P. 2011, «Graphene – a new carbon nanomaterial», *Inorganic material*, Vol. 47. No. 1. pp. 5-14.

4. Tkachev S.V., Buslaeva E.Yu., Naumkin A.V., Kotova S.L., Laure I.V., Gubin S.P. 2012, «Graphene obtained by reduction of graphene oxide», *Inorganic material*, Vol. 48. No. 8. pp. 909.

5. Geim A.K., Novoselov K.S. 2007, «The Rise of Graphene», *Nature Mater.* V. 6. № 3. P. 183–191.

6. Gubin S.P., Tkachev S.V. 2012, *Graphene and related carbon nanoforms*. Moscow. Book house «Librocom». 104 pp.

7. Volokitin A.I. 2011, «Quantum friction and grapheme», *Nature*. No. 9 (1153). pp. 13-21.

8. Legkonogikh N.I. 2020, «The lubricating ability of graphene when used in friction pairs «steel-iron» and «steel-bronze»», *Computer-aided design in mechanical Engineering*, No. 8. pp. 48-50.

9. Novikova A.A., Burlakova V.E., Varavka V.N., Uflyand I.E., Drogan E.G., Irkha V.A. 2019, «Influence of glycerol dispersions of graphene oxide on the friction of rough steel surfaces», *Journal of Molecular Liquid*s, 284, pp.1-11.

10. Berman D., Erdemir A., Sumant A.V. 2013, «Few layer graphene to reduce wear and friction on slidingsteel surfaces», *Carbon*, 54, pp. 454-459.

11. Restuccia P., Righi M.C. 2016, «Tribochemistry of graphene on iron and its possible role in lubrication of steel», *Carbon*, 106, pp. 118-124.

12. Obraztsova E.A., Osadchy A.V., Obraztsova E.D., Lefrant S., Yaminsky I.V. 2008, «Statistical Analysis of Atomic Force Microscopy and Raman Spectroscopy Data for Estimation of Graphene Layer Numbers», *Phys. Stat. Sol.* B. V.245 (№10) pp. 2055-2059.

13. Breki A., Nosonovsky M. 2018, «Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition», *Applied Physics Letters*, T. 113. № 24. pp. 241602.

14. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2019, «Semiempirical mathematical models of the pivoting friction of SHKH15 steel over R6M5 steel according to the ball–plane scheme with consideration of wear», *Inorganic Materials: Applied Research*, T. 10. № 4. pp. 1008-1013.

15. Breki A.D., Vasilyeva E.S., Tolochko O.V., Didenko A.L., Nosonovsky M. 2019, «Frictional properties of a nanocomposite material with a linear polyimide matrix and tungsten diselinide nanoparticle reinforcement», *Journal of Tribology*, T. 141. № 8. pp. 082002.

16. Breki A.D., Kolmakov A.G., Gvozdev A.E., Sergeev N.N. 2019, «Investigation of the pivoting friction of SHKH15 steel over R6M5 and 10R6M5-MP steel with the use of mathematical modeling», *Inorganic Materials: Applied Research*, T. 10. № 4. pp. 927-932.

17. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Starikov N.E., Provotorov D.A., Sergeyev N.N., Khonelidze D.M. 2017, «On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon», *Inorganic Materials: Applied Research*, T. 8. № 1. pp. 126-129.

18. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2017, «Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces», *Inorganic Materials: Applied Research*, T. 8. № 4. pp. 509-514.

19. Breki A., Nosonovsky M. 2018, «Einsteins viscosity equation for nanolubricated friction», *Langmuir: the ACS journal of surfaces and colloids*, T. 34. № 43. pp. 12968-12973.

20. Rebrova I.Yu., Chubarikov V.N., Dobrovolsky N.N., Dobrovolsky M.N., Dobrovolsky N.M. 2018, «On classical number-theoretic grids», *Chebyshev collection*, Vol. 19. No. 4 (68). pp. 118-176.

21. Dobrovolsky N.N., Dobrovolskaya L.P., Seregina N.K., Bocharova O.E. 2016, *Algorithms for calculating optimal coefficients.* Tula: publishing house of Tula state pedagogical University named after L.N. Tolstoy, 223 pp.

22. Dobrovolskaya L.P., Shelobaev S.I. 2019, «Number-theoretic method in econometrics», *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: materials of the XVI International conference dedicated to the 80th anniversary of the birth of Professor Michel DEZ.* Tula: Tula state pedagogical University named after L.N. Tolstoy, pp. 280-283.

23. Nikitin A.N., Rusakova E.I., Parkhomenko Eh.I., Ivankina T.I., Dobrovol'skij N.M., 1988, Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using Data on Piezoelectric Texstures of Rocks», *Izvestiya Earth Physics*, 24:9, pp. 728–734.

Получено 7.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-403-412

На крутых поворотах европейской истории XX столетия

С. С. Демидов

Сергей Сергеевич Демидов — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: serd42@mail.ru

Аннотация

Жизнь и творчество выдающегося русского математика Николая Николаевича Лузина (1883 – 1950) пришлись на очень сложный период российской истории: две мировые войны, революции 1917 г. , гражданская война, строительство государства нового типа – Союза Советских Социалистических Республик, сопровождавшееся массовым террором, затронувшим все без исключения слои советского общества. На фоне этих драматических событий происходил процесс становления и расцвета Лузина-учёного, создателя одной из ведущих математических школ XX столетия – Московской школы теории функций, ставшей одним из краеугольных камней в фундаменте Советской математической школы. В творчестве Лузина выделяются два периода – первый, посвящённый проблемам метрической теории функций, завершившийся его знаменитой диссертацией «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915), и второй, посвящённый преимущественно разработке проблем теории аналитических множеств. В подтексте лузинских исследований стояла проблема структуры арифметического континуума, ставшая сверхзадачей его творчества.

Ключевые слова: Егоров, теория множеств, актуальная бесконечность, Борель, аксиома выбора, континуум-гипотеза, Московская школа теории функций, дескриптивная теория множеств, арифметический континуум.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:
С. С. Демидов. На крутых поворотах европейской истории XX столетия // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 403–412.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-403-412

At the sharp turns of the 20th century European history

S. S. Demidov

Sergei Sergeevich Demidov — doctor of physical and mathematical sciences, M.V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: serd42@mail.ru

Abstract

Nikolai Nikolaevich Luzin's life (1883 – 1950) and work of this outstanding Russian mathematician coincided with a very difficult period in Russian history: two World Wars, the 1917 revolutions, the civil war, the construction of a new type of state – the Union of Soviet Socialist Republics, which included collectivization and industrialization, accompanied by the mass terror that without exception affected all the strata of Soviet society. Against the background of these dramatic events took place the process of formation and flourishing of Luzin the scientist, the creator of one of the leading mathematical schools of the XXth century – the Moscow school of function theory, which became one of the cornerstones in the foundation of the Soviet mathematical school. Luzin's work could be divided into two periods: the first one comprises the problems regarding the metric theory of functions, culminating in his famous dissertation "Integral and Trigonometric Series"(1915), and the second one which is mainly devoted to the development of problems arising from the theory of analytic sets. The underlying idea of Luzin's research was the problem of the structure of the arithmetic continuum, which became the super task of his work.

Keywords: Egorov, set theory actual infinity, Borel, axiom of choice, continuum hypothesis, Moscow school of function theory, descriptive function theory, arithmetic continuum.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
S. S. Demidov, 2021, "At the sharp turns of the 20th century European history", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 403–412.

Речь пойдёт о творчестве выдающегося русского математика Николая Николаевича Лузина (1883–1950). Свой рассказ начну с событий русской революции 1905 года, открывших новый период российской истории, за которыми в 1914 последовали сражения Первой мировой войны и развернувшиеся в её ходе революции – Февральская и Великая Октябрьская 1917 года. Революции переросли в грандиозную гражданскую войну (1917 – 1922), после завершения которой большевиками во главе с первым председателем Совнаркома РСФСР В.И. Лениным был развёрнут гигантский социальный эксперимент – построение «первого в истории бесклассового общества». После его смерти у руля государства – СССР – встал И.В. Сталин, на правление которого пришлось строительство нового государства – коллективизация и индустриализация страны, наконец страшная война, 75-летие окончания которой мы недавно отмечали.

Все эти события пришлись на сознательную жизнь нашего героя – выходца из семьи мелкого предпринимателя, воспитанника Томской гимназии. Родители мечтали, что их единственный ребёнок станет инженером. Эта профессия была в то время в стране очень престижна, особенно в Сибири: именно в те годы (1890 – 1901) строился Великий Сибирский путь – легендарный Транссиб. Родители выбрали для сына только-что и с большой помпой открытый Императорский Санкт-Петербургский политехнический институт, родительские амбиции не позволяли довольствоваться только что открывшимся (в 1900 году (!)) Томским политехническим институтом. Однако гимназический аттестат был далеко не блестящим и для поступления в столичный политехникум нужно было выдержать серьёзный конкурс. Неуверенный в своих силах мальчик вынужден был избрать обходной путь. Окончание физико-математического факультета любого российского университета давало право на поступление на старшие курсы столичного политехникума безо всякого конкурса. Для исполнения этого манёвра был выбран Императорский Московский университет.

Осень 1901 года Лузин встретил уже его студентом. Лекции Н.В. Бугаева, Н.Е. Жуковского, Б.К. Млодзиевского, Д.Ф. Егорова, сама атмосфера, там царившая, поразили и увлекли впечатлительного провинциала. *«Как рассказывал сам Н.Н. – читаем мы в [1, с.274 – 275], – первая же лекция по высшей математике решила дело. Годы бездарного преподавания в гимназии не могли проявить совершенно исключительных способностей и вкусов к занятиям математикой, их проявила первая же талантливая лекция университетского профессора. Прослушав её, Н.Н. твёрдо решил, что никаким инженером он не хочет быть и не будет, а будет математиком: вопрос о карьере был решён твёрдо и раз навсегда»* (курсив мой – С.Д.).

Следующим важным шагом в творческой биографии Лузина стало его вхождение в круг находившегося тогда в расцвете сил молодого профессора Д.Ф. Егорова (1869 – 1931), который сумел сразу оценить его математическое дарование. В то же самое время ему открылись и слабые стороны творческой натуры Лузина – отсутствие твёрдости характера, чрезвычайная впечатлительность, мнительность и неуверенность в себе. В соединении с юношеским максимализмом это приводило к нервным срывам, зачастую заканчивавшимся периодами затяжной хандры. Егоров употребил всю силу своего характера и свой выдающийся педагогический дар, чтобы направить развитие своего ученика в правильное русло, внимательно следя за его занятиями и перепадами настроения. Делал он это в высшей степени тактично, скорее подправляя, чем направляя, его развитие. Судить об этом позволяют чудом сохранившиеся его письма Лузину [2].

Причиной первой командировки Лузина в 1905 году, тогда ещё студента (!), в Париж стали революционные события в Москве 1905 – 1906 гг. Узнав о том, что революционно настроенные студенческие приятели устроили в его комнате, которую он снимал на Арбате, склад бомб и прокламаций, Егоров испугался, что его талантливый ученик окажется вовлечённым в революционную деятельность. И он сделал всё возможное, чтобы отправить его в мирный тогда Париж. Мы не знаем, кто финансировал эту поездку – его родители или Министерство Народного Просвещения, руководство которого, обеспокоенное ростом революционных настроений в студенческой среде, искало средства понизить их градус. Одной из таких мер стала практика отправки наиболее одарённых студентов в университеты Западной Европы – подальше от революционной заразы. В Париже Лузин много читал, посещал лекции известных французских математиков и заседания Математического общества и мало-помалу обнаруживал собственные ориентиры в мировой математике того времени. Командировка способствовала формированию его таланта и подготовила почву для вхождения в круг идей теории множеств и теории функций действительного переменного на путях, проложенных французскими математиками – Э. Борелем, Р. Бэром и А. Лебегом. Важно отметить, что именно тогда он обратил особое внимание на точку зрения Бореля на актуальную бесконечность, высказанную им в только что разразившемся знаменитом споре об аксиоме выбора. Этот спор и борелевская позиция в нём сыграют впоследствии важную роль в формировании его идеологии. В Париже он также много размышлял над задачей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которую избрал темой своего будущего сочинения для получения диплома 1-й степени, дававшего право на «оставление при университете для подготовки к профессорскому званию», то есть, говоря нынешним языком, для оставления в аспирантуре.

Летом 1906 года Лузин вернулся в Москву и, как он написал позднее в своей автобиографии [3, с. 14 – 15], «в 1906 году подал зачётное сочинение на тему "О одном методе интегрирования дифференциальных уравнений". В том же году кончил Университет с дипломом 1-й степени и был оставлен на кафедре чистой математики профессором Дмитрием Фёдоровичем Егоровым...».

Время с начала 1907 до конца весеннего семестра 1910 года, отведённое Лузину для «приготовления к профессорскому званию», ушло, как и полагается, на сдачу магистерских экзаменов, на выбор темы дальнейших исследований (то есть темы будущей магистерской диссертации) и подготовку первых «пробных лекций». Судя по всему, с выбором темы он долго не мог определиться, и лишь к весне 1909 года она начала проявляться – теория множеств. В апреле этого года в письме к своему университетскому товарищу П.А. Флоренскому, ставшему впоследствии выдающимся богословом и философом, он написал [4, с. 158]: «Летом думаю готовиться к пробным лекциям и разработать несколько тем: "Возможность проективной геометрии трансцендентных кривых" и "Kontinuum-problem"». Выбор Лузиным континуум-гипотезы в качестве темы пробной лекции указывает на включение теории множеств в сферу его особых интересов. Сама континуум-гипотеза становилась сюжетом его постоянных размышлений.

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Склонность к философии, к философскому осмыслению своей деятельности, проявилась у Лузина ещё в гимназическую пору. Сам он называл это «отравленностью» философией. И в математике его привлекали вовсе не сложно решаемые задачи и поиск конструкций их решения, остроумных кунштюков, позволяющих обходить возникающие трудности – в отличие от математиков, для которых их наука является своего рода спортом, он не был «решателем задач». Нет. Он был математиком-философом. Эта черта его творческого дарования выделяла его в математическом сообществе и находила своё выражение в самых различных проявлениях. Здесь и начавшаяся на студенческой скамье его дружба с П.А. Флоренским (1882–1937), и избрание в 1929 г. действительным членом Академии наук СССР по разряду «философия». Эту черту его творческой натуры особенно выделил проницательный А. Лебег в своём предисловии к лузинским лекциям об аналитических множествах [5]. Эта черта впоследствии сделала его удобной мишенью для нападок на него философствующих идеологов на советском «математическом фронте». Она же лежит и в основании тех сложностей, которые он испытал при выборе тематики исследований. Его не очень устраивала тема его «кандидатского» сочинения – методы интегрирования дифференциальных уравнений. Его не привлекала перспектива заняться какой-нибудь задачей дифференциальной геометрии в направлении, разрабатываемом его уважаемым учителем, как это сделал его однокашник С.С. Бюшгенс. Для своих занятий он искал объект, обладавший философской глубиной. И таким объектом стал для него арифметический континуум, к размышлениям над тайной которого приступили ещё пифагорейцы. Отсюда и его увлечённость континуум-гипотезой Кантора. Пик напряжения сил, направленных на её решение, пришёлся на период с середины зимы до начала лета 1910 года. Его усилиям она не поддалась и, отложив её на будущие времена (не забросив вовсе, но отложив), он решил заняться проблемами теории функций действительного переменного. Он даже собирался объявить в университете на осенний семестр курс на эту тему (ведь он же должен был войти в права приват-доцента Московского университета!), но жизненные обстоятельства сложились как бы против его планов, а на самом деле в их пользу. Его научный руководитель сумел добиться для него научной командировки в Гёттинген и Париж.

Гёттинген стал для него началом периода исключительного подъёма. Он погрузился в замечательную творческую атмосферу – работа в тамошних библиотеках, контакты с замечательными математиками (Э. Ландау, Д. Гильбертом и др.), наконец, дружеские общения в кругу находившихся там русских коллег. Это помогло ему не только преодолеть последствия тяжёлого душевного состояния, вызванного неудачей с доказательством континуум-гипотезы, но и найти силы совершить рывок в теорию тригонометрических рядов, в область метрической теории функций, ставшей для него, а впоследствии и для его учеников полем успешных действий. Так начался первый период его славной творческой биографии. Первым видимым успехом на этом пути стала и его первая публикация «Uber eine Potenzreihe» в становившемся в те годы модным журнале – в Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1911, v. 32). Следует заметить, что эта его статья была направлена Лузиным в редакцию журнала по настоянию Э. Ландау – сам бы он ещё долго медлил и не решался. Кроме замечательных результатов, в ней содержавшихся, она положила начало его исследованиям в области теории функций комплексного переменного.

Творческое напряжение Лузина на протяжении 1911 года (то есть в весенний семестр в Гёттингене и в осенний в Париже) было очень велико. Его зримым выражением кроме только что названной статьи стала последовавшая уже в 1912 году необычайная публикационная активность: 7 работ, опубликованных в Математическом сборнике (3 статьи) и в Comptes Rendus Академии наук Франции (4 сообщения). В них (в [6, 7]), в частности, содержится известная теореме Лузина о С-свойстве. Истоки этих результатов лежат, конечно, в Гёттингене. Продолжением стал Париж 1912 – 1914 годов. Николай Николаевич, хотя и не сразу, но замечательно вписался в здешнее математическое сообщество, прежде всего в окружение Бореля – Лебега – Бэра. С каждым из них выстроились превосходные отношения. Очень близко сошёлся он с А. Данжуа (1884 – 1973). В этой обстановке ему хорошо работалось и писалось. Рождавшиеся результаты немедленно печатались в парижских Comptes Rendus (заметки 1911, 1912, 1913, 1914 гг.). Постепенно вырастал корпус его будущей диссертации, которая в основных чертах сложилась к лету 1914 года. Судьба благоволила ему – он успел беспрепятственно пересечь поездом Германию как раз незадолго до начала военных действий на германско-российском фронте, развернувшихся в августе 1914 года.

Война, хотя и внесла серьёзные коррективы в жизнь российского научного сообщества (сократилось финансирование, что привело к замедлению выхода научных изданий, например, «Математического Сборника», и т.д.), не нарушила поступательного характера её течения. В Москве Лузина ждала группа студентов (и каких (!) – среди них мы видим Д.Е. Меньшова, А.Я. Хинчина, П.С. Александрова), подготовленных для него Егоровым будущих его учеников – по российским законам студенты освобождались от призыва в армию. (Это распространялось и на лиц, «оставленных при университете для подготовки к профессорскому званию» и на приват-доцентов.) Лузин сумел закончить и в 1915 опубликовать диссертацию [8], защита которой состоялась 27 апреля 1916 года при официальных оппонентах Д.Ф. Егорове и Л.К. Лахтине. Защита превратилась в настоящий триумф Николая Николаевича: учитывая её особенные научные достоинства, Учёный Совет присвоил ему, минуя степень магистра, степень доктора чистой математики.

В 1914 – 1916 гг. сложилось и первое поколение лузинских учеников – легендарная Лузитания. Это и упомянутые Меньшов, Хинчин, Александров. Это и М.Я. Суслин – гениальный самородок из крестьян Саратовской губернии. Он открыл существование нового типа множеств, получивших название А-множеств, или аналитических множеств, ставшее сенсацией в математике того времени. До этого полагали, что во всей многообразной практике математики ограничиваются так называемыми В-множествами, борелевскими множествами. Суслин показал, что это не так – построил пример плоского борелевского множества, проекция которого на прямую не являлась борелевским. Новый класс множеств стал основным объектом исследований лузинской школы, позволивших Лузину и его ученикам занять лидирующие позиции в дескриптивной теории множеств. Здесь нам следует ещё раз остановиться и сделать несколько замечаний относительно влияния этого события на линии творчества Лузина.

Занимаясь вопросами метрической теории функций (диссертация!), Лузин не оставлял размышлений о природе арифметического континуума, о континуум-гипотезе. Так, уже в 1914 году он выступил с заметкой «Sur un problème de M. Baire» (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. V. 158. P. 1258 – 1261), о которой Егоров в своём отзыве об отчёте Лузина о заграничной командировке заметил следующее (цит. по [3, с. 19]: “Мне думается, что на этом пути Н.Н. Лузин внесёт что-либо новое в фундаментальную задачу о мощности континуума”. Покончив с диссертацией, Лузин, теперь уже доктор чистой математики и экстраординарный профессор Московского университета (в этом звании он был утверждён в декабре 1916), сосредоточил свои и своих учеников усилия на проблемах дескриптивной теории множеств, в частности, на постижении природы арифметического континуума.

Летом 1915 года его студент Александров доказал, что всякое несчётное борелевское множество имеет мощность континуума. Этот результат, опубликованный в 1916 году в Comptes Rendus Парижской Академии наук, стал решением проблемы Кантора для борелевских множеств – тех самых, которыми, как полагали в то время, исчерпывается запас множеств, используемых в математике. Открытие Суслина положило конец таким представлениям и вернула континуум-гипотезе её прежнюю притягательность. И сам Лузин, и его ученики занялись открывшимися перспективами. Так начался второй период в его творческой биографии. Пришёлся он на сложное для России время – время революций и гражданской войны.

Время это, тяжело переживавшееся российским обществом (столичные города страдали от недостатка продовольствия и топлива), не положило конец жизни образовательным институтам. В них пришла новая молодёжь, в частности, те, для кого ещё вчера поступление в университет было трудноразрешимой задачей. Например, выходцы из еврейских местечек. И, несмотря на внешние неблагоприятные обстоятельства, школа Лузина тех лет поражает своей творческой активностью. Для её успешного функционирования чрезвычайно важным стало то обстоятельство, что Франция в этой войне была союзником: французские математики (а именно они были признанными лидерами в тематике, разработкой которой была занята школа Лузина) были открыты россиянам для общения, страницы французских математических журналов (в том числе Comptes Rendus Академии наук Франции) были к услугам москвичей. И как только вновь начали открываться возможности зарубежных поездок, Лузин и его ученики начали много и успешно перемещаться по крупным европейским математическим центрам, в том числе, конечно, по французским. Насколько французское математическое сообщество близко к сердцу принимало проблемы москвичей показала его вовлечённость в события «дела академика Н.Н. Лузина» [10].

В 1922 году Лузин возвратился из Иваново-Вознесенска, где с 1918 года, скрываясь с группой учеников от голода и холода, царивших в первопрестольной, работал в местном Политехническом институте, и восстановились регулярные заседания его семинара. Именно в те годы сформировалось последнее поколение Лузитании. Уже тогда наметился её распад и образование вокруг Лузина группы учеников (П.С. Новиков, Л.В. Келдыш и др.), с которыми он продолжил занятия дескриптивной теорией множеств. Это были годы наивысшего подъёма второго периода его творчества, отмеченного изданием в 1930 году в Париже его «Лекций об аналитических множествах и их приложениях» (с предисловием А. Лебега и с заметкой В. Серпинского) [5]. В них подводились итоги проведённых им и его учениками исследований по теории аналитических и проективных множеств, намечалась программа дальнейшей работы по детальному изучению структуры арифметического континуума.

Здесь судьба, казалось бы до сих пор благоволившая к Лузину, повернулась к нему спиной. В 1936 году развернулось пресловутое «дело академика Лузина» [11]. И хотя он и вышел из этого «судилища» с минимальными потерями (ещё одна его удача в столкновении с историческими превратностями XX столетия), но вышел надломленным как морально, так и физически. Вечно неуверенный в себе, впечатлительный и мнительный, Лузин особенно тяжело пережил предательство своих учеников. Будучи слабым здоровьем, он много болел и через четыре с половиной года после окончания войны скончался.

До конца своих дней он размышлял над тайнами устройства арифметического континуума, в частности, над континуум-гипотезой. Её решение в рамках аксиоматической теории множеств в перспективе, намеченной Гильбертом, Лузин не считал достаточным, хотя и признавал его важность и желательность. Кстати, возможность доказательства её независимости от аксиом теории множеств он предвидел задолго до результатов К. Гёделя. Решение, которое могло быть достигнуто (и было достигнуто П. Коэном в 1963) на этом пути, он не считал достаточным. Он не считал в случае арифметического континуума приемлемой ситуацию, сложившуюся в связи с пятым постулатом в геометрии: наличие различных геометрий. Арифметический континуум должен быть единственным. Вот как он сказал об этом ещё в 1927 г. в своём докладе на I Всероссийском съезде математиков [12, с. 515 – 516]: «Первое, что приходит на ум, это то, что установление мощности континуума есть дело свободной аксиомы, вроде аксиомы о параллелях для геометрии. Но в то время, как при инвариантности всех прочих аксиом геометрии Евклида и при варьировании аксиомы о параллелях меняется самый смысл произнесённых или написанных слов: точка, прямая и т.д. – смысл каких слов должен меняться, если мы делаем мощность континуума подвижной на алефической шкале, всё время доказывая непротиворечивость этого движения? Мощность континуума, если только мыслить его, как множество точек, есть единая некая реальность и она должна находиться на алефической шкале там, где она на ней есть; нужды нет, если определение этого места затруднительно или, как прибавил бы Адамар, даже невозможно для нас, людей».

Медленно приходя в себя после событий «дела», Лузин, судя по всему, не чувствовал в себе сил, достаточных для того, чтобы на прежнем уровне продолжать трудиться над изучением структуры арифметического континуума. Он переключился на старые задачи, над которыми размышлял в прежние годы, но не доводил их решение до конца – актуальным для него было тогда совсем другое. Так он взялся за классическую со времён К.М. Петерсона проблему изгибания на главном основании и мастерски справился с ней, своими результатами по существу закрыв эту проблематику. Вопросы же, поставленные в его парижских лекциях 1930 года, исследовали и решали уже ученики или даже ученики его учеников – об этом. см., например, в [13 – 15]. Изучение возникающей здесь проблематики продолжается и поныне – см. [16 – 23].

Арифметический континуум, к изучению которого приступили ещё пифагорейцы, продолжает волновать математиков по сию пору. В их ряду был и Лузин. Размышления о континууме, пробуждённые в нём в студенческие годы знаменитым спором об аксиоме выбора, сопровождали его всю жизнь. Вокруг этих размышлений формировалась его идеология – вариант эффективизма. Наиболее полное выражение его взглядов на актуальную бесконечность мы находим в его парижских лекциях [5]. Здесь он говорит о возможных пределах, до которых может доходить в своих построениях математик, ведомый идеей актуальной бесконечности, дабы вводимые им сущности выстраивались эффективно, а не оказывались виртуальными фикциями.

В ряду проблем, затронутых в этих лекциях, задача реформирования наших идей об арифметическом континууме. Он писал [12, с. 269]: «вполне определимых иррациональных чисел имеется лишь счётное множество ... Таким образом, арифметический континуум заведомо содержит неопределимые точки. Эти точки, каждая из которых имеет бесконечное определение, являются паразитическими во всяком рассуждении, которое можно сделать эффективно ...». Так что одной из проблем, стоящих перед математикой, становится задача «очищения» арифметического континуума от паразитических образований.

В завершение моего доклада, оправдывая его название, естественно поставить вопрос о влиянии драматических событий европейской истории первой половины XX века на творчество Николая Николаевича Лузина – в какой мере они способствовали или наоборот препятствовали раскрытию творческого потенциала знаменитого математика? Ясно, что «наш жестокий век» мог предложить широкий спектр возможных вариантов такого влияния на творческий путь математика, коему выпала доля жить и действовать в столь сложное время. Вариантов преимущественно негативных. За примерами ходить далеко не приходится – достаточно вспомнить о судьбе киевского математика М.Ф. Кравчука (1892 – 1942), сгинувшего в пучине Гулага. Николаю Николаевичу чрезвычайно повезло – негативные проявления сурового века либо не задели его вовсе, либо даже послужили ему на пользу. И даже угодив в 53 года в громкий политический скандал, он вышел из него с минимальными возможными потерями. По меркам сурового времени ничтожными – утратой административных позиций в академическом мире, серьёзным ударом по здоровью, изначально слабому. Конечно, он ещё много мог бы сделать в реализации научной программы, намеченной в парижских лекциях 1930 года [5] и даже сверх неё. Но, скажем так, он кое-что всё же успел сделать, а там, где не успел, поработали его ученики – с их (прежде всего П.С. Новикова и Л.В. Келдыш) успехами может ознакомиться каждый желающий (см. [13 – 23]). Конечно, самые смелые ожидания пока не оправдались: реформирование арифметического континуума до сих пор ещё не случилось. Но значимость самого объекта – арифметического континуума – повышает ставки. Николай Николаевич до сих пор, то есть через 70 лет после смерти, живёт в математике – учениками своих учеников, своими идеями, касающимися не эфемерных концепций математической мысли, но фундаментальных её объектов, таких, как арифметический континуум.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тюлина А.К. Об одной рукописи неизвестного автора (к биографии Н.Н. Лузина) // Историко-математические исследования. Сер. 2. 2006. Вып. 11 (46). С. 267 – 306.

2. Письма Д.Ф. Егорова к Н.Н. Лузину. Предисловие П.С. Александрова. Публикация и примечания Ф.А. Медведева при участии А.П. Юшкевича // Историко-математические исследования. 1980. Вып. 25. С. 335 – 361.

3. Волков В.А. Д.Ф. Егоров: новые архивные документы (к истории Московской математической школы) // Историко-математические исследования. Сер. 2. 2005. Вып. 10 (45). С. 13 – 19.

4. Переписка Н.Н. Лузина с П.А. Флоренским. Публикация, предисловие и примечания С.С. Демидова, А.Н. Паршина, С.М. Половинкина, П.В. Флоренского) // Историко-математические исследования. 1989. Вып. 31. С. 116 – 125.

5. Lusin N. Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Préface de M. Henri Lebesgue; une note de M.Waclaw Sierpinski. Paris: Gauthier-Villars. 1930. P. 328.

6. Лузин Н.Н. К основной теореме интегрального исчисления // Математический сборник. 1912. Т. 28. Вып. 2. С. 266 – 294.

7. Lusin N. Sur les propriétés des fonctions mesurables // C.R. Acad. Sc. Paris. 1912. V. 154. P. 1688 – 1690.

8. Лузин Н.Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М. : тип. Лисснера и Собко. 1915.

9. Игошин В.И. Михаил Яковлевич Суслин. 1894 – 1919. М.: Наука. Физматлит. 1996.

10. Дюгак П. «Дело» Лузина и французские математики // Историко-математические исследования. Сер. 2. 2000. Вып. 5 (40). С. 119 – 142.

11. Дело академика Николая Николаевича Лузина. Москва: Изд-во МЦНМО. 2019.

12. Лузин Н.Н. Собрание сочинений. Т. 2. Москва: Изд-во АН СССР. 1958.

13. Келдыш Л.В., Новиков П.С. Работы Н.Н. Лузина в области дескриптивной теории множеств // Успехи математических наук. 1953. Т. 8. Вып. 2(54). С. 93 – 104.

14. Келдыш Л.В. Идеи Н.Н. Лузина в дескриптивной теории множеств // Успехи математических наук. 1974. Т. 29. Вып. 5(179). С. 183 – 196.

15. Успенский В.А. Вклад Н.Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 3 (243). С. 85 – 116.

16. Кановей В.Г. Развитие дескриптивной теории множеств под влиянием трудов Н.Н. Лузина // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 3(243). С. 117 – 155.

17. Богачёв В.И. Лузинские мотивы в современных исследованиях // Современные проблемы математики и механики. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ. 2013. Т.8. Вып. 2. С. 4 – 24.

18. Moschovakis Y. Descriptive Set Theory. Amsterdam: North Holland. 1980.

19. Кановей В.Г., Любецкий В.А. Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики. М.: Наука. 2007.

20. Kanovei V. Borel Equivalence Relations; Structure and Classification. New York: American Mathematical Society, 2008. (University Lecture Series of AMS. Vol. 44).

21. Gao S. Invariant Descriptive Set Theory. Boca Raton, FL: CRC Press. 2009.

22. Кановей В.Г., Любецкий В.А. Современная теория множеств: борелевские и проективные множества. М.: МЦНМО, 2010.

23. Кановей В.Г., Любецкий В.А. Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы. М.: МЦНМО, 2013.

REFERENCES

1. Tyulina A. K., 2006, About one manuscript of an unknown author (to the biography of N. N. Luzin) // Historical and mathematical research. Ser. 2. Issue 11 (46). pp. 267 – 306.

2. Letters of D. F. Yegorov to N. N. Luzin. Preface by P. S. Alexandrov. Publication and notes of F. A. Medvedev with the participation of A. P. Yushkevich // Historical and Mathematical Research. 1980. Issue 25. pp. 335-361.

3. Volkov V. A., “D. F. Yegorov: novye archivnye dokumenty (k istorii Moskovskoy matematicheskoy shkoly)” [New Archival documents (on the history of the Moscow Mathematical School)].

4. Correspondence of N. N. Luzin with P. A. Florensky. Publication, preface and notes by S. S. Demidov, A. N. Parshin, S. M. Polovinkin, P. V. Florensky), Historical and Mathematical Studies. 1989. Issue 31. pp. 116-125.

5. Lusin N., 1930, Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Préface de M. Henri Lebesgue; une note de M.Waclaw Sierpinski. Paris: Gauthier-Villars, pp. 328.

6. Luzin N. N., 1912, On the main theorem of integral calculus // Mathematical collection., Vol. 28.Issue. 2. pp. 266-294.

7. Lusin N., 1912, Sur les propriétés des fonctions mesurables // C.R. Acad. Sc. Paris.. V. 154. pp. 1688 – 1690.

8. Luzin N. N., 1915, Integral and trigonometric series. M.: tip. Lissner and Sobko.

9. Igoshin V. I., 1996, Mikhail Yakovlevich Suslin. Moscow: Nauka. Fizmatlit, pp. 1894-1919.

10. Dugak P. 2000, "The Case"Luzin and French mathematicians // Historical and mathematical research. Ser. 2. Issue 5 (40). pp. 119-142.

11. The case of Academician Nikolai Nikolaevich Luzin. Moscow: ICNMO Publishing House. 2019.

12. Luzin N. N., 1958, Collected works. Vol. 2. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences.

13. Keldysh L. V., Novikov P. S., 1953, Works of N. N. Luzin in the field of descriptive set theory // Uspekhi matematicheskikh nauk. Vol. 8. Issue 2 (54). pp. 93-104.

14. Keldysh L. V. 1974, Ideas of N. N. Luzin in descriptive set theory // Uspekhi matematicheskikh nauk. Vol. 29. Issue 5 (179). pp. 183-196.

15. Uspensky V. A. 1985, “N. N. Luzin’s contribution to the descriptive theory of sets and functions: concepts, problems, predictions”, Uspekhi matematicheskikh nauk. Vol. 40. Issue 3 (243). pp. 85 – 116.

16. Canovei V. G. 1985, Development of descriptive set theory under the influence of the works of N. N. Luzin // Uspekhi matematicheskikh nauk. Vol. 40. Issue 3 (243). pp. 117 – 155.

17. Bogachev V. I. Luzinskiye motivy v sovremennykh issledovaniyakh [Luzinskiye motivy v sovremennykh issledovaniyakh] // Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki [Modern Problems of Mathematics and Mechanics]. 2. pp. 4-24.

18. Moschovakis Y. 1980, Descriptive Set Theory. Amsterdam: North Holland.

19. Canovei V. G., Lyubetsky V. A., 2007, Modern set theory: the beginnings of descriptive dynamics.

20. Kanovei V., 2008,“Borel Equivalence Relations; Structure and Classification”. New York: American Mathematical Society, (University Lecture Series of AMS. Vol. 44).

21. Gao S., 2009, Invariant Descriptive Set Theory. Boca Raton, FL: CRC Press.

22. Canovei V. G., Lyubetsky V. A., 2010, “Modern set theory: Borel and projective sets.” Moscow: ICNMO.

23. Canovei V. G., Lyubetsky V. A., 2013, “Modern set theory: absolutely unsolvable classical problems.” Moscow: ICNMO.

Получено 22.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446

Результативное образование в математической школе[1]

Н. Н. Константинов, А. Л. Семенов

Николай Николаевич Константинов — школа № 179 Департамента образования и науки города Москвы (г. Москва).
e-mail: konstantinovnn@ya.ru
Алексей Львович Семенов — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Институт кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).
e-mail: alsemno@ya.ru

Аннотация

В статье исследуются причины, по которым «математические спецшколы» («матшколы») в одной из своих устойчиво воспроизводимых моделей стали важнейшим и очень продуктивным явлением в российском образовании последних десятилетий. Дается краткое описание современной модели результативного образования, восходящего к сложившейся традиции преподавания в матшколах. Анализируются условия построения воспроизводимой модели результативного образования не только для специализированного обучения математике, но и для других областей российского общего образования. Описываются источники традиции матшкол: практическая ориентация традиционной школы, занимательная математика, математические кружки и олимпиады. Указываются также истоки результативного образования в уровневой дифференциации.

Ключевые слова: школьное математическое образование в России, традиция матшкол и матклассов, школа Константинова, результативное образование, деятельностное учение, исследовательское учение, решение неожиданных задач, занимательная математика, математический кружок, математическая олимпиада, работа студентов со школьниками, уровневая дифференциация, учебно-исследовательская деятельность учащихся, цифровая трансформация образования.

Библиография: 50 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Константинов, А. Л. Семенов. Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 413–446.

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (А. Л. Семенов, грант № 17-11-01377 – разделы 3, 6, 8).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446

Productive education in the mathematical school

N. N. Konstantinov, A. L. Semenov

Nikolai Nikolaevich Konstantinov — school № 179 of the Department of Education and Science of the City of Moscow (Moscow).
e-mail: konstantinovnn@ya.ru
Alexey Lvovich Semenov — Lomonosov Moscow State University, Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC SCS of the Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: alsemno@ya.ru

Abstract

The article examines the reasons why mathematical schools (mathschools) have become an important and very productive phenomenon in Russian education in recent decades. A brief description of the modern model of productive education traced back to the established tradition of teaching in mathschools, which can lead to the construction of a reproducible model of productive education not only for specialized teaching of mathematics, but also for other areas of Russian general education.

Keywords: the tradition of mathschools and mathclasses, the Konstantinov School, school mathematics education in Russia, productive education, solving unexpected problems, recreational mathematics, mathematical circle, mathematical Olympiad, university students as teachers, level differentiation, learning and research activity of students, digital transformation of education.

Bibliography: 50 titles.

For citation:
N. N. Konstantinov, A. L. Semenov, 2021, "Productive education in the mathematical school", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 413–446.

1. Введение

В данной статье мы пытаемся выделить те причины, по которым школы с углубленным изучением математики (*матшколы*) стали важнейшим и очень продуктивным явлением в российском образовании последних десятилетий. Мы понимаем, что время от времени возникающие в системе образования отдельные инновационные школы, как и целостные системы образовательной деятельности, без прямого участия авторов инновации в большинстве случаев оказывают малое влияние на развитие массовой школы, или хотя бы большого числа школ. Некоторая надежда на то, что инновация «укоренится», может быть связана с тем, что она возникла не «на пустом месте», а является продолжением каких-то важных традиций.

В нашем изложении различие между *матшколой* и *матклассами*, вокруг которых образуется «школа в школе», несущественно. В статье мы показываем, что и традиция математических школ – «школ Константинова» – возникла не на пустом месте. При этом мы не делаем попытки описать всю специфику *матшкол* страны и их роль в обществе. Этому посвящены, в частности, разделы книги [1].

Мы надеемся, что модель *матикол* допускает распространение на другие области российского образования.

В настоящее время в российском образовании формируется подход к общему образованию, основанный на системе принципов, которую можно описать одним термином «результативное образование». Эти принципы, сформулированные Семеновым на основе практики работы *матикол*, изложены им в 8-м разделе данной статьи.

2. Школьная математика в российской школе. Исторически сформировавшиеся цели: прикладная и иные

Началом школьного математического образования в России принято считать 1701 год, когда в Москве указом Петра Великого была основана школа математических и навигацких наук. В этой школе работал и Леонтий Филиппович Магницкий, автор знаменитой «Арифметики». Название школы подчеркивало прикладной характер изучаемой там математики. В указе Петра речь идет также о «фортификации» в качестве элемента подготовки.

Тенденция по продолжению прикладной линии в преподавании школьной математики продолжалась и в XIX веке, когда при многочисленных и разнообразных реформах и «контрреформах» (в меньших масштабах продолжившихся во второй половине XX в.) четко прослеживалась линия разделения гимназического и реального образования. В гимназическом, «классическом» образовании объем математики был меньше, чем в реальном. Стоит указать на то, что в какой-то момент объем изучения математики был во многом определен учебным планом, физико-математический раздел которого был разработан П. Л. Чебышёвым в 1858 г.

Однако для нашего изложения истоков *матикол* еще более важной является роль другого деятеля российской школы. Как пишет известный историк российского математического образования А. В. Ланков (и с ним согласны Ю. М. Колягин и др.) [3]: «Творцом методики арифметики в России, бесспорно, является Петр Семенович Гурьев». Именно ему принадлежит введение почти 200 лет назад учебной технологии «листков», см. далее.

Свои педагогические взгляды П. С. Гурьев описывает в «Отчете по Гатчинскому сиротскому институту», где он был инспектором (цит. по [4]):

> «Важнее всего возбудить самодеятельность в воспитаннике, представить ему будущую науку с ее светлой, лучшей стороны, чтобы он постоянно жаждал познаний и уже в маленьком кругу своей учебной деятельности ощущал отраду и наслаждение от изобретений всякого нового познания, всякой новой истины».

Заметим, что речь идет об учениках *сиротского* института, воспитанников такого сорта образовательной организации не отбирают по особым способностям и мотивированности к учению.

Замечательным было «Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям» П. С. Гурьева (часть I – 1839 г., часть II – 1842 г.). В предисловии автор писал:

> «Когда я составлял свое "Руководство", то преимущественно имел в виду самодеятельность учеников, ибо убежден, что большая часть неуспехов происходит не столько от способностей, сколько от недостатка самодеятельности. Нередко видим, что учитель в классе принимает на себя роль оратора, вместо того, чтобы быть руководителем и только наводить учеников на сознание. От этого ученики ведутся как на помочах и не смеют сделать шагу без своего наставника; когда же потом, будучи предоставлены себе, встречают какие-либо затруднения, то спотыкаются и уже не двигаются с места.

> Привычка довершает дело. Таким образом, ум, не приученный с ранних лет пытать свои силы, делается впоследствии недоверчивым к самому себе и рад, если за него работают другие. Вот причина плоских умов, которыми бывают богаты общества» [5].

Свою книгу «Арифметические листки, постепенно расположенные от легчайшего к труднейшему» [6] Гурьев начинает словами:

> «Листки сии, вмещая в себе задачи, расположенные постепенно от легчайших к труднейшим, быв наклеены на папку, примут вид прописей или карт. Таким образом учитель, по предварительному объяснению какого-либо правила, может раздавать сии листки ученикам, соображаясь с силами и способностями каждого. Очевидно, что ученики, получая каждый свой отдельный листок, не имеют уже возможности списывать один от другого решения задач, ученику нет нужды выписывать в свою доску задачи: он только к сделанному решению приписывает номер задачи, которую он разрешил, – а через сие много сбережения времени. По прилагаемым к решениям задач номерам, учитель, имея перед собой книжку, вмещающую в себе Ключ, или решения всех задач, может легко и весьма скоро поверять учеников своих.
>
> Что касается до объяснения Арифметических правил, то я старался изложить оные так, чтобы ученик сам, без помощи учителя, мог идти далее вперед; с той же целью помещены в конце книжки вопросы, которые должны руководствовать ученика при изучении объяснений. Опытный учитель, без сомнения, будет заставлять ученика сравнивать и противополагать пройденное им с выученным прежде, и получаемые понятия о науке соединять в одно целое» [6].

Таким образом, Гурьев подчеркивает, что предлагаемые им технологические решения направлены на:

- структурирование содержания в форме отдельных перечней заданий – «листков»; листок обычно ориентирован на достижение какой-то специфической цели;
- индивидуализацию – подбор учителем листка, соответствующего индивидуальному уровню учащегося (работу в зоне ближайшего развития);
- развитие самостоятельности учащегося;
- создание мотивации, возникающей из открытия нового;
- оптимизацию образовательного процесса, экономию времени учителя, работающего с большим классом, и ученика в таком классе.

Нельзя сказать, что Гурьев полностью следует провозглашаемым им принципам. Например, сами задачи Гурьева – это стандартные арифметические задачи. Говоря о том, как учитель может проверить правильность *ответа* к задаче (с помощью ключа, как в части «B» ЕГЭ [7]), Гурьев не говорит о том, что же делать, если ответ неверен. Тем не менее ряд элементов образования, в дальнейшем использованных в *матшколах,* очевиден.

Интересно, что П. С. Гурьев предпринял попытку представить другую свою книгу «Практическая арифметика» [8] в Ученый комитет Министерства народного просвещения для утверждения в качестве руководства для средних и начальных школ, но П. Л. Чебышёв как член Ученого комитета, проводивший экспертизу книги, дал отрицательный отзыв, посчитав, что автор загромоздил ее большим числом практических приемов. В результате книга не была рекомендована [9, с. 431—432].

П. С. Гурьев составил первый в России задачник по геометрии, хотя учебники по геометрии существовали со времен Эйлера. «Практические упражнения в геометрии», написанные П. С. Гурьевым в соавторстве с его бывшим учеником по Гатчинскому сиротскому институту, учителем математики Александром Дмитриевичем Дмитриевым, вышла в 1844 г. [10]. В книге приводилось 506 задач. Из них около 400 – это задачи на построение, остальные – задачи практической геометрии, несколько задач на доказательство и одна вычислительная задача. В предисловии сказано:

> «Цель предлежащей книги состоит именно в том, чтобы без нарушения общепринятого способа преподавания геометрии дать ученикам возможность чаще возбуждать в себе самодеятельность, пытать свои силы в применении общих законов к частным случаям и, наконец, в преодолении затруднений собственным усиленным напряжением ума находить истинное удовольствие» [10].

Заметим, что в данном случае речь идет именно о *задачнике* по геометрии.

Мы заканчиваем обсуждение вклада Гурьева и продолжим рассмотрение общей ситуации со школьной математикой и основными ее элементами, начиная с геометрии.

Традиционные учебные курсы школьной геометрии имеют ту особенность, что основное содержание работы ученика состоит в выучивании доказательств теорем, в лучшем случае при попытке это доказательство понять. Это мало похоже на «возбуждение самодеятельности». При этом количество теорем, определений, лемм и всего прочего делает задачу самостоятельно придумать существенную часть доказательств (например, из знаменитого учебника Киселева) безнадежной, даже и для успешного учащегося сегодняшней школы. (Мы оставим в стороне обоснованные сомнения в полной строгости школьной геометрии.)

Традиционно, в течение веков, задания, в которых словесно описываются возможные в реальности, гипотетические объекты, события и процессы («текстовые задачи»), считаются важным элементом математического образования. При этом бесспорный авторитет в школьной математике (и отец выдающегося математика) Игорь Владимирович Арнольд так описывал практику обучения решению таких задач, сложившуюся в нашей стране к середине 1940-х годов:

> «Учеников – в том или ином порядке – знакомят с соответствующими «типами» задач, причем обучение решению задач сплошь и рядом сводится к «натаскиванию», к пассивному запоминанию учениками небольшого количества стандартных примеров решения и узнаванию по тем или иным признакам, какой из них надо применить в том или ином случае. Количество задач, которые ученики решают действительно самостоятельно, с тем напряжением мысли, которое и должно являться источником полезности процесса решения задачи, ничтожно. В итоге – полная беспомощность и неспособность ориентироваться в самых простых арифметических ситуациях, при решении чисто практических задач» [11].

А вот что писал на эту тему А. Я. Хинчин:

> «Как-то мне пришлось спросить несколько опытных учителей пятых классов о том, какой примерно процент учащихся действительно научается решать арифметические задачи, не являющиеся простыми вычислительными примерами, т. е. такие, где способ решения, как бы прост он ни был, должен быть найден самим учащимся. Из всех опрошенных мною учителей только один утверждал, что этому искусству удается научить до 15% учащихся; все другие говорили, что лишь отдельные учащиеся овладевают этим искусством, а некоторые даже заявляли, что "этому вообще научить невозможно". Конечно, решив целый ряд совершенно однотипных задач,

> ученик без труда решит задачу в точности того же типа (этим объясняется отсутствие сплошных провалов на экзаменах и контрольных работах); но добиться, чтобы ученик самостоятельно нашел решение задачи нового, хотя бы и очень простого типа, – это, по единодушному мнению учителей, есть дело, удающееся только в самых исключительных случаях.
>
> Описывая всю эту тяжелую ситуацию, я думаю, что не очень сгустил краски. Если в отдельных случаях дети все же научаются решать задачи, интуитивно отличают правильное рассуждение от ложного, находят в этих упражнениях ума здоровое удовольствие и в конечном счете действительно развивают свою сообразительность, то такие исключения способны только подтвердить печальное общее правило» [12].

Постоянно слыша разговоры о снижении уровня математического образования, вряд ли можно ожидать, что сегодня ситуация существенно улучшилась.

Напомним апокрифическое высказывание Ломоносова (сочиненное, видимо, Иваном Депманом и впервые обнародованное в 1959 г. [13]): «А математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит». Видно, что массовая российская школа (как и школы других стран) в течение столетий была ориентирована на развитие ума основной массы учащихся (исключая двоечников и наиболее способных) в следующих отношениях:

- безошибочное вычисление по известной формуле или алгебраическое преобразование по понятному эвристическому правилу;
- перевод ограниченного количества типов словесных конструкций в последовательность арифметических действий или систему уравнений;
- выучивание геометрических доказательств с пониманием некоторого их числа, практически без использования потенциала геометрии для возможности самостоятельного рассуждения учащегося с опорой на наглядность.

Места для самостоятельности здесь немного. И это совершенно не удивительно, и не следует считать дефектом школы тех времен. Действительно, в качестве результата *массового* образования аккуратное исполнение инструкций и хорошая память были *важнее* самостоятельности мышления. Массовое образование было ориентировано на подготовку людей, которые могут безошибочно произвести арифметические вычисления, которые иногда могут понадобиться каждому, а постоянно нужны бухгалтеру, счетоводу, приказчику, землемеру, статистику. Мотивация включала сильный элемент негативного подкрепления, авторитет родителей и очевидную возможность «выбиться в люди» и там достичь достатка, общественного признания, реализации мечты. Наиболее способные и мотивированные при этом могли освоить работу с уравнениями и тригонометрическими функциями, что позволяло им продолжить обучение на инженера, ученого-физика. И лишь исключительным учащимся, совершенно самостоятельно или под влиянием исключительного учителя, удавалось разглядеть красоту математики.

К чему это приводит в высшем образовании, хорошо видно по рассказу А. С. Кронрода, относящемуся к «Золотому веку» российского университетского математического образования, о его разговоре с известным математиком — Лидией Ивановной Головиной, получившей Первую премию на V Московской математической олимпиаде, профессором мехмата МГУ. Она вела упражнения по уравнениям в частных производных на четвертом курсе мехмата. Кронрод спросил у нее: «Скажите, среди Ваших студентов многие ли смогут доказать непрерывность функции $y = x^2$ в точке $1,5$?» Она говорит: «Может, не все, но многие». Он переспросил: «А сколько именно?» Она задумалась: «Двое точно докажут, ну, вот, может быть, еще один...» И она провела пробную контрольную работу на один час и задала на ней эту задачу, которую все должны знать на первом семестре первого курса. Действительно, решило двое. Сама система обучения не обеспечивала гарантий того, что человек действительно усвоил то, что ему преподавали (эта история со ссылкой на Константинова рассказана также в [1]).

3. Занимательная математика как мотивирующая альтернатива

Во все время развития школьного математического образования параллельно с описанной выше основной линией, ориентированной в первую очередь на практические приложения математики, существовала и альтернативная. Это линия занимательной, развлекательной математики, задач «на смекалку», которая пунктиром встречалась и в школе. Изначальная цель этой линии – увлечь, завлечь, заинтересовать, то есть – мотивировать учащегося. Вот несколько показательных, поясняющих примеров.

Знаменитый сборник занимательных задач «Propositiones ad Acuendos Juvenes» («Задачи для оттачивания молодого ума») с «Волком, козой и капустой» был создан Алкуином в VIII веке [14, 15]. Задача о мостах Кёнигсберга привлекла внимание великого Эйлера, но, вероятно, и в его время была посильна способному школьнику. В книге [16] опубликовано 180 задач XVIII века и более ранних.

На картине Н. П. Богданова-Бельского «Устный счёт. В народной школе С. А. Рачинского», пожалуй, самому цитируемому символу российской школы (наряду, вероятно, с «Опять двойка» Ф. П. Решетникова), изображено решение «нестандартной» задачи.

В нашей стране в разное время были очень популярны сборники задач Емельяна Игнатьевича Игнатьева [17] и Якова Исидоровича Перельмана (у которого прослеживается и мостик к приложениям математики, сборники математических задач соседствуют со сборниками физических) [18, 19]. И до сих пор родители с удовольствием их покупают, а издательства прибыльно издают, а ведь на них нет грифа Министерства.

Почему же не сформировалась линия школьных учебников и задачников, интегрирующих традиционные школьные курсы и занимательную математику, всегда остающуюся на периферии? Трудно представить себе троечника по «основному содержанию», получающего «итоговые» пятерки за «дополнительные задания».

Ответ ясен и убедителен: занимательные задачи не сильно продвигали к «твердому усвоению» «арифметических навыков» и прочей школьной премудрости. Премудрость же эта, в представлении авторов учебников, состоит в вычислительной практике, отвечающей, как сказали бы в прошлом веке, потребностям производства, а в нынешнем – нуждам экономики. Парадокс XXI века (наполненного парадоксами) состоит в том, что для экономики сегодня дефицитны не *исполнители* – их функции успешно передаются искусственному интеллекту, а *исследователи* и *творцы* – и в большом и в малом. А исследователи и творцы формируются в решении *исследовательских* и *творческих* задач: «занимательных», «олимпиадных» – разнообразной сложности.

В XX веке традиция занимательных задач, возможно, достигнув максимума в 30-е гг., зашла в школы через олимпиады, которые естественно рассматривать вместе с математическими кружками. Этому рассмотрению посвящен следующий раздел.

4. Кружки и олимпиады

Параллельно с развитием «прикладной» и «занимательной» линий в мировом и российском математическом образовании развивалась линия «кружков» (отчасти пересекающаяся с линией «занимательной» математики).

В России XIX века с понятием кружка связана высокая степень неофициальности (в том числе – и «тайности», как у «тайного общества»), неформальности, демократизма, тесного взаимодействия членов кружка между собой и с руководителем, если он есть. Массовым явлением были литературные кружки, студенческие кружки. Вероятно, не было простым совпадением и то, что математическим кружком назывались сообщества математиков, озабоченных проблемами математического образования.

Замечательным для «кружков» является то, что одни и те же важные элементы «кружка» присутствуют и в работе математика высшего класса со своими учениками, и в работе студента с семиклассниками (и даже – первоклассниками). К тому, что мы называем «кружком» этого высшего эшелона, часто применяется еще наименование «школа», скажем, «школа Лузина» – «Лузитания». Но нам очевидно, что с массовой школой как раз «кружок Лузина» имел намного меньше общего, чем с детским кружком. Заметим, кстати, что будучи студентом, сам Н. Н. Лузин был секретарем кружка Н. Е. Жуковского, который, в свою очередь, был членом Кружка любителей математических наук Н. Д. Брашмана. Как мы увидим дальше, лидеры школьных кружков во многом вышли из кружка Лузина, традиция не прерывалась.

Педагогический стиль Лузина и в целом отличался от «классической» университетской педагогики. Один из членов «Лузитании» Л. А. Люстерник цитирует студента: «Другие профессора показывают математику как завершенное прекрасное здание — можно лишь восхищаться им. Лузин же показывает науку в ее незавершенном виде, пробуждает желание самому принять участие в ее строительстве», и рассказывает:

> «Читает Николай Николаевич лекцию, вдруг задумывается: "Я не могу восстановить доказательства, может быть, кто-нибудь из коллег мне поможет?" Царит напряженная тишина, все думают, кто-то подходит к доске, пробует доказать, не выходит, и покрасневший возвращается на место. Наконец, счастливец под завистливые взоры остальных встает и рассказывает у доски найденное доказательство. Мэтр говорит: "Спасибо, коллега", – благосклонно улыбается. Победитель радостный садится на место.
>
> Лузин смело провел коренную реформу в деле подготовки молодых научных работников математиков. Считалось необходимым до начала самостоятельной научной работы изучить предварительно много толстых фолиантов. Это и в прошлом было более вредно, чем полезно, — нести чрезмерный груз пассивно воспринятой информации... Лузин сумел избежать в подготовке математической молодежи опасностей «переучивания» и дилетантизма, призывая к ранней самостоятельности, сочетающейся с продолжающимся математическим образованием. Так именно действовали позже и другие научные руководители в МГУ» [20].

Однако исследуемая нами традиция, в какой-то степени продолжая традиции кружков, семинаров, сообществ математиков, явное начало берет от попытки ведущих московских математиков начать работу со школьниками в середине 1930-х гг., когда стало ясно, что обычная школа не в состоянии подготовить новое поколение математиков. Математики в Ленинграде и Москве стали читать лекции для школьников и проводить олимпиады. При изложении истории московских кружков в большей части данного раздела мы следуем работам [21] и [1], не выделяя прямых и косвенных цитат.

В 1934 году по инициативе Бориса Николаевича Делоне, Григория Михайловича Фихтенгольца и Александра Даниловича Александрова в Ленинграде была проведена первая в СССР математическая олимпиада. В том же году при Московском университете был создан и кружок для школьников. Его возглавил 21-летний аспирант Колмогорова Израиль Моисеевич Гельфанд.

В 1935 г. прошла Первая московская олимпиада. Еще до этого несколько студентов-математиков Университета вели математические кружки в школах Москвы. После проведения олимпиады было решено перенести эту работу в Университет и объединить ее с лекциями, читавшимися ранее в Математическом институте АН СССР. Так возник большой Школьный математический кружок при МГУ. Его организаторами, помимо И. М. Гельфанда, были Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман. Наряду с ними в работе кружка активно участвовали аспиранты и студенты. С самого начала работа кружка проводилась в двух направлениях: чтение лекций и заседания секций кружка.

Два раза в месяц, по выходным дням, профессора и преподаватели Университета читали лекции по математике для школьников. На лекциях присутствовали десятки, а затем – сотни школьников. Темы этих лекций касались важнейших и весьма разнообразных разделов математики, по большей части – XX века, входящих в университетский курс или даже за его пределами. Впоследствии ряд этих лекций лег в основу серии «Популярных лекций по математике».

В качестве примера работы секций кружка можно указать, что в 1936/37 учебном году секция кружка под руководством члена-корреспондента АН СССР Л. Г. Шнирельмана занималась геометрическими методами теории чисел, секция профессора (впоследствии академика) А. Н. Колмогорова – качественной геометрией. В первые годы работы кружка основной формой занятия секции был доклад одного из школьников (подготовленный, разумеется, под наблюдением руководителя секции). Доклады, считавшиеся наиболее удачными, выносились даже на воскресные занятия (пленумы) кружка. Однако постепенно выяснилось, что доклады школьников являются малоэффективной формой занятий кружка.

Новую концепцию кружковой работы создал Давид Оскарович Шклярский (1918–1942) [22]. Можно полагать, однако, что его концепция возникла в живой среде, в культуре кружков, о которых мы уже говорили, ему удалось выделить наиболее эффективные элементы и одухотворить их своей личностью. В 1936 году он стал одним из победителей II Московской олимпиады, в том же году поступил в МГУ, с 1937 года вел кружок, в 1938–1941 годах был руководителем математических кружков при МГУ. Концепция Шклярского состояла в следующем. Руководитель читал небольшую лекцию, как правило, содержащую законченный рассказ о небольшой математической теории. Иногда рассказ руководителя, с продолжениями, шел в течение двух-трех занятий, занимая на каждом небольшую часть времени. После лекции значительная часть времени на каждом занятии отводилась для рассказа школьников о решенных ими задачах. Часть задач, предложенных на дом или для решения тут же на заседании, иллюстрировала предшествовавший рассказ руководителя; другие же задачи были не связаны с этим рассказом, а некоторые являлись темами своеобразных миниатюрных научно-исследовательских работ. Иногда трудная теорема расчленялась на ряд задач, последовательно предлагавшихся участникам. Естественно, что среди предложенных задач встречались и такие, решить которые удавалось лишь немногим школьникам, а отдельные задачи ожидали своего решения (хотя бы одним участником кружка!) недели и даже месяцы.

Наличие задач разной трудности позволяло руководителю вовлечь в активную работу практически всех участников секции. Большое количество предлагавшихся задач (многие из которых были очень трудны) само собой создавало атмосферу творческого соревнования.

Одной из важнейших особенностей методики Шклярского было привлечение к работе со школьниками так называемых «младших руководителей» – студентов 1–2-го курсов, которые помогали руководителю придумывать, подбирать и проверять задачи. Студенты также обладали приоритетным правом выбирать того ученика, которому будет доверено рассказать найденное решение у доски.

Наиболее важными чертами системы Шклярского были внимание к каждому ученику (этому способствовала и работа помощников-младшекурсников) и поощрение творческого, нетривиального мышления. И та и другая черты роднят подходы Шклярского и Лузина (в «Лузитании»).

Методика Шклярского уже через год принесла заметные результаты: на IV Московской олимпиаде (1938 год) ученики Шклярского получили 12 из 24 премий, в том числе все 4 первые премии!

Давид Оскарович Шклярский погиб в ополчении на фронте Великой Отечественной войны. Его влияние на математическое образование отразилось и в том, что первым автором на обложке нескольких книг важнейшей серии «Библиотека математического кружка» [23] его коллеги, друзья и ученики указывали Шклярского.

Наряду со спецификой математики, кружок обладает важными элементами других лучших структур системы российского дополнительного образования. Там «тебя никто не держит» на данном занятии или курсе, перестать ходить на кружок относительно легко, если ты потерял интерес; там все, кто приходит вместе с тобой, одинаково мотивированы, нет школьных отметок, а наградой тебе служит в первую очередь правильно (или наконец-то правильно) выполненное задание – решенная математическая задача (и конечно, взгляды друзей по кружку).

Система математических кружков не исчезла. Она продолжается и сейчас, хотя, как правило, и без прямого участия математиков – лидеров уровня 1930-х гг. Например, сейчас в кружке при мехмате МГУ, т. н. «Малом мехмате», одновременно занимается до 2 тыс. человек (листки Малого мехмата можно увидеть в интернете [24]). Это возможно благодаря уже сформировавшейся модели работы и содержанию образования в кружках. С другой стороны, на той же «кружковой идее» основаны и кружки разного уровня не при университетах, летние школы и т. д. Как мы увидим дальше, система кружков породила и матклассы и находится с этими классами в тесном взаимодействии.

Еще одним направлением, выросшим из кружков и олимпиад, стала Заочная математическая школа (ЗМШ), идеологом которой был И. М. Гельфанд. В наши цели не входит анализ феномена ЗМШ, но все же обратим внимание на несколько деталей в ее работе. ЗМШ, как и кружки, была дополнительным, к обычному школьному, образованием. Каждый учащийся получал (по почте, «обычной», не электронной, конечно) индивидуальный листок с заданиями, которые нужно было выполнить к определенному сроку (в силу массовости, задания и сроки были общими для всех). Результат выполнения каждого задания анализировался и получал обратную связь (рецензию) преподавателя. Преподавателями были студенты; их работа не оплачивалась, это был массовый вариант «общественной работы», какой-то вид которой должен был вести каждый студент. Были возможны два варианта учебы в ЗМШ: индивидуальный ученик и коллективный ученик, т. е. группа учащихся под руководством учителя. Весь обмен информацией между учеником и учителем происходил по «обычной» почте (обстоятельство, не очевидное для предполагаемого читателя этой статьи в XXI веке).

Специфика работы ЗМШ состояла в том, что грамотно сформированная ее программа – это элементарная школьная математика, ориентированная на сдачу вступительных экзаменов в сильные вузы страны (в первую очередь – в МГУ). В некоторые годы среди поступивших в МГУ количество выпускников ЗМШ превосходило количество выпускников всех математических школ вместе взятых. При этом среди выпускников ЗМШ большинство жило не в больших городах – центрах математической жизни.

Также продолжается система олимпиад. Высокие результаты в них начали поддерживаться образовательными властями. Они стали важнейшим показателем индивидуальных достижений способного школьника в математике, достижений страны и региона. Бумажные и электронные СМИ с огромным удовольствием обсуждают, что Россию очередной раз в олимпиаде обогнали китайцы и др., и с меньшим удовольствием берут интервью у российских золотых медалистов этих олимпиад. Олимпиады стали альтернативой ЕГЭ по отношению к поступлению в вузы, и это – действительно важная альтернатива. Такая ситуация, естественно, имеет и положительные и отрицательные стороны, как всякое высокозначимое (high-stakes) оценивание.

Об олимпиадных задачах писатель, выпускник мехмата МГУ Владимир Губайловский говорит:

> «Эти задачи требуют не припоминания вызубренных заранее знаний и навыков, а умения думать сейчас и здесь, умения так повернуть условия, чтобы вдруг проявился этот неожиданный, укрывшийся в условиях порядок. Человек, даже очень хорошо выучивший школьный курс, но не понявший, как же соотносятся части того целого, которое называется языком математики (пускай даже самого начального), часто не может решить простой задачи, с какой легко справляется шестиклассник на кружке» [1].

Заметим, что здесь подчеркивается не сложность «олимпиадных» задач, а именно неожиданность их решения. Сборники олимпиадных задач, ставшие важной частью современного математического образования, парадоксальным образом снижают эту неожиданность: иногда авторы разбивают их на циклы с общими идеями. Есть и система «подготовки олипиадников». Эту тему мы еще затронем в следующем разделе. Однако для нас важно то, что «олимпиадность», а именно – новизна для данного ученика, неожиданность, возникающий в связи с этим интерес, мотивация, возможна и для массового школьника, совсем не «олимпиадника». Задача может быть простой и в то же время неожиданной.

Важнейший пример тому – олимпиада «Кенгуру» [25], задачи которой, во многом спроектированные Марком Ивановичем Башмаковым, разнообразны, интересны и имеют разную сложность. Эти качества обеспечили фантастическую популярность этого соревнования в начальной школе. А сам задачный материал, продолжающий линию занимательных задач, указывает возможный путь и для расширения содержания математического образования. М. И. Башмаков – выпускник кружка Григория Владимировича Епифанова при матмехе Ленинградского университета, один из лидеров школьных кружков (начиная со своего второго курса), сыгравший ключевую роль в становлении петербургской школы № 239 и других математических школ в этом городе. Вот его слова: «Я почти не знаю человека, который стал бы известным математиком и который не был бы связан с кружками» [26].

5. Математические школы

Читая работы Гурьева, его тексты, относящиеся к философии образования, и рассматривая его «листки», постоянно наталкиваешься на вопрос: почему же представленная в них математика все же очень ограниченна, однообразна и рутинна, в противоречии с его же принципами? Ответ, что «такова и была вся математика того времени, с которой можно было начинать», очевидно, не верен. Это показывают как раз «занимательные», логические и пр. задачи, о которых мы уже говорили выше, как и круги Эйлера из его «Писем к немецкой принцессе...». Дело тут, конечно, в тех практических целях математической подготовки, которые мало менялись в течение столетий. Конечно, в рамках этих целей, как говорится, «не благодаря, а вопреки» формировались и настоящие математические таланты. Ирония судьбы состоит в том, что для них школьные годы оказывались связанными с традиционной школьной математикой и школьными отметками, в лучшем случае компенсируемыми замечательным, как человек или как математик, учителем, или математическим кружком, или книжкой по занимательной математике. В результате им кажется, что более эффективного пути к воспитанию математика-профессионала и нет.

Однако, с начала 1960-х гг. в нашей стране возникла возможность совмещения линий двух важнейших традиций: прагматической и творческой, увлекательной.

Все началось с кампании, запущенной в 1958 г. лично руководителем страны Н. С. Хрущевым, по «укреплению связи школы с жизнью», выразившейся, в частности, в принятии соответствующего закона. Прямой интерпретацией этого лозунга были попытки готовить выпускников школы к карьере рабочих – менее квалифицированных после основной школы, более квалифицированных после старшей школы. Лидеры отечественной науки, прежде всего – математики и физики, предприняли ряд попыток, чтобы, с одной стороны, настоять на возможности для талантливых детей идти непосредственно в университеты, с другой – чтобы проинтерпретировать «связь с жизнью» как, выражаясь сегодняшним языком, «цифровизацию». Для последней, в свою очередь, требовалась модернизация школьного математического образования, которая фактически в первый период выразилась в создании школ с углубленным изучением математики и программирования. (Далее цитируем по [1].) Первым о создании школ с компонентом современной технологии заговорил физико-химик Николай Николаевич Семенов, единственный в истории советский лауреат Нобелевской премии по химии. Семенов заявил, что реализация планов Хрущева обязательно потребует создания «школ нового типа». По мысли Семенова, «в эти школы нужно отбирать 5–8% всех выпускников восьмилетних школ и готовить в них «лаборантов-физиков, лаборантов-химиков, лаборантов-биологов, работников счетных машин, чертежников-конструкторов и т. д.». Шефство над такими заведениями должны брать университеты и исследовательские институты, а каждая школа будет, по мысли Семенова, состоять из двух половин – школы для местных учеников и интерната для одаренных детей из отдаленных районов. В школах должна будет вестись не только педагогическая, но и научно-исследовательская работа. В ходе последующей дискуссии другой крупнейший академик – Колмогоров – высказал и такую мысль: «Уровень тренировки в отношении решения задач [у учеников математических школ] будет, вероятно, выше, чем тот, который сейчас вообще достигается средними студентами университетов, они обычно перегружаются теоретическим материалом за счет малого развития навыков в решении задач».

Осенью 1959 года в трех московских школах – № 2, 7 и 425 (впоследствии 444) – одновременно открылись старшие классы, где в качестве производственного обучения готовили: в 7-й и 425-й «программистов-вычислителей», а во 2-й — радиомонтажников, но с 1960 года и там открыли программистскую специальность, в 7-й школе открыли класс радиомонтажников. Тогда же, в 1960-м, программистов начали готовить в школе № 52.

Автором этой новации в Министерстве просвещения РСФСР считали преподавателя математики школы № 425 Семена Исааковича Шварцбурда [27].

Итак, «общество и государство» получали оправдание для творчества и других «странностей» формирующейся системы образования. Это оправдание фактически состояло в том, что наступал Цифровой век.

Важным результатом этих изменений в 425-й школе стало не только обучение непосредственно программированию, но и появление в школьной математике принципиально нового содержания – основ линейной алгебры и аналитической геометрии [28]. Что же касается приложений, то, слава богу, приложения оказались подходящими. Программирование, несмотря на обилие тогда технических деталей и трудностей, давало возможность для почти постоянного творческого, самостоятельного решения математических по существу (хотя и формулируемых «программистски») задач. Таким образом, параллельно с традиционной школьной математикой (по существу XVIII–XIX вв.) в школе появилась математика XX в. и реальная творческая математическая деятельность учеников.

Крупные московские математики воспользовались открывшейся возможностью повлиять на математическое образование школьников не только через кружки, но и прямо в школе. К тому же, у некоторых из них были дети школьного возраста и был шанс создать для них хорошую школу.

Наиболее прямой формой взаимодействия университета со школой стали физико-математические школы-интернаты, созданные в 1962–1963 гг. при университетах: Новосибирском, Киевском, Московском, Ленинградском. В этих школах, собиравших учащихся старших классов со всей страны, преподавали выдающиеся математики, бывшие и их организаторами, и идеологами: А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, Д. К. Фаддеев, В. М. Глушков.

Для нас принципиальную важность представляет история, начавшаяся в московской школе №7. Масштабной фигурой, пришедшей в эту школу и оказавшей решающее влияние на формирование новой системы школьного математического образования, явился Александр Семенович Кронрод [29, 30]. Школьником он участвовал в кружке Д. О. Шклярского, получил Первую премию на IV Московской математической олимпиаде (все четыре премии были получены участниками этого кружка), вошел в последнюю когорту учеников Н. Н. Лузина (наряду с Георгием Максимовичем Адельсоном-Вельским). Фронтовик, блестящий математик, прервал математическую карьеру для занятия прикладными задачами (в «Атомном проекте») и программированием, спроектировавший вместе с инженером Н. Н. Бессоновым первый советский универсальный компьютер. Реальное строительство этого компьютера затянулось на несколько лет, но и построенный только в 1957 г. релейный компьютер оказался более надежным, а иногда и более производительным, чем электронные (ламповые) того времени. В 1946–1953 гг. А. С. Кронрод вел «кружок Кронрода» – семинар для первокурсников и более старших студентов мехмата, который играл роль, сопоставимую с лузинским кружком 1930-х гг. Профессионально занявшись программированием, Кронрод объявил (видимо, ок. 1955 г.) «кружок Кронрода» по программированию в Институте теоретической и экспериментальной физики (одном из центров Атомного проекта). Среди центральных тем этого кружка было «эвристическое программирование» – то, что сегодня называется «искусственным интеллектом». Как эталонный пример рассматривалась задача игры в подкидного дурака. Кронроду удалось организовать чрезвычайно эффективный процесс «производства программного обеспечения» для прикладных задач, решавшихся ИТЭФом. Другими областями приложений вычислительной техники, где под руководством Кронрода получены выдающиеся результаты, были экономика ценообразования и медицинская диагностика. Как мы видим сегодня, в личности Кронрода совместились линии участника и руководителя кружка, профессионального математика, прикладника, программиста и деятеля школьного образования.

Н. Н. Константинов, закончивший физфак МГУ, ведший математические кружки в МГУ, руководивший целой системой таких кружков и бывший аспирантом Кронрода, получил от него предложение организовать математическое образование, продолжающее в 7-й школе традицию кружков МГУ. В 1961 г. Кронрод и его коллеги (М. Л. Гервер и др.) набрали первый класс в 7-й школе. У Константинова был опыт и научного кружка по биологии и генетике Николая Владимировича Тимофеева-Ресовского.

Технология преподавания реализовывала идею «листков», хотя ее авторы в XX веке в течение длительного времени не были знакомы с методикой Гурьева.

10 лет назад была опубликована небольшая заметка Н. Н. Константинова, в которой описана система работы *маткласса*. Сейчас кажется полезным еще раз вернуться к теме и увидеть, насколько устойчивая система была создана и как она эволюционирует и соответствует сформулированным принципам результативного образования. Цитируем по тексту [31]:

> «Основные принципы работы в математических классах – тщательность, неторопливость и самостоятельность».
>
> «Тщательность означает, что тема проходится не временно ("в вузе вас этому обучат как следует"), а окончательно (что не исключает последующего возврата к теме на новом уровне). Потеря тщательности ведет к потере интереса. Ученик, который один раз чего-то недопонял, другой раз чего-то недопонял, засоряет, наконец, свою учебу до того, что ему становится противно в ней жить. Наоборот, тщательность позволяет находить в обычных вещах все новый интерес» –

здесь речь об обязательном достижении цели, важном принципе результативного образования.

> «Основная роль учителя – не в том, чтобы рассказывать и объяснять, а в том, чтобы тщательно проверять, разбираться в любых ошибках, сохраняя искренний интерес ко всем успехам ученика. Этот интерес и является основным стимулом, который имеется в руках учителя, а вовсе не двойки и пятерки, которые, конечно, что-то стимулируют, но, к сожалению, совсем не то, что требуется» –

здесь говорится и о самостоятельности ученика, и о важности системы обратной связи по сравнению с отметками. При этом процесс обучения организован так, что решение задач сходно с решением профессиональных задач математиком или программистом. В силу самого характера профессиональной деятельности в этих областях, наиболее эффективным способом обучения является самостоятельное решение задач. Учащийся непрерывно получает от учителя новые и трудные, но посильные задачи. Но он и сам может взять из книжки задачу, которая заинтересовала его, независимо от каких-то заранее установленных целей. Когда ученик задачу решил (или думает, что решил), важно ее «сдать» учителю – предъявить свое решение для проверки. И эта проверка может оказаться самой содержательной деятельностью во всем процессе получения образования. Учитель пытается понять предложенный учеником текст, как правило, письменный. Ученик в этом тексте старается быть понятым учителем. Успех состоит в том, что эти попытки приводят к возникновению глубокого взаимопонимания между собеседниками. Учителем может служить и группа людей. Им может быть даже и текст книжки, хотя, конечно, лучше всего, если взаимное понимание постепенно создается в результате общения живых людей. В современном школьном образовании, как и в традиционной школе последних столетий, внимание к взаимопониманию учителя и ученика реально оказывается недостаточным. У этого есть очевидные причины, которые мы обсудим чуть позднее, но здесь мы подчеркнем, что цель взаимопонимания в общении часто оказывается вторичной. Основное же для учителя в традиционной модели – это в фиксированных временных рамках преподать, сообщить ученикам готовое знание, а потом оценить, насколько они это знание усвоили: проверить решение задачи или выслушать устный ответ и поставить оценку, в лучшем случае сопроводив ее кратким комментарием. Это совсем не похоже на *взаимо*понимание. В качестве экстремального примера, поясняющего наше представление о *взаимо*понимании и *взаимо*действии, можно вспомнить случай, как крупный математик, Иосиф Бернштейн беседовал со своим аспирантом, который пытался задавать правильные вопросы. Иосиф, не жалея времени, старался эти вопросы понять и дать на них естественные ответы. К концу этой беседы возникло новое знание, которым собеседники не обладали вначале – это знание составило диссертацию аспиранта.

В школе, изобретенной Коменским, учитель в классе сообщает истину десяткам, или даже сотне учеников, а они записывают слова учителя на грифельных досках или все вместе декламируют выученную истину. Коменский, конечно, ясно понимал недостатки такого подхода, он сам говорил о том, что научиться чему-то можно, только делая это – *fabricando fabricamur* (создавая, создаем себя). Однако подход был и остается эффективным, если цель именно – дать готовое знание для заучивания. Лектор сегодня может обращаться к сотням студентов более эффективно, чем во времена Коменского – он может использовать микрофон и большой экран, через интернет может обращаться и ко многим тысячам. Но беседы, диалога, взаимопонимания при этом, как правило, не возникает. *Матшкола* ищет пути решения этой проблемы, ориентируя ученика на содержательный результат взаимопонимания (это и означает жаргонное «сдать»), а не на отметку. При этом разумным образом растут затраты времени ученика на «прохождение темы» и затраты времени учителей на общение, но результат стоит того, особенно, в контексте XXI века.

> «Самостоятельность означает, что значительная часть теоретического материала, иногда почти весь материал, выполняется учащимися самостоятельно – они сами

> доказывают или опровергают большинство предлагаемых задач и теорем. Прямой рассказ учителя малоэффективен. Дело в том, что начинающие не понимают математического языка. Например, мало кто из начинающих способных учеников видит разницу между фразами: "для любого C найдется x, который больше C" и "найдется x, который больше любого C". Вот и судите, много ли поймут ученики из грамотного рассказа квалифицированного математика. Поэтому основным способом подсказки учителя становится структурирование материала» –

это действительно та самостоятельность, о которой говорили Гурьев и другие, в форме того, что учащиеся сами «создают математику» и тем самым ее осваивают (Коменский).

> «Неторопливость означает, что на каждую трудность уходит столько времени, сколько нужно. Не беда, если пройдено мало. А беда начинается тогда, когда нужно к определенному сроку что-то "пройти" – неважно хорошо или плохо. Это – беда, так как в результате не пройдено ничего, и всем становится неинтересно – и ученикам, и учителям» –

конечно, как и все другие, этот принцип не абсолютен. «Нужное» время не должно «уходить в бесконечность», существует «прокрастинация», поэтому и в *матклассе* есть «дедлайны», к очередной календарной дате нужно оценить, в каком месте «листочка» находится тот или иной студент, и принять решение о «реструктуризации» долгов. И обо всем этом приходится заботиться и в *матклассе,* и в системе результативного образования в целом. Но важно понимание проблемы и общий подход к ее решению. В частности, разные скорости работы учащихся удается выравнивать и синхронизировать благодаря использованию листков, в которых базовый результат достигается при решении части задач, а дополнительные задачи решаются не всеми.

> «Важной особенностью сильных математических классов и школ является участие в их работе профессиональных математиков. Значение такого участия трудно объяснить, однако почти каждая биография крупного ученого подтверждает латинскую пословицу: "Каждая клетка из клетки" [Принцип Рудольфа Вирхова «Omnis cellula ex cellula»], ибо и учитель такого ученого оказывается сам достаточно крупным ученым. Научная вера руководителя может быть основана либо на собственном живом опыте, либо на воспоминаниях о собственном опыте, либо на усвоенном чужом опыте. Первый вариант самый ценный» –

так действительно строились первые матклассы, в их работе принимали участие Г.М. Адельсон-Вельский, И. М. Гельфанд, Е. Б. Дынкин, А. С. Кронрод. Существенную роль в ряде случаев сыграло то, что математики просто создавали школу или хотя бы математическое образование для своих детей. Однако со временем оказалось, что задача найти для каждого маткласса профессионального математика – нереалистична. Нашлась замена: потенциальный будущий профессиональный математик, и не один, а много. Можно найти студентов, занятых и увлеченных, по существу, профессиональной математической деятельностью и способных передать ученикам модель этой деятельности и взаимодействия с другими математиками.

> «При таком преподавании необходим не выборочный контроль на зачете или экзамене, а сплошной контроль. Для этого требуется много учителей. Выход находится в привлечении студентов. В сильных школах в классе работает несколько учителей математики. Привлекаются сильные студенты, часто победители крупных олимпиад. Студенты с удовольствием повторяют со школьниками свое математическое детство. Отношения студентов со школьниками подобны отношениям старших братьев с младшими, в то время как отношения профессиональных учителей с учащимися подобны отношениям родителей с детьми. Присутствие в школе студентов заметно меняет атмосферу, сглаживая возрастные барьеры» –

в матклассе предполагается работа преподавателя (учителя или студента) с небольшим количеством учеников – до 6 человек. Работа студентов в классе часто начинается с их работы в качестве руководителей математического кружка с теми же школьниками. Привлечение студентов к педагогической деятельности имеет ряд преимуществ. С одной стороны, студенты перенимают ценный педагогический опыт учителя и получают дополнительные возможности для развития. С другой стороны, работа студентов значительно дешевле работы профессионального учителя (во многих случаях бесплатна или окупает только проездной билет), что позволяет обеспечить достаточное количество преподавателей на класс.

> «Сильные математические школы в своих методах и идеях ушли далеко вперед по сравнению с традициями, сохраняющимися в большинстве наших университетов. И сейчас речь не идет о том, чтобы даровать школе университетские методы работы, а скорее о том, что университетам следует присмотреться к школам и кое-что перенять» –

это утверждение можно было бы считать вызовом, эпатажем. К сожалению, авторы, особенно один из них – зав. кафедрой ведущего математического вуза, вынуждены признать справедливость этого тезиса. Парадокс состоит в том, что имея целью готовить математика-исследователя, мы основную часть времени студента и преподавателя затрачиваем не на обучение исследованию в самом исследовании и его обсуждении, а на чтение, слушание и конспектирование лекций, в лучшем случае – разбор чужих доказательств, см. выше о диалоге Кронрода и Головиной, а также – цитату из Колмогорова, где он говорит именно о «решении задач», разумеется, подразумевая не рутинные задачи из задачников, а исследовательскую математику (см. настоящий текст, конец третьего абзаца раздела «Математические школы»).

> «В программу включаются некоторые ключевые темы, которые, разумеется, не охватывают всю математику. Кроме обычных школьных тем, встречаются начала анализа, теория алгоритмов, некоторые темы высшей алгебры. Обычно лучше всего идут начала анализа – они способны надолго увлечь большинство учащихся. Но выбор тем сильно зависит от преподавателей, от их способности с глубоким интересом относиться к теме и к работе учащихся в ней». –

соображения по тому, что традиционно называется «содержанием образования» и считается критически важным, на самом деле менее важно, чем содержание в виде формирования способности к творческой математической деятельности (в том числе, как мы говорили, и программистской). Видимо, в системе, начатой в 7-й школе Кронродом и Константиновым, никогда и не было в одном классе всего, перечисленного выше. Напротив, могло статься, что в течение двух лет способные школьники, занимаясь только в классе по 6–8 часов, а еще и дома, осваивали нечто близкое к первому семестру курса математического анализа. Значит ли это, что время учащихся расходовалось не эффективно? Разумеется, нет. Ученики самостоятельно «создавали математику»: свой «персональный» математический анализ, и в процессе учились создавать любую другую, в том числе – еще не существующую математику. С учетом всего сказанного, подчеркнем, что в рамках первоначального движения математических школ были разработаны прекрасные «задачные» изложения важных разделов математики (см., например, [32, 33]) и эта работа продолжается, в том числе С. И. Комаровым и его коллегами в 179-й школе. Следующие поколения преподавателей используют существующие разработки наряду с тем, что является темой их собственных занятий в математике, и тем, что им кажется интересным. Имеющаяся практика показывает, что наиболее эффективный метод обучения – давать учащимся точно поставленные математические задачи. Нечётко поставленные задачи тоже используются, но к ним надо относиться с осторожностью.

Работал ли в математических школах фактор мотивации в виде новизны, неожиданности решения? В большой степени – да. Новизна в систематическом курсе какого-либо раздела математики для матшколы состоит в том, что «неизвестно, как это делать», и сопровождается дополнительными преимуществами – нужно удерживать большой релевантный материал и т. д.

В этом смысле и, например, традиционная геометрия годилась бы, если бы мы предложили ученикам создавать ее самим, может быть, открывая что-то в эксперименте. Но там возникла бы неприятная с внешней точки зрения и легко критикуемая ситуация: *матклас*с «прошел» за бóльшее число уроков меньше обычного класса.

Еще – о результате, точка зрения на олимпиады, высказанная еще до введения ЕГЭ:

> «Стоит отметить, что среди учителей математических классов распространено убеждение, что не следует специально готовить учеников к выступлениям на олимпиадах. Хорошее выступление на олимпиаде должно быть побочным следствием достигнутого математического уровня, а не результатом специального изучения известных типов задач и методов их решения. Это, конечно, не означает, что не нужно изучать поучительные олимпиадные задачи, содержащие полезные методы и идеи, но их нужно изучать не ради олимпиад. Сильные школьники – слишком драгоценное национальное достояние, чтобы тратить их силы и время на такую безделицу, как престиж города или страны» –

это сильное утверждение. Его смысл – в подчеркивании того, какие цели ставит перед собой ученик. Это не только не школьные отметки, но и не победы на олимпиадах. Безусловно, олимпиада мотивирует, победа на ней дает уверенность в себе, а заодно и помогает поступить в желанный вуз. Но есть и не до конца проясненный парадокс относительно высокой доли «олимпиадников» высшего уровня, которые не вышли на сравнимый уровень во «взрослой» математике, хотя есть много примеров и совпадения этих уровней.

Алексей Яковлевич Канель-Белов и Александр Кириллович Ковальджи (выпускники и энтузиасты 2-й школы, когда-то соперницы 7-й, а сегодня, возможно, соперничающей со 179-й) в своем критическом (!) рассмотрении «педагогики листков» [34] пишут: «Элементы листковой системы возникли в 1960-е годы, в частности, в Вечерней математической школе при Московском математическом обществе, созданной Е. Б. Дынкиным...». Это утверждение авторов показывает генетическую связь системы матклассов с системой кружков. И дальше:

> «Усилиями Н. Н. Константинова в Москве сложилась форма обучения в кружках по математике – листки с задачами, которые выдавались ученикам на занятиях. Каждый ученик решал эти задачи в индивидуальном темпе, а учитель проверял правильность решений, делал замечания и давал советы. Листки, как правило, бывают тематическими и рассчитаны на определенный возраст и уровень подготовки учеников. Эти листки стали накопителями идей и популярных задач, которые передавались по городам и весям, помогая всем учителям ценными наработками талантливых математиков-педагогов... При ее осуществлении сложились традиции, связанные, в частности, с большим числом проверяющих. Она позволяет начинающему преподавателю начать работать. Студенты не только помогают проводить занятие, но и образуют промежуточное звено между старшим преподавателем и учениками» [34].

«Технологическое» описание, которое авторы дают системе:

> «Формы листковой системы могут варьироваться, но, в общем и целом, она [система] заключается в следующем:
>
> 1. Учащиеся получают листки с задачами. Иногда туда включается минимум теории.

2. Решив задачу, учащийся поднимает руку, к нему подходит проверяющий.
3. Если задача решена правильно, учащемуся в ведомость вносится знак "плюс".
4. Иначе ему приходится думать дальше.
5. Имеются требования по количеству решенных задач к определенному сроку с учетом их сложности, некоторые задачи объявляются обязательными для решения» [34].

В данном описании не упомянуто, что решения задач, как правило, записываются. Обязательная запись решений позволяет избавиться от существенных проблем: с одной стороны, запись решений позволяет учащимся более ответственно относиться к обоснованию используемых утверждений, с другой стороны, регулирует попытки «сдать» решение путем многократного обращения к преподавателю (и расходу его временно́го ресурса), с третьей – позволяет преподавателю более тщательно проверять ход рассуждений.

Преподаватели, реализовывавшие данную педагогическую модель в 1990–2000-е гг., пишут: «Школьники самостоятельно решают и кратко записывают задачи — каждый в своем темпе. Ни формальных домашних заданий, ни текущих оценок нет (хотя примерно раз в полгода проводится зачет с отметкой), — а на уроке обсуждают их один на один с преподавателями. Для этого на каждом уроке присутствует команда из 4–6 преподавателей. Они же составляют листки» [35].

Одним из критериев качества системы образования можно считать возвращение выпускника в школу в качестве преподавателя: выпускники, с одной стороны, естественным образом сохраняют и продолжают традиции школы, с другой стороны, само по себе наличие у выпускников потребности вернуться в школу в новом качестве является признаком устойчивости сложившейся образовательной модели. В случае студентов педагогического вуза, серьезная работа в школе сильных студентов помогает решить многие проблемы педагогического образования – вероятность того, что такой студент, получив диплом учителя, придет работать в школу, повышается. Продуктивным было бы сотрудничество в одном классе и хороших студентов педвуза, и студентов – будущих математиков. С другой стороны, есть надежда, что и все большее количество выпускников математических факультетов университетов, приобретя во время учебы опыт математической работы, пройдя педагогическую практику в период обучения, потом выберут профессию школьного учителя.

Завершая обсуждение, стоит заметить, что работа *матшкол* и *матклассов* на протяжении прошедших десятилетий столкнулась с рядом проблем, и некоторые из них связаны именно с последовательной линией, описанной выше – воспитываемыми благодаря занятиям математикой самостоятельностью, независимостью суждений, повышенному вниманию к истине и лжи.

6. Другие источники результативного образования в российской школе

Этот раздел полностью написан А. Л. Семеновым.

Успешная и эффективная система, включающая многие черты результативного образования, была реализована в 1980-е гг. в российской школе в массовом масштабе в форме *уровневой дифференциации*. Эта система охватила порядка 1000 вполне рядовых школ и ряд предметов, а не только избранный предмет для учащихся, мотивированных к серьезному учению. Однако центральным элементом этого подхода было математическое образование.

Возникновение и актуальность уровневой дифференциации была связана с двумя важными этапами в развитии экономики и образования в стране. Первый – это становление, начиная с 1930-х гг., технологии и инженерной профессии как центрального элемента в жизни страны (включая ее оборону в биполярном мире) и ориентация школьной прагматики на инженерное дело и инженерные вузы. (Эхом стал «Спутник» в США.) Второй – это переход ко всеобщему среднему образованию в 1970-е гг., объявленный в 1966 г.

Идеологом уровневой дифференциации был Виктор Васильевич Фирсов, по образованию – математик, работавший и руководителем математического кружка для школьников, и преподавателем мехмата МГУ, и учителем школы №444 Москвы, и профессором Московского института повышения квалификации работников образования. В своей статье «О совершенствовании методической системы обучения математике» (1988 г.) [36] он пишет:

> «Традиционная методическая система складывалась в условиях, когда перед школой не стояла задача обучать всех, и главная цель среднего образования заключалась в том, что оно было ступенью к высшему. Это определяло методическую систему в целом, которая была ориентирована на максимальный уровень усвоения и рассчитана на наиболее подготовленную часть школьников. Когда среднее образование стало обязательным, указанная цель перестала быть доминирующей, однако система преподавания претерпела мало изменений. Она по-прежнему осталась направленной на то, чтобы добиваться от всех школьников максимального уровня овладения материалом, которого смогут достичь заведомо не все учащиеся. Это явилось одной из причин таких негативных явлений, как перегрузка, потеря интереса к обучению, формализм в оценке и процентомания [т. е. фальсификация реальной оценки образовательных результатов для улучшения отчетности], серьезные воспитательные издержки, падение уровня математической подготовки выпускников школы…
>
> Ориентация учебного процесса «на максимум усвоения» чрезвычайно опасна как для сильных, так и для слабых учащихся.
>
> Для сильного она нехороша тем, что мы вынуждены все время снижать уровень обучения. Кроме того, очень плохо учиться, когда рядом с тобой никто ничего не понимает. Слабый ученик просто не может учиться на максимальном уровне, у него накапливаются серьезнейшие проблемы, крайне затрудняющие последующее обучение или даже делающие его невозможным.
>
> Необходима переориентация МС [методической системы], позволяющая в каждый конкретный момент учебного процесса перед каждым учеником ставить учебные задачи уровня «посильной трудности». Именно в этом случае ученик оказывается в «зоне ближайшего развития», именно в этом случае может возникнуть эффект «победного учения», что является важнейшей предпосылкой развития интереса к учебе. Таким образом, необходима перестройка МС на основе уровневой дифференциации учебных требований, предъявляемых школьнику, и обеспечения постепенности в движении школьника по этим уровням.
>
> Отметим, что отсутствие гарантированного уровня подготовки школьника на выходе из практически каждой ступени обучения является важнейшим недостатком сложившейся МС. Следствием этого является невозможность опереться на следующей ступени на твердый фундамент математической подготовки школьников. Решение указываемой здесь проблемы по отношению к школьному курсу математики имеет особое значение. Успешное изучение математики возможно только при условии, если на каждой ступени обучения ученик достигает определенного, опорного уровня подготовки.
>
> Исследования показывают, что в настоящее время важнейшими опорными умениями не овладевают до 60% школьников. Поэтому возникает проблема обеспечения

достижения всеми учащимися уровня обязательной математической подготовки как важнейшего направления совершенствования МС.

Учитывая сложившуюся в школе ситуацию, первоочередным направлением реализации уровневой дифференциации учебных требований следует признавать выделение уровня обязательной подготовки и ориентацию учебного процесса на первоочередное достижение этого уровня всеми учащимися с одновременным созданием условий для более продвинутой реализации математических способностей и дарований. Иными словами, дифференциация учебных требований должна осуществляться на основе обязательных результатов обучения» [36].

В статье «Методика обучения математике как научная дисциплина» (2005 г.) В. В. Фирсов пишет:

> «Важнейшим проявлением специфики общего математического образования является оригинальное целеполагание, в котором формальные цели образования (воспитание и развитие ребенка) выступают наравне с реальными (усвоение математического содержания, умений применять математику к решению прикладных задач). Образно говоря, математику в школе изучают не только и, возможно, не столько ради усвоения собственно математики. Культурное значение школьного математического образования оказывается сопоставимым с культурным значением самой математической науки» [37].

Касаясь общих проблем системы образования, В. В. Фирсов писал в статье «Единая и многообразная» (1989 г.):

> «Стремление наполнить головы учащихся все возрастающим объемом полезной информации выглядит нелепым на фоне реализации остаточного принципа в усвоении учебного материала. Мы можем быть относительно уверены лишь в качестве общеобразовательной подготовки отличника, тогда как про остальных известно только одно — они не полностью усвоили предложенный материал. А поскольку, образно говоря, «четверка за Лермонтова» полностью закрывает «двойку за Пушкина», то относительно подавляющего большинства выпускников школы нельзя определенно сказать, что же они в действительности знают и умеют.
>
> Преимущественное внимание к объему информации, которую должен усвоить ученик, — подход методологически несостоятельный, так как абсолютизирует значение памяти в ущерб умениям самостоятельно действовать, принимать решения, приобретать недостающую информацию путем самообразования.
>
> Уровень обязательной общеобразовательной подготовки — это «сумма знаний», предназначенных для изучения в школе. В идеале он должен представлять собой образцы деятельности (в том числе деятельности самообразования), подлежащие обязательному освоению детьми, что отвечает деятельностному подходу, развиваемому отечественной психолого-педагогической наукой» [38].

Предложенные в уровневой дифференциации принципы, несмотря на относительно широкую реализацию в ряде регионов России, оказали непрямое и, к сожалению, недостаточно сильное влияние на более широкую образовательную практику и политику в сфере образования (см. например, [39]).

Система Фирсова была серьезной попыткой перестроить школу «изнутри», используя уже существующие в школе и обществе стереотипы и ориентиры, вводя при этом просто формулируемые и однозначно понимаемые технологии. Другим подходом, намного более гибким, со всеми присущими гибкости плюсами и минусами, стала *учебно-исследовательская деятельность учащихся* [40]. Идея этого подхода основывается на следующих положениях:

- исследовательская деятельность, интерес к миру присущи человеку с рождения;
- исследовательская деятельность – необходимая часть жизни современного человека;
- исследовательская деятельность ученика дает ему мощную мотивацию в освоении конкретного содержания, является важным источником осознания больших идей и формирования личностных качеств;
- ресурсы времени и энергии ученика могут быть получены за счет снижения затрат на формирование рутинных механических навыков и заучивание знаний.

Учебно-исследовательская деятельность, дополняющая «основную образовательную программу», распространена в тысячах школ России. В некоторых из них, например, в московской школе 1553 им. В. И. Вернадского [41], она успешно интегрируется с более стандартными подходами в освоении школьных предметов. Эта деятельность нашла вполне адекватное отражение во ФГОС. Ясно, что рассматриваемые выше практики матшкол часто включают в себя подлинные и ценные образцы учебно-исследовательской деятельности. Остается только заметить, что с «предметной» точки зрения учебно-исследовательская деятельность, как правило, шире любого предмета – она органично захватывает и многие школьные дисциплины, и многие стороны жизни. Подробнее она рассмотрена в уже упоминавшейся книге А. С. Обухова [40], где можно найти дополнительные ссылки. Наконец, говоря о развитии линии «связи школы с жизнью» в сфере цифровых технологий, естественно упомянуть российские лицеи информационных технологий, прежде всего московский ЛИТ №1533 [42], программистские проекты школьников которого реализуются в сотрудничестве с профессиональными программистами ведущих ИТ-компаний.

7. Заключение. Перспективы

Авторы настоящей работы знакомы более 55 лет. Знакомство их началось, когда Семенов пришел на кружок Константинова в Зоологическом музее МГУ, а потом – учеником в 9-й класс московской 7-й школы. 50 лет назад началась наша совместная работа в 7-й школе, включающая создание листков для всех учащихся класса, как результат печати 4–5 закладок на пишущей машинке «Эрика», которая брала 6–7 копий на тонкой бумаге (ср. [43]).

В конце 1985 года, благодаря академику Е. П. Велихову, была предпринята попытка создать новую модель образования для страны в рамках большого проекта ВНТК «Школа-1» АН СССР. «Взрослая» исследовательская деятельность работников Академии наук, вузов и еще сильных к тому моменту предприятий военно-промышленного комплекса страны, с одной стороны, и модель математических кружков и *матшкол,* с другой стороны, стали основой такого построения. Краткое изложение нашего взгляда того времени видно из тезисов доклада Константинова на семинаре ВНТК, сохранившихся в архиве А. П. Ершова [44]. Среди тезисов этого доклада: переход от отметки к обратной связи, важность ресурса времени учащегося, персонализация как инструмент значительного индивидуального прогресса «слабого» ученика, принципиальная важность участия математиков – студентов и профессионалов – в работе с учащимися, практически подтвержденная устойчивая тиражируемость модели маткласса, несмотря на ее «инородность» для современной школы.

В проекте ВНТК второй автор данного текста вместе с Анной Константиновной Поливановой выступил инициатором разработки системы математического образования для начальной школы, взявшей за основу разъясненные выше принципы: тщательность, неторопливость и самостоятельность. При этом:

- существенно расширен круг базовых математических объектов: цепочки и мешки символов сделали наглядными математические построения, их анализ и нахождение ошибки;

- особое внимание было уделено логике и языку;
- принципиальным является самостоятельное открытие учеником того, что традиционно предлагается от лица какого-то авторитета: десятичной системы счисления, таблиц сложения и умножения, правил древнерусского языка и т. д.;
- расширился класс решаемых задач, в том числе, за счет задач перебора, построения цепочки или иного объекта по условиям, построения алгоритма и стратегии в игре.

Все это позволило приблизить реализацию нашей системы к принципам результативного образования. Экспериментальную реализацию создаваемой системы вела Елена Игоревна Булин-Соколова в начальных классах московской школы № 57 – школы-лаборатории ВНТК «Школа-1». Эта работа вылилась в ряд линий учебников для начальной школы [45, 46].

Существенным для работы ВНТК была и общая парадигма учебно-исследовательской деятельности учащихся, и контакты с мировым образованием через Благовеста Сендова (Болгария), и знакомство с практикой конструкционизма Симора Паперта [47, 48].

20 лет назад наша непосредственная совместная работа продолжилась, когда Семенову удалось воссоздать 179-ю школу в качестве части вуза (Московского института открытого образования, ректором которого он был) именно как «Школы Константинова», а Константинов вернулся в нее преподавать.

Выросшие из традиций кружков и *матшкол,* принципы результативного образования в XXI веке востребованы именно как характеристики *массового образования.* Сегодня становится понятным, что:

- Массовое математическое образование может быть выстроено как система разнообразных мотивирующих задач, посильно трудных для каждого школьника. Новизна в курсе для массовой школы будет обеспечиваться сразу заметным разнообразием тем, которые можно брать из задач «на смекалку» всех веков, из олимпиад, из программирования (которое сегодня посильно и воспитанникам детского сада [49, 50]).
- Математическое образование для учащихся, ориентирующихся на современную, высокотехнологичную цифровую экономику, должно учитывать потребности этой экономики, где математика неразрывна с цифровыми технологиями. В этом потоке должно выделяться направление ИТ-специализации, включающее серьезное программирование.
- Математическое образование для детей, которые, вероятно, выберут карьеру математика-исследователя, должно ориентироваться на формирование модели математической деятельности. Это может быть построено по-разному в разных школах и классах, с учетом наиболее актуальных сегодня направлений математических исследований, но в первую очередь – с учетом наличия проработанных курсов на задачной основе или ориентиров для их построения. Наличие компьютерной поддержки, соответствующих средств эксперимента, автоматизации доказательства и т. п. в течение ближайших нескольких лет может не быть обязательным.

Такая структура образования должна отражаться и в системе набора в вузы, в случае продолжения линии ЕГЭ – в ЕГЭ по математике и информатике. При этом в последнее десятилетие развитие ЕГЭ шло фактически в направлении сужения разнообразия заданий, подготовки («натаскивания») выпускников на конкретные, узко очерченные виды заданий. Введение базового и профильного уровней мало изменило ситуацию. Введение третьего варианта экзамена в соответствии с указанными выше тремя группами детей представляется, к сожалению, мало реальным.

Альтернативой для всего математического образования может быть смена приоритетов для целей, признание того, что важнейшей задачей школьной математики является подготовка человека к решению неожиданных задач, и, значит, задания ЕГЭ должны обладать высокой степенью неожиданности. Гипотетически можно предположить, что если задания берутся из открытого банка, где есть, например, 100 тыс. заданий, то какой-то выпускник при подготовке к экзамену решит их все. Ну что же, в таком случае придется смириться: хотя для этого ученика на ЕГЭ неожиданностей не было, но он хотя бы блестяще освоил все детали школьного курса и в вуз его стоит принять.

Более серьезная трансформация математического образования может быть связана с основным изменением в жизни человечества за последние сто лет – цифровой революцией. Эту революцию можно назвать и революцией искусственного интеллекта, поскольку в существенной степени она состояла именно в передаче искусственным средствам – компьютерам – многих функций интеллекта человека: сначала более рациональной его части, как функции точных вычислений и точного написания слов, потом и более интуитивной, как распознавание лиц или игра го. Представим себе, что ученик в школе самостоятельно, но с помощью учителя и эксперимента (с компьютером или без) открывает важнейшие факты и алгоритмы математики, например, десятичную систему счисления, алгоритм умножения столбиком (желательно в более удобной, исходной форме индусов и Фибоначчи), формулу корней квадратного уравнения, теорему Пифагора и т. д. В дальнейшем ему может понадобиться то, что он – ученик – открыл. Тогда он, как и все человечество, использует соответствующий компьютерный инструмент арифметических вычислений или решения уравнений и т. д. В этой ситуации, ученик сможет:

- используя на экзамене компьютер, показать результаты не хуже, чем хороший выпускник сегодня;
- в течение срока обучения решать задачи намного более неожиданные и разнообразные, чем сегодня;
- сохранить интерес к математике и готовность ее применять в жизни, набрать опыт такого применения.

Принципы результативного образования легли в основание работ по реализации идей персонализированного компетентностного подхода и развития навыков XXI века. В 2017 г. А. Л. Семенов получил от Германа Оскаровича Грефа предложение возглавить проект по теоретической разработке и проектированию реализации этих принципов, включая функции цифровой платформы, поддерживающей реализацию результативного образования. К лету 2018 г. разработка основных концептуальных положений была вчерне завершена и начался этап реализации.

Мы надеемся, что сегодня уже началось становление новой традиции в нашей стране в условиях реальности, которая только предвиделась А. Н. Колмогоровым, А. С. Кронродом, В. В. Фирсовым.

8. Основные положения результативного образования

Этот раздел полностью написан А. Л. Семеновым.

В настоящее время в российском образовании формируется подход к общему образованию, основанный на системе принципов, которую можно описать одним термином «результативное образование». Вот, в кратком изложении, эти принципы:

1. Результатом образования является способность, умение, желание применить то, что ты в образовании приобрел. Это применение возможно и внутри самого изучаемого предмета, но оно также ценно в других областях и в жизни. Наиболее эффективным способом

достижения результата является именно его применение параллельно с достижением (*fabricando fabricamur,* т. е. «учиться в деятельности» – Ян Коменский).

2. Ценным для применения сегодня и в обозримом будущем являются не конкретные знания-умения-навыки, а общие способы действий, способность знания находить, а умения и навыки приобретать. В процессе учения – достижения указанного результата – решаются конкретные задачи. При решении постепенно осознаются большие идеи, позволяющие ориентироваться в мире, и осваиваются способы действий, применимые в учении и в жизни за пределами области решаемых задач.

3. Планируемые результаты образования, иначе, короче говоря – цели, формулируются учеником совместно со школой и родителями. Ценным является участие и других заинтересованных сторон (например, местных предприятий, вузов) в формировании целей. Цели организованы иерархически, подчиненные цели складываются в более общие. Цели постепенно становятся все более понятны ученику: сначала крупные и близкие, потом все более детальные и далекие. Для достижения какой-то цели бывает необходимо достичь каких-то предыдущих. Среди целей могут быть и находящиеся за пределами школы, данного уровня образования и образования вообще – жизненные цели.

4. Для каждой цели возможны разные степени ее достижения. При планировании выбираются и цели, и степень достижения каждой. Цели, относящиеся к одной предметной области или к разным, но связанные одна с другой, планируются с согласованными степенями их достижения. Минимальная степень достижения цели определяется образовательным стандартом и государственной итоговой аттестацией.

5. К важным целям образования относится формирование способности, умения и желания решать неожиданные, новые задачи (преадаптивность, по А. Г. Асмолову [2]) и продолжать учиться.

6. Цель достигается в результате выполнения цепочки заданий, задания могут быть в том числе и проектными, с открытой, неточной формулировкой. Ее уточнение, как и выбор отдельных заданий из числа предложенных, может осуществлять ученик.

7. Выполняемые задания интересны, посильно трудны для ученика, находятся в зоне его ближайшего развития. Возникающие по ходу решения проблемы мотивируют ученика и помогают формированию модели обращения к учителю, со-ученику, эксперту за помощью.

8. Ученик сам понимает, удалось ли ему выполнить задание и насколько успешно. Ему в этом понимании помогает учитель, а также внешние наблюдения. Например, модель корабля может утонуть или плыть, программа может выдать желаемый результат или зациклиться. Это, наряду с поддержкой взрослого, является стимулом для ученика, а еще более – возможностью применить результаты учения в действии. Наряду с внешним, видимым другими, результатом выполнения задания, ученик осознает и внутренний результат образования.

9. Реакция учителя на работу (выполнение задания) учеником – обратная связь – бывает содержательным обсуждением достигнутого результата, советом, что и как можно улучшить (если такое улучшение имеет смысл), «по умолчанию» содержит элемент поддержки. Порожденное такой реакцией улучшение работы может быть не менее ценно, чем сама работа, в частности потому, что оно отражает общее умение ученика воспринимать внешнюю реакцию. Оценивание, в частности выражаемое отметкой, имеет подчиненную роль и может не использоваться вовсе. При этом среди целей может иметься

и получение внешней отметки, скажем, нужного для поступления в вуз «балла ЕГЭ». Такая цель также может планироваться.

10. Каждая цель, запланированная учеником, им в итоге достигается в запланированной степени (возможно, после цепочки улучшений). При формулировании и достижении внешних целей может быть предусмотрен индивидуальный диапазон: «надежный минимум – желательный оптимум – реально возможный максимум». Естественно, что целью не должна быть обязательно «пятерка», а может быть «зачет», соответствие обязательному минимуму.

11. Поддержание и развитие мотивации ученика к учению является важной задачей участников образовательного процесса. К средствам решения этой задачи относятся: участие ученика в выборе целей и их понимание; выбор конкретной задачи из предлагаемого поля выбора и выбор способа ее решения; решение разнообразных неожиданных, непривычных задач; наличие связей и системность, достраивание больших идей; содержательная обратная связь и поддержка достижений, ощущение прогресса; реальное значимое участие в жизни вне школы как часть образовательного процесса; установка на рост; целостное позитивное отношение к ученику и его будущему со стороны других.

12. Ресурсными ограничениями, в которых идет образовательный процесс, являются (в порядке важности):

    - рабочее время, затрачиваемое учеником на работу над заданием (самостоятельно или вместе с другими);
    - календарное время, за которое учащимся достигается цель;
    - суммарное рабочее время, затрачиваемое учителем.

    Важным, тонким и сложным ресурсом ученика, который должна учитывать школа, является его психофизиологическое здоровье и главное – желание учиться, на сохранение и развитие которого, в частности, направлена система результативного образования.

13. Для каждого задания исходно планируется необходимое для выполнения этого задания время. При принятии задания учеником планируемое время может уточняться с учетом специфики ученика.

14. При планировании учебного процесса в группе учащихся школа осуществляет календарное планирование достижения целей, общих для всех учащихся группы. Для каждого учащегося планируется степень достижения цели и рабочее время на выполнение каждого задания. Кроме того, планируется время, затрачиваемое учителем на обратную связь и иную работу с учащимся и группой.

15. Планируемое суммарное (по всем видам участия в образовательном процессе) рабочее время ученика должно удовлетворять ресурсному ограничению ежедневной, недельной и годовой нагрузки. То же – для учителя.

16. Время, реально затрачиваемое учеником на работу с заданием, фиксируется им самим, в том числе – автоматически, с возможной помощью других.

17. Выявляющееся несоответствие реально затрачиваемого в предмете времени запланированному (перегрузка и недогрузка) рассматривается участниками образовательного процесса. Перегрузка подлежит скорейшей корректировке, включая помощь в концентрации, организации работы и режима дня, изменение внешней среды (в том числе – со

стороны родителей), перераспределение времени между разными предметами, изменение степени достижения целей в предмете, изменение образовательной и иной нагрузки вне школы. Недогрузка также может привести к корректировке планов, в частности, появлению дополнительных целей, не входящих в систему целей, общую для всей группы (класса), в том числе – целей в системе дополнительного образования или продуктивной деятельности.

18. Материальное и информационное пространство школы, ее уклад должны предоставлять ученику пространство выборов, содействовать осуществлению выбора, желательного для общества.

19. Участники образовательного процесса предпринимают усилия для достижения родителями понимания и их участия в формировании уклада и работы школы, индивидуальной системы целей ребенка и хода его учения, смысла обратной связи.

20. Успех школы измеряется как признаваемое родителями и учениками достижение всеми учениками всех запланированных целей и соблюдение ресурсных ограничений. Каждый учитель и школа в целом постоянно учится, организует взаимодействие, включая обратную связь, между всеми участниками образовательного процесса.

При существующих сейчас в российской школе условиях реальность описанной системы во многом зависит от полноценного использования цифровой платформы учения, что, в свою очередь, требует использования цифровых средств учебной деятельности, начиная с редактора текстов и инструментов работы с математическими объектами и кончая аудио- и видеозаписью занятий.

Есть надежда, что многолетняя, воспроизводимая модель *матшкол* допускает распространение на другие области российского образования:

(a) на математическое образование не только высокомотивированных учащихся старших классов, но и всех школьников;

(b) не только на математическое образование, но и на все общее образование.

Выше были приведены (частичные) аргументы в пользу такой возможности. Для (a) – это олимпиада «Кенгуру» Башмакова, для (b) – это уровневая дифференциация В. В. Фирсова и учебно-исследовательская деятельность [40]. При этом мы считаем, что такое распространение может соответствовать принципам результативного образования.

9. Благодарности

Мы благодарны Е. П. Велихову, Л. П. Кезиной, Г. О. Грефу: их видение будущего образования запускало работу; директорам школ А. Б. Волкову, С. Л. Менделевичу, П. А. Якушкину, которые брали на себя ответственность за всех участников образовательного процесса, создавших модель маткласса.

Благодарим Благотворительный фонд СберБанка «Вклад в будущее», который поддержал работу коллег А. Л. Семенова по проектированию работы над цифровой платформой учения и реализации результативного образования на ней. Благодарим В. Кондратьева за участие в создании первого варианта текста и полезное обсуждение, А. С. Обухова, многолетняя практика которого и конкретные замечания были существенны при работе над статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кукулин И., Майофис М., Сафронов П. (ред. и сост.). Острова утопии. Педагогическое и социальное проектирование послевоенной школы (1940—1980-е) // Библиотека журнала «Новое литературное обозрение», серия «Неприкосновенный запас». Москва, 2015. – 695 с.

2. Асмолов А. Г., Шехтер Е. Д., Черноризов А. М. Преадаптация к неопределенности как стратегия навигации развивающихся систем: маршруты эволюции // Вопросы психологии, 2017. №4. — С. 3–26.

3. Ланков А. В. К истории развития передовых идей в русской методике математики. Пособие для учителей // Учпедгиз, Москва, 1951. – 152 с. [Электронный ресурс] `http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&paperid=452&option_lang=rus` (дата обращения 25 января 2020 г.).

4. Калягин Ю. М. Школьный учебник математики: вчера, сегодня завтра // Математическое образование, 2006, вып. 3(38). — С. 2—8. [Электронный ресурс] `http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paperjrnid=mopaperid=452optionlang=rus` (дата обращения 25 января 2020 г.).

5. Гурьев П. С. Руководство к преподаванию арифметики малолетним детям // Сост. П. С. Гурьев. — Ч. 1—2. СПб.: Типография К. Вингебера, 1839–1842. [Электронный ресурс] URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_003823712/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

6. Гурьев П. С. Арифметические листки, постепенно расположенные от легчайшего к труднейшему, содержащие в себе 2523 задачи с решениями оных и кратким руководством к исчислению // СПб.: Императ. Акад. наук, 1832. – 345 с. (Сочинение напечатано на отдельных листках.) Небольшие фрагменты книги факсимильно воспроизведены в: Гурьев П. С. Арифметические листки // Матем. обр., 2007, (40). – С. 32–48.

7. Гурьев П. С. Ключ к арифметическим листкам // СПб.: Императ. Акад. наук, 1832. – 74 с.

8. Гурьев П. С. Практическая арифметика // СПб. : Я. А. Исаков, 1861. – 336 с. + Ключ к практической арифметике. – 31 с.

9. Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков // М.: Учпедгиз, 1956. — 640 с.

10. Гурьев П. С., Дмитриев А. Д. Практические упражнения в геометрии, или собрание геометрических вопросов и задач с их ответами и решениями. Часть 1. Вопросы и задачи // СПб. : тип. К. Жернакова, 1844. – 227 с.

11. Арнольд И. В. Принципы отбора и составления арифметических задач // Известия АПН РСФСР, 1946, выпуск 6. – С. 8–28. [Электронный ресурс] `https://math.ru/lib/files/iva46.htm` (дата обращения 25 января 2020 г.).

12. Хинчин А. Я. О так называемых «задачах на соображение» в курсе арифметики // Матем. просв., сер. 2, 1961, вып. 6. – С. 29–36. [Электронный ресурс] `http://www.mathnet.ru/links/1dadcfc44070522feb21bd52fe3e9c4c/mp677.pdf` (дата обращения 25 января 2020 г.).

13. Депман И. Я. История арифметики. Пособие для учителей // М.: Учпедгиз, 1959. – 424 с.

14. Propositiones ad Acuendos Juvenes. // Страница Википедии. [Электронный ресурс] https://ru.wikipedia.org/wiki/Propositiones_ad_Acuendos_Juvenes (дата обращения 25 января 2020 г.).

15. Alcuin Singmaster D. Problems to Sharpen the Young: an Annotated Translation of Propositiones Ad Acuendos Juvenes, the Oldest Mathematical Problem Collection in Latin // South Bank University, 1995.

16. Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В., Потапов М. К. Старинные занимательные задачи // М.: Дрофа, 2006. – 176 с.

17. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии. Книга для семьи и школы // С.-Петербург, 1908. – 275 с.

18. Перельман Я. И. Занимательная физика. Кн. 1, 2 // Санкт-Петербург : П. П. Сойкин, 1913–1916.

19. Перельман Я. И. Веселые задачи: 101 головоломка для юных математиков // Петроград : тип. т-ва А. С. Суворина, 1916. – 158 с.

20. Люстерник Л. А. Молодость Московской математической школы. // УМН, 1967, т. 22, вып. 4(136). – С. 147–185 (дата обращения 25 января 2020 г.). [Электронный ресурс] http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=5779&option_lang=rus

21. Леман А. А. (сост.). Сборник задач московских математических олимпиад // Ред. В. Г. Болтянский. М.: Просвещение, 1965. — 384 с.

22. Шклярский Давид Осипович // Сайт math.ru, раздел «История математики». // [Электронный ресурс] https://math.ru/history/people/shklyarskiy (дата обращения 25 января 2020 г.).

23. Ченцов Н. Н., Шклярский Д. О., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра // Сер. «Библиотека математического кружка», вып. 1. М.: Наука, 1976. — 384 с. — 100 000 экз., 6 изданий: 1950, 1954, 1959, 1965, 1976 и 2001 гг.

24. Малый мехмат МГУ. Архив листков // [Электронный ресурс] http://mmmf.msu.ru/archive/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

25. Кенгуру. Математика для всех. Конкурсы для школьников // [Электронный ресурс] https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru (дата обращения 25 января 2020 г.).

26. Башмаков М. И. У истоков ЮМШ // Сб. «Из истории МатМеха», 15 октября 1996 г. [Электронный ресурс] http://dm47.com/sbornik_iimm_bashmakov.html (дата обращения 25 января 2020 г.).

27. Шварцбурд С. И. О математической специализации в средней школе // Успехи математических наук, 1966, Т. 21, №. 1 (127). – С. 205–214.

28. Шварцбурд С. И. (сост.). Линейная алгебра и геометрия // АПН РСФСР, Ин-т общ. и политехн. образования, сер. «Проблемы математической школы». М. : Просвещение, 1967. – 366 с.

29. Ландис Е. М., Яглом И. М. Об Александре Семеновиче Кронроде // УМН, 56:5(341), 2001. – С. 191–201.

30. Кронрод А. С. Беседы о программировании // Предисл. Л. А. Кронрод. Послесл. В. Л. Арлазарова. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 248 с.

31. Константинов Н. Н. Российские математические классы // Тезисы всероссийского съезда учителей математики в московском университете, 2010. [Электронный ресурс] https://mccme.ru/teachers/articles/russmath.htm (дата обращения 25 января 2020 г.).

32. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Толпыго А. К. Математические задачи // Серия «Библиотечка физико-математической школы. Математика», вып. 1*. М.: Наука, 1965. – 80 с.

33. Гельфанд С. И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по элементарной математике. Последовательности. Комбинаторика. Пределы // Сер. «Библиотечка физико-математической школы», вып. 3. М.: Наука, 1965. – 176 с.

34. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Занятия по математике – листки и диалог // Математическое Просвещение, 3 серия: 19, 2015. – С. 206–235. [Электронный ресурс] https://www.mccme.ru/free-books/matpros/pdf/mp-19-kk.pdf (дата обращения 25 января 2020 г.).

35. Голенищева-Кутузова Т. И., Казанцев А. Д., Кудряшов Ю. Г., Кустарёв А. А., Мерзон Г. А., Ященко И. В. Элементы математики в задачах с решениями и комментариями. Часть 1 // М.: МЦНМО, 2010. – 248 с. [Электронный ресурс] https://mccme.ru/free-books/yaschenko/v08book-08.pdf (дата обращения 25 января 2020 г.).

36. Фирсов В. В. О совершенствовании методической системы обучения математике // 1988. Опубл. в сб. «Учим математикой», М.: Просвещение, 2012. – С. 136–142. [Электронный ресурс] https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p136/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

37. Фирсов В. В. Методика обучения математике как научная дисциплина // 2005. Опубл. в сб. «Учим математикой», М.: Просвещение, 2012. – С. 160–172. [Электронный ресурс] https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p160/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

38. Фирсов В. В. Единая и многообразная // 1989. Опубл. в сб. «Учим математикой», М.: Просвещение, 2012. – С. 142–147. [Электронный ресурс] https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p142/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

39. Логинова О. Б. (сост.). Уровневая дифференциация обучения // Сб. статей. Моск. департамент образования, М.: Науч.-пед. об-ние «Образование для всех», 1994. – 125 с.

40. Обухов А. С. Развитие исследовательской деятельности учащихся // 2-е изд., перераб. и доп. М.: Национальный книжный центр, 2015. – 288 с.

41. ГБОУ города Москвы «Школа № 1553 имени В. И. Вернадского. [Электронный ресурс] https://lycu1553.mskobr.ru/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

42. Содружество Лицея № 1533 (информационных технологий). [Электронный ресурс] https://www.lit.msu.ru/ (дата обращения 25 января 2020 г.).

43. Галич А. Мы не хуже Горация // 1966. [Электронный ресурс] http://www.bards.ru/archives/part.php?id=4132 (дата обращения 25 января 2020 г.).

44. Константинов Н. Н. Опыт матклассов школ №7, 57, 91 и 179 (1962–1986 гг.) с точки зрения ВНТК // Тезисы выступления на семинаре ВНКТ под рук. академика Е. П. Велихова 19 марта 1986 г. Архив академика А. П. Ершова. [Электронный ресурс] http://ershov-arc.iis.nsk.su/archive/eaimage.asp?fileid=207596 (дата обращения 25 января 2020 г.).

45. Рудченко Т. А., Семенов А. Л. Информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники, рабочие тетради, тетради проектов, поурочные разработки для каждого года обучения) для общеобразоват. организаций // М.: Просвещение, ИНТ, 2011–2012. Серия «Перспектива».

46. Семенов А. Л., Посицельская М. А., Посицельский С. Е., Рудченко Т. А. и др. Математика и информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники и задачники) для общеобразоват. организаций // М.: МЦНМО, ИНТ, 2012–2019.

47. Семенов А. Л. Симор Паперт и мы. Конструкционизм – образовательная философия XXI века // Вопросы образования, № 1, 2017. – С. 269–294. ISSN 1814-9545.

48. Papert S. Письмо академику А. П. Ершову от 22 июня 1988 г. // Архив академика А. П. Ершова (дата обращения 25 января 2020 г.). [Электронный ресурс] http://ershov-arc.iis.nsk.su/archive/eaimage.asp?l20ang=1&did=38546&fileid=206979.

49. Стартовая страница проекта «ПиктоМир» на сайте ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН. [Электронный ресурс] https://www.niisi.ru/piktomir (дата обращения 25 января 2020 г.).

50. Бетелин В. Б., Кушниренко А. Г., Леонов А. Г. Основные понятия программирования в изложении для дошкольников // Информатика и ее применения, 2020, т. 14. Вып. 3. – С. 55–61.

REFERENCES

1. Alcuin, Singmaster D. 1995, *Problems to Sharpen the Young: an Annotated Translation of Propositiones Ad Acuendos Juvenes, the Oldest Mathematical Problem Collection in Latin,* South Bank University.

2. Arnold, I. V. 1946, “Printsipy otbora i sostavleniya arifmeticheskih zadach – Principles of selection and compilation of arithmetic problems“, *Izvestiya APN RSFSR,* 6, pp. 8–28. Available at: https://math.ru/lib/files/iva46.htm (accessed 25 December 2020).

3. Asmolov, A. G., Shehter, E. D., Chernorizov, A. M. 2017, “Preadaptatsiya k neopredelyonnosti kak strategiya navigatsii razvivayushchihsya sistem: marshruty evolyutsii – Preadaptation to uncertainty as a navigation strategy for developing systems: routes of evolution“, *Questions of psychology,* 4, pp. 3–26.

4. Bashmakov, M. I. 1996, *U istokov YuMSh – The origins of Junior Math School,* Proc. “From the history of Mathematics“, Oct. 15, 1996. Available at: http://dm47.com/sbornik_iimm_bashmakov.html (accessed 25 December 2020).

5. Betelin, V. B., Kushnirenko, A. G., Leonov, A. G. 2020, “Osnovnyye ponyatiya programmirovaniya v izlogenii dlya doshkolnikov – Basic concepts of programming expanded for preschoolers“, *Informatics and Applications,* v. 14, issue 3, pp. 55–61.

6. Chentsov, N. N., Shklyarsky, D. O., Yaglom, I. M. 1976, *Izbrannye zadachi i teoremy elementarnoj matematiki. Arifmetika i algebra – Selected problems and theorems of elementary mathematics. Arithmetic and Algebra,* “Library of the Mathematical circle“ series, issue 1. Moscow: Nauka, 384 pp.

7. Depman, I. Ya. 1959, *Istoriya arifmetiki. posobiye dlya uchitelej – History of arithmetic. Manual for teachers,* Moscow: Uchpedgiz, 424 pp.

8. Dynkin, E. B., Molchanov, S. A., Rozental, A. L., Tolpygo, A. K. 1965, *Matematicheskiye zadachi – Math problems,* “Library of physico-mathematical school. Mathematics“ series, issue 1*. Moscow: Nauka, 80 pp.

9. Firsov, V. V. 1988, *O sovershenstvovanii metodicheskoj sistemy obuchenija matematike – On improving the methodological system of teaching mathematics,* Publ. in: “Teaching by mathematics“, Moscow: Prosveshchenie, pp. 136–142. Available at: `https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p136/` (accessed 25 December 2020).

10. Firsov, V. V. 1989, *Edinaya i mnogoobraznaya – Unified and diverse,* Publ. in: “Teaching by mathematics“, Moscow: Prosveshchenie, pp. 142–147. Available at: `https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p142/` (accessed 25 December 2020).

11. Firsov, V. V. 2005, *Metodika obucheniya matematike kak nauchnaya distsiplina – Methods of teaching mathematics as a scientific discipline,* Publ. in: “Teaching by mathematics“, Moscow: Prosveshchenie, pp. 160–172. Available at: `https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p160/` (accessed 25 December 2020).

12. Galich, A. 1966, *My ne huzhe Goratsiya – We're as good as Horace,* Available at: `http://www.bards.ru/archives/part.php?id=4132` (accessed 25 December 2020).

13. *GBOU goroda Moskvy “Shkola №1553 imeni V. I. Vernadskogo“ – Moscow School “School no. 1553 named after V. I. Vernadsky“* Available at: https://lycu1553.mskobr.ru/ (accessed 25 December 2020).

14. Gelfand, S. I., Gerver, M. L., Kirillov, A. A., Konstantinov, N. N., Kushnirenko, A. G. 1965, *Zadachi po elementarnoj matematike. Posledovatelnosti. Kombinatorika. Predely – Problems in elementary mathematics. Sequences. Combinatorics. Limits,* “The library of a school of physics and mathematics“ series, vol. 3. Moscow: Nauka, 176 pp.

15. Golenishcheva-Kutuzova, T. I., Kazantsev, A. D., Kudryashov, Yu. G., Kustaryev, A. A., Merzon, G. A., Yashchenko, I. V. 2010, *Elementy matematiki v zadachah s resheniyami i kommentariyami. Chast 1 – Elements of mathematics in problems with solutions and review. Part 1,* Moscow, MCCME, 248 pp. Available at: `https://mccme.ru/free-books/yaschenko/v08book-08.pdf` (accessed 25 December 2020).

16. Gurjev, P. S. 1832, *Arifmeticheskiye listki, postepenno raspolozhennyye ot legchaishego k trudnejshemu, soderzhashchiye v sebe 2523 zadachi s resheniyami onyh i kratkim rukovodstvom k ischisleniyu – Arithmetic sheets, gradually arranged from the easiest to the most difficult, containing 2523 problems with solutions to them and a brief guide to calculus,* St. Petersburg: Imperat. Acad. of Sciences, 345 pp. (The essay is printed on separate sheets.) Small fragments

of the book are facsimile reproduced in: Guryev P. S. “Arithmetic sheets“, *Math. education,* 2007, 40, pp. 32–48.

17. Gurjev, P. S. 1832, *Kluch k arifmeticheskim listkam – The key to the arithmetic sheets,* St. Petersburg: Imperat. Acad. of Sciences, 74 pp.

18. Gurjev, P. S. 1839–1842, *Rukovodstvo k prepodavaniyu arifmetiki maloletnim detyam – A guide to teaching arithmetic to young children,* Comp. by P. S. Guryev. Parts 1-2. St. Petersburg: Printing house of K. Wingeber. Available at: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_003823712 (accessed 25 December 2020).

19. Gurjev, P. S. 1861, *Prakticheskaya arifmetika – Practical arithmetic,* St. Petersburg : Ya. A. Isakov, 336 pp. + Kluch k prakticheskoj arifmetike – The key to the practical arithmetic, 31 pp.

20. Gurjev, P. S., Dmitriev, A. D. 1844, *Prakticheskiye uprazhneniya v geometrii, ili sobranije geometricheskih voprosov i zadach s ih otvetami i resheniyami. Chast 1. Voprosy i zadachi – Practical exercises in geometry, or a collection of geometric questions and problems with their answers and solutions. Part 1. Questions and tasks,* St. Petersburg: K. Zhernakov typ., 227 pp.

21. Hinchin, A. Ya. 1961, “O tak nazyvaemyh ‘zadachah na soobrazheniye‘ v kurse arifmetiki – About the so-called 'problems for consideration' in the course of arithmetic“, *Math. prosv.,* ser. 2, vyp. 6, pp. 29–36 (accessed 25 December 2020) Available at: http://www.mathnet.ru/links/1dadcfc44070522feb21bd52fe3e9c4c/mp677.pdf.

22. Ignatiev, E. I. 1908, *V carstve smekalki, ili Arifmetika dlya vseh: opyt matematicheskoj hrestomatii. Kniga dlya semji i shkoly – In the realm of wit, or Arithmetic for all: the experience of mathematical anthology. Book for family and school,* St. Petersburg, 275 pp.

23. Kalyagin, Yu. M. 2006, “Shkolny uchebnik matematiki: vchera, segodnya, zavtra – School textbook of mathematics: yesterday, today tomorrow“, *Mathematical education,* vol. 3(38), pp. 2—8. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mo&paperid=452&option_lang=rus (accessed 25 December 2020).

24. Kanel-Belov, A. Ya., Kovaldji A. K. 2015, “Zanyatija po matematike — listki i dialog – Classes in mathematics — sheets and dialogue“, *Mathematical prosv.,* 3 ser., 19, pp. 206–235. Available at: http://www.mccme.ru/free-books/matprosk.html, arXiv: 1502.01893 (accessed 25 December 2020).

25. *Kenguru – Kangaroo. Math for All. Competitions for schoolchildren.* Available at: https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru (accessed 25 December 2020).

26. Konstantinov, N. N. 1986, *Opyt matklassov shkol № 7, 57, 91 u 179 (1962–1986 gg.) s tochki zreniya VNTK – The experience of matclasses of schools no. 7, 57, 91 and 179 (1962–1986) from the point of view of VNTK,* Theses of the speech at the VNKT seminar lead by Academician E. P. Velikhov, March 19, 1986. Archive of Academician A. P. Yershov. Available at: http://ershov-arc.iis.nsk.su/archive/eaimage.asp?fileid=207596 (accessed 25 December 2020).

27. Konstantinov, N. N. 2010, “Rossijskiye matematicheskiye klassy – Russian math classes“, *Theses of the All-Russian Congress of Mathematics Teachers at Moscow University.* Available at: ttps://mccme.ru/teachers/articles/russmath.htm (accessed 25 December 2020).

28. Kronrod A. S. 2004, *Besedy o programmirovanii – Conversations about programming,* preface by L. A. Kronrod. afterword by V. L. Arlazarov,. 2nd ed., Moscow, Editorial URSS, 248 pp.

29. Kukulin, I., Majofis, M., Safonov, P. (ed. and comp.). 2015, *Ostrova utopii. Pedagogicheskoye i socialnoye proektirovaniye poslevoyennoj shkoly (1940—1980-e) – Islands of utopia. Pedagogical and social design of the post-war school (1940—1980-es),* journal "Novoe literaturnoe obozrenie" library, "Inviolable reserve" series, Moscow, 695 pp.

30. Landis, E. M., Yaglom, I.,M. 2001, "About Aleksandr Semenovich Kronrod", *Russian Mathematical Surveys,* 56(5), pp. 993–1007 (accessed 25 December 2020). Available at: http://dx.doi.org/10.1070/RM2001v056n05ABEH000448.

31. Lankov, A.V. 1951, *K istorii razvitiya peredovyh idej v russkoj metodike matematiki. Posobiye dlya uchitelej – On the history of the development of advanced ideas in the Russian methodology of mathematics. Manual for teachers,* Uchpedgiz, Moscow, 152 pp. (accessed 25 December 2020). Available at: https://www.mathedu.ru/text/lankov_k_istorii_razvitiya_peredovyh_idey_v_russkoy_metodike_matematiki_1951/p0.

32. Leman, A. A. (comp.). 1965, *Sbornik zadach moskovskih matematicheskih olimpiad – Collection of problems of the Moscow Mathematical Olympiads,* ed. by V. G. Boltyansky, Moscow, Prosveshchenie, 384 pp.

33. Ljusternik, L. A. 1967, "The early years of the Moscow mathematics school", *Russian Mathematical Surveys,* 22(4), pp. 55—91. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=5779&option_lang=rus (accessed 25 December 2020).

34. Loginova, O. B. (comp.). 1994, *Urovnevaya differenciaciya obucheniya – Level differentiation of training,* Coll. of articles, Moscow Department of Education, Moscow: Scientific and pedagogical association "Education for all", 125 pp.

35. *Maly mehmat MGU. Leaflet archive.* Available at: http://mmmf.msu.ru/archive/ (accessed 25 December 2020).

36. Obuhov, A.S. 2015, *Razvitiye issledovatelskoj deyatelnosti uchashchihsya – Development of research activities of students,* 2nd ed., National Book Center, Moscow. – 288 pp.

37. Olehnik, S. N., Nesterenko, Yu. V., Potapov, M. K. 2006, *Starinnyye zanimatelnyye zadachi – Ancient entertaining tasks,* Moscow, Drofa, 176 pp.

38. Papert S. Letter to professor Ershov from June 22, 1988 // Archive of Academician A. P. Yershov. Available at: http://ershov-arc.iis.nsk.su/archive/eaimage.asp?l%20ang=1&did=38546&fileid=206979 (accessed 25 December 2020).

39. Perelman, Ya. I. 1913–1916, *Zanimatelnaya fizika. Kn. 1, 2 – Fascinating physics. Books 1, 2,* St. Petersburg: P. P. Soykin publ.

40. Perelman, Ya. I. 1916, *Veselyye zadachi: 101 golovolomka dlya yunyh matematikov – Fun tasks: 101 puzzles for young mathematicians,* Petrograd: printing house of A. S. Suvorin, 158 pp.

41. *PictoMir.* Starting page of FSRC Scientific Research Institute of System Development, RAS. Available at: https://www.niisi.ru/piktomir (accessed 25 December 2020).

42. *Propositiones ad Acuendos Juvenes.* Wikipedia page. Available at: https://ru.wikipedia.org/wiki/Propositiones_ad_Acuendos_Juvenes (accessed 25 December 2020).

43. Prudnikov, V. E. 1956, *Russkiye pedagogi-matematiki XVIII—XIX vekov – Russian teachers-mathematicians of the XVIII-XIX centuries,* Moscow: Uchpedgiz, 640 pp.

44. Rudchenko T. A. & Semenov A. L. 2011–2012, *Informatika. 1–4 klassy – Informatics. 1–4 grades.* Educational set (textbooks, workbooks, project notebooks for each year of study) for general educ. organizations. Moscow, Prosveshchenie, Institute of New Technologies, "Perspektiva" series.

45. *Shklyarsky David Osipovich.* Page on math.ru, section "History of Math". Available at: https://math.ru/history/people/shklyarskiy (accessed 25 December 2020).

46. Semenov, A. L. 2017, "Seymour Papert i my. Konstrukcionizm – obrazovatelnaya filosofiya XXI veka – Seymour Papert and us. Constructionism – educational philosophy of the XXI century", *Education issues,* No. 1, pp. 269–294. ISSN 1814-9545.

47. Semenov, A. L., Posicelskaja, M. A., Posicelskij, S. E., Rudchenko, T. A. et al. 2012–2019, *Matematika i informatika. 1–4 klassy – Mathematics and Informatics 1–4 grades.* Educational set (textbooks and workbooks for each year of study) for general educ. organizations. Moscow, MCCME, INT.

48. Shvartsburd, S. I. 1966, "O matematicheskoj specializacii v srednej shkole – About mathematical specialization in secondary school", *Uspekhi matematicheskikh nauk,* vol. 21, №. 1 (127), pp. 205–214.

49. Shvartsburd, S. I. (comp.). 1967, *Linejnaya algebra i geometriya – Linear algebra and geometry, APN RSFSR, Institute of General and Polytechnic Education,* "Problems of the mathematical school" series. Moscow: Prosveshchenie, 366 pp.

50. *Sodruzhestvo Liceya №1533 (informatsionnye tehnologii) – The Commonwealth Of The Lyceum no. 1533 (Information Technologies).* Available at: `https://www.lit.msu.ru/` (accessed 25 December 2020).

Получено 14.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 51(09) DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-447-459

Очерк истории топологического образования в Нижнем Новгороде[1]

Г. М. Полотовский

Григорий Михайлович Полотовский — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).
e-mail: polotovsky@gmail.com

Аннотация

Описывается история развития топологического образования в Нижнем Новгороде – от первой лекции по топологии для школьников, прочитанной в 1939 г. профессором А.Г. Майером, до настоящего времени. Необходимость знания топологии для дальнейших исследований первыми в Нижнем Новгороде поняли представители школы академика А.А. Андронова по теории нелинейных колебаний и качественной теории дифференциальных уравнений. Важным моментом была организованная С.И. Альбером в 1964 г. Горьковская топологическая школа, в которой приняли участие многие выдающиеся математики (Д.В. Аносов, М.Л. Громов, С.П. Новиков, Я.Г. Синай и др.) Однако «мотором» внедрения топологии в учебный процесс стал специалист по вещественной алгебраической геометрии профессор Д.А. Гудков. Эта его деятельность проходила в тесном сотрудничестве с ленинградским профессором В.А. Рохлиным и его учениками О.Я. Виро и В.М. Харламовым.

Ключевые слова: Нижний Новгород, топологическое образование, А.Г. Майер, С.И. Альбер, Д.А. Гудков, В.А. Рохлин.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Г. М. Полотовский. Очерк истории топологического образования в Нижнем Новгороде // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 447–459.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 51(09) DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-447-459

Essay of history of topological education in Nizhny Novgorod

G. M. Polotovskiy

Grigoriy Mikhailovich Polotovskiy — National Research University Higher School of Economics (Moscow).
e-mail: polotovsky@gmail.com

[1]Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

Abstract

The history of the development of topological education in Nizhny Novgorod is described — from the first lecture on topology for schoolchildren, given in 1939 by Professor A.G. Mayer, to the present. The need for knowledge of topology for further research was first understood in Nizhny Novgorod by representatives of the school of academician A.A. Andronov on the theory of nonlinear oscillations and the qualitative theory of differential equations. An important moment was organization by S.I. Alber in 1964 Gorky topological school, in which many outstanding mathematicians took part (D.V. Anosov, M.L. Gromov, S.P. Novikov, Y.G. Sinai, etc.) However, the specialist in real algebraic geometry, Professor D.A. Gudkov, became the "motor" for introducing topology into the educational process. This activity took place in close cooperation with Leningrad Professor V.A. Rokhlin and his students O.Ya. Viro and V.M. Kharlamov.

Keywords: Nizhny Novgorod, topological education, A.G. Mayer, S.I. Alber, D.A. Gudkov, V.A. Rokhlin.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
G. M. Polotovskiy, 2021, "Essay of history of topological education in Nizhny Novgorod", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 447–459.

1. Введение

Как известно, топология – достаточно молодая математическая дисциплина. Её истоки принято связывать со словами Г.В. Лейбница *«... я полагаю, что нам нужен ещё иной чисто геометрический или линейный анализ, непосредственно выражающий для нас положение, как алгебра выражает величину»* (из письма Х. Гюйгенсу 08.09.1679), с задачей Эйлера о кёнигсбергских мостах (1736; подробности см. в [1]) и с теоремой Эйлера о многогранниках (1752). Сам термин «топология» был введён И.Б. Листингом в книге «Vorstuden zur topologie» (1848; русский перевод [2] под редакцией небезызвестного Э. Кольмана вышел в 1932 году): *«Под топологией будем понимать учение о модальных отношениях пространственных образов, или о законах связности, взаимного положения и следования точек, линий, поверхностей, тел и их частей или их совокупности в пространстве, независимо от отношений мер и величин»*.

«Приблизительно с 1925 *по* 1975 *годы топология являлась одной из самых бурно развивающихся отраслей математики».* Это утверждение Википедии справедливо (как и множество других, но не всех её утверждений), может быть, следует лишь сдвинуть начало указанного периода, чтобы включить основоположников: А. Пуанкаре (1854 – 1912), Ф. Хаусдорфа (1868 – 1942), П.С. Александрова (1896 – 1982), П.С. Урысона (1898 – 1924), Л.Э.Я. Брауэра (1888 – 1966). Не претендуя на полноту списка, приведу имена математиков следующих поколений, внёсших важный вклад в топологию: С. Лефшец (1884 – 1972), Д. Александер (1888 – 1971), Д. Уайтхед (1904 – 1960), К. Борсук (1905 – 1982), В. Гуревич (1904 – 1956), Н. Стинрод (1910 – 1971), С. Эйленберг (1913 – 1998), Р. Том (1923 – 2002), Ж-П. Серр (1926 г. р.), Ф. Хирцебрух (1927 – 2012), М. Атья (1929 – 2019), Д. Адамс (1930 – 1989), С. Смейл (1930 г. р.), Д. Милнор (1931 г. р.). Наряду с ними – имена отечественных математиков: А.Н. Колмогоров (1903 – 1987), Л.С. Понтрягин (1908 – 1988), Л.А. Люстерник (1899 – 1981), В.А. Рохлин (1919 – 1984), С.П. Новиков (1938 г. р.). Однако в Советском Союзе топология развивалась в основном в столицах – в Москве и в Ленинграде, и только отдельные математики занимались топологией на периферии – например, А.И. Фет в Томске и Новосибирске. При этом до 1974 года никаких обязательных курсов по топологии в учебных планах ВУЗов не было. Цель настоящего очерка – «собрать» историю становления

топологического образования в нестоличном Нижнем Новгороде (в 1932 – 1990 гг. – город Горький).

2. Начало высшего образования и возникновение интереса к топологии в Нижнем Новгороде

Высшее образование в Нижнем Новгороде ведёт отсчёт с создания в январе 1916 года Народного университета. В июле 1915 года в связи с наступлением немецких войск на Варшаву Российское правительство спешно эвакуировало Варшавский университет и Варшавский политехнический институт: сначала в Москву, где для них «не нашлось места», затем университет был отправлен в Ростов-на Дону, где на его основе был образован Ростовский – сейчас Южный Федеральный – университет, а 53 преподавателя политехнического института с частью книг и приборов в июле 1916 года прибыли в Нижний Новгород. Из этого «материала» был создан Политехнический институт (сейчас – Нижегородский технический университет им. Р.Е. Алексеева). В марте 1918 года Нижегородский политехнический институт, Народный университет и Высшие сельскохозяйственные курсы были закрыты, а всё их имущество было передано вновь учреждённому Нижегородскому университету (сейчас – Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского).

Ведущую роль в становлении в Нижнем Новгороде высшего математического образования сыграл профессор Варшавского политехнического института Иван Романович Брайцев (1870 – 1947)[2]. В частности, по его инициативе в Горьковском университете в 1934 году был образован физико-математический факультет, деканом которого он был до 1939 года. Однако ни о каких лекциях или курсах по топологии в то время не было и речи.

И.Р. Брайцев

По-видимому, интерес к топологии и понимание её необходимости впервые проявились в Нижнем Новгороде у математиков, занимавшихся дифференциальными уравнениями. Замечу, что и для Анри Пуанкаре, о котором П.С. Александров сказал *«на вопрос, каково отношение Пуанкаре к топологии, можно ответить одним предложением: он её создал»* [6], одним из стимулов создания топологии была качественная теория дифференциальных уравнений (которую тоже создал Пуанкаре). В 1931 году из Москвы в Нижний Новгород переехал ученик академика Л.И. Мандельштама Александр Александрович Андронов, в результате чего в Нижнем Новгороде образовалась мощная научная школа, часть которой занималась динамическими системами, в том числе качественной теорией дифференциальных уравнений.

[2]Подробно о жизни и деятельности Р.И. Брайцева см. [3].

Ближайшим сотрудником Андронова стал приехавший в том же 1931 году из Москвы после окончания аспирантуры у А.Я. Хинчина Артемий Григорьевич Майер[3]. Насколько мне известно, первую в Горьком лекцию по топологии прочитал именно А.Г. Майер в 1938 году. Однако это была не лекция *по топологии* для студентов, а лекция *о топологии* для школьников: вот свидетельство конструктора автомобильных двигателей профессора П.Э. Сыркина ([7], с. 44): *«В то время в университете работало замечательное созвездие профессоров, и все они – ведущие профессора* [А.А. Андронов, Г.С. Горелик, А.Г. Майер, Л.П. Радзишевский, С.С. Четвериков – Г.П.]*– читали нам свои лекции.* <. . .> *Артемий Григорьевич Майер прочитал лекцию "Что такое топология"».*

А.Г. Майер

Позже, осенью 1944 года, в Горьком появился тополог Израиль Исаакович Гордон (1910 – 1985)[4], первый аспирант Л.С. Понтрягина, один из создателей теории когомологий: *«Особенно важной вехой в развитии топологии по многим причинам оказался* 1935 *год. В сентябре в Москве состоялась "Первая международная топологическая конференция". Независимые друг от друга доклады Дж. Александера, И. Гордона и А.Н. Колмогорова, прочитанные на этой конференции, положили начало теории когомологий»* [9].

И.И. Гордон

В Горьком И.И. Гордон имел очень большую учебную нагрузку на механико-математическом и радиофизическом факультетах, и хотя в 1952 – 1955 гг. он опубликовал ещё несколько работ по топологии, мне не удалось найти сведений о том, что он читал какой-либо топологический спецкурс.[5]

[3]Подробно о биографии А.Г. Майера, его научной и преподавательской деятельности можно прочитать в [4] или в [5].

[4]О жизни и деятельности И.И. Гордона см. очерк [8].

[5]Когда этот текст был уже написан, я узнал, что в 1959 году преподаватель Т.Е. Лисунова вела кружок для

3. «Горьковская топологическая школа» 1964 года

В 1956 – 1987 гг. в Горьком работал ещё один тополог – выпускник Томского университета Соломон Иосифович Альбер (1931 – 1993)[6], ученик А.И. Фета. Можно сказать, что именно он внёс в развитие топологического образования в Нижнем Новгороде первый существенный вклад. Этот вклад состоял из двух частей.

С.И. Альбер

Во-первых, С.И. Альбер был одним из основных организаторов «Горьковской топологической школы» в доме отдыха «Волга» под Горьким, которая проходила 17 – 28 июня 1964 года. В это время С.И. Альбер был доцентом Горьковского университета.

Около двух лет назад среди книг и бумаг Е.А. Леонтович-Андроновой в отделе дифференциальных уравнений НИИ Прикладной математики и кибернетики (НИИ ПМК), которым она заведовала в 1964 – 1982 гг., я обнаружил групповую фотографию участников этой школы (см. Фото 1[7]). Примерно через год я узнал, что в архиве М.И. Вишика есть Фото 2, снятое «в том же месте, в тот же час» в другом ракурсе. Чтобы можно было лучше рассмотреть сфотографировавшихся участников школы, здесь приведены обе фотографии, на которых Н.Н. Андреев, заведующий лабораторией популяризации и пропаганды математики МИ РАН им. В.А. Стеклова, пронумеровал всех сфотографированных. Ниже приведён список "опознанных" участников школы в соответствии с этими номерами, существенно использующий информацию, полученную мной от В.М. Бухштабера, Е.И. Гордона, А.А. Давыдова, В.С. Итенберга, Л.Э. Каплана, А.А. Комеча, М.И. Лиогонького, которые, в свою очередь, консультировались с другими математиками. Я благодарен всем, кто принял участие в "расшифровке" фотографий.

Большинство участников школы – хорошо известные математики, так что нет необходимости сопровождать их фамилии каким-либо характеристиками. Указываются только города, которые представляли участники, и иногда – некоторые дополнительные сведения.

первокурсников мех-мата, на котором разбиралась глава "Топология" известной книги "Что такое математика?" Р. Куранта и Г. Роббинса Я благодарен З.Г. Павлючонок за эти сведения.

[6]Биография С.И. Альбера кратко изложена в [10].

[7]Впервые опубликовано в статье [11] по моему предложению.

Фото 1.

2. Анатолий Павлович Савин (1932 – 1998), автор многих книг и статей по математике для юношества, член редколлегии журнала «Квант» (Москва).
3. Войслав Любомирович Голо (1941 – 2016), профессор мехмата МГУ (Москва).
4. Дмитрий Борисович Фукс (1939 г.р.) (Москва).
5. Андрей Михайлович Леонтович (1941 г.р.) (Москва).
6. Марк Соломонович Кушельман (1941 – 2020) – аспирант Д.А. Гудкова (Горький).
7. Абрам Ильич Фет (1924 – 2007) (Новосибирск).
11. Алексей Дмитриевич Юнаковский (1940 г.р.), сейчас д.ф.-м.н. (Горький).
12. Яков Иосифович Альбер (1939 г.р.), брат С.И. Альбера (Горький; сейчас живет в США).
14. Михаил Яковлевич Антоновский (1932 – 2019) (Москва).
16. Яков Абрамович Ройтберг (1925 – 2007) (Чернигов).
17. Аркадий Анатольевич Мальцев (1935 г.р.) (Москва).
18. Ромен Васильевич Плыкин (1935 – 2010) (Ташкент).
20. Рем Лазаревич Фрум-Кетков (1930 г.р.) (Москва).
21. Борис Самуилович Митягин (1937 г.р.) (Воронеж).
22. Дмитрий Андреевич Гудков (1918 – 1992) (Горький).
23. Александр Аронович Розенблюм (1918 – ?), преподаватель кафедры математики радиофизического факультета Горьковского университета (Горький).
24. Лев Эльевич Каплан (1939 г.р.), преподаватель кафедры математики радиофизического факультета Горьковского университета (Горький).
25. Григорий Ильич Эскин (1936 г.р.) (Москва).
27. Алексей Брониславович Сосинский (1937 г.р.) (Москва).
28. Гурам Лаврентиевич Лаитадзе (1941 г.р.) (Тбилиси).
30. Самуил Хаимович Арансон (1935 г.р.) (Горький; ныне живёт в США).
31. Александр Юрьевич Неймарк (1949 – 2015), сын Ю.И. Неймарка (Горький).
32. Михаил Леонидович Громов (1943 г.р.) (Ленинград).

Фото 2.

33. Эммануил Лазаревич Герловин (1943 – 2012), ученик З.И. Боревича; с 1987 г. жил в США, где занимался прикладной математикой (Ленинград).
34. Виктор Павлович Паламодов (1938 г.р.) (Москва).
35. Владимир Семенович Итенберг (1942 г.р.), аспирант В.А. Рохлина (Ленинград).
36. Юлий Андреевич Дубинский (1938 г.р.) (Москва).
37. Марк Иосифович Граев (1932 – 2017) (Москва).
38. Алексей Викторович Чернавский (1938 г.р.) (Москва).
40. Кирилл Александрович Ситников (1926 г.р.) (Москва).
42. Леонард Дмитриевич Мдзинаришвили (1938 г.р.) (Тбилиси).
43. Исраил Муневич Дектярёв (1940 – 2002) (Владимир).
45. Ирина Глузкина (аспирантка В.А. Рохлина; сейчас живёт в США) (Ленинград).
47. Евгения Александровна Леонтович-Андронова (1905 – 1997) (Горький).
48. Леонид Павлович Шильников (1934 – 2011) (Горький).
49. Юрий Исаакович Неймарк (1920 – 2011) (Горький).
51. Луиза Кириллова, жена А.А. Кириллова (Москва).
52. Яков Григорьевич Синай (1935 г.р.) (Москва).
53. Дмитрий Викторович Аносов (1936 – 2014) (Москва).
54. Борис Юрьевич Стернин (1939 – 2017) (Москва).
55, 56. Соломон Иосифович Альбер (1931 – 1993) со старшим сыном Марком (Горький).
57. Михаил Семёнович Агранович (1931 – 2017) (Москва).
58. Марко Иосифович Вишик (1921 – 2012) (Москва).
59. Михаил Михайлович Постников (1927 – 2004) (Москва).
60. Александр Семёнович Дынин (1936 г.р.) (Москва).
61. Сергей Петрович Новиков (1938 г.р.) (Москва).
62. Семен Григорьевич Гиндикин (1937 г.р.) (Москва).
63. Александр Александрович Кириллов (1936 г.р.) (Москва).

Об этой школе был опубликован отчёт [12] в журнале «Успехи математических наук». По словам В.М. Бухштабера (личное сообщение), когда они с С.П. Новиковым рассматривали приведённые фотографии и посмотрели указанный отчёт, Сергей Петрович заметил, что такую школу не стыдно было бы провести и сегодня. В.М. Бухштабер отметил также, что на конференции были не просто участники, а представители всех центров СССР, в которых в то время успешно развивалась топология. Замечу, что на фотографиях представлены не все участники школы. Так, согласно [12], Владимир Григорьевич Болтянский (1925 – 2019) прочитал лекцию «Теория препятствий», но его, по-видимому, нет на фотографиях. Л.Э. Каплан сообщил, что в работе школы участвовал также ученик Д.А. Гудкова Геннадий Александрович Уткин (1937 – 2007), которого тоже нет на фото. По сообщению М. Бакурадзе, из Тбилиси на школе был ещё Лазарь Григорьевич Замбахидзе. Замечу ещё, что И.И. Гордон не смог участвовать в работе школы по состоянию здоровья – в 1962 г. он перенёс обширный инфаркт.

4. Постановка обязательного курса топологии для студентов

Вторая часть вклада С.И. Альбера состоит в том, что в 1966 – 1967 гг. он прочитал в Горьковском университете спецкурс по топологии. По-видимому, это явилось ответом на просьбы горьковских математиков, интерес которых к топологии обострился под влиянием описанной выше школы 1964 года. Лекции Альбера слушали не только студенты старших курсов и аспиранты с разных факультетов, но и многие преподаватели. Я тоже послушал несколько лекций, но – по глупости, конечно, – не все. Дело в том, что, насколько я помню, С.И. Альбер не стремился к точным формулировкам и часто заменял их пояснением сути дела «на пальцах». Я плохо воспринимал такую манеру изложения и перестал ходить на спецкурс. Но не сомневаюсь, что многим эти лекции были очень полезны.

Возможно, под влиянием этих лекций Александр Маркович Стерлин[8] (1940 – 2014) организовал кружок по топологии, который работал один семестр в 1968 г. и собирал по вечерам многих студентов младших и старших курсов. Однако заслуга постановки в Нижегородском университете обязательного курса топологии для студентов принадлежит профессору Дмитрию Андреевичу Гудкову[9].

Д.А. Гудков

Замечу, что несмотря на названия своего главного результата («Полная топологическая классификация расположения овалов кривой 6-го порядка в проективной плоскости» [14])

[8] Саша Стерлин, как его в основном называли в университете, был сильным, но своеобразным математиком: при небольшом числе собственных работ (так, в базе данных mathnet.ru только три его статьи), он интересовался многими разделами современной математики, по которым организовывал кружки и спецсеминары.

[9] Описанию жизни и деятельности Д.А. Гудкова посвящена книга [13].

и своей докторской диссертации («О топологии плоских алгебраических кривых» [15]), содержащих решение задачи из первой части знаменитой 16-й проблемы Гильберта, Гудков использовал топологию в этих работах чисто терминологически, т. е. никакие серьёзные топологические методы и факты не применялись.

Ситуация кардинально изменилась после того, как в 1972 году В.А. Рохлин доказал[10] «сравнение Гудкова» – сравнение по модулю 8 для топологических характеристик кривой любой чётной степени, высказанное Гудковым в качестве гипотезы. В этом доказательстве уже использовалась очень продвинутая топология. После этого, как писал Д.А. Гудков в [17], *«исследования по топологии вещественных алгебраических многообразий влились в общий поток исследований по дифференциальной топологии»*. Стало ясно, что для понимания новых результатов и для дальнейшего продвижения необходимо владение современной топологией. И тогда Д.А. Гудков, всегда прилагавший максимальные усилия к развитию математического образования в университете, решил поставить обязательный для математиков курс топологии и подготовить для него преподавателей.

Начальный период реализации Гудковым этой цели можно проследить по сохранившейся в архиве Гудкова части его переписки с В.А. Рохлиным[11], которая содержит 15 писем Рохлина и 8 писем Гудкова периода 1971 – 1982 гг. и полностью опубликована в [13].

Очевидно, отвечая на просьбу Д.А. Гудкова порекомендовать литературу по топологии, В.А. Рохлин в письме от 21.01.72 пишет: *«Лучшее учебное сочинение по характеристическим классам – лекции Милнора* (*Математика,* 3:4 *и* 9:4). *Arf-инвариант, определённый в моей заметке, вычисляется прямо на основании своего определения. Другие Arf-инварианты, употребляемые в топологии, имеются, например, у Кервера и Милнора* (*Ann. Math.* 77, №3) *и Понтрягина* (*Труды МИАН,* XLV, *последний параграф*). ***Не ждите, впрочем, от изучения топологии по книгам и статьям слишком многого****»*.

Разумеется, это выделенное мной выше замечание Д.А. Гудков хорошо понимал и сам. Он надеялся «переманить» на работу в Горьковский университет кого-нибудь из молодых учеников Рохлина для чтения лекций и для консультаций: *«Я давно хотел написать Вам об этом деле, но откладывал до встречи. Однако, скоро я не смогу приехать в Ленинград. Дело в том, что в Горьком нет настоящей культуры во многих областях математики, в частности, в алгебраической геометрии и топологии. Этот недостаток чувствуют многие здешние математики. $<\ldots>$*

Хорошо было бы заполучить также от Вас $<\ldots>$ специалиста по алгебраической топологии (топологии многообразий и т. п.) на постоянную работу в ГГУ. Конечно, при условии, что это соответствует желанию самого этого специалиста. Лучше всего, чтобы он не терял с Вами связи. Это может быть очень хороший студент с выходом в целевую аспирантуру у Вас, или оканчивающий аспирант, или уже работающий математик. Я со своей стороны приложил бы все усилия, чтобы осуществить такой план». (Из письма Д.А. Гудкова от 07.01.1973.)

Однако найти подходящего человека не удалось, и Гудкову оставалось только самому взяться за курс топологии: в 1974 году он начал читать в Горьковском университете такой курс по студенческим записям лекций В.А. Рохлина, читавшихся им в Ленинградском университете. Вот как вспоминает об этом профессор Нина Ивановна Жукова ([13], с. 273): *«Когда я была студенткой мехмата ННГУ, Дмитрий Андреевич начал читать цикл лекций по топологии. Как сообщил нам Дмитрий Андреевич, он привёз из Ленинграда программу лекций В.А. Рохлина по топологии, которая ему понравилась и была адаптирована для студентов младших курсов. Дмитрий Андреевич читал эти лекции, по-моему, в течение года или по-*

[10]Как заметил А. Марен [16], первое доказательство Рохлина содержало ошибку.

[11]Д.А. Гудков вёл большую переписку и сохранял в своём архиве как письма своих корреспондентов, так и, в большинстве случаев, копии отправленных им своих писем.

лутора лет. В то время было только два учебных корпуса (первый и второй), аудиторий не хватало. Занятия проходили на втором этаже помещения лыжной базы, расположенной на территории университета. Информация о лекциях Дмитрия Андреевича быстро широко распространилась, и на эти лекции приходило очень много слушателей, среди которых были и студенты радиофака[12]*, и сотрудники НИИ ПМК».*

В письме В.А. Рохлину, написанном весной 1975 года (на черновике даты нет), Д.А. Гудков рассказывает о чтении курса: *«Ваш курс, который я называю начальным, продвинулся у меня до третьей главы, т. е. я прочёл* 23 *лекции:* 1. *Топологические пространства.* 2. *Ф. гр. и покрытия.* 3. *Топологические многообразия. Две оставшиеся главы:* 4. *Гладкие многообр. и* 5. *Римановы пространства буду читать на следующий семестр. Больше одной двухчасовой лекции в неделю не получается, т. к. слушатели очень заняты, и я боюсь злоупотребить их вниманием (могут разбежаться). По просьбе слушателей я составил подробный конспект лекций* 1*-й главы и буду составлять конспекты остальных. Есть идея напечатать эти конспекты на ротапринте. В связи с этим у меня возникли некоторые мысли, которые хорошо бы обсудить с Вами:* 1) *в предисловии я указываю, что читаю лекции по студенческим конспектам Ваших лекций.* 2) *Быть может, Вы согласитесь, чтобы я поставил в качестве автора и Вас с указанием, что за ошибки несу ответственность целиком я.* 3) *Быть может, Вы хотели бы посмотреть эти конспекты?* 4) *Если Вы возражаете, то я не буду отдавать эти лекции на ротапринт».*

В своём ответе на это письмо В.А. Рохлин пишет 19.05.1975: *«Быть соавтором я, конечно, не могу. Смотреть эти конспекты до печати у меня нет сил, но если Вы хотите, чтобы их покритиковал абсолютно компетентный человек, Вы можете попросить об этом, например, Олега Яновича Виро, который читал в этом учебном году обязательный курс топологии вместо меня (кстати, он недавно получил премию Ленинградского математического общества, а свою диссертацию защитил ещё в декабре). Возможно, он не откажется приехать в Горький на неделю или десять дней, чтобы посмотреть Ваш текст и проконсультировать Вас относительно наших основных спецкурсов и их записей* $<\ldots>$*».*

О.Я. Виро не отказался. Он, а потом и В.М. Харламов, тоже ученик В.А. Рохлина, неоднократно приезжали в Горький, консультировали Д.А. Гудкова по курсу топологии, рассказывали свои новые результаты по топологии вещественных алгебраических многообразий. Почти сразу установились дружба и сотрудничество Д.А. Гудкова и его учеников с О.Я. Виро, В.М. Харламовым, а затем и с другими учениками В.А. Рохлина и с их учениками.

В 1978 г. Д.А. Гудков перешёл на мехмат и стал заведующим кафедрой геометрии и высшей алгебры. Здесь он сделал курс топологии обязательным, подготовил для этого курса серию методических разработок «Начала топологии», в предисловии к первой из которых он написал: *«Значительную часть этого пособия просмотрел О.Я. Виро и сделал полезные замечания. Я выражаю искреннюю благодарность В.А. Рохлину, В.М. Харламову и О.Я. Виро».*

Прочитав курс топологии два или три раза, Дмитрий Андреевич поручил его молодым сотрудникам своей кафедры Н.И. Жуковой и Е.И. Яковлеву; мне довелось прочитать два спецкурса по алгебраической топологии. По поручению Д.А. Гудкова сотрудники его кафедры А.В. Баландин, Н.И. Жукова и Е.И. Яковлев составили задачник по общей топологии.

Параллельно с описанным выше процессом развития топологического образования возрастала «внешняя топологическая активность» нижегородских математиков – я имею в виду их активное участие в крупных топологических конференциях (Тбилиси (1972), Минск (1977), Москва (1979), Баку (1987)). Хотя нижегородские доклады относились, в основном, к приложениям топологии, участие в таких конференциях, конечно, способствовало связям с топологами и расширяло топологический кругозор. Когда в начале 80-х, встречая на вокзале приехавше-

[12]В то время Д.А. Гудков заведовал организованной им в 1961 г. кафедрой математики радиофизического факультета.

го в Горький В.И. Арнольда, я посетовал, что никто в Горьком толком не знает топологии, Владимир Игоревич возразил: *«Сейчас это уже не так. Дмитрий Андреевич заметно продвинулся в этом направлении».* (Для сравнения приведу фрагмент из воспоминаний В.И. Звонилова ([13], с. 279): в 1974 году *«Рохлин сказал нам с Колей* [Н.М. Мишачёв, ученик В.А. Рохлина – Г.П.]*, что Гудков – самоучка* (*не является специалистом*) *в топологии* (*кстати, и по поводу знаменитой работы Арнольда*[13] *Рохлин говорил, что Арнольд – не тополог*)*».*)

5. Заключение

В 70-е годы известный воронежский математик Юрий Григорьевич Борисович (1930 – 2007) «пробивал» учебник [18] (который дважды переиздавался позже – в 1995 и 2015 гг.). Это нашло отражение в переписке Д.А. Гудкова с Ю.Г. Борисовичем. В частности, в 1976 году Ю.Г. Борисович писал ([13], с. 94): *«Я сейчас в некоторой растерянности: интерес к топологии падает. Хотелось бы понять, чем у вас поддерживается интерес в большом масштабе. Из Ваших писем я вынес впечатление именно такое. Поделитесь опытом!»*

К сожалению, в Нижегородском университете никакого «интереса в большом масштабе» к топологии давно не наблюдается: сказалось общее «размытие» университетского математического образования в результате слабо мотивированных реформ (уменьшение числа часов, слияние факультетов, переход от специалитета к бакалавриату и многое другое). Отдельного курса топологии нет уже лет 15, вместо этого некоторые разделы топологии включены в курс «Дифференциальная геометрия и топология». Своего рода «топологическим оазисом» остаётся кафедра фундаментальной математики нижегородского кампуса Высшей школы экономики, где профессор Н.И. Жукова читает годовой курс «Введение в топологию» и профессор Е.И. Яковлев читает полугодовой курс «Компьютерная топология».

Я благодарен В.М. Бухштаберу, Е.И. Гордону и С.С. Демидову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Листинг И.Б. Предварительные исследования по топологии. М.-Л.: Гостехиздат, 1932. 116 с.

2. Иван Романович Брайцев. Серия «Личность в науке». (Составитель Н.Б. Кузнецова.) Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2004. 192 с.

3. Полотовский Г.М. Нижегородский математик Артемий Григорьевич Майер и его курс истории математики. С. 210-294 в кн.: Полотовский Г.М. Очерки истории российской математики. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2015. 320 с.

4. Полотовский Г.М. Нижегородский математик Артемий Григорьевич Майер и его курс истории математики // Семь искусств. 2015. № 2(60) (Интернет-издание, `http://7iskusstv.com/2015/Nomer2/Polotovsky1.php`).

5. Александров П.С. Пуанкаре и топология // УМН. 1972. Т. 27, № 1(163). С. 147-158.

6. Сыркин П.Э. Печаль и радость прожитых годов. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2016. 160 с.

[13] О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырёхмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм // Функц. анализ и его прил., 1971, 5:3, с. 1 – 9 [Г.П.].

7. Гордон Е.И. Адресат Л.С. Понтрягина – И.И. Гордон (Вступительные заметки) // Историко-математические исследования. 2005. Вторая серия. Вып. 9(44). С. 14-208; см. также: Семь искусств. 2011. № 11(24) (Интернет-издание, http://7iskusstv.com/2011/Nomer11/EGordon1.php).

8. Хопф Х. Некоторые личные воспоминания, относящиеся к предыстории современной топологии // УМН. 1966. Т. 21, № 4 (130). С. 8-16.

9. Дубовицкий Ф.И. Институт химической физики (очерки истории). М.: Наука, 1996. 983 с.

10. Гордон Е.И. Дмитрий Андреевич Гудков в моей жизни // Семь искусств. 2018. № 9 (102) (Интернет-издание, http://7i.7iskusstv.com/2018-nomer9-egordon/).

11. Вишик М.И., Новиков С.П., Постников М.М. Горьковский математический семинар по гомотопической топологии // УМН. 1964. Т. 19, № 3(120). С. 237-238.

12. Дмитрий Андреевич Гудков: документы – переписка – воспоминания. Серия «Личность в науке. XX век. Люди. События. Идеи.» (Редактор-составитель Г.М. Полотовский). Н. Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2018. 332 с.

13. Гудков Д.А. Полная топологическая классификация расположения овалов кривой 6-го порядка в проективной плоскости // Учёные зап. Горьковского университета. 1969. Вып. 87. С. 118-153.

14. Гудков Д.А. О топологии плоских алгебраических кривых. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Горький. 1969. С. 1-351.

15. Марен А. Несколько замечаний о вещественных плоских алгебраических кривых. С. 162-172 в кн.: В поисках утраченной топологии. М.: Мир, 1989. 293 с.

16. Гудков Д.А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. 1974. Т. 29, № 4(178). С. 3-79.

17. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию: Учебн. пособие для вузов. М.: Высш. школа, 1980. 295 с.

REFERENCES

1. Listing, J 1932, *Predvaritelnye issledovaniya po topologii* [Preliminary Topology Studies], Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 116 pp.

2. Kuznetsova, N.B. (compiler) 2004, *Ivan Romanovich Brytsev*, Series “Personality in Science”, Nizhny Novgorod University, N. Novgorod, 192 pp.

3. Polotovskiy, G.M. 2015, “Nizhny Novgorod mathematician Artemy Grigorievich Mayer and his course of the history of mathematics”, pp. 210–294 in the book: Polotovskiy, G.M. 2015, *Ocherki istorii rossiyskoy matematiki* [Essays on the history of Russian mathematics], Nizhny Novgorod University, N. Novgorod, 320 pp.

4. Polotovskiy, G.M. 2015, “Nizhny Novgorod mathematician Artemy Grigorievich Mayer and his course of the history of mathematics”, *Seven Arts*, no. 2(60), Available at: `http://7iskusstv.com/2015/Nomer2/Polotovsky1.php` (accessed 11 October 2020).

5. Alexandrov, P.S. 1972, “Poincare and topology”, *Uspekhi matematicheskikh nauk* (Russian Mathematical Surveys), vol. 27, no. 1(163), pp. 147–158.

6. Syrkin, P.E. 2016, *Pechal' i radost' prozhitykh godov* [Sadness and joy of the years lived], Nizhny Novgorod University, N. Novgorod, 320 pp.

7. Gordon, E.I. 2005, "Addressee of L.S. Pontryagin – I.I. Gordon" (Introductory Notes), Istoriko-matematicheskie issledovaniya. Vtoraya seria, vol. 9(44), pp. 14–26; see also *Seven Arts*, no. 11(24), Available at: http://7iskusstv.com/2011/Nomer11/EGordon1.php (accessed 11 October 2020).

8. Hopf, H. 1966, "Some personal memories relating to the background of modern topology", *Uspekhi matematicheskikh nauk* (Russian Mathematical Surveys), vol. 21, no. 4(130), pp. 8–16.

9. Dubovitskiy F.I. 1996, *Institut khimicheskoi fisiki* (*ocherki istorii*) [Institute of Chemical Physics (history essays)], Nauka, Moscow, 983 pp.

10. Gordon, E.I. 2018, "Dmitry Andreevich Gudkov in my life", *Seven Arts*, no. 9(102), Available at: http://7i.7iskusstv.com/2018-nomer9-egordon (accessed 11 October 2020).

11. Vishik, M.I., Novikov, S.P., Postnikov, M.M. 1964, "Gorky mathematical seminar on homotopic topology", *Uspekhi matematicheskikh nauk* (Russian Mathematical Surveys), vol. 19, no. 3(120), pp. 237–238.

12. Polotovskiy, G.M. (editor-compiler), 2018, *Dmitriy Andreevich Gudkov: dokumenty – perepiska – vospominaniya* [Dmitry Andreevich Gudkov: documents – correspondence – memories], Series "Personality in Science. XX century. People. Events. Ideas.", Lobachevsky University, , N. Novgorod, 332 pp.

13. Gudkov, D.A. 1969, "Complete topological classification of the location of ovals of a curve of the 6th order in the projective plane", Uch. zapiski Gorkovskogo Universiteta, vol. 87, pp. 118–153.

14. Gudkov, D.A. 1969, *On the topology of plane algebraic curves*, Doct. Theses, Gorky, pp.1–351.

15. Marin, A. 1989. "Some comments on real plane algebraic curves", pp. 162–172 in the book: *V poiskakh utrachennoi topologii* [In search of lost topology], Mir, Moscow, 293 pp.

16. Gudkov, D.A. 1974, "Topology of real projective algebraic varieties", *Uspekhi matematicheskikh nauk* (Russian Mathematical Surveys), vol. 29, no. 4(178), pp. 3–79.

17. Borisovich, Yu.G., Bliznyakov N.M., Israilevich Ya.A., Fomenko T.N. 1980, *Vvedenie v topologiyu: Uchebnoe posobie dlya vusov* [Introduction to Topology: A textbook for universities], Vysshaya shkola, Moscow, 295 pp.

Получено 27.10.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-460-472

Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием[1]

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов

Лев Алексеевич Толоконников — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Дмитрий Юрьевич Ефимов — магистрант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции цилиндрических монохроматических звуковых волн на однородном упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием. Полагается, что тело находится в безграничном пространстве, заполненном идеальной жидкостью. Получено аналитическое решение задачи.

Волновые поля в содержащей среде и однородном упругом цилиндре находятся в виде разложений по волновым цилиндрическим функциям, а для нахождения поля смещения в неоднородном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Проведены численные расчеты угловых и частотных характеристик рассеянного поля для упругих цилиндров с однородными и неоднородными покрытиями. Выявлено существенное влияние непрерывно-неоднородных упругих покрытий на звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел.

Ключевые слова: дифракция, цилиндрические звуковые волны, упругий цилиндр, неоднородное упругое покрытие.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 460–472.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-460-472

Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with an radially inhomogeneous coating

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov

Lev Alexeevich Tolokonnikov — doctor of physical and mathematical Sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Dmitrii Yurevich Efimov — undergraduate, Tula State University (Tula).
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Abstract

In article the problem of the diffraction of cylindrical monochromatic sound waves by an homogeneous elastic cylinder with a radially inhomogeneous elastic covering is considered. It is believed that the body is placed in an endless space filled with ideal fluid. The analytical solution of the problem is received.

Wave fields in a containing medium and homogeneous elastic cylinder are found in the form of expansions in wave cylindrical functions. The boundary-value problem for the system of ordinary second order differential equations is constructed for determination of the displacement field in inhomogeneous coating.

Numerical calculations of angular and frequency characteristics of the scattered field for elastic cylinders with homogeneous and inhomogeneous coatings are performed. Influence of continuously inhomogeneous elastic coatings on sound-reflecting properties of elastic cylindrical bodies are revealed.

Keywords: diffraction, cylindrical sound waves, elastic cylinder, inhomogeneous elastic coating.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov, 2021, "Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with an radially inhomogeneous coating" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460–472.

1. Введение

Дифракция монохроматических звуковых волн на цилиндрических телах с неоднородными упругими покрытиями, находящихся в безграничном пространстве, заполненном идеальной жидкостью, рассматривалась в работах [1 - 4]. В [1] исследована дифракция плоской звуковой волны на абсолютно жестком цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием. Задачи о рассеянии наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием решены в [2, 3]. В [2] неоднородное покрытие полагалось радиально-неоднородным, а в [3] — дискретно-слоистым. Дифракция цилиндрических звуковых волн на жестком цилиндре с неоднородным упругим покрытием изучена в [4]. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [5, 6]. Задача дифракции плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями решена в [7]. В [8] рассмотрена дифракция плоской звуковой волны на однородном упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи идеальной плоской поверхности (абсолютно жесткой и акустически мягкой), когда плоская волна падает перпендикулярно оси цилиндра. В [9] рассмотрена задача о рассеянии плоской звуковой волны, падающей произвольным образом на упругий цилиндр с радиально-неоднородным упругим слоем, в присутствии подстилающей плоскости. Прямая и обратная задачи рассеяния звуковых волн жестким цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся в волноводе, решены в [10, 11]. В настоящей работе рассматривается задача дифракции звуковых волн, излучаемых линейным источником, на упругом изотропном цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный изотропный упругий цилиндр радиуса r_2, материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0. Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого слоя с внешним радиусом r_1. Окружающая цилиндрическое тело жидкость является идеальной и характеризуется плотностью ρ_1 и скоростью звука c. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z так, чтобы координатная ось z являлась осью вращения цилиндра. Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного покрытия описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r, а плотность ρ — непрерывной функцией этой координаты.

Пусть из внешнего пространства на цилиндрическое тело падает монохроматическая цилиндрическая волна. Падающая волна излучается бесконечно длинным цилиндрическим источником, на поверхности которого возбуждена одна из мод и ось которого параллельна оси цилиндра. В цилиндрической системе координат r, φ, z, связанной с рассеивателем, ось источника имеет координаты (r_0, φ_0). Выберем дополнительную цилиндрическую систему координат R, θ, z, связанную с источником так, чтобы полярные оси основной и дополнительной систем координат были одинаково ориентированы. Тогда потенциал скорости гармонической звуковой волны, излучаемой цилиндрическим источником порядка m, может быть представлен в виде

$$\Psi_0 = AH_m(kR)\exp[i(m\theta - \omega t)],$$

где A — амплитуда волны; $k = \omega/c$ — волновое число; ω — круговая частота; t — время; $H_m(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка m; R — расстояние между источником и точкой наблюдения;

$$R = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2}.$$

Простейшая монохроматическая симметричная цилиндрическая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, параллельным оси z, описывается с помощью цилиндрической функции Ганкеля первого рода нулевого порядка. Потенциал скорости такой волны представляется в виде

$$\Psi_0 = AH_0(kR)\exp(-i\omega t).$$

В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Определим отраженную от тела волну, а также найдем поля смещений в однородном упругом цилиндре и неоднородном слое.

3. Аналитическое решение задачи

В рассматриваемой постановке задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты z.

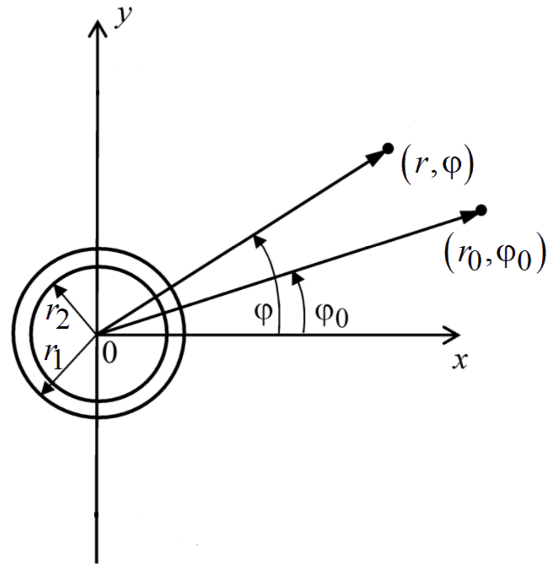


Рис. 1: К задаче дифракции цилиндрической волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [12]

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0.$$

Потенциал скорости полного акустического поля Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_s,$$

где Ψ_s — потенциал скорости рассеянной волны.

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi.$$

Используя теорему сложения для цилиндрических волновых функций [13], представим потенциал скорости падающей волны в основной системе координат в виде

$$\Psi_0 = A(-1)^m \exp(im\varphi_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \times$$

$$\times \begin{cases} H_{m-n}(kr_0) J_n(kr), & r < r_0 \\ J_{m-n}(kr_0) H_n(kr), & r > r_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка m.

Учитывая, что [13]

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad H_{-n}(x) = (-1)^n H_n(x), \tag{2}$$

из (1) для симметричной цилиндрической волны получаем

$$\Psi_0 = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \begin{cases} H_n(kr_0) J_n(kr), & r < r_0 \\ J_n(kr_0) H_n(kr), & r > r_0. \end{cases}$$

С учетом условий излучения на бесконечности [12] потенциал скорости рассеянной волны Ψ_s, являющийся решением уравнения Гельмгольца, будем искать в виде

$$\Psi_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородном упругом цилиндре и неоднородном покрытии.

Представим вектор смещения $\mathbf{u}_0$ частиц упругого изотропного однородного цилиндра в виде

$$\mathbf{u}_0 = \mathrm{grad} L + \mathrm{rot}\boldsymbol{\Phi},$$

где L и $\boldsymbol{\Phi}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения, которые в случае установившегося режима колебаний являются решениями скалярного и векторного уравнений Гельмгольца

$$\Delta L + k_l^2 L = 0,$$

$$\Delta \boldsymbol{\Phi} + k_\tau^2 \boldsymbol{\Phi} = 0,$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн.

Так как упругое тело находится в условиях плоской деформации, то $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_z = 0$, где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор оси z. Тогда векторный потенциал $\boldsymbol{\Phi} = \Phi(r,\varphi)\mathbf{e}_z$. В этом случае векторное уравнение сводится к одному скалярному уравнению относительно скалярной функции $\Phi(r,\varphi)$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0.$$

Учитывая условия ограниченности, функции L и Φ будем искать в виде

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_l r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \tag{4}$$

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(k_\tau r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \tag{5}$$

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_0$, записанные через функции L и Φ, в цилиндрической системе координат имеют вид

$$u_{0r} = \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad u_{0\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{0ij} и вектора смещения $\mathbf{u}_0$ в однородном изотропном цилиндре имеют вид [14]

$$\sigma_{0rr} = \lambda_0 \left[\frac{\partial u_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r}\right)\right] + 2\mu_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r},$$

$$\sigma_{0\varphi\varphi} = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{r}\left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r}\right) + \lambda_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r}, \quad \sigma_{0r\varphi} = \mu_0 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_{0r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{0\varphi}}{r}\right).$$

Используя соотношения, приведенные выше, выразим компоненты тензора напряжений σ_{0rr}, $\sigma_{0r\varphi}$ через функции L и Φ

$$\sigma_{0rr} = -\lambda_0 k_l^2 L + 2\mu_0 \left(\frac{\partial L}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right),$$

$$\sigma_{0r\varphi} = \frac{2\mu_0}{r}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right) - \mu_0\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right).$$

Уравнения движения упругого неоднородного слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды [14], которые в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\omega^2\rho u_r,$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} = -\omega^2\rho u_\varphi,$$

где u_r, u_φ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ в цилиндрической системе координат; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; $\rho = \rho(r)$.

Используя соотношения между компонентами тензора напряжений и вектора смещения в неоднородном покрытии, которые аналогичны соответствующим соотношениям для однородной упругой среды (с учетом замены λ_0 и μ_0 на λ и μ соответственно), запишем уравнения движения неоднородного покрытия через компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\lambda+\mu}{r}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi^2} + \left(\lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda+2\mu}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r}\left(\lambda' - \frac{\lambda+3\mu}{r}\right)\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda+2\mu}{r^2} + \omega^2\rho\right)u_r = 0, \\ \mu\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\lambda+\mu}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\lambda+2\mu}{r^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2} + \left(\mu' + \frac{\mu}{r}\right)\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r}\left(\mu' + \frac{\lambda+3\mu}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \left(-\frac{\mu'}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \omega^2\rho\right)u_\varphi = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $\lambda = \lambda(r)$; $\mu = \mu(r)$; штрих означает дифференцирование по r.

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом слое являются периодическими функциями координаты φ с периодом 2π. Поэтому функции u_r, u_φ будем искать в виде рядов Фурье

$$u_r(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}(r)e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad u_\varphi(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}(r)e^{in(\varphi-\varphi_0)}. \tag{7}$$

Подставляя разложения (7) в уравнения (6), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ для каждого n:

$$\hat{\mathbf{A}}_n\mathbf{U}_n'' + \hat{\mathbf{B}}_n\mathbf{U}_n' + \hat{\mathbf{C}}_n\mathbf{U}_n = 0, \tag{8}$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}, U_{2n})^T$; $\hat{\mathbf{A}}_n^{(l)} = (a_{nij})_{2\times 2}$, $\hat{\mathbf{B}}_n^{(l)} = (b_{nij})_{2\times 2}$, $\hat{\mathbf{C}}_n^{(l)} = (c_{nij})_{2\times 2}$ — матрицы второго порядка с элементами

$$a_{n11} = (\lambda+2\mu)\,r^2, \quad a_{n22} = \mu r^2, \quad a_{n12} = a_{n21} = 0,$$

$$\begin{gathered}b_{n11} = \left(\lambda' + 2\mu'\right)r^2 + (\lambda+2\mu)\,r, \quad b_{n12} = in\,(\lambda+\mu)\,r, \quad b_{n21} = in\,(\lambda+\mu)\,r, \\ b_{n22} = \mu' r^2 + \mu r, \quad c_{n11} = \lambda' r - \lambda - \left(n^2+2\right)\mu + \omega\rho r^2, \\ c_{n12} = in\left(\lambda' r - \lambda - 3\mu\right), \quad c_{n21} = in\left(\mu' r + \lambda + 3\mu\right), \\ c_{n22} = -\mu' r - n^2\lambda - \left(2n^2+1\right)\mu + \omega^2\rho r^2.\end{gathered}$$

Коэффициенты A_n, B_n, C_n разложений (3 - 5) и функции $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$ из разложений (7) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательного напряжения:

$$\text{при } r = r_1 \qquad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0. \tag{9}$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\text{при } r = r_2 \qquad u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}. \tag{10}$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ находим коэффициенты A_n, выраженные через величины $U_{1n}(r_1)$

$$A_n = -\frac{A\Omega_{mn} k J_n'(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)}{kH_n'(kr_1)}, \tag{11}$$

где

$$\Omega_{mn} = (-1)^{n+m} H_{m-n}(kr_0)\exp(im\varphi_0);$$

штрихи означают дифференцирование по аргументу.

В случае симметричной падающей волны ($m = 0$), учитывая (2), получаем

$$\Omega_{mn} = H_n(kr_0).$$

Из условий непрерывности составляющих вектора смещений при $r = r_2$ находим коэффициенты B_n и C_n, выраженные через $U_{1n}(r_2)$, $U_{2n}(r_2)$

$$B_n = \gamma_{1n} U_{1n}(r_2) + \gamma_{2n} U_{2n}(r_2), \quad C_n = \gamma_{3n} U_{1n}(r_2) + \gamma_{4n} U_{2n}(r_2),$$

где

$$\gamma_{1n} = k_\tau r_2 J_n'(k_\tau r_2)/\Delta_n, \quad \gamma_{2n} = inJ_n(k_\tau r_2)/\Delta_n,$$
$$\gamma_{3n} = inJ_n(k_l r_2)/\Delta_n, \quad \gamma_{4n} = -k_l r_2 J_n'(k_l r_2)/\Delta_n,$$
$$\Delta_n = \left[k_l r_2^2 J_n'(k_l r_2)\, k_\tau J_n'(k_\tau r_2) - n^2 J_n(k_l r_2)\, J_n(k_\tau r_2)\right]/r_2.$$

Из оставшихся неиспользованными граничных условий получаем четыре краевых условия для системы дифференциальных уравнений (8)

$$\left.\left(\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n' + \hat{\mathbf{D}}_n \mathbf{U}_n\right)\right|_{r=r_1} = \mathbf{G}_n,$$
$$\left.\left(\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n' + \hat{\mathbf{F}}_n \mathbf{U}_n\right)\right|_{r=r_2} = 0, \tag{12}$$

где $\mathbf{G}_n = (g_{n1}, 0)^T$; $\hat{\mathbf{D}}_n = (d_{nij})_{2\times 2}$, $\hat{\mathbf{F}}_n = (f_{nij})_{2\times 2}$ — матрицы второго порядка;

$$g_{n1} = 2A\rho_1\omega r_1 \Omega_{mn}/\left[\pi k H_n'(kr_1)\right],$$
$$d_{n11} = r\lambda + \rho_1\omega^2 r^2 H_n(kr)/\left[kH_n'(kr)\right], \quad d_{n12} = inr\lambda, \quad d_{n21} = inr\mu, \quad d_{n22} = -r\mu,$$
$$f_{n11} = r^2\left(\gamma_{1n} e_{1n} + \gamma_{3n} e_{2n} + \lambda/r\right), \quad f_{n12} = r^2\left(\gamma_{2n} e_{1n} + \gamma_{4n} e_{2n} + in\lambda/r\right),$$
$$f_{n21} = \mu_0 r^2\left[\gamma_{1n} e_{3n} + \gamma_{3n} e_{4n} + in\mu/(\mu_0 r)\right], \quad f_{n22} = \mu_0 r^2\left[\gamma_{2n} e_{3n} + \gamma_{4n} e_{4n} - \mu/(\mu_0 r)\right],$$
$$e_{1n} = \left[\lambda_0 n^2 J_n(k_l r) - k_l^2 r^2(\lambda_0 + 2\mu_0) J_n''(k_l r) - \lambda_0 k_l r J_n'(k_l r)\right]/r^2,$$
$$e_{2n} = 2\mu_0 in\left[J_n(k_\tau r) - k_\tau r J_n'(k_\tau r)\right]/r^2, \quad e_{3n} = 2in\left[J_n(k_l r) - k_l r J_n'(k_l r)\right]/r^2,$$
$$e_{4n} = \left[k_\tau^2 r^2 J_n''(k_\tau r) - k_\tau r J_n'(k_\tau r) + n^2 J_n(k_\tau r)\right]/r^2.$$

4. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Найдем решение краевой задачи (8), (12) методом сплайн-коллокации [15]. Введём на отрезке $[r_2, r_1]$ равномерную сетку $\Delta: \ r_2 = x_0 < x_1 < ... < x_M = r_1$ с шагом h. Будем искать приближенное решение краевой задачи в виде кубических сплайнов $S_{1n}(r)$, $S_{2n}(r)$ дефекта 1 с узлами на сетке Δ. Здесь $S_{1n}(r)$, $S_{2n}(r)$ — сплайн-функции, приближающие функции $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$ соответственно.

Представим кубические сплайны в виде разложения по базису из нормализованных кубических B-сплайнов [15]

$$S_{\gamma n}(r) = \sum_{l=-1}^{M+1} b_{\gamma n}^{(l)} B_l(r) \quad (\gamma = 1, 2), \tag{13}$$

где $b_{\gamma n}^{(l)}$ — коэффициенты разложения, которые подлежат определению; B_l — базисная сплайн-функция, отличная от нуля на интервале-носителе (x_{l-2}, x_{l+2}) со средним узлом x_l;

$$B_l(r) = \frac{1}{6}\left[2 + \frac{r - x_l}{h}\right]^3 B_l^0(r) + \left[\frac{2}{3} - \frac{(r - x_l)^2}{h^2} - \frac{1}{2}\frac{(r - x_l)^3}{h^3}\right] B_{l+1}^0(r) +$$

$$+ \left[\frac{2}{3} - \frac{(r - x_l)^2}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{(r - x_l)^3}{h^3}\right] B_{l+2}^0(r) + \frac{1}{6}\left[2 - \frac{r - x_l}{h}\right]^3 B_{l+3}^0(r),$$

$$B_l^0(r) = \begin{cases} 1, & r \in [x_{l-2}, x_{l-1}) \\ 0, & r \notin [x_{l-2}, x_{l-1}). \end{cases}$$

Для того, чтобы все базисные функции в (13) были определены, сетка должна быть дополнена узлами $x_{\zeta-3} = x_0 + (\zeta - 3)h, \ x_{M+3-\zeta} = x_M + (3 - \zeta)h, \ \zeta = 0, 1, 2.$

Потребуем, чтобы сплайны $S_{\gamma n}(r)$ удовлетворяли системе (8) и краевым условиям (12) в узлах коллокации, совпадающих с узлами сетки Δ. Используя выражения для узловых значений B-сплайна и его производных [15], получим систему $2M + 6$ линейных алгебраических уравнений относительно такого же числа неизвестных коэффициентов $b_{\gamma n}^{(l)}$ $(\gamma = 1, 2; \quad l = -1, 0, 1, ..., M + 1)$

$$\mathbf{V}_n^{(0)} b_n^{(0)} = 0, \quad \mathbf{W}_n^{(l)} b_n^{(l)} = 0 \ \ (l = 0, 1, ..., M), \quad \mathbf{T}_n^{(M)} b_n^{(M)} = 6hG_n, \tag{14}$$

где

$$b_n^{(l)} = \left(b_{1n}^{(l-1)}, b_{2n}^{(l-1)}, b_{1n}^{(l)}, b_{2n}^{(l)}, b_{1n}^{(l+1)}, b_{2n}^{(l+1)}\right)^T,$$

$\mathbf{V}_n^{(l)} = (v_{\alpha\beta})_{2\times 6}, \quad \mathbf{W}_n^{(l)} = (w_{\alpha\beta})_{2\times 6}, \quad \mathbf{T}_n^{(l)} = (t_{\alpha\beta})_{2\times 6}$ — матрицы с элементами

$$v_{\alpha\tau} = -3a_{\alpha\tau} + hf_{\alpha\tau}, \quad v_{\alpha,\tau+2} = 4hf_{\alpha\tau}, \quad v_{\alpha,\tau+4} = 3a_{\alpha\tau} + hf_{\alpha\tau},$$

$$w_{\alpha\tau} = 6a_{\alpha\tau} - 3hb_{\alpha\tau} + h^2c_{\alpha\tau}, \quad w_{\alpha,\tau+2} = -12a_{\alpha\tau} + 4h^2c_{\alpha\tau}, \quad w_{\alpha,\tau+4} = 6a_{\alpha\tau} + 3hb_{\alpha\tau} + h^2c_{\alpha\tau},$$

$$t_{\alpha\tau} = -3a_{\alpha\tau} + hd_{\alpha\tau}, \quad t_{\alpha,\tau+2} = 4hd_{\alpha\tau}, \quad t_{\alpha,\tau+4} = 3a_{\alpha\tau} + hd_{\alpha\tau} \quad (\tau = 1, 2).$$

Нижний индекс n, которым должны быть снабжены элементы $v_{\alpha\beta}$, $w_{\alpha\beta}$, $t_{\alpha\beta}$ для простоты записи опущен. Верхний индекс l в записи матриц $\mathbf{V}_n^{(l)}$, $\mathbf{W}_n^{(l)}$, $\mathbf{T}_n^{(l)}$ означает, что элементы матриц, зависящие от r, вычисляются при $r = x_l$.

Решая систему (14), находим приближенное решение краевой задачи (8), (12) в виде (13). Затем вычисляем коэффициенты A_n, B_n, C_n разложений (3 – 5). В результате получаем аналитические выражения, описывающие волновые поля вне и внутри цилиндрического тела.

Определим модовые механические импедансы поверхности упругого цилиндра с неоднородным покрытием. Модовый импеданс Z_n определяется по формуле [12]

$$Z_n = -\frac{p_n}{v_n}\bigg|_{r=r_1},$$

где p_n и v_n — максимальные значения звукового давления и радиальной колебательной скорости частиц полного акустического поля для моды с номером n соответственно.

Учитывая, что

$$p = i\rho_1\omega(\Psi_0 + \Psi_s), \quad v_n = \frac{\partial(\Psi_0 + \Psi_s)}{\partial r},$$

с помощью разложений (1) и (3) и формулы (11) получим выражения для p_n и v_n при $r = r_1$.

Используя выражение для вронскиана [16]

$$J_n(x)\, H_n'(x) - J_n'(x)\, H_n(x) = 2i/(\pi x),$$

находим

$$p_n(r_1) = -\omega\rho_1 \left[2A\Omega_{mn} - \pi\omega r_1 H_n(kr_1) U_{1n}(r_1)\right]/[\pi k r_1 H_n'(kr_1)],$$
$$v_n(r_1) = -i\omega U_{1n}(kr_1).$$

В результате получаем выражение для модового импеданса

$$Z_n = \frac{i\rho_1 \left[2A\Omega_{mn} - \pi\omega r_1 H_n(kr_1)\, U_{1n}(r_1)\right]}{\pi k r_1 H_n'(kr_1)\, U_{1n}(r_1)}.$$

5. Численные исследования

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля ($kr \gg 1$). Используя асимптотическое представление функции Ганкеля при больших значениях аргумента [16]

$$H_n(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \exp\left[i\left(kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

из (3) находим

$$\Psi_S = \sqrt{\frac{r_1}{2r}} \exp\left[i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)\right] F(\varphi),$$

где

$$F(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi k r_1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n A_n e^{in(\varphi-\varphi_0)}. \tag{15}$$

На основе полученного решения были проведены расчеты угловых и частотных характеристик рассеянного акустического поля в дальней зоне. Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2,7\cdot 10^3$ кг/м^3, $\lambda_0 = 5,3\cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\mu_0 = 2,6\cdot 10^{10}$ Н/м^2) радиуса $r_2 = 0,8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м находится в свободном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 1000$ кг/м^3, $c = 1485$ м/с). Рассматривались однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1070$ кг/м^3 и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3,9\cdot 10^9$ Н/м^2, $\mu^0 = 9,8\cdot 10^8$ Н/м^2 (поливинилбутираль) и неоднородное покрытие,механические характеристики которого менялись по толщине слоя по законам

$$\rho = \rho^0 f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0$$

где

$$f(r) = (r_1 - r)/(r_1 - r_2) + 0,5, \quad r_2 \leqslant r \leqslant r_1.$$

Полагалось, что линейный источник излучает симметричную звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_0 = 6r_1$ и $\varphi_0 = 0$.

Суммирование в (15) проводилось для n, изменяющихся от $-N$ до N, где $N = [2kr_1] + 1$ ([ ] — целая часть числа). Для контроля точности приближенного решения краевой задачи (8), (12) вычисления проводились на сгущающихся вдвое сетках. Вычислительный процесс останавливался тогда, когда на последней паре сеток в некоторых произвольно выбранных точках $\xi \in [r_2, r_1]$ величины $|U_{jn}(\xi)|$ $(j = 1, 2)$ различались не более, чем на 10^{-7}.

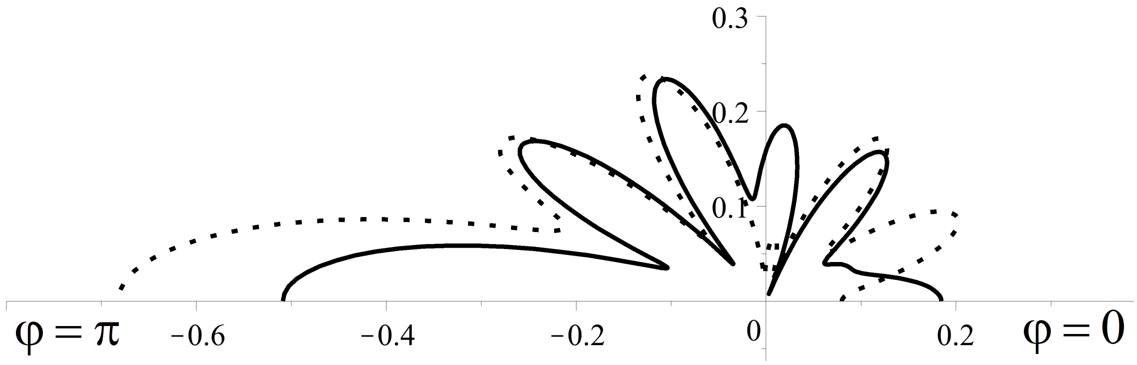


Рис. 2: Диаграммы направленности рассеянного поля

На рис. 2 и рис. 3 представлены полярные диаграммы направленности и частотные характеристики рассеянного акустического поля в дальней зоне. Сплошные линии на рисунках соответствуют случаю неоднородного покрытия, пунктирные — однородному упругому покрытию.

Диаграммы направленности $|F(\varphi)|$ рассчитаны при волновом размере тела $kr_1 = 5$. В силу симметрии изображена только половина диаграммы.

Частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $|F(\pi)|$ от волнового размера цилиндра kr_1 рассчитаны в интервале $2.6 < kr_1 \leqslant 10$. Отметим, что при $kr_1 < 2.6$ частотные зависимости при однородном и неоднородном покрытиях отличаются незначительно. С увеличением частоты такое отличие становится все более заметным.

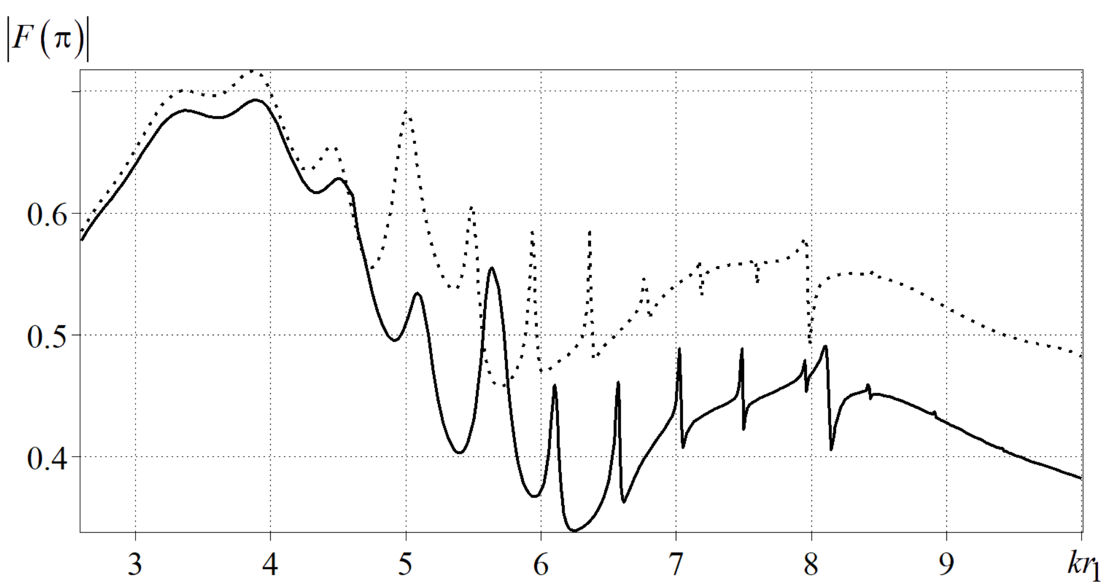


Рис. 3: Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием

Сравнение диаграмм направленности и частотных характеристик для тел с однородными и неоднородными покрытиями показывает, что неоднородность покрытия существенно влияет на дифракционную картину.

6. Заключение

На основе полученного аналитического решения задачи проведены численные расчеты, которые выявили возможность изменять звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел с помощью непрерывно-неоднородных покрытий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.

2. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.

3. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.

4. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.

5. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54-62.

6. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 4. С. 189-199.

7. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями // Чебышевский сборник, 2018. Т. 19. № 1. С. 238-254.

8. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276-289.

9. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 4. С. 361–373.

10. Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 1. С. 270-281.

11. Толоконников Л. А., Белкин А. Э. Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражения звука // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 4. С. 346-360.

12. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

13. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

14. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

15. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.

16. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.

REFERENCES

1. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.

2. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].

3. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.

4. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208, [in Russian].

5. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2014, "About definition of linear laws of heterogeneity of the cylindrical elastic layer having the least reflexion in the set direction at sound scattering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4, pp. 54-62, [in Russian].

6. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no 4, pp. 733-742.

7. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves on two elastic cylinders with non-uniform coatings", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no 1, pp. 238-254, [in Russian].

8. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki* , no 9, pp. 276-289, [in Russian].

9. Tolokonnikov, L. A., Efimov D. Yu. 2020, "Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 361–373, [in Russian].

10. Tolokonnikov, L. A. 2019, "Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no 1, pp. 270-281, [in Russian].

11. Tolokonnikov, L. A. Belkin, A. E. 2020, "Determination of the inhomogeneity laws of a cylinder covering located in a plane waveguide for providing minimum sound reflection", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 346–360, [in Russian].

12. Shenderov, E. L. 1972, *"Wave problems of underwater acoustics"*, Sudostroenie, Leningrad, 352 p., [in Russian].

13. Ivanov, E. A. 1968, *"Diffraction of electromagnetic waves by two bodies"*, Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p.,[in Russian].

14. Nowacki, W. 1975, *"Teoria sprezystosci"*, Mir, Moscow, 872 p., [in Russian].

15. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, *"Spline function methods"*, Nauka, Moscow, 352 p.,[in Russian].

16. Lebedev, N. N. 1963, *"Special Functions and their Applications"*, Fizmatgiz, Moscow, 358 p.,[in Russian].

Получено 18.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 539.374 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-473-481

Основные уравнения, определяющие напряженно-деформированное пластическое состояние металлических материалов с учетом их физико-структурных параметров

Н. Д. Тутышкин, В. Ю. Травин

Тутышкин Николай Дмитриевич — доктор технических наук, профессор, Управление научно-исследовательских работ, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru
Травин Вадим Юрьевич — кандидат технических наук, НПО «Сплав» имени А.Н. Ганичева (г. Тула).
e-mail: travin.vu@mail.ru

Аннотация

Приводятся основные уравнения и определяющие соотношения, определяющие напряженно-деформированное пластическое состояние металлических материалов с учетом их физико-структурных параметров. Подход к формулировке определяющих соотношений основывается на включении в число критериальных, наряду с традиционными макромеханическими, физико-структурных параметров. К ним относится, в первую очередь, параметр повреждаемости материала дефектами деформационного происхождения. На основе экспериментов установлена связь между напряжением, необходимым для движения заблокированной дислокации, и мерой повреждаемости деформационными микродефектами, необходимая для определения предела текучести и, далее, эволюции поверхности нагружения с учетом влияющих на нее факторов. Проведенные опыты по двухэтапному растяжению образцов из сплава AlMg3 показали существенное влияние деформационной повреждаемости на напряженное состояние.

Ключевые слова: основные уравнения, определяющие соотношения, пластичность, напряжения, деформации, физико-структурные параметры, повреждаемость, диссипация энергии, поверхность нагружения.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Н. Д. Тутышкин, В. Ю. Травин. Основные уравнения, определяющие напряженно-деформированное пластическое состояние металлических материалов с учетом их физико-структурных параметров // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 473–481.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 539.374 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-473-481

Basic equations determining stress-strain plastic state of metal materials taking into account their physical and structural parameters

N. D. Tutyshkin, V. Yu. Travin

Tutyshkin Nikolai Dmitrievich — doctor of technical sciences, professor, Department of Research, Tula State University (Tula).
e-mail: nikolai.tutyshkin@mail.ru
Travin Vadim Yurievich — candidate of technical sciences, Scientific and Production Association «SPLAV» named after A.N. Ganichev (Tula).
e-mail: travin.vu@mail.ru

Abstract

Basic equations and determining relations are given, which determine stressed-deformed plastic state of metal materials taking into account their physical and structural parameters. The approach to the formulation of defining relationships is based on the inclusion in the number of criterion, along with traditional macro-mechanical, physical and structural parameters. These include, first of all, the parameter of material damage by defects of deformation origin. On the basis of experiments, a connection was established between the stress necessary for the movement of the blocked dislocation and the measure of damage by deformation microfects, necessary for determining the yield strength and, further, the evolution of the loading surface taking into account the factual factors affecting it. The two-stage stretching tests of the AlMg3 alloy samples showed a significant effect of strain resistance on the stress state.

Keywords: basic equations determining ratios, ductility, stresses, strains, physical-structural parameters, damage, energy dissipation, load surface.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
N. D. Tutyshkin, V. Yu. Travin, 2021, "Basic equations determining stress-strain plastic state of metal materials taking into account their physical and structural parameters", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 473–481.

1. Введение

В статье развивается кинетический подход к анализу и проектированию процессов пластического формоизменения металлов с прогнозированием их деформационой повреждаемости. В число критерильных параметров, наряду с механическими, включаются физико-структурные характеристики деформируемых металлов. К физико-структурным параметрам, существенно влияющим на эксплуатационные свойства конструкционых металлических материалов, относятся характеристики поврежденности деформационными микродефектами, величины зерна поликристаллических агрегатов структуры материала и внутренней энергии упрочнения [1]. Анализ и определение технологических возможностей процессов пластического деформирования также часто требует учета физико-структурных изменений обрабатываемых металлов (кинетики роста и размножения микродефектов, изменение средней величины зерна). Многие сложные вопросы анализа, проектирования и разработки технологических процессов пластического формообразования изделий связаны с их математическим моделированием и остаются недостаточно изученными. К ним относятся вопросы, связанные с распределением напряжений, скоростей течения и деформаций с учетом физико-структурных параметров обрабатываемых материалов.

2. Основные уравнения

Анализ и моделирование процессов пластического формоизменения с прогнозируемой деформационной повреждаемостью требует определения полей напряжений и деформаций, с учетом реологического поведения обрабатываемых материалов. Решение этих вопросов основывается на использовании связанной системы уравнений для механических и физико-структурных параметров пластически деформируемых материалов. Следуя опубликованным работам [2, 3, 4, 5, 6], за основной физико-структурный параметр принимается параметр повреждаемости материала дефектами деформационного происхождения (ω). Пластическое формоизменение материалов с прогнозируемой деформационной повреждаемостью описывается в ортогональной системе криволинейных координат x_i $(i = 1, 2, 3)$ следующими основными и определяющими уравнениями [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla_i \nu_i + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0, \tag{2}$$

$$f(s_{ij}, \Lambda, T) = 0, \tag{3}$$

$$\dot{e}_{ij} = \dot{\lambda}\frac{df}{ds_{ij}}, \tag{4}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}(\Lambda, \overline{\sigma}, T), \tag{5}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ν_i — компоненты вектора скорости; s_{ij} — девиаторные компоненты напряжений; $\dot{e}_{ij}$ — компоненты тензора скорости деформации; Λ — степень деформации сдвига (параметр Одквиста); $\overline{\sigma} = \sigma/T$ — параметр трехосности напряженного состояния (σ — среднее напряжение, T — интенсивность касательных напряжений); $f(s_{ij}, \Lambda, T)$ — пластический потенциал; T — термодинамическая температура; ω — параметр повреждаемости (физико-структурный параметр); $\dot{\lambda}$ — скалярная величина, пропорциональная мощности пластической деформации; ρ — плотность материала; t — время.

Система (1)–(5) состоит из дифференциальных уравнений равновесия (1), условия сплошности (2), уравнения поверхности текучести (3), условия градиентности скоростей деформации (4) и кинетического уравнения деформационной повреждаемости (5).

Шесть уравнений (4) не являются взаимно независимыми и сводятся к трем уравнениям соосности:

$$\frac{\dot{e}_{ij}}{\sigma_{ij}} = \frac{\dot{e}_{ii} - \dot{e}_{jj}}{\sigma_{ii} - \sigma_{jj}} \ \ (i, j = 1, 2, 3, \ i \neq j) \tag{6}$$

и условию подобия

$$\phi_{\dot{e}} = \phi_{\sigma} \tag{7}$$

девиаторов скорости деформации $D_{\dot{e}}$ и напряжения D_{σ} ($\phi_{\dot{e}}, \phi_{\sigma}$ — фазовые углы девиаторов).

В дальнейшем в качестве поверхности нагружения $f = 0$ принимается обобщенная функция текучести Мизеса [6]

$$f(s_{ij}, \Lambda, T) = \frac{1}{2}(s_{ij}s_{ij}) - \tau_S^2(\Lambda, T) = 0, \tag{8}$$

где τ_S — предел текучести материала при сдвиге.

Как показали многочисленные эксперименты [7, 8, 9, 10], обобщенная функция текучести (8) вполне удовлетворительно описывает поведение металлических конструкционных материалов при больших конечных деформациях.

Степень деформации сдвига (параметр Одквиста [11])

$$\Lambda = \int_S \sqrt{2(de_{ij}de_{ij} - de_{ii}de_{jj})}, \tag{9}$$

где de_{ij} — компоненты девиатора приращения деформации D_{de}.

Интенсивность скоростей деформации сдвига H связана с параметром Одквиста Λ неголономным уравнением:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = H. \tag{10}$$

Значения параметра Λ определяются интегрированием соотношения (9) для каждого известного пути деформации s, когда приращения деформации de_{ij} известны.

Уравнение поверхности нагружения (3) совместно с соотношениями (4) определяют ассоциированный закон пластического течения металлов. Условие градиентности (4) позволяет построить определяющие соотношения между скоростями $\dot{e}_{ij}$ (или приращениями de_{ij}), деформациями e_{ij} и напряжениями s_{ij} для больших пластических деформаций. Структура соотношений (4), удовлетворяющих функции нагружения (3), устанавливается из принципа минимума работы истинных напряжений на приращениях пластической деформации [11]:

$$\partial\lambda = \dot{\lambda}dt = hd'f, \tag{11}$$

где $h > 0$ — функция переменных параметров, определяющих физико-механическое состояние материала; $d'f$ — дифференциал поверхности нагружения $f = 0$ при неизменных деформациях.

Соотношения (4) с учетом равенства (11) принимают следующий вид:

$$de_{ij} = h\frac{\partial f}{\partial s_{ij}}d'f. \tag{12}$$

Дифференциал функции нагружения при неизменных деформациях [11]:

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T}d(T - \delta T_S) > 0, \tag{13}$$

где δT_S — приращение температуры, связанное с диссипативной функцией $w = s_{ij}\dot{e}_{ij}$.

Неравенство $d'f > 0$ является условием активного нагружения (для последующего продолжения пластической деформации).

3. Построение определяющих соотношений

Для определения скалярного множителя $\partial\lambda = h\,d'f$ необходимо построить функцию текучести Мизеса. Экспериментальные данные свидетельствуют о сильном влиянии на предел текучести степени, температуры, и повреждаемости материала, т.е.:

$$\sigma_S = \tau_S\sqrt{3} = \sigma_S(e_i, T, \omega), \tag{14}$$

где $e_i = (1/\sqrt{3})\Lambda$ — интенсивность накопленных деформаций.

Зависимость (14) изображается для каждого материала гиперповерхностью $f = 0$ в пространстве σ_S, e_i, T, ω. Поверхность $f = 0$ можно задавать для каждого материала с помощью опорных кривых, построенных на основе опытов с варьируемыми условиями деформации. На основе систематизированных экспериментальных данных используется следующая структура опорных неизотермических кривых упрочнения [1]:

$$\sigma_S = \sigma_S^{\text{из}} \exp\Big[-\alpha\Big(\frac{T - T_0}{T_{\max} - T_0}\Big)^q\Big], \tag{15}$$

где $\sigma_S^{\text{из}} = \sigma_S^{\text{из}}(e_i, T_0, \omega)$ — изотермическая кривая упрочнения, построенная при начальной температуре T_0; $T_{\max}$ — максимальная температура обработки; α, q — параметры температурной зависимости предела текучести.

Характер температурной зависимости предела текучести $\sigma_S(T)$ описывается снижением энергии активации, т.е. уменьшением энергетического порога для движения дислокаций вследствие термических флуктуаций. Экспоненциальная зависимость предела текучести от температуры (15) выводится из основных соотношений термодинамики для деформируемого металла [12, 13]. Задача построения неизотермических кривых для материалов с переменной структурой сильно усложняется необходимостью определения величин T, α, q, которые зависят от исходного состояния и пути деформации s. Изменение температуры T связано как с эффектом тепловыделения в процессе деформации, так и отводом (или притоком) тепла от обрабатываемого материала.

Рассмотрим определение величин, входящих в зависимость (15). Изменение изотермического предела текучести связывается со степенью деформации e_i и повреждаемостью ω. Величина внутренней энергии упрочнения влияет на связь эффекта тепловыделения с диссипацией энергии формоизменения и учитывается при расчете температуры деформации. Таким образом,

$$\sigma_S^{\text{из}} = \sigma_S^{\text{из}}(e_i, T_0, \omega). \tag{16}$$

Зависимость изотермического предела текучести от степени деформации может быть аппроксимирована степенной трехпараметрической зависимостью:

$$\sigma_S^{\text{из}} = \sigma_{0,2} + B e_i^{(n_0 - n_1 e_i)}, \tag{17}$$

где $\sigma_{0,2}$ — начальный предел текучести; B, n_0, n_1 — параметры деформационного упрочнения, которые находятся по опытной кривой.

Начальный предел текучести при деформации поликристаллических материалов зависит от размеров зерна. Эта зависимость обусловлена передачей деформации от зерна к зерну и определяется соотношением Холла-Петча [13, 14]:

$$\sigma_{0,2} = \sigma_0 + k_y D^{-\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

где D — средний диаметр зерен; σ_0 — сопротивление движению свободной дислокации; k_y — коэффициент (мера) блокирования.

Величина k_y пропорциональна напряжению σ_d, необходимому для движения заблокированной дислокации, и зависит от дислокационной структуры металла [13], т.е.

$$k_y = \sigma_d l^{-\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

где l — среднее расстояние от границы зерна до ближайшего источника дислокаций.

На основе экспериментов может быть установлено соотношение между напряжением σ_d, необходимом для движения заблокированной дислокации, и мерой повреждаемости деформационными микродефектами ω:

$$\sigma_d = \sigma_{d/\omega=0} + A\omega^m, \tag{20}$$

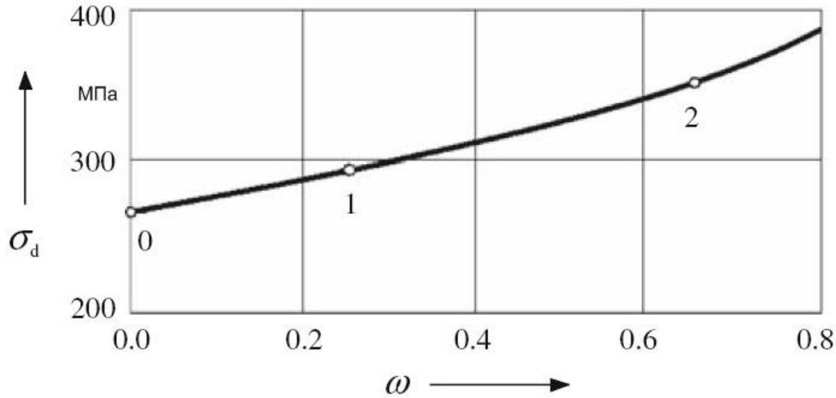


Рис 1. Зависимость между напряжением σ_d и поврежденностью ω при пластической деформации (сплав AlMg3)

Таблица 1. Экспериментальное определение функции $\sigma_d(\omega)$

Стадии деформации	Параметр повреждаемости, ω	Содержание дислокаций, ρ^*, см$^{-2}$	Напряжение, σ_d, МПа	Материальные константы	
				A, МПа	m
Начальная деформация (точка 1)	0	10^8	265	157	1.40
Первая стадия деформации (точка 1)	0.26	10^9	289		
Вторая стадия деформации (точка 2)	0.66	10^{11}	353		

где A и m — параметры степенной функции, вычисляемые по опорным точкам $0(\omega = 0; \sigma_{d/\omega=0})$, $1(\omega^{(1)}; \sigma_d^{(1)})$ и $2(\omega^{(2)}; \sigma_d^{(2)})$ опытной зависимости (рис. 1):

$$m = \frac{\ln \frac{\sigma_d^{(2)} - \sigma_{d/\omega=0}}{\sigma_d^{(1)} - \sigma_{d/\omega=0}}}{\ln \frac{\omega^{(2)}}{\omega^{(1)}}}, \quad A = \frac{\sigma_d^{(1)} - \sigma_{d/\omega=0}}{(\omega^{(1)})^m} = \frac{\sigma_d^{(2)} - \sigma_{d/\omega=0}}{(\omega^{(2)})^m}. \tag{21}$$

Для экспериментального определения функции $\sigma_d(\omega)$ проводились опыты по двухэтапному растяжению предварительно отожженных образцов. После каждого этапа измерялись мера повреждаемости ω и плотность дислокаций ρ^*. Мера повреждаемости ω определялась по методике проф. Н.Д. Тутышкина [5]. Плотность дислокаций ρ^* оценивалась на основе рентгеноструктурного анализа. Далее по известным зависимостям $\sigma_d(\rho^*)$ [10] рассчитывалось напряжение σ_d. Результаты экспериментального определения функции (20) приведены в таблице 1.

Можно предположить, что степенной характер зависимости напряжения σ_d от меры повреждаемости ω связан с возрастанием плотности дислокаций ρ^* при пластическом течении материала. Изотермическая зависимость предела текучести при заданных температурно-скоростных условиях деформации с учетом соотношений (17)–(19) принимает вид:

$$\sigma_S^{\text{из}} = \sigma_0 + \left(\sigma_{d/\omega=0} + A\omega^m\right) D^{-\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} + B e_i^{(n_0 - n_1 e_i)}. \tag{22}$$

Реологическая зависимость (5) вполне удовлетворительно описывает изменение предела текучести при пластической деформации многих конструкционных металлов. Экспоненциальная зависимость предела текучести от температуры выводится из основных соотношений термодинамики для деформируемых металлов [9].

Приращение температуры материала, связанное с диссипацией энергии формоизменения, находится из уравнения сохранения энергии

$$da_i = c\rho dT + d\text{э}^{(\mu)}, \tag{23}$$

где a_i — удельная работа формоизменения; c — удельная теплоемкость материала; $\text{э}^{(\mu)}$ — внутренняя диссипация энергии, связанная с изменением структурных параметров μ_k.

Справедливость уравнения (23) подтверждается экспериментальными данными, согласно которым не вся работа на пластических деформациях переходит в теплоту, часть ее затрачивается на структурные изменения материала. Поэтому в качестве внутренней диссипации энергии принималась внутренняя энергия упрочнения, т.е. $\text{э}^{(\mu)} = \text{э}_n$. Внутренняя энергия упрочнения определяется в долях работы формоизменения, т.е. $\text{э}^{(\mu)} = k^{(\text{э}_n)}w$, где $k^{(\text{э}_n)} = 0.1 \ldots 0.15$ [15]. Долевой коэффициент определяется экспериментально через разность между затраченной работой деформации и выделившейся тепловой энергией в связи с пластической диссипацией. Тепловая энергия определяется калориметрическим способом.

Уравнение поверхности нагружения (8), с учетом зависимости (15), приводится к следующему виду:

$$\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} - \big(\tau_S^{(\text{из})}\big)^2 \exp\Big[-2\alpha\Big(\frac{T-T_0}{T_{\max}-T_0}\Big)^q\Big] = 0 \tag{24}$$

Дифференциал зависимости предела текучести (22) с учетом обозначения $T^2 = (1/2)s_{ij}s_{ij}$ может быть выражен следующим образом:

$$d'f = 2T\frac{\partial T}{\partial s_{ij}}s_{ij} - 2\tau_S^{(\text{из})}\exp\Big[-2\alpha\Big(\frac{T-T_0}{T_{\max}-T_0}\Big)^q\Big]$$

$$\times\Big[-\alpha q\tau_S^{(\text{из})}\Big(\frac{T-T_0}{T_{\max}-T_0}\Big)^{q-1} d\Big(\frac{T-\Delta T_S}{T_{\max}-T_0}\Big) + \frac{\partial\tau_S^{(\text{из})}}{\partial\mu_k} + d'\mu_k\Big]. \tag{25}$$

Скалярная величина h принимает вид:

$$h = \frac{1}{4\tau_S^{(\text{из})}T}\exp\Big[2\alpha\Big(\frac{T-T_0}{T_{\max}-T_0}\Big)^q\Big]\Big(\frac{\partial T}{\partial s_{ij}}\Big)^{-1}$$

$$\times\Big[\frac{\partial\tau_S^{(\text{из})}}{\partial e_{ij}} - K_S\alpha q\tau_S^{(\text{из})}\frac{(T-T_0)^{q-1}}{(T_{\max}-T_0)^q} + A_S\frac{\partial\tau_S^{(\text{из})}}{\partial\mu_k}\Big]^{-1}, \tag{26}$$

где K_S, A_S — функции физико-механических параметров материала.

Таким образом, при анализе процессов пластического формоизменения целесообразно рассматривать эволюцию поверхности нагружения с учетом влияющих на нее факторов.

4. Заключение

Изложенный связанный подход к решению основных уравнений для механических и структурных характеристик позволит на основе изучения истории пластического формоизменения материала определять важнейшие критериальные параметры, необходимые для обоснованного проектирования технологических процессов (выбор переходов штамповки, формы и размеров полуфабрикатов, исполнительных размеров инструмента, температурно-скоростного режима обработки и т.д.). Этот подход основывается на определении согласованных полей напряжений и скоростей пластического течения в условиях сложного нагружения и предполагает использование более реальных моделей обрабатываемых материалов с учетом их физико-структурных параметров. Этот подход может быть особенно необходимым при анализе и проектировании нестационарных и скоростных процессов пластического деформирования с сильным изменением напряжений и скоростей деформаций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тутышкин Н. Д., Трегубов В. И. Связанные задачи теории повреждаемости деформируемых материалов. /Под ред. Н.Д. Тутышкина. Тула: ТулГУ–РАРАН, 2016. 267 с.

2. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением. Екатеринбург: Уральский гос. техн. ун-т, 2001. 836 с.

3. McClintock F. A. A criterion for ductile fracture by the growth of holes // Journal of Applied Mechanichs. 1968. Vol. 90. P. 363-371.

4. Bao Y., Wierzbicki T. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space // International Journal Mechanical Sciences. 2004. Vol. 46. P. 81-98.

5. Tutyshkin N. D., Müller W. H., Wille R., Zapara M. A. Strain-induced damage of metals under large plastic deformation: Theoretical framework and experiments // International Journal of Plasticity. 2014. Vol. 59. P. 133–151.

6. Майборода В. П., Кравчук А. С., Холин Н. Н. Скоростное деформирование конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1986. 264 с.

7. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

8. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.

9. Хилл Р. Математическая теория пластичности. / Пер. с англ. Э.И. Григолюка. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

10. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 2. Конечные деформации. / Пер. с англ. Под ред. А.П. Фалина. М.: Наука, 1984. 432 с.

11. Седов Л. И. Механика сплошной среды. В 2 т. Т.2. М.: Наука, 1984. 560 с.

12. Зайков М.А. Прочность углеродистых сталей при высоких температурах // Журнал технической физики. 1949. Т.19. Вып. 6. С. 684- 695.

13. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твёрдых тел. М.: Металлургия, 1971. 264 с.

14. Бернштейн М. Л. Термомеханическая обработка металлов и сплавов. Т.2. М.: Металлургия, 1968. 575 с.

15. Бернштейн М. Л. Структура деформированных металлов. М.: Металлургия, 1977. 431 с.

REFERENCES

1. Tutyshkin N. D., Tregubov V. I., 2016, "Related problems of the theory of hardness of deformable materials" , Ed. N.D. Tutyshkin, *Tula: TulGU–RARAN*, 267 p. (In Russian)

2. Kolmogorov V. L., 2001, "Mechanics of metal forming", *Ekaterinburg: Ural State Technical University*, 836 p. (In Russian)

3. McClintock F. A., 1968, "A criterion for ductile fracture by the growth of holes", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 90, p.p. 363–371.

4. Bao Y., Wierzbicki T., 2004, "On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 46, p.p. 81–98.

5. Tutyshkin N. D., Müller W. H., Wille R., Zapara M. A., 2014, "Strain-induced damage of metals under large plastic deformation: Theoretical framework and experiments", *International Journal of Plastisity*, Vol. 59, p.p. 133–151.

6. Mayboroda V. P., Kravchuk A. S., Holin N. N., 1986, "High-speed deformation of structural materials *M.: Mechanical Engineering*, 264 p. (In Russian)

7. Kachanov L. M., 1969, "Fundamentals of plasticity theory", *M.: Science*, 420 p. (In Russian)

8. Malmeister A. K., Tamuzh V. P., Teters G. A., 1980, "Resistance of polymer and composite materials", *Riga: Zinatne*, 572 p. (In Russian)

9. Hill R., 1956, "Mathematical Theory of Plasticity", Per. from the English E.I. Grigolyuk, *M.: Gostexizdat*, 407 p. (In Russian)

10. Bell J. F., 1984, "Experimental foundations of mechanics of deformable solid bodies", Part 2, Final strains, Per. from English. Ed. A.P. Falin, *M.: Science*, 432 p. (In Russian)

11. Sedov L. I., 1984, "Mechanics of a continuous environment", In 2 vol., Vol.2. *M.: Science*, 560 p. (In Russian)

12. Zaikov M. A., 1949, "Strength of carbonaceous steels at high tempera-tours", *Journal of technical physics*, Vol.19, Issue 6, p.p. 684–695. (In Russian)

13. Ekobori T., 1971, "Physics and mechanics of destruction and strength of solid bodies", *M.: Metallurgy*, 1971, 264 p. (In Russian)

14. Bernstein M. L., 1968, "Thermomechanical treatment of metals and alloys", Vol.2, *M.: Metallurgy*, 575 p. (In Russian)

15. Bernstein M. L., 1977, "Structure of deformed metals", *M.: Metallurgy*, 431 p. (In Russian)

Получено 20.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-482-487

О последовательности первых двоичных цифр дробных частей значений многочлена[1]

А. Я. Белов, Г. В. Кондаков, И. В. Митрофанов, М. М. Голафшан

Посвящается 70-летию академика А. Л. Семёнова

Алексей Яковлевич Канель-Белов — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Университет Бар-Илана (г. Москва, Израиль).
e-mail: kanelster@gmail.com
Григорий Вячеславович Кондаков — кандидат физико-математических наук, Московский физико-технический институт (г. Москва).
e-mail: kondakov@yandex.ru
Иван Викторович Митрофанов — Высшая нормальная школа, Исследовательский университет PSL (Франция).
e-mail: phortim@yandex.ru
Мехди Голафшан — Московский физико-технический институт (г. Москва).
e-mail: m.golafshan@phystech.edu
Иван Андреевич Решетников — Московский физико-технический институт (г. Москва).
e-mail: m.golafshan@phystech.edu

Аннотация

Пусть $P(n)$ – многочлен, коэффициент при старшей степени которого иррациональное число. Пусть слово w ($w = (w_n), n \in \mathbb{N}$) состоит из последовательности первых двоичных цифр $\{P(n)\}$ т.е. $w_n = [2\{P(n)\}]$. Обозначим через $T(k)$ число различных подслов длины k слова w. Основной результат данной работы заключается в следующем:

Теорема. *Существует многочлен $Q(k)$, зависящий только от степени многочлена P, такой, что при достаточно больших k выполнено равенство $T(k) = Q(k)$.*

Ключевые слова: Комбинаторика слов, символическая динамика, унипотентное преобразование тора, лемма Вейля.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:
А. Я. Канель-Белов, Г. В. Кондаков, И. В. Митрофанов, М. М. Голафшан, И. А. Решетников. О последовательности первых двоичных цифр дробных частей значений многочлена // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 482–487.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №17-11-01377.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-482-487

On the sequence of the first binary digits of the fractional parts of the values of a polynomial

A. Ya. Belov, G. V. Kondakov, I. V. Mitrofanov, M. M. Golafshan

To the 70th anniversary of academician A. L. Semyonov

Alexey Yakovlevich Kanel-Belov — M. V. Lomonosov Moscow State University, Bar-Ilan University (Moscow, Israel).
e-mail: kanelster@gmail.com
Gregory Vyacheslavovich Kondakov — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).
e-mail: kondakov@yandex.ru
Ivan Viktorovich Mitrofanov — Ecole Normale Superieur, PSL Research University (France).
e-mail: phortim@yandex.ru
Mehdi Golafshan — Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).
e-mail: m.golafshan@phystech.edu
Ivan Andreevich Reshetnikov — Moscow Institute of Physics and Technology (Moscow).
e-mail: m.golafshan@phystech.edu

Abstract

Let $P(n)$ be a polynomial, having an irrational coefficient of the highest degree. A word w ($w = (w_n), n \in \mathbb{N}$) consists of a sequence of first binary numbers of $\{P(n)\}$ i.e. $w_n = [2\{P(n)\}]$. Denote by $T(k)$ the number of different subwords of w of length k . We'll formulate the main result of this paper.

Theorem. *There exists a polynomial $Q(k)$, depending only on the power of the polynomial P, such that $T(k) = Q(k)$ for sufficiently great k.*

Keywords: Combinatorics on words, symbolical dynamics, unipotent torus transformation, Weiyl lemma.

Bibliography: 6 titles.

For citation:
A. Ya. Kanel-Belov, G. V. Kondakov, I. V. Mitrofanov, M. M. Golafshan, 2021, "On the sequence of the first binary digits of the fractional parts of the values of a polynomial" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 482–487.

1. Введение

Многие классические задачи аналитической теории чисел связаны с изучением последовательностей дробных частей значений многочленов в целых точках. Эти последовательности играют важную роль в ряде других областей, в частности, в эргодической теории, теории сложности, теории передачи информации и [1-5].

Мы используем методы символической динамики для изучения дробных частей значений многочлена, а именно, изучаем унипотентные преобразование тора.

2. Постановка задачи

Пусть $P(n)$ – многочлен, коэффициент при старшей степени которого иррациональное число. Пусть слово w $(w = (w_n), n \in \mathbb{N})$ состоит из последовательности первых двоичных цифр $\{P(n)\}$ т.е. $w_n = [2\{P(n)\}]$. Обозначим через $T(k)$ число различных подслов длины k слова w. Основной результат данной работы заключается в следующем:

Теорема 1. *Существует многочлен $Q(k)$, зависящий только от степени многочлена P, такой, что при достаточно больших k выполнено равенство $T(k) = Q(k)$.*

Нам понадобится изучить унипотентные преобразования тора. Сформулируем необходимые определения. Пусть $f : M \to M$ — непрерывное отображение пространства M, и пусть $U \subset M$. Начальная точка x задает последовательность точек $x,\ f(x), \dots,\ f^{(n)}(x), \dots$, которой соответствует описывающее эволюцию точки x слово w, составленное из нулей и единиц по следующему правилу: $w_n = 1$, если $f^{(n)}(x) \in U$ и $w_n = 0$, если $f^{(n)}(x) \notin U$.

Будем считать, что U - открытое множество, $mes(\partial U) = 0$ и M – компактное метрическое пространство с лебеговой мерой, которую отображение f сохраняет. *Началом* w^b слова w назовем последовательность $x,\ f(x), \dots, f^{(n)}(x),\ n \in \mathbb{N}$.

Определение 1. *Конечное слово v^f называется* существенной *конечной эволюцией точки x^*, если в любой окрестности точки x^* существует открытое множество V, для любой точки $x \in V$ которого выполнено равенство $v^b(x) = v^f$. Бесконечное слово w называется* существенной эволюцией *точки x^*, если любое его начальное подслово – существенная конечная эволюция точки x^*.*

Под *эволюцией* точки, когда это не вызывет недоразумений, будем понимать, *существенную эволюцию.* Отметим, что точка может иметь несколько существенных эволюций. Пусть v – конечное слово. Тогда множество точек с конечной существенной эволюцией v замкнуто.

Аналогичное утверждение верно для бесконечного слова w.

Понятие *морфизма, эпиморфизма, мономорфизма и изоморфизма динамик* вводится обычным образом. *Фактор-динамика* естественным образом определяется на *фактор-топологии* тогда и только тогда, когда f переставляет классы эквивалентности. Отметим, что прообразы точек при морфизмах замкнуты. Множество V называется *несводимым*, если его замыкание является прообразом замкнутого множества только при мономорфизме.

Лемма 1. *Пусть U – несводимое множество, тогда разные точки имеют разную эволюцию и для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$, что любые слова длины $N(\varepsilon)$, соответствующее начальным точкам на расстоянии большем ε, различны.*

Определение 2. *Замкнутое множество N называется* квазиинвариантным, *если для любых двух точек A и B и сходящейся последовательности $f^{(n_i)}(A) \to C$ $(C \in N,\ \ n_i \to \infty)$ любая предельная точка последовательности $\{f^{(n_i)}(B)\}$ лежит в N.*

Легко проверить, что каждое замкнутое инвариантное множество является квазиинвариантным; каждой фактор-динамике соответствует разбиения на квазиинвариантные множества и обратно; образ квазинвариантного множества квазиинвариантен; множество точек с данной существенной эволюцией образует квазиинвариантное множество.

Определение 3. $(A - B)$-облаком *с центром в точке A, порожденным точкой B, назовем множество условных предельных точек $f^{(n_i)}(B)$, при условии $f^{(n_i)}(A) \to A$.*

Отметим, что $(A - B)$-облако замкнуто. Образ $(A - B)$-облака при k-ой итерации есть $(f^{(k)}(A) - f^{(k)}(B))$-облако. Обозначим $(A - B)$-облако через L_0; через L_{i+1} обозначим замыкание объединения всевозможных $(A_i - B_i)$ – облаков, для которых $A_i,\ B_i \in L_i$. Положим

$L_{AB} = \bigcup L_i$. Факторизация, порожденная множеством L_{AB} – это самая слабая факторизация из тех, которые склеивают точки A и B.

Пусть $P(n)$ – многочлен степени $m+1$, старший коэффициент a_{m+1} которого - иррациональное число. Определим последовательность многочленов $\{P_k(n)\}$ $k = 0, \ldots, m$: $P_m(n) = P(n)$, $P_{m-1}(n) = P_m(n+1) - P_m(n)$, ..., $P_{i-1}(n) = P_i(n+1) - P_i(n)$, ... Из этих формул следует, что $P_0(n) = n!a_{m+1}$ — ирациональное число. Положим $\varepsilon = P_0(n)$, $x_i(n) = \{P_i(n)\}$ и $x'_i(n) = x_i(n+1)$, и перепишем приведенные выше уравнения в следующую систему

$$\begin{cases} x'_m = x_m + x_{m-1} \quad mod1 \\ x'_{m-1} = x_{m-1} + x_{m-2} \quad mod1 \\ \cdots \\ x'_1 = x_1 + \varepsilon \quad mod1, \end{cases} \tag{1}$$

При этом условие $[2\{P(n)\}] = 0$ переходит в условие $0 \leqslant x_m(n) < 1/2$. Вектор $(x'_1, \ldots, x'_m)$ связан с вектором $(x_1, \cdots, x_m)$ унипотентным преобразованием (преобразованием, соответствующем линейному преобразованию с единичными собственными числами). Пусть $F : \vec{x} \to \vec{x'}$. Образы гиперплоскостей $x_m = 0$ и $x_m = 1/2$ при отображениях $Id, F, F^{(2)}, \ldots, F^{(k-1)}$ разбивают пространство на многогранники. Точкам одного и того же многогранника соответствуют одинаковые слова длины k.

Теорема 2. *Пусть w и v - две различные эволюции точки $x_0 \in T$. Тогда $\rho(w,v) = 0$, где*

$$\rho(w,v) = \lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{i}(w_j + v_j) \bmod 2}{i}.$$

Если x и x^* различны и имеют разную эволюцию, то плотность рассогласования $\rho(w_x, w_{x^*})$ определена и положительна.

Теорема 3. *Пусть T - m-мерный тор. Тогда существует плоская область U с аналитической границей и начальная точка x^*, имеющая бесконечно много попарно различных эволюций, которые попарно различаются в бесконечном числе позиций.*

Пусть точки A $(x_1, \cdots, x_m)$ и B $(x_1 + \Delta x_1, \cdots, x_m + \Delta x_m)$ имеют одинаковую эволюцию. Тогда выполнены следующие утверждения:

Утверждение 1. *Пусть 1, ε, Δx_i линейно независимы над Q. Тогда $(A-B)$-облако содержит все точки, у которых первые $i-1$ координаты совпадают с координатами точки B.*

Утверждение 2. *Пусть Δx_i – иррациональное число. Тогда для любого $\delta (0 \leqslant \delta \leqslant 1)$ существует точка B_δ, эволюция которой совпадает с эволюцией точек A и B, i-ая координата которой отличается от i-ой координаты точки A ровно на δ.*

Случай, когда все Δx_j - рациональные приводит к фактор-динамике, при которой i-ая "сторона тора отвечающая оси OX_i, делится на $M_i = \prod_{j=1}^{i} m_j$ частей, где m_j - произвольные натуральные числа и точки тора $x = x^*$ отождествляются при выполнении для всех $1 \leqslant j \leqslant m$ равенств: $M_j x_j = M_j x^*_j$.

Следствие 1. *Класс замкнутых сводимых множеств состоит из множеств, которые переходят сами в себя при сдвигах на $1/M_i$ вдоль i-ой координаты или при любых сдвигах вдоль координат с номером большем какого-то фиксированного. Множество $0 \leqslant x_m < 1/2$ - несводимо.*

Утверждение 3. *Рассмотрим динамику тора, задаваемую системой (1) и пусть множество U, задаваемое условием $0 \leqslant x_m \leqslant 1/2$, несводимо. Тогда существует такое k, что точки с одинаковой конечной эволюцией длины k разбивают тор на замкнутые выпуклые многогранники, причем разным многогранникам соответствуют различные эволюции.*

3. Результаты

Доказательство теоремы 1. Множество U несводимо, поэтому в силу леммы 1 существует такое $N(\delta')$, что $N(\delta')$-эволюция точек, находящихся на расстоянии большем δ', различна. Очевидно, что N-эволюция всех внутренних точек многогранника, полученного после N-ой итерации совпадает. Назовем ее *эволюцией многогранника.* При дальнейшем разбиении многограника, диаметр которого меньше δ', не могут образовываться многогранники с одинаковой эволюцией (в противном случае один из многогранников разбиения пересекается двумя “соседними” плоскостями s-ой системы ($s > N(\delta')$) и соображения обращения времени позволяют найти две точки, принадлежащие одному многограннику, на расстоянии d ($d > 1/2 > \delta'$). Многогранники разбиения, имеющие общую границу, имеют различную эволюцию, а для многогранников разбиения, не имеющих общих точек, существует δ^*, меньшее всевозможных попарных расстояний между ними. Положив $K = \max(N(\delta'),\ N(\delta^*))$, получим число итераций, начиная с которого выполнено равенство между числом областей и числом подслов длины k. Из иррациональности ε следует, что через точки пересечения плоскостей проходит ровно m плоскостей. Многогранники разбиения и точки пересечения областей находятся во взаимно-однозначном соответствии. Число точек пересечения гиперплоскостей $Q(k)$, а, следовательно, и число подслов $T(k)$ ($k \geqslant K$) длины k, вычисляется по формуле:

$$Q(k) = \sum_{0 \leqslant k_1 < \ldots < k_m \leqslant k} \begin{vmatrix} 1 & \binom{k_m}{1} & \ldots & \binom{k_m}{m} \\ & & \ldots & \\ 1 & \binom{k_1}{1} & \ldots & \binom{k_1}{m} \end{vmatrix}, \deg Q(k) = \frac{m(m+1)}{2}.$$

В зависимости от P равенство $T(k) = Q(k)$ может начинать выполняться со сколь угодно большого номера k.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.М. Виноградов. *К вопросу о распределении дробных частей многочлена. Изв. АН.*, сер. матем. 1961, т.25 с.749-754

2. Л. Кейперс, Г. Ниддеррейтер *Равномерное распределение последовательностей.* М.:Наука, 1985.

3. Л.Д. Пустыльников *Распределение дробных частей значений многочлена. УМН*, 1993 т.48, выпуск 4 (292), с 131 – 166.

4. R.N. Izmailov and A.A. Vladimirov. *Dimension of aliasing structures. An International Journal of Systems. Applications in Computer Graphics.*, 1993, Vol 17, No 5.

5. M. Morse and G.A. Hedlund. Symbolic dynamics II: Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62:1–42, 1940.

6. H. Weyl. Über der gleichverteilung von zahlen mod. 1. *Math. Ann.*, 77:313–352, 1916.

REFERENCES

1. И.М. Виноградов. *К вопросу о распределении дробных частей многочлена. Изв. АН.*, сер. матем. 1961, т.25 с.749-754

2. Л. Кейперс, Г. Ниддеррейтер *Равномерное распределение последовательностей.* М.:Наука, 1985.

3. Л.Д. Пустыльников *Распределение дробных частей значений многочлена. УМН*, 1993 т.48, выпуск 4 (292), с 131 – 166.

4. R.N. Izmailov and A.A. Vladimirov. *Dimension of aliasing structures. An International Journal of Systems. Applications in Computer Graphics.*, 1993, Vol 17, No 5.

5. M. Morse and G.A. Hedlund. Symbolic dynamics II: Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62:1–42, 1940.

6. H. Weyl. Über der gleichverteilung von zahlen mod. 1. *Math. Ann.*, 77:313–352, 1916.

Получено 21.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 519.7 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-488-494

Формальные модели безопасности

В. Л. Токарев (г. Тула)

Вячеслав Леонидович Токарев — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: tokarev22@yandex.ru

Аннотация

В статье излагается подход к построению формальной модели информационной безопасности, основанный на использовании алгебры предикатов. Модель представляется в виде дерева решений. Разработан и исследован алгоритм его построения, основанный на использовании дедуктивного метода поиска ответов.

Ключевые слова: алгебра предикатов, формальные модели, информационная безопасность.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
В. Л. Токарев. Формальные модели безопасности // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 488–494.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 519.7 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-488-494

Formal security models

V. L. Tokarev (Tula)

Vyacheslav Leonidovich Tokarev — doctor of technical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: tokarev22@yandex.ru

Abstract

In paper describes an approach to building a formal model of information security based on the use of predicate algebra. The model is represented as a decision tree. The algorithm of its construction based on the deductive method of searching for answers is developed and investigated.

Keywords: predicate algebra, formal models, information security

Bibliography: 18 titles.

For citation:
V. L. Tokarev, 2021, "Formal security models", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 488–494.

1. Введение

Согласно требованиям «Основных критериев оценки безопасности информационных технологий» [1], системы их защиты должны строиться на основе формальных моделей. Кроме того, соответствие системы защиты информации (СЗИ) в автоматизированных системах требованиям заданной политики безопасности может быть теоретически (то есть достаточно достоверно) обосновано только с использованием формальных моделей информационной безопасности, так как с их помощью можно доказать безопасность системы, опираясь на объективные доказуемые математические постулаты.

Формальные модели позволяют решить целый ряд задач, возникающих в ходе проектирования, разработки и сертификации АС в защищенном исполнении. Проблеме построения формальных моделей безопасности посвящен ряд работ, среди которых можно выделить две [2, 3], в которых рассматриваются модели для управления доступом к защищаемым ресурсам автоматизированных систем (АС). При этом модели предложено строить в виде отношений между субъектами и объектами АС, представляемых в виде графов и отображающих известные протоколы доступа [4].

В настоящем исследовании задача обеспечения информационной безопасности представляется как задача принятия решений в условиях наличия множества факторов, для поддержки решения которой может быть использован один из методов автоматического анализа данных - «дерево решений», использующийся в машинном обучении [5]. Известно, что построение таких деревьев позволяет не только корректно сформулировать задачу сложной структуры, но и получить множество вариантов решений [6]. Поэтому в качестве формальной модели информационной безопасности предлагается использовать «дерево решений» (ДР).

Обычно ДР имеют иерархическую структуру, состоящую из узлов, ветвей и листьев. Каждый лист представляет собой значение целевой переменной, изменяемое в ходе движения от корня к листу. Каждый внутренний узел соответствует одному из правил ветвления. Ветвям соответствуют атрибуты, от которых зависит целевая функция.

Автоматизация процесса построения ДР достигается тем, что правила ветвления генерируются путем обучения с использованием обучающих примеров [7]. В настоящее время разработано значительное число алгоритмов построения деревья решений: ID3, CART, C4.5, C5.0, NewId, ITrule, CHAID, CN2 и др.

Наибольшее распространение и популярность получили первые три: 1) ID3 (Iterative Dichotomizer 3) В его основе лежит рекурсивное разбиение обучающего множества, размещаемого в корневом узле дерева решений, на подмножества с помощью решающих правил [7, 8, 9]; 2) C4.5 — усовершенствованная версия алгоритма ID3, в которой была решена проблема переобучения и стала доступной обработка пропусков в обучающих данных [10, 11, 12]; 3) CART (Classification and Regression Tree) — алгоритм, обладающий расширенными возможностями обучения.

Эти и им подобные алгоритмы имеют широкий спектр применений: от робототехники [15, 16] до видеоигр [17] и управления беспилотниками [18]. Но, из-за того, что они реализуют индуктивный метод построения ДР, имеют общие недостатки:

1) чувствительность к шумам, обычно присутствующих в обучающих примерах;

2) разделяющие границы имеют определенные ограничения, снижающие качество ДР;

3) требуют большого объема обучающей выборки достоверных данных, что, по само по себе, может представлять проблему для ряда ситуаций, в которых приходится оперативно принимать решение.

Альтернативным способом автоматического построения ДР, выступающего в роли формальной модели безопасности, может быть дедуктивный метод. В данной статье исследуется использование этого подхода для построения формальной модели безопасности, а в качестве теоретической основы используется алгебра предикатов.

2. Алгоритм построения дерева решений

Предполагается, что: Предполагается, что: 1) формальная модель безопасности некоторого информационного ресурса может быть описана на языке логики предикатов; 2) задачу в конечном итоге можно свести к вопросу: а или b? (здесь a, b – различные решения, например, действия); 3) вопрос может быть представлен соответствующим предикатом ANS.

Тогда справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Совокупность предикатов, включающая предикаты-описания задачи и предикат-вопрос, путем применения метода резолюции, может быть представлена в форме дерева дизъюнктов (ДД), в котором листьям соответствуют исходные дизъюнкты, каждому узлу – образуемые резольвенты, а корню – дизъюнкт возможных решений, при этом переменные в дизъюнктах, полученных из исходных дизъюнктов переименовываются так, чтобы они не имели общих переменных.*

Утверждение 2. *Дерево дизъюнктов (ДД) может быть преобразовано в дерево решений (ДР) с помощью алгоритма ДДtoДР, основанного на методе резолюции.*

Теорема 1. *Алгоритм ДДtoДР, преобразующий ДД в ДР и позволяющий получить конкретный ответ (a или b), состоит из следующей последовательности шагов.*

1. В ДД определяются дизъюнкт $D = res(D_1, D_2)$ – резольвента дизъюнктов D_1 и D_2, с отрезаемыми литерами L_1 и L_2, соответственно, и u – наиболее общий унификатор литер L_1 и $\bar{L}_2$. После этого, ребро ДД, ведущее от D_i к $D, i = 1, 2$, помечается отрицанием литеры $L_i u$ и подстановкой u (если u – пустая подстановка, то остается только отрицание литеры $L_i u$).

2. Полученное ДД "переворачивается": корень оказывается наверху дерева (становится верхним узлом), а листья внизу, направление ребер – от корня к листьям. Устраняются все дизъюнкты, присвоенные узлам и помечаются все висячие вершины, например: $A, B, C, \ldots$

3. В полученном дереве удаляются все узлы (и связанные с ними ребра), соответствующие дизъюнктам, не содержащим предиката-вопроса ANS.

4. Выделяется дизъюнкт D_j, соответствующий j-ому висячему узлу. Для каждого висячего узла определяется конъюнкция литер $I(D_j)$, приписанных пути от верхнего узла до D_j и определяется дизъюнкт $C(D_j)$, соответствующий узлу D_j. В дизъюнкте-ответе отыскивается литера $L(D_j)$, являющаяся логическим следствием конъюнкции $D_j \wedge I(D_j)$ После этого литера $L(D_j)$ приписывается узлу D_j.

5. В полученном дереве остаются только такие i-е висячие узлы ($1 <= q$, где q – число уровней дерева) из которых ведет только одно ребро e_i и удаляются литеры , приписанные ребру e_i. Полученное дерево является искомым деревом решений.

Адекватность алгоритма решаемой задаче покажем на простом примере.

Пусть известны следующие правила: 1) если угроза информационной безопасности наиболее актуальна от внутреннего источника, то администратор безопасности (АБ) должен применить комплекс мер "a"; 2) если угроза безопасности наиболее актуальна от внешнего источника, то АБ должен применить комплекс мер "b"; 3) Вопрос: «какой комплекс мер должен применить АБ в настоящий момент времени?»

Пусть предикат P(x) означает: « x(АБ) знает, что в настоящий момент времени актуальна угроза внутренняя», предикат $R(x, y)$ – «x должен применить комплекс y». Тогда описание ситуации на языке алгебры предикатов принимает вид множества дизъюнктов:

1) $\bar{P}(x) \vee R(x, a)$; 2) $P(x) \vee R(x, b)$; 3) $\bar{R}(x, y) \vee ANS(y)$.

Из этого множества получим резольвенты для построения ДД:

4) $\bar{P}(x) \vee ANS(a)$ из дизъюнктов 1,3;

5) $P(x) \vee ANS(b)$ из дизъюнктов 2,3;

6) $ANS(a) \vee ANS(b)$ из дизъюнктов 4,5;

Формулам 1-6 соответствует дерево дизъюнктов (рис.1,а). Применение алгоритма ДДtoДР позволило получить дерево решений (рис.1,б).

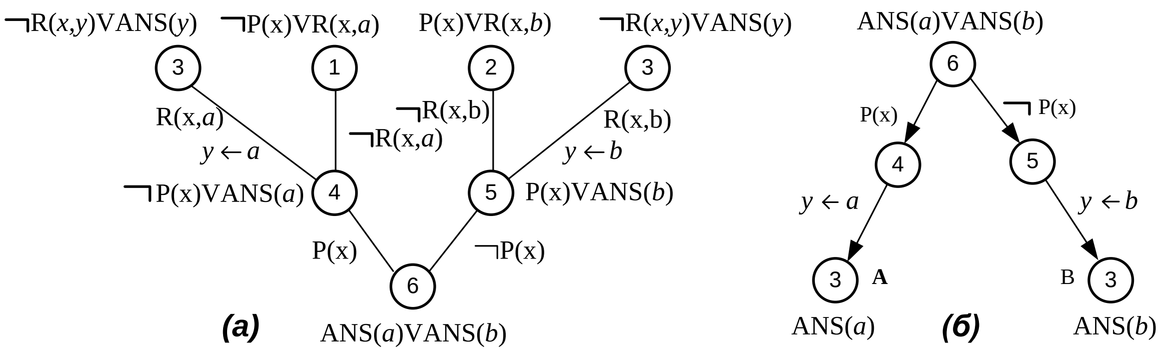


Рис. 1: Два дерева: а-дизъюнктов и б-решений

Доказательство. На шаге 4 предикат $ANS(a)$ приписан узлу A после того, как было показано, что $ANS(a)$ является логическим следствием конъюнкции $P(x) \wedge R(x,a) \wedge (\bar{R}(x,y) \vee ANS(y))$, а так как дизъюнкт $\bar{R}(x,y) \vee ANS(y)$ входит в число входных дизъюнктов, то он истинен. Поэтому, предикат $ANS(a)$ истинен всегда, когда истинна конъюнкция $P(x) \wedge R(x,a)$. Показано, что предикат $R(x,a)$ является логическим следствием из $P(x)$ и дизъюнкта (1). Поэтому $R(x,a)$ должен быть истинен, если истинен предикат $P(x)$. Отсюда истинность предикатов $P(x)$ и $R(x,a)$ влечет истинность $ANS(a)$, тогда истинность $P(x)$ влечет истинность $ANS(a)$. Аналогично: истинность $\bar{P}(x)$ влечет истинность $ANS(b)$. Это доказывает корректность полученного дерева решений, а следовательно, и полученной модели безопасности.

3. Практический пример использования предложенного метода

Типичную схему получения доступа некоторого субъекта к объекту защищенной АС можно продемонстрировать следующим примером. Субъект s_i хочет получить доступ к объекту o_j, выдавая соответствующий запрос f_1. Команда, выполняя этап проверки b полномочий субъекта совершает действие f_2 – открывает доступ, если полномочия субъекта подтверждены, или действие f_3 - запрещает доступ, выдавая субъекту s_i соответствующее сообщение, если иначе. СЗИ должна определить, какое действие ей нужно совершить f_2 или f_3 в ответ на запрос f_1.

Введя предикат $P(s,x,q_k)$: "субъект s_i находится в точке a в состоянии q_k указанные правила представим в виде следующих формул алгебры предикатов:

1)$\bar{P}(s,a,q_k) \vee P(s,b,f_1(s,a,b,q_k))$;

2)$\bar{P}(s,b,q_k) \vee R(s) \vee P(s,c,f_2(s,b,c,q_{k+1}))$;

3)$\bar{P}(s,b,q_k) \vee R(s) \vee P(s,c,f3(s,b,a,q_k))$;

4)$P(s_i,c,q_{k+1})$;

5)$\bar{P}(s_i,c,q_{k+1}) \vee ANS(q_{k+1})$;

Из полученных дизъюнктов образуем резольвенты:

6)$\bar{P}(s,b,q_k) \vee R(s) \vee ANS(f_3(s,b,a,q_k))$ из дизъюнктов (3) и (5);

7)$\bar{P}(s,b,q_k) \vee \bar{R}(s) \vee ANS(f2(s,b,c,q_{k+1}))$ из дизъюнктов (2) и (5);

8)$\bar{P}(s,b,q_k) \vee ANS(f_3(s,b,a,q_k)) \vee ANS(f_2(s,b,c,q_{k+1}))$ из дизъюнктов (6) и (7);

9)$\bar{P}(s,b,q_k) \vee ANS(f_3(s,b,a,f_1(s,a,b,q_k))) \vee ANS(f_2(s,b,c,f_1(s,a,b,q_k))$ из дизъюнктов (1) и (8);

10)$ANS(f_3(s,b,a,f_1(s,a,b,q_k)) \vee ANS(f_2(s,b,c,f_1(s,a,b,q_k))$ из дизъюнктов (4) и (9).

Полученный 10-й дизъюнкт – это ответы, полученные из ДР по алгоритму ИКО: 1) Субъект s_i переходит из точки a в состоянии q_k в точку b с помощью запроса f_1, если отношение R содержит право доступа субъекта к объекту o_j, а система с помощью действия f_2 переходит в состояние q_{k+1}; 2) Иначе система с помощью действия f_3 возвращается в исходное состояние q_k и выдает сообщение субъекту s_i об отказе в доступе к объекту o_j.

Практика показала: 1) соответствие полученного ДР реальной задаче обнаружения нарушения правил доступа несанкционированного субъекта к объекту защищенной АС; 2) адекватность моделей, полученных предложенным методом, реальным правилам и протоколам, прописанным в политиках безопасности большинства защищенных автоматизированных систем.

4. Заключение

В работе предложен подход к построению формальных моделей информационной безопасности автоматизированных систем в форме дерева решений. Показано, что для повышения рациональности вырабатываемых на основе формальной модели решений, целесообразно выстраивать дерево решений не на основе широко используемого индуктивного метода (алгоритмы ID3, CART, C4.5, C5.0, NewId, ITrule, CHAID, CN2), а на основе дедуктивного метода поиска ответов, в качестве теоретической основы которого может быть использована алгебра предикатов.

На основе предложенного подхода разработан и исследован алгоритм построения дерева решений. Показана адекватность получаемых моделей существующим протоколам обеспечения информационной безопасности компьютерных систем.

Предложенный подход может стать теоретической основой для построения систем защиты информации автоматизированных систем с гарантированным качеством и для разработки более совершенных механизмов обеспечения информационной безопасности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ISO/1EC 15408-1: 2009 — Evaluation criteria for IT security — Part 1: Introduction and general model.

2. Девянин П.Н. О разработке моделей безопасности информационных потоков в компьютерных системах с ролевым управлением доступом. // Материалы 3-ей международной научной конференции по проблемам безопасности и противодействия терроризму. МГУ им. М.В. Ломоносова. 25-27 октября 2007 г. – М.: МЦНМО, 2008. – с. 261-265.

3. Девянин П.Н. Проблема обоснования адекватности формальных моделей безопасности логического управления доступом и их реализации в компьютерных системах. // Системы высокой доступности. 2012, №2. – с. 45-49.

4. Олифер В.Г., Олифер Н.А. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы. – СПб.: Питер, 2011. – 944 с.

5. Quinlan, J. R., Induction of Decision Trees. Machine Learning 1: 81-106, Kluwer Academic Publishers. 1986.

6. Kashnitsky Y. S. Methods of the search of accurate and interpretable rules for classifying data with complex structure //Proceedings of the conference КИИ-2016. In 3-t., Smolensk: publishing House «Универсум», 2016, 2, p.183-191, - 408c. (pdf)

7. Quinlan, J. R. “Probabilistic decision trees”. In: Y. Kodratoff and R. Michalski (Eds.), “Machine Learning. An Artificial Intelligence Approach”. Vol. III, Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1990. pp. 140–152

8. Iterative Dichotomizer 3 Grzymala-Busse, Jerzy W. "Selected Algorithms of Machine Learning from Examples"(PDF). 1993.

9. Taggart, A.J., DeSimone, A.M., Shih, J.S., Filloux, M.E. and Fairbrother, W.G. "Large-scale mapping of branchpoints in human transcripts in vivo". Nature Structural and Molecular Biology. 2012. pp.719–721.

10. Quinlan J. R. Learning With Continuous Classes // Proceedings of the 5th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence. — 1992. — P. 343—348.

11. Quinlan J.R. C4.5 Programs for Machine Learning. Morgan Kaufmann, San Mateo, California, 1993.

12. Quinlan J.R. Improved Use of Continuous Attributes in C4.5 (англ.) // Journal of Artificial Intelligence Research. — 1996. — Vol. 4. — P. 77—90. — ISSN 1076-9757. — doi:10.1613/jair.279.

13. Breiman L., Friedman J.H., Olshen R.A., and Stone C.T. Classification and Regression Trees. Wadsworth, Belmont, California, 1984.

14. Machine Learning, Neural and Statistical Classification. Editors: D. Michie, D.J. Spiegelhalter, C.C. Taylor, 02/17/Journal of the American Statistical Association 1994.

15. Marzinotto, A.; Colledanchise, M.; Smith, C.; Ögren, P. "Towards a Unified BTs Framework for Robot Control"(PDF). Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference.2014.

16. Colledanchise, M.; Ögren, P. Michele C. and Petter O.¨ Behavior Trees in Robotics and AI. 2018. CRC Press. arXiv:1709.00084. doi:10.1201/9780429489105. 3 Jun 2020. ISBN 978-1-138-59373-2. S2CID 27470659.

17. Ögren, Petter. "Increasing Modularity of UAV Control Systems using Computer Game Behavior Trees"(PDF). AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Minneapolis, Minnesota. 2012. pp. 13–16.

18. Klöckner, Andreas "Behavior Trees for UAV Mission Management". GI-Jahrestagung. 2013. pp. 57–68.

REFERENCES

1. “ISO/1EC 15408-1 2009 , Evaluation criteria for IT security, Part 1: Introduction and general model”.

2. Devyanin P. N. 2008, “On the development of security models for information flows in computer systems with role-based access control”, Materials of the 3rd international scientific conference on security and counteraction to terrorism. Lomonosov Moscow state University. 25-27 October 2007,Moscow: ICNMO,. - pp. 261-265.

3. Devyanin P. N. 2012, “The Problem of justification of adequacy of formal security models of logical access control and their implementation in computer systems”, High availability systems, no. 2, pp. 45-49.

4. Olifer V. G.& Olifer N. A. 2011, “Computer networks. Principles, technologies, and protocols” , St. Petersburg: Piter, 944 p.

5. Quinlan, J. R. 1986, “Induction of Decision Trees. Machine Learning 1”, Kluwer Academic Publishers, pp. 81-106.

6. Kashnitsky, Y. S. 2016, “Methods of the search of accurate and interpretable rules for classifying data with complex structure” ,XV artificial intelligence conference КИИ-2016 (Smolensk, Russia), Proceedings of the conference. In 3-t., Smolensk, Publishing House «Универсум», pp.183-191.

7. Quinlan, J. R. 1990, “Probabilistic decision trees”. In: Y. Kodratoff and R. Michalski (Eds.), “Machine Learning. An Artificial Intelligence Approach”. Vol. III, Morgan Kaufmann Publishers, Inc., pp. 140–152

8. Jerzy, W. GRZYMALA-BUSSE, 1993, "Selected Algorithms of Machine Learning from Examples". Department of Computer Science, University of Kansas, KS 66045, USA

9. Taggart A.J, DeSimone A.M, Shih J.S, Filloux M.E and Fairbrother W.G. 2012, "Large-scale mapping of branchpoints in human pre-mRNA Nat Struct Mol Biol. PMID: 22705790; PMCID: PMC3465671. pp.719–721.

10. Quinlan J. R. 1992, “Learning With Continuous Classes”, Proceedings of the 5th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence. pp. 343—348.

11. J.R. Quinlan 1993, “Programs for Machine Learning”. Morgan Kaufmann, San Mateo, California.

12. Quinlan J.R. 1996, “Improved Use of Continuous Attributes in C4.5”, Journal of Artificial Intelligence Research. Vol. 4, pp. 77—90.

13. Breiman L., Friedman J.H. , Olshen R.A. and Stone C.T. 1984, “Classification and Regression Trees”. Wadsworth, Belmont, California.

14. Michie D., Spiegelhalter D.J., Taylor C.C. 1994, “Machine Learning, Neural and Statistical Classification”, 02,17, Journal of the American Statistical Association.

15. Marzinotto, Alejandro; Colledanchise, Michele; Smith, Christian; Ögren, Petter 2014, "Towards a Unified BTs Framework for Robot Control". Robotics and Automation (ICRA), IEEE International Conference.

16. Colledanchise, Michele; Ögren, Petter, Michele, Colledanchise and Petter, Ogren 2018, ‘Behavior Trees in Robotics and AI”. CRC Press. arXiv:1709.00084.3 Jun 2020.

17. Ögren, Petter 2012, "Increasing Modularity of UAV Control Systems using Computer Game Behavior Trees"(PDF). AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Minneapolis, Minnesota. pp. 13–16.

18. Klöckner, Andreas 2013, "Behavior Trees for UAV Mission Management". GI-Jahrestagung. pp. 57–68.

Получено 11.11.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.542 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-495-501

Замечание о произведении двух формационных tcc-подгрупп[1]

А. А. Трофимук

Александр Александрович Трофимук — кандидат физико-математических наук, Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина (Беларусь, г. Брест).
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Аннотация

Подгруппа A группы G называется *tcc-подгруппой* в G, если существует подгруппа T группы G такая, что $G = AT$ и для любого $X \leqslant A$ и $Y \leqslant T$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \leq G$. Запись $H \leqslant G$ означает, что H является подгруппой группы G. В этой статье мы исследуем группу $G = AB$ при условии, что A и B являются tcc-подгруппами в G. Доказано, что такая группа G принадлежит $\mathfrak{F}$, если подгруппы A и B принадлежат $\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация такая, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Здесь $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп.

Ключевые слова: сверхразрешимая группа, тотально перестановочное произведение, насыщенная формация, tcc-перестановочное произведение, tcc-подгруппа.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
А. А. Трофимук. Замечание о произведении двух формационных tcc-подгрупп // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 495–501.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 512.542 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-495-501

A remark on a product of two formational tcc-subgroups

A. A. Trofimuk

Alexander Alexandrovich Trofimuk — candidate of physical and mathematical sciences, Brest State A.S. Pushkin University (Belarus, Brest).
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф19РМ-071).

Abstract

A subgroup A of a group G is called *tcc-subgroup* in G, if there is a subgroup T of G such that $G = AT$ and for any $X \leqslant A$ and $Y \leqslant T$ there exists an element $u \in \langle X, Y\rangle$ such that $XY^u \leq G$. The notation $H \leqslant G$ means that H is a subgroup of a group G. In this paper we consider a group $G = AB$ such that A and B are tcc-subgroups in G. We prove that G belongs to $\mathfrak{F}$, when A and B belong to $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{F}$ is a saturated formation such that $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Here $\mathfrak{U}$ is the formation of all supersoluble groups.

Keywords: supersoluble group, totally permutable product, saturated formation, tcc-permutable product, tcc-subgroup.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
A. A. Trofimuk, 2021, "A remark on a product of two tcc-subgroups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 495–501.

1. Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. We use the standard notations and terminology of [1, 2]. The notation $H \leqslant G$ means that H is a subgroup of a group G.

It is well known that the product of two normal nilpotent subgroups of a group G is nilpotent. However, the product of two normal supersoluble subgroups of a group G is not necessarily supersoluble. It seems then natural to consider factorized groups in which certain subgroups of the corresponding factors permute, in order to obtain new criteria of supersolubility. A starting point of this research can be located at M. Asaad and A. Shaalan's paper [3]. In particular, they proved the supersolubility of a group $G = AB$ such that the subgroups A and B are totally permutable and supersoluble, see [3, Theorem 3.1]. Here the subgroups A and B of a group G are *totally permutable* if every subgroup of A is permutable with every subgroup of B. In [4] Maier showed that this statement is also true for the saturated formations containing the formation $\mathfrak{U}$ of all supersoluble groups. Ballester-Bolinches and Perez-Ramos in [5] extend Maier's result to non-saturated formations which contain all supersoluble groups. This direction have since been subject of an in-depth study of many authors, see, for example, [6], [7], [8]. The monograph [9, chapters 4–5] contains other detailed information on the structure of groups, which are totally or mutually permutable products of two subgroups.

The following concept was introduced in [8] .

Definition . *A subgroup A of a group G is called tcc-subgroup in G, if it satisfies the following conditions:*

1) *there is a subgroup T of G such that $G = AT$;*

2) *for any $X \leqslant A$ and $Y \leqslant T$ there exists an element $u \in \langle X, Y\rangle$ such that $XY^u \leq G$.*

We say that the subgroup T is a tcc-supplement to A in G.

Now, we can state the main result in [10], which is the following:

Theorem 1. ([10, Theorem A]) *Let $G = AB$, where A and B are tcc-subgroups in G. Let $\mathfrak{F}$ be a saturated formation of soluble groups such that $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Suppose that A and B belong to $\mathfrak{F}$. Then G belongs to $\mathfrak{F}$.*

In this article we show that the hypothesis of solubility in Theorem 1 can be removed.

Theorem 2. *Let $G = AB$, where A and B are tcc-subgroups in G. Let $\mathfrak{F}$ be a saturated formation such that $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Suppose that A and B belong to $\mathfrak{F}$. Then G belongs to $\mathfrak{F}$.*

2. Preliminaries

In this section, we give some definitions and basic results which are essential in the sequel.

A group whose chief factors have prime orders is called *supersoluble*. If $H \leqslant G$ and $H \neq G$, we write $H < G$. The notation $H \trianglelefteq G$ means that H is a normal subgroup of a group G. Denote by $Z(G)$, $F(G)$ and $\Phi(G)$ the centre, Fitting and Frattini subgroups of G respectively, and by $\mathrm{O}_p(G)$ the greatest normal p-subgroup of G. Denote by $\pi(G)$ the set of all prime divisors of order of G. The semidirect product of a normal subgroup A and a subgroup B is written as follows: $A \rtimes B$.

The monographs [11], [12] contain the necessary information of the theory of formations. A formation $\mathfrak{F}$ is said to be *saturated* if $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ implies $G \in \mathfrak{F}$. In view of Theorems 3.2 and 4.6 in [12, IV], for any non-empty saturated formation $\mathfrak{F}$ there exists a *formation function* f (that is, any function of the form $f : \mathbb{P} \to \{\text{formations}\}$) such that $\mathfrak{F} = LF(f) := \{G \mid G/F_p(G) \in f(p)$ for all primes p dividing $|G|\}$. Here $F_p(G) = O_{p',p}(G)$ is the greatest normal p-nilpotent subgroup of G [12, IV, Section 7]. Such a function is called a *local definition* of $\mathfrak{F}$. Moreover, in view of Proposition 5.4 in [12, III], every non-empty saturated formation $\mathfrak{F}$ has a unique local definition f (called the *canonical local definition* of $\mathfrak{F}$) such that $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ for all primes p, where $\mathfrak{N}_p f(p) = \emptyset$ if $f(p) = \emptyset$ and $\mathfrak{N}_p f(p)$ is the class of all groups A with $A^{f(p)} \leq O_p(A)$ whenever $f(p) \neq \emptyset$.

If H is a subgroup of G, then $H_G = \bigcap_{x \in G} H^x$ is called *the core* of H in G. If a group G contains a maximal subgroup M with trivial core, then G is said to be *primitive* and M is its *primitivator*. A simple check proves the following lemma.

Lemma 1. *Let $\mathfrak{F}$ be a saturated formation and G be a group. Assume that $G \notin \mathfrak{F}$, but $G/N \in \mathfrak{F}$ for all non-trivial normal subgroups N of G. Then G is a primitive group.*

Recall that the product $G = AB$ is said to be *tcc-permutable* [7], if for any $X \leqslant A$ and $Y \leqslant B$ there exists an element $u \in \langle X, Y \rangle$ such that $XY^u \leq G$. The subgroups A and B in this product are called *tcc-permutable*.

Lemma 2. ([7, Theorem 1, Proposition 1-2]) *Let $G = AB$ be the tcc-permutable product of subgroups A and B and N be a minimal normal subgroup of G. Then the following statements hold:*

(1) *$\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{1, N\}$;*

(2) *if $N \leq A \cap B$ or $N \cap A = N \cap B = 1$, then $|N| = p$, where p is a prime.*

Lemma 3. ([13, Theorem 4]) *Let $G = AB$ be the tcc-permutable product of subgroups A and B. Then $[A, B] \leq F(G)$.*

Lemma 4. ([8, Lemma 3.1]) *Let A be a tcc-subgroup in G and Y be a tcc-supplement to A in G. Then the following statements hold:*

(1) *A is a tcc-subgroup in H for any subgroup H of G such that $A \leqslant H$;*

(2) *AN/N is a tcc-subgroup in G/N for any $N \trianglelefteq G$;*

(3) *for every $A_1 \trianglelefteq A$ and $X \leq Y$ there exists an element $y \in Y$ such that $A_1X^y \leq G$. In particular, $A_1M \leq G$ for some maximal subgroup M of Y and $A_1H \leq G$ for some Hall π-subgroup H of soluble Y and any $\pi \subseteq \pi(G)$;*

(4) *$A_1K \leq G$ for every subnormal subgroup K of Y and for every $A_1 \trianglelefteq A$;*

(5) *if $T \trianglelefteq G$ such that $T \leq A$ and $T \cap Y = 1$, then $T_1 \trianglelefteq G$ for every $T_1 \trianglelefteq A$ such that $T_1 \leq T$;*

(6) *if $T \trianglelefteq G$ such that $T \cap A = 1$ and $T \leq Y$, then $A_1 \leq N_G(T_1)$ for every $T_1 \trianglelefteq T$ and for every $A_1 \trianglelefteq A$.*

Lemma 5. *Let G be a group and N a unique minimal normal subgroup of G. If G has a proper tcc-subgroup A such that $A \neq 1$, then N is abelian.*

Proof. Since A is a tcc-subgroup, it follows that $G = AY$, A and Y are tcc-permutable. If $[A, Y] = 1$, then $A \leq C_G(Y)$. It is clear A and Y are normal in G. Thus $N \leq A \cap Y$. By Lemma 2, $|N| = p$ and N is abelian. Therefore $[A, Y] \neq 1$ and $N \leq [A, Y] \leq F(G) \neq 1$ by Lemma 3. Hence N is abelian. □

Lemma 6. *Let $A \neq 1$ be a proper tcc-subgroup in a primitive group G and Y be a tcc-supplement to A in G. Suppose that N is a unique minimal normal subgroup of G. If $N \cap A = 1$ and $N \leq Y$, then A is a cyclic group of order dividing $p - 1$.*

Proof. Since $N \cap A = 1$ and $N \leq Y$, by Lemma 4 (6), $A \leq N_G(K)$ for any $K \trianglelefteq N$. By Lemma 5, N is an elementary abelian group. We fix an element $a \in A$. If $x \in N$, then $x^a \in \langle x \rangle$, since $A \leq N_G(\langle x \rangle)$ by hypothesis. Hence $x^a = x^{m_x}$, where m_x is a positive integer and $1 \leq m_x \leq p$. If $y \in N \setminus \{x\}$, then

$$(xy)^a = (xy)^{m_{xy}} = x^{m_{xy}} y^{m_{xy}}, \ (xy)^a = x^a y^a = x^{m_x} y^{m_y},$$

$$x^{m_{xy}} y^{m_{xy}} = x^{m_x} y^{m_y}, \ x^{m_{xy} - m_x} = y^{m_y - m_{xy}} = 1, \ m_{xy} = m_x = m_y.$$

Therefore we can assume that $x^a = x^{n_a}$ for all $x \in N$, where $1 \leq n_a \leq p$ and n_a is a positive integer. Hence we have A induces a power automorphism group on N. By the Fundamental Homomorphism Theorem, $A/C_A(N)$ is isomorphic to a subgroup of $\mathrm{P}(N)$, where $\mathrm{P}(N)$ is the power automorphism group of N. Since N is abelian, it follows that $C_G(N) = N$ by [2, Theorem 4.41] and $C_A(N) = 1$. On the other hand, $\mathrm{P}(N)$ is a cyclic group of order $p - 1$. Really $\mathrm{P}(N)$ is a group of scalar matrices over the field $\mathbf{P}$ consisting of p elements. Hence $\mathrm{P}(N)$ is isomorphic to the multiplicative group $\mathbf{P}^*$ of $\mathbf{P}$ and besides, $\mathbf{P}^*$ is a cyclic group of order $p - 1$. Therefore A is a cyclic group of order dividing $p - 1$. □

Lemma 7. *Let $\mathfrak{F}$ be a formation, G group, A and B subgroups of G such that A and B belong to $\mathfrak{F}$. If $[A, B] = 1$, then $AB \in \mathfrak{F}$.*

Proof. Since

$$[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, \ b \in B \rangle = 1,$$

it follows that $ab = ba$ for all $a \in A$, $b \in B$. Let

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, \ b \in B\},$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2), \quad \forall a_1, a_2 \in A, \ b_1, b_2 \in B \ -$$

be the external direct product of groups A and B. Since $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ and $\mathfrak{F}$ is a formation, we have $A \times B \in \mathfrak{F}$. Let $\varphi : A \times B \to AB$ be a function with $\varphi((a, b)) = ab$. It is clear that φ is a surjection. Because

$$\varphi((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = \varphi((a_1 a_2, b_1 b_2)) = a_1 a_2 b_1 b_2 =$$

$$= a_1 b_1 a_2 b_2 = \varphi((a_1, b_1)) \varphi((a_2, b_2)),$$

it follows that φ is an epimorphism. The core $\mathrm{Ker}\, \varphi$ contains all elements (a, b) such that $ab = 1$. In this case $a = b^{-1} \in A \cap B \leqslant Z(G)$. By the Fundamental Homomorphism Theorem,

$$A \times B / \mathrm{Ker}\, \varphi \cong AB.$$

Since $A \times B \in \mathfrak{F}$ and $\mathfrak{F}$ is a formation, $A \times B / \mathrm{Ker}\, \varphi \in \mathfrak{F}$. Hence $AB \in \mathfrak{F}$. □

Lemma 8. ([14, Lemma 2.16]) *Let $\mathfrak{F}$ be a saturated formation containing $\mathfrak{U}$ and G be a group with a normal subgroup E such that $G/E \in \mathfrak{F}$. If E is cyclic, then $G \in \mathfrak{F}$.*

3. Proof of Theorem 2

Assume that the claim is false and let G be a minimal counterexample. Suppose that G is simple. By Lemma 3, A and B are normal in G, a contradiction. Hence let K be an arbitrary non-trivial normal subgroup of G. The quotients $AK/K \simeq A/A\cap K$ and $BK/K \simeq B/B\cap K$ are tcc-subgroups in G/K by Lemma 4 (2), $AK/K \simeq A/A\cap K \in \mathfrak{F}$ and $BK/K \simeq B/B\cap K \in \mathfrak{F}$, because $\mathfrak{F}$ is a formation. Hence the quotient $G/K = (AK/K)(BK/K) \in \mathfrak{F}$ by induction.

Since $\mathfrak{F}$ is a saturated formation, it follows that $\Phi(G) = 1$, G has a unique minimal normal subgroup N and G is primitive by Lemma 1. By Lemma 5, N is abelian and $F(G) = N = C_G(N) = \mathrm{O}_p(G)$, $G = N \rtimes M$, where $|N| = p^n$ and M is a primitivator.

By Lemma 2, is either $|N| = p$, or $N \leq A$ and $N \cap Y = 1$, or $N \cap A = 1$ and $N \leq Y$, where Y is a tcc-supplement to A in G. In the first case, by Lemma 8, $G \in \mathfrak{F}$. Suppose that $N \leq A$ and $N \cap Y = 1$. Since Y is a tcc-subgroup in G, it follows that by Lemma 6, Y is a cyclic group of order dividing $p-1$. Then $Y \in g(p)$, where g is the canonical local definition of $\mathfrak{U}$. Since $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$, we have by [12, Proposition IV.3.11], $g(p) \subseteq f(p)$, where f is the canonical local definition of $\mathfrak{F}$. Hence $Y \in f(p)$.

Let Q be a Sylow q-subgroup of Y. It is obvious that $Q \leq G_q$ for some Sylow subgroup G_q of G. Then we can always choose a primitivator H of G such that $Q \leq H$. Really $G_q = M_q^g$ and $G_q \leq M^g = H$ for some $g \in G$ and some Sylow q-subgroup M_q of M. It is clear that H is a maximal subgroup of G. If $N \leq H$, then $G = NM = NM^g = NH = H$, a contradiction. Hence $NH = G$. Because N is abelian, then $N \cap H = 1$ and H is a primitivator.

Since $A = A\cap G = A\cap NH = N(A\cap H)$, we have

$$G = AY = N(A\cap H)Y.$$

Prove that $(A\cap H)Y$ is a primitivator of G. Since

$$[A\cap H, Q] \leq [A, Y] = F(G) = N$$

by Lemma 3 and $[A\cap H, Q] \leq H$, it follows that $[A\cap H, Q] \leq H\cap N = 1$. Therefore $A\cap H \leq C_G(Q) = T$. Besides $Y \leq T$. Then

$$T = T\cap G = T\cap N(A\cap H)Y = (A\cap H)Y(N\cap T).$$

It is obvious that $N\cap T$ is normal in T and hence $N\cap T$ is normal in $G = N(A\cap H)Y = NT$, since N is abelian. Thus is either $N \leq T$, or $N\cap T = 1$. In the first case, $T = G$ and $Q \leq Z(G)$, a contradiction. Otherwise, $T = (A\cap H)Y$ and $G = N \rtimes T$. Hence $T = (A\cap H)Y$ is a primitivator of G. Thus we can always choose a primitivator M_1 of G such that $G = N \rtimes M_1$, $Y \leq M_1$ and $M_1 = (A\cap M_1)Y$.

Because $A \in \mathfrak{F}$, it follows that $A/F_p(A) \in f(p)$. Since $N = C_G(N)$ and $N \leq A$, we have that $N \leq F_p(A) = F(A)$. Let N_1 is a minimal normal subgroup of A such that $N_1 \leq N$. Then $F(A) \leq C_A(N_1)$ by [2, Lemma 4.21]. Since A is a tcc-subgroup in G, it follows that by Lemma 4 (5), N_1 is normal in G. Hence $N = N_1$ and $C_A(N_1) = C_A(N) = N$. Then $F_p(A) = N$ and $A\cap M_1 \simeq A/N \in f(p)$.

Since $f(p)$ is a formation, $A\cap M_1 \in f(p)$, $Y \in f(p)$ and $[A\cap M_1, Y] = 1$, it follows that $M_1 \in f(p)$ by Lemma 7. Because $N \in \mathfrak{N}_p$, we have $G \in \mathfrak{N}_p f(p) = f(p) \subseteq \mathfrak{F}$.

So, we assume that $N\cap A = 1$ and $N \leq Y$. Similarly, we can show that $N\cap B = 1$ and $N \leq X$, where X is a tcc-supplement to B in G. By Lemma 6, A and B are cyclic. Hence G is supersoluble and therefore $G \in \mathfrak{F}$. The theorem is proved.

4. Conclusion

Clear that by condition 2 of Definition 1, $G = AT$ is the tcc-permutable product of the subgroups A and T. If $G = AB$ is the tcc-permutable product of subgroups A and B, then the subgroups A and B are tcc-subgroups in G. The converse is false.

Example 1. *The dihedral group $G =< a > \rtimes < c >$, $|a| = 12$, $|c| = 2$ ([15], IdGroup=[24,6]) is the product of tcc-subgroups $A =< a^3c >$ of order 2 and $B = < a^{10} > \rtimes < c >$ of order 12. But A and B are not tcc-permutable. Indeed, there are the subgroups $X = A$ and $Y =< c >$ of A and B respectively such that doesn't exist $u \in \langle X, Y\rangle =< a^3 > \rtimes < c >$ such that $XY^u \leq G$.*

Hence we have the following result.

Corollary 1. 1. *Let A and B be tcc-subgroups in G and $G = AB$. If A and B are supersoluble, then G is supersoluble,* ([8, Theorem 4.1])

2. *Let $\mathfrak{F}$ be a saturated formation containing $\mathfrak{U}$. Let the group $G = HK$ be the tcc-permutable product of subgroups H and K. If $H \in \mathfrak{F}$ and $K \in \mathfrak{F}$, then $G \in \mathfrak{F}$,* ([13, Theorem 5]).

3. *Suppose that A and B are supersoluble subgroups of G and $G = AB$. Suppose further that A and B are totally permutable. Then G is supersoluble,* ([3, Theorem 3.1]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.

2. Monakhov V. S. Introduction to the Theory of Finite Groups and Their Classes [in Russian]. Minsk: Vysh. Shkola, 2006.

3. Asaad M., Shaalan A. On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. Vol. 53. P. 318-326.

4. Maier R. A completeness property of certain formations // Bull. Lond. Math. Soc. 1992. Vol. 24. P. 540-544.

5. Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D. A question of R. Maier concerning formations // J. Algebra. 1996. Vol. 182. P. 738-747.

6. Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups
Publ. Math. Debrecen. 2006. Vol. 68, №3-4. P. 433-449.

7. Arroyo-Jorda M., Arroyo-Jorda P. Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups // Journal of Algebra. 2017. Vol. 476. P. 395-414.

8. Trofimuk A.A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups // Journal of Algebra and Its Applications. 2021. 2150020 (18 pages).

9. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of finite groups. Berlin: Walter de Gruyter, 2010.

10. Trofimuk A. A. Trofimuk A. A. On a product of two formational tcc-subgroups // Algebra and Discrete Mathematics. 2020. Vol. 30, № 2. P. 282-289.

11. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups. Dordrecht: Springer, 2006.

12. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

13. Arroyo-Jorda M., Arroyo-Jorda P., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M. D. On conditional permutability and factorized groups // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2014. Vol. 193. P.1123-1138.

14. Skiba A. N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. Vol. 315. P.192-209.

15. Groups, Algorithms, and Programming (GAP), Version 4.11.0. [Электронный ресурс] // URL: `http://www.gap-system.org` (дата обращения 22.09.2020).

REFERENCES

1. Huppert, B. 1967, Endliche Gruppen I, Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

2. Monakhov, V. S. 2006, Introduction to the Theory of Final Groups and Their Classes [in Russian], Vysh. Shkola, Minsk.

3. Asaad, M. & Shaalan, A. 1989, “On the supersolubility of finite groups“, *Arch. Math.*, vol. 53, pp. 318-326.

4. Maier, R. 1992, “A completeness property of certain formations“, *Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 24, pp. 540-544.

5. Ballester-Bolinches, A. & Perez-Ramos, M. D. 1996, “A question of R. Maier concerning formations“, *J. Algebra*, vol. 182, pp. 738-747.

6. Guo, W., Shum, K. P. & Skiba, A. N. 2006, “Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups“, *Publ. Math. Debrecen*, vol. 68, no. 3-4, pp. 433-449.

7. Arroyo-Jorda, M. & Arroyo-Jorda, P. 2017, “Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups“, *Journal of Algebra*, vol. 476, pp. 395-414.

8. Trofimuk, A.A. 2021, “On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups“, *Journal of Algebra and Its Applications*, 2150020 (18 pages).

9. Ballester-Bolinches, A., Esteban-Romero, R. & Asaad, M. 2010, Products of finite groups, Walter de Gruyter, Berlin.

10. Trofimuk, A. A. 2020, “On a product of two formational tcc-subgroups“, *Algebra and Discrete Mathematics*, vol. 30, no. 2, pp. 282-289.

11. Ballester-Bolinches, A. & Ezquerro, L. M. 2006, Classes of Finite Groups, Springer, Dordrecht.

12. Doerk, K. & Hawkes, T. 1992, Finite soluble groups, Walter de Gruyter, Berlin-New York.

13. Arroyo-Jorda, M., Arroyo-Jorda, P., Martinez-Pastor, A. & Perez-Ramos, M. D. 2014, “On conditional permutability and factorized groups“, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 193, pp. 1123-1138.

14. Skiba, A. N. 2007, “On weakly s-permutable subgroups of finite groups“, *J. Algebra,* vol. 315, pp. 192-209.

15. Groups, Algorithms, and Programming (GAP), Version 4.11.0. (2020). Available at `http://www.gap-system.org` (accessed 22 september 2020).

Получено 22.09.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 371+004 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-502-519

35 лет школьной информатике. Как создавался фундамент современной информатики и информатизации образования

И. Е. Вострокнутов, С. Г. Григорьев, Л. И. Сурат

Игорь Евгеньевич Вострокнутов — доктор педагогических наук, профессор, Институт цифрового образования Московского городского педагогического университета (г. Москва).
e-mail: vostroknutov_i@mail.ru

Сергей Георгиевич Григорьев — доктор технических наук, профессор, Институт цифрового образования Московского городского педагогического университета (г. Москва).
e-mail: grigorsg@yandex.ru

Лев Игоревич Сурат — кандидат экономических наук, доцент, Московский институт психоанализа (г. Москва).
e-mail: lisurat@mail.ru

Аннотация

35 лет назад в школах Советского Союза появился новый предмет информатика. Сегодня считается, что это было знаковым событием, которое впоследствии изменило всю систему образования. Но путь его в школу был непростым и достаточно длительным. Проведен анализ, какие науки сформировали методологическую основу информатики, какие концепции определили ее содержание, и кто из ученых стоял у ее истоков. Рассмотрено, какие факторы оказали влияние на содержание первого учебника информатики и последующих, как зарождалась отечественная информатизация образования, как создавалась новая педагогическая специальность «учитель информатики». Отмечено, труды каких ученых, авторских и научных коллективов легли в основу современной теории и методики обучения информатики и информатизации образования. Показано, как менялось содержание предмета, какие факторы оказывали влияние, а также, какие проблемы стоят перед школьной информатикой и в каком направлении произойдет ее трансформация в ближайшем будущем.

Ключевые слова: информатика, информатизация образования, теория и методика обучения информатике, проблемы школьной информатики, трансформация школьной информатики.

Библиография: 56 названий.

Для цитирования:

И. Е. Вострокнутов, С. Г. Григорьев, Л. И. Сурат. 35 лет школьной информатике. Как создавался фундамент современной информатики и информатизации образования // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 502–519.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 1.

UDC 371+004 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-502-519

35 years of school informatics. How the foundation of modern informatics and informatization of education was created

I. E. Vostroknutov, S. G. Grigoriev, L. I. Surat

Igor Evgenievich Vostroknutov — doctor of pedagogical sciences, professor, Institute of Digital Education, Moscow City Pedagogical University (Moscow).
e-mail: vostroknutov_i@mail.ru
Sergey Georgievich Grigoriev — doctor of technical sciences, professor, Institute of Digital Education, Moscow City Pedagogical University (Moscow).
e-mail: grigorsg@yandex.ru
Lev Igorevich Surat — candidate of economics sciences, Moscow institute of psychoanalysis (Moscow). *e-mail: lisurat@mail.ru*

Abstract

35 years ago, a new subject informatics was appeared in the schools of the Soviet Union. Today it is believed that this was a landmark event that subsequently changed the entire system of education. But his path to school was not easy and quite long. The analysis is carried out which sciences have formed the methodological basis of informatics, which concepts have determined its content, and which of the scientists stood at its origins. It is considered what factors influenced the content of the first textbook of informatics and subsequent ones, how the domestic informatization of education was born, how a new pedagogical specialty "teacher of informatics"was created. It is noted which works of scientists, authors and research teams formed the basis of modern theory and methods of teaching information and informatization of education. It is shown how the content of the subject changed, what factors influenced, as well as what problems are facing school informatics and in what direction its transformation will take place in the near future.

Keywords: informatics, informatization of education, theory and methods of teaching informatics, problems of school informatics, transformation of school informatics.

Bibliography: 56 titles.

For citation:
I. E. Vostroknutov, S. G. Grigoriev, L. I. Surat, 2021, "35 years of school informatics. How the foundation of modern informatics and informatization of education was created",*Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 502–519.

1. Введение

В сентябре 1985 года в школах Советского Союза появился новый учебный предмет информатика. С того времени прошло более 35 лет. Много это или мало? Если сравнивать с отдельным человеком, то это лучшая часть его жизни, время взросления, учебы, любви, создания семьи, выбор профессии и становления в ней профессионалом. Если сравнивать с периодом развития человеческой цивилизации, то это просто миг или отдельный эпизод его истории. Тем не менее, оглядываясь назад, нельзя не отметить, какой колоссальный рывок в науке, технике, развитии технологий совершило человечество за это время. Действительно, когда в школьной программе появился новый предмет информатика многие наши соотечественники весьма смутно представляли себе, что это такое и зачем все это нужно. Электронные вычислительные машины многие видели только в кино, а первые персональные компьютеры воспринимали скорее, как забавные и дорогие игрушки. Главным техническим средством коммуникации был телефон, основную информацию население получало из газет, радио и телевидения.

За этот период все сильно изменилось. Цифровые технологии прочно вошли во все сферы человеческой деятельности и быт. Компьютеры уже есть не только практически в каждой семье, но и у каждого члена семьи активного возраста. И это уже не дань моде, а несомненное удобство и необходимость. Телефон давно перестал быть главным средством коммуникаций, ему на смену пришла мобильная связь, причем у подавляющего большинства населения уже не просто мобильные телефоны, а смартфоны с выходом в интернет. Большую часть информации мы получаем из интернета, на смену обычного телевидения пришло интернет-телевидение. Изменился наш быт. Стирают за нас стиральные машины автоматы, посуду моют посудомоечные машины автоматы, разогревают пищу микроволновки, все большее распространение получают технологии умного дома. Вполне привычным стало через интернет покупать билеты на поезд или самолет, бронировать и оплачивать гостиницу, записываться на прием к врачу. Все чаще мы совершаем покупки не в магазинах, а в интернет-магазинах, с доставкой товара домой. Все реже расплачиваемся наличными деньгами, предпочитая использовать банковские карты или платежные системы. Обо всем этом не могли даже мечтать 35 лет назад.

Сегодня роль цифровых технологий в человеческом обществе настолько возросла, что во многих странах принимаются программы развития цифровой экономики, цифрового общества, цифрового образования. Изменения в экономике, производственной сфере, общественных структурах будут настолько велики, что уже все чаще используется термин «цифровая трансформация» применительно ко всем сферам человеческой деятельности, включая систему образования. Как изменится система образования, какое место в ней займет школьная информатика, как изменится содержание информатики? На эти и другие вопросы можно получить ответ, если проанализировать, как шло развитие школьного курса информатики и информатизации образования, какие факторы оказывали влияние, какие факторы доминируют и определяют направление (или направления) развития информатики и информатизации образования в настоящее время.

2. Становление школьной информатики и информатизации образования

Путь информатики в школу был непростым и достаточно долгим. Методологическая основа информатики и информатизации образования была заложена в теории программированного обучения. Годом рождения теории программированного обучения считается 1954, когда известный американский психолог Б. Ф. Скиннер сделал доклад, в котором изложил концепцию программированного обучения. Концепция хорошо сочеталась с появившимися в то время теорией информации и кибернетикой и позволяла в значительной степени формализовать процесс обучения, т. е. описать его на основе их математического аппарата. Это позволило выявить пути повышения эффективности процесса обучения и повышения качества образования. Основные положения теории программированного обучения представлены в работах Берга А. И. [3,4], Беспалько В. П. [5], Гальперина П. Я. [11], Крэма Д. [34], Талызиной Н. Ф. [53], Шварца И. Е. [55] и др.

Теория программируемого обучения оказалась базой, на которой в последствии в педагогике получил развитие деятельностный подход в обучении. Другим достижением теории программированного обучения явилось теоретическое обоснование необходимости внедрения в обучение обучающих машин. В ту пору применение в учебном процессе обучающих машин выглядело достаточно экзотично и вызывало критику со стороны ученых, учителей, общественности. Связано это было с недостаточным развитием техники.

Теория программированного обучения опередила свое время, однако широкое внедрение компьютерной техники вернуло интерес к ней. Основные теоретические положения программированного обучения легли в основу и получили свое развитие в таких направлениях педагогической науки, как теория и методика обучения информатике, информатизация образования. В частности, многие термины, которыми мы сегодня пользуемся в методике информатики пришли к нам из теории программированного обучения.

Важным фактором рождения школьной информатики является опытно-экспериментальная работа ученых-энтузиастов, которые разработали учебный курс элементы кибернетики для школьников. У истоков этого направления стояли В. С. Леднев и А. А. Кузнецов. На основе длительной теоретической и опытно-экспериментальной работы ими еще в 70-х годах прошлого века был сделан вывод о том, что курс «Основы кибернетики» должен войти в качестве самостоятельного школьного учебного предмета. Но тогда удалось лишь включить его в число факультативных курсов [39, 40]. Следует отметить, что стараниями энтузиастов в разные факультативные курсы были включены темы по информатике: «Системы счисления и арифметические устройства ЭВМ» (VII кл.), «Алгоритмы и программирование» (VIII кл.), «Основы кибернетики» (IX; X кл.), «Языки программирования» (X кл.). Для них были разработаны методики, которые впоследствии легли в основу школьного курса информатики. Здесь можно выделить работы И.Н. Антипова [2], В.М. Монахова [44], В.С. Леднева и А.А. Кузнецова [25, 28, 38], В.Н. Касаткина и др. [21, 22], М.П. Лапчика [35,36].

Большую роль в появлении информатики сыграли межшкольные учебно-производственные комбинаты (УПК). Они наряду с обучением школьников наиболее распространенным рабочим профессиям вели профессиональное обучение в области применения вычислительной техники: оператор ЭВМ, оператор устройств подготовки данных для ЭВМ, электромеханик по ремонту и обслуживанию внешних устройств ЭВМ, регулировщик электронной аппаратуры, программист-лаборант, оператор вычислительных работ [37]. Такие УПК были созданы по всей стране и работало в них много энтузиастов. Например, в Москве эту работу возглавил С.И. Шварцбурд. УПК показали востребованность специалистов в области вычислительной техники, а также фактически явились площадкой, на которой проходили апробацию первые методические разработки будущего учебного предмета информатики.

Толчком к введению в школы нового учебного предмета информатика стали реформы школьного образования 1984 года. В Постановлении ЦК КПСС и Совета министров СССР от 12 апреля 1984 г. № 313 «О дальнейшем совершенствовании общего среднего образования молодежи и улучшения условий работы общеобразовательной школы» впервые была определена задача «организовать в старших классах общеобразовательных школ, профессионально-технических училищах, средних специальных учебных заведениях изучение основ электронно-вычислительной техники. Для этого предусмотреть разработку специального курса для учащихся, создание необходимых учебников, учебных пособий, школьных и межшкольных кабинетов, а также использование компьютерной техники базовых предприятий и других учреждений в учебных целях». В соответствии с данным постановлением в конце 1984 под совместным кураторством ВЦ СО АН СССР (А. П. Ершов) и НИИ СиМО АПН СССР (В. М. Монахов) с привлечением группы педагогов-информатиков из различных регионов страны началась работа по созданию программы и учебных пособий по школьному предмету информатики. Результатом этой работы стало создание первого отечественного учебника по «Основам информатики и вычислительной техники» (ОИВТ) [47] и введение в школы Советского Союза уже с 1 сентября 1985 года нового учебного предмета информатики.

Следует отметить, что первый учебник информатики был поистине революционным для своего времени. Первая часть его состоит из двух разделов: алгоритмы и алгоритмический язык; построение алгоритмов для решения задач. Вторая часть содержит три раздела: устройство ЭВМ; знакомство с программированием; роль ЭВМ в современном обществе, перспективы развития вычислительной техники. Раздел знакомство с программированием содержал три подраздела: алгоритмический язык; язык программирования Рапира; язык программирования Бейсик. Учебник соответствовал представлениям того времени о предметной области информатики и уровню развития вычислительной техники. Большая часть содержания учебника была направлена на обучение алгоритмизации. Это вполне объяснимо, поскольку предмет был новый, компьютерной техники в школах было очень мало, программного обеспечения еще меньше, к тому же качество его тоже было недостаточно. Вторая часть учебника содержала разделы, посвященные устройству ЭВМ и их применению. Практическая часть состояла из знакомства с программированием. Учебник предполагал возможность использовать алгоритмический язык при «безмашинном» варианте обучения, вместе с тем изучать программирование можно было на основе языков Рапира или Бейсик, если вычислительная техника в школе имелась. Содержание учебника было разумно-достаточным. Одновременно с этим учебником было выпущено учебное пособие для учителей [20], что было очень важно для быстрого и успешного внедрения нового учебного предмета.

Первый учебник по ОИВТ задумывался и создавался, как пробный учебник. Вскоре был проведен всесоюзный конкурс школьных учебников информатики. Победителем в этом конкурсе оказался учебник под редакцией В.А. Каймина, который занял второе место [48]. В последствии появились учебники других авторских коллективов [48, 19, 32, 12]. Они отличались от первого учебника, в определенных аспектах были более инновационными. Например, в учебнике под редакцией В.А. Каймина впервые была выдвинута концепция использования различных парадигм обработки информации, предлагалось наряду с процедурной использовать и еще логическую парадигму [19]. Эта идея была ранее высказана в работе [13].

Введение нового школьного предмета «Основы информатики и вычислительной техники» – это был очень сложный и трудоемкий процесс, в котором было задействовано большое число специалистов самых разных организаций, ведомств и предприятий Советского Союза. Кроме разработки нового учебника приходилось параллельно решать целый комплекс других глобальных задач, например, оснащение учебных заведений компьютерной техникой, быстрая переподготовка учителей для нового учебного предмета, открытие новой специальности учитель ОИВТ в педагогических вузах и др.

Задача оснащения учебных заведений вычислительной техников стояла особенно остро. К 1985 году в СССР наметилось некоторое отставание в области разработки средств вычислительной техники от ведущих стран Европы, США и Японии, обусловленное тем, что продукция отечественной электронной промышленности: «Электроника Д3-28», «Искра 226» и т.д. была преимущественно ориентирована на решение производственных и профессиональных задач. Для приобретения персональных компьютеров за рубежом, необходимо было определить требуемые для школьного обучения характеристики, проанализировать техническое и программное обеспечение. Наибольший вклад в решение этой задачи внесли: лаборатория Проблем информатизации образования» Института проблем информатики академии наук СССР [54] и лаборатория Информатики и вычислительной техники НИИ школьного оборудования и технических средств обучения РАО [28]. Несмотря на то, что в нашей стране практически не было соответствующих теоретических разработок в этой области, задача была выполнена и уже в 1985 году в систему народного образования поступило 250 КУВТ «Ямаха MSX-1» (КУВТ – комплекс учебной вычислительной техники). В 1988 году поступило еще около 500 КУВТ «Ямаха MSX-2» [54]. КУВТ «Ямаха» поставлялись не только в школы, но и в педагогические вузы и фактически с них началась информатизация образования в нашей стране. Эти компьютеры оказались настолько удачными и надежными, что активно использовались в учебном процессе школ и вузов вплоть до конца 20 века. Во многих педагогических вузах можно было наблюдать, как в вычислительных лабораториях уже использовались современные IBM PC, а буквально рядом, в соседней лаборатории, компьютерный класс «Ямаха».

Серийный выпуск первых отечественных школьных компьютеров Агат был налажен в 1985 году. Это был 8-разрядный компьютер, разработанный на основе конструктивных решений Apple II. Он размещался в отдельном системном блоке, к которому подключался монитор, созданный на основе телевизора Юность-404. У него были достаточно скромные технические характеристики и невысокая надежность, но он внес свой вклад в информатизацию образования СССР, а позднее и России. К нему было разработано достаточно удачное программное обеспечение [50].

Примерно в это же время появился компьютер «Электроника БК-0010, он имел не только 16-разрядный процессор, совместимый с PDP-11 и 16-разрядный доступ ко всей оперативной и постоянной памяти, а также 16-разрядные контроллеры дисплея и параллельного порта, что давало ему право называться настоящим, полностью 16-разрядным ПК [23]. Программное обеспечение первых версий содержало язык программирования Фокал, в дальнейшем были разработаны трансляторы с языков программирования Бейсик, Ассемблер, С, Пролог и другие. Особенности интерфейсов этого компьютера позволили создать интерпретатор языка Пролог в виде встроенной системы программирования, записанной на микросхеме ПЗУ [17]. Этот компьютер был достаточно популярен до середины 1990-х годов.

Еще один компьютер, с 16 разрядной системой команд PDP-11 - «Электроника УКНЦ МС 0511» был компьютером нового поколения и по своим характеристикам значительно превосходил иные отечественные машины. Эти компьютеры можно было объединить в локальную сеть. По некоторым оценкам таких компьютеров было поставлено в учебные заведения нашей страны около 300000 штук, и на их базе было сформировано более 22000 компьютерных классов. Для компьютера «Электроника УКНЦ МС 0511» было создано удобное программное обеспечение. Их производство было прекращено в 1991 году в связи с началом рыночных отношений в экономике и массовым появлением на отечественном рынке компьютеров IBM PC-286.

Введение в школы огромной страны нового учебного предмета сопровождалось масштабной подготовкой учителей. Решение этой проблемы было поручено начальнику главного управления высших учебных Министерства просвещения СССР заведений В.К. Розову. Вся необходимая работа была проведена по-военному быстро и организованно. Сначала была подготовлена большая группа лекторов из преподавателей университетов, которые в дальнейшем должны были в регионах провести специальные подготовительные курсы для учителей. С 1 сентября 1985 года начались уроки информатики во всех школах СССР [45].

Введение нового предмета ОИВТ не ограничивалось только средней школой. Параллельно учебный предмет информатика вводился в учебные планы технических, педагогических, экономических вузов и техникумов. В 1986-1987 годах во многих педагогических вузах создаются общеинститутские кафедры информатики. Частично они комплектуются собственными специалистами физиками и математиками, знакомыми с вычислительной техникой, но большая часть новых преподавателей пришла из оборонных НИИ и предприятий. Они быстро перестроились и в дальнейшем сыграли большую положительную роль в становлении вузовской и школьной информатики, а также информатизации сферы отечественного образования.

Специальность «учитель информатики» была новой и не понятной для многих специалистов системы образования, включая и преподавателей педагогических вузов. К тому же на начальном этапе не было четкой концепции подготовки специалистов. Поэтому при обучении учителей информатики использовались те же принципы и подходы в обучении, что и для учителей других специальностей. А поскольку считалось, что наиболее близкими специальностями являются математика и физика, то многие педагогические вузы стали вводить совмещенные специальности «учитель математики и информатики», «учитель информатики и физики». Большинство педагогических вузов пошло по этому пути освоения новой специальности «учитель информатики» [1]. Позднее, в связи, с разработкой концепции специальности и развитием нового направления в педагогической науке «теория и методика обучения информатике» стало очевидно, что информатика имеет свою предметную область, свое содержание, свою специфику в выборе форм и методов обучения, а также то, что они не совпадают с математикой и физикой.

Следует отметить ученых, труды, которые легли в основу концепции специальности «учитель информатики» и продолжают определять содержание теории и методики обучения информатике, и, естественно, самого школьного курса информатики. Это работы в области содержания методики информатике и ее структуры Кузнецова А.А. [26, 46], Лапчика М.П., Хеннера Е.К. [37], Могилева А.В., Пака Н.И. [43], Кушниренко А. Г., Лебедева Г. В. [33]; в области разработки методической системы специальности «учитель информатики» Швецкого М.В. [56], Бороненко Т.А. [7] , Босовой Л.Л. [8], Ракитиной Е.А. [49], Линьковой В.П. [41], Козлова О.А. [24], Брановского Ю.С. [9]. Впервые была сформулирована концепция обучения «Информатике и информационным технологиям» студентов гуманитарных факультетов педагогических вузов, реализованная в работе Бешенкова С.А. и соавторов [6].

Важную роль в становлении и развитии школьной информатики сыграл журнал «Информатика и образование». Первый номер вышел в 1986 году перед началом учебного года. С той поры и поныне журнал «Информатика и образование» является ведущим научно-методическим журналом, освещающим вопросы методики преподавания информатики и информатизации образования. Он издается более 35 лет.

Вместе с введением нового школьного предмета ОИВТ создаются научные лаборатории, научные центры и институты. Они решали целый ряд важных научных и прикладных задач, связанных как с созданием новых методик обучения, так и информатизации всей системы образования. Для решения этих задач были привлечены АН СССР в лице известных ученых академиков А.П. Ершова, Е.П. Велихова и АПН СССР в лице академика АПН СССР В.Г. Разумовского - академика-секретаря отделения дидактики и частных методик, куратора данного направления, академика АПН СССР С.Г. Шаповаленко, директора НИИ ШОТСО (Школьного Оборудования и Технических Средств Обучения), член-корреспондента АПН СССР В.М. Монахов, возглавлявшего НИИ СиМО (Содержания и Методов Обучения). В обоих институтах были созданы специализированные лаборатории, занимавшиеся исследованиями и разработками в данном направлении.

В 1984 году в НИИ ШОТСО АПН СССР была создана лаборатория Информатики и вычислительной техники [50]. В 1995 году было принято решение о создании на базе лаборатории Института информатизации образования РАО (ИИО РАО). С 1995 года по 2005 год директором института был известный методист, академик РАО, Г.Д. Глейзер. Начиная с 2005 года до 2014 года директором института являлась академик РАО И.В. Роберт. Основные направления исследований были сконцентрированы на экспертизе качества программного и технического обеспечения компьютеров и оборудования для школьных кабинетов, подготовка работников для сферы образования по основам информатики и вычислительной техники, разработка дополнений к техническому заданию на создание отечественной компьютерной техники, разработка требований к прикладным программным средствам для обучения школьным дисциплинам [51,52]. Важным направлением исследований в области информатизации образования ИИО РАО является разработка основных теоретических положений и технологии оценки качества средств и систем в сфере информатизации образования. Они изложены в работе Вострокнутова И.Е. [10].

Исследования и разработки, выполняемые в НИИ СиМО в лаборатории методики информатики, а затем центре математики, информатики и информационных технологий в образовании, созданном по инициативе академика РАО А.А. Кузнецова, были сосредоточены на формировании стандартов содержания курса информатики, разработке методик оценки и классификации Электронных Образовательных ресурсов (ЭОР) [16, 26], создании основ построения Контрольно-Измерительных Материалов (КИМ) для Единого Государственного Экзамена (ЕГЭ) по информатике [14], исследовались вопросы автоматизации формирования системы понятий в курсе школьной информатики [18]. В центре математики, информатики и информационных технологий в образовании в сотрудничестве с Московским городским педагогическим университетом был разработан первый учебник «Информатизация образования. Фундаментальные основы» для студентов педагогических вузов и слушателей системы повышения квалификации педагогов [15]. В этой работе была сформулирована система понятий предмета информатизация образования. Еще одним учебником, созданным в Центре НИИ СиМО является учебник школьного курса «Информатика и ИКТ» [29]. Формирование целостного курса информатики на основе интеграции содержания обучения вокруг такого системообразующего понятия, как «информационные процессы», наполнение учебного материала гуманитарной составляющей, адекватное отражение в школьном курсе современного состояния фундаментальной науки информатики — все это создает условия для фундаментализации обучения информатике.

Следует подчеркнуть, что под фундаментализацией обучения информатике понимается не изучение в школе основ фундаментальной науки информатики, а выделение ее фундаментальных основ и их дидактическую адаптацию для образования учащихся с помощью курса «Информатика и ИКТ», для овладения ими социального опыта человечества, адекватного гуманитарной культуре во всей ее структурной полноте. Вместе с тем, фундаментальная подготовка учащихся общеобразовательной школы в области информатики должна учитывать процессы гуманизации, дифференциации и индивидуализации обучения, быть основана на использовании личностно ориентированных технологии? обучения [30, 31].

В структуре Министерства просвещения России в 1990 году был создан Российский центр информатизации образования (РОСЦИО), преобразованный в 1993 году Институт информатизации образования (ИНИНФО). Руководил институтом профессор Я. А. Ваграменко. Среди направлений исследования ИНИНФО можно выделить: разработка теоретической основы информатизации образования, создание удаленной образовательной сети на основе телевизионного сигнала – ТВ ИНФОРМ образование; создание профессионального журнала «Педагогическая информатика»; создание системы регистрации разработок в сфере информатизации образования Отраслевого фонда алгоритмов и программ (ОФАП ИНИНФО), разработка системы сертификации качества средств и систем в сфере образования. При ИНИНФО была создана общественная Академия информатизации образования, которая объединяла в своих рядах тысячи специалистов в области информатики и информатизации образования не только России, но и многих других стран мира.

Таким образом, в процессе формирования и развития курса информатики участвовали правительственные структуры, высшие учебные заведения и различные научные институты нашей страны.

3. Проблемы роста

С момента своего появления и по настоящее время информатика всегда отличалась от других школьных учебных предметов. Главной особенностью этого предмета является то, что до сих пор не только не устоялось его содержание, но и вообще не понятно, установится ли оно вообще в обозримом будущем. Дело в том, что самим своим рождением школьная информатика обязана развитию вычислительной техники. Естественно, что ее содержание сегодня во многом определяется информационными (цифровыми) технологиями и наиболее распространенным программным обеспечением. А с учетом того, насколько стремительно развиваются цифровые технологии и насколько быстро они меняют нашу жизнь, становится ясно, что изменение содержания школьной информатики неизбежно.

На протяжении своей 35-летнего периода развития содержание школьного курса информатики неоднократно менялось. В первых учебниках доминировала линия алгоритмизации и программирования. Это объяснялось тем, первые компьютеры были ориентированы на решение прикладных задач, связанных с программированием. Их вычислительные возможности были невелики, прикладного программного обеспечения было мало, а имеющееся было несовершенно. Но постепенно, по мере развития вычислительной техники стали появляться сначала хорошие текстовые редакторы, затем графические редакторы и другое прикладное программное обеспечение. Школьные учебники постепенно начали делать разворот от программирования в сторону информационных технологий, больше уделять внимания темам представления информации, информации и информационных процессов, устройство компьютера.

В конце 20 века появились 32 разрядные компьютеры. Их вычислительные возможности позволяли создать прикладное программное обеспечение высокого качества. Компьютеры постепенно получили широкое распространение в различных сферах человеческой деятельности, их начинают массово покупать в личное пользование, широкое распространение получает интернет. Меняется школьный курс информатики. Он получает название «информатика и ИКТ». В названии появилось ИКТ – информационные и коммуникационные технологии и ИКТ начинает доминировать в содержании информатики над остальными темами. Причем доминирование оказалось настолько сильным, что в условиях дефицита учебного времени программирование достаточно быстро было практически вытеснено из курса информатики.

Вытеснение алгоритмизации и программирования из современного школьного курса информатики обернулось большими проблемами, как для самой школьной информатики, так и вузовского образования. Во-первых, задания ЕГЭ по информатике, по-прежнему ориентированы на программирование и получить хоть какой-то приличный результат на ЕГЭ без знания программирования невозможно. Сложилась парадоксальная ситуация, когда содержание школьных учебников информатики одно, а задания ЕГЭ совсем другие. Сегодня подготовить школьников к ЕГЭ по информатики можно только за счет дополнительного образования, либо с помощью репетиторов. Во-вторых, задания олимпиад по информатике по-прежнему ориентированы на программирование. В результате многие школы просто не могут выставить команды для участия в олимпиадах по информатике. Поэтому олимпиады по информатике давно превратились в соревнования между несколькими «элитными политехническими лицеями». В-третьих, поскольку получить хороший балл на ЕГЭ по информатике без специальной дополнительной подготовки невозможно, то и школьники перестали выбирать этот предмет в качестве. В результате, вузы, чтобы не остаться без абитуриентов, вынуждены брать на информационные специальности абитуриентов с ЕГЭ других предметов, например, обществознание. В последствии вузам приходится адаптировать программы, начиная обучение студентов практически с нуля.

Следует отметить, что это не единственная проблема современной школьной информатики и информатизации образования. Например, всегда содержание учебников отставало от уровня развития информационных технологий и программного обеспечения. Это вполне объяснимо, поскольку на разработку и апробирование учебника нужно несколько лет, также требуется время на его издание и продвижение. За это время успевает сильно измениться и техническое, и программное обеспечение компьютеров. Еще одной серьезной проблемой является неустоявшаяся терминология. Так, даже в словарях и справочниках разных авторов можно наблюдать разное толкование одних и тех же терминов. Это запутывает содержание предмета и усложняет построение методики его преподавания.

Сегодня цифровые технологии достигли такого уровня развития, а их использование во всех сферах человеческой деятельности становится настолько велико, что все чаще мы встречаемся с новым термином «цифровизация». Были успешно реализованы национальные проекты «цифровое правительство», «ликвидация цифрового неравенства», продолжают развиваться национальные проекты «цифровая экономика», «цифровая образовательная среда». Все чаще встречаемся с терминами «цифровая индустрия», «цифровые двойники» и др. Так сложилось, что все «цифровые» проекты и программы были глобальными и затрагивали широкие слои населения. Они были нужными и своевременными, но требовали много сил и самоотдачи участников. Применительно к системе образования используется новый термин «цифровая трансформация системы образования». В нашей стране было успешно реализовано несколько программ информатизации образования. Они сильно изменили всю систему образования. Но цифровая трансформация системы образования – это процесс более высокого и глобального уровня.

4. Заключение

Цифровая трансформация затронет всю отечественную систему образования начиная от самой парадигмы, методологии обучения, приведет к пересмотру перечня школьных учебных предметов, их содержания, пересмотру форм и методов обучения, созданию новых методик обучения. Глобальные изменения произойдут и в школьном курсе информатики и информатизации образования. Возникает вопрос, какие изменения произойдут в школьной информатике? Ответ очевиден – изменения будут связаны в том числе и с решением проблем самой информатики.

Школьный курс информатики сильно перегружен содержанием. Это еще отмечали ученые, стоявшие у истоков учебного предмета. Поэтому часть содержания, вероятно, уйдет в другие учебные предметы. Например, сегодня навыки набора текста на клавиатуре столь же необходимы, как умение писать авторучкой. Этому можно и нужно учить в том числе и на уроках русского языка. Тем более, если новая парадигма образования будет предусматривать использование школьниками собственных ноутбуков и планшетов.

Обучение программированию нужно вернуть в школу. Умение программировать даже различных бытовых устройств нужно новому поколению. Это можно сделать в рамках отдельного предмета, либо вместе с учебным предметом робототехника.

Будет обязательно введен во все образовательные учреждения новый учебный предмет робототехника.

Развитие современного метапредметного подхода в информатике приведет к пересмотру содержания и методов обучения различных школьных учебных предметов. Поэтому часть содержания тем ИКТ будет рассматриваться уже в этих предметах.

Школьная информатика может даже не сохранить своего названия. Может, например, появиться предмет «информационные технологии», а содержание тем представление и информационных процессов войти в новый предмет «основы кибернетики» или в «основы кибернетики и робототехники».

Безусловно, школьная информатика и информатизация образования прошла сложный и интересный путь развития. В этом процессе принимали участие много ученых, педагогов, специалистов, и в рамках одной статьи невозможно отразить все его стороны. Поэтому заранее просим прощения у коллег, о которых не упомянули, либо сказали слишком коротко.

Особый интерес, конечно же, представляет то, в каком направлении движутся информатика и информационные технологии, какой будет система образования в недалеком будущем, какие факторы оказывают влияние на ее развитие, прежде всего взаимное влияние информационных технологий и образования. Все это будет темой дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдулразаков М.М. Личность учителя информатики: от компьютерной грамотности к профессионализму и ИКТ-компетенциям. // Информатика и образование. 2015. №7. С. 64 – 67.

2. Антипов И.Н. Программирование: Учеб. пособие по факультативному курсу для учащихся VIII—IX кл. – М.: Просвещение, 1976. – 175 с.

3. Берг А.И. Кибернетика – наука об оптимальном управлении. М. – Л., «Энергия», 1964. – 64 с.

4. Берг А.И. Состояние и перспективы программированного обучения. М.: Знание, 1966. – 27 с.

5. Беспалько В.П. Программированное обучение (Дидактические основы). М.: Издательство «Высшая школа», 1970. – 300 с.

6. Бешенков С.А., Гейн А.Г., Григорьев С.Г. Информатика и информационные технологии: Учебное пособие для гуманитарных факультетов педвузов/ Урал. гос. пед. ун-т. Екатеринбург, 1995, – 144 с.

7. Бороненко Т. А. Теоретическая модель системы методической подготовки учителя информатики: автореферат дис. ... доктора педагогических наук: 13.00.02 / Рос. гос. пед. ун-т. - Санкт-Петербург, 1998. – 34 с.

8. Босова Л. Л. Развитие методической системы обучения информатике и информационным технологиям младших школьников: автореферат дис. ... доктора педагогических наук: 13.00.02 / Босова Людмила Леонидовна; [Место защиты: Ин-т содержания и методов обучения Рос. акад. образования]. - Москва, 2010. – 47 с.

9. Брановский Ю. С. Методическая система обучения предметам в области информатики студентов не физико-математических специальностей в структуре многоуровневого педагогического образования: автореферат дис. ... доктора педагогических наук: 13.00.02 / Моск. гос. открытый пед. ун-т. - Москва, 1996. – 37 с.

10. Вострокнутов И. Е. Теория и технология оценки качества программных средств образовательного назначения: диссертация ... доктора педагогических наук: 13.00.02. – Москва, 2002. – 387 с.

11. Гальперин П.Я. Программированное обучение и задачи коренного усовершенствования методов обучения // К теории программированного обучения. – М., 1967. – 44 с.

12. Гейн А.Г., Житомирский В.Г., Линецкий Е.В., Сапир М.В., Шолохович В.Ф. Основы информатики и вычислительной техники для 10–11 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1991. – 254 с.

13. Григорьев С., Морозов М. Давайте попробуем Пролог // Информатика и образование, 1987, №4, С.14 – 17.

14. Григорьев С.Г., Гриншкун В.В. Единый государственный экзамен. Теперь и по информатике // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. 2004. № 2. С. 19 – 24.

15. Григорьев С.Г., Гриншкун В.В. Информатизация образования. Фундаментальные основы / Томск Изд-во «ТМЛ-Пресс», 2008. – 286 с.

16. Григорьев С.Г, Гришкун В.В, Кулагин В.П., Сигалов А. В. Каталог образовательных интернет-ресурсов. – Высшее образование в России. 2007. №7. с. 74 – 77.

17. Григорьев С.Г. Реализация системы логического программирования для персональных компьютеров с ограниченными ресурсами и ее применение. - Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, М. МИП,1993, – 186 с.

18. Григорьев С.Г., Лобов И.Б. Терминология школьной информатики на основе статистического анализа текста учебников // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. 2005. № 4. С. 29 – 31.

19. Ершов А.П., Кушниренко А.Г., Лебедев Г.В., Семенов А.Л., Шень А.Х. Основы информатики и вычислительной техники. – М.: Просвещение, 1988. – 206 с.

20. Изучение основ информатики и вычислительной техники: метод. пособие для учителей и преподавателей сред. учеб. заведении?. В 2-х ч. / А.П. Ершов, В.М. Монахов, А.А. Кузнецов и др.; под ред. А.А. Ершова, В.М. Монахова. – М.: Просвещение, Ч. 1, 1985. Ч. 2, 1986. – 191 с., – 227 с.

21. Касаткин В.И. Введение в кибернетику: Пособие для факультативных занятий в 9 классе. – Киев, 1976. – 144 с.

22. Касаткин В.Н., Верлань А.Ф. Секреты кибернетики. – Киев: Рад. шк., 1971. – 256 с.

23. Косенков С.М., Полосин А.Н., Счепицкий З.А., Дябин М.И., Половянюк А.И. Бытова персональная микроЭВМ «Электроника БК-10». -Микропроцессорные средства и системы, 1985 №1, С. 22 – 25.

24. Козлов О. А. Развитие методической системы обучения информатике курсантов военно-учебных заведений Министерства Обороны Российской Федерации: автореферат дис. ... доктора педагогических наук: 13.00.02. - Москва, 1999. – 38 с.

25. Кузнецов А.А. Изучение факультативного курса «Основы кибернетики». Факультативные занятия в средней школе. – М.: Педагогика, 1978. – 46 с.

26. Кузнецов А.А. Григорьев С.Г., Гриншкун В.В. Образовательные электронные издания и ресурсы: методическое пособие. М.: Дрофа, – 2009, – 156 с.

27. Кузнецов А.А., Захарова Т.Б., Захаров А.С. Общая методика обучения информатике: Учебное пособие для студентов педагогических вузов. 1 часть. – Москва: Прометей, 2016. – 300 с.

28. Кузнецов А.А. Цифровые вычислительные машины: Учеб. материалы для учащихся. – М., 1969. – 60 с.

29. Кузнецов А.А., Григорьев С.Г., Гриншкун В.В., Левченко И.В., Заславская О.Ю. Информатика и ИКТ (Информационно-коммуникационные технологии). 8 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений / Москва, 2010. – 255 с.

30. Кузнецов А.А., Григорьев С.Г., Гриншкун В.В., Заславская О.Ю., Левченко И.В. Каким может быть учебник информатики для основной общеобразовательной школы // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». — 2006. — No 2 (7). С. 104 – 109.

31. Кузнецов А.А., Григорьев С.Г., Гриншкун В.В., Заславская О.Ю., Левченко И.В. Формирование структуры и содержания учебника информатики для основной школы // Информационная образовательная среда. Теория и практика: Бюллетень Центра информатики и информационных технологии? в образовании ИСМО РАО. — М.: РАО, 2007. — Вып. 2. С. 15 – 23.

32. Кушниренко А. Г., Лебедев Г. В., Сворень Р. А. Основы информатики и вычислительной техники. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.

33. Кушниренко А. Г., Лебедев Г. В. 12 лекций о том, для чего нужен школьный курс информатики и как его преподавать. Методическое пособие. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 464 с.

34. Крэм Д. Программированное обучение и обучающие машины. — М.: Мир, 1965. — 274 с.

35. Лапчик М.П. Метод блок-схем в программировании: Учеб. пособие. – Омск, 1969. – 49 с.

36. Лапчик МП. Основы программирования: Учеб. пособие для учащихся. – М.: НИИ СИМО АПН СССР, 1972. – 86 с.

37. Лапчик М.П. Методика преподавания информатики: Учебное пособие для студентов педагогических вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 624 с.

38. Леднев В.С., Кузнецов А.А. Начала кибернетики: Учеб. Материалы для учащихся. – М., 1968. – 116 с.

39. Леднев В.С., Кузнецов А.А. Перспективы изучения кибернетики в школе // Перспективы развития содержания общего среднего образования. М., 1974. С. 22 – 26.

40. Леднев В.С., Кузнецов А.А. Программа факультативного курса «Основы кибернетики» // Математика в школе. 1975. № 1. С. 51 – 53.

41. Линькова В. П. Развитие методической системы обучения информатике на основе информационного и информационно-логического моделирования: автореферат дис. ... доктора педагогических наук: 13.00.02. - Москва, 2000. – 37 с.

42. Малев В.В. Общая методика преподавания информатики: Учебное пособие. – Воронеж: ВГПУ, 2005. – 271 с.

43. Могилев А.В., Пак Н.И., Хеннер Е.К. Информатика. Учебное пособие. М.: Издательский дом «Академия». 8 изданий, 1999-2012 гг. – 842 с.

44. Монахов В.М. Программирование. Факультативный курс: Пособие для учителя. — М.: Просвещение, 1974. – 159 с.

45. Монахов В.М. Тридцать лет спустя. . . // Информатика и образование. 2015. №7. С. 11 – 17.

46. Основы общей теории и методики обучения информатике: учебное пособие / под ред. А.А. Кузнецова. – М.: Лаборатория знаний, 2020. – – 210 с.

47. Основы информатики и вычислительной техники: проб. учеб. пособие для сред. учеб. заведении. В 2-х ч. / А.П. Ершов, В.М. Монахов, С.А. Бешенков, Я.Э. Гольц, А.А. Кузнецов, Э.И. Кузнецов, М.П. Лапчик, Д.О. Смекалин; под ред. А.П. Ершова, В.М. Монахова. – М.: Просвещение. Ч. 1, 1985. Ч. 2, 1986. – 96 с., – 143 с.

48. Основы информатики и вычислительной техники: проб. учебное пособие для сред. учеб. заведении / В.А. Каймин, А.Г. Щеголев, Е.А. Ерохина, Д.П. Федюшин. – М.: Просвещение, 1989. – 272 с.

49. Ракитина Е. А. Построение методической системы обучения информатике на деятельностной основе: автореферат дис. ... доктора педагогических наук: 13.00.02 / Ин-т общ. сред. образования Рос. акад. образования. - Москва, 2002. – 48 с.

50. Роберт И.В. Путь по экспоненте. – М. ИИО РАО, 2009. – 88 с.

51. Роберт И.В. Современные информационные технологии в образовании: дидактические проблемы и перспективы использования. М.: «Школа-Пресс», 1994, – 205 с.

52. Роберт И.В. Теория и методика информатизации образования (психолого-педагогический и технологический аспекты). 3-е изд. – М.: ИИО РАО, 2010. – 356 с.

53. Талызина Н.Ф. Теоретические проблемы программированного обучения. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1969. – 133 с.

54. Христочевский С.А. Информатизация образования – как это было: академический взгляд. // Информатика и образование. 2015. №7. С. 53 – 58.

55. Шварц И.Е., Глава X. Программированное обучение // Педагогика школы: Учеб. пособие. Ч. 1. Общие основы. Дидактика. – Пермь.: Перм. пед. ин-т., 1968. – 281 с.

56. Швецкий М. В. Методическая система фундаментальной подготовки будущих учителей информатики в педагогическом вузе в условиях двухступенчатого образования: автореферат дисс. ... доктора педагогических наук: 13.00.02 / Рос. пед. ин-т. - Санкт-Петербург, 1994. – 36 с.

REFERENCES

1. Abdulrazakov M.M. 2015, “The personality of a informatics teacher: from computer literacy to professionalism and ICT competencies”, Informatics and Education., no. 7, pp. 64 – 67.

2. Antipov I.N. 1976. *Programming: Textbook. manual for an optional course for students of VIII-IX grades,* Prosveshenie, Moscow, 175 pp.

3. Berg A.I. 1964. *Cybernetics is the science of optimal control*, "Energy Moscow - Leningrad, 64 pp.

4. Berg A.I. 1966. *State and prospects of programmed learning*, Knowledge, Moscow, 27 pp.

5. Bespalko V.P. 1970. *Programmed learning (Didactic basics)*, Publishing house "Higher school" , Moscow, 300 pp.

6. Beshenkov S.A., Gein A.G., Grigoriev S.G. 1995. *Informatics and information technologies: a textbook for the humanities faculties of teacher training universities*, Ural. state ped. un-t, Yekaterinburg, 144 pp.

7. Boronenko T.A. 1998. *Theoretical model of the system of methodical training of a teacher of informatics: abstract dis. ... doctors of pedagogical sciences: 13.00.02,* Ros. state ped. un-t, St. Petersburg, 34 pp.

8. Bosova L.L. 2010. *Development of a methodical system of teaching computer science and information technologies for primary school students: abstract of thesis. ... doctors of pedagogical sciences: 13.00.02,* Institute of content and teaching methods Rus. acad. Education, Moscow, 47 pp.

9. Branovskiy Yu. S. 1996. *Methodical system of teaching subjects in the field of computer science for students of non-physical and mathematical specialties in the structure of multilevel pedagogical education: abstract of thesis. ... doctors of pedagogical sciences: 13.00.02,* Mosk. state open ped. un-t, Moscow, 37 pp.

10. Vostroknutov I.E. 2002. *Theory and technology for assessing the quality of software for educational purposes: dissertation ... Doctor of Pedagogical Sciences: 13.00.02*, Institute of informatization of education Rus. acad. Education, Moscow,.387 pp.

11. Halperin P.Ya. 1967. Programmed learning and problems of radical improvement of teaching methods. (On the theory of programmed learning). Moscow, 44 pp.

12. Gein A.G., Zhitomirsky V.G., Linetskiy E.V., Sapir M.V., Sholokhovich V.F. 1991. *Fundamentals of Informatics and Computer Engineering for 10-11 grades of secondary school,* Prosveshenie, Moscow, 254 pp.

13. Grigoriev S., Morozov M. 1987, "Let's try the Prologue", Informatics and Education, No. 4, pp.14-17.

14. Grigoriev S.G., Grinshkun V.V. 2004, "Unified State Exam. Now in informatics", Bulletin of the Moscow City Pedagogical University, Series: Informatics and informatization of education, no. 2, pp. 19-24.

15. Grigoriev S.G., Grinshkun V.V. 2008. *Informatization of education. Fundamentals.* Publishing House "TML-Press Tomsk, 286 pp.

16. Grigoriev S.G., Grishkun V.V., Kulagin V.P., Sigalov A.V. 2007, "Catalog of educational Internet resources", Higher education in Russia, no. 7. pp. 74-77.

17. Grigoriev S.G. 1993. *Implementation of a logical programming system for personal computers with limited resources and its application. - Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences.* MIP, Moscow, 186 pp.

18. Grigoriev S.G., Lobov I.B. 2005, "Terminology of school computer science based on statistical analysis of textbooks", Bulletin of the Moscow City Pedagogical University. Series: Informatics and informatization of education, no. 4. pp. 29-31.

19. Ershov A.P., Kushnirenko A.G., Lebedev G.V., Semenov A.L., Shen A.Kh. 1988. *Fundamentals of Informatics and Computer Science.* Education, Moscow, 206 pp.

20. *Studying the basics of computer science and computer technology: method. manual for teachers and teachers of environments. study. institutions. In 2 hours.* Ch. 1, 1985. Ch. 2, 1986. / A.P. Ershov, V.M. Monakhov, A.A. Kuznetsov and others; ed. A.A. Ershova, V.M. Monakhova. Prosveshenie, Moscow, 191 pp, 227 pp.

21. Kasatkin V.I. 1976. Introduction to Cybernetics: *A Handbook for Optional Activities in Grade 9.* Kiev, 144 pp.

22. Kasatkin V.N., Verlan A.F. 1971. *Secrets of Cybernetics.* Glad. shk., Kiev, 256 pp.

23. Kosenkov S.M., Polosin A.N., Schepitsky Z.A., Dyabin M.I., Polovyanyuk A.I. 1985, “Household personal microcomputer “Electronics BK-10”, Microprocessor tools and systems, no. 1, pp. 22-25.

24. Kozlov O.A. 1999. *Development of a methodical system for teaching computer science to cadets of military educational institutions of the Ministry of Defense of the Russian Federation: auto-abstract dis. ... doctors of pedagogical sciences: 13.00.02.* Moscow, 38 pp.

25. Kuznetsov A.A. 1978. *Study of the optional course "Fundamentals of Cybernetics". Faculty classes in high school.* Pedagogy, Moscow, 46 pp.

26. A.A. Kuznetsov. Grigoriev S.G., Grinshkun V.V. 2009. *Educational electronic publications and resources: a methodological guide.* Drofa, Moscow, 156 pp.

27. Kuznetsov A.A., Zakharova T.B., Zakharov A.S. 2016. *General methodology of teaching information-tics: Textbook for students of pedagogical universities. 1 part.* Prometheus, Moscow, 300 pp.

28. A.A. Kuznetsov. 1969. *Digital computers: Learning materials for students.* Moscow, 60 pp.

29. Kuznetsov A.A., Grigoriev S.G., Grinshkun V.V., Levchenko I.V., Zaslavskaya O.Yu. 2010. *Informatics and ICT (Information and Communication Technologies). 8th grade. Schoolbook.* Prosveshenie, Moscow, 255 p.

30. Kuznetsov A.A., Grigoriev S.G., Grinshkun V.V., Zaslavskaya O.Yu., Levchenko I.V. 2006, “What can be a textbook of informatics for a basic secondary school”, Bulletin of the Moscow City Pedagogical University. Series Informatics and informatization of education, no. 2 (7), pp. 104-109.

31. Kuznetsov A.A., Grigoriev S.G., Grinshkun V.V., Zaslavskaya O.Yu., Levchenko I.V. 2007, “Formation of the structure and content of an informatics textbook for basic school, Information educational environment. Theory and Practice”, Bulletin of the Center for Informatics and Information Technologies in Education, ISMO RAO, no. 2, pp. 15-23.

32. Kushnirenko A. G., Lebedev G. V., Svoren R. A. 1990. *Fundamentals of informatics and computing technology.* Prosveshenie, Moscow, 224 pp.

33. Kushnirenko A. G., Lebedev G. V. 2000. *12 lectures on why you need a school course in computer science and how to teach it. Methodical manual.* Laboratory of Basic Knowledge, Moscow, 464 pp.

34. Cram D. 1965. *Programmed learning and learning machines.* Mir, Moscow, 274 pp.

35. Lapchik M.P. 1969. *Block diagram method in programming: Study guide for students.* Omsk, 49 pp.

36. Lapchik M.P. 1972. *Fundamentals of programming: Textbook.* NII SIMO APN USSR, Moscow, 86 pp.

37. Lapchik M.P. 2001. *Methods of teaching informatics: A textbook for students of pedagogical universities.* Publishing Center "Academy 624 pp.

38. Lednev V.S., Kuznetsov A.A. 1968. *The beginnings of cybernetics: Learning materials for students.* Moscow, 116 pp.

39. V.S. Lednev, A.A. Kuznetsov. 1974, “Perspectives for the study of cybernetics at school”, Prospects for the development of the content of general secondary education, pp. 22-26.

40. Lednev V.S., Kuznetsov A.A. 1975, “The program of the optional course “Fundamentals of Cybernetics”, Mathematics at school, no. 1, pp. 51-53.

41. Linkova V.P. 2000. *Development of a methodical system of teaching informatics on the basis of information and information-logical modeling: abstract dis. ... doctors of pedagogical sciences: 13.00.02.* Moscow, 37 p.

42. Malev V.V. 2005. *General methodology for teaching informatics: Study guide.* VSPU, Voronezh, 271 pp.

43. Mogilev A.V., Pak N.I., Henner E.K. 1999-2012. *Informatics. Study guide.* Publishing house "Academy Moscow, 842 pp.

44. Monakhov V.M. 1974. Programming. *Elective course: Teacher's manual.* Prosveshenie, Moscow, 159 pp.

45. Monakhov V.M. 2015, “Thirty years later ...”, Informatics and Education, no. 7, pp. 11-17.

46. ??*Fundamentals of general theory and methods of teaching informatics: Study guide.* Edited by A.A. Kuznetsov. 2020. Laboratory of Knowledge, Moscow, 210 pp.

47. *Fundamentals of Informatics and Computer Engineering: Samples schoolbook. In 2 hours.* Part 1, 1985. Part 2, 1986 / A.P. Ershov, V.M. Monakhov, S.A. Beshenkov, Ya.E. Golts, A.A. Kuznetsov, E.I. Kuznetsov, M.P. Lapchik, D.O. Smekalin; ed. A.P. Ershova, V.M. Monakhova. Prosveshenie, Moscow, 96 pp, 143 pp.

48. *Fundamentals of Informatics and Computer Engineering: Samples schoolbook.* 1989. / V.A. Kaimin, A.G. Shchegolev, E.A. Erokhin, D.P. Fedyushin. Prosveshenie, Moscow, 272 pp.

49. Rakitina E.A. 2002. *Construction of a methodical system of teaching informatics on an activity basis: abstract of thesis. ... doctors of pedagogical sciences: 13.00.02.* Inst. Wednesday education Ros. acad. Education, Moscow, 48 pp.

50. Robert I.V. 2009. *Exponential path.* IIO RAE, Moscow, 88 pp.

51. Robert I.V. 1994. *Modern information technologies in education: didactic problems and prospects of use.* "School-Press Moscow, 205 pp.

52. Robert I.V. 2010. *Theory and methodology of informatization of education (psychological, pedagogical and technological aspects). 3rd ed.* IIO RAE, 356 pp.

53. Talyzina N.F. 1969. *Theoretical problems of programmed learning.* Publishing house Moscow University, Moscow, 133 pp.

54. Khristochevsky S.A. 2015, “Informatization of education - as it was: an academic view”, Informatics and Education, no. 7, pp. 53-58.

55. Schwartz I.E., *Chapter X.* 1968. *Programmed learning // School pedagogy: Study guide. Part 1. General basics. Didactics.* Perm. ped. in-t., Perm, 281 pp.

56. Shvetsky M.V. 1994. *Methodical system of fundamental training of future teachers of informatics in a pedagogical university in the conditions of two-stage education: abstract of thesis. ... doctors of pedagogical sciences: 13.00.02.* Ros. ped. in-t, St. Petersburg. 36 pp.

Получено 2.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 1.

УДК 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-520-536

Информатика, компьютер, сложность вычислений[1]

В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Владимир Николаевич Чубариков — профессор, доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Николай Николаевич Добровольский — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет; Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tsput.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Ирина Юрьевна Реброва — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Николай Михайлович Добровольский — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В основу данной статьи лёг доклад, сделанный В. Н. Чубариковым на Международной научно-практической конференции «Информатизация образования — 2020» в городе Орле, 26–30 октября, 2020 года. Конференция была посвящена 115-летию со дня рождения патриарха российского образования, великого педагога и математика, академика РАН С. М. Никольского (1905-2012 гг.). Мероприятие проведено Академией Информатизации образования и Орловским государственным университетом им. И. С. Тургенева при финансовой поддержке РФФИ.

В статье рассмотрены разные аспекты информатизации общества прежде всего с точки зрения математиков и ученых, связанных с различными направлениями использования достижений компьютерной техники и компьютерных технологий.

В краткой форме обсуждены следующие вопросы: 1. Программирование — основа информатики; 2. Модели вычислительных систем, компьютеры, языки программирования; 3. Системы искусственного интеллекта; 4. Что такое TeX и LaTeX? 5. Сложность вычислений; 6. Поиск литературы по информатике; 7. Научная школа Альберта Рубеновича Есаяна и информатика в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.

Статья посвящена памяти выдающегося математика и педагога, профессора Альберта Рубеновича Есаяна. 50 лет его работы в Тульском государственном педагогическом университете им. Л. Н. Толстого были посвящены внедрению в педагогический процесс подготовки учителей математики и информатики передовых подходов в области преподавания математики. Он внёс существенный вклад в разработку практических подходов в преподавании информатики в педагогических вузах.

Ключевые слова: Информатика, компьютер, сложность вычислений.

Библиография: 40 названий.

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 19-41-710004_р_а

Для цитирования:
В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Информатика, компьютер, сложность вычислений// Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 1, с. 520–536.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 1.

UDC 512.541 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-1-520-536

Computer science, computer, computational complexity

V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Vladimir Nikolaevich Chubarikov — professor, doctor of physical and mathematical sciences, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2009@live.ru
Nikolai Nikolaevich Dobrovol'skii — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University; Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Irina Yurievna Rebrova — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Nikolai Mihailovich Dobrovol'skii — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

This article is based on a report made by V. N. Chubarikov at the International Scientific and Practical Conference "Informatization of Education — 2020" in the city of Orel, October 26–30, 2020. The conference was dedicated to the 115th anniversary of the birth of Patriarch of Russian education, the great teacher, and mathematician, academician S. M. Nikol'skii (1905-2012 gg.). The event was organized by the Academy of education Informatization and Orel state University. I. S. Turgenev, with the financial support of RFBR.

The article deals with various aspects of the informatization of society, primarily from the point of view of mathematicians and scientists associated with various areas of use of computer technology and computer technology.

The following questions are briefly discussed: 1. Programming — the basis of computer science; 2. Models of computing systems, computers, programming languages; 3. Artificial Intelligence systems; 4. What is TeX and LaTeX? 5. Computational complexity; 6. Search for computer science literature; 7. Albert Rubenovich Yesayan Scientific School and Computer Science at the Tolstoy State Pedagogical University.

The article is dedicated to the memory of the outstanding mathematician and teacher, Professor Albert Rubenovich Yesayan. 50 years of his work at the Tula State Pedagogical University named after L. N. Tolstoy were devoted to the introduction of advanced approaches in the field of teaching mathematics into the pedagogical process of training teachers of mathematics and computer science. He made a significant contribution to the development of practical approaches to the teaching of computer science in pedagogical universities.

Keywords: Computer science, computer, computational complexity.

Bibliography: 40 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "Computer science, computer, computational complexity", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 520–536.

Посвящается памяти Альберта Рубеновича Есаяна (10.11.1937–04.12.2018)

Введение

Совсем недавно исполнилось 35 лет со дня введения во всех школах Советского Союза нового предмета "Основы информатики и вычислительной техники" (кратко ОИВТ). Эта дата оказалась в окружении целого созвездия значимых событий в истории информатики и вычислительной техники. 380 лет тому назад в 1641 году (по другим источникам в 1642 году) великий французский ученый Блез Паскаль создал первую счётную машину. 230 лет назад, в 1791 году родился Чарлз Бэббидж, который прожил почти 80 лет и разработал проект Аналитической машины. Первая действующая модель Аналитической машины была создана в 1906 году, 115 лет тому назад его сыном Генри Бэббиджем и фирмой Монро. В этом году исполняется 200 лет со дня рождения великого русского математика Пафнутия Львовича Чебышева, который изобрёл первый отечественный арифмометр. А около 80 лет назад в США был создан первый компьютер — МАРК 1, архитектура которого опиралась на проект Аналитической машины Бэббиджа.

Символично, что в 1945 году под руководством Сергея Алексеевича Лебедева была создана первая в стране электронная аналоговая вычислительная машина для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые часто встречаются в задачах, связанных с энергетикой. А уже в 1950 году была закончена разработка первой отечественной электронной вычислительной машины МЭСМ.

В нашей стране становление информатики и вычислительной техники прошло достаточный длинный путь, который насчитывает не менее 75 лет. В наших заметках мы остановимся на некоторых, на наш взгляд, ключевых аспектах становления этого направления:

1. Программирование — основа информатики.
2. Модели вычислительных систем, компьютеры, языки программирования.
3. Системы искусственного интеллекта.
4. Что такое TEXи LATEX?
5. Сложность вычислений.
6. Поиск литературы по информатике.
7. Информатика в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.

Авторы не претендуют на всё охватывающее рассмотрение проблемы, но считают, что учет указанных аспектов может быть полезен. Особенно, на наш взгляд, эти соображения важны в связи с нарастающими тенденциями компьютерного фетишизма, когда происходит "преувеличение, абсолютизация возможностей современной информационно-вычислительной техники в решении социально-экономических, политических, идеологических и др. проблем общества"[2].

1. Программирование — основа информатики

Первый вопрос, который нам следует обсудить — "Что такое информатика?"

Сказать, что "информатика" — это "компьютер-сайенс", означает только отражение ее предмета, который является техническим устройством: вычислительной машиной, компьютером.

[2]Источник: https://potencial-school.ru/kompyuternyj-fetishizm.html © potencial-school.ru

Р. В. Хэмминг писал: “Мы называем наш предмет “информатикой”, но мне кажется, что точнее было бы назвать его “компьютерной инженерией” (computer engineering), если бы не существовало вероятности неправильного толкования такого названия. Большей частью мы не подвергаем сомнению возможность существования **монитора, алгоритма, планировщика или компилятора,** скорее мы занимаемся поиском **практически работоспособного технического решения с разумными затратами времени и усилий**” [39].

Технический аспект здесь выступает на первое место в связи с тем, что большинство трудностей относится не к теоретическому обоснованию сделать что-то, а к практическому — каким образом это можно сделать проще и лучше.

Поэтому преподавание предмета “Информатика” будет более эффективным, если в учебных планах дисциплина “Программирование” будет предполагать, в первую очередь, практикум по программированию и не только, но и компьютерный практикум по разделам специализации, например, для учителей средней школы — компьютерный практикум по геометрии и по алгебре и началам анализа, и отводить для этого следует целый день занятий.

Больше практических занятий! И в этом отличие в преподавании математики от преподавания информатики.

Чему учить? Первым выделим здесь языки и системы программирования, которые не являются прикладной составляющей обучения, и, следовательно, этому должен учить специалист по информатике. Заметим, что часто обучение ограничивается учебником грамматики и словарем (глоссарием) языка программирования. Но как полезно видеть и изучать, перенимать опыт подготовки добротных работающих программ.

Следующий шаг — работа с базами данных, требует уже участия специалистов, для которых интересна обработка этих данных. Здесь уже важна роль алгоритма и специальных законов конкретных наук, как социальных, гуманитарных, так и естественных. Заметим, что компьютер в настоящее время не обладает другими интеллектуальными возможностями, кроме тех, которые присущи “цифровому вычислению”. Тем не менее, в настоящий момент мы используем не все возможности компьютера как мощного инструмента управления и преобразования информации.

Наиболее содержательной частью информатики, являющейся предметом изучения и математики, являются численные методы. Поэтому этот материал в основном и представляется как теоретический, не подготовленный к практическому применению, в связи с недостаточной проработкой фундаментальных идей для решения задач. Зачастую, используя численные методы, компьютер позволяет нам разобрать достаточное множество частных примеров, чтобы выделить “модельные ситуации” того или иного явления, и даже если не удается сформулировать фундаментальных законов, но дает продвижение в познании явления. При этом нам приходится при составлении программ и планировании научной работы соизмерять соотношения между временем работы и памятью компьютера, между последовательными и параллельными вычислениями, между цифровыми и аналоговыми схемами и др.

Первоначальным понятием в информатике является понятие **алгоритма.** Оно определяется описательным образом словами разговорного языка. Алгоритм — точное предписание, которое задает вычислительный процесс (называемый алгоритмическим), начинающийся с некоторого исходного данного (совокупности возможных исходных данных) и направленный на получение результата, определяемого этим исходным данным.

Под сложностью вычислений алгоритма понимают числовую функцию, оценивающую трудность применения алгоритма к исходным данным (время работы, число тактов работы при преобразовании исходных данных в заключительные и др.)

Отметим, что в этих областях вклад отечественных ученых был мирового уровня: это результаты Петра Сергеевича Новикова об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов, Юрия Владимировича Матиясевича об отрицательном решении 10-ой проблемы Гильберта, Олега Борисовича Лупанова о сложности реализации степеней булевой (n,n)-функции и многие другие.

Заметим, что результаты об алгоритмической неразрешимости многих математических проблем в сочетании с фундаментальными результатами Курта Гёделя о неполноте арифметики говорят о том, что есть определённые объективные ограничения для возможностей искусственного интеллекта в том виде, который сейчас можно обсуждать.

2. Модели вычислительных систем, компьютеры, языки программирования

Начнем изложение с определения машины Тьюринга (the Turing machine, 1936) — абстрактного вычислительного устройства, формально уточняющего интуитивное понятие **алгоритма.** Она состоит из ленты, головки и управляющего устройства. Лента разделена на клетки и бесконечна влево и вправо. В каждой клетке ленты может быть записан только один символ из ленточного алфавита $A_0 = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, где a_0 — пустой символ. Головка машины может двигаться по ленте, перемещаясь из клетки в соседнюю клетку, читать символ, записанный в клетке, и записывать в обозреваемую клетку любой символ из A_0. Управляющее устройство перемещает головку по ленте и записывает символы в клетки. Оно может находиться в одном из состояний $q_0, q_1, \ldots, q_m$. Изменение положения головки и символов происходит по некоторой программе, состоящей из простейших команд.

Работа машины Тьюринга происходит в дискретном времени, начинается с исходных данных и завершается при достижении заключительного состояния (при некоторых исходных данных работа машины Тьюринга может и не заканчиваться). Кроме того, что машина Тьюринга дает точное определение вычислительного процесса, — алгоритма, она обладает наглядной реализацией алгоритмического процесса. Отметим, что машина Тьюринга является теоретической основой построения ЭВМ. Таким образом, любая машина Тьюринга с ленточным алфавитом производит алгоритмическое преобразование слов в этом алфавите.

Тезис Тьюринга. *Всякое реализуемое алгоритмическое преобразование можно выполнить подходящей машиной Тьюринга.*

Математические теории связанные с описанием вычислительных систем гораздо богаче чем теория машин Тьюринга. Мы отметим только несколько моментов.

Во-первых, алгоритм в классическом понимании описывает только локальное поведение компьютера или вычислительной системы такой, как например, Интернет. Современный компьютер уже не укладывается в архитектуру фон Неймана. Механизм прерываний и режим мультизадачности приводит к тому, что в современной вычислительной системе, как правило, выполняется большое количество относительно независимых программ-алгоритмов. Уже пример компьютерных вирусов показывает, что ситуация гораздо сложнее.

Во-вторых, поведение современных вычислительных систем на базе мейнфреймов нельзя описать и проанализировать без теории массового обслуживания, основы которой были сформулированы в трудах замечательного отечественного математика Александра Яковлевича Хинчина.

В-третьих, такие принципы как прозрачность и виртуальность, которые возникли ещё в далеких 60-х годах, позволяют говорить как о новой реальности о таких сущностях, как виртуальные машины. Например, сейчас можно не только обсуждать машину Тьюринга и её реализацию на современных компьютерах, но и говорить о виртуальной машине Дональда Кнута, предложенной им в его известном научном бестселлере по информатике "Искусство программирования".

Аналогично, Интегрированная Система разработки ДРАКОН, созданная в СССР в период с 1986 по 1999 годы, дает пример некоторой виртуальной машины, которая, в частности, позволила обеспечить разработку автоматической посадки многоразового отечественного космического корабля Буран.

3. Системы искусственного интеллекта

Специалист по информатике воспринимает свою главную функцию как обеспечение программ и ЭВМ для использования в старых и новых методиках обучения, но на нем лежит и более сложная задача — выработка и распространение самого процесса обучения. Отправная точка зрения (М. Минский, С. Пайперт, 1969) этого мнения следующая.

1. Обучение языку программирования (хотя бы одному), работа со словарем этого языка.

2. Помочь людям строить в своем сознании различные виды вычислительных моделей.

3. Учитель должен иметь разумную модель того, что представляет собой сознание учащегося.

4. При отладке своих собственных моделей и процедур учащийся должен иметь модель того, что он делает и что он знает хорошие приемы отладки и простые, но решающие тестовые примеры.

5. Стремление учащегося при отладке программ узнать что-нибудь новое о вычислительных моделях и программировании в отличие от беспомощности представления о невозможности познать это.

Другими словами, учитель должен разрабатывать эффективные методы компьютерного моделирования процессов мышления, т.е. в определенном смысле работая с искусственным интеллектом.

Остановимся на универсальном решателе задач Ньюэлла и его коллег (General Problem Solver (GPS), 1957), исходной идеей которого являлось представление задач из некоторого класса как задач преобразования одного выражения в другое при помощи множества допустимых правил или, более общо, преобразованием одного состояния в другое. Добавим к этому использование общего механизма целенаправленного поиска для всех типов задач при изменении только конкретных знаний фактов и правил (базисные примеры логических формул).

Систематизацию и разработку решателя задач по элементарной алгебре и математическому анализу провел А. С. Подколзин [37]. Он выделил три подхода компьютерного моделирования процессов решения задач.

Первый — древовидная классификация типов поддающихся алгоритмизации задач в соответствующей области и создание библиотеки процедур их решения (компьютерная алгебра, 1966).

Второй — основан на применении баз знаний, образованных аксиомами и теоремами некоторой предметной области (формальные языки, математическая логика, 1961).

Третий — использование базы алгоритмов локального планирования действий, накапливаемой при интерактивном обучении компьютерной системы, моделирующей процессы решения задач (решатель задач А. С. Подколзина, технология обучения, языки программирования, т.е. приемы решения задач).

Не вдаваясь в подробности, отметим что для развития науки весьма плодотворным является гибридный подход, опирающийся на работу профессиональных математиков в *сотрудничестве* с системами компьютерной математики [5]–[18], [21]. При этом важно, чтобы результат этой деятельности был бы доступен для восприятия человеком. Поучительным примером для этого является компьютерное доказательство проблемы четырёх красок, которое превосходит человеческие возможности для восприятия.

В настоящее время в обыденном сознании происходит трансформация понятий. У обывателя создается мнение, что *искусственный интеллект* это новая сущность, которая уже имеется в реальности, но это совсем не так.

Во-первых, исследования по искусственному интеллекту — это направления в информатике и кибернетике, в которых на основе глубоких математических работ создаются специальные алгоритмы для решения сложных задач, таких как распознавание образов, игра в шахматы и многое другое, что не укладывалось в традиционную математику.

Во-вторых, это программная реализация результатов этих исследований.

В настоящее время созданы настолько мощные вычислительные системы, что они не могут управляться или разрабатываться одним человеком. Реальность такова, что ЧЕЛОВЕЧЕСТВО разрабатывает новые технические средства для решения своих проблем, при этом никакой конкретный человек не может отождествлять свои возможности с возможностями всего ЧЕЛОВЕЧЕСТВА.

В последнее время всё большую популярность приобретают такие понятия как *большие данные*, *машинное обучение*, которые по праву относятся к искусственному интеллекту, но для нас важно, что всё это основывается на серьезной математике.

В заключении этого раздела хотелось отметить, что даже такая абстрактная ветвь математики как *теория категорий* в последнее время находит всё большое применение в теории программирования и построения информационных моделей, без которых немыслимо новое, быстро набирающее силу движение *цифровизация*.

4. Что такое TEX и LATEX?

Система компьютерной верстки, построенная на базе языка полиграфического оформления документов “TEX”, была создана Д. Кнутом (1979) [35]. Сила “TEX”а в упрощении работы пользователя и фактическом освобождении его от необходимости программирования при верстке документов.

Первый лауреат премии Дейкстры Л. Лампорт (1984) представил систему “LATEX” [40].

Существенным развитием ее стал “LATEX2ε” (1994) с наборами пакетов расширений таких, как *beamer* — оформление презентаций, *AmS-Tex* — ввод математических формул, *XyMTeX* — ввод химических формул, *xypic* — построение диаграмм и т.п.

Система “LATEX2ε” нетребовательна к технике, не зависит ни от архитектуры компьютера, ни от установленной на нем операционной системы [36], [19], [20].

Для понимания сущности TEX и LATEX необходимо обратиться к понятию нормального алгоритма Маркова, которое было разработано Андреем Андреевичем Марковым (младшим) в конце 40-х годов XX столетия, а позднее было использовано при создании отечественного языка функционального программирования Рефал (разработчик Валентин Фёдорович Турчин — выпускник физфака МГУ им. М. В. Ломоносова).

Не вдаваясь в подробности, отметим важное достоинство TEX и LATEX, связанное с тем, что во многих системах компьютерной математики, например, Maple, Mathematica, Maxima, Reduce возможен экспорт документов в формат *.tex. Также используется TEX-нотация для представления формул в Википедии.

Указанная особенность может использоваться для *проверки* математических, физических и других научных работ, в которых используются математические формулы, расчеты. Очень часто многие расчеты опускаются, а иногда возникает вопрос, а были ли они выполнены в полном объёме? Вот здесь и открывается широкое поле деятельности для профессионалов, вооруженных системами искусственного интеллекта, ориентированными на проверку математических результатов.

К сожалению, это перспективы отдаленного будущего, так как в нынешних условиях найти финансирование на проведение таких широкомасштабных работ весьма проблематично.

Необходимо констатировать, что в настоящее время отсутствуют доступные отечественные системы компьютерной математики, хотя ещё в 1968 году в Институте кибернетики АН УССР под руководством академика АН СССР Виктора Михайловича Глушкова был разработан язык программирования Аналитик.

В основе TEX и LATEX и всех перечисленных систем лежат математические теории формальных языков и грамматик.

5. Сложность вычислений

Элементарной операцией назовем сумму или произведение двух цифр в двоичной системе счисления. Количество элементарных операций для сложения двух n-разрядных чисел есть $O(n)$, а для умножения в столбик — $O(n^2)$. А. Н. Колмогоров поставил задачу, что в этом смысле операция умножения сложнее сложения. Эта задача не решена до сих пор. Интуиция подсказывала А. Н. Колмогорову, что n^2 является оценкой снизу для количества элементарных операций. А. А. Карацуба опроверг это предположение [34].

Рассмотрим алгоритм А. А. Карацубы умножения многоразрядных (n-разрядных) чисел в двоичной системе счисления. Как известно, обычный способ умножения чисел в столбик требует порядка n^2 элементарных "цифровых" операций. В алгоритме Карацубы достаточно использовать $\ll n^{\ln_2 3} \asymp n^{1,5}$ элементарных операций.

Пусть перемножаются A и B — два $2n$-разрядных числа. Представим их в виде

$$A = 2^n A_1 + A_2, \quad B = 2^n B_1 + B_2,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — n-разрядные числа. Имеем

$$AB = (2^{2n} - 2^n)A_1B_1 + 2^n(A_1 + A_2)(B_1 + B_2) - (2^n - 1)A_2B_2.$$

Следовательно, умножение $2n$-разрядных чисел сводится к умножению трех n-разрядных или $n+1$-разрядных чисел и нескольким операциям сложения и вычитания и сдвига чисел на не более $2n$ разрядов.

Если обозначить $M(n)$ количество элементарных операций для умножения двух n-разрядных чисел, то отсюда находим соотношение

$$M(2n) \le 3M(n) + Bn,$$

где $B > 0$ — некоторая постоянная.

Следствием этого неравенства является оценка $M(n) \le cn^{\ln_2 3}, c > 0$. В настоящее время Шенхаге и Штрассен построили алгоритм перемножения двух n-разрядных чисел с оценкой $M(n) \le c_0 n \ln n \ln\ln n$, где $c_0 > c > 0$ — некоторые постоянные.

Алгоритм умножения двух квадратных матриц порядка n (умножение строки на столбец) требует примерно $n^2(2n-1)$ арифметических операций над элементами матриц. В. Штрассен (1970) предложил алгоритм умножения матриц за $O(n^{\ln_2 7}), \ln_2 7 \asymp 2,807$. Пусть $AB = C$ — произведение двух матриц порядка $2k$. Тогда представим матрицы A, B, C в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, 1 \le i, j \le 2,$ — матрицы порядка k.

Имеем

$$\begin{aligned} C_{11} &= D_1 + D_4 - D_5 + D_7, \\ C_{12} &= D_3 + D_5, \\ C_{21} &= D_2 + D_4, \\ C_{22} &= D_1 + D_3 - D_2 + D_6, \end{aligned}$$

где

$$
\begin{aligned}
D_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}),\\
D_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11},\\
D_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}),\\
D_4 &= A_{22}(-B_{11} + B_{21}),\\
D_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22},\\
D_6 &= (-A_{11} + A_{21})(B_{11} + B_{12}),\\
D_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}),
\end{aligned}
$$

Пусть $L(n)$ — число арифметических операций над элементами матриц в алгоритме Штрассена. Тогда из предыдущих соотношений находим

$$L(2n) \leq 7L(n) + O(n^2).$$

Откуда следует, что $L(n) = O(n^{\ln_2 7}), \ln_2 7 = 2,807\ldots.$

Д. Копперсмит и С. Виноград (1990) уточнили этот результат до $O(n^{2,376})$.

Более подробно этот материал изложен в [1] в форме, доступной для студентов и даже школьников.

Мы рассмотрели только один наиболее простой подход, используемый в определении трудоемкости тех или иных алгоритмов. Но на практике потребителей информационных услуг интересуют часто совсем другие характеристики. Если рассмотреть банковскую сферу, то там никого не интересует количество элементарных операций выполняемых компьютеров. Для них жизненно важно определить максимальную пропускную способность банковской системы электронных платежей — количество транзакций обрабатываемых в единицу времени. И здесь нужны совсем другие подходы для анализа узких мест. Именно методы теории систем массового обслуживания, основанной А. Я. Хинчиным, позволяют описать, проанализировать и оптимизировать такие системы.

6. Поиск литературы по информатике

В отечественном математическом Мире есть такое уникальное явление, как Общероссийский портал Math-Net.Ru. Он существенно облегчает поиск публикаций и доступ к ним в Интернете. Аналогичных информационных ресурсов по информатике нам неизвестно, хотя специализированных достаточно много. Нельзя сказать, что Общероссийский портал Math-Net.Ru решает все проблемы информационного сервиса профессиональных математиков, но, как говорят, нет пределов для совершенствования.

К сожалению, многообещающий проект "Карта российской науки" оказался несостоятельным и в настоящее время не очень просто найти необходимую литературу по информатике.

Приведем классификационную схему журнала ACM “Computing Reviews”.

C. Принципы построения компьютерных систем (архитектура процессоров, реализация компьютерных систем).

D. Программное обеспечение (методы программирования, разработка программного обеспечения, языки программирования, операционные системы).

F. Теория вычислений (вычисления посредством абстрактных устройств, анализ алгоритмов и сложность задач, логика и значение программ, математическая логика и формальные языки).

G. Математические вопросы теории вычислений (численный анализ, дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика).

H. Информационные системы (управление базами данных, хранение и поиск информации).

I. Методы вычислений (алгебраические манипуляции, искусственный интеллект).

J. Применения компьютеров (физические науки и инженерное дело).

K. Компьютеры и общество (история автоматизированных вычислений, компьютеры и образование, управление вычислительными и информационными системами, профессия программиста).

Естественное желание профессионального и образовательного сообщества иметь современные технологические средства, позволяющие получать достоверную научную и образовательную информацию в любой профессиональной области, в частности, в области информатики и информационных технологий.

На наш взгляд, эта проблема является актуальной и её решение будет способствовать прогрессу развития любой научной и профессиональной области деятельности, для которой будут созданы такие ПОИВС (Проблемно-Ориентированные Информационно-Вычислительные Системы).

7. Научная школа Альберта Рубеновича Есаяна и информатика в ТГПУ им. Л. Н. Толстого

В Тульском государственном педагогическом институте им. Л. Н. Толстого преподавание вычислительной математики велось ещё в начале 60-х годов XX столетия. Летом 1963 года М. Н. Добровольский был направлен в город Куйбышев для прохождения курсов повышения квалификации по программированию. Там шло обучение на отечественных ЭВМ Урал. Тогда он с этих курсов привёз черные пластиковые перфоленты, которые использовались для ввода информации в ЭВМ Урал. В самом пединституте долгое время никакой вычислительной технике не было кроме арифмометров, пока не появились сначала машина Проминь-2, а потом Наири. Достаточно долго весь комплекс дисциплин, связанных с вычислительной техников в пединституте вёл М. Н. Добровольский.

В 1968 году в Тулу из Душанбе приезжает молодой, талантливый доцент, кандидат физико-математических наук Альберт Рубенович Есаян. Достаточно быстро образовалась разновозрастная группа из М. Н. Добровольского (1922 г.), А. Р. Есаяна (1937 г.) и Б. А. Викола (1947 г.). Результатом их совместной деятельности стало учебное пособие [3], которое вышло уже после смерти М. Н. Добровольского (18.01.1975). К этому времени А. Р. Есаян уже втянулся в компьютерную тематику, став руководителем хоздоговорной темы с КИВЦ Главприокскстроя. Кустовой информационно-вычислительный центр в это время возглавлял Э. А. Пащенко. Кроме этого, А. Р. Есаян возглавил преподавание вычислительной математики и программирования на ЭВМ Наири. В этот период им была сделана небольшая заметка в журнале Квант [22], в которой он показал, что с помощью, казалось бы, примитивной ЭВМ "Проминь-2" можно получить опровержение известному правилу Варнсдорфа решения задачи Л. Эйлера об обходе шахматной доски конем.

К 1985 году, когда был введён курс ОИВТ во все советские школы, А. Р. Есаян стал зрелым педагогом в области ОИВТ со своим нетривиальным подходом к преподаванию этого предмета в педагогических вузах. Поэтому не случайно, что бывший выпускник ТГПИ им. Л. Н. Толстого Владимир Иванович Ефимов, который в это время работал в Минпроссе СССР под руководством видного организатора образования Валерия Константиновича Розова, привлёк А. Р. Есаяна в группу преподавателей вузов, которые летом в Москве проходили переподготовку для организации внедрения этого курса на местах.

В феврале 1986 года на матфаке ТГПИ им. Л. Н. Толстого была организована кафедра ОИВТ, первым заведующим которой стал А. Р. Есаян. Естественный вопрос о материальной базе новой кафедры был решён оперативно с помощью Тульского ВЦ КП, который был создан на базе Тульской Госстатистики. В аудитории 307 был установлен класс, укомплектованный ЕС-7920 и удаленно подключенных к ЕС-1033, находящейся за несколько километров. Для студентов в тот период этот факт удаленной работы с ЭВМ и программирования на Паскале выглядел как чудо.

А затем поступили компьютерные классы Ямаха. Учебных пособий не было. И Альберт Рубенович с энтузиазмом взялся восполнить этот пробел. Результатом этой деятельности стало учебное пособие [4], изданное в центральном издательстве "Просвещение". Ему предшествовал целый ряд пособий, выпущенных издательством ТГПИ им. Л. Н. Толстого.

Активно в это время продолжалась работа по выполнению хоздоговорной тематики. Сменились технические средства. Пришла отечественная Искра-1256. Приходилось решать различные практические задачи. И всегда поражала неподдельная заинтересованность Альберта Рубеновича, его влюбленность во всё новое.

Как отмечалось в [2] "В 1994 г. при кафедре информатики и вычислительной техники была открыта аспирантура по специальности 13.00.02 — теория и методика обучения и воспитания (информатика). Среди учеников А. Р. Есаяна — доценты Шлапаков И. М., Мартынюк Ю. М., Ваныкина Г. В., Сундукова Т. О., кандидаты педагогических наук Соловьева Т. А., Даниленко С. В. и представитель Республики Йемен Галеб Нашван. Долгое время А. Р. Есаян руководил семинаром по информационным технологиям для учителей г. Тулы и области."

Именно в это время стала складываться научная школа профессора А. Р. Есаяна (звание профессора он получил ещё летом в 1991 году, а докторскую диссертацию защитил через 10 лет весной 2001 года). В 1993 году из кафедры ОИВТ выделилась кафедра информационных технологий, которой стал руководить доцент, кандидат физико-математических наук Н. М. Добровольский. А. Р. Есаян и Н. М. Добровольский вместе руководили аспирантами по специальности 13.00.02 — теория и методика обучения и воспитания (информатика). Их связывала долгая дружба на протяжении 43 лет с 1975 года по 2018 год и совместная работа, начиная с 1980 года до конца дней Альберта Рубеновича.

Переходя к описанию научно-педагогической деятельности, прежде всего надо отметить исключительные человеческие качества Альберта Рубеновича Есаяна.

Во-первых, именно благодаря Альберту Рубеновичу Есаяну были возрождены Тульская школа теории чисел, организованы регулярные международные конференции по теории чисел в ТГПУ им. Л. Н. Толстого и основан новый научный журнал по математике "Чебышевский сборник". Об этом подробнее можно прочитать в работе [38].

Во-вторых, на кафедре была создана доброжелательная атмосфера, которая способствовала научным исследованиям. Так например Альберт Рубенович способствовал, чтобы уже в 1997 году первым на кафедре защитил докторскую диссертацию по педагогике доцент Вячеслав Венедиктович Персианов. Затем он всё сделал, чтобы организовать своевременную подачу в диссертационный совет МГУ диссертации Н. М. Добровольского по теории чисел в 2000 году. И только после этого он приступил к подготовке своей защиты, которая успешно состоялась в 2001 году. А после этого он поддержал защиту в 2001 году диссертации доктора педагогических наук доцентом, кандидатом физико-математических наук Алексндром Сергеевичем Симоновым, а в 2005 году Александром Яковлевичем Фридландом.

Остановимся более подробно на главном стержне научной школы Альберта Рубеновича Есаяна. Будучи по образованию математиком, учеником профессора Марка Александровича Красносельского, Альберт Рубенович во всей своей педагогической и научной деятельности прежде всего оставался математиком. Это хорошо видно из анализа его богатого научно-педагогического наследия [3]–[33].

Темой его докторской диссертации было "Теория и методика обучения алгоритмизации на основе рекурсии в курсе информатики педагогического вуза". На выбор такой тематики оказало влияние обсуждение в совместных беседах Альберта Рубеновича и Н. М. Добровольского содержания кандидатской диссертации 1975 года Добровольского М. Н. на тему "Некоторые комбинаторные задачи о перестановках с ограничением позиций". Эта диссертация была по комбинаторному анализу. Главным инструментом исследования были производящие функции, с помощью которых М. Н. Добровольскому удалось решить задачу двухсотлетней давности о количестве четырехстрочных латинских прямоугольников, поставленную ещё Л. Эйлером.

Здесь свою роль сыграла потрясающая особенность Альберта Рубеновича видеть красоту математических объектов. В данном случае он был очарован этим трио: производящая функция, рекуррентная последовательность, рекурсия.

Мы не будем пересказывать содержание работ Альберта Рубеновича, отметим только одно, что он с присущим ему мастерством проводил линию по обучению студентов алгоритмизации на основе рекурсии, что позволяло многие учебные вопросы сделать особенно наглядными, лаконичным, доступными и просто красивыми.

В значительной степени благодаря Альберту Рубеновичу Есаяну на факультете математики, физики и информатики Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого сложился научно-педагогический коллектив, который сейчас приступил к многомасштабной задаче создания на базе факультета Института передовых IT-технологий. Данная задача продиктована необходимость подготовки современных специалистов, востребованных в рамках реализации НОЦ мирового уровня "Тулатех", который был поддержан решением правительства в ноябре 2020 года.

8. Заключение

В рамках этой небольшой статьи мы хотели, прежде всего, подчеркнуть роль математики при изучении информатики и информационных технологий. К сожалению, эта роль не очевидна для молодых людей. Им часто кажется, что можно обойтись без математики, что для их дальнейшей карьеры эти знания излишни, что не стоит тратить силы и время на преодоление злополучного барьера "МАТЕМАТИКА". Очень непросто объяснить молодым людям, что только хорошее фундаментальное образование позволит им оставаться востребованными на рынке труда всю жизнь. Что парадигма образования "Образование в течении всей жизни" реализуется только на основе фундаментального образования. Да, работодателю выгодно сейчас получить максимально практически подготовленного на данный момент специалиста и его не интересует, что будет с этим специалистом через пять, десять лет. Только сам человек, вооруженный важнейшим человеческим качеством *ответственность за свою судьбу*, должен понимать роль фундаментального образования для своей судьбы и своей карьеры.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гашков С. Б., Чубариков В. Н. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений / М.: Высшая школа. 2000. 322 с.

2. Н. М. Добровольский, И. В. Денисов. Жизнь и научная деятельность Альберта Рубеновича Есаяна // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 432–436.

3. Есаян А. Р., Викол Б. А., Добровольский М. Н. Программирование для ЭВМ “Проминь-2”. (учебное посо-бие). / Тула, Изд. ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1975. 111 с.

4. Есаян А. Р., Ефимов В. И., Пащенко Э. А., Добровольский Н. М., Лапицкая Л. П. Информатика. Учебное пособие для педагогических институтов / Москва, "Просвещение 1991.

5. Есаян А. Р., Панин В. А., Добровольский Н. М., Сергеев Н. Н. MATLAB. Командная строка. Функции (учеб. пособие) / Тула: Изд. ТГПУ, часть 1, 2004. (гриф УМО) — 270 с.

6. Есаян А. Р., Панин В. А., Добровольский Н. М., Сергеев Н. Н. MATLAB. Графика. Программирование (учеб. пособие) / Тула: Изд. ТГПУ, часть 2, 2004. (гриф УМО) — 270 с.

7. Есаян А. Р., Панин В. А., Добровольский Н. М., Сергеев Н. Н. MATLAB. Графический интерфейс. Пакеты приложений (учеб. пособие) / Тула: Изд. ТГПУ, часть 3, 2004. (гриф УМО) — 277 с.

8. Есаян А.Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М. Творческая лаборатория Mathematica (учеб. пособие) / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, часть 1 (гриф УМО) 2006 — 272 с

9. Есаян А.Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М. Творческая лаборатория Mathematica (учеб. пособие) / Тула: Изд. центр ТГПУ им. Л. Н. Тол-стого, часть 2 (гриф УМО) 2006 — 270 с. 363 с.

10. Есаян А. Р., Чубариков В. Н.,Добровольский Н. М., Сергеев А. Н. Документы и графика в Maple (учебное пособие) / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н.Толстого, 2007. — 284 с.

11. Есаян А.Р., . Чубариков В.Н., Мартынюк Ю. М. Управляющие структуры и структуры данных в Maple (учебное пособие) / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та, 2007 — 316 с.

12. Есаян А. Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Шулюпов В. А. Алгебра и математический анализ в Maple. Учебное пособие / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та, 2007 — 293 с.

13. Есаян А. Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Шулюпов В. А. Программирование в Maple. (учебное пособие) / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та, 2007 — 334 с.

14. Есаян А. Р., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Сергеев А. Н. Mathcad в обучении информатике и математике. Учебно-методическое пособие. / Тула: Изд. центр ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2009. (гриф УМО по классическому университетскому образованию по специальностям: 010100, 010200, 351500) — 363 с.

15. А. Р. Есаян , В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, В. А. Шулюпов. Программирование в MATHCAD на примерах: Учеб. Пособие для студентов и аспирантов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н.Толстого, 2010. — 330 с.

16. А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский, Т. А. Соловьева, А. В. Якушин. Программирование в DERIVE / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2010. — 261 с.

17. А. Р. Есаян , В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, А. В. Якушин. MAXIMA. ДАННЫЕ и ГРАФИКА / Тула. Изд-во Тульского гос. пед. уни-та им. Л.Н.Толстого. 2011. — 357 с.

18. А. Р. Есаян , В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, А. В. Якушин. Программирование в Maxima / Тула: Изд. центр ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2012 г. Учебное пособие для студентов и аспирантов, гриф УМО МГУ — 351 с.

19. А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, А. В. Якушин. Подготовка документов в LaTeX2ε. Уч.пос. — Тула: Изд-во Тул.гос.пед.ун-та им. Л. Н. Толстого, 2013, 390 с.

20. А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, А. В. Якушин. Построение графиков средствами LaTeX-пакета pgfplots. Уч.пос. — Тула: Изд-во Тул.гос.пед.ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015, 372 с.

21. Есаян А. Р., Добровольский Н. М., Седова Е. А., Якушин А. В. Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra (часть 1). Уч.пос. — Тула: Изд-во Тул.гос.пед.ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017,

22. А. Р. Есаян. ЭВМ опровергает // Квант. № 8. М., 1976.

23. А. Р. Есаян. Электронные книги в Mathcad //Чебышевский сборник. 2009. Т. 10, вып. 1, С. 31–40.

24. А. Р. Есаян. Автозагрузка в документы Maxima определений функций и значений переменных //Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4, С. 93–96.

25. А. Р. Есаян, А. В. Якушин. LyX и системы символьной математики // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 1, С. 86–91.

26. А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский. Вывод диаграмм и пакет xy // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 4, С. 101–118.

27. С. Г. Григорьев, А. Р. Есаян. Простой и обобщенный поиск элементов в гнездовых массивах и их замещение // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3, С. 460–478.

28. А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский. Гнездовые массивы и рекурсия // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3, С. 479–495.

29. А. Р. Есаян, А. В. Якушин. Векторизация и гнездовые массивы // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3, С. 496–509.

30. А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский. Компьютерное доказательство гипотезы о центроидах // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, вып. 1, С. 3–91.

31. А. Р. Есаян, А. В. Якушин. Экспериментальное обоснование гипотез в GeoGebra // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, вып. 1, С. 92–108.

32. А. Р. Есаян, Н. Н. Добровольский. Преобразования объектов в GeoGebra // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, вып. 2, С. 129–143.

33. А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский. Пользовательские рекурсивные функции в Maxima // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 432–446.

34. А. А. Карацуба, Ю. П. Офман. Умножение многозначных чисел на автоматах // ДАН СССР, 1961,**145,** 2, С. 293–294.

35. Д. Е. Кнут. Всё про TEX — Протвино: РДТеХ, 1993.

36. С. М. Львовский. Набор и вёрстка в системе LATEX. 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2003, 448 с.

37. А. С. Подколзин О формализации приемов решения математических задач // Интеллектуальные системы, 1998, 3, вып.3-4, С. 51–74.

38. И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков. Н. М. Коробов, В. И. Нечаев, С. Б. Стечкин, Н. М. Добровольский и возрождение Тульской школы теории чисел // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 4, С. 196–217.

39. Р. В. Хэмминг Одна из точек зрения на информатику // Лекции лауреатов премии Тьюринга: пер. англ. — М.: Мир, 1993, С. 240–254.

40. Lamport, Leslie. LATEX: a document preparation system. — New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994. — 273 с. — ISBN 0-201-52983-1.

REFERENCES

1. Gashkov S. B., Chubarikov V. N. 2000, "Arithmetic. Algorithms. Complexity of calculations" , M.: Higher School, p. 322.

2. Dobrovol'skii N. M., Denisov I. V., 2019, "The life and scientific work of Albert Rubenovich Yesayan" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 432–436.

3. Yesayan A. R., Vikol B. A., Dobrovolsky M. N. 1975, "Computer programming "Promin-2"." (training manual), Tula, Publishing House of the Tolstoy State Pedagogical Institute, 111 p.

4. Yesayan A. R., Efimov V. I., Pashchenko E. A., Dobrovolsky N. M., Lapitskaya L. P. 1991, "Informatics. Textbook for pedagogical institutes", Moscow, "Prosveshchenie".

5. Yesayan A. R., Panin V. A., Dobrovolsky N. M., Sergeev N. N. 2004, "Environment Matlab. The command line. Functions (study. manual)", Tula: TSPU Publishing House, part 1, (grif UMO) - - - 270 p.

6. Yesayan A. R., Panin V. A., Dobrovolsky N. M., Sergeev N. N. 2004, "Sredi Matlab. Graphics. Programming (study. manual)", Tula: TSPU Publishing House, part 2, (grif UMO) - - - 270 p.

7. Yesayan A. R., Panin V. A., Dobrovolsky N. M., Sergeev N. N. 2004, "Sredi Matlab. Graphical interface. Application packages (study. manual)", Tula: TSPU Publishing House, part 3, (grif UMO) - - - 277 p.

8. Yesayan A. R., In Chubarikov N. N., Dobrovolsky N. M. 2006, "Creative Laboratory Mathematica and I and (textbook. manual)", Tula: Publishing house of Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstoy Univ., part 1 (UMO vulture), 272 p.

9. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M. 2006, "Creative Laboratory Mathematica and I and (textbook. manual)" , Tula: Publishing House of the Center of TSPU named after L. N. Tolstogo, part 2 (vulture of the UMO) 2006 — 270 p. 363 p.

10. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Sergeev A. N. 2007, "Documents and graphics in Maple - (textbook)" , Tula: Publishing House of Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstoy University, 284 p.

11. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Martynyuk Yu. M. 2007, "Control structures and data structures in Maple - (textbook)" , Tula: Publishing House of Tula State Pedagogical University. un-ta, 316 p.

12. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Shulyupov V. A. 2007, "Algebra and mathematical analysis in klen. Textbook" , Tula: Publishing house of Tula State Pedagogical University. un-ta, 293 p.

13. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Shulyupov V. A. 2007, "In Programming in maple. (textbook)", Tula: Publishing House of Tula State Pedagogical University. un-ta, 2007 — 334 c.

14. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Sergeev A. N. 2009, "Programs of the Mathcad program system in teaching computer science and mathematics. Educational and methodical manual", Tula: Publishing House of the Tolstoy TSPU, (UMO classification for classical university education in the following specialties: 010100, 010200, 351500), 363 c.

15. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Shulyupov V. A. 2010, “Programming in the package environment Mathcad environment on examples: Studies. Manual for students and postgraduates”, Tula: Publishing House of Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstoy University, 330 p.

16. A. R. Yesayan, N. M. Dobrovolsky, T. A. Solovyova, A. V. Yakushin. 2010, “In Programming derivatives”, Tula: Publishing house of Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstoy University, 261 p.

17. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Yakushin A. V. 2011, “Maxim. DATA and GRAPHICS”, Tula. Publishing House of the Tula State Pedagogical Institute. L. N. Tolstoy University, 357 p.

18. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Yakushin A. V. 2012, “In Programming Maxim”, Tula: Publishing House of the Tolstoy TSPU. Textbook for students and postgraduates, grif UMO MSU, 351 p.

19. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Yakushin A. V. 2013, “Preparation of documents in for the environment for the environment for the environment latex2”, Popov’s law of zero or one. Uch. pos.”, Tula: Publishing house of the Tula State Pedagogical University. L. N. Tolstogo, 390 p.

20. Yesayan A. R., Chubarikov V. N., Dobrovolsky N. M., Yakushin A. V. 2015, “Plotting graphs using the pgfplots latex package. Uch. pos.”, Tula: Publishing house of the Tula State Pedagogical University named after L. N. Tolstoy, 372 p.

21. Yesayan A. R., Dobrovolsky N. M., Sedova E. A., and Yakushin A. V. 2017, “Dynamic mathematical educational environment GeoGebra (part 1). Uch. pos.”, Tula: Publishing house of the Tula State Pedagogical University named after L. N. Tolstoy.

22. Yesayan A. R. 1976, “The computer refutes”, Kvant. No. 8. Moscow.

23. Yesayan A. R. 2009, “E-books in the environment of the Matkad package”, Chebyshevsky collection, Vol. 10, issue 1, pp. 31–40.

24. Yesayan A. R. 2011, “Autoloading in the documents of Maxim definitions of functions and values of variables”, Chebyshevsky sbornik, Vol. 12, issue 4, pp. 93–96.

25. Yesayan A. R, Yakushin A. V. 2012, “In in in LyX and systems of symbolic mathematics”, sbornik Chebyshevsky, Vol. 13, issue 1, pp. 86–91.

26. Yesayan A. R, Dobrovolsky N. M.. 2013, “Diagram output and the xu package”, Chebyshevsky collection, Vol. 14, issue 4, pp. 101–118.

27. Grigoriev S. G., Yesayan A. R. 2015, “Simple and generalized search for elements in nested arrays and their substitution”, Chebyshevsky collection, Vol. 16, issue 3, pp. 460–478.

28. Yesayan A. R, Dobrovolsky N. M. 2015, “Nest arrays and recursion”, Chebyshevsky collection, Vol. 16, issue 3, pp. 479–495.

29. Yesayan A. R, Yakushin A. V. 2015, “Vectorization and nest arrays”, Chebyshevsky collection, Vol. 16, issue 3, pp. 496–509.

30. Yesayan A. R, Dobrovolsky N. N. 2017, “Computer proof of the centroid hypothesis”, Chebyshevsky Collection, Vol. 18, issue 1, pp. 3–91.

31. Yesayan A. R, Yakushin A. V. 2017, “In Experimental substantiation of hypotheses in GeoGebra”, Chebyshevsky collection, Vol. 18, issue 1, pp. 92–108.

32. Yesayan A. R, Dobrovolsky N. N. 2017, “Construction of the geometric Transformation of objects in GeoGebra”, Chebyshevsky collection, Vol. 18, issue 2, pp. 129–143.

33. Yesayan A. R, Dobrovolsky N. M. 2018, “Recursive User functions in Maxim”, Chebyshevsky collection, Vol. 19, issue 2, pp. 432–446.

34. Karatsuba A. A., Ofman Yu. P. 1961, “Multiplication of multi-valued numbers on automata”, DAN SSSR, **145**, 2, pp. 293–294.

35. Knuth. D. E. 1993, All about Tex, Protvino: Rdtech.

36. Lvovsky S. M. 2003, “Typing and layout in the latex system.”, 3rd ed., ispr. and add., Moscow: ICNMO, 448 pp.

37. Podkolzin A. S. 1998, “On the formalization of methods for solving mathematical problems”, Intelligent Systems, vol, 3, no. 3-4, pp. 51–74.

38. Rebrova I. Yu., Chubarikov V. N. 2020, "N. M. Korobov, V. I. Nechaev, S. B. Stechkin, N. M. Dobrovolsky and the revival of the Tula School of number theory" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 196–217.

39. Hamming R. V. 1993, “One of the points of view on computer science”, Lectures of the Turing Prize laureates: trans., Moscow: Mir, pp. 240–254.

40. Lamport, Leslie., 1994, “Latex: document preparation system.” - New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 273 pp. - ISBN 0-201-52983-1.

Получено 4.12.2020 г.
Принято в печать 21.02.2021 г.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 22 Выпуск 1

TABLE OF CONTENTS

Volume 22 Issue 1

Научное издание

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Том XXII. Выпуск 1 (77)

Оригинал-макет подготовлен
А. В. Родионовым, А. П. Крыловым.
Технический редактор – И. Е. Агапова.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-80049
от 31 декабря 2020 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций.

Подписано в печать 29.03.2021. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 68,5.
Тираж 150 экз. (первый завод – 35 экз.). Заказ 21/004.
Цена свободная. Дата выхода в свет 06.04.2021.

Издатель – Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого. 300026, Тула, просп. Ленина, 125.

Отпечатано в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
300026, Тула, просп. Ленина, 125.