ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 4 раза в год

Свидетельство о регистрации
СМИ: ПИ № ФС77-47855
ISSN 2226-8383

Том XXI

Выпуск 4 (76)

Тула
2020

Учредитель: ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России» Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026, г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638, 8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL: http://www.chebsbornik.ru

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Министерства просвещения Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

12+

От редакции

Сборник посвящён 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина

Борис Максимович Бредихин
1920 — 1994

Василий Ильич Нечаев
1920 — 1999

Сергей Борисович Стечкин
1920 — 1995

СОДЕРЖАНИЕ

Том 21 Выпуск 4

Решение
XVIII Международной научной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина
Россия, Тула, 23–26 сентября 2020 г.

1. Признать, что XVIII Международная научная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина прошла успешно. Её результаты будут способствовать развитию алгебры, теории чисел, дискретной геометрии, многомасштабному моделированию физических процессов, цифровых технологий и истории математики, их применению в различных областях исследований в России.

2. Выразить благодарность руководству Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого за организацию конференции.

3. Выразить благодарность руководству Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, руководству Математического института им. В. А. Стеклова РАН, руководству Института истории науки и техники им. С. И. Вавилова РАН, руководству Московского педагогического университета, руководству Тульского государственного университета за поддержку конференции.

4. Считать целесообразным продолжение систематических проведений конференций «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории».

5. Провести XIX Международную конференцию «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященную двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышева и сто тридцатилетию академика И. М. Виноградова в г. Туле в 2021 году.

6. Признать целесообразным возрождение Всероссийских математических съездов и просить Российскую академию наук и Санкт-Петербургский государственный университет организовать в 2021 году V Всероссийский математический съезд, посвященный 200-летию со дня рождения Пафнутия Львовича Чебышёва, в городе Санкт-Петербурге.

7. Просить РАН выступить с инициативой об объявлении 2021 года годом П. Л. Чебышева.

8. Издать избранные труды конференции в г. Туле в 21 томе журнала «Чебышевский сборник».

9. Одобрить инициативу московских ученых об организации постоянно действующего Всероссийского онлайн семинара по теории чисел (рук. профессор В. Н. Чубариков). Рекомендовать провести несколько заседаний этого семинара в 2021 году, посвященные П. Л. Чебышеву, И. М. Виноградову, А. Б. Шидловскому, Г. И. Архипову, С. М. Воронину и Д. А. Митькину.

10. Поручить программному комитету конференции продолжить работу по реализации решений XVIII Международной научной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения».

Председатель организационного комитета ректор ТГПУ им. Л. Н. Толстого	В. А. Панин
Председатель программного комитета, профессор	В. Н. Чубариков
Сопредседатель программного комитета, академик РАН, профессор	В. П. Платонов
Сопредседатель программного комитета, академик РАН, профессор	С. В. Конягин
Сопредседатель программного комитета, член-корреспондент РАН, профессор	В. М. Бухштабер
Член программного комитета, Президент Санкт-Петербургского математического общества, академик РАН, профессор	Ю. В. Матиясевич

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 511.33 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-9-18

О работах С. Б. Стечкина по теории чисел

М. Р. Габдуллин, С. В. Конягин

Михаил Рашидович Габдуллин — кандидат физико-математических наук, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: gabdullin.mikhail@yandex.ru
Сергей Владимирович Конягин — академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: konyagin@mi-ras.ru

Аннотация

Данная работа посвящена анализу вклада С. Б. Стечкина в некоторые вопросы в аналитической теории чисел. Выделены пять направлений его исследований в области теории чисел. Рассмотрены работы С. Б. Стечкина по теории дзета-функции Римана. Определенную роль в этих исследованиях сыграли его результаты по четным тригонометрическим полиномам. Другое направление исследований, в которое существенный вклад внёс С. Б. Стечкин вместе с А. Ю. Поповым, относится к вопросам асимптотического распределения простых чисел в среднем. Третий вопрос, которому было посвящено творчество С. Б. Стечкина в области аналитической теории чисел, связан с теоремой о среднем И. М. Виноградова основным методом в оценке сумм Г. Вейля. Четвертое направление исследований, где С. Б. Стечкину удалось получить результат, который не смогли усилить за последние 30 лет, — это оценки полных рациональных тригонометрических сумм. Наконец, пятое направление — это изучение сумм Гаусса. Оценка, полученная здесь С. Б. Стечкиным, и поставленная им задача послужили источником многочисленных работ вплоть до настоящего времени.

Ключевые слова: тригонометрические суммы, дзета-функция Римана, распределение простых чисел.

Библиография: 33 названия.

Для цитирования:
М. Р. Габдуллин, С. В. Конягин. О работах С. Б. Стечкина по теории чисел // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 9–18.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 511.33 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-9-18

Stechkin's works in number theory

M. R. Gabdullin, S. V. Konyagin

Mikhail Rashidovich Gabdullin — Candidate of physico-mathematical sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: gabdullin.mikhail@yandex.ru
Sergei Vladimirovich Konyagin — Member of the RAS, Doctor of physico-mathematical sciences, Professor, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: konyagin@mi-ras.ru

Abstract

This paper is devoted to the analysis of S. B. Stechkin's contribution to some questions in analytic number theory. There are five areas of his research in the field of number theory. First, the works of S. B. Stechkin on the theory of the Riemann zeta function are considered. His results on even trigonometric polynomials played a role in these studies. Another area of research to which S. B. Stechkin made a significant contribution together with A. Y. Popov, relates to the asymptotic distribution of prime numbers on average. The third question, to which one of the works of S. B. Stechkin in analytic number theory was devoted, is related to Vinogradov's mean value theorem, the main method for estimating Weyl sums. The fourth area of research, where S. B. Stechkin managed to get a result that could not be strengthened over the past 30 years, is the estimation of complete rational trigonometric sums. Finally, the fifth direction is the study of Gauss sums. Stechkin's result in this direction and the problem he posed inspired followers to the present time.

Keywords: trigonometric sums, the Riemann zeta-function, distribution of prime numbers.

Bibliography: 33 titles.

For citation:
M. R. Gabdullin, S. V. Konyagin, "Stechkin's works in number theory", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 9–18.

1. Введение

Прошло 25 лет со дня кончины Сергея Борисовича Стечкина. Вскоре после его смерти появилась обзорная статья А.Ю. Попова [21]. В ней прекрасно изложены история и суть работ С. Б.Стечкина по теории чисел. Мы думаем, однако, что четверть века спустя настало время еще раз вспомнить эти работы и обсудить связь некоторых из них с современными тенденциями развития теории чисел. Не ставя своей целью дублировать работу [21], мы тем не менее вынуждены были частично повторить ее содержание. Настоящая статья может рассматриваться в качестве дополнения к [21], где материал изложен более полно и обстоятельно.

Первая работа С. Б. Стечкина [24] по теории чисел опубликована в 1968 году. В ней было предложено упрощенное доказательство постулата Бертрана. Статья имеет при упорядочении в mathnet.ru в обратном хронологическом порядке номер 46 из 98 публикаций Сергея Борисовича. Это означает, что к этому времени большинство его статей уже были опубликованы.

Сергей Борисович пришел в теорию чисел известным математиком, имевшим ряд ярких результатов по теории приближений, во многом определившим ее развитие. За плечами были фактически создание и организация работы Института математики и механики в (тогда еще) Свердловске, создание журнала "Математические заметки". Эти детища Сергея Борисовича и поныне играют большую роль в развитии отечественной математики.

С. Б. Стечкин занимался теорией чисел и публиковал статьи до конца своей жизни. Всего вышло не менее 11 его теоретико–числовых работ. В то же время он продолжал активно заниматься теорией приближений: писал статьи, ежегодно проводил школы, вел семинары в МГУ и МИАН, читал специальные курсы, постоянно их обновляя и совершенствуя, руководил студентами и аспирантами.

Означает ли это, что теория чисел была для Сергея Борисовича своеобразной отдушиной, хобби? Ни в коем случае. Сергей Борисович относился к исследованием по теории чисел очень серьезно и ответственно, как и к любому делу, за которое он брался. И его результаты, как теперь принято говорить, соответствовали мировому уровню.

2. Основной текст статьи

1. Ряд его работ связан с функцией ζ и распределением простых чисел. Обозначим через $P_n\,(n\geqslant 2)$ класс четных тригонометрических полиномов

$$t_n(\varphi)=a_0+a_1\cos\phi+\cdots+a_n\cos(n\phi),$$

удовлетворяющих условиям
1) $t_n(\varphi)\geqslant 0$ для всех φ;
2) $a_k\geqslant 0\,(k=0,\ldots,n)$;
3) $a_0<a_1$.

Полином $3+4\cos\phi+\cos(2\varphi)=2(1+\cos\varphi)^2\geqslant 0$ показывает, что классы P_n непусты при $n\geqslant 2$. Для полинома $t_n\in P_n$ положим

$$V(t_n)=\frac{t_n(0)-a_0}{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_0})^2},$$

$$V_n=\inf_{t_n\in P_n}V(t_n),\quad V_\infty=\lim_{n\to\infty}V_n.$$

Валле–Пуссен [10] указал важные применения полиномов класса P_n к дзета–функции Римана и распределению простых чисел. Он доказал, что

$$R(x)=\pi(x)-\int_2^x\frac{du}{\log u}=O(x\exp(-K\sqrt{\log x})),$$

где $\pi(x)$ обозначает количество простых чисел, не превосходящих x, а $K<K^*=\sqrt{2/V_\infty}$. С. Б. Стечкин в 1970 году опубликовал две статьи [25], [26], связанные с величинами V_n. В первой он изучал V_n и оценил снизу и сверху величину V_∞. Далее эти оценки улучшались В.П. Кондратьевым [13], А.В. Резцовым [23] и В.В. Арестовым и Кондратьевым [1].

Оценки для $R(x)$ связаны с оценками области, свободной от нулей дзета-функции Римана ζ. В [26] С. Б. Стечкин усилил неравенство, оценивающее эту область через V_∞, и доказал, что $\zeta(\sigma+it)$ не имеет нулей в области $\sigma\geqslant 1-1/(9.65\log t)$, $t\geqslant 12$. Дальнейшее уточнение этих результатов получено им в [30].

Хотя для нулей $\sigma+it$ при очень больших значениях t известны лучшие по порядку оценки снизу разности $1-\sigma$ (из результатов Н.М. Коробова [18] и И.М. Виноградова [12] следует, что $1-\sigma\geqslant c/((\log(|2+|t|))^{1/3}(\log\log(20+|t|))^{1/3})$, $c>0$), оценки С. Б. Стечкина хорошо работают для всех t. Дальнейшее улучшение этих оценок получил К. Форд [31].

Аналогичные задачи об оценках области, свободной от нулей, возникают не только для дзета-функции Римана, но и для ее обобщений. Улучшение констант, ограничивающих такие области для L-функций Дирихле, оказалось важным в исследованиях, связанных с теоремой Линника, утверждающей существование в любой арифметической прогрессии $a \mod q$, $(a,q)=1$, $q>1$, простого числа, не превосходящего q^C, где C — абсолютная константа. Т. Ксилурис [19] доказал, что для больших q можно взять $C=5.18$. Кроме того, в [19] описна история исследования проблемы и указаны авторы, на протяжении полувека последовательно улучавшие константы C.

2. В 1996 году вышла работа А.Ю. Попова и С. Б. Стечкина [22], в которой изучалось локальное поведение функции

$$R(x)=\psi(x)-x, \quad \psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n),$$

и соответствующих функций $R^+(x)=\max(0,R(x))$, $R^-(x)=-\min(0,R(x))$. В частности, показано, что при $x\geqslant 1$

$$\int_x^{Ax} R^{\pm}(u)du \geqslant x^{3/2},$$

где A — абсолютная константа.

3. С. Б. Стечкин уделял большое внимание оценкам тригонометрических сумм и, в частности, сумм Вейля. Положим $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $e(y)=\exp(2\pi i y)$ ($y\in\mathbb{R}$ или $y\in\mathbb{T}$),

$$f(u)=f_n(u)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu u^\nu \quad (n\in\mathbb{N},\, n\geqslant 2,\, \alpha_\nu\in\mathbb{R},\, u\in\mathbb{R}),$$

$$S(X)=S_n(X)=\sum_{1\leqslant k\leqslant X} e(f_n(k)) \quad (k\in\mathbb{N},\, X\in\mathbb{R},\, X\geqslant 1).$$

Поведение тригонометрических сумм и близких к ним сумм тесно связано с поведением средних значений модуля $S(X)$, т.е. интеграла

$$J=J_n(X,l)=\int_{\mathbb{T}^n}|S_n(X)|^{2l}d\alpha_1\dots d\alpha_l \quad (l\in\mathbb{R},\, l\geqslant 0).$$

Разработка и развитие метода тригонометрических сумм были связаны с оценками J методом И.М. Виноградова, полученными Виноградовым и его последователями. Важное продвижение было сделано С. Б. Стечкиным в 1975 году [27].

Теорема 1. *Пусть*

$$n,r\in\mathbb{N},\, n\geqslant 2,\, l\in\mathbb{R},\, l\geqslant rn,\, X\in\mathbb{R},\, X\geqslant 1.$$

Тогда

$$J_n(X,l)\leqslant D(r,n)X^{2l-\frac{n(n+1)}{2}+(n^2/2)(1-1/n)^r},$$

где

$$D(r,n)=\exp\left(C_0\min(r,n)n^2\log n\right)$$

и C_0 — абсолютная константа.

В дальнейшем появилось много работ, связанных с теоремой о среднем И.М. Виноградова (оценке $J_n(X,l)$). Ж. Бурган, С. Деметер и Л. Гуф [7] нашли правильный показатель степени от X, доказав, что для любого $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$J_n(X,l)\leqslant C(n,l,\varepsilon)X^{\varepsilon+\max(l,2l-\frac{n(n+1)}{2})}.$$

Этот впечатляющий результат имеет интересные приложения к ряду теоретико–числовых задач. Однако, в некоторых приложениях оценка С. Б. Стечкина работает лучше, так как в ней получена хорошая граница для коэффициента при степени X, в то время как в [7] значение $C(n,l,\varepsilon)$ слишком велико.

Работа [27] выполнена в стиле Сергея Борисовича: при исследовании величин, зависящих от нескольких параметров, он старался найти ее порядок, равномерный по всем параметрам, или хотя бы получить возможно лучшие оценки по всем параметрам, не удовлетворяюсь зависимостью от какого-то одного параметра. Такой подход в теоретико–числовых задачах является очень полезным.

4. С. Б. Стечкин проявлял большой интерес к оценке рациональных тригонометрических сумм. Пусть f — многочлен с целыми коэффициентами и q — натуральное число. Рассматриваются полные рациональные тригонометрические суммы

$$S(f,q)=\sum_{k=1}^{q} e(f(x)/q).$$

Изучение таких сумм легко сводится к случаю

$$(a_1,\ldots,a_n,q)=1, \tag{1}$$

где

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Если $\deg f=n$ и выполнено условие (1), то будем писать, что $f\in K_n(q)$. Рассмотрим величину

$$H_n(q)=\sup_{f\in K_n(q)} |S(f,q)|.$$

В.И. Нечаев [20] доказал, что

$$H(n,q)\leqslant A(n)q^{1-1/n},$$

где $A(n)\leqslant \exp(5n^2/\log n)$ для $n\geqslant 3$. С. Б. Стечкин [29] установил, что можно взять

$$A(n)\leqslant \exp(n+O(n/\log n)).$$

Последняя оценка не улучшена, т.е. оказалась устойчивой по Стечкину — так Сергей Борисович называл результаты, не обязательно окончательные, но остающиеся незыблемыми в течение 30 и более лет.

В той же работе С. Б. Стечкин изучал величину $\rho(f,q)$ — количество сравнения $f(x)\equiv 0 \bmod q$. Снова вопрос сводится к случаю $f\in K_n(q)$. С.В. Конягин [14] определил величину

$$c_n=\sup_{q,f\in K_n(q)} |S(f,q)|/q^{1-1/n}$$

и показал, что $c_n=n/e+O(\log^2 n)$ при $n\geqslant 2$. Позже он и С. Б. Стечкин [16] установили, что $c_n\leqslant n$, то есть для любого многочлена $f\in K_n(q)$ справедливо неравенство

$$|S(f,q)|\leqslant nq^{1-1/n}.$$

5. Если многочлен f является одночленом, то рациональные тригонометрические суммы являются суммами Гаусса

$$S_n(a,q)=\sum_{k=1}^{q} e(ax^n/q).$$

Опять же они сводятся к случаю $(a,q)=1$. В 1975 году С. Б. Стечкин опубликовал статью [28], в которой изучал суммы Гаусса. Обозначим

$$A_n^* = \sup_{(a,q)=1} |S_n(a,q)|/q^{1-1/n}.$$

Г.Х. Харди и Д.Э. Литтлвуд [32], стр. 11–12, доказали, что $A_n^* < \infty$, а И.М. Виноградов [11], стр.38, приводит оценку

$$A_n^* \leqslant n^{n^6}.$$

Очевидно, Иван Матвеевич ставил своей целью оценить A_n^* возможно более простым образом, не гоняясь за точностью оценки.

С. Б. Стечкин [28] кардинально улучшил оценку на A_n^*, доказав, что

$$A_n^* \leqslant \exp\left(C(n/\varphi(n))^2\right).$$

Отсюда и из известной границы функции $n/\varphi(n)$ вытекает, что

$$A_n^* \leqslant \exp\left(C'(\log\log n)^2\right) \quad (n \geqslant 3).$$

В статье был поставлен вопрос: верно ли, что величина A_n^* не превосходит абсолютной константы?

С. Б. Стечкин показал, что рассмотрение сумм Гаусса сводится к случаю, когда они берутся по простому модулю. Пусть p — простое число. Нетрудно показать, что если $d=(n,p-1)$, то $S_n(a,p)=S_d(a,p)$. Поэтому при исследовании сумм Гаусса по простому модулю можно считать, что n делит $p-1$. Харди и Литтлвуд [32], стр. 175, доказали, что

$$|S_n(a,p)| \leqslant (n-1)\sqrt{p}.$$

Эта оценка становится хуже тривиальной, если $n > \sqrt{p}+1$. Для доказательства ограниченности A_n^* при $n\to\infty$ следовало получить нетривиальные оценки на $|S_n(a,p)|$ при $p^{1/2-\delta} \leqslant n \leqslant p^{1/2+\delta}$ для некоторого $\delta > 0$. Ограниченность A_n^* при $n\to\infty$ разными способами доказали И.Е. Шпарлинский [33] и Конягин [15]; позже они объединили усилия, рассмотрели ряд близких задач и приложений и написали книгу [17].

Тематика, связанная с оценками сумм Гаусса и их обобщениями, получила мощный импульс в нулевых годах нашего столетия после того, как ею заинтересовался Жан Бурган ([2]-[9]). Его вклад в развитие этого направления был в 2010 году отмечен Shaw Prize.

Если отвлечься от денежной составляющей этой премии (1 миллион долларов), то можно утверждать, что данная история является характерной для творчества Сергея Борисовича. Ему принадлежит ряд статей, каждая из которых привела к созданию большого и активно развивающегося направления в математике. И его работа [28] является одной из таких статей.

3. Заключение

Сергей Борисович всегда умел отделить зерна от плевел, занимаясь важными и перспективными задачами. Он обладал выдающимся научным чутьем, поэтому и сейчас его задачи и результаты, в том числе и по теории чисел, сохраняют актуальность. И многие его начинания имели и имеют свое продолжение в работах его учеников и последователей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арестов В. В., Кондратьев В. П. Об одной экстремальной задаче для неотрицательных тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 1990. Том 47, №1. С. 15–28.

2. Bourgain, J. Mordell's exponential sum estimate revisited // Journal of the American Mathematical Society. 2005. Vol. 18. № 2, P. 477–499.

3. Bourgain, J. More on the sum-product phenomenon in prime fields and its applications // International Journal of Number Theory. 2005. Vol. 1, №1. P. 1-32.

4. Bourgain, J. On the construction of affine extractors // Geom. funct. anal. 2007. Vol. 17. P. 33–57.

5. Bourgain, J. Multilinear exponential sums in prime fields under optimal entropy condition on the sources // Geom. funct. anal. 2009. Vol. 18. P. 1477–1502.

6. Bourgain, J. On exponential sums in finite fields // An Irregular Mind, Janos Bolyai Mathematical Soceity, Budapest. 2010. P. 219–242.

7. Bourgain J., Demeter C., Guth L. Proof of the main conjecture in Vinogradov's Mean Value Theorem for degrees higher than three // Ann. Math. 2016. Vol. 184, № 2. P. 633–682.

8. Bourgain, J., Glibichuk, A. Exponential sims estimates over a subgroup in an arbitrary finite fields //J. Anal. Math. 2011. Vol. 115. P. 51–70.

9. Bourgain, J., Konyagin S. V. Estimates for the number of sums and products and for exponential sums over subgroups in fields of prime order // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2003. vol. 337.

10. Vallée Poussin C. J. La fonction zéta de Riemann et les nombres premiers en général // Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I. 1896.

11. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН. 1947. Том 23.

12. Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$// Изв. АН СССР, сер. матем. 1958. Том 22, № 2. С. 161–164.

13. Кондратьев В. П. О некоторых экстремальных свойствах положительных тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 1977. Том 22, №3. С. 371-374.

14. Конягин С. В. О числе решений сравнения n-й степени с одним неизвестным // Матем. сб. 1979. Том 109 (151), №2 (6) С. 171–187.

15. Конягин С. В. Об оценках сумм Гаусса и проблеме Варинга по простому модулю // Труды МИАН. 1992. Том 198. С. 111–124.

16. Конягин С. В., Стечкин С. Б. Оценка числа решений сравнения n-й степени с одним неизвестным // Теория приближений. Гармонический анализ, Сборник статей, посвященный памяти профессора Сергея Борисовича Стечкина, Тр. МИАН. 1997. Том 219, Наука, М. С. 249–257.

17. Konyagin S., Shparlinski I. Character sums with exponential functions and their applications // Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1999. 163 p.

18. Коробов Н. М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения // Успехи матем. наук. 1958. Том 13, № 4 (82). С. 185–192.

19. Xylouris T. On the least prime in an arithmetic progression and estimates for the zeros of Dirichlet L-functions // Acta Arithm. 2011. Vol. 150, № 1. P. 65–91.

20. Нечаев В. И. Оценка полной рациональной тригонометрической суммы // Матем. заметки. 1975. Том 17, №6. С. 839–849.

21. Попов А. Ю. Работы С. Б. Стечкина по теории чисел // Фунд. прикл. матем. 1997. Том 3, № 4. С. 1029–1042.

22. Попов А. Ю., Стечкин С. Б. Асимптотическое распределение простых чисел в среднем // Успехи матем. наук. 1996. Том 51, № 6 (312). С. 21–88.

23. Резцов А. В. Некоторые экстремальные свойства неотрицательных тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 1986. Том 39, №2. С. 245–252.

24. Стечкин С. Б. Простое доказательство теоремы Чебышёва о простых чисел // Успехи матем. наук. 1968. Том 23, № 5 (143). С. 221–222.

25. Стечкин С. Б. О некоторых экстремальных свойствах положительных тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 1970. Том 7, №4. С. 411–422.

26. Стечкин С. Б. О нулях дзета-функции Римана // Матем. заметки. 1970. Том 8, № 4. С. 419–429.

27. Стечкин С. Б. О средних значениях модуля тригонометрической суммы // Теория функций и ее приложения, Сборник статей. Посвящается академику Сергею Михайловичу Никольскому к его семидесятилетию, Тр. МИАН СССР. 1975. Том 134. С. 283–309.

28. Стечкин С. Б. Оценка сумм Гаусса // Матем. заметки. 1975. Том 17, №4. С. 579–588.

29. Стечкин С. Б. Оценка полной рациональной тригонометрической суммы // Аналитическая теория чисел, математический анализ и их приложения, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его восьмидесятипятилетию, Тр. МИАН СССР. 1977. Том 143. С.188–207.

30. Стечкин С. Б. Рациональные функции и нули дзета–функции Римана // Труды МИАН. 1989. Том 189. С. 110–116.

31. Ford K. Zero–free regions for the Riemann zeta function // in: Number Theory for the Millenium (Urbana, Il., 2000) (Bennett V. F., Berndt D. C., Boston N., Diamond H. G., Hildebrand A. G. and Philipps, eds). Vol. 2. 2002. P. 25–56.

32. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of "Partitio Numerorum":VI. Further researches in Waring's problem // Math. Zeitschr. 1925. Vol. 23. № 1. P. 1–37.

33. Шпарлинский И. Е. Об оценках сумм Гаусса // Матем. заметки, 1991. Том 50, №1. С. 122–130.

REFERENCES

1. Arestov, V. V., Kondrat'ev, V. P., "Certain extremal problem for nonnegative trigonometric polynomials", *Math. Notes*, vol. 47, no. 1, pp. 10–20.

2. Bourgain, J., 2005, "Mordell's exponential sum estimate revisited", *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 18, no. 2, pp. 477–499.

3. Bourgain, J., 2005, "More on the sum-product phenomenon in prime fields and its applications", *International Journal of Number Theory*, vol. 1, no. 01, pp. 1-32.

4. Bourgain, J., 2007, "On the construction of affine extractors", Geom. funct. anal. vol. 17, pp. 33–57.

5. Bourgain, J., 2009, "Multilinear exponential sums in prime fields under optimal entropy condition on the sources", *Geom. funct. anal.*, vol. 18, pp. 1477–1502.

6. Bourgain, J., 2010, "On exponential sums in finite fields" *An Irregular Mind, Janos Bolyai Mathematical Soceity, Budapest*, pp. 219–242.

7. Bourgain, J., Demeter, C., Guth, L. 2016, "Proof of the main conjecture in Vinogradov's Mean Value Theorem for degrees higher than three", *Ann. Math.*, vol. 184, no. 2, pp. 633–682.

8. Bourgain, J., Glibichuk, A., 2011, "Exponential sims estimates over a subgroup in an arbitrary finite fields", *J. Anal. Math.*, vol. 115, pp. 51–70.

9. Bourgain, J., Konyagin S. V., 2003, "Estimates for the number of sums and products and for exponential sums over subgroups in fields of prime order", *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, vol. 337.

10. Vallée Poussin, C. J., 1896, "La fonction zéta de Riemann et les nombres premiers en général", *Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér.*.

11. Vinogradov, I. M., 1947, "The method of trigonometric sums in the theory of numbers", *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 23; reprinted in his Selected works, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1952; English transl., Interscience, 1954.

12. Vinogradov, I. M., 1958, "New estimate for function $\zeta(1+it)$", *Izv. AN USSR ser. matem.*, vol. 22, no. 2, pp. 161-164 [in Russian].

13. Kondrat'ev, V. P., 1977, "Some extremal properties of positive trigonometric polynomials", *Math. Notes*, vol. 22, no.3, pp. 696–698.

14. Konyagin, S. V., 1980, "On the number of solutions of an nth degree congruence with one unknown", *Math. USSR-Sb.*, vol. 37, no. 2, pp. 151–166.

15. Konyagin S. V., 1994, "On estimates of sums of Gauss and Waring's problem for prime module", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 198, pp. 105–117.

16. Konyagin, S. V., Stechkin, S. B. , 1997, "An Estimate of the Number of Solutions of the nth Degree Congruence in One Variable", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 219, pp. 245–253.

17. Konyagin, S. V., Shaprlinski, I. E., "Character Sums with Exponential Functions and their Applications", Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1999. 163 p.

18. Korobov, N. M., 1958, “Estimates for trigonometric sums and its applications”, *Uspekhi. matem. nauk*, vol. 13, no.4 (82), pp. 185–192 [in Russian].

19. Xylouris, T., 2011, “On the least prime in an arithmetic progression and estimates for the zeros of Dirichlet L-functions”, *Acta Arithm.*, vol. 150, no. 1, pp. 65–91.

20. Nechaev, V. I., 1975, “Estimate of a complete rational trigonometric sum”, *Math. Notes*, vol. 17, no. 6, pp. 504–511.

21. Popov, A. Yu., 1997, “Stechkin's works in number theory”, *Fund. prikl. matem.*, vol. 3, no 4., pp. 1029–1042 [in Russian].

22. Popov, A. Yu., Stechkin, S. B., 1996, “The asymptotic distribution of prime numbers on the average”, *Russian Math. Surveys*, vol. 51, no. 6, pp. 1025–1092.

23. Reztsov A. V., 1986, “Some extremal properties of nonnegative trigonometric polynomials”, *Math. Notes*, vol. 39, no. 2, pp. 133–137.

24. Stechkin, S. B., 1968, “A simple proof of Chebyshev's theorem on prime numbers”, *Uspekhi matem. nauk*, vol. 23, no. 5 (143), pp. 221–222.

25. Stechkin, S. B., 1970, “Some extremal properties of positive trigonometric polynomials”, *Math. Notes*, vol. 7, no. 4, pp. 248–255.

26. Stechkin, S. B., 1970, “Zeros of the Riemann zeta-function”, *Math. Notes*, vol. 8, no. 4, pp. 706–711.

27. Stechkin, S. B., 1975, “Mean values of the modulus of a trigonometric sum”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 134, pp. 321–350.

28. Stechkin, S. B., 1975, “An estimate of Gaussian sums”, *Math. Notes*, vol. 17, no. 4, pp. 342–349.

29. Stechkin, S. B., 1980, “An estimate of a complete rational trigonometric sum”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 143, pp. 201–220.

30. Stechkin, S. B., 1990, “Rational inequalities and zeros of the Riemann zeta function”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 189, pp. 127–134.

31. Ford, K., 2002, “Zero–free regions for the Riemann zeta function”, *Number Theory for the Millenium* (Urbana, Il., 2000) (Bennett V. F., Berndt D. C., Boston N., Diamond H. G., Hildebrand A. G. and Philipps, eds), vol. 2, pp. 25–56.

32. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., 1925, “Some problems of "Partitio Numerorum:VI.Further researches in Waring's problem”, *Math. Zeitschr.*, vol. 23, no. 1, pp. 1–37.

33. Shparlinskii, I. E., 1991, “Estimates of Gaussian sums”, *Math. Notes*, vol. 50, no. 1, pp. 740–746.

Получено 11.04.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-19-28

Борис Максимович Бредихин и его научно-педагогическая деятельность

Н. М. Добровольский, У. М. Пачев, В. Н. Чубариков

Николай Михайлович Добровольский — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru
Урусби Мухамедович Пачев — доктор физико-математических наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет (г. Нальчик).
e-mail: urusbi@rambler.ru
Владимир Николаевич Чубариков — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

Статья посвящена жизни и научно-педагогической деятельности известного математика, доктора физико-математических наук Бориса Максимовича Бредихина (1920–1994) в связи со 100-летием со дня его рождения. В ней сначала приводятся биографические сведения из его жизни. Основная часть нашей работы посвящена достижениям Б. М. Бредихина в теории чисел. Даётся анализ его научных публикаций.

Ключевые слова: Борис Максимович Бредихин, теория чисел, характер полугруппы, бинарная аддитивная полугруппа, дисперсионный метод, метод сглаживания

Библиография: 65 названий.

Для цитирования:
Н. М. Добровольский, У. М. Пачев, В. Н. Чубариков. Борис Максимович Бредихин и его научно-педагогическая деятельность // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 19–28.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-19-28

Boris Maximovich Bredikhin and his scientific and pedagogical activity

N. M. Dobrovolsky, U. M. Pachev, V. N. Chubarikov

Nikolai Mihailovich Dobrovolsky — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University named after L. N. Tolstoy (Tula).
e-mail:dobrovol@tsput.ru
Urusbi Mukhamedovich Pachev — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Kabardino–Balkarian State University named after H. M. Berbekov (Nalchik).
e-mail: urusbi@rambler.ru
Vladimir Nikolaevich Chubarikov — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Moscow State University named after M. V. Lomonosov (Moscow).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

The article is devoted to the life and scientific and pedagogical activity of the famous mathematician, doctor of physical and mathematical sciences, professor Boris Maximovich Bredikhin (1920–1994) in connection with the 100th anniversary of his birth. In first provides brief biological information from his life. The main part of our work is devoted to the achievements of B. M. Bredikhin in number theory. An analysis of his scientific is given.

Keywords: Boris Maximovich Bredikhin, number theory, character of the semigroup, dispersion method, smoothing method

Bibliography: 65 titles.

For citation:
N. M. Dobrovolsky, U. M. Pachev, V. N. Chubarikov, 2020, "Boris Maximovich Bredikhin and his scientific and pedagogical activity" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 19–28.

Борис Максимович Бредихин родился 18 декабря 1920 г. в с. Грачевка Оренбургской области в семье служащего. С 1920 по 1935 гг. Бредихин Б. М. жил и учился в г. Куйбышева. С 1935 г. по 1937 г. в связи с выездом родителей в г. Чкалов учился там до возвращения в г. Куйбышев. В 1938 г. с отличием окончил школу № 1 им. Л. Толстого и осенью того же года поступил на физико—математический факультет Горьковского университета. Проучившись два года, осенью 1940 г. в силу сложившихся тяжёлых материальных обстоятельств он оставил учёбу в университете и поступил на работу учителем математики в Макарьевскую сельскую школу Горьковской области, где работал с октября 1940 г. по август 1942 г.

Несмотря на тяжёлое военное время Борис Максимович был целеустремлённым и вернувшись в г. Куйбышев поступил на третий курс математического отд. физико—математического факультета.

По окончании КГПИ (1944 г.) Бредихин Б. М. был приглашён в аспирантуру при кафедре математического анализа (научный руководитель Пулькин С. П. — специалист по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике), в которой учился в 1944–1945 гг.

Однако, как он потом писал в своей автобиографии, «Ошибка в выборе научного направления (функциональный анализ) повлекла за собой мой уход из аспирантуры в январе 1945 г.» (Архив СГПУ, личное дело Бредихина Б. М.).

С марта 1945 г. Б. М. Бредихин работал в Куйбышевском педагогическом институте на кафедре математического анализа последовательно на должностях ассистента, старшего преподавателя и доцента, а с 1965 г. и до конца жизни (1994 г.) — профессором, заведующим кафедрой элементарной математики, алгебры, теории чисел и методики преподавания математики (ныне кафедра алгебры).

Теперь мы перейдём к научной и научно—педагогической деятельности Б. М. Бредихина.

В связи с тем, что научные интересы будущего учёного—математика относилась к другой области — теории чисел с 1 октября 1953 г. по просьбе директора КГПИ Б. М. Бредихин на один год был прикомандирован в аспирантуру Саратовского университета к известному во всём мире специалисту по теории чисел Н. Г. Чудакову. За короткий срок после публикации [1] Б. М. Бредихин в 1954 г. защитил кандидатскую диссертацию (см. [2]) на тему «Характеры числовых полугрупп с конечной и с бесконечной достаточно редкой базой» и ему была присуждена учёная степень кандидата физико—математических наук. Прежде чем продолжить наше изложение, отметим, что научно—педагогической деятельности Б. М. Бредихина посвящена также глава 4 кандидатской диссертации А. А. Копанёвой [3].

Исследования Б. М. Бредихина можно разделить на следующие циклы:

1. Изучение поведения арифметических функций на полугруппах.
2. Бинарные аддитивные задачи; дисперсионный метод, его дальнейшее развитие и упрощение.
3. Метод сглаживания в аддитивных задачах.

Цикл 1 исследований охватывает статьи [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Из них в [3] установлено, что конечный гомоморфизм любой полугруппы вещественных чисел с конечной базой обладает неограниченно растущей сумматорной функцией. В противоположность этому в статье Б. М. Бредихин даёт первое приближение к решению поставленной Н. Г. Чудаковым [4] вопроса о существовании обобщённых характеров полугрупп натуральных чисел, отличных от характеров полугрупп Дирихле, построив при этом пример обобщённого характера некоторой более обширной полугруппы рациональных чисел $r \geqslant 0$. В совместной работе с Н. Г. Чудаковым [7] для оценок сумматорных функций характеров числовых полугрупп было найдено интересное применение равенства Парсеваля из теории рядов Фурье.

В статье [8], связанной со степенными плотностями свободных полугрупп обобщаются результаты работ Канольда [5] и Шерка [6], относящиеся к естественным плотностям множеств натуральных чисел, характеризующихся своим наибольшим квадратным делителем.

Характерной особенностью математического творчества Б. М. Бредихина является элементаризация применяемых методов и доказательств, с помощью которых получаются нужные результаты. Так в [10] даётся элементарное доказательство асимптотического закона для числовых полугрупп с заданными системами образующих элементов. В ней на свободной числовой полугруппе G рассматриваются функции

$$\nu_G(x) = \sum_{\substack{N(\alpha)\leqslant x\\ \alpha\in G}} 1 \quad \text{и} \quad \pi_G(x) = \sum_{\substack{N(\omega)\leqslant x\\ \omega\in P}} 1,$$

где $N(t)$ — норма элемента $t \in G$; т. е. $N(t)$ — образ элемента t при гомоморфизме полугруппы G в некоторую мультипликативную числовую полугруппу. Б. М. Бредихин вводит важное понятие степенной Θ-плотности полугруппы G как значение $\lim_{x\to\infty} \frac{\nu_G(x)}{x^\Theta}$, где $\Theta > 0$ и затем изучается взаимосвязь $\nu_G(x)$ и $\pi_G(x)$. В этих исследованиях заслуга Б. М. Бредихина состоит в том, что он значительно обобщил известные асимптотические формулы при $x \to \infty$ для классических функций $\pi(x)$, $\theta(x)$ и $\psi(x)$ на случай произвольной свободной полугруппы G со степенной Θ-плотностью; при $\Theta = 1$ получаются обычные результаты для указанных функций (см. теорему 2 из [10]), соответствующие полугруппе натуральных чисел.

В этой работе Б. М. Бредихин доказал следующие асимптотические значения для распределения образующих элементов в свободных числовых полугруппах со степенной Θ-плотностью:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi_G(x)}{x^\Theta/\log x} = \dfrac{1}{\Theta}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\theta_G(x)}{x^\Theta} = \dfrac{1}{\Theta}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\psi_G(x)}{x^\Theta} = \dfrac{1}{\Theta}$.

при условии, что $\nu_G(x) = c\,x^\Theta + O\big(x^{\Theta_1}\big)$, где $0 < \Theta_1 < \Theta$.

Основные результаты Б. М. Бредихина, содержащиеся в статьях [10, 11, 12, 13, 14] описываются вместе с их применениями в книге А. Г. Постникова [7].

Исследования Б. М. Бредихина, относящиеся к числовым полугруппам со степенными плотностями недавно были значительно продвинуты (см. напр. [1, 2]) представителями тульской школы теории чисел. Особенно плодотворными оказались новые понятия бесконечной экспоненциальной последовательности простых чисел и дзета-функции моноидов натуральных чисел, введённые впервые Н. Н. Добровольским. В связи с этим отметим также, что Н. Н. Добровольским, И. Ю. Ребровой и Н. М. Добровольским в статье [2] получены новые аналоги результатов Б. М. Бредихина, но используя при этом новое понятие C логарифмической θ-степенной плотности, где $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$ и $\theta = \frac{1}{2}$, q — натуральное число, с помощью которого образуется последовательность простых чисел.

Следующий по нашему разбиению цикл работ Б. М. Бредихина относится к бинарным аддитивным задачам и применениям к ним дисперсионного метода Ю. В. Линника [8]. Следует отметить, что по ходу самостоятельного выполнения исследовательской работы Борис Максимович обратил внимание на публикации Ю. В. Линника, в которых были заложены основные идеи его дисперсионного метода. Б. М. Бредихин быстро освоил этот метод и даже у него появились свои соображения об этом методе, которые он изложил в личном письме акад. Ю. В. Линнику. Это положило начало их творческой дружбе и в результате научного сотрудничества ими было опубликовано 10 совместных статей.

Статья [15] из этого цикла фактически является алгебраической работой (и по-видимому единственная в его творчестве), в которой даются алгебраические аналоги проблемы Гольдбаха и проблемы Гарди—Литлвуда, при этом доказательство теорем основано на известных критериях неприводимости многочленов над полем рациональных чисел.

Заметим, что во всех остальных работах Б. М. Бредихина используется дисперсионный метод, созданный Ю. В. Линником в 1958–1961 гг. для решения бинарных задач вида

$$\alpha + \beta = n,$$

где α и β принадлежат к достаточно густым и хорошо распределённым в арифметических прогрессиях последовательностям натуральных чисел.

В связи с этим хотя бы в общих чертах охарактеризуем этом метод. Дисперсионный метод соединяет в себе понятие дисперсии числа решений изучаемого диофантова уравнения с аналитическими и алгебраическими идеями И. М. Виноградова [14] и А. Вейля [15].

Суть этого метода состоит в сведении рассматриваемого выше уравнения к нескольким бинарным уравнениям вида

$$\nu\, D' + \beta = n,$$

где ν, D' принадлежат к некоторым интервалам. Если оценка дисперсии числа решений такого уравнения не слишком большая, то получается асимптотика числа решений исходного уравнения $\alpha + \beta = n$.

Объединение чисел решений всех получающихся уравнений вида $\nu\, D' + \beta = n$ приводит к асимптотической формуле заданного бинарного уравнения $\alpha + \beta = n$.

В диофантовых уравнениях, к которым применяется дисперсионный метод, слагаемое α, например пробегает некоторые простые числа, а β является квадратичной формой такого или иного вида.

Большим достижением Б. М. Бредихина явилось полное и безусловное решение в работе [18] с помощью дисперсионного метода проблемы для сдвинутых простых чисел, поставленной Е. С. Титчмаршем [9] в 1930 г., заключающейся в отыскании асимптотической формулы при $n \to \infty$ для выражения

$$\sum_{0<p-l<n} \tau\,(p-l),$$

где τ — функция числа делителей; l — заданное число; суммирование ведётся по некоторым простым числам p.

Сам Титчмарш получил асимптотику такой суммы только условно при справедливости расширенной гипотезы Римана. Дисперсионный метод позволил Ю. В. Linnику найти полное и безусловное решение этой проблемы, но только при $l = 1$.

Подбирая наиболее подходящие когерентные числа для ожидаемого числа решений бинарного уравнения Б. М. Бредихину удалось получить полное и безусловное решение проблемы Титчмарша [9].

Возвращаясь к своим результатам из [16], Б. М. Бредихин в работе [18] даёт полное решение проблемы о количестве представлений числа в виде разности простого числа и двух квадратов. Как следствие основного результата [18] получено решение гипотезы Серпинского [12] и Голомба [13] в более общем виде, а именно что имеется бесконечно много простых чисел вида $x^2 + y^2 + a$ при любом целом значении a. Если обозначить через $Q(n)$ число решений уравнения $p - \xi^2 - \eta^2 = a$, где $0 < \xi^2 + \eta^2 < n$, a — фиксированное натуральное число, то

$$Q(n) = C \cdot \frac{n}{\ln n} + R(n),$$

где $R = O\Big(n\,(\ln n)^{-1{,}042}\Big)$ — лучшая оценка по сравнению с ранее известной; C — постоянная, зависящая только от a.

Такое улучшение остаточного члена для $Q(n)$ получено Б. М. Бредихиным за счёт уточнения негипотетической части рассуждений С. Хооли [10] с помощью метода П. Эрдеша [11].

В случае $a = 1$ новое доказательство этого результата Б. М. Бредихина дано в [16]. Результаты работ [16, 17, 18, 19, 20, 21] составили основу докторской диссертации Б. М. Бредихина на тему «Исследования по дисперсионному методу», защищённой в 1964 г. в математическом институте им. В. А. Стеклова.

Вслед за проведением исследований по применению дисперсионного метода к бинарным аддитивным проблема неопределённых типов I–IV Б. М. Бредихин в статье [23] излагает основные идеи дисперсионного метода применительно к решению бинарных проблем определённого типа.

В следующих статьях [24, 25, 26], написанных совместно с Ю. В. Линником наряду с дисперсионным методом используются элементарные эргодические свойства решений и их геометрическое распределение (см. напр. [17]).

Статья [28], опубликованная совместно с Чудаковым Н. Г. и Линником Ю. В. в немецком журнале, посвящённом бинарным аддитивным задачам смешанного типа.

Остальные публикации Б. М. Бредихина мы относим к третьему циклу его исследований. При этом он продолжал ещё дальше развивать дисперсионный метод, но в основном со своими учениками. Совместные с Б. М. Бредихиным и самостоятельные публикации имеет Л. И. Уфимцева (см. [29, 18]). В статье [30] Б. М. Бредихин и Ю. В. Линник на основе применения идеи И. М.Виноградова о сглаживании рассматривают разрешимость уравнения несколько необычного вида

$$n = \frac{\nu_1\,\varphi_1 - \nu_2\,\varphi_2}{\nu_1 - \nu_2}$$

при некоторых ограничениях на плотности простых чисел ν_1 и ν_2 и на распределения чисел φ_1 и φ_2 в арифметических прогрессиях, где $\varphi_1,\ \varphi_2 < n$; при этом получена оценка снизу для числа решений такого уравнения.

Отмеченный цикл исследований Б. М. Бредихина с 1972 г. по 1984 г. характеризуется значительным развитием и упрощением дисперсионного метода в его работах [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 46] и [47], связанных с методом сглаживания. В результате своей интенсивной научной деятельности Борис Максимович Бредихин внёс крупный вклад в развитие теории чисел, особенно в элементаризации применяемых методов, так и доказательств многих важных результатов в этой области.

Наряду с этим он много времени уделял и научно—педагогической работе (см. напр. его публикации [40, 41, 44, 45] в математической энциклопедии), в результате чего сумел вовлечь в математическую науку своих талантливых учеников. Под руководством Б. М. Бредихина в Куйбышевском педагогическом институте сформировалось научное направление «Разработка максимально элементарных методов решения задач аддитивной теории чисел». Куйбышевская группа теоретико—числовиков (Б. М. Бредихин, А. А. Полянский, Л. И. Уфимцева, Т. М. Федулина, Т. И.Гришина, Н. А. Яковлева, Л. Ф. Кондакова, Ж. В. Пиядина, Н. П. Рыжова и другие) внесла весомый вклад в решение ряда трудных классических задач аддитивной теории чисел. Исследования учеников Б. М. Бредихина всегда имели высокий научный уровень, о чём свидетельствуют их публикации в наших престижных журналах, так и в зарубежных изданиях.

Считаем, что его исследования всё ещё представляют большой интерес для специалистов по теории чисел не только у нас, но и за рубежом.

Печатные работы Б. М. Бредихина

1. О характеристиках числовых подгрупп с достаточно редкой базой // ДАН СССР, нов. серия, 1953, Т. 90, № 5. С. 707–710.

2. Характеристика числовых полугрупп с конечной и бесконечной достаточно редкой базой : Автореф. дисс. на соискание учён. степени канд. физ.-мат. наук. Саратов 1953.

3. О сумматорных функциях характеров числовых полугрупп // ДАН СССР. 1954. Т. 94, № 4. С. 609–612.

4. Теория характеров числовых полугрупп // Научный ежегодник Саратовск. ун-та. 1955. С. 5–8 (Совм. с Н. Г. Чудаковым)

5. Некоторые вопросы теории характеров коммутативных полугрупп // Труды 3$^{\text{го}}$ Всероссийского съезда. Т. 1. 1956. М. АН СССР. С. 3–4.

6. Пример конечного гомоморфизма с ограниченной сумматорной функцией // УМН. 1956. Т. 11, № 4(40). С. 119–122.

7. Применение равенства Парсеваля для оценок сумматорных функций характеров числовых полугрупп // УМЖ. 1956. Т. 8, № 4. С. 347–360 (Совм. с Н. Г. Чудаковым)

8. Нормированные характеры коммутативных полугрупп // Учён. зап. Куйбышевского гос. пед. ин-та. 1958. Вып. 21. С. 269–279.

9. О степенных плотностях некоторых подмножеств свободных полугрупп // Изв. вузов. Сер. математика. 1958. Вып. 3. С. 24–30.

10. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями // Матем. сб. 1958. Т. 46(88), № 2. С. 143–158.

11. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями // ДАН СССР 1958. Т. 118, № 6. С. 855–857.

12. Обращение некоторых теорем о степенных плотностях упорядоченных полугрупп // Уч. зап. Куйбышевского гос. ун-та. 1959. Вып. 29. С. 13–20.

13. Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полугрупп // Матем. сб. 1960. Т. 50, № 2. С. 221–232.

14. Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$ // Изв. вузов. Сер. матем. 1960. № 6(19). С. 40–49.

15. Алгебраические аналоги некоторых аддитивных проблем // УМН. 1961. Т. 16, № 4. С. 137–139.

16. Улучшение остаточного члена в проблемах типа Харди—Литлвуда // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1962. Т. 19. С. 766–768.

17. Бинарные аддитивные проблемы с простыми числами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 766–768.

18. Бинарные аддитивные проблемы неопределённого типа I. Проблема делителей для сдвинутых простых чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1963. Т. 27, № 2. С. 439–462.

19. Бинарные аддитивные проблемы неопределённого типа II. Аналог проблемы Харди—Литлвуда // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1963. Т. 27, № 3. С. 577–612.

20. Бинарные аддитивные проблемы неопределённого типа III. Аддитивные проблемы делителей // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1963. Т. 27, № 4. С. 777–794.

21. Применение дисперсионного метода в бинарных аддитивных проблемах // ДАН СССР. 1963. Т. 149, № 1. С. 9–11.

22. Бинарные аддитивные проблемы неопределённого типа IV. Аналог обобщённой проблемы Харди—Литлвуда // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 6. С. 1409–1440.

23. Дисперсионный метод и бинарные аддитивные проблемы определённого типа // УМН. 1965. Т. 20, № 2(122). С. 89–130.

24. Бинарные аддитивные задачи с эргодическими свойствами решений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166, № 6. С. 1267–1269 (Совм. с Ю. В. Линником)

25. Асимптотика в общей проблеме Гарди—Литлвуда // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168, № 5. С. 975–977 (Совм. с Ю. В. Линником)

26. Асимптотика и эргодические свойства решений обобщённого уравнения Харди—Литлвуда // Матем. сб. новая серия. 1966. Т. 71, № 2. С. 145–161. (Совм. с Ю. В. Линником)

27. Дисперсионный метод Ю. В. Линника и бинарные аддитивные проблемы. В кн. Исследования теории чисел. 1966. Вып. 1. Саратов. С. 6–11.

28. Über binäre additive Problem gemischten Art // Abhandlingen aus Zahlentheorie und Analysis. Berlin. 1968. S. 25–37 (Linnik Y. V., Tschudakoff N. G.)

29. Бинарные аддитивные задачи и мультипликативные функции // Тр. МИАН СССР. 1972. Т. 128. С. 66–75 (Совм. с Л. И. Уфимцевой)

30. Применение теорем о простых числах в диофантовых задачах особого типа // Матем. заметки. 1972. Т. 12, № 3. С. 243–250 (Совм. с Ю. В. Линником)

31. Remarks on some new application of the dispersion method // Acta Arithm. 1972. V. 21. pp. 409–410 (Совм. с Ю. В. Линником)

32. Новый метод аналитической теории чисел // Сб. «Актуальные проблемы аналитической теории чисел» Минск : «Наука и техника». 1974. С. 5–22 (Совм. с Ю. В. Линником)

33. Усовершенствование нового метода в тернарных и полутернарных зададчах с простыми числами // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, № 1. С. 14–17.

34. Усовершенствование нового метода в тернарных и полутернарных задачах с простыми числами // Тезисы докладов Всесоюзн. конф. «Проблемы аналитическими теории чисел и её применений» Вильнюс. 1974. С. 34–35.

35. Применение дисперсионного метода в бинарной проблеме Гольдбаха // Тезисы докладов Всесоюзной конф. «Проблемы аналитической теории чисел и её применений» Вильнюс. 1974. С. 36–37 (Совм. с Н. А. Яковлевой)

36. К теорнарной проблеме Гольдбаха // Исследования по теории чисел. Саратовский университет. 1975. Вып 6. С. 5–18.

37. Обоснование эвристического принципа в аддитивных задачах с простыми числами // Матем. заметки. 1975. Т. 17, № 4. С. 659–668 (Совм. с Н. А. Яковлевой)

38. Применение дисперсионного метода к проблеме Гольдбаха // Acta Arithmetica. XXVII. 1975. pp. 253–263 (Совм. с Н. А. Яковлевой)

39. Метод сглаживания в нелинейных аддитивных задачах // Тр. МИАН СССР. 1976. Т. 142. С. 88–100.

40. Аддитивные проблемы делителей. В кн. «Мат. энциклопедия». Т. 1. 1977. С. 90.

41. Аддитивная теория чисел. В кн. «Мат. энциклопедия». Т. 1. 1977. С. 91–94.

42. Элементарная оценка $G(n)$ в проблеме Варинга // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 1. С. 7–18 (Совм. с Т. И. Гришиной)

43. Разбиение на слагаемые с простыми числами // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. 1978. Т. 16. С. 5–33.

44. Ковариация числа решений. В кн. «Мат. энциклопедия». Т. 2. М., 1979. С. 902–903.

45. Дисперсионный метод. В кн. «Мат. энциклопедия». Т. 2. М., 1979. С. 223–225.

46. Метод сглаживания в задачах на варингоского типа // Acta Arithm. 1980. Vol. 37. Pp. 391–404 (Совм. с Т. И. Гришиной)

47. Метод сглаживания в аддитивных задачах // Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 163. С. 23–27.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 15, Вып. 4. С. 187–207.

2. Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю., Добровольский Н. М. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2020. Т. 21, № 1(73). С. 165–185.

3. Копанева А. А. Развитие вероятностей теории чисел в трудах отечественных математиков. Автореферат на соискание учён. степени канд. физ.-мат. наук. Орёл : 2008.

4. Чудаков Н. Г. Об одном классе вполне мультипликативных функций // УМН. VIII. 1953. Вып. 3(55). С. 149–150.

5. Kanold H. J. Reine und angew. Math. m. 196. N 3–4. 1954.

6. Scherk P. J. Reine und angew. Math. m. 196. N 1–2. 1956.

7. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. Изд.-во «Наука». М. 1971.

8. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л. 1961. 208 с.

9. Titchmarsh E. C. A division problem. Rend. Circ. Mat. Palermo, V. 54. 1930. pp. 414–429.

10. Hooley C. On the representation of numbers as the sum of two squares and a prime // Acta Math. V. 97. 1957. pp. 189–210.

11. Эрдеш П. Об одном асимптотическом неравенстве в теории чисел // Вестник ЛГУ, Вып. 13. 1960. С. 41–49.

12. Sierpinski W. Teoria liczl, II. Warsczawa. PWN. 1959.

13. Golomb S. W. Sets of primes with intermediate density. Math. Scand., 3. 2. 1959. pp. 264–274.

14. Виноградов И. М. Избранные труды. Изд.-во АН СССР. 1952.

15. Weil A. On some exponential sums // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. V. 34. 1948. pp. 204–207.

16. Friedlander J., Jwaniec H., 2018. “On a theorem of Bredikhin and Linnik”, Chebyshevskii sbornik, Vol. 19, no. 3. pp. 35–39.

17. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л. Изд-во ЛГУ. 1967. 208 с.

18. Уфимцева Л. И. Обобщение аддитивной проблемы делителей // Матем. заметки. 1970. Т. 4, вып. 4. С. 477–482.

REFERENCES

1. Dobrovolsky N. N. The Zeta function monoids of natural numbers with unique factorization // Chebyshevskii SB. 2017. Vol. 15, Issue 4. P. 187–207.

2. Dobrovolsky N. N., Rebrova I. Yu., Dobrovolsky N. M. The inverse problem for the monoid with exponential sequence of simple // Chebyshevskii SB. 2020. T. 21, № 1(73). P. 165–185.

3. Kopaneva A. A. Development of probabilities of number theory in the works of Russian mathematicians. Abstract for the academic competition. degrees of candidate of physical and mathematical Sciences. Orel : 2008.

4. Chudakov N. G. On a class of fully multiplicative functions // SMART. VIII. 1953. Issue 3 (55). P. 149 – 150.

5. Kanold H. J. Reine und angew. Math. m. 196. N 3–4. 1954.

6. Scherk P. J. Reine und angew. Math. m. 196. N 1–2. 1956.

7. Postnikov A. G. Introduction to analytical number theory. Nauka publishing house, Moscow, 1971.

8. Linnik Yu. V. Dispersion method in binary additive problems. L. 1961. 208 p.

9. Titchmarsh E. C. A division problem. Rend. Circ. Mat. Palermo, V. 54. 1930. pp. 414–429.

10. Hooley C. On the representation of numbers as the sum of two squares and a prime // Acta Math. V. 97. 1957. pp. 189–210.

11. Erdesh P. On an asymptotic inequality in number theory / / Bulletin of LSU, Vol. 13. 1960. P. 41 – 49.

12. Sierpinski W. Teoria liczl, II. Warsczawa. PWN. 1959.

13. Golomb S. W. Sets of primes with intermediate density. Math. Scand., 3. 2. 1959. pp. 264–274.

14. Vinogradov I. M. Selected works. Publishing house of the USSR Academy of Sciences. 1952.

15. Weil A. On some exponential sums // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. V. 34. 1948. pp. 204–207.

16. Friedlander J., Jwaniec H., 2018. 'On a theory of Bredikhin and Linnik Chebyshevsky sbornik, Vol. 19, no. 3. pp. 35–39.

17. Linnik Yu. V. Ergodic properties of algebraic fields.

    LSU Publishing house. 1967. 208 p.

18. Ufimtseva L. I. A generalization of the additive problem of divisors of // Mod. notes. 1970. Vol. 4, issue 4. P. 477–482.

Получено 11.04.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-29-44

Константы Маркова — Бернштейна — Никольского для полиномов в пространстве L^p с весом Гегенбауэра[1]

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов

Дмитрий Викторович Горбачев — доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; Тульский государственный университет (г. Екатеринбург, г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Иван Анатольевич Мартьянов — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

Мы изучаем точное неравенство Маркова–Бернштейна–Никольского вида $\|D^s u\|_\infty \leqslant C_p(n;s)\|u\|_p$ при $p \in [1,\infty]$ для тригонометрических и алгебраических полиномов u степени не выше n в весовом пространстве L^p с дифференциальным оператором Гегенбауэра–Данкля D. В частных случаях эти неравенства сводятся к классическим неравенствам теории приближений типа Маркова, Бернштейна, Никольского, которым посвящены многочисленные работы. Мы применяем результаты В.А. Иванова (1983, 1992), В.В. Арестова и М.В. Дейкаловой (2013, 2015), F. Dai, D.V. Gorbachev и S.Yu. Tikhonov (2020) для алгебраических констант в L^p на компактных римановых многообразий ранга 1 (включая евклидову сферу) и отрезке с весом Гегенбаура, ссылаемся на работы E. Levin и D. Lubinsky (2015), M.I. Ganzburg (2017, 2020), обзор классических результатов G.V. Milovanović, D.S. Mitrinović и Th.M. Rassias (1994).

Ранее мы изучили случай $s = 0$. В этой работы мы рассматриваем случай $s \geqslant 0$. Наш основной результат заключается в доказательстве существования в тригонометрическом случае для чётных $s = 2r$ экстремальных полиномов u_*, которые действительные, четные и $C(n;s) = \frac{|D^s u_*(0)|}{\|u_*\|_p}$. С помощью этого факта доказывается взаимосвязь с алгебраической константой для веса Гегенбауэра. С одной стороны, это позволяет автоматически охарактеризовать экстремальные алгебраические полиномы. С другой стороны, известные алгебраические результаты переносятся на более общий тригонометрический вариант. Основным методом доказательства является применение гармонического анализа Гегенбауэра–Данкля, построенного Д.В. Чертовой (2009). Как следствие, мы приводим точные константы при $p = 2, \infty$ (при помощи результатов В.А. Иванова), даем соотношения ортогональности и двойственности (доказываемые методами выпуклого анализа из теории приближений), устанавливаем один асимптотический результат типа Левина–Любинского (благодаря связи с многомерной константой Никольского для сферических полиномов).

Ключевые слова: тригонометрический полином, алгебраический полином, константа Никольского, вес Гегенбауэра.

Библиография: 20 названий.

[1]Работа Д.В. Горбачева выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре. Исследование И.А. Мартьянова выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90152.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов. Константы Маркова — Бернштейна — Никольского для полиномов в пространстве L^p с весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 29–44.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-29-44

Markov–Bernstein–Nikol'skii constants for polynomials in L^p-space with the Gegenbauer weight[2]

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov

Dmitry Viktorovich Gorbachev — Doctor of physical and mathematical sciences, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Tula State University (Yekaterinburg, Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Ivan Anatol'evich Martyanov — Graduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Abstract

We study the sharp Markov–Bernstein–Nikol'skii inequality of the form $\|D^s u\|_\infty \leqslant C_p(n;s)\times \times \|u\|_p$, $p \in [1,\infty]$ for trigonometric and algebraic polynomials u of degree at most n in the weighted space L^p with the Gegenbauer–Dunkl differential operator D. In particular cases, these inequalities are reduced to the classical inequalities of approximation theory of the Markov, Bernstein, and Nikol'skii type, to which numerous papers are devoted. We apply the results of V.A. Ivanov (1983, 1992), V.V. Arestov and M.V. Deikalova (2013, 2015), F. Dai, D.V. Gorbachev and S.Yu. Tikhonov (2020) for algebraic constants in L^p on compact Riemannian manifolds of rank 1 (including the Euclidean sphere) and an interval with Gegenbauer weight, refer to the works of E. Levin and D. Lubinsky (2015), M.I. Ganzburg (2017, 2020), a review of the classic results of G.V. Milovanović, D.S. Mitrinović and Th.M. Rassias (1994).

Earlier we studied the case $s = 0$. In this paper, we consider the case $s \geqslant 0$. Our main result is to prove the existence in the trigonometric case for even $s = 2r$ of extremal polynomials u_* that are real, even, and $C(n;s) = \frac{|D^s u_*(0)|}{\|u_*\|_p}$. With the help of this fact, the relationship with the algebraic constant for the Gegenbauer weight is proved. On the one hand, this relationship allows to automatically characterize extremal algebraic polynomials. On the other hand, well-known algebraic results carry over to a more general trigonometric version. The main method of proof is the application of the Gegenbauer–Dunkl harmonic analysis constructed by D.V. Chertova (2009). As a consequence, we give the explicit constants for $p = 2, \infty$ (using the results of V.A. Ivanov), we give the relations of orthogonality and duality (proved by methods of convex analysis from approximation theory), we establish one asymptotic result of the Levin–Lubinsky type (due to the connection with the multidimensional Nikol'skii constant for spherical polynomials).

Keywords: trigonometric polynomial, algebraic polynomial, the Bernstein–Nikolskii constant, the Markov–Nikolskii constant, the Gegenbauer weight.

Bibliography: 20 titles.

[2]The work of D.V. Gorbachev was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center. The reported study of I.A. Martyanov was funded by RFBR, project number 19-31-90152.

For citation:
D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov. 2020, "Markov–Bernstein–Nikol'skii constants for polynomials in L^p-space with the Gegenbauer weight" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 29–44.

1. Введение

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — некоторый интервал, $v\colon I \to \mathbb{R}_+$ — весовая функция, $p \geqslant 1$, $L^p(I; v)$ — весовое пространство Лебега функций $f\colon I \to \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p(I;v)} = \begin{cases} \left(\int_I |f(x)|^p\, v(x)\, dx\right)^{1/p}, & p < \infty,\\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in I} |f(x)|, & p = \infty; \end{cases}$$

$\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ — одномерный тор, $\alpha \geqslant -1/2$, $L^p_\alpha(\mathbb{T}) = L^p(\mathbb{T}; |\sin x|^{2\alpha+1})$ — пространство Лебега с периодическим весом Гегенбауэра–Данкля; $\mathbb{I} = [-1, 1]$, $L^p_\alpha(\mathbb{I}) = L^p(\mathbb{I}; (1 - t^2)^\alpha)$ — пространство Лебега с алгебраическим весом Гегенбауэра; $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{T}_n$ — множество комплекснозначных тригонометрических полиномов $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ порядка не выше n; $\mathcal{P}_n$ — множество комплекснозначных алгебраических полиномов $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ степени не выше n.

Если из контекста понятно, что речь идет о тригонометрическом или алгебраическом случае, то для краткости будем обозначать $\|f\|_{p,\alpha} = \|f\|_{L^p_\alpha(\mathbb{T})}$, $\|f\|_{L^p_\alpha(\mathbb{I})}$, $\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,\alpha}$.

В работе [9] была изучена точная константа Джексона–Никольского между метриками $L^\infty_\alpha(\mathbb{T})$ и $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ при $p \geqslant 1$, $\alpha \geqslant -1/2$ и установлена ее связь с соответствующей точной константой для алгебраических полиномов в пространстве $L^p_\alpha(\mathbb{I})$ из работы [12].

Предложение 1 ([9]). *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha \geqslant -1/2$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Через*

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) = \sup_{T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}} \frac{\|T\|_\infty}{\|T\|_{p,\alpha}}, \quad \mathcal{M}_{p,\alpha}(n) = \sup_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}} \frac{\|P\|_\infty}{\|P\|_{p,\alpha}}$$

обозначим точные константы Джексона–Никольского для тригонометрических и алгебраических полиномов соответственно. Тогда

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) = \frac{T_*(0)}{\|T_*\|_{p,\alpha}},$$

где T_* — экстремальный действительный четный тригонометрический полином порядка n. При $1 < p < \infty$ и $p = 1$, $\alpha > -1/2$ он единственный с точностью до положительного множителя.

Кроме того,

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) = 2^{-1/p} \mathcal{M}_{p,\alpha}(n)$$

и $T_*(x) = P_*(\cos x)$, где P_* — экстремальный в проблеме $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n)$ алгебраический полином степени n.

Результаты данного типа о возможности замены L^∞-нормы функции значением в крайней точке позволяют установить взаимосвязь между разными экстремальными задачами, применить теорию двойственности, охарактеризовать экстремальные функции, исследовать асимптотическое поведении констант (см., например, [12, 15]). Основным методом доказательства в весовых пространствах L^p является применение положительных операторов обобщенного сдвига (см. [12, 9]). В нашем случае необходимая теория в пространстве $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ была построена в работе [11] и адаптирована в [9].

В данной работе мы развиваем данный подход на случай точных тригонометрических констант Бернштейна–Никольского в $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ и соответствующих им точных алгебраических констант Маркова–Никольского в $L^p_\alpha(\mathbb{I})$ для дифференциальных операторов Гегенбауэра. Случай веса Гегенбауэра для полуцелых $\alpha = d/2-1$ тесно связан с гармоническим анализом на многомерной сфере $\mathbb{S}^d$ (см. доказательство следствия 4 в разделе 7). В частности, алгебраические полиномы могут быть рассмотрены как сужения зональных полиномов на сфере, а дифференциальный оператор Гегенбауэра как сужение оператора Лапласа–Бельтрами. Сфера является частным случаем компактного риманова многообразия ранга 1. В этой связи рассматриваемые далее задачи для алгебраических полиномов будут перекликаться с результатами работ [5, 6, 1]. Однако в нашем случае $\alpha \geqslant -1/2$ произвольное и мы делаем основным тригонометрический случай с гармоническим анализом Генебауэра–Данкля [11].

Будем продолжать опираться на факты из работы [11], а также на общие сведения об ортогональных полиномах [10]. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $R_k^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(t)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)}$ — ортогональные полиномы Якоби, $R_k^{(\alpha)}(t) = R_k^{(\alpha,\alpha)}(t)$ — ортогональные полиномы Гегенбауэра, $\psi_k(x) = R_k^{(\alpha)}(\cos x)$ — косинус-полиномы Гегенбауэра; $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортогональный базис Гегенбауэра–Данкля в гильбертовом пространстве $L^2_\alpha(\mathbb{T})$, состоящий из тригонометрических полиномов степени n, таких что

$$e_0(1) = 1, \quad e_n(x) = \psi_{|n|}(x) - \frac{i}{\lambda_n}\,\psi'_{|n|}(x), \quad n \neq 0,$$

где $\lambda_n = \operatorname{sign} n\,\sqrt{|n|(|n|+2\alpha+1)}$,

$$|e_n(x)| \leqslant e_n(0) = 1, \quad x \in \mathbb{T}; \tag{1}$$

D_α — дифференциально-разностный оператор Гегенбауэра–Данкля первого порядка:

$$D_\alpha f(x) = f'(x) + (\alpha + 1/2)\,\frac{f(x)-f(-x)}{\operatorname{tg} x}, \quad D_\alpha e_n = i\lambda_n e_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

На четных функциях $f(x) = f(-x)$ оператор D_α^2 совпадает с дифференциальным оператором Гегенбаура второго порядка:

$$D_\alpha^2 f(x) = f''(x) + \frac{2\alpha+1}{\operatorname{tg} x}\,f'(x), \quad D_\alpha^2\psi_k = -\lambda_k^2\psi_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Последнее соотношение отвечает дифференциальному уравнению для косинус-полиномов Гегенбауэра ψ_k [10].

Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$. Любой тригонометрический полином $T \in \mathcal{T}_n$ представляется в виде [11]

$$T(x) = \sum_{|k|\leqslant n} c_k e_k(x),$$

поэтому для степени оператора Гегенбауэра–Данкля имеем

$$D_\alpha^s T(x) = \sum_{|k|\leqslant n} (i\lambda_k)^s c_k e_k(x). \tag{2}$$

Для четных полиномов $T(x) = \sum_{k=0}^n a_k\psi_k(x)$ и четного $s = 2r$ получаем

$$D_\alpha^{2r} T(x) = \sum_{k=0}^{n} (-\lambda_k^2)^r a_k\psi_k(x). \tag{3}$$

Аналогично для алгебраических полиномов Гегенбауэра $R_k^{(\alpha)}$ имеем [10]

$$\mathcal{D}_\alpha^2 R_k^{(\alpha)} = -\lambda_k^2 R_k^{(\alpha)}, \quad \mathcal{D}_\alpha^2 f(t) = (1-t^2)f''(t) - (2\alpha+2)tf'(t).$$

Для произвольного полинома $P(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kR_k^{(\alpha)}(t)$ положим (формально при нечетных s)

$$\mathcal{D}_\alpha^s P(t)=\sum_{k=0}^{n}(i\lambda_k)^s a_k R_k^{(\alpha)}(t). \tag{4}$$

Рассмотрим тригонометрическое неравенство типа Бернштейна–Никольского

$$\|D_\alpha^s T\|_\infty \leqslant C\|T\|_{p,\alpha}, \quad T\in\mathcal{T}_n, \tag{5}$$

и соответствующее алгебраическое неравенство типа Маркова–Никольского

$$\|\mathcal{D}_\alpha^s P\|_\infty \leqslant M\|P\|_{p,\alpha}, \quad P\in\mathcal{P}_n. \tag{6}$$

Точные константы в них соответственно определяются равенствами

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;s)=\sup_{T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}}\frac{\|D_\alpha^s T\|_\infty}{\|T\|_{p,\alpha}}, \quad \mathcal{M}_{p,\alpha}(n;s)=\sup_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}}\frac{\|\mathcal{D}_\alpha^s P\|_\infty}{\|P\|_{p,\alpha}}. \tag{7}$$

Стандартные рассуждения показывают существование экстремальных полиномов в этих проблемах. Ясно, что $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n)=\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;0)$, $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n)=\mathcal{M}_{p,\alpha}(n;0)$.

Наш основной результат является продолжением предложения 1.

Теорема 1. *Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\alpha\geqslant -1/2$, $n,r\in\mathbb{Z}_+$.*

(i) *Существует экстремальный действительный четный тригонометрический полином T_{*r} порядка n, такой что $T_{*r}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\psi_k(x)$ и*

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r)=\frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}}.$$

(ii) *Имеем*

$$2^{1/p}\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r)=\mathcal{M}_{p,\alpha}(n;2r)=\frac{(-\mathcal{D}_\alpha^2)^r P_{*r}(1)}{\|P_{*r}\|_{p,\alpha}},$$

где экстремальный алгебраический полином P_{*r} степени n связан с T_{*r} тригонометрической подстановкой $P_{*r}(\cos x)=T_{*r}(x)$.

(iii) *При $p\in[1,\infty)$ справедливы следующие соотношения, характеризующие экстремальные полиномы T_{*r}, P_{*r}:*

$$\frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}^p}\int_{-\pi}^{\pi}T(x)|T_{*r}(x)|^{p-1}\operatorname{sign}T_{*r}(x)\,|\sin x|^{2\alpha+1}\,dx=(-D_\alpha^2)^r T(0), \quad \forall\, T\in\mathcal{T}_n,$$

$$\frac{(-\mathcal{D}_\alpha^2)^r P_{*r}(1)}{\|P_{*r}\|_{p,\alpha}^p}\int_{-1}^{1}P(x)|P_{*r}(t)|^{p-1}\operatorname{sign}P_{*r}(t)\,(1-t^2)^\alpha\,dt=(-\mathcal{D}_\alpha^2)^r P(1), \quad \forall\, P\in\mathcal{P}_n.$$

В частности, экстремальные полиномы меняют знак на отрезке интегрирования.

(iv) *При $p\in(1,\infty)$ экстремальные полиномы в обоих задачах единственные с точностью до множителей. Если $p=1$ и $\alpha>-1/2$, то любой экстремальный тригонометрический полином T обязательно действительный, четный и $\|D_\alpha^{2r}T\|_\infty=|D_\alpha^{2r}T(0)|$.*

Теорема доказывается в разделе 2. К сожалению, наш метод не позволяет получить ее для произвольного s, в том числе для дробных производных типа Вейля, что является интересной задачей. В разделе 7 мы дадим несколько следствий из основной теоремы 1, в частности, обсудим взаимосвязь величин $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;s)$ и $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n;s)$ с классическими неравенствами Бернштейна и Маркова, выведем значения $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r)$ для $p=2,\infty$ на основе результатов [6], докажем соотношение двойственности для $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r)$ при $p\in[1,\infty)$ и докажем результат типа Левина–Любинского об асимптотическом поведение $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;0)$ для полуцелых α.

2. Доказательство теоремы 1

Также как в работе [9] нам потребуется оператор обобщенного сдвига T^y в пространстве $L^p_\alpha(\mathbb{T})$, построенный и изученный в [11]. Пусть $x, y \in \mathbb{T}$, тогда

$$\mathrm{T}^y f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,[f(x+y) + f(x-y)], & \alpha = -1/2, \\ a_\alpha \int_0^\pi [f(A(\theta))(1+B(\theta)) + f(-A(\theta))(1-B(\theta))] \sin^{2\alpha}\theta\, d\theta, & \alpha > -1/2, \end{cases}$$

где $a_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}$, $A(\theta) = \arccos(\cos x \cos y + \sin x \sin y \cos\theta)$, $B(\theta) = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y \cos\theta}{\sin A(\theta)}$.

Оператор T^y линейный, действительный, положительный, $\mathrm{T}^y 1 = 1$, $\mathrm{T}^0 f = f$, $|\mathrm{T}^y f| \leqslant \mathrm{T}^y |f|$. Имеем $\mathrm{T}^y f(x) = \mathrm{T}^x f(y)$ для четных f. Однако в общем случае оператор T^y несимметричный, поэтому как в [9] удобно ввести оператор обобщенного сдвига S^y, такой что $\mathrm{S}^y f(x) = \mathrm{T}^x f(y)$.

Нам потребуется следующее утверждение, вытекающее из результатов работ [11, 9].

Предложение 2. *Пусть $p \in [1, \infty]$, $\alpha \geqslant -1/2$, $T(x) = \sum_{|k| \leqslant n} c_k e_k(x)$ — произвольный полином из $\mathcal{T}_n$, $x_0 \in \mathbb{T}$ — произвольная фиксированная точка.*

(i) *Имеем*

$$\mathrm{S}^{x_0} T(x) = \sum_{|k| \leqslant n} c_k \psi_{|k|}(x) e_k(x_0), \quad \mathrm{S}^{x_0} T(0) = T(x_0).$$

(ii) *Справедлива оценка*

$$\|\mathrm{S}^{x_0} T\|_{p,\alpha} \leqslant \|T\|_{p,\alpha}.$$

(iii) *Если $\alpha > -1/2$ и $\|\mathrm{S}^{x_0} T\|_{1,\alpha} = \|T\|_{1,\alpha}$, то $\pm T \geqslant 0$ на $\mathbb{T}$.*

Факт (i) установлен в [11], а факты (ii), (iii) — в [9].

Приступим к доказательству теоремы 1.

3. Часть (i)

Рассмотрим тригонометрическую проблему $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r)$ из (7). Покажем, что в этой задаче можно выбрать действительный экстремальный полином. Пусть $T \in \mathcal{T}_n$ — некоторый экстремальный полином, такой что

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) = \frac{\|D^{2r}_\alpha T\|_\infty}{\|T\|_{p,\alpha}}, \quad \|D^{2r}_\alpha T\|_\infty = |D^{2r}_\alpha T(x_0)|, \quad x_0 \in \mathbb{T}. \tag{8}$$

Не ограничивая общности можно считать, что

$$|D^{2r}_\alpha T(x_0)| = (-D^2_\alpha)^r T(x_0) > 0,$$

иначе T можно умножить на некоторую комплексную константу и воспользоваться линейностью оператора D^{2r}_α.

Пусть $T = T_1 + iT_2$, где T_j — действительные полиномы степени n. Оператор D^{2r}_α действительный, поэтому $D^{2r}_\alpha T_2(x_0) = 0$ и, следовательно,

$$(-D^2_\alpha)^r T(x_0) = (-D^2_\alpha)^r T_1(x_0).$$

Так как $|T_1(x)| \leqslant |T(x)|$ для всех x, имеем $\|T_1\|_{p,\alpha} \leqslant \|T\|_{p,\alpha}$. Таким образом,

$$\frac{\|D^{2r}_\alpha T\|_\infty}{\|T\|_{p,\alpha}} \leqslant \frac{(-D^2_\alpha)^r T_1(x_0)}{\|T_1\|_{p,\alpha}},$$

поэтому T_1 — экстремальный полином.

Пусть $T_1(x)=\sum_{|k|\leqslant n} c_k e_k(x)$. В силу (2)

$$(-D_\alpha^2)^r T_1(x_0)=\sum_{|k|\leqslant n}\lambda_k^{2r} c_k e_k(x_0). \tag{9}$$

Рассмотрим полином

$$S(x)=\mathrm{S}^{x_0}T_1(x)=\sum_{|k|\leqslant n} c_k e_k(x_0)\psi_{|k|}(x). \tag{10}$$

Так как оператор S^y действительный, S будет действительным четным полиномом степени n. При этом в силу (10), (3), (9)

$$(-D_\alpha^2)^r S(0)=\sum_{|k|\leqslant n}\lambda_k^{2r} c_k e_k(x_0)=(-D_\alpha^2)^r T_1(x_0).$$

По предложению 2 имеем

$$\|S\|_{p,\alpha}\leqslant \|\mathrm{S}^{x_0}T_1\|_{p,\alpha}\leqslant \|T_1\|_{p,\alpha}.$$

Таким образом,

$$\frac{(-D_\alpha^2)^r T_1(x_0)}{\|T_1\|_{p,\alpha}}\leqslant\frac{(-D_\alpha^2)^r S(0)}{\|S\|_{p,\alpha}}$$

и, значит, S — экстремальный. Утверждение (i) теоремы 1 установлено.

4. Часть (ii)

Пусть $P(t)=\sum_{k=0}^n a_k R_k^{(\alpha)}(t)$ — произвольный алгебраический полином степени не выше n, $P\neq 0$. Тогда $T(x)=P(\cos x)$ будет четным тригонометрическим полиномом степени не выше n, для которого в силу (3) и (4) будет $D_\alpha^{2r}T(x)=\mathcal{D}_\alpha^{2r}P(t)$. При этом

$$\|T\|_{p,\alpha}=\left(2\int_0^\pi |P(\cos x)|^p(\sin x)^{2\alpha+1}\,dx\right)^{1/p}=2^{1/p}\left(\int_{-1}^1 |P(t)|^p(1-t^2)^\alpha\,dt\right)^{1/p}=2^{1/p}\|P\|_{p,\alpha}.$$

Поэтому

$$\frac{\|\mathcal{D}_\alpha^{2r}P\|_\infty}{\|P\|_{p,\alpha}}=2^{1/p}\,\frac{\|D_\alpha^{2r}T\|_\infty}{\|T\|_{p,\alpha}}\leqslant 2^{1/p}\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r),$$

откуда следует, что $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n;2r)\leqslant 2^{1/p}\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r)$. Если положить $P(\cos x)=S(x)$, то получим равенство. Часть (ii) доказана.

5. Часть (iii)

Воспользуемся известными известными соотношениями ортогональности из теории приближений при $p\in[1,\infty)$ (см., например, [20]). Достаточно рассмотреть тригонометрический случай.

В части (i) мы доказали, что

$$\mathcal{C}=\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r)=\frac{(-D_\alpha^2)^r S(0)}{\|S\|_{p,\alpha}}.$$

Покажем, что полином S будет экстремальным тогда и только тогда, когда

$$\frac{(-D_\alpha^2)^r S(0)}{\|S\|_{p,\alpha}^p}\int_{\mathbb{T}} T(x)|S(x)|^{p-1}\operatorname{sign} S(x)\,|\sin x|^{2\alpha+1}\,dx=(-D_\alpha^2)^r T(0),\quad \forall\, T\in\mathcal{T}_n. \tag{11}$$

Нормируем S так, чтобы $(-D_\alpha^2)^r S(0) = 1$. При этом условии S будет полиномом с наименьшей нормой $\|S\|_{p,\alpha} = \mathcal{C}^{-1}$. Поскольку любой полином T с условием $(-D_\alpha^2)^r T(0) = 1$ можно представить в виде $T = S + H$, $H \in \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — замкнутое (в силу конечномерности) подпространство полиномов из $\mathcal{T}_n$ с условием $(-D_\alpha^2)^r H(0) = 0$, получаем

$$\mathcal{C}^{-1} = \|S\|_{p,\alpha} = \min_{H\in\mathcal{H}} \|S - H\|_{p,\alpha}.$$

Получили задачу наилучшего приближения S замкнутым подпространством. При $1 \leqslant p < \infty$ необходимым и достаточным условие экстремальности нулевого элемента будет условие ортогональности функции $|S|^{p-1}\operatorname{sign} S$ подпространству $\mathcal{H}$ (см. [20, гл. 4]). При $p = 1$ надо еще учесть, что полином S не может обращается в нуль на множестве положительной меры. Таким образом, получаем

$$\int_{\mathbb{T}} H(x)|S(x)|^{p-1}\operatorname{sign} S(x)\,|\sin x|^{2\alpha+1}\,dx = 0, \quad \forall\, H \in \mathcal{H}. \tag{12}$$

Поскольку любой полином $T \in \mathcal{T}_n$ можно представить в виде $T = (-D_\alpha^2)^r T(0)S + H$, где $H \in \mathcal{H}$, то (12) эквивалентно

$$0 = \int_{\mathbb{T}} [T(x) - (-D_\alpha^2)^r T(0)S(x)]|S(x)|^{p-1}\operatorname{sign} S(x)\,|\sin x|^{2\alpha+1}\,dx$$

или

$$\frac{1}{\|S\|_{p,\alpha}^p}\int_{\mathbb{T}} T(x)|S(x)|^{p-1}\operatorname{sign} S(x)\,|\sin x|^{2\alpha+1}\,dx = (-D_\alpha^2)^r T(0).$$

Здесь можно умножить S на произвольную положительную постоянную и получить (11).

Из (12) видно, что экстремальный полином обязан менять знак на отрезке интегрирования. Утверждение (iii) установлено.

6. Часть (iv)

Для $1 < p < \infty$, $\alpha \geqslant -1/2$ единственность экстремальных полиномов с точностью до множителей стандартно вытекает из строгой нормированности пространства L^p.

Пусть $p = 1$, $\alpha > -1/2$. Достаточно рассмотреть случай $n \geqslant 1$. Пусть T — произвольный экстремальный полином вида (8). Построим для него по схеме из части (i) действительный четный полином S. Тогда $\|S\|_{1,\alpha} = \|S^{x_0}T\|_{1,\alpha} = \|T\|_{1,\alpha}$. Отсюда по предложению 2 (iii) получаем, что T не меняет знак на $\mathbb{T}$, а, значит, и S не меняет знака в силу положительности оператора обобщенного сдвига. Но это противоречит условию ортогональности из части (iii) теоремы. Часть (iv), а вместе с ней и теорема 1, доказаны.

7. Следствия из теоремы 1

Приведем несколько следствий из основной теоремы, касающихся точных значений константы $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; s)$ и ее асимптотического поведения при $n \to \infty$.

Вначале отметим взаимосвязь неравенств (5), (6) с классическими неравенствами типа Бернштейна и Маркова. В безвесовом случае $\alpha = -1/2$ имеем $e_n(x) = e^{inx}$, $D_{-1/2}f(x) = f'(x)$. Поэтому при $p = \infty$ приходим к классическому неравенству Бернштейна с точной константой

$$\|T^{(s)}\|_\infty \leqslant n^s \|T\|_\infty, \quad s \geqslant 1 \tag{13}$$

(причем s можно считать дробным); см. обзоры результатов [2, 19]. Таким образом,

$$\mathcal{C}_{\infty,-1/2}(n; s) = n^s, \quad n, s \in \mathbb{N}.$$

Классическое неравенство Маркова (или братьев Марковых) для полиномов $P\in\mathcal{P}_n$ имеет следующий вид:

$$\|P^{(s)}\|_{\infty,0}\leqslant T_n^{(s)}(1)\|P\|_{\infty,0},\quad s\in\mathbb{Z}_+,\quad T_n^{(s)}(1)\asymp n^{2s},\tag{14}$$

где $T_n=R_n^{(-1/2)}$ — полином Чебышева [19, 6.1.2]. Наш случай для $s=2$ отвечает неравенству из [19, 6.1.10]

$$\|(1-t^2)P''(t)-(2\alpha+2)tP'(t)\|_\infty\leqslant 2(2|\alpha|+1)n^2\|P\|_\infty,\quad \alpha>-1.\tag{15}$$

Эту оценку можно итерировать, но константа в нем неточная для $\alpha\geqslant-1/2$. Действительно, применяя теорему 1 для экстремального полинома P с нормой $\|P\|_\infty=1$, с помощью неравенства Маркова (14) находим

$$\mathcal{M}_{\infty,\alpha}(n;2r)=(-\mathcal{D}_\alpha^2)P(1)=(2\alpha+2)P'(1)\leqslant(2\alpha+2)n^2,$$

причем для полинома Чебышева $P=T_n$ здесь будет равенство. Таким образом,

$$\mathcal{M}_{\infty,\alpha}(n;2)=(2\alpha+2)n^2,$$

ср. с (15).

Точная константа $\mathcal{M}_{\infty,\alpha}(n;2r)$ для всех $r\in\mathbb{Z}_+$ и полуцелых $\alpha\geqslant-1/2$ связана с точной константой Маркова–Никольского на многомерной сфере (см. (24) для $r=0$), которая была вычислена в работе [6]. Доказательство из [6] переносится на произвольные $\alpha\geqslant-1/2$, что дает равенство

$$\mathcal{M}_{\infty,\alpha}(n;2r)=(-\mathcal{D}_\alpha^2)^rT_n(1).\tag{16}$$

В [6] дана асимптотическая эквивалентность для этого выражения при $n\to\infty$, из которой следует $\mathcal{M}_{\infty,\alpha}(n;2r)\asymp n^{2r}$.

Доказательство (16) основывается на том факте, что для любого полинома $P\in\mathcal{P}_n$ при $\alpha\geqslant-1/2$, $r\in\mathbb{N}$ справедливо представление

$$(-\mathcal{D}_\alpha^2)^rP(1)=\sum_{k=1}^r\rho_{rk\alpha}P^{(k)}(1),\tag{17}$$

где коэффициенты $\rho_{rk\alpha}\geqslant0$. Например,

$$\begin{aligned}(-\mathcal{D}_\alpha^2)P(1)&=(2\alpha+2)P'(1),\\(-\mathcal{D}_\alpha^2)^2P(1)&=(2\alpha+2)^2P'(1)+(2\alpha+2)(2\alpha+4)P''(1).\end{aligned}$$

Из представления (17) и неравенства Маркова (14) следует, что

$$(-\mathcal{D}_\alpha^2)^rP(1)\leqslant\sum_{k=1}^r\rho_{rk\alpha}T_n^{(k)}(1)\|P\|_\infty=(-\mathcal{D}_\alpha^2)^rT_n(1)\|P\|_\infty,$$

причем для $P=T_n$ здесь будет равенство.

Из соотношения (16) и теоремы 1 немедленно получаем

Следствие 1. *Для всех целых $r\geqslant0$ имеем*

$$\mathcal{C}_{\infty,\alpha}(n;2r)=((-D_\alpha^2)^r\cos{(n\,\cdot)})(0),$$

полином $\cos nx$ экстремальный.

Отметим, что не ясно, как вывести этот результат напрямую, например, из теоремы Бернштейна (13). Также получение тригонометрических аналогов соотношения (17) непросто.

В [6] исследован, но не завершен, вопрос о дробном неравенстве Маркова–Никольского при $p=\infty$, когда полином Чебышева остается экстремальным. Было бы интересно продолжить эти исследования.

Также в [6] методом квадратичного программирования вычислена алгебраическая константа при $p=2$. Из нее и теоремы 1 легко вычислить $\mathcal{C}_{2,\alpha}(n;s)$. Через

$$K_n(x)=\sum_{|k|\leqslant n}\|e_k\|_{2,\alpha}^{-2}e_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\|\psi_k\|_{2,\alpha}^{-2}\psi_k(x)=K_n(0)R_n^{(\alpha+1,\alpha)}(\cos x) \tag{18}$$

обозначим ядро Дирихле в подпространстве полиномов $\mathcal{T}_n$. При выводе (18) равенств мы воспользовались формулой Кристоффеля и свойствами полиномов Якоби [10]. Пусть

$$K_{n,s}(x)=(-iD_\alpha)^sK_n(x)=\sum_{|k|\leqslant n}\lambda_k^s\|e_k\|_{2,\alpha}^{-2}e_k(x).$$

Следствие 2. *Для всех целых $n,s\geqslant 0$*

$$\mathcal{C}_{2,\alpha}(n;s)=\|K_{n,s}\|_{2,\alpha}=\biggl(\sum_{|k|\leqslant n}\lambda_k^{2s}\|e_k\|_{2,\alpha}^{-2}\biggr)^{1/2}$$

и $K_{n,s}$ единственный (с точностью до множителя) экстремальный полином.

Следствие легко доказывается для произвольного s напрямую с помощью неравенства Коши–Буняковского. Действительно, используя (2) и (1), находим

$$\begin{aligned}\biggl|\sum_{|k|\leqslant n}\lambda_k^sc_k\biggr|&=|D_\alpha^sT(0)|\leqslant\|D_\alpha^sT\|_\infty\leqslant\sum_{|k|\leqslant n}|\lambda_k|^s|c_k|=\sum_{|k|\leqslant n}|\lambda_k|^s\|e_k\|_{2,\alpha}^{-1}|c_k|\,\|e_k\|_{2,\alpha}\\&\leqslant\biggl(\sum_{|k|\leqslant n}\lambda_k^{2s}\|e_k\|_{2,\alpha}^{-2}\biggr)^{1/2}\biggl(\sum_{|k|\leqslant n}|c_k|^2\|e_k\|_{2,\alpha}^{2}\biggr)^{1/2}=\biggl(\sum_{|k|\leqslant n}\lambda_k^{2s}\|e_k\|_{2,\alpha}^{-2}\biggr)^{1/2}\|T\|_{2,\alpha}.\end{aligned}$$

Последнее неравенство будет равенством, если $|\lambda_k|^s\|e_k\|_{2,\alpha}^{-1}=|c_k|\,\|e_k\|_{2,\alpha}$ или $|c_k|=|\lambda_k|^s\|e_k\|_{2,\alpha}^{-2}$. Чтобы обратить в равенство оставшиеся неравенства нужно, чтобы $\lambda_k^sc_k=|\lambda_k|^s|c_k|$. В итоге, получаем коэффициенты экстремального полинома $c_k=\lambda_k^s\|e_k\|_{2,\alpha}^{-2}$ и искомое значение константы $\mathcal{C}_{2,\alpha}(n;s)$.

Из известных выражений для $\|\psi_k\|_{2,\alpha}$ [10] следует, что

$$\|K_{n,s}\|_{2,\alpha}\sim c_\alpha n^{s+\alpha+1},\quad n\to\infty, \tag{19}$$

где константа c_α выписывается явно.

Полином $K_{n,2r}$ также применяется для следующего соотношения двойственности, связанного с неравенством типа Бора–Фавара.

Следствие 3. *Пусть $p\in[1,\infty)$, $p'=\frac{p}{p-1}$ — сопряженный показатель, $(\mathcal{T}_n)_{p',\alpha}^{\perp}\subset L_\alpha^{p'}(\mathbb{T})$ — подпространство функций F, ортогональных подпространству полиномов $\mathcal{T}_n$:*

$$\int_{\mathbb{T}}F(x)T(x)\,|\sin x|^{2\alpha+1}\,dx=0,\quad \forall\,T\in\mathcal{T}_n.$$

Тогда для всех целых $n, r \geqslant 0$ имеем следующее соотношение двойственности:

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) = \min_{F \in (\mathcal{T}_n)^{\perp}_{p',\alpha}} \|K_{n,2r} - F\|_{p',\alpha}.$$

При поиске нижней грани можно ограничиться действительными четными F. Функция

$$F_{*r}(x) = K_{n,2r}(x) - \frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}^p} |T_{*r}(x)|^{p-1} \operatorname{sign} T_{*r}(x) \tag{20}$$

является экстремальной в двойственной задаче.

Доказательство. Вновь применим основную теорему 1. Часть (i) утверждает, что

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) = \sup_{\substack{T \in \mathcal{T}_n \\ \|T\|_{p,\alpha} = 1}} |(-D_\alpha^2)^r T(0)|.$$

Здесь можно ограничиться действительными четными полиномами, но это необязательно. Легко проверить с помощью равенства Парсеваля [11], что

$$(-iD_\alpha)^s T(0) = \int_{\mathbb{T}} T(x) K_{n,s}(x) \, |\sin x|^{2\alpha+1} \, dx = \langle K_{n,s}, T\rangle_\alpha. \tag{21}$$

Воспользуемся теперь теорией двойственности в задачах теории приближений (см., например, [20, гл. 5]). Пространство $(\mathcal{T}_n)^{\perp}_{p',\alpha}$ будет сопряженным к $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n \cap L^p_\alpha(\mathbb{T})$. Поэтому

$$\sup_{\substack{T \in \mathcal{T}_n \\ \|T\|_{p,\alpha} = 1}} |\langle K_{n,s}, T\rangle_\alpha| = \min_{F \in (\mathcal{T}_n)^{\perp}_{p',\alpha}} \|K_{n,2r} - F\|_{p',\alpha}.$$

Соотношение двойственности установлено. В нем при поиске нижней грани можно ограничиться действительными четными функциями, поскольку полином $K_{n,2r}$ действительный и четный.

По теореме 1 (iii) и (21) для экстремального полинома T_{*r} и любого $T \in \mathcal{T}_n$ имеем

$$\frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}^p} \int_{\mathbb{T}} T(x) |T_{*r}(x)|^{p-1} \operatorname{sign} T_{*r}(x) \, |\sin x|^{2\alpha+1} \, dx = \int_{\mathbb{T}} T(x) K_{n,2r}(x) \, |\sin x|^{2\alpha+1} \, dx$$

или

$$\int_{\mathbb{T}} T(x) F_{*r}(x) \, |\sin x|^{2\alpha+1} \, dx = 0,$$

где функция F_{*r} определяется равенством (20). Таким образом, F_{*r} ортогональна $\mathcal{T}_n$ и

$$\|K_{n,2r} - F\|_{p',\alpha} = \frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}^p} \big\| |T_{*r}|^{p-1} \operatorname{sign} T_{*r} \big\|_{p',\alpha} = \frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}^p} \|T_{*r}\|_{p,\alpha}^{p-1} = \mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r).$$

Следствие установлено. □

Общая асимптотическая оценка $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r)$ может быть выведена из результатов [5] для константы $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n; 2r)$ (формально для полуцелых α, что не меняет сути):

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) \asymp n^{2r + (2\alpha+2)/p}.$$

Покажем, как ее можно получить при $p \in [1, 2]$ для всех $\alpha \geqslant -1/2$.

Из следствия 3, полагая $F = 0$ в соотношении двойственности, для всех $p \in [1, \infty)$ получаем оценку

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) \leqslant \|K_{n,2r}\|_{p',\alpha}, \tag{22}$$

точную при $p=2$ (ср. со следствием 2). При $p\in[1,2]$ (когда $p'\geqslant 2$) для произвольного $s\geqslant 0$ по неравенству Гёльдера имеем

$$\|K_{n,s}\|_{p',\alpha}\leqslant \|K_{n,s}\|_{\infty}^{1-2/p'}\|K_{n,s}\|_2^{2/p'},$$

где в силу (19)

$$\|K_{n,s}\|_{\infty}\leqslant \sum_{|k|\leqslant n}|\lambda_k|^s\|e_k\|_{2,\alpha}^{-2}=\|K_{n,s/2}\|_2^2\asymp n^{s+2\alpha+2}.$$

Поэтому для некоторой постоянной $C>0$

$$\|K_{n,s}\|_{p',\alpha}\leqslant C(n^{s+2\alpha+2})^{1-2/p'}(n^{s+\alpha+1})^{2/p'}=Cn^{s+(2\alpha+2)/p}.$$

Интересно было бы получить асимптотическое разложение $\|K_{n,s}\|_{q,\alpha}$ для всех значений параметров. При $\alpha=-1/2$ эта задача сводится к оценке нормы производной тригонометрического ядра Дирихле, где такие разложения известны.

Мы упомянули точное неравенство типа Бора–Фавара. К нему приводит следующая экстремальная проблема [5]:

$$\sup\{\|F\|_{q,\alpha}\colon \|D_\alpha^s F\|_{p,\alpha}\leqslant 1,\ F\in\mathcal{T}_{np}^{\perp}\};$$

ср. с точки зрения двойственности с исходной задачей

$$\sup\{\|D_\alpha^s T\|_{q,\alpha}\colon \|T\|_{p,\alpha}\leqslant 1,\ T\in\mathcal{T}_n\}.$$

Явные значения констант Маркова–Бернштейна–Никольского при $p\neq 2,\infty$ нам неизвестны, только оценки вида (22) или порядковые равенства (см., например, [8, 7, 5, 6, 19, 14]). В связи с вопросом асимптотического поведения $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r)$ представляет интерес следующий результат, лежащий в русле работ [18, 17, 15, 4, 14, 16].

Следствие 4. *Пусть $\alpha=-1/2,1,3/2,\ldots$ — полуцелое число, $p\geqslant 1$. Тогда существует положительная константа $\mathcal{L}_{p,\alpha}$, с точностью до множителя равная константе Никольского для целых функций экспоненциального типа в пространстве $L^p(\mathbb{R};|x|^{2\alpha+1})$, такая что*

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;0)=\mathcal{L}_{p,\alpha}n^{(2\alpha+2)/p}(1+o(1)),\quad n\to\infty.$$

Доказательство. Пусть $d\in\mathbb{N}$, $\mathbb{S}^d$ — единичная евклидова сфера в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ с обычной лебеговой мерой dx и площадью ω_d, Π_n^d — множество сферических полиномов степени не выше n (сужений алгебраических полиномов $d{+}1$-переменных степени не выше n на сферу), $\mathcal{E}^{dp}$ — множество целых функций $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ экспоненциального сферического типа не выше 1; для $p>0$ через

$$\mathcal{C}(n,d,p)=\sup_{u\in\Pi_n^d\setminus\{0\}}\frac{\|u\|_{L^\infty(\mathbb{S}^d)}}{\|u\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}},\quad \mathcal{L}(d,p)=\sup_{f\in\mathcal{E}^{dp}\setminus\{0\}}\frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}$$

обозначим точные константы Никольского для полиномов и функций соответственно.

В работе [14] доказано, что для всех $d\in\mathbb{N}$, $p>0$

$$\mathcal{C}(n,d,p)=\mathcal{L}(d,p)n^{d/p}(1+o(1)),\quad n\to\infty. \tag{23}$$

В [1] (см. также [6]) установлено, что если $p\geqslant 1$, то при поиске супремума в задаче $\mathcal{C}(n,d,p)$ можно ограничиться зональными сферическими полиномами с заданным полюсом, ∞-норма которых достигается в этом полюсе. Это означает, что

$$\mathcal{C}(n,d,p)=\omega_{d-1}^{-1/p}\sup_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}}\frac{P(1)}{\|P\|_{L^p(\mathbb{I};(1-t^2)^{d/2-1})}}=\omega_{d-1}^{-1/p}\mathcal{M}_{p,d/2-1}(n;0). \tag{24}$$

Отсюда, теоремы 1 (или предложения 1) и (23) находим

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;0) = (\omega_{d-1}/2)^{1/p}\mathcal{L}(d,p)n^{(2\alpha+2)/p}(1+o(1)), \quad \alpha = d/2-1.$$

В работе [13] показано, что константу Никольского $\mathcal{L}(d,p)$ при $p \geqslant 1$ можно искать на радиальных функциях в $L^p(\mathbb{R}^d)$ и с точностью до множителя $\mathcal{L}(d,p)$ совпадает с точной константой Никольского для четных целых функций экспоненциального типа не выше 1 в пространстве $L^p(\mathbb{R};|x|^{d-1})$. В работе [3] с помощью гармонического анализа Данкля показано, что условие четности функций можно опустить. Следствие доказано. $\square$

Отметим, что для следствий 1, 2 перенос многомерных результатов [5, 6] с полуцелых α на произвольные $\alpha \geqslant -1/2$ не представляет сложности. В отличие от этого, примененные при доказательстве следствия 4 результаты для сферической константы Никольского были доказаны в [14] существенно "многомерными" методами. Например, было применено утверждение о существовании на сфере $\mathbb{S}^d$ хорошо распределенных сферических дизайнов с оптимальным порядком роста числа узлов. Было бы интересно доказать следствие 4 в полном объеме "одномерными" методами для всех $\alpha \geqslant -1/2$ как при $r=0$, так и при всех $r \geqslant 0$.

8. Заключение

В данной работе изучено точное неравенство Бернштейна–Никольского $\|D_\alpha^s T\|_\infty \leqslant \mathcal{C}_{p,\alpha}(n;s)\|T\|_{p,\alpha}$ для тригонометрических полиномов $T \in \mathcal{T}_n$ в пространстве периодических функций $L^p((-\pi,\pi];|\sin x|^{2\alpha+1})$ при $p \geqslant 1$ с периодическим весом Гегенбауэра–Данкля, а также родственное точное неравенство Маркова–Никольского $\|\mathcal{D}_\alpha^s P\|_\infty \leqslant \mathcal{M}_{p,\alpha}(n;s)\|P\|_{p,\alpha}$ для алгебраических полиномов $P \in \mathcal{P}_n$ в пространстве $L^p([-1,1];(1-t^2)^\alpha)$ с алгебраическим весом Гегенбауэра, D_α — дифференциально-разностный оператор Гегенбауэра–Данкля, $\mathcal{D}_\alpha$ — квадратный корень из оператора Гегенбауэра. В частных случаях получаем классические неравенства теории приближений типа Маркова, Бернштейна, Никольского, которым посвящены многочисленные работы и которые имеют важное значение в приложениях, например, теории чисел и метрической геометрии. Мы применяем результаты В.А. Иванова, В.В. Арестова, М.В. Дейкаловой, F. Dai, D.V. Gorbachev, S.Yu. Tikhonov, E. Levin, D. Lubinsky, M.I. Ganzburg и других авторов.

Один из основных результатов работы заключается в доказательстве для четного $s=2r$ равенства $2^{1/p}\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r) = \mathcal{M}_{p,\alpha}(n;2r)$. Для этого мы показываем, что существует экстремальный действительный четный тригонометрический полином T_{*r} порядка n, такой что $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;2r) = \frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}}$. Основным методом доказательства является применение гармонического анализа Гегенбауэра–Данкля, построенного Д.В. Чертовой, включая положительный оператор обобщенного сдвига, действующий в пространстве $L^p((-\pi,\pi];|\sin x|^{2\alpha+1})$. Как следствие, мы приводим точные значения констант при $p=2, \infty$, даем соотношения ортогональности и двойственности, устанавливаем один асимптотический результат типа Левина–Любинского.

На наш взгляд, перспективными направлениями исследований являются: доказательство для константы $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n;s)$ результата типа Левина–Любинского для произвольных значений параметров, а не только полуцелого α и $s=0$; интересен случай $p \in (0,1)$; вычисление константы при $p=1$ или доказательство тесных границ для нее; вычисление точных констант на классах полиномов с ограничениями, в частности, неотрицательных полиномов; приложения в метрической геометрии и теории чисел.

9. Благодарности

Д.В. Горбачеву принадлежат следствия из теоремы 1 и раздел 7, работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре. И.А. Мартьянову принадлежит основная теорема 1 и раздел 2, исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90152.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арестов В.В., Дейкалова М.В. Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Том 19, № 2. С. 34–47.

2. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Неравенство Бернштейна–Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Том 20, № 1. С. 17–31.

3. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н. Константы Никольского в пространствах $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ // Чебышевский сб. 2018. Том 19, № 2. С. 67–79.

4. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Взаимосвязь между константами Никольского–Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 3. С. 143–153.

5. Иванов В.А. О неравенствах Бернштейна–Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1 // УМН. 1983. Том 38, № 3(231). С. 179–180.

6. Иванов В.А. Точные результаты в задаче о неравенстве Бернштейна–Никольского на компактных симметрических римановых пространствах ранга 1 // Тр. МИАН СССР: сб. тр.: Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Ч. 14. Т. 194. М.: Наука, 1992. С. 111–119.

7. Иванов В.И. Некоторые экстремальные свойства полиномов и обратные неравенства теории приближения // Приближение функций полиномами и сплайнами. Сборник статей. Тр. МИАН СССР. 1980. Том 145. С. 79–110.

8. Конягин С.В. Оценки производных от многочленов // Докл. АН СССР. 1978. Том 243, № 5. С. 1116–1118.

9. Мартьянов И.А. Константа Никольского для тригонометрических полиномов с периодическим весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 1. С. 247–258.

10. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.

11. Чертова Д.В. Теоремы Джексона в пространствах L_p, $1 \leq p < 2$, с периодическим весом Якоби // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 5–27.

12. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 4. P. 689–708.

13. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // arXiv:1907.03832. 2019.

14. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, no. 1. P. 161–185.

15. Ganzburg M.I. Sharp constants in V.A. Markov–Bernstein type inequalities of different metrics // J. Approx. Theory. 2017. Vol. 215. P. 92–105.

16. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. III. Certain polynomial inequalities of different metrics on convex sets // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 252. DOI: 10.1016/j.jat.2019.105351.

17. Ganzburg M.I., Tikhonov S.Y. On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466.

18. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 3. P. 459–468.

19. Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M. Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publ. Co., 1994.

20. Shapiro H. Topics in approximation theory. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 187. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1971.

REFERENCES

1. Arestov, V.V. & Deikalova, M.V. 2014. "Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere", *Proc. Steklov Inst. Math.* (Suppl.), vol. 284, suppl. 1, pp. 9–23.

2. Arestov, V.V. & Glazyrina, P.Y. 2015. "The Bernstein–Szegö inequality for fractional derivatives of trigonometric polynomials", *Proc. Steklov Inst. Math.* vol. 288, pp. 13–28.

3. Gorbachev, D.V. & Dobrovolskii, N.N. 2018. "Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ spaces", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 67–79. (In Russ.)

4. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2019. "Interrelation between Nikolskii–Bernstein constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 143–153. (In Russ.)

5. Ivanov, V.A. 1983. "On the Bernstein–Nikol'skii and Favard inequalities on compact homogeneous spaces of rank 1", *Russian Math. Surveys*, vol. 38, no. 3, pp. 145–146.

6. Ivanov, V.A. 1993. "Precise results in the problem of the Bernstein–Nikol'skij inequality on compact symmetric Riemannian spaces of rank 1", Investigations in the theory of differentiable functions of many variables and its applications, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 194, pp. 115–124. (In Russ.)

7. Ivanov, V.I. 1981. "Some extremal properties of polynomials and inverse inequalities of approximation theory", Approximation of functions by polynomials and splines, Work collection, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 145, pp. 85–120.

8. Konyagin, S.V. 1978. "Bounds on the derivatives of polynomials", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 243, no. 5, pp. 1116–1118. (In Russ.)

9. Martyanov, I.A. 2020. "Nikolskii constant for trigonometric polynomials with periodic Gegenbauer weight", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 247-258. (In Russ.)

10. Szegö, G. 1974. "Orthogonal polynomials", Third Edition, American Mathematical Society.

11. Chertova, D.V. 2009. “Jackson theorems in L_p-spaces, $1 \leqslant p \leqslant 2$, with periodic Jacobi weight”, *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 5–27. (in Russ.)

12. Arestov, V. & Deikalova, M. 2015. “Nikol’skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval”, *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 4, pp. 689–708.

13. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2019. “Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials”, arXiv:1907.03832.

14. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. “Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere”, *J. d’Anal. Math.*, vol. 140, no. 1, pp. 161–185.

15. Ganzburg, M.I. 2017. “Sharp constants in V.A. Markov–Bernstein type inequalities of different metrics”, *J. Approx. Theory*, vol. 215, pp. 92–105.

16. Ganzburg, M.I. 2020. “Sharp constants of approximation theory. III. Certain polynomial inequalities of different metrics on convex sets”, *J. Approx. Theory*, vol. 252. DOI: `10.1016/j.jat.2019.105351`.

17. Ganzburg, M.I. & Tikhonov, S.Y. 2017. “On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities”, *Constr. Approx.*, vol. 45, no. 3, pp. 449–466.

18. Levin, E. & Lubinsky, D. 2015. “Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle”, *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 3, pp. 459–468.

19. Milovanović, G.V., Mitrinović, D.S. & Rassias, Th.M. 1994. “Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros”, World Scientific Publ. Co., Singapore.

20. Shapiro, H. 1971. “Topics in approximation theory. Lecture Notes in Mathematics”, vol. 187, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Получено 11.04.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-45-55

Новые границы алгебраической константы Никольского[1]

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов

Дмитрий Викторович Горбачев — доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; Тульский государственный университет (г. Екатеринбург, г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Иван Анатольевич Мартьянов — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

Пусть $M_n = \sup_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}} \frac{\max_{x\in[-1,1]}|P(x)|}{\int_{-1}^{1}|P(x)|\,dx}$ — константа Никольского между равномерной и интегральной нормами для алгебраических полиномов с комплексными коэффициентами степени не выше n. D. Amir и Z. Ziegler (1976) доказали, что $0.125(n+1)^2 \leqslant M_n \leqslant 0.5(n+1)^2$ для $n \geqslant 0$. Аналогичная оценка сверху получена T.K. Ho (1976). F. Dai, D. Gorbachev и S. Tikhonov (2019–2020) уточнили этот результат, установив, что $M_n = Mn^2 + o(n^2)$ при $n \to \infty$, где $M \in (0.141, 0.192)$ — точная константа Никольского для целых функций экспоненциального сферического типа в пространстве $L^1(\mathbb{R}^2)$ и функций экспоненциального типа в $L^1(\mathbb{R})$ с весом $|x|$.

Мы доказываем, что для произвольного $n \geqslant 0$ имеем $M(n+1)^2 \leqslant M_n \leqslant M(n+2)^2$, где $M \in (0.1410, 0.1411)$. Данное утверждение также позволяет уточнить точную константу Джексона–Никольского для полиномов на евклидовой сфере $\mathbb{S}^2$. Доказательство базируется на взаимосвязи алгебраических констант Никольского с тригонометрическими константами Бернштейна–Никольского и наших результатах об оценках последних (2018–2019). Также мы применяем характеризацию экстремального алгебраического полинома, полученную D. Amir и Z. Ziegler (1976), В.В. Арестовым и М.В. Дейкаловой (2015). С помощью этой характеризации мы составляем тригонометрическую систему для определения нулей экстремального полинома, которую решаем приближенно с необходимой точностью с помощью метода Ньютона.

Ключевые слова: алгебраический полином, тригонометрический полином, константа Никольского, неравенство Бернштейна.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов. Новые границы алгебраической константы Никольского // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 45–55.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-45-55

Novel bounds of algebraic Nikol'skii constant[2]

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov

Dmitry Viktorovich Gorbachev — Doctor of physical and mathematical sciences, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Tula State University (Yekaterinburg, Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Ivan Anatol'evich Martyanov — Graduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Abstract

Let $M_n = \sup_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}} \frac{\max_{x\in[-1,1]}|P(x)|}{\int_{-1}^{1}|P(x)|\,dx}$ be the Nikol'skii constant between the uniform and integral norms for algebraic polynomials with complex coefficients of degree at most n. D. Amir and Z. Ziegler (1976) proved that $0.125(n+1)^2 \leqslant M_n \leqslant 0.5(n+1)^2$ for $n \geqslant 0$. The same upper bound was obtained by T.K. Ho (1976). F. Dai, D. Gorbachev, and S. Tikhonov (2019–2020) refined this result by establishing that $M_n = Mn^2 + o(n^2)$ for $n \to \infty$, where $M \in (0.141, 0.192)$ is the sharp Nikol'skii constant for entire functions of exponential spherical type in the space $L^1(\mathbb{R}^2)$ and functions of exponential type in $L^1(\mathbb{R})$ with weight $|x|$.

We prove that for arbitrary $n \geqslant 0$ one has $M(n+1)^2 \leqslant M_n \leqslant M(n+2)^2$, where $M \in (0.1410, 0.1411)$. This statement also allows us to refine the exact Jackson–Nikol'skii constant for polynomials on the Euclidean sphere $\mathbb{S}^2$. The proof is based on the relationship between the algebraic Nikol'skii constants and the Bernstein–Nikol'skii trigonometric constants and our estimates of these constants (2018–2019). We also apply the characterization of the extremal algebraic polynomial obtained by D. Amir and Z. Ziegler (1976), V.V. Arestov and M.V. Deikalova (2015). Using this characterization, we compose a trigonometric system for determining the zeros of an extremal polynomial, which we solve approximately with the required accuracy using Newton's method.

Keywords: algebraic polynomial, trigonometric polynomial, the Nikolskii constant, the Bernstein inequality.

Bibliography: 26 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov. 2020, "Novel bounds of algebraic Nikol'skii constant", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 45–55.

1. Введение

Пусть $0 < p \leqslant \infty$, $Q \subset \mathbb{R}$, $L^p(Q)$ — пространство Лебега функций $f\colon Q \to \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_Q |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, & p < \infty,\\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in Q}|f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

$\mathcal{P}_n$ — множество комплекснозначных алгебраических полиномов степени не выше $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

Для алгебраических полиномов известно следующее неравенство Никольского (см., например, [24, 5.3.1]). Пусть $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p[-1,1]}$, тогда для произвольного полинома $P \in \mathcal{P}_n$

$$\|P\|_q \leqslant \big((p+1)n^2\big)^{1/p-1/q}\|P\|_p, \quad 1 \leqslant p < q \leqslant \infty. \tag{1}$$

Это неравенство точно по порядку при $n \to \infty$, однако точная константа в нем по нашим сведениям известна только при $(p,q) = (2,\infty)$ (см. [24, 6.1.8]).

Некоторые авторы, например, [18, 16], неравенства типа (1) называют неравенствами Маркова–Никольского, так как А.А. Марков еще в позапрошлом веке доказал точное неравенство для производной полинома $\|P'\|_\infty \leqslant n^2\|P\|_\infty$, которое затем было обобщено его братом В.А. Марков на старшие производные. Впоследствии многими авторами эти неравенства интенсивно обобщались в разных направлениях [19, глава 6].

При $q = \infty$ неравенство вида (1) доказано Д. Джексоном [22]. Обзоры результатов и историю вопроса см., например, в [24, 14], а также в [17, 16], где даны многомерные обобщения. Разные порядковые результаты в данной проблематике см. в [10, 7].

Мы рассмотрим задачу о точной константе Никольского в неравенстве (1) для случая $(p,q) = (1,\infty)$, который имеет богатую историю. Положим

$$M_n = \sup_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}} \frac{\|P\|_\infty}{\|P\|_1}. \tag{2}$$

Ясно, что $M_0 = 1/2$.

Неравенство (1) влечет $M_n \leqslant 2n^2$. Наилучшие известные нам двусторонние оценки M_n получены D. Amir, Z. Ziegler [12]: для $n \geqslant 0$

$$0.5(n+1)^2 \geqslant M_n \geqslant 0.125\begin{cases}(n+2)^2, & n \text{ четное},\\ (n+1)(n+3), & n \text{ нечетное}.\end{cases} \tag{3}$$

Аналогичная оценка сверху получена T.K. Ho (см. [19, 5.3.1]).

В работах [18, 14] установлено, что существует константа M, такая что

$$M_n = Mn^2 + o(n^2), \quad n \to \infty.$$

причем M одновременно является точной константой Никольского для целых функций экспоненциального сферического типа в пространстве $L^1(\mathbb{R}^2)$ и функций экспоненциального типа в $L^1(\mathbb{R})$ с весом $|x|$ [17, 15]. Данный результат лежит в контексте исследований из работ [23, 20, 18, 5, 6], посвященных асимптотической связи между константами Бернштейна–Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа.

Кроме того, в работе [16] доказано, что

$$0.141 < M < 0.192, \tag{4}$$

что лучше границ (3).

Из результатов работ [12] и [13] вытекает следующее предложение, характеризующее экстремальный полином в задаче (2).

Предложение 3 ([12, 12]). *Пусть* $n \geqslant 1$.

(i) *Имеем*

$$M_n = \sup_{\substack{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}\\ P \text{ действительный}}} \frac{P(1)}{\|P\|_1}.$$

(ii) *Существует единственный экстремальный полином* $\rho_n \in \mathcal{P}_n$ *с единичным старшим коэффициентом, такой что*

$$M_n = \frac{\rho_n(1)}{\|\rho_n\|_1}.$$

(iii) *Знак* $\operatorname{sign}\rho_n$ *полинома* ρ_n *обладает свойством ортогональности*

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\operatorname{sign}\rho_n(x)\,(1-x)\,dx = 0, \quad \forall\, Q \in \mathcal{P}_{n-1}$$

и

$$M_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}\operatorname{sign}\rho_n(x)\,dx}.$$

(iv) *Полином* ρ_n *имеет вид*

$$\rho_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i), \quad -1 < x_1 < \ldots < x_n < 1.$$

(v) *Нули полиномов* ρ_n *и* ρ_{n+1} *перемежаются.*

(vi) *Имеем*

$$\rho_n = \operatorname*{argmin}_{\substack{P(x)=x^n+Q(x)\\ Q\in\mathcal{P}_{n-1}}} \int_{-1}^{1} |P(x)|\,(1-x)\,dx.$$

Из этого предложения следует, что задачи о константе Джексона–Никольского и Чебышева о полиноме, наименее уклоняющимся от нуля в пространстве $L^1[-1,1]$ с весом $1-x$, эквивалентны. В разделе 2 будет приведена связь констант M_n и M с точными константами Бернштейна–Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Для всех* $n \in \mathbb{Z}_+$

$$M(n+1)^2 \leqslant M_n \leqslant M(n+2)^2, \tag{5}$$

где

$$0.1410 < M < 0.1411. \tag{6}$$

Как пример заметим, что из $M_0 = 1/2$ и (5) вытекают оценки $0.125 \leqslant M \leqslant 0.5$ и

$$0.125(n+1)^2 \leqslant M_n \leqslant 0.5(n+2)^2,$$

ср. с (3). Также простые вычисления показывают, что $M_1 = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$ (см. раздел 3). Отсюда $0.134 < M < 0.302$.

Теорему 1 полезно сравнить с соответствующим тригонометрическим неравенством Джексона-Никольского. Пусть $\mathcal{T}_n$ — множество 2π-периодических комплекснозначных полиномов степени не выше n и

$$C_n = \sup_{T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}} \frac{\|T\|_{L^\infty(-\pi,\pi]}}{\|T\|_{L^1(-\pi,\pi]}}.$$

Простое аналитическое выражение для константы C_n также как и для M_n неизвестно. Я.Л. Геронимус [3] выразил C_n через корень функционального определителя. На алгебраический случай с весом Чебышева этот результат переносился в работе [25]. Однако утверждения типа Геронимуса остаются малоисследованными и, например, известные оценки C_n получены другими методами. В частности, Д. Джексон [22] с помощью неравенства Бернштейна $\|T'\|_\infty \leqslant n\|T\|_\infty$ для тригонометрических полиномов степени n доказал, что $C_n \leqslant 2n$. В работе [26] получены неравенства

$$\frac{n}{2\pi} \leqslant C_n \leqslant \frac{2n+1}{2\pi}, \tag{7}$$

Верхняя оценка ранее была доказана в [8].

С.Б. Стечкин показал, что существует константа $L > 0$, такая что

$$C_n = Ln + o(n), \quad n \to \infty$$

(устное сообщение, см. [11]). Л.В. Тайков [11] доказал результат Стечкина с остаточным членом $O(1)$ и показал, что $L \in (0.171, 0.186)$. Это сильнее границ $L \in (0.159, 0.319)$, вытекающих из (7).

Сейчас указанные оценки улучшены. В работе [4] доказан тригонометрический аналог теоремы 1

$$Ln \leqslant C_n \leqslant L(n+1), \quad n \geqslant 0,$$

показано, что L является точной константой в неравенстве для целых функций экспоненциального типа, установлена связь L с константой Конягина для преобразования Фурье из [1, 2] и даны границы $L \in (0.172, 0.175)$. Наконец, в работе [21] установлено, что $L \approx 0.172182$ (ср. с [5]). Вычисление точного значения L является открытой проблемой.

Задача о нахождении константы L и родственные ей в терминах преобразования Фурье имеют интересные приложения в теории чисел (см. [15]). Д. Джексон [22] использовал C_n, M_n и их аналоги для норм L^p в оценках наилучшего приближения функции в метрике L^∞ посредством метрик L^p и L^∞.

2. Связь с константами Бернштейна–Никольского

Для доказательства неравенств (5) нам потребуются результаты из [6] и заметки [7], где исправлена одна неточность из работы [6]. Пусть $\sigma > 0$, $\mathcal{E}_\sigma$ — множество целых функций экспоненциального типа не больше σ. Напомним, что для $F \in \mathcal{E}_\sigma$ имеем $F(z) = O(e^{(\sigma+\varepsilon)|z|})$ для $\forall\, z \in \mathbb{C}$ и $\forall\, \varepsilon > 0$.

Через

$$\tilde{C}_n = \sup_{T \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}} \frac{\|T'\|_{L^\infty(-\pi,\pi]}}{\|T\|_{L^1(-\pi,\pi]}}, \quad \tilde{L} = \sup_{F \in \mathcal{E}_1 \cap L^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\|F'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\|F\|_{L^1(\mathbb{R})}}$$

обозначим точные константы Бернштейна–Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа соответственно (штрих обозначает производную). Для функций типа не выше σ в силу однородности наилучшей константой будет $\sigma^2\tilde{L}$.

Из результатов [7], [6] вытекает

Предложение 4. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$.*

(i) *Найдутся нечетные экстремальные полином $\tilde{T}_n \in \mathcal{T}_n$ и функция $\tilde{F} \in \mathcal{E}_1$, такие что $\|\tilde{T}_n\|_1 = \|\tilde{F}\|_1 = 1$ (нормы берутся в соответствующем пространстве L^1) и $\tilde{C}_n = \tilde{T}_n'(0)$, $\tilde{L} = \tilde{F}'(0)$.*

(ii) *Для всех $n \geqslant 1$ имеем*

$$n^2\tilde{L} \leqslant \tilde{C}_n \leqslant (n+1)^2\tilde{L}.$$

Установим взаимосвязь между M_n, M и $\tilde{C}_n$, $\tilde{L}$.

Предложение 5. *Пусть $n \geqslant 0$. Полином $P_n^* \in \mathcal{P}_n$, такой что*

$$\tilde{T}_{n+1}(\theta) = \sin\theta\, P_n^*(\cos\theta),$$

является экстремальным для M_n и

$$M_n = 2\tilde{C}_{n+1}.$$

Из предложений 5 и 4 (ii) немедленно следует, что $M = 2\tilde{L}$ и справедливы искомые неравенства (5).

Доказательство. Пусть P — экстремальный алгебраический полином для M_n степени n, такой что $M_n = \frac{P(1)}{\|P\|_1}$ (см. предложения 3). Как часто в таких вопросах, сделаем тригонометрическую замену переменного $x = \cos\theta$ в интеграле

$$\|P\|_1 = \int_{-1}^{1} |P(x)|\, dx = \int_0^\pi |P(\cos\theta)| \sin\theta\, d\theta = \int_0^\pi |T(\theta)|\, d\theta = 2^{-1}\|T\|_{L^1(-\pi,\pi]},$$

где $T(\theta) = \sin\theta\, P(\cos\theta)$ — нечетный тригонометрический полином степени $n+1$. При этом $T'(0) = P(1)$, следовательно,

$$M_n = \frac{P(1)}{\|P\|_1} = 2\,\frac{T'(0)}{\|T\|_1} \leqslant 2\tilde{C}_{n+1}. \tag{8}$$

С другой стороны, нечетный экстремальный тригонометрический полином $\tilde{T}_{n+1}$ представляется в виде

$$\tilde{T}_{n+1}(\theta) = \sum_{k=1}^{n+1} b_k \sin k\theta = \sin\theta \sum_{k=0}^{n} b_{k+1}\, \frac{\sin{(k+1)\theta}}{\sin\theta} = \sin\theta\, P(\cos\theta),$$

где P — алгебраический полином степени n, поэтому в (8) будет равенство. Предложение доказано. $\square$

3. Доказательство оценок (6)

Из теоремы 1 (1) имеем

$$\frac{M_n}{(n+2)^2} \leqslant M \leqslant \frac{M_n}{(n+1)^2}, \quad n \geqslant 0.$$

Таким образом, двусторонние оценки константы M могут быть получены приближенным вычислением констант M_n с необходимой точностью для достаточно больших n. В [12] для вычисления M_n выписана система полиномиальных уравнений, вытекающая из предложения 3. Для этого свойство ортогональности (iii) применяется к базисным полиномам $\{(1-x)^{j-1}\}_{j=1}^n$. Тогда для нулей $-1 < x_1 < \ldots < x_n < 1$ экстремального полинома ρ_n получаем

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1-x)^j\, dx = 0,$$

где $x_0 = -1$, $x_{n+1} = 1$. Полагая $t_i = 2^{-1}(1 - x_{n-i+1})$, $0 < t_1 < \ldots < t_n < 1$, приходим к системе полиномиальных уравнений [12]

$$2\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} t_i^{j+1} + (-1)^n = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

имеющей единственное решение в силу единственности экстремального полинома. При этом

$$M_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} \rho_n(x)\, dx} = \frac{2^{-1}}{2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} t_i + (-1)^n}.$$

При небольших n система (9) может быть эффективно решена при помощи метода Ньютона. При переходе от n к $n+1$ для выбора начального приближения можно использовать факт перемежаемости решений (см. предложение 3 (v)). Однако со все большим n появляется проблема переполнения вещественной арифметики. Действительно, достаточно сравнить определитель якобиана системы (9) с определителем Вандермонда

$$\det (t_i^{j-1})_{i,j=1}^n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (t_j - t_i),$$

который экспоненциально мал от n в силу $t_j - t_i \in (0, 1)$. Поэтому требуется все большая точность вычислений, что приводит к резкому замедлению расчетов.

Для преодоления этой сложности сведем задачу к тригонометрической, делая стандартную подстановку $x = \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$. Пусть

$$x_i = \cos\theta_{n-i+1}, \quad 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n < \pi, \quad \theta_i = \theta_{ni}.$$

Свойство ортогональности приобретает вид

$$\int_0^{\pi} T(\theta) \operatorname{sign} \rho_n(\cos\theta)\, (1 - \cos\theta) \sin\theta\, d\theta = 0,$$

где T — произвольный четный тригонометрический полином порядка $n-1$. В качестве базисных полиномов T_j порядка $j - 1 = 0, \ldots, n-1$ выберем полиномы, для которых

$$T_j(\theta)(1 - \cos\theta) = 1 - \frac{\sin (j+1)\theta}{(j+1)\sin\theta}.$$

Тогда для θ_i получаем систему тригонометрических уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \Big(\sin\theta - \frac{\sin (j+1)\theta}{j+1}\Big)\, d\theta = (-1)^n U_j(\pi) - 2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^i U_j(\theta_i) = 0, \tag{10}$$

где $U_j(\theta) = 1 - \cos - \frac{1 - \cos (j+1)\theta}{(j+1)^2}$. Отметим, что для безвесовой тригонометрической константы Никольского схожая система имеется в работе [26]. Якобиан системы (10) легко вычисляется и можно вновь применить метод Ньютона. При этом

$$M_n = \frac{1}{1 + (-1)^n + 2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cos\theta_i}.$$

Для сходимости метода Ньютона важно выбрать начальное приближение. Было замечено, что наша оценка снизу константы M в (6) практически совпадает с нижней оценкой в (4). Как было сказано, M является точной константой Никольского для целых функций экспоненциального типа в $L^1(\mathbb{R})$ с весом $|x|$. В [16] для оценки снизу применялась функция Бесселя $x^{-5/2} J_{5/2}(x)$. Хорошо известно, что для полинома Якоби

$$n^{-\alpha} P_n^{(\alpha,\beta)}\Big(\cos\frac{\theta}{n}\Big) \sim \Big(\frac{\theta}{2}\Big)^{-\alpha} J_\alpha(\theta), \quad n \to \infty.$$

Отсюда было сделано предположение, что хорошим начальным приближением θ_{ni} могут быть нули $\theta_{ni}^{(5/2,1/2)}$ косинус-полинома Якоби $P_n^{(5/2,1/2)}(\cos\theta)$. Этот факт был подтвержден вычислениями, причем параметр $\beta = 1/2$ в каком-то смысле наилучший. Для нулей $\theta_{ni}^{(\alpha,\beta)}$ использовалась приближение L. Gatteschi

$$\theta_{ni}^{(\alpha,\beta)} \approx \frac{q_{\alpha i}}{\nu}, \quad \nu = \Big(N^2 + \frac{1-\alpha^2-3\beta^2}{12}\Big)^{1/2}, \quad N = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2},$$

где $q_{\alpha 1} < q_{\alpha 2} < \ldots$ — положительные нули функции Бесселя.

Вычисления проводились в среде Matlab, нули Бесселя были взяты из Maple. Вычислительные эксперименты показали, что тригонометрический подход позволяет эффективно вычислять θ_{ni} и M_n с нужной точностью для всех n порядка 10000, что связано с хорошей обусловленностью тригонометрического якобиана и удачным выбором начального приближения. Оценки (6) получены при $n = 16000$, в частности, имеем $\lg M_{16000} \approx 7.557790548$.

Отметим, что в работе [21] для приближенного вычисления безвесовой константы Никольского в пространстве $L^1(\mathbb{R})$ применялась функция Бесселя $x^{-3/2}J_{3/2}(x)$. Однако было показано, что эта функция не является экстремальной и проблема остается открытой, как и задача о вычислении M.

4. Заключение

В данной работе доказывается, что для алгебраической константы Никольского M_n справедливы границы $M(n+1)^2 \leqslant M_n \leqslant M(n+2)^2$, $n \geqslant 0$, где M — константа Никольского для целых функций экспоненциального типа принадлежит интервалу $M \in (0.1410, 0.1411)$. Данные результаты уточняет предыдущие оценки, полученные в работах D. Amir и Z. Ziegler, T. K. Ho, F. Dai, D. Gorbachev и S. Tikhonov. Данное утверждение также позволяет уточнить точную константу Джексона–Никольского для полиномов на евклидовой сфере $\mathbb{S}^2$.

Доказательство базируется на взаимосвязи алгебраических констант Никольского с тригонометрическими константами Бернштейна–Никольского и наших предыдущих результатах об оценках последних. Также мы применяем характеризацию экстремального алгебраического полинома, полученную D. Amir и Z. Ziegler, В.В. Арестовым и М.В. Дейкаловой. С помощью этой характеризации мы конструируем тригонометрическую систему для определения нулей экстремального полинома, которую решаем приближенно с необходимой точностью с помощью метода Ньютона. Наш подход может быть расширен и использован для оценок весовых констант Никольского.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Н.Н., Конягин С.В., Попов А.Ю. Экстремальные задачи для функций с малым носителем // Матем. заметки. 1996. Том 60, № 3. С. 323–332; 2000. Том 68, № 3. С. 479–479.

2. Андреев Н.Н., Конягин С.В., Попов А.Ю. Письмо в редакцию // Матем. заметки. 2000. Том 68, № 3. С. 479.

3. Геронимус Я.Л. Об одной экстремальной задаче Чебышева // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1938. Том 2, вып. 4. С. 445–456.

4. Горбачев Д.В. Интегральная задача Конягина и (C, L)-константы Никольского // Труды ИММ УрО РАН. 2005. Том 11, № 2. С. 72–91.

5. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, № 2. С. 80–89.

6. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Взаимосвязь между константами Никольского-Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 3. С. 143–153.

7. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Письмо в редакцию // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 3. С. 336–338.

8. Ибрагимов И.И. Экстремальные задачи в классе тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1958. Том 121, № 3. С. 415–417.

9. Иванов В.И. Некоторые экстремальные свойства полиномов и обратные неравенства теории приближения // Приближение функций полиномами и сплайнами. Сборник статей. Тр. МИАН СССР. 1980. Том 145. С. 79–110.

10. Конягин С.В. Оценки производных от многочленов // Докл. АН СССР. 1978. Том 243, № 5. С. 1116–1118.

11. Тайков Л.В. Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // УМН. 1965. Том 20, № 3. С. 205–211.

12. Amir D., Ziegler Z. Polynomials of extremal L_p-norm on the L_∞-unit sphere // J. Approx. Theory. 1976. Vol. 18. P. 86–98.

13. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 4. P. 689–708.

14. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval // Anal. Math. 2016. Vol. 42, no. 2. P. 91–120.

15. Carneiro E., Milinovich M.B., Soundararajan K. Fourier optimization and prime gaps // Comment. Math. Helv. 2019. Vol. 94. P. 533–568.

16. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // arXiv:1907.03832. 2019.

17. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, no. 1. P. 161–185.

18. Ganzburg M.I. Sharp constants in V.A. Markov–Bernstein type inequalities of different metrics // J. Approx. Theory. 2017. Vol. 215. P. 92–105.

19. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. III. Certain polynomial inequalities of different metrics on convex sets // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 252. DOI: 10.1016/j.jat.2019.105351.

20. Ganzburg M.I., Tikhonov S.Y. On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466.

21. Hörmander L., Bernhardsson B. An extension of Bohr's inequality // Boundary value problems for partial differential equations and applications. RMA Res. Notes Appl. Math. 1993. Vol. 29. P. 179–194.

22. Jackson D. Certain problems of closest approximation // Bull. Am. Math. Soc. 1933. Vol. 39. P. 889–906.

23. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 3. P. 459–468.

24. Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M. Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publ. Co., 1994.

25. Simonov I.E., Glazyrina P.Y. Sharp Markov–Nikolskii inequality with respect to the uniform norm and the integral norm with Chebyshev weight // J. Approx. Theory. 2015. Vol. 192. P. 69–81.

26. Ziegler Z. Minimizing the $L_{p,\infty}$-distortion of trigonometric polynomials // J. Math. Anal. Appl. 1977. Vol. 61. P. 426–431.

REFERENCES

1. Andreev, N.N., Konyagin, S.V., & Popov A.Yu. 1996. "Extremum problems for functions with small support", *Math. Notes*, vol. 60, no. 3, pp. 241–247.

2. Andreev, N.N., Konyagin, S.V., & Popov A.Yu. 2000. "Letter to the editor", *Math. Notes*, vol. 68, no. 3, pp. 415–416.

3. Geronimus, J. 1938. "Sur un problème extrémal de Tchebycheff", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 2, no. 4, pp. 445–456. (In Russ.)

4. Gorbachev, D.V. 2005. "An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii", *Proc. Steklov Inst. Math. Suppl.*, vol. 2, pp. S117–S138. (In Russ.)

5. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2018. "On interrelation of Nikolskii Constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 80–89. (In Russ.)

6. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2019. "Interrelation between Nikolskii–Bernstein constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 143–153. (In Russ.)

7. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2020. "Letter to the Editor", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 336–338. (In Russ.)

8. Ibragimov, I.I. 1958. "Extremum problems in the class of trigonometric polynomials", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 121, no. 3, pp. 415–417. (In Russ.)

9. Ivanov, V.I. 1981. "Some extremal properties of polynomials and inverse inequalities of approximation theory", Approximation of functions by polynomials and splines, Work collection, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 145, pp. 85–120.

10. Konyagin, S.V. 1978. "Bounds on the derivatives of polynomials", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 243, no. 5, pp. 1116–1118. (In Russ.)

11. Taikov, L.V. 1965. “A group of extremal problems for trigonometric polynomials”, *Uspekhi Mat. Nauk.*, vol. 20, no. 3(123), pp. 205–211. (In Russ.)

12. Amir, D. & Ziegler, Z. 1976. “Polynomials of extremal L_p-norm on the L_∞-unit sphere”, *J. Approx. Theory*, vol. 18, pp. 86–98.

13. Arestov, V. & Deikalova, M. 2015. “Nikol’skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval”, *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 4, pp. 689–708.

14. Arestov, V. & Deikalova, M. 2016. “Nikol’skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval”, *Anal. Math.*, vol. 42, no. 2, pp. 91–120.

15. Carneiro, E., Milinovich, M.B. & Soundararajan, K. 2019. “Fourier optimization and prime gaps”, *Comment. Math. Helv.*, vol. 94, pp. 533–568.

16. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2019. “Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials”, arXiv:1907.03832.

17. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. “Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere”, *J. d’Anal. Math.*, vol. 140, no. 1, pp. 161–185.

18. Ganzburg, M.I. 2017. “Sharp constants in V.A. Markov–Bernstein type inequalities of different metrics”, *J. Approx. Theory*, vol. 215, pp. 92–105.

19. Ganzburg, M.I. 2020. “Sharp constants of approximation theory. III. Certain polynomial inequalities of different metrics on convex sets”, *J. Approx. Theory*, vol. 252. DOI: 10.1016/j.jat.2019.105351.

20. Ganzburg, M.I. & Tikhonov, S.Y. 2017. “On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities”, *Constr. Approx.*, vol. 45, no. 3, pp. 449–466.

21. Hörmander, L. & Bernhardsson, B. 1993. “An extension of Bohr’s inequality”, Boundary value problems for partial differential equations and applications, *RMA Res. Notes Appl. Math.*, vol. 29, pp. 179–194.

22. Jackson, D. 1933. “Certain problems of closest approximation”, *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 39, pp. 889–906.

23. Levin, E. & Lubinsky, D. 2015.“Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle”, *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 3, pp. 459–468.

24. Milovanović, G.V., Mitrinović, D.S. & Rassias, Th.M. 1994. “Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros”, World Scientific Publ. Co., Singapore.

25. Simonov, I.E. & Glazyrina, P.Y. 2015. “Sharp Markov–Nikolskii inequality with respect to the uniform norm and the integral norm with Chebyshev weight”, *J. Approx. Theory*, vol. 192, pp. 69–81.

26. Ziegler, Z. 1977. “Minimizing the $L_{p,\infty}$-distortion of trigonometric polynomials”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 61, pp. 426–431.

Получено 22.05.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 512+512.5+512.54+512.54.03 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-56-71

О «простых» алгоритмически неразрешимых фрагментах элементарной теории бесконечно порожденной свободной полугруппы

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина

Валерий Георгиевич Дурнев — доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова (г. Ярославль).
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
Оксана Валерьевна Зеткина — кандидат экономических наук, доцент, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова (г. Ярославль).
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
Алена Игоревна Зеткина — ассистент, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова (г. Ярославль).
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

Аннотация

В статье доказана алгоритмическая неразрешимость $\exists\forall^2\exists^3$-теории свободной полугрупп счетного ранга, что усиливает классический результат В. Куайна [1] 1946 года об алгоритмической неразрешимости элементарной теории любой нециклической свободной полугруппы.

Ключевые слова: свободные полугруппы, элементарные теории.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина. О «простых» алгоритмически неразрешимых фрагментах элементарной теории бесконечно порожденной свободной полугруппы // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 56–71.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 512+512.5+512.54+512.54.03 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-56-71

On “simple” algorithmically undecidable fragments of elementary theory of an infinitely generated free semigroup

V. G. Durnev, O. V. Zetkina, A. I. Zetkina

Valery Georgievch Durnev — doctor of phisics and mathematics, professor, P. G. Demidov Yaroslavl' University (Yaroslavl').
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
Oksana Valerievna Zetkina — candidate of economic sciences, associate professor, P. G. Demidov Yaroslavl' University (Yaroslavl').
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
Alena Igorevna Zetkina — assistent, P. G. Demidov Yaroslavl' University (Yaroslavl').
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

Abstract

We prove algorithmic undecidability of $\exists\forall^2\exists^3$-theory for a free semigroup of countable rank. This strengthens the classical Quine's (1946) result [1] on algorithmic undecidability of elementary theory of an arbitrary non-cyclic free semigroup.

Keywords: free semigroups, elementary theories.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
V. G. Durnev, O. V. Zetkina, A. I. Zetkina, 2020, “On “simple” algorithmically undecidable fragments of elementary theory of infinitely generated free semigroup”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 56–71.

1. Введение

Обозначим через S_ω — свободную полугруппу счетного ранга со свободными образующими a_1, ..., a_m, ..., а через S_m — свободную полугруппу ранга m со свободными образующими a_1, ..., a_m. При $m = 2$ вместо a_1 и a_2 будем писать a и b соответственно, а при $m = 3$ вместо a_1, a_2 и a_3 – соответственно a, b и c. Заметим, что S_1 — циклическая полугруппа. Мы рассматриваем свободные полугруппы с пустым словом в качестве нейтрального элемента, т.е. свободные полугруппы с единицей или моноиды. Ради краткости будем говорить просто свободные полугруппы.

В статье рассматривается вопросы, связанные с истинностью на свободных полугруппах S_m замкнутых формул в сигнатуре $\langle \cdot, a_1, \ldots, a_m \rangle$.

Элементарная теория $Th(S_\alpha)$ свободной полугруппы S_α ($\alpha \in \{1, 2, \ldots, m, \ldots\} \cup \{\omega\}$) — это множество всех *замкнутых* (не содержащих свободных вхождений переменных) формул Φ вида

$$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\ldots(Q_n x_n)\,\Psi, \text{ где } \Psi = \bigvee_{i=1}^{k}((\underset{j\in A_i}{\&} w_{ij} = u_{ij})\,\&\,(\underset{t\in B_i}{\&} v_{it} \neq z_{it})),$$

$$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it} - \text{слова в алфавите } \{x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m\},$$

$$A_i \text{ и } B_i - \text{множества (возможно пустые), а } Q_1, \ldots, Q_n - \text{кванторы } \forall \text{или } \exists,$$

истинных на свободной полугруппе S_α.

При этом $(Q_1\,x_1)(Q_2\,x_2)\ldots(Q_n\,x_n)$ называется *кванторной приставкой* формулы Φ, $Q_1\,Q_2\,\ldots\,Q_n$ — *типом кванторной приставки*, а Ψ — *бескванторной частью* формулы Φ.

Изучение элементарной теории свободной некоммутативной полугруппы началось с работы В. Куайна [1] 1946 года, в которой он доказал *алгоритмическую неразрешимость элементарной теории нециклической свободной полугруппы. Элементарная теория циклической полугруппы* S_1 — это *арифметика Пресбургера*, которая, как хорошо известно, *является алгоритмически разрешимой.*

2. Фрагменты элементарных теорий конечно порожденных свободных полугрупп

Естественна постановка вопроса о возможности упрощения бескванторной части и кванторной приставки рассматриваемых формул с *сохранением алгоритмической неразрешимости.* В бескванторную часть рассматриваемых формул входят логические связки $\neg$ — *отрицание*, & — *конъюнкция* и $\vee$ — *дизъюнкция* и константы a_1, ..., a_m.

Начнем процесс упрощения с удаления отрицания $\neg$.

Формула Φ называется *позитивной*, если ее бескванторная часть Ψ не содержит отрицаний, т.е. имеет вид

$$\mathop{\vee}_{i=1}^{k} (\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij}).$$

Позитивной теорией $Th^+(S_\alpha)$ свободной полугруппы S_α называется множество всех *замкнутых позитивных* формул Φ *истинных* на свободной полугруппе S_α.

В работе [2] замечено, что для любых двух элементов U и V полугруппы S_m (m — произвольное натуральное число) справедлива эквивалентность

$$U \neq V \iff (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\mathop{\vee}_{i=1}^{m}(U = Va_ix \vee V = Ua_ix) \vee (\mathop{\vee}_{i,j=1,\, i\neq j}^{m} U = xa_iy \,\&\, V = xa_jz)),$$

поэтому из результата В. Куайна сразу следует *алгоритмическая неразрешимость позитивной теории свободной нециклической полугруппы* (этот факт в работе В. Куайна не отмечается).

В работах [3], [4] и [5] результат В. Куайна для конечно порожденных свободных полугрупп был существенно усилен — последовательно доказано, что

можно построить такое однопараметрическое семейство формул $\Phi(x)$ *с параметром* x *вида*

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,(\bigvee_{i=1}^{14} w_i(x,y,z,x_1,x_2,x_3,a,b) = u_i(x,y,z,x_1,x_2,x_3,a,b)),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A, *элементу свободной полугруппы* S_2, *определить, истинна ли на свободной полугруппе* S_3 *позитивная формула* $\Phi(A)$.

В работе [4] С. С. Марченкова *построено такое однопараметрическое семейство формул* $\Phi(x)$ *с параметром* x *вида*

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\,(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b) = u_i(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b)),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу k *определить, истинна ли на свободной полугруппе* S_2 *позитивная формула* $\Phi(a^k)$.

В работе [5] получено дальнейшее усиление результатов работ [3] и [4] — *построено такое однопараметрическое семейство формул* $\Phi(x)$ *с параметром* x *вида*

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x,y,x_1,x_2,x_3,a,b) \,=\, u_i(x,y,x_1,x_2,x_3,a,b)),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу k *определить, истинна ли на свободной полугруппе* S_2 *позитивная формула* $\Phi(a^k)$.

Естественным является вопрос о возможности дальнейшего упрощения бескванторной части. В работе Н. К. Косовского [6] построена формула $DK(x,y,z,v)$ вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\,w(x,y,z,v,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b) \,=\, u(x,y,z,v,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_m справедлива эквивалентность

$$(A \,=\, B \vee C \,=\, D) \Longleftrightarrow S_m \models DK(A,B,C,D).$$

Это позволяет исключить знак дизъюнкции $\vee$ из бескванторной части рассматриваемых формул, однако приводит к значительному усложнению кванторной приставки.

В работе [5] был несколько усилен результат Н. К. Косовского — построена формула $DD(x,y,z,v)$ вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\,w(x,y,z,v,x_1,x_2,a,b) \,=\, u(x,y,z,v,x_1,x_2,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_m справедлива эквивалентность

$$(A \,=\, B \vee C \,=\, D) \Longleftrightarrow S_m \models DD(A,B,C,D).$$

Это позволяет упростить бескванторную часть рассматриваемых формул, но кванторная приставка, конечно, усложняется. В работе [7] была построена формула $DKMP_n(y_1,z_1,\ldots,y_n,z_n)$ вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\,w(y_1,z_1,\ldots,y_n,z_n,x_1,x_2,a,b) \,=\, u(y_1,z_1,\ldots,y_n,z_n,x_1,x_2,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов A_1, B_1, ... , A_n и B_n свободной полугруппы S_m справедлива эквивалентность

$$(A_1 \,=\, B_1 \vee A_2 \,=\, B_2 \vee \ldots \vee A_n \,=\, B_n) \Longleftrightarrow S_m \models DKMP_n(A_1,B_1,\ldots,A_n,B_n).$$

Это позволяет упростить бескванторную часть рассматриваемых в работе [5] формул за счет незначительного усложнения кванторной приставки. Получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул* $\Phi(x)$ *с параметром* x *вида*

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)\,w(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b) \,=\, u(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу k *определить, истинна ли на свободной полугруппе* S_2 *позитивная формула* $\Phi(a^k)$.

Заметим, что в работах [5] и [7] построение формул ведется по методу Н. К. Косовского [6] с некоторыми усовершенствованиями.

В работе [2] показано, что невозможно построить формулу вида

$$w(x,y,z,v,a,b) \,=\, u(x,y,z,v,a,b)$$

такую, чтобы для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_m была справедлива эквивалентность

$$(A = B \vee C = D) \iff S_m \models w(A,B,C,D,a,b) = u(A,B,C,D,a,b).$$

Поэтому представляет интерес следующий вопрос:
можно ли построить формулу вида

$$(\exists x_1)\, w(x,y,z,v,x_1,a,b) = u(x,y,z,v,x_1,a,b)$$

такая, чтобы для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_m была справедлива эквивалентность

$$(A = B \vee C = D) \iff S_m \models (\exists x_1)\, w(A,B,C,D,x_1,a,b) = u(A,B,C,D,x_1,a,b).$$

В 1976 году Г. С. Маканин [9] получил ***фундаментальный результат в теории уравнений в свободных полугруппах (уравнений в словах)*** *— он построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m) = u_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)$$

определить, имеет ли она решение в свободной полугруппе S_m.

Из этого фундаментального результата Г.С. Маканина сразу следует *существование алгоритма, позволяющего по произвольной замкнутой формуле Φ с кванторной приставкой типа $\exists\exists\ldots\exists$ или типа $\forall\forall\ldots\forall$, т.е. для формул вида*

$$(\exists\, x_1)(\exists\, x_2)\ldots(\exists\, x_n)\,\Psi \text{ или вида } (\forall\, x_1)(\forall\, x_2)\ldots(\forall\, x_n)\,\Psi,$$
$$\text{где } \Psi = \bigvee_{i=1}^{k}\big((\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij})\,\&\,(\mathop{\&}_{t\in B_i} v_{it} \neq z_{it})\big),$$
$$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it} - \text{слова в алфавите } \{x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m\},$$
$$A_i \text{ и } B_i - \text{множества (возможно пустые)},$$

определить, истинна ли она на свободной полугруппе S_m.

В работе [2] показано, что *по произвольной замкнутой позитивной формуле Φ с кванторной приставкой типа $Q_1Q_2\ldots Q_n\forall$ можно построить замкнутую позитивную формулу Φ^* с кванторной приставкой типа $Q_1Q_2\ldots Q_n$ такую, что*

формула Φ истинна на свободной полугруппе S_m тогда и только тогда, когда на этой полугруппе истинна формула Φ^*.

Поэтому *вопрос об истинности на свободной полугруппе S_m позитивных формул с кванторными приставками вида $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(\forall y_1)\ldots(\forall y_m)$ алгоритмически разрешим.*

Представляет интерес *вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы определения истинности на свободной полугруппе S_2 для позитивных формул с кванторными приставками вида $\exists\forall\exists\exists$* и $\exists\exists\forall\exists$ и *произвольной бескванторной частью*, а так же для *позитивных формул с кванторными приставками вида $\exists\forall\exists\exists\exists\exists$, $\exists\exists\forall\exists\exists\exists$, $\exists\exists\exists\forall\exists\exists$* и $\exists\exists\exists\exists\forall\exists$ и *бескванторной частью "простейшего" возможного вида $w = u$.*

3. Фрагменты элементарной теории счетно порожденной свободной полугруппы

Выше рассматривались *конечно порожденные свободные полугруппы*. Для *счетно порожденных свободных полугрупп* ситуация несколько иная. С одной стороны, А.Д. Тайманов и Ю.И. Хмелевский в совместной работе [10] показали, что *универсальная теория свободной полугруппы счетного ранга S_ω алгоритмически разрешима*, т.е. существует алгоритм, позволяющий по произвольной формуле вида

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)\,\Psi,\ \text{где}\ \Psi = \bigvee_{i=1}^{k}((\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij})\,\&\,(\mathop{\&}_{t\in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$
$$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it}\ -\ \text{слова в алфавите}\ \{x_1,\dots,x_n,a_1,\dots,a_m,\dots\},$$
$$A_i\,\text{и}\ B_i\ -\ \text{множества (возможно пустые)},$$

определить, истинна ли она на свободной полугруппе S_ω. Аналогично и для формул вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\dots(\exists x_n)\,\Psi,\ \text{где}\ \Psi = \bigvee_{i=1}^{k}((\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij})\,\&\,(\mathop{\&}_{t\in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$
$$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it}\ -\ \text{слова в алфавите}\ \{x_1,\dots,x_n,a_1,\dots,a_m,\dots\},$$
$$A_i\,\text{и}\ B_i\ -\ \text{множества (возможно пустые)}.$$

Аналогичный результат для конечно порожденных полугрупп, конечно, сразу следует из фундаментальной теоремы Г.С. Маканина [9], так как в этом случае, как уже отмечалось выше, отношение $x \neq y$ выразимо позитивной $\exists$-формулой. В случае счетно порожденной полугруппы такой подход невозможен, поэтому А.Д. Тайманов и Ю.И. Хмелевский использовали другой метод. Но возможно и использование теоремы Г.С. Маканина, если заметить, что для формулы Φ вида

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)\,\Psi,\ \text{где}\ \Psi = \bigvee_{i=1}^{k}((\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij})\,\&\,(\mathop{\&}_{t\in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$
$$\text{где}\ w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it}\ -\ \text{слова в алфавите}\ \{x_1,\dots,x_n,a_1,\dots,a_m\},$$
$$A_i\,\text{и}\ B_i\ -\ \text{множества (возможно пустые)},$$

справедлива эквивалентность

$$S_\omega \models \Phi \iff S_{m+2} \models \Phi.$$

Если $S_\omega \models \Phi$, то, конечно, и $S_{m+2} \models \Phi$.

Для доказательства обратного предположим, что $S_{m+2} \models \Phi$. Тогда формула Φ истинна на ее счетно порожденной подполугруппе

$$\langle a_1,\dots,a_m, a_{m+1}a_{m+2}a_{m+1}, a_{m+1}a_{m+2}^2a_{m+1},\dots, a_{m+1}a_{m+2}^n a_{m+1},\dots\rangle.$$

Отображение φ, заданное равенствами

$$\varphi(a_n) = \begin{cases} a_n & \text{при n = 1, 2, \dots, m ;} \\ a_{m+1}a_{m+2}^{n-m}a_{m+1} & \text{при n = m+1, m+2, \dots} \end{cases},$$

является изоморфизмом свободной полугруппы S_ω на эту счетно порожденную подполугруппу, поэтому $S_\omega \models \Phi$.

В работе [2] отмечается, что *позитивная теория свободной полугруппы S_ω является рекурсивно перечислимой* и *формулируется вопрос о ее рекурсивности (алгоритмической разрешимости).*

Для установления рекурсивной перечислимости позитивной теории свободной полугруппы S_ω счетного ранга можно воспользоваться конструкцией Ю.И. Мерзлякова из работы [11], примененной им к свободным группам:

по произвольной позитивной формуле Φ, содержащей лишь свободные образующие a_1, a_2, ..., a_m, можно построить уравнение с ограничениями на решения

$$w(x_1, \ldots, x_q, a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_p) \;=\; u(x_1, \ldots, x_q, a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_p)\,\&\,\mathop{\&}_{i=1}^{q} x_i \in \langle\, a_1, \ldots, a_{n_i}\,\rangle,$$

где $\langle\, a_1, \ldots, a_{n_i}\,\rangle$ — подполугруппа, порожденная элементами a_1, ..., a_{n_i}, $m \le n_1 \le n_2 \le \ldots \le$ $\le n_q = p$, такое что

формула Φ истинна на свободной полугруппе S_ω тогда и только тогда, когда это уравнение с ограничениями имеет решение в свободной полугруппе S_p.

Ю.М. Важенин и Б.В. Розенблат в работе [12] *на базе алгоритма Г.С. Маканина построили алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений с ограничениями на решения указанного вида в свободной полугруппе определить, имеет ли она решение* и доказали *разрешимость позитивной теории (с константами) свободной полугруппы счетного ранга.* Аналогичным образом Г.С. Маканин [12] используя работу Ю.И. Мерзлякова [13] доказал *разрешимость позитивной теории (с константами) свободной группы любого ранга и класса всех групп.* Алгоритмическая неразрешимость элементарной теории класса всех групп была установлена А. Тарским еще в 40-ые годы XX века. Из фундаментального результата П.С. Новикова [14] о существовании конечно определенной группы с неразрешимой проблемой равенства и теоремы Борисова [15] следует, что невозможно построить алгоритм, позволяющий по произвольной формуле вида

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\mathop{\&}_{i=1}^{12} w_i(x_1, x_2) = 1 \;\to\; w(x_1, x_2) = 1)$$

определить, истинна ли она на каждой группе. При этом можно считать, что слова $w_1(x_1, x_2)$, ..., $w_{12}(x_1, x_2)$ фиксированы, а меняется лишь слово $w(x_1, x_2)$.

Из результата Ю.В. Матиясевича [16] о существовании конечно определенной полугруппы с тремя определяющими соотношениями и неразрешимой проблемой равенства следует, что невозможно построить алгоритм, позволяющий по произвольной формуле вида

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\mathop{\&}_{i=1}^{3} w_i(x_1, x_2) = u_i(x_1, x_2) \;\to\; w(x_1, x_2) = u(x_1, x_2))$$

определить, истинна ли она на каждой полугруппе. При этом можно считать, что слова $w_1(x_1, x_2)$, $u_1(x_1, x_2)$..., $w_3(x_1, x_2)$ и $u_3(x_1, x_2)$ фиксированы, а меняется лишь слова $w(x_1, x_2)$ $u(x_1, x_2)$.

В работе K.U. Schulz [17] усиливаются результаты Г.С. Маканина, Ю.М. Важенина и Б.В. Розенблат — путем модификации алгоритма Г.С. Маканина строится *алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной полугруппе с ограничениями на решения вида*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{p} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \;=\; u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)\,\&\,\mathop{\&}_{i=1}^{n} x_i \in L_i,$$

где L_1, ..., L_n — регулярные языки, определить, имеет ли эта система решение в свободной полугруппе S_m. Отметим, что любая конечно порожденная подполугруппа является регулярным множеством.

Для установления алгоритмической неразрешимости "простых" фрагментов элементарной теории счетно порожденной свободной полугруппы S_ω по произвольной конечно определенной полугруппе

$$S = \langle a, b \,|\, A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n \rangle$$

без пустых определяющих слов построим формулу $\Phi_S(X, Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((cXcx \neq ycaz \,\&\, cXcx \neq ycbz) \vee \\ \vee \bigvee_{i=1}^{2n} cXcxcYc = ycx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

где при любом $1 \leq j \leq n$: $A_{n+j} = B_j$ и $B_{n+j} = A_j$.

Для облегчения понимания дальнейших рассуждений заметим, что построенная формула $\Phi_S(X, Y)$ равносильна формуле вида

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((cXcx = ycaz \vee cXcx = ycbz) \rightarrow \\ \rightarrow \bigvee_{i=1}^{2n} cXcxcYc = ycx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3).$$

Лемма 1. *Для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность*

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S

$\Longleftrightarrow$ *на полугруппе S_ω истинна формула $\Phi_S(A, B)$.*

Доказательство. Предположим, что *слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S* (равны в полугруппе S). Тогда существует такое натуральное число m и такая последовательность слов W_0, W_1, ..., W_m свободной полугруппы S_2, что

$W_0 = A$, $W_m = B$ и для любого $0 \leq i < m$ существуют в S_2 такие слова X_1 и X_2, что $W_i = X_1A_iX_2$ и $W_{i+1} = X_1B_iX_2$.

Для единообразия рассуждений, можно считать, что $m \geq 2$.

Полагаем $X_0 = W_1c \ldots cW_{m-1}$. Нетрудно понять, что на свободной полугруппе S_ω истинна формула

$$(\forall y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((cAcX_0 \neq ycaz \,\&\, cAcX_0 \neq ycbz) \vee \\ \vee \bigvee_{i=1}^{2n} cAcX_0cBc = ycx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

Поэтому на полугруппе S_ω истинна формула $\Phi_S(A, B)$.

Для доказательства обратного предположим, что на полугруппе S_ω истинна формула $\Phi_S(A, B)$. Выберем в полугруппе S_ω такое слово X_0 наименьшей возможной длины, что на S_ω истинна формула

$$(\forall y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((cAcX_0 \neq ycaz \,\&\, cAcX_0 \neq ycbz) \vee \\ \vee \bigvee_{i=1}^{2n} cAcX_0cBc = ycx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

Нетрудно понять, что слово X_0 не может быть пустым.

Построим цепочку элементарных преобразований для полугруппы S:

$$A = W_0 \to W_1 \to \ldots \to W_m = B,$$

ведущую о слова A к слову B.

Полагаем $W_0 = A$.

Взяв в качестве y пустое слово, получим, что для некоторых слов X_1, X_2 и X_3 и некоторого j $(1 \le j \le 2n)$ выполняется равенство

$$cAcX_0cBc = cX_1A_jX_2cX_1B_jX_2cX_3.$$

Если слово X_1 содержит буквы, отличные от a и b, то слово A является его началом и для некоторого слова X_0' выполняется равенство

$$cAcX_0'cBc = cX_1B_jX_2cX_3$$

и истинна формула

$$(\forall y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((cAcX_0' \ne ycaz \,\&\, cAcX_0 \ne ycbz) \vee \\ \vee \bigvee_{i=1}^{2n} cAcX_0cBc = ycx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

что противоречит предположению о минимальности длины слова X_0. Значит X_0 не содержит букв отличных от a и b. Но тогда для некоторых слов X_2' и X_2'' выполняются равенства

$$X_2 = X_2'X_2'' \,\&\, A = X_1A_jX_2'.$$

Полагаем $W_1 = X_1B_jX_2'$.

Для построения слова W_2 берем в качестве слова y слово $cX_1A_jX_2'$ и аналогичное рассуждение дает преобразование

$$X_1B_jX_2' = W_1 \to W_2.$$

В результате получаем цепочку элементарных преобразований для полугруппы S:

$$A = W_0 \to W_1 \to \ldots \to W_m = B,$$

ведущую о слова A к слову B.

□

Взяв в качестве полугруппы S полугруппу с непустыми определяющими словами и с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства непустому слову B, получим

Теорема 2. *Элементарная $\exists\forall^2\exists^3$-теория свободной полугруппы S_ω счетного ранга алгоритмически неразрешима.*

Рассматриваемую в приведенных доказательствах формулу $\Phi_S(A, B)$ можно привести к виду

$$(\exists x)(\forall y_1)(\forall y_2)(\forall y_3)(\forall y_4)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)(u \ne v \vee w_1 = w_2),$$

т.е. виду

$$(\exists x)(\forall y_1)(\forall y_2)(\forall y_3)(\forall y_4)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)(u \to v \to w_1 = w_2).$$

4. Формулы с ограниченными кванторами на свободных полугруппах

В ряде работ на полугруппе S_m рассматриваются два отношения частичного порядка $\leq$ и $\subseteq$, определяемые естественным образом

для произвольных элементов X и Y полугруппы S_m:

$$X \leq Y \iff \text{существует такой элемент } Z \text{ полугруппы } S_m, \text{ что } Y = XZ;$$

$$X \subseteq Y \iff \text{существуют такие элементы } U \text{ и } Z \text{ полугруппы } S_m, \text{ что } Y = UXZ.$$

Это позволяет рассматривать формулы с ограниченными кванторами вида $(Qz)_{z\leq t}$ и $(Qz)_{z\subseteq t}$, где Q — это $\forall$ или $\exists$, а t — слово от переменных и образующих полугруппы S_m, не содержащее переменной z.

По произвольной конечно определенной полугруппе

$$S = \langle\, a, b \,|\, A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n \,\rangle$$

без пустых определяющих слов построим формулу $\Phi'_S(X,Y)$ вида

$$\begin{aligned}&(\exists x)(\forall z)_{z\leq cXcx}(\exists x_1)_{x_1\subseteq cXcxcYc}(\exists x_2)_{x_2\subseteq cXcxcYc}(\exists x_3)_{x_3\subseteq cXcxcYc}\\ &\qquad(cXcxcYc = zax_1 \vee cXcxcYc = zbx_1 \vee cXcxcYc = zcYc\vee\\ &\qquad\qquad \vee \bigvee_{i=1}^{2n} cXcxcYc = zcx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),\end{aligned}$$

где при любом $1 \leq j \leq n$: $A_{n+j} = B_j$ и $B_{n+j} = A_j$.

Лемма 2. *Для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность*

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S

$\iff$ *на полугруппе S_3 истинна формула $\Phi'_S(A,B)$.*

Доказательство. Предположим, что *слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S* (равны в полугруппе S). Тогда существует такое натуральное число m и такая последовательность слов W_0, W_1, ..., W_m свободной полугруппы S_2, что

$$W_0 = A, \quad W_m = B \quad \text{и для любого } 0 \leq i < m \text{ существуют в } S_2 \text{ такие слова } X_1 \text{ и } X_2, \text{ что } W_i = X_1A_iX_2 \text{ и } W_{i+1} = X_1B_iX_2.$$

Полагаем $X_0 = cAcW_1c\ldots cW_{m-1}$. Нетрудно понять, что на свободной полугруппе S_3 истинна формула

$$\begin{aligned}&(\forall z)_{z\leq cAcX_0}(\exists x_1)_{x_1\subseteq cAcX_0cBc}(\exists x_2)_{x_2\subseteq cAcX_0cBc}(\exists x_3)_{x_3\subseteq cAcX_0cBc}\\ &\qquad(cAcX_0cBc = zax_1 \vee cAcX_0cBc = zbx_1 \vee cAcX_0cBc = zcBc\vee\\ &\qquad\qquad \vee \bigvee_{i=1}^{2n} cAcX_0cBc = zcx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3).\end{aligned}$$

Поэтому на полугруппе S_3 истинна формула $\Phi'_S(A,B)$.

Для доказательства обратного предположим, что на полугруппе S_3 истинна формула $\Phi'_S(A,B)$. Выберем в полугруппе S_3 такое слово X_0, что на S_3 истинна формула

$$(\forall z)_{z\le cAcX_0}(\exists x_1)_{x_1\subseteq cAcX_0cBc}(\exists x_2)_{x_2\subseteq cAcX_0cBc}(\exists x_3)_{x_3\subseteq cAcX_0cBc}$$
$$(cAcX_0cBc = zax_1 \vee cAcX_0cBc = zbx_1 \vee cAcX_0cBc = zcBc\vee$$
$$\vee \bigvee_{i=1}^{2n} cAcX_0cBc = zcx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3).$$

Существует такое натуральное число m, такие слова $W_m = A$, W_{m-1}, ..., W_1 и $W_0 = B$ полугруппы S_2 и такие натуральные числа $\alpha_0 = 1$, α_1, ..., α_m и $\alpha_{m+1} = 1$, что

$$cAcX_0cBc = cW_mc^{\alpha_m}W_{m-1}c^{\alpha_{m-1}}W_{m-2}c^{\alpha_{m-3}}\dots c^{\alpha_2}W_1c^{\alpha_1}W_0c.$$

Индукцией по t докажем, что W_t равно W_0 в полугруппе S. Предположим, что $m\ge t>0$ и при любом $t>i\ge 0$: W_i равно W_0 в полугруппе S.

Полагаем: при $t<m$ Z_0 — это слово

$$cW_mc^{\alpha_m}W_{m-1}c^{\alpha_{m-1}}W_{m-2}c^{\alpha_{m-3}}\dots c^{\alpha_{t+3}}W_{t+2}c^{\alpha_{t+2}}W_{t+1}c^{\alpha_{t+1}-1},$$

а при $t=m$ Z_0 — это пустое слово. Тогда для некоторого слова U в свободной полугруппе S_3 выполнено равенство $cAcX_0cBc = Z_0cU$. Поэтому существуют такие слова X_1, X_2 и X_3, что выполняется равенство

$$cAcX_0cBc = Z_0cX_1A_iX_2cX_1B_iX_2cX_3 = Z_0cW_tc^{\alpha_t}\dots c^{\alpha_2}W_1c^{\alpha_1}W_0c.$$

1) Если в слова X_1 и X_2 не входит буква c (они элементы полугруппы S_2), то

$$W_t = X_1A_iX_2 \text{ и } W_{t-1} = X_1B_iX_2.$$

Тогда W_t равно W_{t-1} в полугруппе S, а по индуктивному предположению W_{t-1} равно W_0 в полугруппе S. Значит W_t равно W_0 в полугруппе S.

2) Если в слово X_1 входит буква c, то существует такое слово X_{1r} полугруппы S_3, что

$$cX_1 = cW_tcX_{1r}.$$

Поэтому существует $j<t$ такое, что $W_t = W_j$. По индуктивному предположению W_j равно W_0 в полугруппе S. Значит W_t равно W_0 в полугруппе S.

3) Предположим, что буква c не входит в слово X_1, но входит в слово X_2. В этом случае существует такое слово X_{2l} полугруппы S_2 и такое слово X_{2r} полугруппы S_3, что

$$X_2 = X_{2l}cX_{2r},\quad cW_tc = cX_1A_iX_{2l}c\quad W_t = X_1A_iX_{2l}.$$

Существует $j<t$ такое, что $cX_1B_iX_{2l}c = cW_jc$. Значит $X_1B_iX_{2l} = W_j$. По индуктивному предположению W_j равно W_0 в полугруппе S. Значит W_t равно W_0 в полугруппе S.

□

Для удаления из формулы знака дизъюнкции $\vee$ воспользуемся обозначениями и результатами работы [7]. Следуя этой работе полагаем для произвольного слова w $\langle w\rangle = wawb$. В цитируемой работе доказана эквивалентность для произвольной полугруппы S_m $(m\ge 2)$

$$\bigvee_{i=1}^{n} W = W_i \iff (\exists Z)(\exists Z')U = ZVZ',$$
$$\text{где } v = WW_1\dots W_n,\quad V = \langle v\rangle^2W\langle v\rangle^2,\quad U = \langle v\rangle^2W_1\langle v\rangle^2W_2\langle v\rangle^2\dots\langle v\rangle^2W_n\langle v\rangle^2.$$

Легко видеть, что $Z, Z' \subseteq U$. Это дает возможность по формуле $\Phi'_S(X,Y)$ построить формулу $\Phi_S(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{z\le t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2} w = v,$$
$$\text{где } t = cXcx,\ t_1 = cXcxcYc,\ t_2 = U$$

такую, что для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S

$\iff$ на полугруппе S_3 истинна формула $\Phi_S(A,B)$.

Взяв в качестве полугруппы S полугруппу с непустыми определяющими словами и с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства непустому слову B, а в качестве формулы $\Phi_S(X)$ — формулу $\Phi_S(X,B)$, получим

Теорема 3. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул $\Phi_S(X)$ с параметром X вида*

$$(\exists x)(\forall z)_{z\le t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2}$$
$$w(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c) = u(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A, элементу свободной полугруппы S_2, определить, истинна ли на свободной полугруппе S_3 позитивная формула $\Phi_S(A)$.

Заметим, что в рассматриваемых формулах только один неограниченный квантор $\exists$, а *вопрос об истинности на произвольной свободной полугруппе S_m формул, в кванторных приставках которых все кванторы ограниченные, и произвольной бескванторной частью алгоритмически разрешим.*

По произвольной конечно определенной полугруппе

$$S = \langle\, a,b \,|\, A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n \,\rangle$$

без пустых определяющих слов построим формулу ${\Phi'_S}^{\omega}(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{zc\le cXcx}(\exists x_1)_{x_1\subseteq cXcxcYc}(\exists x_2)_{x_2\subseteq cXcxcYc}(\exists x_3)_{x_3\subseteq cXcxcYc}$$
$$(\bigvee_{i=1}^{2n} cXcxcYc = zcx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

где при любом $1\le j\le n$: $A_{n+j} = B_j$ и $B_{n+j} = A_j$.

Доказательство следующей леммы проходит по той же схеме, что и доказательство лемм 2 и 1.

Лемма 3. *Для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность*

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S

$\iff$ *на полугруппе S_ω истинна формула ${\Phi'_S}^{\omega}(A,B)$.*

По той же схеме, что и выше, из формулы ${\Phi'_S}^{\omega}(A,B)$ удаляем знак дизъюнкции $\vee$. Получим формулу ${\Phi_S}^{\omega}(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{zc\le t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2} w = v,$$
$$\text{где } t = cXcx,\ t_1 = cXcxcYc,\ t_2 = U$$

такую, что для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S
$\iff$ *на полугруппе S_ω истинна формула ${\Phi_S}^{\omega}(A,B)$.*

Взяв в качестве полугруппы S полугруппу с непустыми определяющими словами и с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства непустому слову B, а в качестве формулы ${\Phi_S}^{\omega}(X)$ — формулу ${\Phi_S}^{\omega}(X,B)$, получим

Теорема 4. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул ${\Phi_S}^{\omega}(X)$ с параметром X вида*

$$(\exists x)(\forall z)_{zc\le t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2}$$
$$w(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c) = u(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A, элементу свободной полугруппы S_2, определить, истинна ли на свободной полугруппе S_ω позитивная формула ${\Phi_S}^{\omega}(A)$.

Заметим, что в рассматриваемых формулах только один неограниченный квантор $\exists$, а *вопрос об истинности на произвольной свободной полугруппе S_m формул, в кванторных приставках которых все кванторы ограниченные, и произвольной бескванторной частью алгоритмически разрешим.*

Выше рассматривались формулы, содержащие в виде констант образующие элементы свободных полугрупп (формулы с константами) и основное внимание уделялось возможности упрощения кванторной приставки и бескванторной части путем удаления пропозициональных связок, с сохранением алгоритмической неразрешимости.

Естественно возникает вопрос о возможности удаления констант из бескванторной части формул. Интересные результаты в этом направлении получил Перязев Н.А.: в работе [18] и в ряде других своих работ он доказал, в частности, что при $2 \le n < m$ *позитивные теории свободных моноидов S_n и S_m (свободных полугрупп с единицей) в сигнатуре $\langle\cdot,1,a_1,\ldots,a_{n-2}\rangle$ совпадают,*

при $n \ge 2$ *позитивная теория $Th^+(S_n)$ свободного моноида S_n (свободной полугруппы с единицей) в сигнатуре $\langle\cdot,1,a_1,\ldots,a_{n-2}\rangle$ алгоритмически разрешима, а в сигнатуре $\langle\cdot,1,a_1,\ldots,a_{n-1}\rangle$ алгоритмически неразрешима.*

В частности это означает, что *позитивная формула Φ без констант, т.е. имеющая вид*

$$(Q_1\,x_1)(Q_2\,x_2)\ldots(Q_m\,x_m)\ \bigvee_{i=1}^{k}\ (\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij}(x_1,\ldots,x_m) = u_{ij}(x_1,\ldots,x_m)).$$

истинна на свободном моноиде S_2 (свободной полугруппе с единицей) тогда и только тогда, когда она истинна на любом свободном моноиде S_n $(n \ge 2)$,

позитивная формула Φ без констант истинна на свободном моноиде S_2 тогда и только тогда, когда она истинна на счетнопорожденном свободном моноиде S_ω, *при любом n позитивная теория без констант свободного моноида S_n алгоритмически разрешима.*

Однако *при удалении из бескванторной части формул констант усложняется кванторная приставка*, а при $n = 2$ *нельзя удалить конъюнкцию & и дизъюнкцию* $\vee$ (без использования двух констант).

Нетрудно понять, что справедлива следующая эквивалентность:
позитивная формула Φ с одной константой, имеющая вид

$$(\forall x)(\exists x_1)(\exists x_2)\dots(\exists x_m) \bigvee_{i=1}^{k} \big(\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij}(x, x_1, \dots, x_m, a) = u_{ij}(x, x_1, \dots, x_m, a)\big),$$

истинна на свободном моноиде S_2 тогда и только тогда, когда на нем истинна формула

$$\bigvee_{i=1}^{k} \big(\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij}(b, x_1, \dots, x_m, a) = u_{ij}(b, x_1, \dots, x_m, a)\big).$$

Так как по теореме Г.С. Маканина [9] последний вопрос алгоритмически разрешим, то *позитивная $\forall\exists^m$-теория с одной константой свободного моноида S_2 алгоритмически разрешима при любом m.*

Интересно сравнить этот факт с *алгоритмической неразрешимостью позитивной $\forall\exists^3$-теории с двумя константами свободного моноида S_2* [5].

5. Заключение

В статье доказана алгоритмическая неразрешимость $\exists\forall^2\exists^3$-теории свободной полугруппы счетного ранга, алгоритмическая неразрешимость позитивной $\forall\exists^5$-теории свободной полугруппы ранга 2 с бескванторной частью “простейшего” вида $w = u$ и алгоритмическая неразрешимость позитивной $\exists\forall_{\leq}\exists^5_{\subseteq}$-теории свободной полугруппы ранга 3 с с бескванторной частью “простейшего” вида $w = u$.

Поэтому, на наш взгляд, представляет интерес вопрос об алгоритмической разрешимости $\exists\forall\exists^3$-теории и $\forall^2\exists^3$-теории свободной полугруппы счетного ранга и об алгоритмической разрешимости позитивной $\exists\forall\exists^2$-теории $\exists^2\forall\exists$-теории свободных полугрупп ранга 2 и 3. Заметим, что при любых m и p позитивная $\exists^m\forall^p$-теория любой свободной полугруппы алгоритмически разрешима.

Формула $(\forall x)(\exists y)(xx = x \vee x = ay \vee x = by)$ истинна на свободном моноиде S_2, но ложна на свободном моноиде S_3. Удалив знак дизъюнкции $\vee$, получим формулу вида

$$(\forall x)(\exists y)(\exists y_1)(\exists y_2) w(x, y, y_1, y_2, a, b) = u(x, y, y_1, y_2, a, b),$$

истинную на свободном моноиде S_2, но ложную на свободном моноиде S_3.

Возникает вопрос, *можно ли построить формулу вида*

$$(\forall x)(\exists y)(\exists y_1) w(x, y, y_1, a, b) = u(x, y, y_1, a, b),$$

истинную на свободном моноиде S_2, но ложную на свободном моноиде S_3?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Quine W. Concatenation as a basis for arithmetic // J. Symbolic Logic. 1946. V. 11. P. 105-114.

2. Дурнев В. Г. О позитивной теории свободной полугруппы // В сб.: Вопросы теории групп и полугрупп. Тула: Тульск. гос. пед. ин-т. имени Л.Н. Толстого. 1972. С.122-172.

3. Дурнев В. Г. Позитивная теория свободной полугруппы // ДАН СССР. 1973. Том 211, № 4. С. 772-774.

4. Марченков С. С. Неразрешимость позитивной $\forall\exists$-теории свободной полугруппы // Сиб. матем. журн. 1982. Том 23, № 1. С. 196-198.

5. Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной $\forall\exists^3$-теории свободной полугруппы // Сиб. матем. журн. 1995. Том 36 № 5. С. 1067-1080.

6. Косовский Н. К. Элементы математической логики и ее приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. Ленинград: Изд-во. ЛГУ, 1981. 192 с.

7. Karhumaki J., Mignosi F., Plandowski W. On the expressibility of languages by word equations with a bounded number of variables // Bull. Belg. Math. Soc. 2001. Vol. 8, № 2. P. 293-303.

8. Lothaire M. Algebraic Combinatorics on Words. Cambridge Univ. Press. 2002. 504 p.

9. Маканин Г. С. Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе / Математический сборник. 1977. Том 103(145), № (6). С. 147-236.

10. Тайманов А. Д., Хмелевский Ю.И. Разрешимость универсальной теории свободной полугруппы / Сиб. матем. журн. 1980. Том 21, № 1. С. 228-230.

11. Мерзляков Ю.И. Позитивные формулы на свободных группах // Алгебра и логика. 1966. Том 5, вып. 4. С. 25-42.

12. Важенин Ю.М., Розенблат Б.В. Разрешимость позитивной теории счетнопорожденной полугруппы // Матем. сборник. 1981. 116(158):1(9). С. 120-127.

13. Маканин Г. С. Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы / Изв. АН СССР. Серия матем. 1984. № 2. С. 735-749.

14. Новиков П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп // Труды МИАН. 1955. Том 44.

15. Борисов В.В. Простые примеры групп с неразрешимой проблемой тождества // Матем. заметки. 1969. Том 6, вып. 5. С. 521-532.

16. Матиясевич Ю.В. Простые примеры неразрешимых ассоциативных исчислений // Докл. АН СССР. 1967. Том 173, № 6. С. 1264-1266.

17. Schulz Klaus U. Makanin's Algorithm — Two Improvements and a generalization // Habilitationsschrift. Wilhelm-Schickard-Institut fur Informatik. 1990. 106 p.

18. Перязев Н.А. О позитивной эквивалентности свободных полугрупп. Иркутск, изд-во. Иркутского ВЦ СО АН СССР. 1986.14 с.

REFERENCES

1. Quine W. 1946, “Concatenation as a basis for arithmetic.”, textitJ. Symbolic Logic., vol. 11, pp. 105–114.

2. Durnev, V. G. 1972, “The positive theory of a free semi-ussian).

3. Durnev, V. G. 1973, “A positive theory of a free semi-group”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 211, no. 4, pp. 772–774 (in Russian).

4. Marchenkov, S. S. 1982,"Unsolvability of positive $\forall\exists$-theory of free semi-group", *Siberian Math. J.*, vol. 23, no. 1, pp. 196–198 (in Russian).

5. Durnev, V. G. 1995, "Undecidability of the positive $\forall\exists^3$-theory of a free semi-group", *Siberian Math. J.*, vol. 36, no. 5, pp. 917–929.

6. Kosovsky, N. K. 1981, *Elements of Mathematical Logic and Its Application to the Theory of Subrecursive Algorithms*, LSU Publ., Leningrad, 192 pp. (in Russian).

7. Yu. M. Vazhenin, Yu. M. and Rozenblat, B. V. 1983, "Decidability of the positive theory of a free countably generated semigroup", *Math. USSR-Sb.*, vol. 44, no. 1, pp. 109–116.

8. Merzlyakov, Yu. I. 1966, "Positive formulae over free groups", *Algebr Logic*, vol. 5, no. 4, pp. 25-42 (in Russian).

9. Schulz, K. U. 1990, "Makanin's Algorithm — Two Improvements and a generalization", in: *Word Equations and Related Topics. IWWERT 1990. Lecture Notes in Computer Science*, ed. by Schulz K.U., vol. 572. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 85-150.

10. Lothaire, M. 2002, *Algebraic Combinatorics on Words.* Cambridge Univ. Press. 2002. 504 pp.

11. Karhumaki, J., Mignosi, F., and Plandowski W. 2001, "On the expressibility of languages by word equations with a bounded number of variables", *Bull. Belg. Math. Soc.*, vol. 8, no 2, pp. 293–303.

12. Makanin, G. S. 1977, "The problem of solvability of equations in a free semigroup", *Math. USSR-Sb.*, vol. 32, no. 2, pp. 129-198

13. Novikov, P. S. 1958, "Algorithmic Unsolvability of the Word Problem in Group Theory", *J. Symb. Logic*, vol. 23, no. 1, pp. 50-52.

14. Borisov, V. V. 1969, "Simple examples of groups with unsolvable word problem", *Math. Notes*, vol. 6, no. 5, pp. 768–775.

15. Matiyasevich, Yu. V. 1967, "Simple examples of undecidable associative calculi", *Soviet Math. Dokl.* vol. 8 pp. 555–557.

16. Taimanov, A. D. and Hmelevskii, Ju. I., 1980, "Decidability of the universal theory of a free semigroup", *Siberian Math. J.*, vol. 21, no. 1, pp. 228–230 (in Russian).

17. Makanin, G. S., 1985, "Decidability of the universal and positive theories of a free group", *Math. USSR Izv.*, vol. 25, no. 1, pp. 75-88.

18. Peryazev, N.A. On positive equivalence of free semi-groups. Irkutsk. Publishing House of Irkutsk VC SO Academy of Sciences of the USSR. 1986. 14 p.

Получено 24.04.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 519.6, 51.7 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-72-84

Дискретный подход к решению вариационной задачи теории функционала плотности в реальном пространстве

В. Г. Заводинский, О. А. Горкуша

Виктор Григорьевич Заводинский — доктор физико-математических наук, профессор, Институт материаловедения Хабаровского научного центра ДВО РАН (г. Хабаровск).
e-mail: 684bmts@rambler.ru
Ольга Александровна Горкуша — кандидат физико-математических наук, Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН (г. Хабаровск).
e-mail: 684bmts@rambler.ru

Аннотация

Разработан метод решения вариационной задачи функциональной теории плотности в рамках безорбитального подхода с обобщенной градиентной аппроксимацией. Способ основан на вычислении потенциала обмена-корреляции с использованием итеративной процедуры. Расчеты испытаний для двухатомных систем показали, что наш подход позволяет найти энергию связывания атомов и равновесное межатомное расстояние в димерах примерно с той же точностью, что и метод Кон-Шама, но гораздо быстрее.

Ключевые слова: безорбитальный метод, функционал плотности, GGA–потенциал.

Библиография: 21 названий.

Для цитирования:
В. Г. Заводинский, О. А. Горкуша. Дискретный подход к решению вариационной задачи теории функционала плотности в реальном пространстве // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 72–84.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 519.6, 51.7 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-72-84

A discrete approach for solving the variation problem of the density functional theory in real space

V. Zavodinsky, O. Gorkusha

Victor Grigorievich Zavodinsky — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute for Material Studies, Khabarovsk Division, Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Khabarovsk).
e-mail: 684bmts@rambler.ru
Olga Alexandrovna Gorkusha — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (Khabarovsk).
e-mail: 684bmts@rambler.ru

Abstract

The author has developed a method of solving the variation problem of the density functional theory within the framework of the orbital-free approach with the generalized gradient approximation. The method is based on calculating the exchange -correlation potential using an iterative procedure. Test calculations for two-atom systems have shown that our approach allows the coupling energy of atoms and equilibrium interatomic distance in dimers to be found with about the same accuracy as the Kohn-Sham method, but much faster.

Keywords: orbital–free, density functional, GGA–potential.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
V. Zavodinsky, O. Gorkusha, 2020, "A discrete approach for solving the variation problem of the density functional theory in real space" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 72–84.

1. Введение

Теория функционала плотности (ТФП) является одним из подходов к нахождению решения задач квантовой механики для многоатомных систем [1]. Основным положением ТФП является утверждение о том, что стационарное состояние квантовой системы определяется ее равновесной электронной плотностью $\rho(r)$ $(r \in \mathbb{R}^3)$, которая минимизирует функционал электронной энергии данной системы E_{el} :

$$E_{el}[\rho] = \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon(\rho) dr \tag{1}$$

при условии постоянства количества электронов $N_{el} = \int \rho(r) dr$ в системе, то есть удовлетворяет вариационному уравнению

$$\delta \left\{ \int \varepsilon(\rho) dr - \int \mu(r)\rho(r) dr \right\} = \int \frac{\partial}{\partial \rho} \big(\varepsilon(\rho) - \mu(r)\rho\big) \delta\rho(r) dr = 0, \tag{2}$$

из которого следует

$$\frac{\partial \varepsilon(\rho)}{\partial \rho} - \mu(r) = 0. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon(\rho)$— плотность полной электронной энергии, $\mu(r)$— так называемый химический потенциал электрона, то есть потенциал одного электрона в системе. Для бесконечных квантовых систем μ— константа, для конечных же систем (электронная плотность которых стремится на бесконечности к нулю) $\mu = \mu(r)$ есть функция координат. Величина $\varepsilon(\rho)$ складывается из нескольких частей:

$$\varepsilon(\rho) = V(r)\rho(r) + \frac{1}{2}\varphi(r)\rho(r) + \varepsilon_{kin}(\rho) + \varepsilon_{ex-c}(\rho), \tag{4}$$

где $V(r)$ — внешний потенциал, $\varphi(r) = \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dr'$ — электростатический потенциал Хартри, $\varepsilon_{kin}(\rho)$ и $\varepsilon_{ex-c}(\rho)$ — плотности кинетической и обменно–корреляционной энергий. Используя (3) и (4), получаем

$$V(r) + \varphi(r) + \mu_{kin}(r) + \mu_{ex-c}(r) - \mu(r) = 0,$$
$$\mu_{kin}(r) = \frac{\partial \varepsilon_{kin}(\rho)}{\partial \rho}, \mu_{ex-c}(r) = \frac{\partial \varepsilon_{ex-c}(\rho)}{\partial \rho}. \tag{5}$$

В отличие от других составляющих энергии, для которых существуют точные или приближенные математические представления в виде функций плотности, кинетическая энергия до настоящего времени не имеет удовлетворительного описания в терминах плотности. В рамках подхода Кона и Шэма (КШ)[2] ее вычисляют, используя волновые функции (орбитали), и таким образом проблема решения вариационной задачи фактически снимается. Однако в последние два десятилетия интерес к развитию ТФП без использования волновых орбиталей заметно оживился, поскольку он сулит возможность описания свойств систем, содержащих сотни тысяч и даже миллионы атомов. Большинство групп, работающих в данном направлении, пытаются найти и использовать некие универсальные функционалы кинетической энергии [3]–[8]. Однако в недавних работах [9, 10] было показано, что универсальных функционалов кинетической энергии существовать не может. Поэтому мы в своих работах по развитию безорбитального подхода (БО) пошли по пути поиска функционалов кинетической энергии, индивидуальных для каждого типа атомов (т. е. для каждого химического элемента). Таким образом нам удалось построить подход к моделированию атомных систем — сначала в приближении псевдопотенциалов [11]–[15], а затем и для полных потенциалов, соответствующих реальным, многоэлектронным атомам [16].

В перечисленных работах [11]–[16] при вычислении обменно–корелляционной энергии мы ограничивались приближением локальной плотности (Local Density Approximation, LDA), которое соответствует случаям, когда электронная плотность в системе слабо зависит от координат. А именно, мы использовали формулы [2], [3]:

$$\varepsilon_{ex-c}(\rho) = -\frac{3}{4\pi}(3\pi^2\rho)^{1/3} + \begin{cases} \gamma(1+\beta_1\sqrt{r_s}+\beta_2 r_s)^{-1}, & r_s \geq 1; \\ A\ln(r_s) + B + Cr_s\ln(r_s) + Dr_s, & r_s < 1, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$r_s = \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}}, \gamma = -0.1423, \beta_1 = 1.0529, \beta_2 = 0.3334,$$
$$A = 0.0311, B = -0.048, C = 0.002, D = -0.0116.$$

Однако это приближение плохо работает для атомов с сильно локализованными электронами (типа B, C, N,O) и еще хуже для атомов с d–электронами (типа переходных металлов). В этих случаях необходимо использование приближения, содержащего производные плотности (градиенты) (Generalized Gradient Approximation, GGA)[9]. Возникающая при этом необходимость нахождения производных плотности приводит к большим вычислительным проблемам, которые усугубляются тем, что при решении вариационной задачи мы имеем дело не только с обменно–корелляционной энергией $\varepsilon_{ex-c}(\rho)$, но и с ее производной по плотности, то есть с обменно–корреляционным потенциалом, содержащим вторые производные плотности:

$$\varepsilon_{ex-c}(\rho) = \varepsilon_{ex}(\rho) + \varepsilon_c(\rho);\ \varepsilon_{ex}(\rho) = \rho(r)\varepsilon_{ex}^{unif}F_{ex},\ \varepsilon_c(\rho) = \rho(r)(\varepsilon_c^{unif} + H), \tag{7}$$

где

$$\varepsilon_{ex}^{unif} = \frac{-3k_{F_{ex}}}{4\pi},\ k_{F_{ex}} = (3\pi^2\rho(r))^{1/3};$$
$$F_{ex} = 1 + k - \frac{k}{1+\nu s^2/k},\ s = \frac{|\nabla\rho(r)|}{2k_{F_{ex}}\rho(r)}, k = 0.804, \nu = \frac{\beta\pi^2}{3}, \beta = 0.066725;$$
$$\varepsilon_c^{unif} = -2a(1+a_1 r_s)\ln\left(1+\frac{1}{\varsigma}\right),\ \varsigma = 2a(\beta_1 + \beta_2 r_s + \beta_3 r_s^{3/2} + \beta_4 r_s^2), r_s = \left(\frac{3}{4\pi\rho(r)}\right)^{1/3},$$
$$a = 0.0310907,\ \alpha_1 = 0.2137,\ \beta_1 = 7.5957,\ \beta_2 = 3.5876,\ \beta_3 = 1.6382,\ \beta_4 = 0.49294,$$
$$H = \gamma\ln\left(1+\frac{\beta}{\gamma}\frac{1+At^2}{1+AT^2+A^2t^4}t^2\right), A = \frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{1}{\exp(-\varepsilon_c^{unif}/\gamma)-1}, t = \frac{|\nabla\rho(r)|}{2k_s\rho(r)},$$

$$k_s = \sqrt{\frac{4k_{F_{ex}}}{\pi}}, \gamma = \frac{1 - \ln 2}{\pi^2}.$$

Для сравнения мы провели расчеты обменно–корреляционного потенциала с использованием приближений как в GGA, так и в LDA для димера C_2.

В случае LDA вычисление потенциала не вызывает особых сложностей, и может быть проведено в декартовых координатах с необходимой точностью. Вычисление же GGA–потенциала, содержащего градиенты плотности, сталкивается с известной проблемой невысокой точности численного дифференцирования, для преодоления которой необходимо уменьшать шаг дифференцирования: мы используем шаг 0.1 атомной единицы (1 а.е равна 0.0529 нм) и дальнейшее его уменьшение технически невозможно.

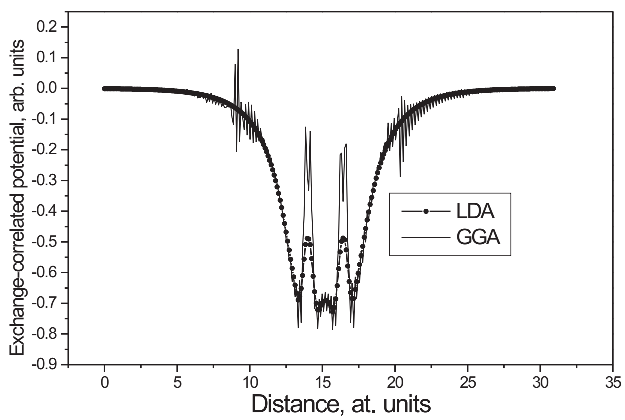


Рис. 1: Сравнение поведения обменно–корреляционного потенциала в приближениях LDA и GGA для димера C_2.

На рис. 1 показано поведение обменно–корреляционного потенциала в LDA и GGA приближениях для димера C_2.

При вычислении градиента $\nabla\rho$, входящего в GGA–потенциал, используется Фурье–преобразование. Из рис. 1 видно, что в случае LDA обменно–корреляционный потенциал ведет себя гладко, а в случае GGA на соответствующей кривой имеются острые пики, обусловленные погрешностями численного дифференцирования. А так как численное решение вариационной задачи (3) находится итерационным способом, то погрешности численного дифференцирования накапливаются в процессе итераций, что приводит к расходимости итерационного процесса.

Поэтому для вычисления GGA–потенциала и его использование в итерационной процедуре мы разработали специальную (дискретную) методику.

2. Дискретное вычисление GGA–потенциала

Обозначим через $F\bigl(\rho(r)\bigr)$ полный потенциал атомной системы, состоящей из N_{at} атомов, в которой n–атом расположен в точке $R_n \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ и относится к типу T_n (тип — это химический элемент):

$$F\bigl(\rho(r)\bigr) = \sum_{n}^{N_{at}} \frac{Z(T_n)}{|r - R_n|} + \varphi(r) + \mu_{kin}(\rho) + \mu_{ex-c}(\rho), \tag{8}$$

где n — номер атома в системе, $Z(T_n)$ — полный ядерный заряд атома с номером n. Перепишем вариационную задачу (3) в терминах $F\big(\rho(r)\big)$:

$$F\big(\rho(r)\big) - \mu(r) = 0. \tag{9}$$

Наша цель — найти плотность ρ, которая удовлетворяет этому соотношению. Для нахождения $\rho(r)$ будем использовать метод последовательных приближений (метод простых итераций):

$$\rho(r;i) = \begin{cases} \rho(r;i-1) + K \cdot F(r;i-1)\rho(r;i-1), & i = 1; \\ \rho(r;i-1) + K \cdot \big(F(r;i-1) - \mu(r;i-1)\big)\rho(r;i-1), & i > 1. \end{cases} \tag{10}$$

где $\rho(r;i)$ — плотность на i–итерации, K — параметр, контролирующий процедуру сходимости, а в качестве химического электронного потенциала $\mu(r;i)$ берется среднее значение полного потенциала, вычисленного на итерациях i и $i-1$:

$$\mu(r;i) = \frac{1}{2}\big(F(r,i) + F(r,i-1)\big),\ i \geq 1. \tag{11}$$

На нулевой итерации плотность системы задается как сумма сферических плотностей одиночных невзаимодействующих атомов

$$\rho(r;0) = \sum_n^{N_{at}} \rho_{sphere}(n;|r - R_n|), \tag{12}$$

где $\rho_{sphere}(n;radius)$ — равновесная плотность атома с номером n, заданная в сферической системе координат. Найти атомные плотности можно при помощи любой программы, обеспечивающей нахождение равновесного состояния одиночного атома в рамках полноэлектронного метода КШ. Мы использовали для этих целей пакет FHI98pp [18].

Теперь вычислим полный потенциал атомной системы $F(r;i)$, $i \geq 0$. Вычисляя на нулевой итерации $F(r;i)$, воспользуемся аддитивностью электростатического потенциала [17]. Поэтому, согласно (8)

$$F(r;0) = \sum_n^{N_{at}} \frac{Z(T_n)}{|r - R_n|} + \sum_n^{N_{at}} \varphi\big(\rho_{sphere}(n;|r - R_n|)\big) + \mu_{kin}(\rho(r;0)) + \mu_{ex-c}(\rho(r;0)). \tag{13}$$

Для нахождения кинетического потенциала используется подход, описанный в работе [16], в основе которого лежат расчеты одиночных атомов методом КШ и использование для них условия $F\big(\rho(r)\big) = 0$. Для нахождения $\mu_{ex-c}(\rho(r;0))$ запишем равенство (12) в виде:

$$\rho(r;0) = \rho_{sphere}\big(n(r);|r - R_{n(r)}|\big) + \Delta\rho(r;0), \tag{14}$$

где $n(r)$ — номер ближайшего к точке r атома. Тогда $\Delta\rho(r;0) \ll \rho_{sphere}\big(n(r);|r - R_{n(r)}|\big)$. Представляя $\mu_{ex-c}\big(\rho(r;0)\big)$ в виде ряда Тейлора по функции $\rho(r;0)$, в каждой точке $r \in \Omega$, получаем

$$\mu_{ex-c}\big(\rho(r;0)\big) = \mu_{ex-c}\big(\rho_{sphere}\big) + \frac{d\mu_{ex-c}(\rho)}{d\rho}\bigg|_{\rho_{sphere}} \cdot \Delta\rho(r;0) + o\big((\Delta\rho(r;0))^2\big) \tag{15}$$

— в этой формуле $\rho_{sphere} = \rho_{sphere}\big(n(r);|r - R_{n(r)}|\big)$, $\frac{d\mu_{ex-c}(\rho)}{d\rho}$ вычисляется в сферической системе координат и $\mu_{ex-c}\big(\rho_{sphere}\big)$ вычисляется по формулам (5) и (7).

На последующих итерациях $i \geq 1$, согласно (8) и (10)

$$F(r;i) = \sum_n^{N_{at}} \frac{Z(T_n)}{|r - R_n|} + \varphi\big(\rho(r;i-1)\big) + \varphi\big(\Delta\rho(r;i)\big) + \mu_{kin}\big(\rho(r;i)\big) + \mu_{ex-c}\big(\rho(r;i)\big), \tag{16}$$

где

$$\Delta\rho(r;i) = K\cdot F(r;i-1)\rho(r;i-1)\cdot[i=1] + K\cdot\big(F(r;i-1)-\mu(r;i-1)\big)\cdot[i>1] \qquad (17)$$

(запись $[A]$ означает значение логического выражения A).

Алгоритм вычисления слагаемых $\varphi\big(\Delta\rho(r;i)\big)$ и $\mu_{kin}\big(\rho(r;i)\big)$ изложено в работах [17] и [16]. Здесь мы остановимся на вычислении $\mu_{ex-c}\big(\rho(r;i)\big)$ в GGA–приближении.

Плотность $\rho(r;i)$ не является суммой сферических плотностей — разложим GGA-потенциал в ряд Тейлора по функции ρ, используя (10) и (17), и вычисляя $\frac{d\mu_{ex-c}(\rho)}{d\rho}$ в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}\mu_{ex-c}\big(\rho(r;i)\big) &= \mu_{ex-c}\big(\rho(r;i-1)+\Delta\rho(r;i)\big) = \\ &= \mu_{ex-c}\big(\rho(r;i-1)\big) + \frac{d\mu_{ex-c}(\rho)}{d\rho}\bigg|_{\rho(r;i-1)}\cdot\Delta\rho(r;i) + o\big((\Delta\rho(r,i))^2\big).\end{aligned} \qquad (18)$$

Поставим в соответствие итерационным соотношениям (10)–(18) дискретный аналог.

Зададим в расчетной области $\Omega\in\mathbb{R}^3$ две сетки $Sph^s(\Omega)$, $Cart^h(\Omega)$:

$$Sph^s(\Omega) = \bigcup_{n}^{N_{at}} Sph^s(\Omega,n),$$

$$Sph^s(\Omega,n) = \{R_n + (r_{ir}\sin\theta_j\cos\varphi_j, r_{ir}\sin\theta_j\sin\varphi_j, r_{ir}\cos\theta_j) | ir = \overline{1,N_{radius}}, j=\overline{1,N_{rays}}\},$$
$$Cart^h(\Omega) = \{(kh,lh,mh)|k,l,m=\overline{1,N_{cart}}\},$$

где последовательность радиусов $\{r_{ir}\}_{ir=1}^{N_{radius}}$ ($r_{ir}>0$) — геометрическая прогрессия с шагом $s>1$, последовательности углов $\{\theta_j\}_{j=1}^{N_{rays}}$, $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_{rays}}$, получены разбиением сферы с помощью вписанного икосаэдра, а затем дроблением граней икосаэдра на более мелкие грани. Построенные таким образом сетки $Sph^s(\Omega;n)$ обладают однородностью — все вершины имеют одинаковое число соседей [20].

Введем обозначение: $I_n(f)$ — интерполяционный полином для функции f, совпадающий с f в n точках из множества $\mathfrak{I}$.

В каждом узле (n,ir,j) сетки $Sph^s(\Omega)$ разностное уравнение, соответствующее (15), представим в виде

$$[\mu_{ex-c}(\rho)]_{n,ir,j} = [\mu_{ex-c}(\rho_{sphere})]_{n,ir} + \frac{[\mu_{ex-c}(\rho_{sphere})]_{n,ir+1} - [\mu_{ex-c}(\rho_{sphere})]_{n,ir}}{[\rho_{sphere}]_{n,ir+1} - [\rho_{sphere}]_{n,ir}}\cdot[\Delta\rho]_{n,ir,j}, \quad (19)$$

где, согласно (10) и (14)

$$\begin{aligned}[\Delta\rho]_{n,ir,j} &= [\rho]_{n,ir,j} - [\rho_{sphere}]_{n(r_{ir}),ir}, \\ [\rho]_{n,ir,j} &= [\rho_{sphere}]_{n,ir} + \sum_{\substack{n'\neq n \\ ir':|(n,ir,j)-R_{n'}|\in[r(ir'),r(ir'+1)] \\ \mathfrak{I}=\{ir'-1,ir',ir'+1\}}} I_3\big(\rho_{sphere}(n';radius)\big).\end{aligned} \qquad (20)$$

В узлах (k,l,m) декартовой сетки $Cart^h(\Omega)$ GGA–потенциал и $\Delta\rho$ вычислим следующим образом. Положим

$$N(k,l,m) = \#\{(n,ir,j)|(n,ir,j)\in\Pi_h(k,l,m)\},$$

где $\Pi_h(k,l,m)$ куб с длиной стороны, равной h, и с центром в точке (kh,lh,mh). Определим также множество $\wp(k,l,m)$ — множество ближайших к вершинам куба $\Pi_h(k,l,m)$ узлов из сетки $Sph^s(\Omega)$. Тогда на 0–итерации возьмем значения GGA–потенциала и $\Delta\rho$ в узлах декартовой сетки как средние значения в соответствующих областях:

- Если $N(k,l,m) > 0$, то

$$
\begin{aligned}
[\mu_{ex-c}(\rho)]^0_{k,l,m} &= \frac{1}{N(k,l,m)} \sum_{(n,ir,j)\in\Pi_h(k,l,m)} [\mu_{ex-c}(\rho)]_{n,ir,j}, \\
[\Delta\rho]^0_{k,l,m} &= \frac{1}{N(k,l,m)} \sum_{(n,ir,j)\in\Pi_h(k,l,m)} [\Delta\rho]_{n,ir,j}.
\end{aligned} \tag{21}
$$

- В противном случае

$$
\begin{aligned}
[\mu_{ex-c}(\rho)]^0_{k,l,m} &= \frac{1}{8} \sum_{(n,ir,j)\in\wp(k,l,m)} [\mu_{ex-c}(\rho)]_{n,ir,j}, \\
[\Delta\rho]^0_{k,l,m} &= \frac{1}{8} \sum_{(n,ir,j)\in\wp(k,l,m)} [\Delta\rho]_{n,ir,j}
\end{aligned} \tag{22}
$$

(верхние индексы в величинах в правых частях равенств указывают на номер итерации). Плотность ρ на нулевой итерации в узлах декартовой сетки находится по формуле (12):

$$
[\rho]^0_{k,l,m} = \sum_{\substack{n \\ ir:|(k,l,m)-R_n|\in[r(ir),r(ir+1)] \\ \Im=\{ir-1,ir,ir+1\}}} I_3\big(\rho_{sphere}(n;radius)\big). \tag{23}
$$

Как видим, на нулевой итерации в разностных формулах (19)–(22) обменно–корреляционный GGA–потенциал зависит от GGA–потенциала отдельного атома $\mu_{ex-c}(\rho_{sphere})$. Он находится с высокой точностью в сферической системе координат, поскольку сама плотность одного атома зависит только от радиуса сферы с центром в точке расположения атома, и в областях с большим градиентом плотности (вблизи расположения атома) шаг изменения радиуса очень мал.

Для вычисления GGA–потенциала на итерации с номером $i \geqslant 1$ обратимся к соотношениям (12), (13), (16)–(18). Положим

$$
[\mu_{ex-c}(\rho)]^{-1}_{k,l,m} = \sum_{\substack{n \\ ir:|(k,l,m)-R_n|\in[r(ir),r(ir+1)] \\ \Im=\{ir-1,ir,ir+1\}}} I_3\big(\mu_{ex-c}(\rho_{sphere}(n;radius))\big).
$$

Тогда разностные уравнения, соответствующие соотношениям (18), (17), (16), (13), (11) запишем в виде

$$
[\mu_{ex-c}(\rho)]^i_{k,l,m} = [\mu_{ex-c}(\rho)]^{i-1}_{k,l,m} + \frac{[\mu_{ex-c}(\rho)]^{i-1}_{k,l,m} - [\mu_{ex-c}(\rho)]^{i-2}_{k,l,m}}{[\Delta\rho]^{i-1}_{k,l,m}} \cdot [\Delta\rho]^i_{k,l,m}; \tag{24}
$$

$$
\big[\Delta\rho\big]^i_{k,l,m} = K \cdot [F]^{i-1}_{k,l,m} \cdot [\rho]^{i-1}_{k,l,m}[i=1] + K\big([F]^{i-1}_{k,l,m} - [\mu]^{i-1}_{k,l,m}\big)[\rho]^{i-1}_{k,l,m}[i>1]; \tag{25}
$$

$$
\big[\rho\big]^i_{k,l,m} = \big[\rho\big]^{i-1}_{k,l,m} + [\Delta\rho]^i_{k,l,m};
$$

$$
\big[F\big]^i_{k,l,m} = \sum_n^{N_{at}} \frac{Z(A_n)}{|(k,l,m)-R_n|} + [\varphi]^i_{k,l,m} + [\mu_{ex-c}(\rho)]^i_{k,l,m} + [\mu_{kin}(\rho)]^i_{k,l,m}, \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
\big[F\big]^0_{k,l,m} &= \sum_n^{N_{at}} \frac{Z(A_n)}{|(k,l,m)-R_n|} + [\varphi]^0_{k,l,m} + [\mu_{ex-c}(\rho)]^0_{k,l,m} + [\mu_{kin}(\rho)]^0_{k,l,m}, \\
\big[\varphi\big]^0_{k,l,m} &= \sum_{\substack{n \\ ir:|(k,l,m)-R_n|\in[r(ir),r(ir+1)] \\ \Im=\{ir-1,ir,ir+1\}}} I_3\big(\varphi_{sphere}(n;radius)\big); \\
\big[\mu\big]^i_{k,l,m} &= \begin{cases} [F]^0_{k,l,m}, & i=1; \\ \frac{1}{2}\big([F]^i_{k,l,m}+[F]^{i-1}_{k,l,m}\big), & i>1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{27}
$$

При вычислении $\big[F\big]^0_{k,l,m}$ используется $\varphi_{sphere}(n;radius)$ — потенциал Хартри атома с номером n, заданный в сферической системе координат. Найти его можно также, как равновесную плотность одного атома при помощи любой программы, обеспечивающей нахождение равновесного состояния одиночного атома в рамках полноэлектронного метода КШ. Как мы говорили, для этих целей использовался пакет FHI98pp [18].

Таким образом, задача свелась к нахождению рекуррентных последовательностей

$$
\{[\rho]^i_r\}_{i\geq 0},\ \{[\Delta\rho]^i_r\}_{i\geq 0},\ \{[\mu_{ex-c}(\rho)]^i_r\}_{i\geq 0},\ \{[\mu]^i_r\}_{i\geq 0},\ \{[F]^i_r\}_{i\geq 0}
$$

в каждой точке r декартовой сетки $Cart^h(\Omega)$ в следующем порядке:

- На 0– итерации по формулам (23), (21), (22), (26) вычисляются $[\rho]^0_r$,$[\Delta\rho]^0_r$,$[\mu_{ex-c}(\rho)]^0_r$,$[F]^0_r$.
- На i– итерации ($i>0$) по формулам (25) вычисляются $[\Delta\rho]^i_r$ и $[\rho]^i_r$. Дальше вычисляяются $[\mu_{ex-c}(\rho)]^i_r$, $[F]^i_r$, $[\mu]^i_r$ — соотношения (24), (26), (27).

Предлагаемый нами дискретный подход к вычислению GGA–потенциала был протестирован при решении вариационной задачи (3) для димеров B_2, C_2, N_2, и O_2. В качестве примера на рис. 2 показано поведение величины $F\big(\rho(r)\big)-\mu(r)$ для димера углерода в зависимости от числа итераций с использованием дискретного вычисления GGA–потенциала. Из рисунка видно, что итерационная процедура сходится быстро — уже на третьей итерации величина $F\big(\rho(r)\big)-\mu(r)$ близка к нулю.

На основе этих расчетов были определены равновесные расстояния и величины энергии связи атомов, приведенные в таблице 1.

Для вычисления энергии связи атомов в системе, к полной электронной энергии в (1) необходимо добавить энергию отталкивания атомных ядер E_{rep} :

$$
E_{rep} = \sum_{k,l;k\neq l}^{N_{at}} \frac{Z(T_k)Z(T_l)}{|R_k-R_l|}.
$$

Энергия связи E_b вычисляется по формуле

$$
E_b = \frac{1}{N_{at}}\Big(E_{el}+E_{rep}-\sum_{k=1}^{N_{at}} E^{[k]}_{el}\Big),
$$

где $E^{[k]}_{el}$ — полная энергия одного атома. Для нахождения равновесной энергии связи расстояния между атомами в димере изменялись и проводилась серия расчетов для нахождения минимальной полной энергии.

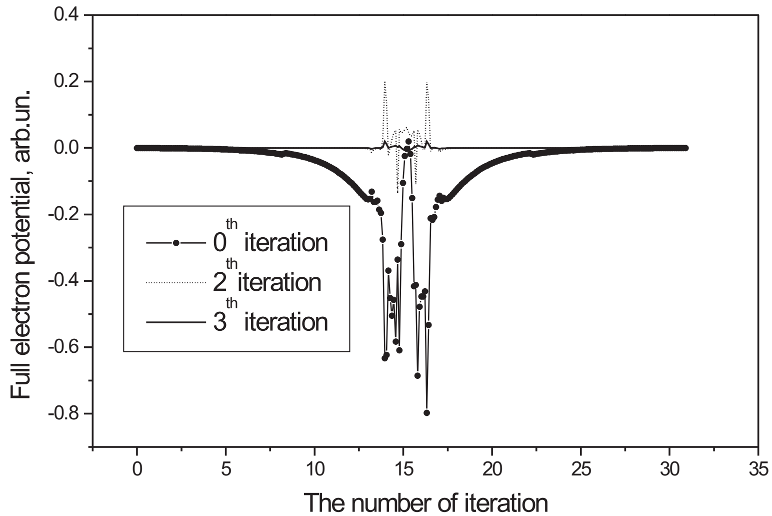


Рис. 2: Поведение $F\big(\rho(r)\big) - \mu(r)$ для GGA–приближения в процессе итераций.

Таблица 1: Равновесные расстояния d(Å) и энергия связи E_b (абсолютное значение) димеров

	Метод	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{C_2}$	$\mathbf{N_2}$	$\mathbf{O_2}$
E_b,eV	БО	1.56	4.50	6.30	7.15
	ELK	2.00	4.69	9.31	3.82
	ЭКСП.	1.60	3.00	5.00	2.60
d_0,Å	БО	1.64	1.16	1.06	1.19
	ELK	1.68	1.25	1.03	1.19
	ЭКСП.	1.59	1.24	1.10	1.15

Примечание. БО — наши безорбитальные расчеты, ELK — расчеты с использованием полноэлектронного пакета ELK методом КШ [19], ЭКСП. — экспериментальные результаты [21].

Из таблицы видно, что результаты БО расчетов согласуются с экспериментальными данными не хуже, чем результаты расчетов по методу КШ.

Одно из главных преимуществ БО подхода заключается в высокой скорости вычислений, которая проявляется в быстрой сходимости решения вариационной задачи. На рис. 3 приведен график величины энергии связи в димере C_2 в зависимости от числа итераций. Из этого рисунка видно, что равновесная энергия связи достигается уже на четвертой итерации. Аналогичные расчеты, проведенные с использованием пакета ELK демонстрируют сходимость энергии только на сороковой итерации. То есть, мы можем говорить о том, что наш подход увеличивает скорость расчетов на порядок.

3. Заключение

Наш дискретный метод продемонстрировал высокую эффективность на примере двухатомных систем. Мы провели сравнение полученных результатов (энергии связи и равновесного

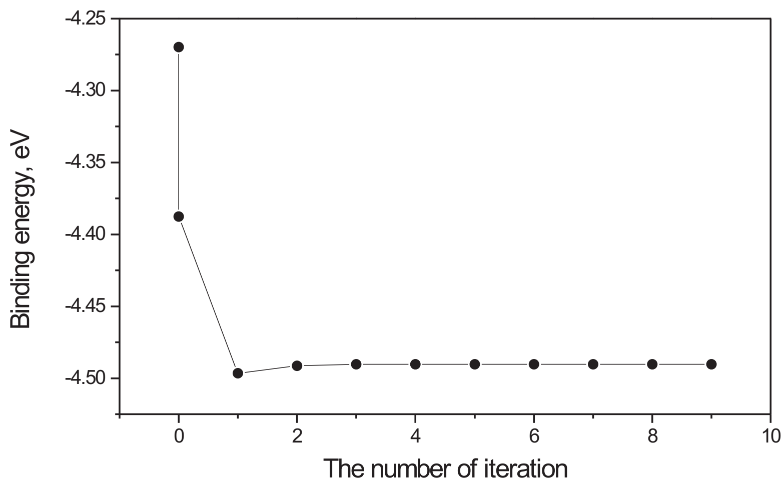


Рис. 3: Зависимость энергии связи от числа итераций.

межатомного расстояния) с экспериментальными данными и полноэлектронными расчетами методом КШ. При тестировании мы убедились, что наш подход позволяет находить энергию связи атомов в димере и равновесное межатомное расстояние примерно с той же точностью, что и полноэлектронный метод КШ, но гораздо быстрее.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hohenberg H., Kohn W. Inhomogeneous Electron Gas// Physical Review. 1964. №136, P. B864–B871.

2. Kohn W., Sham J. L. Self-consistent equations including exchange and correlation effects// Phys. Rev.. 1965. №140. P. A1133–A1138.

3. Garciá- González P., Alvarellos J. E., Chacón E. Nonlocal symmetrized kinetic- energy density functional: Application to simple surfaces// Phys. Rev.. 1998. №57. P. 4857–4862.

4. Gomez S., Gonzalez L. E., Gonzalez D. J., Stott M. J., Dalgic S., Silbert M. J. Orbital free ab initio molecular dynamic study of expanded liquid Cs// Non-Cryst. Solids. 1999. № 250-252. P. 163–167.

5. Wang Y. A, Carter E. A. Orbital- free kinetic- energy density functional theory. In: Theoretical Methods in Condensed Phase Chemistry. Schwartz, S.D.. Ed. Springer, Dordrecht.: 2002. P. 117–184.

6. Huajie Chen, Aihui Zhou. Orbital- free density functional theory for molecular structure calculations// Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications. 2008. №1. P. 1–28.

7. Hung L., Carter E. A. Accurate Simulations of Metals at the Mesoscale: Explicit Treatment of 1 Million Atoms with Quantum Mechanics// Chemical Physics Letters. 2009. №475. P. 163–170.

8. Karasiev V. V., Chakraborty D., Trickey S. B. Progress on New Approaches to Old Ideas: Orbital- Free Density Functionals. In: Many-Electron Approaches in Physics, Chemistry and Mathematics. Mathematical Physics Studies// Eds: Bach V, Delle S. L. Ed. Springer. Dordrecht.: 2014. P. 113–135.

9. Sarry A. M., Sarry M. F. To the density functional theory// Physics of Solid State. 2012. Vol.54. №6. P. 1315–1322.

10. Bobrov V. B., Trigger S. A. The problem of the universal density functional and the density matrix functional theory// Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2013. Vol.116. №4. P. 635–640.

11. Zavodinsky V. G., Gorkusha O. A. A new Orbital-Free Approach for Density Functional Modeling of Large Molecules and Nanoparticles// Modeling and Numerical Simulation of Material Science. 2015. №5. P. 39–47.

12. Zavodinsky V. G., Gorkusha O. A. Development of an orbital free approach for simulation of multiatomic nanosystems with covalent bonds// NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS. 2016. Vol. 7. №3. P. 427–432.

13. Zavodinsky V. G., Gorkusha O. A. Development of the orbital free approach for heteroatomic systems
NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS. 2016. Vol.7. №6. P. 1010–1016.

14. Zavodinsky V. G., Gorkusha O. A. New Orbital Free Simulation Method Based on the Density Functional Theory// Applied and Computational Mathematics. 2017. Vol. 6. №4. P. 189–195.

15. Zavodinsky V. G., Gorkusha O. A. Orbital- free modelling method for materials contained atoms with d- electrons// International Journal of Scientific Research in Computer Science, Engineering and Information Technology. 2018. Vol. 3. №7. P. 57–62.

16. Zavodinsky V. G., Gorkusha O. A. On a possibility to develop a full–potential orbital–free modeling approach// NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS. 2019. Vol. 0. №4. P. 402–409.

17. Gorkusha O. A., Zavodinsky V. G. On the Calculation of the Interaction Potential in Multiatomic Systems// Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol 59. № 2. P. 313-321.

18. Fuchs M., Scheffler M. Ab initio pseudopotentials for electronic structure calculations of polyatomic systems using density-functional theory// Computational Physics Communications. 1999. №119. P. 67–98.

19. URL: http://elk.sourceforge.net.

20. Parthasarathy, V. N., Graichen, C. M., Hathaway, A. F. A comparison of Tetrahedron Quality Measures// Finite Elements in Analesis and Design. Elsevier. 1993. №15. P. 255-261.

21. Huber K. R., Herzberg G. Molecular Spectra and Molecular Structure. IV. Constants of Diatomic Molecules// Litton Educational Publishing. N.Y.: 1979. 732 p.

REFERENCES

1. Hohenberg H., Kohn W. “Inhomogeneous Electron Gas“, *Physical Review*, 1964, no. 136, pp. B864–B871.

2. Kohn W., Sham J. L. “Self-consistent equations including exchange and correlation effects“, *Phys. Rev.*, 1965, no. 140, pp. A1133–A1138.

3. Garciá- González P., Alvarellos J. E., Chaców E. “Nonlocal symmetrized kinetic- energy density functional: Application to simple surfaces“, *Phys. Rev.*, 1998, no. 57, pp. 4857–4862.

4. Gomez S., Gonzalez L. E., Gonzalez D. J., Stott M. J., Dalgic S., Silbert M. J. “Orbital free ab initio molecular dynamic study of expanded liquid Cs“, *Non-Cryst. Solids*, 1999, no. 250-252, pp. 163–167.

5. Wang Y. A, Carter E. A. “Orbital- free kinetic- energy density functional theory“, In: *Theoretical Methods in Condensed Phase Chemistry*, Schwartz, S.D., Ed. Springer, Dordrecht.: 2002, pp. 117–184.

6. Huajie Chen, Aihui Zhou. “Orbital- free density functional theory for molecular structure calculations“, *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, 2008, no. 1, pp. 1–28.

7. Hung L., Carter E. A. “Accurate Simulations of Metals at the Mesoscale: Explicit Treatment of 1 Million Atoms with Quantum Mechanics“, *Chemical Physics Letters*, 2009, no. 475, pp. 163–170.

8. Karasiev V. V., Chakraborty D., Trickey S. B. “Progress on New Approaches to Old Ideas: Orbital- Free Density Functionals“, in: *Many-Electron Approaches in Physics, Chemistry and Mathematics. Mathematical Physics Studies.* Eds: Bach V, Delle S. L. Ed. Springer, Dordrecht.: 2014, pp. 113–135.

9. Sarry A. M., Sarry M. F. “To the density functional theory“, *Physics of Solid State*, 2012, vol. 54, no. 6, pp. 1315–1322.

10. Bobrov V. B., Trigger S. A. “The problem of the universal density functional and the density matrix functional theory”, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2013, vol. 116, no. 4, pp. 635–640.

11. Zavodinsky V. G., Gorkusha O. A. “A new Orbital-Free Approach for Density Functional Modeling of Large Molecules and Nanoparticles“, *Modeling and Numerical Simulation of Material Science*, 2015, no 5, pp. 39–47.

12. Zavodinsky V. G., Gorkusha O. A. “Development of an orbital free approach for simulation of multiatomic nanosystems with covalent bonds“, *NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS*, 2016, vol. 7, no.3, pp. 427–432.

13. Zavodinsky V. G., Gorkusha O. A. “Development of the orbital free approach for heteroatomic systems“, *NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS*, 2016, vol. 7, no. 6, pp. 1010–1016.

14. Zavodinsky V. G., Gorkusha O. A. “New Orbital Free Simulation Method Based on the Density Functional Theory“. *Applied and Computational Mathematics*, 2017, vol. 6, no. 4, pp. 189–195.

15. Zavodinsky V. G., Gorkusha O. A. “Orbital- free modelling method for materials contained atoms with d- electrons“, *International Journal of Scientific Research in Computer Science, Engineering and Information Technology*, 2018, vol. 3, no. 7, pp. 57–62.

16. Zavodinsky V. G., Gorkusha O. A. “On a possibility to develop a full–potential orbital–free modeling approach“, *NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS*, 2019, vol. 10, no. 4, pp. 402–409.

17. Горкуша О. А., Заводинский В. Г. “О вычислении потенциала в многоатомных системах“, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2019, vol. 59, no. 2, pp. 325–333

18. Fuchs M., Scheffler M. “Ab initio pseudopotentials for electronic structure calculations of poly-atomic systems using density-functional theory“, *Computational Physics Communications*, 1999, no. 119, pp. 67–98.

19. URL: http://elk.sourceforge.net.

20. Parthasarathy, V. N., Graichen, C. M., Hathaway, A. F. “A comparison of Tetrahedron Quality Measures“, *Finite Elements in Analesis and Design*,Elsevier, 1993, no. 15, pp. 255-261.

21. Huber K. R., Herzberg G. *Molecular Spectra and Molecular Structure. IV. Constants of Diatomic Molecules.* Litton Educational Publishing, N.Y.: 1979, 732 p.

Получено 11.04.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-85-96

Ограниченный оператор сдвига для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье[1]

В. И. Иванов

Валерий Иванович Иванов — доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В пространствах с весом Данкля $v_k(x)$ степенного типа на $\mathbb{R}^d$, определяемым системой корней и неотрицательной функцией кратности k, инвариантной относительно конечной группы отражений, построен содержательный гармонический анализ. Классический анализ Фурье на евклидовом пространстве соответствует случаю $k \equiv 0$. В 2012 году Салем Бен Саид, Кобаяши и Орстед определили двупараметрическое (k,a)-обобщенное преобразование Фурье, действующее в пространствах с весом $|x|^{a-2}v_k(x)$, $a > 0$. Наиболее интересны случаи $a = 2$ и $a = 1$. При $a = 2$ обобщенное преобразование Фурье совпадает с преобразованием Данкля и оно хорошо изучено. В случае $a = 1$ гармонический анализ, важный, в частности, в задачах квантовой механики, изучен пока еще не достаточно. Одним из существенных элементов гармонического анализа является ограниченный оператор сдвига, позволяющий определить свертку и структурные характеристики функций. При $a = 1$ имеется оператор сдвига $\tau^y f(x)$. Его L^p-ограниченность недавно установлена Салемом Бен Саидом и Делеавалом, но только на радиальных функциях и при $1 \leqslant p \leqslant 2$. В настоящей работе предложен новый оператор обобщенного сдвига $T^t f(x)$. Он получается интегрированием оператора $\tau^y f(x)$ по единичной евклидовой сфере по переменной y', $|y'| = 1$, $y = ty'$. Мы доказываем, что он положителен на функциях из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, для него $T^t 1 = 1$ и он допускает представление с вероятностной мерой. Отсюда мы выводим его L^p-ограниченность для всех $1 \leqslant p < \infty$ и ограниченность на пространстве $C_b(\mathbb{R}^d)$ непрерывных ограниченных функций.

Ключевые слова: $(k,1)$-обобщенное преобразование Фурье, оператор сдвига.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
В. И. Иванов. Ограниченный оператор сдвига для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 85–96.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-85-96

Bounded translation operator for the $(k, 1)$-generalized Fourier transform[2]

V. I. Ivanov

Valery Ivanovich Ivanov — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Institute of Applied Mathematics and Computer Science of the Tula State University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

In spaces with a Dunkl weight $v_k(x)$ of power type on $\mathbb{R}^d$, defined by a root system and a nonnegative multiplicity function k invariant with respect to a finite reflection group, a meaningful harmonic analysis is constructed. that generalizes the Fourier analysis in the Euclidean space. The classical Fourier analysis on the Euclidean space corresponds to the case $k \equiv 0$. In 2012, Salem Ben Saǐd, Kobayashi, and Orsted defined the two-parameteric (k, a)-generalized Fourier transform, acting in spaces with weight $|x|^{a-2}v_k(x)$, $a > 0$. The most interesting cases are $a = 2$ and $a = 1$. For $a = 2$ the generalized Fourier transform coincides with the Dunkl transform and it is well studied. In case $a = 1$ harmonic analysis, which is important, in particular, in problems of quantum mechanics, has not yet been sufficiently studied. One of the essential elements of harmonic analysis is the bounded translation operator, which allows one to determine the convolution and structural characteristics of functions. For $a = 1$, there is a translation operator $\tau^y f(x)$. Its L^p-boundedness was recently established by Salem Ben Saǐd and Deleaval, but only on radial functions and for $1 \leqslant p \leqslant 2$. In this paper, a new generalized translation operator $T^t f(x)$ is proposed. It is obtained by integrating of the operator $\tau^y f(x)$ over the unit Euclidean sphere with respect to the variable y', $|y'| = 1$, $y = ty'$. We prove that it is positive on functions from the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, for it $T^t 1 = 1$ and it admits a representation with a probability measure. From this we deduce its L^p-boundedness for all $1 \leqslant p < \infty$ and boundedness on the space $C_b(\mathbb{R}^d)$ of continuous bounded functions.

Keywords: $(k, 1)$-generalized Fourier transform, translation operator.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
V. I. Ivanov. 2020, "Bounded translation operator for the $(k, 1)$-generalized Fourier transform", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 85–96.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, Δ — оператор Лапласа.

Для преобразования Фурье в $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{F}(y) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, y\rangle}\, dx$$

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

Хов [1] получил спектральное представление

$$\mathcal{F}=\exp\Big(\frac{i\pi d}{4}\Big)\exp\Big(\frac{i\pi}{4}\left(\Delta-|x|^2\right)\Big),$$

используя базис из собственных функций в $L^2(\mathbb{R}^d)$ гармонического осциллятора $\Delta-|x|^2$. Оно оказалось удобным, например, при определении дробной степени преобразования Фурье.

Одним из обобщений преобразования Фурье стало преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$ [2], определяемое с помощью системы корней $R\subset\mathbb{R}^d$, группы отражений $G\subset O(d)$ и функции кратности $k\colon R\to\mathbb{R}$, инвариантной относительно G. Здесь G — конечная группа, порожденная отражениями $\{\sigma_\alpha\colon \alpha\in R\}$, где σ_α — отражение относительно гиперплоскости $(\alpha,x)=0$. Роль оператора Лапласа в гармоническом анализе Данкля играет дифференциально-разностный оператор Δ_k, называемый лапласианом Данкля [3]. Для $k\equiv 0$, $\Delta_k=\Delta$. Лапласиан Данкля позволяет записать гармонический осциллятор Данкля $\Delta_k-|x|^2$ и преобразование Данкля

$$\mathcal{F}_k=\exp\Big(\frac{i\pi}{4}\big(d+\sum_{\alpha\in R}k(\alpha)\big)\Big)\exp\Big(\frac{i\pi}{4}\big(\Delta_k-|x|^2\big)\Big).$$

Дальнейшее обобщение преобразований Фурье и Данкля получено в [4]. Салем Бен Саид, Кобаяши и Орстед [4] определили a-деформированный гармонический осциллятор Данкля

$$\Delta_{k,a}=|x|^{2-a}\Delta_k-|x|^a,\quad a>0,$$

и двупараметрическое семейство унитарных операторов в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$ с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu_{k,a}}=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^p\,d\mu_{k,a}(x)\right)^{1/2},\quad p=2,$$

названное (k,a)-обобщенным преобразованием Фурье:

$$\mathcal{F}_{k,a}=\exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\left(2\lambda_k+a\right)\Big)\exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,\Delta_{k,a}\Big). \tag{1}$$

Здесь

$$\lambda_k=\frac{d}{2}-1+\langle k\rangle,\qquad \langle k\rangle=\frac12\sum_{\alpha\in R}k(\alpha),$$

$$d\mu_{k,a}(x)=c_{k,a}v_{k,a}(x)\,dx,\qquad v_{k,a}(x)=|x|^{a-2}v_k(x),$$

$$v_k(x)=\prod_{\alpha\in R}|\langle\alpha,x\rangle|^{k(\alpha)},\qquad c_{k,a}^{-1}=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|^a/a}v_{k,a}(x)\,dx.$$

Если $a=2$, то (1) — преобразование Данкля. Если $a=2$ и $k\equiv 0$, то (1) — преобразование Фурье. Если $a\neq 2$, то (1) — деформированное преобразование Данкля и деформированное преобразование Фурье. Они могут найти применение в разных задачах. Например, при $a=1$ и $k\equiv 0$ деформированное преобразование Данкля является оператором унитарного обращения модели Шредингера минимального представления группы $O(N+1,2)$ [5].

В гармоническом анализе и теории приближений большую роль играет оператор сдвига, так как он позволяет определить свертку и структурные характеристики функций. В гармоническом анализе Фурье оператор сдвига имеет вид $\tau^y f(x)=f(x+y)$. В гармоническом анализе Данкля оператор сдвига τ^y был определен Реслер для функций из $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,2})$ [6] и Тримеш для бесконечно дифференцируемых функций [7]. В этих пространствах он является ограниченным линейным оператором. Но его ограниченность в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,2})$, $p\neq 2$, доказана только для группы отражений $G=\mathbb{Z}_2^d$. Основная трудность состоит в том, что

τ^y в общем случае не является положительным оператором. Реслер [8] показала, что среднее значение τ^y по сфере
$$T^t f(x)=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\tau^{ty'}f(x)\,d\sigma_k(y'),\quad t\in\mathbb{R}_+,$$
где $\mathbb{S}^{d-1}=\{x\in\mathbb{R}^d:\,|x|=1\}$— евклидова сфера, а $d\sigma_k(y')=a_k v_k(y')\,dy'$ — вероятностная мера на сфере, является положительным оператором. Опираясь на этот факт, в [9] доказана L^p-ограниченность оператора T^t для всех $1\leqslant p<\infty$. Таким образом, его можно использовать как ограниченный оператор сдвига. Если $k\equiv 0$, то оператор T^t совпадает с оператором среднего значения по сфере и имеет широкое применение. Отметим также, что положительность оператора T^t позволила доказать положительность оператора τ^y [8] и его L^p-ограниченность [10, 9] на радиальных функциях.

Следующий важный случай обобщенного преобразования Фурье $\mathcal{F}_{k,a}$ при $a=1$. Оператор сдвига τ^y для преобразования $\mathcal{F}_{k,1}$, ограниченный в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, определен Салемом Бен Саидом и Делеавалом [11], см. также [12]. Они доказали, что на радиальных функциях оператор τ^y положительный и ограниченный в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p\leqslant 2$.

В настоящей работе при $\lambda_k>0$ определяется оператор среднего значения τ^y по сфере
$$T^t f(x)=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\tau^{ty'}f(x)\,d\sigma_{k,1}(y'),\quad t\in\mathbb{R}_+,\tag{2}$$
где $d\sigma_k(y')=a_{k,1}v_{k,1}(y')\,dy'$ — вероятностная мера на сфере. Он также ограниченный в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$. Наша цель показать, что оператор T^t положительный на функциях из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $T^t 1=1$. Откуда будет вытекать, что для всех $t\in\mathbb{R}_+$ и $x\in\mathbb{R}^d$ он допускает представление
$$T^t f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(\xi)\,d\sigma_{t,x}^k(\xi)\tag{3}$$
с вероятностной мерой $d\sigma_{t,x}^k$.

Опираясь на представление (3), мы доказываем, что для $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $t\in\mathbb{R}_+$, $1\leqslant p\leqslant\infty$
$$\|T^t f\|_{p,d\mu_{k,1}}\leqslant\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.\tag{4}$$

В силу плотности пространства Шварца оператор T^t может быть продолжен на все пространства $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p<\infty$, с сохранением неравенства (4).

2. Элементы обобщенного гармонического анализа и операторы сдвига

Гармонический анализ Данкля, в частности, строится с помощью дифференциально-разностных операторов
$$T_j f(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}+\sum_{a\in R_+}k(a)\langle a,e_j\rangle\,\frac{f(x)-f(\sigma_a x)}{\langle a,x\rangle},\quad j=1,\dots,d,$$
где R_+ — положительная подсистема системы корней R, а $\{e_j\}$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. А также лапласиана Данкля
$$\Delta_k f(x)=\sum_{j=1}^{d}T_j^2 f(x).$$

При $k \equiv 0$, Δ_k — оператор Лапласа Δ. Для радиальных функций

$$\Delta_k f(x) = \Delta f(x) + 2 \sum_{a \in R_+} k(a) \frac{\langle \nabla f(x), a \rangle}{\langle a, x \rangle},$$

где $\nabla f(x)$ — градиент функции $f(x)$.

В гармоническом анализе Данкля построен положительный оператор сплетения V_k, для которого

$$TjV_k f(x) = V_k \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Для него получено представление

$$V_k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, d\mu_x^k(\xi) \tag{5}$$

с вероятностной мерой $d\mu_x^k$, носитель которой лежит в выпуклой оболочке орбиты $O^x = \{gx\colon g \in G\}$.

Большинство основных фактов гармонического анализа Данкля можно найти в [3].

Пусть $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя первого рода и порядка $\alpha \geqslant -1/2$,

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) \frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha} = \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha+1)(-1)^j z^{2j}}{2^{2j} j! \Gamma(j+\alpha+1)}$$

— нормированная функция Бесселя. Для нее $|j_\alpha(z)| \leqslant 1$.

В дальнейшем будем считать, что выполнено условие $\lambda_k > 0$. В пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ $(k,1)$-обобщенное преобразование Фурье определяется как интегральный оператор

$$\mathcal{F}_{k,1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,y) f(y)\, d\mu_{k,1}(y) \tag{6}$$

с непрерывным ядром

$$B(x,y) = V_k(j_{\lambda_k - 1/2}(\sqrt{|x||y|(1 + \langle x', \cdot \rangle)})(y'), \quad x = |x|x',\, y = |y|y', \tag{7}$$

для которого в силу представления (7)

$$|B_k(x,y)| \leqslant 1, \quad B_k(0,y) = 1, \quad |x| \Delta_k^x B_k(x,y) = -|y| B_k(x,y), \tag{8}$$

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(x, ty')\, d\sigma_{k,1}(y') = j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|x|}). \tag{9}$$

Обобщенное преобразование Фурье — изометрия пространства $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и $\mathcal{F}_{k,1}^2 = Id$.

Если $f \in \mathcal{A} = \{f\colon f, \mathcal{F}_{k,1}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})\}$, то равенство (6) справедливо поточечно. Справедливо вложение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}$.

Основные факты об обобщенном преобразовании Фурье $\mathcal{F}_{k,1}$ можно найти в [4].

Оператор сдвига в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье определяется как интегральный оператор

$$\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,\xi) B_k(y,\xi) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\, d\mu_{k,1}(\xi). \tag{10}$$

В силу (8) норма оператора τ^y в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ равна 1. Если $f \in \mathcal{A}$ равенство (10) справедливо поточечно.

Известно [11], что для $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $g\in\mathcal{A}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\tau^y f(x)g(x)\,d\mu_{k,1}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\tau^y g(x)\,d\mu_{k,1}(x). \tag{11}$$

Для функций из класса $\mathcal{A}$ оператор сдвига T^t определен равенством (2). В силу (9) он может быть записан как интегральный оператор

$$T^t f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}B_k(x,\xi)j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|})\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\,d\mu_{k,1}(\xi). \tag{12}$$

Он также действует в $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$ и его норма равна 1. Для функций из класса $\mathcal{A}$ равенство (12) выполняется поточечно. Из (12) также вытекает

$$\mathcal{F}_{k,1}(T^t f)(\xi)=j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|})\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi).$$

Для $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $g\in\mathcal{A}$ из (11) получаем самосопряженность оператора T^t:

$$\int_{\mathbb{R}^d}T^t f(x)g(x)\,d\mu_{k,1}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)T^t g(x)\,d\mu_{k,1}(x). \tag{13}$$

3. Интегральное представление оператора сдвига

Лемма 1. Если $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $t\in\mathbb{R}_+$, то $T^t f\in\mathcal{A}$ и

$$\int_{\mathbb{R}^d}T^t f(x)\,d\mu_{k,1}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,d\mu_{k,1}(x).$$

Доказательство. Так как $\mathcal{F}_{k,1}(f)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ [13], то $\mathcal{F}_{k,1}(T^t f)\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$. Если $Df=|\cdot|\Delta_k f$, то согласно (8)

$$\begin{aligned}|x|^{2m}T^t f(x)&=|x|^{2m}\mathcal{F}_{k,1}(j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\cdot|})\mathcal{F}_{k,1}(f))(x)\\&=\mathcal{F}_{k,1}(D^{2m}(j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\cdot|})\mathcal{F}_{k,1}(f))(x)\\&=\int_{\mathbb{R}^d}B(x,\xi)D^{2m}(j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\cdot|})\mathcal{F}_{k,1}(f))(\xi)\,d\mu_{k,1}(\xi).\end{aligned}$$

Отсюда

$$|T^t f(x)|\leqslant\frac{1}{|x|^{2m}}\int_{\mathbb{R}^d}|D^{2m}(j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\cdot|})\mathcal{F}_{k,1}(f))(\xi)|\,d\mu_{k,1}(\xi).$$

Если выбрать $2m>2\lambda_k+1$ и доказать конечность последнего интеграла, то получим $T^t f\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$. Первое утверждение леммы будет установлено.

Докажем конечность нужного интеграла. Пусть

$$\varphi(r)=j_{2\lambda_k}(2\sqrt{tr}),\quad r=|x|,\quad g(x)=\mathcal{F}_{k,1}(f)(x).$$

Имеем

$$\varphi'(r)=-\frac{t}{2\lambda_k+1}j_{2\lambda_k+1}(2\sqrt{tr}),\quad T_j(\varphi g)(x)=\varphi(r)T_j g(x)+\frac{\varphi'(r)}{r}x_j g(x),$$

$$T_j^2(\varphi g)(x)=\varphi(r)T_j^2 g(x)+\frac{\varphi'(r)}{r}(x_jT_jg(x)+T_j(x_jg(x)))+\frac{\varphi''(r)-\varphi'(r)}{r^3}x_j^2g(x),$$

$$D(\varphi g)(x)=r\varphi(r)\Delta_k g(x)+\varphi'(r)\sum_{j=1}^{d}(x_jT_jg(x)+T_j(x_jg(x)))+(\varphi''(r)-\varphi'(r))g(x).$$

Продолжая вычисления, получим, что $D^{2m}(\varphi g)(x)$ есть линейная комбинация функций из пространства Шварца с коэффициентами, которые растут на бесконечности не быстрее многочленов. Следовательно, $D^{2m}(\varphi g)(x)\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$.

Пусть $\lambda>0$. Так как $e^{-\lambda|x|}\in\mathcal{A}$ [11], то согласно (13)

$$\int_{\mathbb{R}^d}T^tf(x)e^{-\lambda|x|}\,d\mu_{k,1}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)T^te^{-\lambda|x|}\,d\mu_{k,1}(x).$$

Отсюда по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\int_{\mathbb{R}^d}T^tf(x)\,d\mu_{k,1}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,d\mu_{k,1}(x),$$

так как по доказанному $T^tf\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $f\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$ и

$$e^{-\lambda|x|}\leqslant 1,\quad |T^te^{-\lambda|x|}|\leqslant 1,\quad \lim_{\lambda\to 0}e^{-\lambda|x|}=1,\quad \lim_{\lambda\to 0}T^te^{-\lambda|x|}=1.$$

(см. [11]). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. $T^t1=1$.

Доказательство. По лемме 1 для любой $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle T^t1,\varphi\rangle=\langle 1,T^t\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^d}T^t\varphi(x)\,d\mu_{k,1}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\,d\mu_{k,1}(x)=\langle 1,\varphi\rangle.$$

Следовательно, $T^t1=1$. Лемма 2 доказана.

Далее покажем, что для $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ оператор сдвига $T^tf(x)$ может быть получен как предел некоторого семейства линейных операторов. Рассмотрим ограниченную функцию

$$\Gamma(x,y,z,s)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-s|\xi|}B_k(x,\xi)B_k(y,\xi)B_k(z,\xi)\,d\mu_k(\xi)$$

и ее сферическое среднее

$$K(x,t,z,s)=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Gamma(x,ty',z,s)\,d\sigma_{k,1}(y').$$

Для функции $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим интегральный оператор

$$\int_{\mathbb{R}^d}K(x,t,z,s)f(z)\,d\mu_{k,1}(z).$$

Применяя (9), получим

$$\int_{\mathbb{R}^d}K(x,t,z,s)f(z)\,d\mu_{k,1}(z)=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Gamma(x,ty',z,s)\,d\sigma_{k,1}(y')f(z)\,d\mu_{k,1}(z)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-s|\xi|}B_k(x,\xi)B_k(ty',\xi)B_k(z,\xi)\,d\mu_k(\xi)\,d\sigma_{k,1}(y')f(z)\,d\mu_{k,1}(z)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-s|\xi|}B_k(x,\xi)\int_{\mathbb{S}^{d-1}}B_k(ty',\xi)\,d\sigma_{k,1}(y')\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\,d\mu_k(\xi).$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-s|\xi|} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) B_k(x,\xi) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\, d\mu_k(\xi).$$

Так как $\mathcal{F}_{k,1}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{s\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} K(x,t,z,s) f(z)\, d\mu_{k,1}(z)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) B_k(x,\xi) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\, d\mu_k(\xi) = T^t f(x).$$

Теорема 1. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}_+$, то для оператора сдвига $T^t f(x)$ справедливо представление (3).

Доказательство. Докажем, что $T^t f(x) \geqslant 0$, если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $f(x) \geqslant 0$. Для этого достаточно показать, что ядро $K(x,t,z,s) \geqslant 0$. Мы следуем работе [8].

Применяя (9), получим

$$\begin{aligned} K(x,t,z,s) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-s|\xi|} B(x,\xi) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(ty',\xi)\, d\sigma_{k,1}(y') B_k(z,\xi)\, d\mu_k(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-s|\xi|} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) B_k(x,\xi) B_k(z,\xi)\, d\mu_k(\xi) \\ &= \int_0^\infty I(x,z,r) e^{-sr} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{tr})\, d\nu_{2\lambda_k}(r), \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$I(x,z,r) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(x,r\xi') B_k(z,r\xi')\, d\sigma_{k,1}(\xi'),$$

$$d\nu_{2\lambda_k}(r) = b_{2\lambda_k,1} r^{2\lambda_k}\, dr, \quad b_{2\lambda_k,1}^{-1} = \int_0^\infty e^{-r} r^{2\lambda_k}\, dr = \Gamma(2\lambda_k+1).$$

В [11] выведена формула

$$I(x,z,r) = V_k\Big(\int_{-1}^1 j_{2\lambda_k}\Big(2\sqrt{r(|x|+|z|-\sqrt{|x||z|(1+\langle x',\cdot\rangle)u})}\Big)\, d\psi_{\lambda_k-1}(u)\Big)(z'),$$

где

$$d\psi_\lambda(u) = \frac{\Gamma(\lambda+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1)}(1-u^2)^\lambda\, du$$

— вероятностная мера на отрезке $[-1,1]$. Применяя интегральное представление оператора сплетения V_k (5), получим

$$I(x,z,r) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^1 j_{2\lambda_k}\Big(2\sqrt{r(|x|+|z|-\sqrt{|x||z|(1+\langle x',\xi\rangle)u})}\Big)\, d\psi_{\lambda_k-1}(u)\, d\mu_{z'}(\xi).$$

Отсюда и из (14)

$$K(x,t,z,s) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^1 e^{-sr} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{tr})$$

$$\times j_{2\lambda_k}\Big(2\sqrt{r(|x|+|z|-\sqrt{|x||z|(1+\langle x',\xi\rangle)u})}\Big) d\nu_{2\lambda_k}(r)\, d\psi_{\lambda_k-1}(u)\, d\mu_{z'}(\xi).$$

Для функций Бесселя хорошо известна теорема умножения Гегенбауэра [14, п. 11.41]. Запишем ее в удобной для нас форме

$$j_{2\lambda_k}(\sqrt{a}) j_{2\lambda_k}(\sqrt{b}) = \int_{-1}^1 j_{2\lambda_k}\Big(\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}v}\Big)\, d\psi_{2\lambda_k-1/2}(v).$$

Обозначая

$$q=|x|+|z|+t-\sqrt{|x||z|(1+\langle x',\xi\rangle)}u-2\sqrt{t(|x|+|z|-\sqrt{|x||z|(1+\langle x',\xi\rangle)}u)}v$$

и применяя теорему умножения, получим

$$K(x,t,z,s)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_0^\infty e^{-sr}j_{2\lambda_k}(2\sqrt{rq})\,d\nu_{2\lambda_k}(r)\,d\mu_{z'}(\xi)\,d\psi_{\lambda_k-1}(u)\,d\psi_{2\lambda_k-1/2}(v).$$

Так как [15, стр.33, формула 10]

$$\int_0^\infty e^{-sr}j_{2\lambda_k}(2\sqrt{rq})\,d\nu_{2\lambda_k}(r)=\frac{e^{-q/s}}{s^{2\lambda_k+1}}>0,$$

то ядро $K(x,t,z,s)\geqslant 0$.

Таким образом, при фиксированных x и t оператор $T^tf(x)$ является положительным линейным непрерывным функционалом на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Так как он положителен и непрерывен на пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, то он является мерой Радона [16, теорема 2.1.7]

$$T^tf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(\xi)\,d\sigma_{t,x}^k(\xi).$$

Непрерывность на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ влечет степенной рост меры $d\sigma_{t,x}^k$ [17, п. 3.4]. Для некоторого $m\geqslant 0$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{d\sigma_{t,x}^k(\xi)}{(1+|\xi|^2)^m}<\infty.$$

Наконец, лемма 2 показывает, что мера $d\sigma_{t,x}^k$ вероятностная. Представление (3) получено. Теорема 1 доказана.

Интегральное представление (3) показывает, что оператор сдвига $T^tf(x)$ может быть распространен и на другие классы функций, в частности, на пространство непрерывных ограниченных функций $C_b(\mathbb{R}^d)$.

4. L^p-ограниченность оператора сдвига

Мы следуем работе [9].

Теорема 2. Если $1\le p\le\infty$, то для $t\in\mathbb{R}_+$ и $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\|T^tf\|_{p,d\mu_{k,1}}\le\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $t\in\mathbb{R}_+$ задано и оператор T^t определен на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ представлением (3). Используя (12), мы получим

$$\sup\{\|T^tf\|_2\colon f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{2,d\mu_{k,1}}\le 1\}\le 1$$

и T^t может быть распространен на пространство $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$ с сохранением нормы, и это распространение совпадает с (12). Кроме этого, (3) дает

$$\sup\{\|T^tf\|_\infty\colon f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_\infty\leqslant 1\}\le 1. \tag{16}$$

Так как оператор T^t самосопряженный (13), то из (16)

$$\begin{aligned}
&\sup\{\|T^t f\|_{1,d\mu_k}\colon f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{1,d\mu_{k,1}}\leqslant 1\}\\
&\quad=\sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^d} T^t f\, g\, d\mu_k\colon f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{1,d\mu_{k,1}}\leqslant 1,\ \|g\|_\infty\leqslant 1\Big\}\\
&\quad=\sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^d} f\, T^t g\, d\mu_k\colon f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{1,d\mu_{k,1}}\leqslant 1,\ \|g\|_\infty\leqslant 1\Big\}\\
&\quad=\sup\{\|T^t g\|_\infty\colon g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|g\|_\infty\leq 1\}\leqslant 1.
\end{aligned}$$

Следовательно, T^t может быть распространен на $L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ с сохранением нормы и это распространение совпадает с (12) на $L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})\cap L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$.

По интерполяционной теореме Рисса–Торина

$$\sup\{\|T^t f\|_{p,d\mu_k}\colon f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\leq 1\}\leqslant 1,\quad 1\leqslant p\leqslant 2.$$

Пусть $2<p<\infty$, $1/p+1/p'=1$. Как и для $p=1$ мы получим

$$\begin{aligned}
&\sup\{\|T^t f\|_{p,d\mu_{k,1}}\colon f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\leqslant 1\}\\
&\quad=\sup\{\|T^t g\|_{p',d\mu_{k,1}}\colon g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|g\|_{p',d\mu_{k,1}}\leqslant 1\}\leqslant 1.
\end{aligned}$$

Неравенства (15) и теорема 2 доказаны.

5. Заключение

В работе построен положительный оператор сдвига, ограниченный в пространствах L^p. Для него получено интегральное представление с вероятностной мерой. Но остался невыясненным вопрос о носителе меры, его компактности. Компактность меры позволила бы распространить оператор на пространство бесконечно дифференцируемых функций, с топологией определяемой компактными множествами. Обратно, если бы удалось доказать непрерывность оператора сдвига на таком пространстве, мы бы получили компактность носителя меры.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Howe R. The oscillator semigroup. The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987) // Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988. Vol. 48. P. 61—132.

2. Dunkl C. F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.

3. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.

4. Salem Ben Saïd, Kobayashi T., Ørsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.

5. Kobayashi T., Mano G. The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p;q)$ // Memoirs of the American Mathematical Societies. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2011. Vol. 212, no. 1000.

6. Rösler M. Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators // Comm. Math. Phys. 1998. Vol. 192. P. 519–542.

7. Trimèche K. Paley–Wiener Theorems for the Dunkl transform and Dunkl translation operators // Integral Transform. Spec. Funct. 2002. Vol. 13. P. 17–38.

8. Rösler M. A positive radial product formula for the Dunkl kernel // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 355. P. 2413–2438.

9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, no. 3. P. 555–605.

10. Thangavelu S., Xu Y. Convolution operator and maximal function for Dunkl transform // J. d'Analyse. Math. 2005. Vol. 97. P. 25–55.

11. Salem Ben Saïd, Deleaval L. Translation operator and maximal function for the $(k,1)$-generalized Fourier transform // Journal of Functional Analysis. 2020. Vol. 279, no. 8. Article 108706.

12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform // International Mathematics Research Notices. 2016. Vol. 2016, no. 23. P. 7179–7200.

13. Johansen T. R. Weighted inequalities and uncertainty principles for the (k; a)-generalized Fourier transform // Internat. J. Math. 2016. Vol. 27, no. 3. Article 1650019.

14. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 799 с.

15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 2. Преобразования Бесселя. Интегралы. М.: Наука, 1970. 328 с.

16. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986. 464 с.

17. Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. 412 с.

REFERENCES

1. Howe R., 1988, "The oscillator semigroup. The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987)", Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., *Providence, RI: Amer. Math. Soc.*, vol. 48., pp. 61—132.

2. Dunkl C. F., 1992, "Hankel transforms associated to finite reflections groups", *Contemp. Math.*, vol. 138, pp. 123–138.

3. Rösler M., 2002, "Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions", Lecture Notes in Math., *Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

4. Salem Ben Saïd, 2012, "Kobayashi T., Ørsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators", *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336.

5. Kobayashi T., Mano G., 2011, "The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p;q)$", *Memoirs of the American Mathematical Societies. Providence, RI: Amer. Math. Soc.*, vol. 212, no. 1000.

6. Rösler M., 1998, "Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators", *Comm. Math. Phys.*, vol. 192, pp. 519–542.

7. Trimèche K., 2002, "Paley–Wiener Theorems for the Dunkl transform and Dunkl translation operators" , *Integral Transform. Spec. Funct.*, vol. 13, pp. 17–38.

8. Rösler M., 2003, "A positive radial product formula for the Dunkl kernel" , *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 355, pp. 2413–2438.

9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2019, "Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications" , *Constr. Approx.*, vol. 49, no. 3, pp. 555–605.

10. Thangavelu S., Xu Y., 2005, "Convolution operator and maximal function for Dunkl transform" , *J. d'Analyse. Math.*, vol. 97, pp. 25–55.

11. Salem Ben Saïd, Deleaval L., 2020, "Translation operator and maximal function for the $(k, 1)$-generalized Fourier transform" , *Journal of Functional Analysis*, vol. 279, no. 8, Article 108706.

12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2016, "Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform" , *International Mathematics Research Notices*, vol. 2016, no. 23, pp. 7179–7200.

13. Johansen T. R., 2016, "Weighted inequalities and uncertainty principles for the (k; a)-generalized Fourier transform" , *Internat. J. Math*, vol. 27, no. 3, Article 1650019.

14. Watson G.N., 1995, "A treatise on the theory of Bessel functions" , *Cambridge University Press*, 814 p.

15. Bateman H., Erdélyi A., 1954, "Tables of Integral Transforms. Vol.2" , *New York, Toronto, London: MC GRAV-HILL Book COMPANY, INC*, 328 p.

16. Hörmander L. 1983, "The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis" , *Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag*, 464 p.

17. Vladimirov V.S., 1964, "Methods of the theory of functions of several complex variables" , *M.: Nauka*, 412 p. (In Russian)

Получено 13.02.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-97-106

Весовые неравенства для преобразований Данкля — Рисса и градиента Данкля[1]

В. И. Иванов

Валерий Иванович Иванов — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В пространствах с весом Данкля степенного типа на $\mathbb{R}^d$ за последние 30 лет построен содержательный гармонический анализ. Классический анализ Фурье на евклидовом пространстве соответствует безвесовому случаю. В гармоническом анализе Данкля важную роль играют преобразования Данкля–Рисса и потенциал Данкля–Рисса, определенные Тангавелу и Шу. В частности, они позволяют доказывать неравенства Соболева для градиента Данкля. Частные результаты здесь были получены Амри и Сифи, Абделькефи и Рачди, Велику. Опираясь на весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса и преобразований Данкля–Рисса, мы доказываем общие (L^q, L^p)-неравенства Соболева для градиента Данкля с радиальными степенными весами. Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса были установлены ранее. L^p-неравенства для преобразований Данкля–Рисса с радиальным степенным весом устанавливаются в настоящей работе. Безвесовой вариант этих неравенств был доказан Амри и Сифи.

Ключевые слова: потенциал Данкля — Рисса, преобразования Данкля — Рисса, градиент Данкля, неравенство Соболева.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:
В. И. Иванов. Весовые неравенства для преобразований Данкля — Рисса и градиента Данкля // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 97–106.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-97-106

Weighted inequalities for Dunkl–Riesz transforms and Dunkl gradient[2]

V. I. Ivanov

Valery Ivanovich Ivanov — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of applied mathematics and Informatics of Institute of Applied Mathematics and Computer Science of the Tula State University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

Over the past 30 years a meaningful harmonic analysis has been constructed in the spaces with Dunkl weights of power type on $\mathbb{R}^d$. The classical Fourier analysis on Euclidean space corresponds to the weightless case. The Dunkl–Riesz potential and the Dunkl–Riesz transforms defined by Thangavelu and Xu play an important role in the Dunkl harmonic analysis. In particular, they allow one to prove the Sobolev inequalities for the Dunkl gradient. Particular results were obtained here by Amri and Sifi, Abdelkefi and Rachdi, Veliku. Based on the weighted inequalities for the Dunkl–Riesz potential and the Dunkl–Riesz transforms, we prove the general (L^q, L^p) Sobolev inequalities for the Dunkl gradient with radial power weights. The weighted inequalities for the Dunkl–Riesz potential were established earlier.The L^p-inequalities for the Dunkl–Riesz transforms with radial power weights are established in this paper. A weightless version of these inequalities was proved by Amri and Sifi.

Keywords: Dunkl–Riesz potential, Dunkl–Riesz transforms, Dunkl gradient, Sobolev inequality.

Bibliography: 10 titles.

For citation:
V. I. Ivanov. 2020, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz transforms and Dunkl gradient", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 97–106.

1. Введение

В пространствах с весом Данкля степенного типа на $\mathbb{R}^d$ за последние 30 лет построен содержательный гармонический анализ (см.[1]). Классический анализ Фурье на евклидовом пространстве соответствует безвесовому случаю. В гармоническом анализе Данкля важную роль играют преобразования Данкля–Рисса и потенциал Данкля–Рисса, определенные Тангавелу и Шу [2]. В частности, они позволяют доказывать неравенства Соболева для градиента Данкля (см.[3, 4]). Настоящая работа посвящена доказательству (L^q, L^p)-неравенств Соболева для градиента Данкля с радиальным степенным весом.

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$, нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ и стандартным ортонормированным базисом $\{e_1, \ldots, e_d\}$. Мы будем писать $A \lesssim B$, если выполнено неравенство $A \leqslant cB$ с константой $c > 0$, зависящей только от несущественных параметров.

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

Пусть $R\subset\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ — система корней, $R_+\subset R$ — положительная подсистема, $G\subset O(d)$ — конечная группа отражений, порожденная отражениями $\{\sigma_\alpha\colon \alpha\in R\}$, где σ_α — отражение относительно гиперплоскости $\langle\alpha,x\rangle=0$, $k\colon R\to\mathbb{R}_+$ —функция кратности, инвариантная относительно G, $v_k(x)=\prod_{\alpha\in R}|\langle\alpha,x\rangle|^{k(\alpha)}$ — вес Данкля, $d\mu_k(x)=c_kv_k(x)\,dx$ — мера Данкля, где $c_k^{-1}=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|^2/2}v_k(x)\,dx$ — нормировочная константа Макдональда–Мета–Сельберга, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $L^p(X,d\mu)$ — банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu}=\Bigl(\int_X|f|^p\,d\mu\Bigr)^{1/p},$$

$\langle k\rangle=\sum_{\alpha\in R_+}k(\alpha)$, $\lambda_k=\frac{d}{2}-1+\langle k\rangle$, $d_k=2\lambda_k+2$ — обобщенная размерность евклидова пространства с весом Данкля. Мы далее будем предполагать, что $d_k>1$.

Пусть V_k — оператор сплетения Данкля, $e_k(x,y)=V_k(e^{i\langle\cdot,y\rangle})(x)$ — ядро Данкля,

$$\mathcal{F}_k(f)(y)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\overline{e_k(x,y)}\,d\mu_k(x)$$

— преобразование Данкля,

$$T_jf(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}+\sum_{a\in R_+}k(a)\langle a,e_j\rangle\,\frac{f(x)-f(\sigma_ax)}{\langle a,x\rangle},\quad j=1,\dots,d,$$

— дифференциально-разностные операторы Данкля, $\nabla_k=(T_1,\dots,T_d)$ — градиент Данкля, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих на бесконечности функций,

$$\tau^yf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}e_k(x,z)e_k(y,z)\mathcal{F}_k(f)(z)\,d\mu_k(z)$$

— оператор сдвига на функции $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Большинство основных фактов гармонического анализа Данкля можно найти в [1].

На пространстве Шварца потенциал Данкля–Рисса I_α^kf [2] определяется как интегральный оператор

$$I_\alpha^kf(x)=(\gamma_\alpha^k)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\tau^{-y}f(x)|y|^{\alpha-d_k}\,d\mu_k(y),$$

где $0<\alpha<d_k$ и $\gamma_\alpha^k=2^{\alpha-d_k/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d_k-\alpha)/2)$.

Для $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ [2]

$$\mathcal{F}_k(I_\alpha^kf)(y)=|y|^{-\alpha}\mathcal{F}_k(f)(y).$$

На пространстве $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ преобразование Данкля–Рисса $\mathcal{R}_j^kf$, $j=1,\dots,d$ [2] определяется как интегральный оператор

$$\mathcal{R}_j^kf(x)=\lim_{\varepsilon\to0}c_j^k\int_{|y|\geqslant\varepsilon}\tau^{-y}f(x)\frac{y_j}{|y|^{d_k+1}}\,d\mu_k(y),$$

где нормировочная постоянная c_j^k выбрана так, чтобы

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_j^kf)(y)=-i\frac{y_j}{|y|}\mathcal{F}(f)(y).$$

Для потенциала Данкля–Рисса доказаны (L^q,L^p)-неравенства с радиальными степенными весами [5]. Для преобразований Данкля–Рисса установлена L^p-ограниченность [3]. Пусть p' — сопряженный показатель для p, определяемый соотношением $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Теорема A. *Если* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma < \frac{d_k}{q}$, $\beta < \frac{d_k}{p'}$, $\gamma + \beta \geqslant 0$, $0 < \alpha < d_k$, *и* $\alpha - \gamma - \beta = d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, *то*

$$\left\||x|^{-\gamma} I_\alpha^k f(x)\right\|_{q,d\mu_k} \lesssim \left\||x|^{\beta} f(x)\right\|_{p,d\mu_k}. \tag{1}$$

Теорема B. *Преобразование Данкля–Рисса* $\mathcal{R}_j^k$, $j = 1, \ldots, d$, *является ограниченным оператором из* $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ *в* $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ *для всех* $1 < p < \infty$.

Нас интересует неравенство Соболева для градиента Данкля с радиальным степенным весом

$$\left\|f(x)|x|^{-\gamma}\right\|_{q,d\mu_k} \lesssim \left\|\nabla_k f(x)|x|^{\beta}\right\|_{p,d\mu_k}, \quad 1 < q \leqslant p < \infty. \tag{2}$$

Рассматривая в (2) функции вида $f(\lambda x)$ и устремляя $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$, нетрудно убедиться, что условие $\alpha - \gamma - \beta = d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ является необходимым для выполнения (2).

Для доказательства неравенства (2) есть удобное равенство (см. [3]), в котором участвуют потенциал Данкля–Рисса I_1^k, преобразования Данкля–Рисса $\mathcal{R}_j^k$ и координаты градиента Данкля T_j:

$$f(x) = I_1^k\Big(\sum_{j=1}^d \mathcal{R}_j^k(T_j f)\Big)(x). \tag{3}$$

Неравенство (2) для $\gamma = \beta = 0$ установлено в [3] применением равенства (3), неравенства (1) для $\gamma = \beta = 0$, установленного в [6], и теоремы B. Для $\beta = 0$, $\gamma = 1 - d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, $1 < p < d_k$ неравенство (2) установлено в [4].

Для того, чтобы получить общий вариант неравенства Соболева (2) необходим весовой вариант теоремы B.

Мы доказываем следующие результаты. Пусть $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

Теорема 1. *Если* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, $-\frac{d_k}{p} < \beta < \frac{d_k}{p'}$, *то для* $j = 1, \ldots, d$,

$$\left\|\mathcal{R}_j^k f(x)|x|^{\beta}\right\|_{p,d\mu_k} \lesssim \left\|f(x)|x|^{\beta}\right\|_{p,d\mu_k}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Если* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leqslant 1$, $1 - \frac{d_k}{p} < \beta < \frac{d_k}{p'}$, *то*

$$\left\|f(x)|x|^{\beta + d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - 1}\right\|_{q,d\mu_k} \lesssim \left\|\nabla_k f(x)|x|^{\beta}\right\|_{p,d\mu_k}. \tag{5}$$

При $p = 2$ неравенство (5) другим методом доказано в [7, 8]. При $p = q = 2$ и $\beta = 0$, оно установлено в [7, 8] с точной константой.

В силу плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ неравенство (4) верно для функций, для которых $f \in L^p(\mathbb{R}^d, |\cdot|^{p\beta} d\mu_k)$, а неравенство (5) верно, если $\Delta_k f \in L^p(\mathbb{R}^d, |\cdot|^{p\beta} d\mu_k)$.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| = 1\}$ — единичная евклидова сфера, $x = rx' \in \mathbb{R}^d$, $r = |x| \in \mathbb{R}_+$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$d\nu(r) = r^{-1}\, dr, \quad d\nu_\lambda(r) = b_\lambda r^{2\lambda+1}\, dr, \quad b_\lambda^{-1} = 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1), \quad \lambda \geq -1/2,$$

— меры на $\mathbb{R}_+$, $d\sigma_k(x') = a_k v_k(x')\, dx'$ — вероятностная мера на $\mathbb{S}^{d-1}$, и $dm_k(x) = d\nu(r)\, d\sigma_k(x')$ — мера на $\mathbb{R}^d$.

Отметим, что
$$d\mu_k(x) = d\nu_{\lambda_k}(r)\,d\sigma_k(x') = b_{\lambda_k}|x|^{d_k}\,dm_k(x).$$

Рассмотрим свертку Меллина
$$A_g f(r) = (f*g)(r) = \int_0^\infty f(r/t)g(t)\,d\nu(t).$$
$$(f*g)(r) = (g*f)(r).$$

Лемма [5]. *Если $1\le p\le\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}_+,d\nu)$, $h\in L^{p'}(\mathbb{R}_+,d\nu)$, $g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\nu)$, то*
$$\|f*g\|_p\le\|g\|_1\|f\|_p,$$
или
$$\Big|\int_0^\infty\int_0^\infty h(r)f(t)g(r/t)\,d\nu(t)\,d\nu(r)\Big|\le\|g\|_1\|h\|_{p'}\|f\|_p.$$

Пусть $x,y\in\mathbb{R}^d$, η принадлежит выпуклой оболочке орбиты x ($\eta\in\mathrm{Co(G.x)}$),
$$A(x,y,\eta)=\sqrt{|x|^2+|y|^2-2\langle y,\eta\rangle}=\sqrt{|y-\eta|^2+|x|^2-|\eta|^2}.$$

В [3] для функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ получено представление преобразования $\mathcal{R}_j^k$ в виде
$$\mathcal{R}_j^k f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}_j(x,y)f(y)\,d\mu_k(y),$$
где ядро $\mathcal{K}_j(x,y)$ является конечной линейной комбинацией с постоянными коэффициентами ядер
$$\mathcal{K}_j^{(1)}(x,y)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{y_j-\eta_j}{A^{d_k+1}(x,y,\eta)}\,d\mu_x^k(\eta),$$
$$\mathcal{K}_j^{(\alpha)}(x,y)=\frac{1}{\langle y,\alpha\rangle}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\frac{1}{A^{d_k-1}(x,y,\eta)}-\frac{1}{A^{d_k-1}(x,\sigma_\alpha y,\eta)}\Big)\,d\mu_x^k(\eta),\quad \alpha\in R_+.$$
Здесь $d\mu_x^k$ — вероятностная мера с носителем в $\mathrm{Co(G.x)}$), участвующая в интегральном представлении оператора сплетения V_k.

Интегральные операторы с этими ядрами также являются ограниченными операторами из $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ в $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ для всех $1<p<\infty$. Теорему 1 докажем для каждого из этих операторов. При этом будем следовать подходу, предложенному в работе Стейна [9]. Рассмотрим случай оператора с ядром $\mathcal{K}_j^{(1)}(x,y)$.

Пусть
$$L_j^{(1)}f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}_j^{(1)}(x,y)f(y)\,d\mu_k(y).$$
По теореме B
$$\|L_j^{(1)}(|\cdot|^\beta f)(x)\|_{p,d\mu_k}\lesssim\||x|^\beta f(x)\|_{p,d\mu_k}.$$
Нужно доказать, что
$$\|L_j^{(1)}(|\cdot|^\beta f)(x)-|x|^\beta L_j^{(1)}f(x)\|_{p,d\mu_k}\lesssim\||x|^\beta f(x)\|_{p,d\mu_k}.$$
Так как $|y_j-\eta_j|\leqslant A(x,y,\eta)$, то
$$|L_j^{(1)}(|\cdot|^\beta f)(x)-|x|^\beta|L_j^{(1)}f)(x)|\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}|\mathcal{K}_j^{(1)}(x,y)||\,|y|^\beta|-|x|^\beta|f(y)\,d\mu_k(y)$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{A^{d_k}(x,y,\eta)}\,d\mu_x^k(\eta)\Big|1-\frac{|x|^\beta}{|y|^\beta}\Big||y|^\beta f(y)\,d\mu_k(y).$$

Остается доказать L^p-ограниченность оператора

$$Mf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{A^{d_k}(x,y,\eta)}\,d\mu_x^k(\eta)\Big|1-\frac{|x|^\beta}{|y|^\beta}\Big|f(y)\,d\mu_k(y)$$

с положительным ядром

$$\Phi(x,y)=\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{A^{d_k}(x,y,\eta)}\,d\mu_x^k(\eta)\Big|1-\frac{|x|^\beta}{|y|^\beta}\Big|=\Psi(x,y)\Big|1-\frac{|x|^\beta}{|y|^\beta}\Big|.$$

Из результатов работы [5, Lemma 2.3] вытекают следующие свойства функции $\Psi(x,y)$:

1. $\Psi(x,y)=\Psi(y,x)$;

2. $\Psi(rx',ty')=r^{-d_k}\Psi(x',(t/r)y')$;

3. $\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Psi(rx',ty')\,d\sigma_k(x')=\Psi_0(r,t)$, где

$$\Psi_0(r,t):=c\int_0^\pi \big(r^2+t^2-2rt\cos\varphi\big)^{-d_k/2}\sin^{d_k-2}\varphi\,d\varphi,\ \ c>0.$$

Неравенство

$$\|Mf\|_{p,d\mu_k}=\Big\|\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(x,y)f(y)\,d\mu_k(y)\Big\|_{p,d\mu_k}\lesssim\|f(x)\|_{p,d\mu_k}$$

эквивалентным образом можно записать так

$$\|\widetilde{M}f\|_{p,dm_k}=\Big\||x|^{d_k/p}\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(x,y)|y|^{d_k/p'}f(y)\,dm_k(y)\Big\|_{p,dm_k}\lesssim\|f(x)\|_{p,dm_k}.$$

Дальнейшие рассуждения будут следовать работе [5, Proof of Theorem 1.3].

Если $x=rx'$, $y=ty'$, то делая замену переменной $y\to(r/t)y'$ и применяя свойства (1), (2) функции $\Psi(x,y)$, получим

$$|x|^{d_k/p}\int_{\mathbb{R}^d}\Psi(x,y)\Big|1-\frac{|x|^\beta}{|y|^\beta}\Big||y|^{d_k/p'}f(y)\,dm_k(y)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}f((r/t)y')t^{d_k/p}\Psi(tx',y')|1-t^\beta|\,dm_k(ty')$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}f((r/t)y')\Psi_1(t,x',y')\,dm_k(ty')=\int_{\mathbb{R}^d}f(ty')\Psi_1(r/t,x',y')\,dm_k(ty').$$

Для оценки нормы оператора $\widetilde{M}$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d,dm_k)$ положим

$$\begin{aligned}J&=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}h(rx')f(ty')\Psi_1(r/t,x',y')\,dm_k(x)\,dm_k(y)\\&=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty h(rx')f(ty')\Phi_1(r/t,x',y')\,d\nu(t)\,d\nu(r)\,d\sigma_k(x')\,d\sigma_k(y').\end{aligned}$$

Далее применяем лемму и неравенство Гельдера

$$
\begin{aligned}
|J| &\leqslant \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Bigl(\int_0^\infty |h(rx')|^{p'}\,d\nu(r)\Bigr)^{1/p'}\Bigl(\int_0^\infty |f(ty')|^p\,d\nu(t)\Bigr)^{1/p}\\
&\quad \int_0^\infty \Psi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\,d\sigma_k(x')\,d\sigma_k(y')\\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Bigl(\int_0^\infty |h(rx')|^{p'}\,d\nu(r)\int_0^\infty \Psi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\Bigr)^{1/p'}\\
&\quad \Bigl(\int_0^\infty |f(ty')|^p\,d\nu(t)\int_0^\infty \Psi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\Bigr)^{1/p}\,d\sigma_k(x')\,d\sigma_k(y')\\
&\leqslant \Bigl(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty |h(rx')|^{p'}\,d\nu(r)\int_0^\infty \Psi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\,d\sigma_k(x')\,d\sigma_k(y')\Bigr)^{1/p'}\\
&\quad \Bigl(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty |f(ty')|^p\,d\nu(t)\int_0^\infty \Psi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\,d\sigma_k(x')\,d\sigma_k(y')\Bigr)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Принимая во внимание свойства (1) и (3) функции $\Psi(x,y)$, получим

$$
\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Psi_1(t,x',y')\,d\sigma_k(x') = t^{d_k/p}|1-t^\beta|\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Psi(tx',y')\,d\sigma_k(x') = t^{d_k/p}|1-t^\beta|\Psi_0(t,1)
$$

и

$$
\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Psi_1(t,x',y')\,d\sigma_k(y') = t^{d_k/p}|1-t^\beta|\Psi_0(1,t) = t^{d_k/p}|1-t^\beta|\Psi_0(t,1).
$$

Наконец, изменяя порядок интегрирования, получим

$$
\begin{aligned}
|J| &\leqslant \Bigl(\int_0^\infty t^{d_k/p}|1-t^\beta|\Psi_0(t,1)\,d\nu(t)\Bigr)^{1/p'}\Bigl(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty |h(rx')|^{p'}\,d\nu(r)\,d\sigma_k(x')\Bigr)^{1/p'}\\
&\quad \Bigl(\int_0^\infty t^{d_k/p}|1-t^\beta|\Psi_0(t,1)\,d\nu(t)\Bigr)^{1/p}\Bigl(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty |f(ty')|^p\,d\nu(t)\,d\sigma_k(y')\Bigr)^{1/p}\\
&= \int_0^\infty t^{d_k/p}|1-t^\beta|\Psi_0(t,1)\,d\nu(t)\,\|h\|_{p',dm_k}\|f\|_{p,dm_k}.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
\|M\|_{p,d\mu_k\to p,d\mu_k} \lesssim \|\widetilde{M}\|_{p,dm_k\to p,dm_k} \leqslant \int_0^\infty t^{d_k/p}|1-t^\beta|\Psi_0(t,1)\,d\nu(t).
$$

На самом деле

$$
\|\widetilde{M}\|_{p,dm_k\to p,dm_k} = \int_0^\infty t^{d_k/p}|1-t^\beta|\Psi_0(t,1)\,d\nu(t),
$$

так как оператор $\widetilde{M}$ — положительный (см. [5]). Если записать точную связь между операторами M и $\widetilde{M}$, то мы получим точное значение нормы и для оператора M.

Остается проверить при $-\frac{d_k}{p}<\beta<\frac{d_k}{p'}$ конечность интеграла

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty t^{d_k/p}|1-t^\beta|\Psi_0(t,1)\,d\nu(t)\\
&= c\int_0^\infty \frac{t^{d_k/p-1}}{(1+t^2)^{d_k/2}}|1-t^\beta|\int_0^\pi\Bigl(1-\frac{2t}{1+t^2}\cos\varphi\Bigr)^{-d_k/2}\sin^{d_k-2}\varphi\,d\varphi\,dt\\
&= c\int_0^\infty \frac{t^{d_k/p-1}}{(1+t^2)^{d_k/2}}|1-t^\beta|\psi(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Пусть
$$I=\int_0^\infty \frac{t^{d_k/p-1}}{(1+t^2)^{d_k/2}}|1-t^\beta|\psi(t)\,dt=\int_0^\infty g(t)\,dt.$$
В интеграле I имеются три особенности при $t=0$, $t=1$ и $t=\infty$. Функция $\psi(t)$ имеет особенность только при $t=1$. Как и в [5] показывается, что $\psi(t)\asymp|1-t|^{-1}$ при $t\to 1$, поэтому $g(t)$ при $t\to 1$ имеет интегрируемую особенность $|1-t^\beta||1-t|^{-1}$ для любого $\beta\in\mathbb{R}$. Если $\beta>0$, то $g(t)$ имеет интегрируемые особенности $t^{d_k/p-1}$ при $t\to 0$ и $t^{\beta-d_k/p'-1}$ при $t\to\infty$. Если $\beta<0$, то $g(t)$ имеет интегрируемые особенности $t^{d_k/p+\beta-1}$ при $t\to 0$ и $t^{-d_k/p'-1}$ при $t\to\infty$. Весовая L^p-ограниченность оператора $L_j^{(1)}$ доказана.

Рассмотрим оператор
$$L_j^{(\alpha)}f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}_j^{(\alpha)}(x,y)f(y)\,d\mu_k(y),\quad \alpha\in R_+.$$
Как и в предыдущем случае достаточно доказать L^p-ограниченность оператора
$$M^{(\alpha)}f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\Phi^{(\alpha)}(x,y)f(y)\,d\mu_k(y)$$
с положительным ядром
$$\Phi^{(\alpha)}(x,y)=\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\frac{1}{\langle y,\alpha\rangle}\Big(\frac{1}{A^{d_k-1}(x,y,\eta)}-\frac{1}{A^{d_k-1}(x,\sigma_\alpha y,\eta)}\Big)\Big|\,d\mu_x^k(\eta)\Big|1-\frac{|x|^\beta}{|y|^\beta}\Big|.$$

Пусть $y_s=y-s\langle y,\alpha\rangle\alpha$, $s\in[0,1]$. Без ограничения общности можно считать, что $|\alpha|=2$, поэтому $y_0=y$, $y_1=\sigma_\alpha y$. Обозначим для краткости $A_s=A(x,y_s,\eta)$.

Пусть для $s\in[0,1]$
$$q(s)=|x|^2+|y_s|^2-2\langle y_s,\eta\rangle=|x|^2+|y|^2+2s^2\langle y,\alpha\rangle^2+2s\langle y,\alpha\rangle\langle\eta-y,\alpha\rangle-2\langle y,\eta\rangle.$$
Если $\langle y,\alpha\rangle=0$, то $A_s=A_0$. Если $\langle y,\alpha\rangle\neq 0$, то $g(t)$ — квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом, поэтому он достигает наибольшее значение на концах отрезка. Итак, всегда
$$A_s\leqslant A_0+A_1,\quad s\in[0,1]. \tag{6}$$

Выберем $m\in\mathbb{N}$ так, чтобы $m(d_k-1)>1$. Тогда
$$J=\Big|\frac{1}{\langle y,\alpha\rangle}\Big(\frac{1}{A_1^{d_k-1}}-\frac{1}{A_0^{d_k-1}}\Big)\Big|=\Big|\frac{1}{\langle y,\alpha\rangle}\cdot\frac{A_1^{m(d_k-1)}-A_0^{m(d_k-1)}}{A_1^{d_k-1}A_0^{d_k-1}\sum_{i=1}^{m-1}A_1^{i(d_k-1)}A_0^{(m-1-i)(d_k-1)}}\Big|$$
$$=\Big|\frac{m(d_k-1)\int_0^1 A_s^{m(d_k-1)-1}\sum_{i=1}^d\frac{(y_s)_i-\eta_i}{A_s}\alpha_i\,ds}{A_1^{d_k-1}A_0^{d_k-1}\sum_{i=1}^{m-1}A_1^{i(d_k-1)}A_0^{(m-1-i)(d_k-1)}}\Big|.$$
Если $A_0\leqslant A_1$, то в силу (6)
$$J\lesssim\frac{A_1^{m(d_k-1)-1}}{A_1^{d_k-1}A_0^{d_k-1}\sum_{i=1}^{m-1}A_1^{i(d_k-1)}A_0^{(m-1-i)(d_k-1)}}$$
$$\leqslant\frac{A_1^{m(d_k-1)-1}}{A_1^{m(d_k-1)}A_0^{d_k-1}}=\frac{1}{A_1A_0^{d_k-1}}\leqslant\frac{1}{A_0^{d_k}},$$
поэтому всегда
$$J\lesssim\Big\{\frac{1}{A_0^{d_k}}+\frac{1}{A_1^{d_k}}\Big\}$$

и

$$\Phi^{(\alpha)}(x,y) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \Big\{ \frac{1}{A_0^{d_k}} + \frac{1}{A_1^{d_k}} \Big\}\, d\mu_x^k(\eta) \Big| 1 - \frac{|x|^\beta}{|y|^\beta} \Big|.$$

Так как $|y_1| = |\sigma_\alpha y| = |y|$, то L^p-ограниченность оператора $M^{(\alpha)}$ вытекает из L^p-ограниченности оператора M. Теорема 1 полностью доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть выполнены условия $1 < p \leqslant q < \infty$, $d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leqslant 1$, $1 - \frac{d_k}{p} < \beta < \frac{d_k}{p'}$. Применяя равенство (3), теорему A и теорему 1, получим цепочку неравенств

$$\Big\| f(x)|x|^{\beta + d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - 1} \Big\|_{q, d\mu_k} = \Big\| I_1^k \big(\sum_{j=1}^d \mathcal{R}_j^k (T_j f) \big)(x) |x|^{\beta + d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - 1} \Big\|_{q, d\mu_k}$$

$$\lesssim \Big\| \sum_{j=1}^d \mathcal{R}_j^k (T_j f)(x) |x|^\beta \Big\|_{p, d\mu_k} \lesssim \Big\{ \sum_{j=1}^d \big\| (T_j f)(x) |x|^\beta \big\|_{p, d\mu_k} \Big\} \lesssim \big\| \nabla_k f(x) |x|^\beta \big\|_{p, d\mu_k}.$$

Теорема 2 доказана.

4. Заключение

Для потенциала Данкля–Рисса (L^q, L^p)-неравенства известны для двух радиальных кусочно-степенных весов [10]. Было бы интересно и для преобразований Данкля–Рисса доказать L^p-неравенство с одним радиальным кусочно-степенным весом и вывести из весовых неравенств для потенциала Данкля–Рисса и преобразований Данкля–Рисса (L^q, L^p)-неравенство для градиента Данкля–Рисса с двумя радиальными кусочно-степенными весами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.

2. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.

3. Amri B., Sifi M. Riesz transforms for Dunkl transform // Annales mathématiques Blaise Pascal. 2012. Vol. 19, no. 1. P. 147–162.

4. Abdelkefi C., Rachdi M. Some properties of the Riesz potentials in Dunkl analysis // Ricerche di Matematica. 2015. Vol. 64, no. 1. P. 195–215.

5. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz Potential and Maximal Function for Dunkl transform // Potential Analysis. 2020. Publisced online 22 July 2020. https://doi.org/10.1007/s11118-020-09867-z

6. Hassani S., Mustapha S., Sifi M. Riesz potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform // J. Lie Theory. 2009. Vol. 19, no. 4. P. 725–734.

7. Velicu A. Hardy-type inequalities for Dunkl operators. Preprint arXiv: 1901.08866.v2, 2019.

8. Velicu A. Hardy-type inequalities for Dunkl operators with applications to many-particle Hardy inequalities // Communications in Contemporary Mathematics. 2020. Online Ready. https://doi.org/10.1142/50219199720500248

9. Stein E.M. Note on Singular Integrals // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. Vol. 8, no. 2. P. 250–254.

10. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 1. С. 131–147.

REFERENCES

1. Rösler M., 2002, "Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions", Lecture Notes in Math., *Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

2. Thangavelu S., Xu Y., 2007, "Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 199, pp. 181–195.

3. Amri B., Sifi M., 2012, "Riesz transforms for Dunkl transform", *Annales mathématiques Blaise Pascal*, vol. 19, no. 1, pp. 147–162.

4. Abdelkefi C., Rachdi M., 2015, "Some properties of the Riesz potentials in Dunkl analysis", *Ricerche di Matematica*, vol. 64, no. 1, pp. 195–215.

5. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2020, "Riesz Potential and Maximal Function for Dunkl transform", *Potential Analysis*, Publisced online 22 July 2020, https://doi.org/10.1007/s11118-020-09867-z

6. Hassani S., Mustapha S., Sifi M., 2009, "Riesz potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform", *J. Lie Theory*, vol. 19, no. 4, pp. 725–734.

7. Velicu A., 2019, "Hardy-type inequalities for Dunkl operators", *Preprint arXiv: 1901.08866.v2*, 20 p.

8. Velicu A., 2020, "Hardy-type inequalities for Dunkl operators with applications to many-particle Hardy inequalities", *Communications in Contemporary Mathematics*, Online Ready, https://doi.org/10.1142/50219199720500248

9. Stein E. M., 1957, "Note on Singular Integrals", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 8, no. 2, pp. 250–254.

10. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2019, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 131–147. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-1-131-147 (In Russian)

Получено 24.05.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 512.542 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-107-116

$\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга

О. В. Камозина

Олеся Владимировна Камозина — кандидат физико-математических наук, доцент, Брянский государственный инженерно-технологический университет (г. Брянск).
e-mail: ovkamozina@yandex.ru

Аннотация

Рассматриваются только конечные группы. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп; формацией, если он замкнут относительно фактор-групп и подпрямых произведений; формацией Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ является формацией и классом Фиттинга одновременно.

Для непустого подмножества ω множества простых чисел $\mathbb{P}$ и разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, в работе вводятся $\omega\sigma R$-функция f и $\omega\sigma FR$-функция φ. Областью определения данных функций является множество $\omega\sigma \cup \{\omega'\}$, где $\omega\sigma = \{\omega \cap \sigma_i \mid \omega \cap \sigma_i \neq \varnothing\}$, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Областью значений функций является множество классов Фиттинга и множество непустых формаций Фиттинга соответственно. С помощью функций f и φ определяется $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi) = (G : O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G))$ с $\omega\sigma$-спутником f и $\omega\sigma$-направлением φ.

В работе приведены примеры $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга. Выделены два вида $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга: $\omega\sigma$-полные и $\omega\sigma$-локальные классы Фиттинга. Их направления обозначены φ_0 и φ_1 соответственно. Показано, что каждый непустой неединичный класс Фиттинга является $\omega\sigma$-полным классом Фиттинга для некоторого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и любого разбиения σ. Получен ряд свойств $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга. В частности, дано определение внутреннего $\omega\sigma$-спутника и показано, что каждый $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга всегда обладает внутренним $\omega\sigma$-спутником. При $\omega = \mathbb{P}$ введено понятие σ-веерного класса Фиттинга. Показана связь между $\omega\sigma$-веерными и σ-веерными классами Фиттинга.

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, $\omega\sigma$-веерный, $\omega\sigma$-спутник, $\omega\sigma$-направление.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
О. В. Камозина. $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 107–116.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 512.542 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-107-116

$\omega\sigma$-fibered Fitting classes

O. V. Kamozina

Olesya Vladimirovna Kamozina — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Bryansk state University of engineering and technology (Bryansk).
e-mail: ovkamozina@yandex.ru

Abstract

The paper considers only finite groups. A class of groups $\mathfrak{F}$ is called a Fitting class if it is closed under normal subgroups and products of normal $\mathfrak{F}$-subgroups; formation, if it is closed with respect to factor groups and subdirect products; Fitting formation if $\mathfrak{F}$ is a formation and Fitting class at the same time.

For a nonempty subset ω of the set of primes $\mathbb{P}$ and the partition $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ for all $i \neq j$, we introduce the $\omega\sigma R$-function f and $\omega\sigma FR$-function φ. The domain of these functions is the set $\omega\sigma \cup \{\omega'\}$, where $\omega\sigma = \{\omega \cap \sigma_i \mid \omega \cap \sigma_i \neq \varnothing\}$, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. The range of function values is the set of Fitting classes and the set of nonempty Fitting formations, respectively. The functions f and φ are used to determine the $\omega\sigma$-fibered Fitting class $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi) = (G : O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ and $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ for all $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G))$ with the $\omega\sigma$-satellite f and the $\omega\sigma$-direction φ.

The paper gives examples of $\omega\sigma$-fibered Fitting classes. Two types of $\omega\sigma$-fibered Fitting classes are distinguished: $\omega\sigma$-complete and $\omega\sigma$-local Fitting classes. Their directions are indicated by φ_0 and φ_1, respectively. It is shown that each nonempty nonidentity Fitting class is an $\omega\sigma$-complete Fitting class for some nonempty set $\omega \subseteq \mathbb{P}$ and any partition σ. A number of properties of $\omega\sigma$-fibered Fitting classes are obtained. In particular, a definition of an internal $\omega\sigma$-satellite is given and it is shown that each $\omega\sigma$-fibered Fitting class always has an internal $\omega\sigma$-satellite. For $\omega = \mathbb{P}$, the concept of a σ-fibered Fitting class is introduced. The connection between $\omega\sigma$-fibered and σ-fibered Fitting classes is shown.

Keywords: finite group, Fitting class, $\omega\sigma$-fibered, $\omega\sigma$-satellite, $\omega\sigma$-direction.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
O. V. Kamozina, 2020, “$\omega\sigma$-fibered Fitting classes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 107–116.

1. Введение

В исследованиях формаций и классов Фиттинга часто применяется функциональный подход. С помощью специальной функции $f : \mathbb{P} \to \{$формации групп$\}$ в 1963 году в работе Гашюца [1] были построены локальные формации, в 1969 году в работе Хартли [2] с помощью функции $g : \mathbb{P} \to \{$классы Фиттинга групп$\}$ были построены локальные классы Фиттинга. В нашей стране данное направление получило развитие в работах Л.А. Шеметкова [3] при изучении формаций и Н.Т. Воробьева [4] при изучении классов Фиттинга. Была проведена классификация функций, установлена связь между свойствами формаций (классов Фиттинга) и их функциями. Используя функциональный подход, А.Н. Скиба в работе [5] разработал методы исследования решеток, произведений, критических локальных формаций. В 1999 году Л.А. Шеметков и А.Н. Скиба в работе [6] вместо множества $\mathbb{P}$ области определения функций рассмотрели непустое подмножество ω множества $\mathbb{P}$ и одноэлементное подмножество $\{\omega'\}$, где $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. В результате были построены ω-локальные формации и классы Фиттинга, а также изучены их различные свойства. В 2001 году В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной был предложен новый подход в изучении формаций и классов Фиттинга [7]. Кроме основной функции (спутника) введена ещё одна функция (направление) $\varphi : \mathbb{P} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$; определены ω-веерные формации и классы Фиттинга, где локальный случай является одной из частей «веера». В результате удалось провести классификацию уже имеющихся, а также получить новые виды формаций и классов Фиттинга. Кроме указанных авторов, изучением различных видов ω-веерных формаций и классов Фиттинга занимались К. Дьорк, Т. Хоукс, В.Г. Сафонов, Го Веньбинь, Н.Н. Воробьев и др. (см. например, [8-14]). В настоящее время появилась новая идея в функциональном подходе. На множестве области определения $\mathbb{P}$ функций вводится разбиение $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. В работе А.Н. Скибы начато изучение σ-локальных формаций, а также рассмотрены их приложения [15].

Цель данной работы — используя непустое подмножество ω простых чисел и разбиение σ, ввести $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга; на основе хорошо известных классов групп, показать существование $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга; выделить виды, исследовать свойства $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга.

2. Основная часть

Рассматриваются только конечные группы. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ является формацией и классом Фиттинга одновременно. Группа G называется комонолитической, если в G имеется такая нормальная подгруппа M (комонолит группы G), что G/M — простая группа и $N \subseteq M$ для любой собственной нормальной подгруппы N группы G. ([6])

Символ $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел, $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, $\omega' = \mathbb{P}\setminus\omega$, $\pi(G)$ обозначает множество всех различных простых делителей порядка группы G. Кроме того, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\}$, $\omega\sigma = \{\omega\cap\sigma_i \mid \omega\cap\sigma_i \neq \varnothing\}$, $\omega\sigma(G) = \{\omega \cap \sigma_i \mid \omega \cap \sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\}$, $\omega\sigma(\mathfrak{F}) = \{\omega\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{F}\}$ для любого класса групп $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{G}$ обозначает класс всех конечных групп, $\mathfrak{G}_\omega$ и $\mathfrak{G}_{\omega'}$ — класс всех ω- и ω'-групп соответственно. ω-группа — группа G, где $\pi(G) \subseteq \omega$.

Функцию $f : \omega\sigma \cup \{\omega'\} \to \{$классы Фиттинга групп$\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$, назовем $\omega\sigma R$-функцией; функцию $\varphi : \omega\sigma \cup \{\omega'\} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ назовем $\omega\sigma FR$-функцией; функцию $g : \sigma \to \{$классы Фиттинга групп$\}$ назовем σR-функцией; функцию $\psi : \sigma \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ назовем σFR-функцией. Определим $\omega\sigma FR$–функцию φ_0 следующим образом: $\varphi_0(\omega') = \mathfrak{G}_\omega$, $\varphi_0(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$ для любого $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. Определим σFR–функцию ψ_0 следующим образом: $\psi_0(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$.

Пусть μ_1 и μ_2 — произвольные $\omega\sigma R$-функции ($\omega\sigma FR$-функции). Будем полагать, что $\mu_1 \leqslant \mu_2$, если $\mu_1(\omega') \subseteq \mu_2(\omega')$ и $\mu_1(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mu_2(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. Пусть ν_1 и ν_2 — произвольные σR-функции (σFR-функции). Будем полагать, что $\nu_1 \leqslant \nu_2$, если $\nu_1(\sigma_i) \subseteq \nu_2(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma$.

Теорема 1. *Пусть f — $\omega\sigma R$-функция, φ — $\omega\sigma FR$-функция, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$, и $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi) = (G : O^\omega(G) \in f(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G))$.*

Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

Доказательство. **а)** Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$. Так как $NO^\omega(G)/O^\omega(G) \lhd G/O^\omega(G) \in \mathfrak{G}_\omega$ и $\mathfrak{G}_\omega$ — класс Фиттинга, то $NO^\omega(G)/O^\omega(G) \cong N/N \cap O^\omega(G) \in \mathfrak{G}_\omega$. Тогда $O^\omega(N) \subseteq N \cap O^\omega(G)$, а значит, $O^\omega(N) \subseteq O^\omega(G)$. Так как по условию $O^\omega(G) \in f(\omega')$ и $f(\omega')$ — класс Фиттинга, то $O^\omega(N) \in f(\omega')$.

Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(N)$. Тогда $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$ и по условию $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$. Так как $NG^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}/G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \lhd G/G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \varphi(\omega \cap \sigma_i)$ и $\varphi(\omega \cap \sigma_i)$ — класс Фиттинга, то $NG^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}/G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \cong N/N \cap G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \varphi(\omega \cap \sigma_i)$ и $N^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq N \cap G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}$. Учитывая, что $f(\omega \cap \sigma_i)$ — класс Фиттинга, как и выше, получаем, что $N^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$. Таким образом, $N \in \mathfrak{F}$.

б) Пусть $G = HK$, где $H \lhd G$, $K \lhd G$, $H \in \mathfrak{F}$, $K \in \mathfrak{F}$. Тогда по условию $O^\omega(H) \in f(\omega')$ и $O^\omega(K) \in f(\omega')$. Так как $f(\omega')$ — класс Фиттинга, то $T = O^\omega(H)O^\omega(K) \in f(\omega')$. Поскольку $G = HK$, то $G/T = HT/T \cdot KT/T$. Так как $O^\omega(H) \lhd H$, то по модулярному тождеству Дедекинда $H \cap T = H \cap O^\omega(H)O^\omega(K) = O^\omega(H)(H \cap O^\omega(K))$. Тогда $HT/T \cong H/H \cap T = H/O^\omega(H)(H \cap O^\omega(K))$. Так как $H/O^\omega(H) \in \mathfrak{G}_\omega$ и $\mathfrak{G}_\omega$ — формация, то

$$H/O^\omega(H)(H \cap O^\omega(K)) \cong H/O^\omega(H)/O^\omega(H)(H \cap O^\omega(K))/O^\omega(H) \in \mathfrak{G}_\omega.$$

Следовательно, $HT/T \in \mathfrak{G}_\omega$. Аналогично, $KT/T \in \mathfrak{G}_\omega$. Так как $\mathfrak{G}_\omega$ — класс Фиттинга, то $G/T = HT/T \cdot KT/T \in \mathfrak{G}_\omega$, а значит, $O^\omega(G) \subseteq T$. Так как $T \in f(\omega')$ и $f(\omega')$ — класс Фиттинга, то $O^\omega(G) \in f(\omega')$.

Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Тогда $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(H)$ или $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(K)$. Из условия получаем, что $H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ или $K^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$. Если $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(H)$ и $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(K)$, то, учитывая, что $f(\omega \cap \sigma_i)$ — класс Фиттинга и $\varphi(\omega \cap \sigma_i)$ — формация Фиттинга, как и выше, получаем, что $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$.

Пусть, для определенности, $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(H)$ и $\omega \cap \sigma_i \notin \omega\sigma(K)$. Тогда K — $(\omega \cap \sigma_i)'$-группа. Так как по условию $\varphi_0 \leqslant \varphi$, то $K \in \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'} = \varphi_0(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \varphi(\omega \cap \sigma_i)$. Поскольку $G = HK$, то

$$G/H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} = H/H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \cdot KH^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}/H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \cong H/H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \cdot K/K \cap H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}.$$

Так как $\varphi(\omega\cap\sigma_i)$ — формация Фиттинга, то $K/K\cap H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \varphi(\omega\cap\sigma_i)$ и $G/H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \varphi(\omega\cap\sigma_i)$. Тогда $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \subseteq H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)}$. Так как $H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ и $f(\omega \cap \sigma_i)$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$.

Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$.

Из **а)** и **б)** следует, что $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга.

Теорема доказана. □

Если $\omega = \mathbb{P}$, то получаем

Следствие 1. *Пусть g — σR-функция, ψ — σFR-функция, где $\psi_0 \leqslant \psi$, и $\mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi) = (G : G^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$.*

Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

Определение 1. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f — $\omega\sigma R$-функция, φ – $\omega\sigma FR$-функция, назовем $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-спутником f и $\omega\sigma$-направлением φ. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi)$, где g — σR-функция, ψ — σFR-функция, назовем σ-веерным классом Фиттинга с σ-спутником g и σ-направлением ψ.*

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $\omega\sigma(\mathfrak{F}) = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f — $\omega\sigma R$-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(\omega \cap \sigma_i) = \varnothing$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$, φ – $\omega\sigma FR$-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f и φ — функции, описанные в заключении леммы.

а) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $\omega\sigma(G) = \varnothing$, а значит, G — ω'-группа. Тогда $O^{\omega}(G) = G \in \mathfrak{F} = f(\omega')$ и из $\omega\sigma(G) = \varnothing$ следует, что $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

б) Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, то $O^{\omega}(G) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$. Следовательно, $O^{\omega}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}} = M$ и $G/M \cong G/O^{\omega}(G)/M/O^{\omega}(G) \in \mathfrak{G}_{\omega}$. Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G/M)$. Тогда $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, то $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) = \varnothing$. Противоречие. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из **а)** и **б)** следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Лемма доказана. $\square$

Примеры. **1)** Из леммы 1 следует, что $\mathfrak{G}_{\omega'}$ *и* (1) *являются $\omega\sigma$-веерными классами Фиттинга для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и любого разбиения σ.*

2) $\mathfrak{G} = \omega\sigma R(f,\varphi)$, *где f — $\omega\sigma R$-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{G}$, $f(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$, φ - $\omega\sigma FR$-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$.*

Действительно, пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(f,\varphi)$, где f и φ — функции, описанные в примере 2) выше.

а) Покажем, что $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{G}$. Так как $O^{\omega}(G) \triangleleft G$, $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \triangleleft G$ и $\mathfrak{G}$ — класс Фиттинга, то $O^{\omega}(G) \in \mathfrak{G} = f(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \mathfrak{G} = f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

б) Так как рассматриваются только конечные группы, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}$.

Из **а)** и **б)** следует, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1$.

3) $\mathfrak{G}_{\omega} = \omega\sigma R(f,\varphi)$, *где f — $\omega\sigma R$-функция такая, что $f(\omega') = (1)$, $f(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}_{\omega}$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$, φ — $\omega\sigma FR$-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$.*

Действительно, пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(f,\varphi)$, где f и φ — функции, описанные в примере 3) выше.

а) Покажем, что $\mathfrak{G}_{\omega} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{G}_{\omega}$. Тогда $O^{\omega}(G) = 1 \in (1) = f(\omega')$. Так как $\mathfrak{G}_{\omega}$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \mathfrak{G}_{\omega} = f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{G}_{\omega} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

б) Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_{\omega}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда $O^{\omega}(G) \in f(\omega') = (1)$, а значит, $G \in \mathfrak{G}_{\omega}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_{\omega}$.

Из **а)** и **б)** следует, что $\mathfrak{G}_{\omega} = \mathfrak{F}_1$.

4) *Пусть π — непустое подмножество множества простых чисел $\mathbb{P}$. Определим на множестве $\mathbb{P}$ разбиение σ следующим образом: если $\omega \cap \sigma_i \cap \pi \neq \varnothing$, то $\omega \cap \sigma_i \subseteq \pi$; если $\omega \cap \sigma_i \cap \pi = \varnothing$, то $\omega \cap \sigma_i \not\subseteq \pi$. Тогда $\mathfrak{G}_{\pi} = \omega\sigma R(f,\varphi)$, где f — $\omega\sigma R$-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{G}_{\pi}$, $f(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}_{\pi}$ для всех $\omega \cap \sigma_i \subseteq \pi$, $f(\omega \cap \sigma_i) = \varnothing$ для всех $\omega \cap \sigma_i \not\subseteq \pi$, φ — $\omega\sigma FR$-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$.*

Действительно, пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(f,\varphi)$, где f и φ — функции, описанные в примере 4) выше.

а) Покажем, что $\mathfrak{G}_{\pi} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{G}_{\pi}$. Так как $\mathfrak{G}_{\pi}$ — класс Фиттинга, то $O^{\omega}(G) \in \mathfrak{G}_{\pi} = f(\omega')$. Пусть $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Так как $G \in \mathfrak{G}_{\pi}$, то $\pi(G) \subseteq \pi$, а значит, $\omega\cap\sigma_i\cap\pi \neq \varnothing$ и $\omega \cap \sigma_i \subseteq \pi$. Тогда $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in \mathfrak{G}_{\pi} = f(\omega \cap \sigma_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{G}_{\pi} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

б) Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_{\pi}$. Допустим противное и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{G}_{\pi}$. Тогда G — комонолитическая с комонолитом $M = G_{\mathfrak{G}_{\pi}}$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, то, как и в лемме 1, $O^{\omega}(G) \subseteq M$ и $G/M \in \mathfrak{G}_{\omega}$. Если для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G/M)$ выполняется неравенство $\omega\cap\sigma_i\cap\pi \neq \varnothing$, а значит, $\omega\cap\sigma_i \subseteq \pi$, то $\pi(G/M) \subseteq \pi$ и $G \in \mathfrak{G}_{\pi}$. Противоречие. Пусть существует $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G/M)$ и выполняется равенство $\omega \cap \sigma_i \cap \pi = \varnothing$, а значит, $\omega \cap \sigma_i \not\subseteq \pi$. Так как $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$ и $G \in \mathfrak{F}_1$, то $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) = \varnothing$. Противоречие. Таким образом, $G \in \mathfrak{G}_{\pi}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_{\pi}$.

Из **а)** и **б)** следует, что $\mathfrak{G}_{\pi} = \mathfrak{F}_1$.

5) Из примера 4) следует, что $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = \omega\sigma R(f,\varphi)$, *где f — $\omega\sigma R$-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$, $f(\omega \cap \sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $j = i$, $f(\omega \cap \sigma_j) = \varnothing$ для всех $j \neq i$, φ — $\omega\sigma FR$-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$.*

Определение 2. *Пусть $\varphi = \varphi_0$. Тогда из определения 1 и теоремы 1 получаем класс Фиттинга* $\mathfrak{F} = \omega\sigma AR(f) = (G : O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ *и* $O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(G) \in f(\omega\cap\sigma_i)$ *для всех* $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(G))$, *который назовем $\omega\sigma$-полным классом Фиттинга или, коротко, $\omega\sigma A$-классом Фиттинга с $\omega\sigma$-спутником f. Пусть $\psi = \psi_0$. Из определения 1 и следствия 1 получаем класс Фиттинга* $\mathfrak{F} = \sigma AR(g) = (G : O^{\sigma_i'}(G) \in g(\sigma_i)$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma(G))$, *который назовем σ-полным классом Фиттинга или, коротко, σA-классом Фиттинга с σ-спутником g.*

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\omega\sigma = \omega\sigma(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\omega\sigma$-полным классом Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma AR(f)$, где f — $\omega\sigma R$-функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(\omega\cap\sigma_i) = fit(O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma$.

а) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Так как $O^{\omega}(H) \triangleleft H$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^{\omega}(H) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Так как $H \in \mathfrak{F}$, то $O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(H) \in fit(O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(G) \mid G \in \mathfrak{F}) = f(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

б) Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное и пусть T — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. Так как $T \in \mathfrak{F}_1$, то, как и в лемме 1, $O^{\omega}(T) \subseteq M$ и $T/M \in \mathfrak{G}_{\omega}$. Пусть $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(T/M) \subseteq \omega\sigma(T)$. Так как $T \in \mathfrak{F}_1$, то по определению класса $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma AR(f,\varphi)$ и $\omega\sigma$-спутника f, получаем, что $O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(T) \in f(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда $O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(T) \subseteq M$ и $T/M \cong T/O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(T)/M/O^{(\omega\cap\sigma_i)'}(T) \in \mathfrak{E}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$. Противоречие. Таким образом, $T \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из **а)** и **б)** следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Лемма доказана. □

Замечание. Из леммы 2 следует, что каждый непустой неединичный класс Фиттинга является $\omega\sigma$-полным классом Фиттинга для некоторого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и любого разбиения σ.

Лемма 3. *Пусть f — $\omega\sigma R$-функция, φ — $\omega\sigma FR$-функция, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$, и $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(g,\varphi)$, где $g(\omega') = f(\omega') \cap \mathfrak{F}$ и $g(\omega\cap\sigma_i) = f(\omega\cap\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma$.

2) $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(h,\varphi)$, где $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(\omega\cap\sigma_i) = f(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma$.

3) если $\omega\sigma = \omega\sigma(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} = (G : O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma)$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(g,\varphi)$, где g — $\omega\sigma R$-функция, описанная в пункте 1) леммы.

Так как $g \leqslant f$, то, учитывая теорему 1, получаем $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$. Тогда $O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Так как $O^{\omega}(G) \triangleleft G$, $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \triangleleft G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^{\omega}(G) \in f(\omega') \cap \mathfrak{F} = g(\omega')$, $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i) \cap \mathfrak{F} = g(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Следовательно, $G \in \omega\sigma R(g,\varphi) = \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

2) Пусть $\mathfrak{F}_2 = \omega\sigma R(h,\varphi)$, где h — $\omega\sigma R$-функция, описанная в пункте 2) леммы. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$.

Пусть $G \in \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$. Так как $O^{\omega}(G) \triangleleft G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^{\omega}(G) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$. Кроме того, $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i) = h(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Тогда $G \in \omega\sigma R(h,\varphi) = \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_2$ и пусть H — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_2 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H — комонолитическая с комонолитом $M = H_{\mathfrak{F}}$. Из $H \in \mathfrak{F}_2$, как и в лемме 1, получаем, что $O^{\omega}(H) \subseteq M$ и $H/M \in \mathfrak{G}_{\omega}$. Так как $H/M \cong H/O^{\omega}(M)/M/O^{\omega}(M)$ и $M/O^{\omega}(M) \in \mathfrak{G}_{\omega}$, то $H/O^{\omega}(M) \in \mathfrak{G}_{\omega}$. Тогда $O^{\omega}(H) \subseteq O^{\omega}(M)$. Так как $M \in \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$, то $O^{\omega}(M) \in f(\omega')$, а значит, $O^{\omega}(H) \in f(\omega')$. Кроме того, $H^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in h(\omega\cap\sigma_i) = f(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(H)$. Следовательно, $H \in \omega\sigma R(f,\varphi) = \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$.

3) Пусть $\mathfrak{F}_3 = (G : O^\omega(G) \in f(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma)$ и $G \in \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$. Если $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(G)$, то $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i)$. Пусть $\omega\cap\sigma_i \in \in \omega\sigma \setminus \omega\sigma(G) = \omega\sigma(\mathfrak{F}) \setminus \omega\sigma(G)$. Тогда существует такая группа $T \in \mathfrak{F}$, что $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(T)$ и $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i)$, а значит, $f(\omega\cap\sigma_i) \neq \varnothing$. Так как $\omega\cap\sigma_i \notin \omega\sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'} = = \varphi_0(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \varphi(\omega\cap\sigma_i)$. Тогда $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} = 1 \in f(\omega\cap\sigma_i)$.

Таким образом, $G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i)$ для $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_3$.

Включение $\mathfrak{F}_3 \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_3$.

Лемма доказана. □

Определение 3. *$\omega\sigma$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$ назовем внутренним, если $f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$ и $f(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma$.*

Замечание. Лемма 3 показывает, что каждый $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга всегда обладает внутренним $\omega\sigma$-спутником.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\omega\sigma$-веерный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-спутником f и $\omega\sigma$-направлением φ, где $\varphi_0 \leqslant \varphi$, $\omega\sigma = \omega\sigma(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является σ-веерным классом Фиттинга с σ-спутником g и σ-направлением ψ для любого разбиения σ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f,\varphi)$. Рассмотрим σR-функцию g такую, что $g(\sigma_i) = = f(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Delta = \{\sigma_j \mid \omega\cap\sigma_j \in \omega\sigma\}$, $g(\sigma_i) = \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \mathbb{P} \setminus (\cup\sigma_j \mid \sigma_j \in \Delta)$; σFR-функцию ψ такую, что $\psi(\sigma_i) = \varphi(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Delta$, $\psi(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\omega$ для всех $\sigma_i \in \mathbb{P} \setminus (\cup\sigma_j \mid \sigma_j \in \Delta)$. Пусть $\mathfrak{H} = \sigma R(g,\psi)$.

а) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $\sigma_i \in \sigma(G)$. Если $\sigma_i \in \Delta$ и $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(G)$, то $G^{\psi(\sigma_i)} = G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} \in f(\omega\cap\sigma_i) = g(\sigma_i)$. Если $\sigma_i \in \Delta$ и $\omega\cap\sigma_i \notin \omega\sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'} = = \varphi_0(\omega\cap\sigma_i) \subseteq \varphi(\omega\cap\sigma_i)$. Так как $\omega\sigma = \omega\sigma(\mathfrak{F})$, то, как и в лемме 3, $f(\omega\cap\sigma_i) \neq \varnothing$ и $G^{\psi(\sigma_i)} = G^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} = 1 \in f(\omega\cap\sigma_i) = g(\sigma_i)$. Далее, можем считать, в силу леммы 3, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Если $\sigma_i \in \mathbb{P} \setminus (\cup\sigma_j \mid \sigma_j \in \Delta)$, то $G^{\psi(\sigma_i)} = O^\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{F} = g(\sigma_i)$. Тогда $G \in \sigma R(g,\varphi) = \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

б) Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $T \in \mathfrak{H}$ и $\sigma_i \in \sigma(T)$. Установим, что $O^\omega(T) = T^{\psi(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \mathbb{P} \setminus (\cup\sigma_j \mid \sigma_j \in \Delta)$. Действительно, из $T/T^{\psi(\sigma_i)} \in \psi(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\omega$ следует, что $O^\omega(T) \subseteq T^{\psi(\sigma_i)}$. Обратно, так как $T/O^\omega(T) \in \mathfrak{G}_\omega = \psi(\sigma_i)$, то $T^{\psi(\sigma_i)} \subseteq O^\omega(T)$. Тогда $O^\omega(T) = T^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i) = \mathfrak{F} = f(\omega')$. Для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(T) \subseteq \omega\sigma$ получаем, что $\sigma_i \in \Delta$. Тогда $T^{\varphi(\omega\cap\sigma_i)} = T^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i) = f(\omega\cap\sigma_i)$. Следовательно, $G \in \omega\sigma R(f,\varphi) = \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из **а)** и **б)** следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Лемма доказана. □

Определение 4. *Определим $\omega\sigma FR$-функцию φ_1 следующим образом: $\varphi_1(\omega') = \mathfrak{G}_\omega$, $\varphi_1(\omega\cap\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\omega\cap\sigma_i}\mathfrak{G}_{(\omega\cap\sigma_i)'}$ для любого $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma$. Тогда из определения 1 и теоремы 1 получаем класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma LR(f) = (G : O^\omega(G) \in f(\omega')$ и $O^{\omega\cap\sigma_i,(\omega\cap\sigma_i)'}(G) \in f(\omega\cap\sigma_i)$ для всех $\omega\cap\sigma_i \in \omega\sigma(G))$, который назовем $\omega\sigma$-локальным классом Фиттинга или, коротко, $\omega\sigma L$-классом Фиттинга с $\omega\sigma$-спутником f. Определим σFR-функцию ψ_1 следующим образом: $\psi_1(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Из определения 1 и следствия 1 получаем класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma LR(f) = (G : O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$, который назовем σ-локальным классом Фиттинга или, коротко, σL-классом Фиттинга с σ-спутником g.*

Следствие 2. *Если $\mathfrak{F}$ — $\omega\sigma$-полный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-спутником f и $\omega\sigma = \omega\sigma(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}$ — σ-полный класс Фиттинга с σ-спутником g для любого разбиения σ.*

Следствие 3. *Если $\mathfrak{F}$ — $\omega\sigma$-локальный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-спутником f и $\omega\sigma = = \omega\sigma(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}$ — σ-локальный класс Фиттинга с σ-спутником g для любого разбиения σ.*

Определение 5. *σ-направление ψ σ-веерного класса Фиттинга назовем главным, если $\psi(\sigma_i) \cdot \mathfrak{G}_{\sigma'_i} = \psi(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma$.*

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — σ-веерный класс Фиттинга с σ-спутником g и главным σ-направлением ψ. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$-спутником f и $\omega\sigma$-направлением φ для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и любого разбиения σ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi)$. Рассмотрим $\omega\sigma R$-функцию f такую, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(\omega \cap \sigma_i) = g(\sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$; $\omega\sigma FR$-функцию φ такую, что $\varphi(\omega') = \mathfrak{G}_\omega$, $\varphi(\omega \cap \sigma_i) = \psi(\sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. Пусть $\mathfrak{H} = \omega\sigma R(f, \varphi)$.

а) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $O^\omega(G) \triangleleft G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^\omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G) \subseteq \omega\sigma$ получаем $\sigma_i \in \sigma(G)$. Так как $G \in \mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi)$, то $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} = G^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i) = f(\omega \cap \sigma_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

б) Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное и пусть T — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, то $O^\omega(T) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$, а значит, $O^\omega(T) \subseteq M$ и $T/M \cong T/O^\omega(T)/M/O^\omega(T) \in \mathfrak{G}_\omega$. Тогда для всех $\sigma_i \in \sigma(T/M)$ получаем $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T/M) \subseteq \omega\sigma(T) \subseteq \omega\sigma$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, то $T^{\psi(\sigma_i)} = T^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) = g(\sigma_i)$. Пусть $\sigma_i \in \sigma(T) \setminus \sigma(T/M)$. Тогда $T/M \in \mathfrak{G}_{\sigma'_i}$. Так как $T/M \cong T/M^{\psi(\sigma_i)}/M/M^{\psi(\sigma_i)}$, то $T/M^{\psi(\sigma_i)} \in \psi(\sigma_i) \cdot \mathfrak{G}_{\sigma'_i}$. По условию ψ — главное σ-направление, а значит, $\psi(\sigma_i) \cdot \mathfrak{G}_{\sigma'_i} = \psi(\sigma_i)$. Тогда $T/M^{\psi(\sigma_i)} \in \psi(\sigma_i)$ и $T^{\psi(\sigma_i)} \subseteq M^{\psi(\sigma_i)}$. Из $M \in \mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi)$ получаем, что $M^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i)$, а значит, $T^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i)$. Таким образом, $T^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(T)$. Тогда по определению $T \in \mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi)$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из **а)** и **б)** следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Лемма доказана. □

Замечание. В леммах 4 и 5 показана связь между $\omega\sigma$-веерными и σ-веерными классами Фиттинга.

Следствие 4. *Если $\mathfrak{F}$ — σ-полный класс Фиттинга с σ-спутником g, то $\mathfrak{F}$ — $\omega\sigma$-полный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-спутником f для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и любого разбиения σ.*

Следствие 5. *Если $\mathfrak{F}$ — σ-локальный класс Фиттинга с σ-спутником g, то $\mathfrak{F}$ — $\omega\sigma$-локальный класс Фиттинга с $\omega\sigma$-спутником f для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и любого разбиения σ.*

3. Заключение

В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ [15], $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга становятся ω-веерными классами Фиттинга в определениях работ [7,10].

При дальнейшем исследовании введенных в данной статье классов Фиттинга представляет интерес решение следующих вопросов.

Вопрос 1. Какое строение имеют минимальный и максимальный спутники $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга?

Вопрос 2. Верно ли, что произведение любых двух $\omega\sigma$-веерных классов Фиттинга является $\omega\sigma$-веерным классом Фиттинга?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflosbaren Gruppen // Math. Z. 1963. Vol. 80, № 4. P. 300-305.

2. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3, № 2. P. 193-207.

3. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука. 1978. 272 с.

4. Воробьев Н. Т. О локальных радикальных классах // Вопросы алгебры. 1986. Вып 1. С. 22-34.

5. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука. 1997. 240 с.

6. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114-147.

7. Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43-60.

8. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука. 1989. 256 с.

9. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin-New York: Walter de Gruyter. 1992. 892 p.

10. Vedernikov V .A. On new types of ω-fibered Fitting classes of finite groups // Ukrainian Mathematical Journal. 2002. Vol. 54, № 7. P. 897-906.

11. Корпачева М. А., Сорокина М. М. О критических ω-веерных формациях конечных групп // Математические заметки. 2006. Т. 79, № 1. С. 87-94.

12. Сафонов В. Г. Об одном вопросе теории тотально локальных формаций конечных групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 6. С. 727-736.

13. Воробьев Н. Н. Алгебра классов конечных групп. Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова. 2012. 322 с.

14. Guo Wenbin. Structure theory for canonical classes of finite groups. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2015. 360 p.

15. Skiba A. N. On one generalization of the local formations // ПФМТ. 2018. № 1 (34). P. 79-82.

REFERENCES

1. Gaschutz, W. 1963, "Zur Theorie der endlichen auflosbaren Gruppen", *Math. Z.*, vol. 80, no. 4, pp. 300-305.

2. Hartley, B. 1969, "On Fischer's dualization of formation theory", *Proc. London Math. Soc.*, 1969, vol. 3, no 2, pp. 193-207.

3. Shemetkov, L. A. 1978, *Formatsii konechnyh grupp (Finite group formations)*, Nauka Publ., Moskva, 272 p. (in Russ.).

4. Vorob'ev, N. T. 1986, "O lokal'nyh radikal'nyh klassah (About local radical classes)", *Voprosy algebry*, no. 1, pp. 22-34. (in Russ.).

5. Skiba, A. N. 1997, *Algebra formatsiy (Algebra of formations)*, Belaruskaya navuka Publ., Minsk, 240 p. (in Russ.).

6. Skiba, A. N. & Shemetkov, L. A. 2000, "Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups", *Siberian Adv. Math.*, vol. 10, no. 2, pp. 112-141.

7. Vedernikov, V. A. & Sorokina, M. M. 2002, "ω-fibered formations and Fitting classes of finite groups", *Mathematical Notes*, vol. 71, no. 1, pp. 39–55.

8. Shemetkov, L. A. & Skiba, A. N. 1989, *Formatsii algebraicheskih sistem (Formations of algebraic systems)*, Nauka Publ., Moskva, 256 p. (in Russ.).

9. Doerk, K. & Hawkes, T. 1992, *Finite soluble groups* Walter de Gruyter Publ., Berlin – New York, 892 p.

10. Vedernikov, V. A. 2002, "On new types of ω-fibered Fitting classes of finite groups", *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 54, no. 7, pp. 897-906.

11. Korpacheva, M. A. & Sorokina, M. M. 2006, "On critical ω-fibered formations of finite groups", *Mathematical Notes*, vol. 79, no. 1, pp. 79–85.

12. Safonov, V. G. 2003, "On a question of the theory of totally local formations of finite groups", *Algebra and Logic*, vol. 42, no. 6, pp. 407–412.

13. Vorob'ev, N. N. 2012, *Algebra klassov konechnyh grupp (Algebra of classes of finite groups)*, VGU imeni P. M. Masherova Publ., Vitebsk, 322 p. (in Russ.).

14. Guo, Wenbin. 2015, *Structure theory for canonical classes of finite groups*, Springer-Verlag Publ., Berlin Heidelberg, 360 p.

15. Skiba, A. N. 2018, "On one generalization of the local formations", *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 1 (34), pp. 79-82.

Получено 12.10.2019 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 514.142.2+514.174.6 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-117-128

Теоремы существования и единственности решения обратных задач проективной геометрии для 3D реконструкции по фотоснимкам[1]

А. А. Клячин, В. А. Клячин

Алексей Александрович Клячин — доктор физико-математических наук, доцент, Волгоградский государственный университет (г. Волгоград).
e-mail: aleksey.klyachin@volsu.ru
Владимир Александрович Клячин — доктор физико-математических наук, доцент, Волгоградский государственный университет (г. Волгоград).
e-mail: klchnv@mail.ru

Аннотация

В работе рассматривается задача вычисления параметров плоскости пространственного треугольника по его центральной проекции. При определенных условиях доказана теорема существования решения этой задачи и его единственность. Приведены примеры условий, при которых решения не существует или оно не единственно. Так же предложен алгоритм приближенного поиска всех возможных решений задачи при выполнении определенных условий. Рассматриваемая в статье задача возникает при построении трехмерных моделей объектов по их фотоснимку.

Ключевые слова: центральная проекция, 3D реконструкция, геометрия треугольника.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
А. А.Клячин, В. А. Клячин. Теоремы существования и единственности решения обратных задач проективной геометрии для 3D реконструкции по фотоснимкам // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 117–128.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 19-47-340015, а также при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках научного проекта № 0633-2020-0004 «Развитие методики виртуальной 3D реконструкции исторических объектов»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 514.142.2+514.174.6 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-117-128

Existence and uniqueness theorems for solutions of inverse problems of projective geometry for 3D reconstruction from photographs

A. A. Klyachin, V. A. Klyachin

Alexey Alexandrovich Klyachin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Volgograd State University (Volgograd).
e-mail: aleksey.klyachin@volsu.ru
Vladimir Aleksandrovich Klyachin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Volgograd State University (Volgograd).
e-mail: klchnv@mail.ru

Abstract

The paper considers the problem of calculating the parameters of the plane of a spatial triangle from its central projection. Under certain conditions, the existence theorem for a solution to this problem and its uniqueness are proved. Examples of conditions under which a solution does not exist or is not unique are given. An algorithm for the approximate search of all possible solutions to the problem under certain conditions is also proposed. The problem considered in the article arises when constructing three-dimensional models of objects from their photograph.

Keywords: central projection, 3D reconstruction, triangle geometry.

Bibliography: 22 titles.

For citation:
A. A. Klyachin, V. A. Klyachin, 2020, "Existence and uniqueness theorems for solutions of inverse problems of projective geometry for 3D reconstruction from photographs", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 117–128.

1. Введение

Одна из сложных задач 3D моделирования – моделирование по плоскому изображению, различного рода фото и видео материалам реальных объектов. Это особенно актуально в задачах 3D реконструкции исторических архитектурных сооружений и целых комплексов, имеющих как историческую, так и культурную ценность. Подобные задачи реконструкции предполагают, в частности, решение ряда задач нацеленных на развитие методов и технологий 3D моделирования по плоскому изображению объекта при отсутствии какой-либо возможности доступа к реальному объекту. Здесь возникает ряд геометрических задач, связанных с особенностями и условиями подобных 3D реконструкций. Примерами таких задач могут быть: задачи определения характерных размеров реальных объектов и их составных частей, задачи определения их местоположения в пространстве (например, в терминах географических координат), задачи определения настроек камеры (ориентация камеры в пространстве), с помощью которой было получено изображение. Фундаментальная научно-техническая дисциплина, занимающаяся определением формы, размеров, положения и иных характеристик объектов по их фотоизображениям носит название фотограмметрия. Однако существенным отличием классических задач фотограмметрии (см., например [1],[2]) от задач рассматриваемых нами является практически неизвестные характеристики элементов внутреннего и внешнего ориентирования снимков (настроек камеры). Частичное нахождение этих характеристик и составляет определенную задачу настоящей статьи. В основе предлагаемой методики лежит поиск характерных наборов точек снимка, которые определяются существенно исходя из информации геометрического строения объекта съемки. Например, для архитектурных сооружений характерными точками могут быть угловые точки зданий, оконных проемов, точки, лежащие на параллельных прямых, пространственных окружностях и т.п.

В настоящей статье предпринята попытка решения задачи вычисления параметров плоскости пространственного треугольника по его центральной проекции. Надо отметить, что несколько подобных задач ранее были решены в статье [3].

Предполагается, что найденные решения могут быть использованы в задачах 3D реконструкции архитектурных комплексов довоенного Сталинграда по имеющимся фотоснимкам. Описание задачи этой реконструкции было дано в работе [4].

В плане задач определения тех или иных характеристик объектов по их снимкам имеется ряд публикаций, в которых решаются прикладные задачи в самых разнообразных отраслях науки и техники. Так в работах [5] –[7] исследуется совокупность характерных точек на изображении, образующая размытость. В работах [8] – [11] решается задача вычисления геометрических характеристик объекта по нескольким специально подготовленным его снимкам. В работах [12], [13] анализ характерных точек применяется в задачах 3D реконструкции в медицине. Отметим, что похожие задачи возникают в прикладной области компьютерного зрения. В частности, можно указать интересную работу [14], в которой решается задача 3D реконструкции лица по фотографии. Методика реконструкции основана на использовании обученной сверточной нейронной сети. В дополнении к этому отметим еще ряд публикаций, посвященных восстановлению трехмерных поверхностей по их плоскому изображению [15] – [18] на основе методов машинного обучения и накопленной базы данных изображений с данными буфера глубины.

В [19] предложен метод восстановления дефектных областей карт глубины, полученных 3D сканерами при анализе реальных объектов сцены для подготовки к реконструкции трёхмерных моделей поверхностей объектов.

В [20] рассмотрен класс задач о реконструкции внутренней структуры плоских и объемных объектов по внешним данным, находящимся в определенной структуре и имеющим возможность оцифровки. Так же отметим работы [21], [22], в которых решаются задачи восстановления пространственных множеств точек и поверхностей в несколько иной постановке задачи, чем в настоящей работе.

Всюду в статье используется модель камеры, состоящая из трех уравнений центральной проекции

$$(x, y, z) \to (X, Y) = \left(\frac{x}{z}\delta, \frac{y}{z}\delta\right),$$

где (x, y, z) – точка в пространстве, величины X, Y моделируют пиксельные координаты на изображении, которое располагается в плоскости $z = \delta, \delta > 0$. Предельным случаем центральной проекции является ортогональная проекция, заданная формулами

$$(x, y, z) \to (X, Y) = (x, y).$$

2. Математическая модель

В начале мы рассмотрим случай, когда на входном изображении предполагается наличие изображения пространственного треугольника с заданными углами $\beta_i, i = 0, 1, 2$. Задача состоит в том, чтобы определить параметры плоскости этого треугольника.

Пусть в пространстве заданы три точки $p_i = (x_i, y_i, z_i),\ z_i > 0,\ i = 0, 1, 2$ не лежащие на одной прямой и являющиеся вершинами треугольника. При этом, мы предполагаем, что нумерация соответствует некоторому обходу вдоль его сторон. Обозначим через Π – плоскость этого треугольника. Рассмотрим так же плоскость Q, заданную уравнением $z = 1$. Построим точки $q_i,\ i = 0, 1, 2, 3$ как проекции точек p_i на плоскость Q при центральной проекции с центром в начале координат. Положим $q_i = (X_i, Y_i, Z_i)$. Несложно видеть, что

$$\begin{cases} X_i &= \frac{x_i}{z_i} \\ Y_i &= \frac{y_i}{z_i} \\ Z_i &= 1 \end{cases}$$

Поскольку треугольник $q_0q_1q_2$ считается известным, то известными будут величины углов

$$\alpha_0 = \angle q_0Oq_1, \quad \alpha_1 = \angle q_1Oq_2, \quad \alpha_2 = \angle q_2Oq_0.$$

Для углов в треугольнике $p_0p_1p_2$ введем обозначения

$$\beta_0 = \angle p_2p_0p_1, \quad \beta_1 = \angle p_0p_1p_2, \quad \beta_2 = \angle p_1p_2p_0.$$

Величины этих углов так же считаются известными. Ясно, что ориентация плоскости этого треугольника может быть определена с точностью до гомотетичного преобразования относительно начала координат: при этом центральная проекция треугольника не измениться. Так, что достаточно определить радиус-векторы точек p_0, p_1, p_2 также с точностью до преобразования гомотетии. Для определенности будем считать, что углы в треугольнике пронумерованы так, что $\beta_0 \geq \beta_1 \geq \beta_2$.

Согласно теореме синусов имеют место равенства

$$\frac{|p_0p_1|}{\sin\beta_2} = \frac{|p_0p_2|}{\sin\beta_1} = \frac{|p_1p_2|}{\sin\beta_0}.$$

Откуда

$$\frac{|p_0p_1|}{|p_1p_2|} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_0} = \lambda, \tag{1}$$

$$\frac{|p_0p_2|}{|p_1p_2|} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_0} = \mu. \tag{2}$$

В силу выбора нумерации углов треугольника $\Delta p_0p_1p_2$ эти величины удовлетворяют неравенствам $\lambda, \mu \leq 1$.

По теореме косинусов можно записать равенства

$$\begin{cases} |p_0|^2 + |p_1|^2 - 2|p_0||p_1|\cos\alpha_0 = |p_0p_1|^2, \\ |p_1|^2 + |p_2|^2 - 2|p_1||p_2|\cos\alpha_1 = |p_1p_2|^2, \\ |p_2|^2 + |p_0|^2 - 2|p_2||p_0|\cos\alpha_2 = |p_2p_0|^2. \end{cases}$$

Учитывая обозначения для величин λ, μ, получим

$$\begin{cases} |p_0|^2 + |p_1|^2 - 2|p_0||p_1|\cos\alpha_0 = \lambda^2(|p_1|^2 + |p_2|^2 - 2|p_1||p_2|\cos\alpha_1), \\ |p_2|^2 + |p_0|^2 - 2|p_2||p_0|\cos\alpha_2 = \mu^2(|p_1|^2 + |p_2|^2 - 2|p_1||p_2|\cos\alpha_1). \end{cases}$$

Полагая $u = |p_1|/|p_0|,\ v = |p_2|/|p_0|$, приходим к следующей системе квадратичных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + u^2 - 2u\cos\alpha_0 = \lambda^2(u^2 + v^2 - 2uv\cos\alpha_1), \\ v^2 + 1 - 2v\cos\alpha_2 = \mu^2(u^2 + v^2 - 2uv\cos\alpha_1). \end{array}\right.$$

И, окончательно,

$$\left\{\begin{array}{l} (1-\lambda^2)u^2 - \lambda^2 v^2 + 2\lambda^2 uv\cos\alpha_1 - 2u\cos\alpha_0 + 1 = 0, \\ -\mu^2 u^2 + (1-\mu^2)v^2 + 2\mu^2 uv\cos\alpha_1 - 2v\cos\alpha_2 + 1 = 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

В следующем разделе будет приведен алгоритм поиска всех приближенных решений этой системы уравнений. Перед этим мы докажем теорему, в которой будут представлены достаточные условия существования и единственности рассматриваемой задачи. С этой целью мы ее немного переформулируем. Именно, требуется для треугольника $\Delta p_0p_1p_2$ с углами $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ и заданного набора величин углов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ найти точку $p \in \mathbb{R}^3$, такую, что

$$\angle p_0pp_1 = \alpha_0, \quad \angle p_1pp_2 = \alpha_1, \quad \angle p_2pp_0 = \alpha_2. \tag{4}$$

Имеет место

Теорема 1. *Если для треугольника $\Delta p_0p_1p_2$ с углами $\beta_i, i = 0,1,2$ выполнено $\beta_i \le \pi/2$, а заданные величины α_i удовлетворяют условиям $\alpha_i \ge \pi/2$ и $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 \le 2\pi$, то найдется единственная точка p такая, что выполнены равенства (4).*

Доказательство. Для каждой стороны $p_ip_j, i,j = 0,1,2, i < j$ заданного треугольника построим множество точек

$$S_{ij} = \{q \in \mathbb{R}^3 : \angle p_ixp_j = \alpha_i\},$$

при этом рассматриваются только те точки q, которые лежат в том же полупространстве относительно плоскости треугольника $\Delta p_0p_1p_2$, что и начало координат. Множество S_{ij} представляет собой половину поверхности вращения дуги окружности, опирающейся на соответствующую сторону этого треугольника вокруг этой стороны. Угловая величина этой дуги в точности равна соответствующей величине α_i. Поскольку $\alpha_i \ge \pi/2$, то эти поверхности являются выпуклыми и их можно рассматривать как графики функций $f_{ij}(q),\ 0 \le i < j \le 1$, где точка q принадлежит плоскости треугольника $\Delta p_0p_1p_2$. У каждой такой функции своя область определения, которая ограничена двумя дугами окружностей, опирающихся на соответствующую сторону p_ip_j треугольника $\Delta p_0p_1p_2$. Заметим, что искомая точка p является точкой пересечения трех поверхностей S_{ij}. Этой точке соответствует решение системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} f_{12}(q) = f_{01}(q), \\ f_{02}(q) = f_{01}(q). \end{array}\right. \tag{5}$$

Заметим, что пересечение областей определения функций f_{ij} не пусто только если $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 \le$ $\le 2\pi$. Причем, если сумма этих углов в точности равна 2π, то пересечением является единственная точка. Она же в этом случае будет искомой. Так, что в дальнейшем считаем, что выполнено строгое неравенство $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 < 2\pi$. Тогда пересечением областей определения функций f_{ij} является выпуклая область $\Omega \subset \Pi$ ограниченная тремя дугами окружностей, опирающихся на соответствующие стороны треугольника $\Delta p_0p_1p_2$, имеющих соответствующее угловое значение α_i и расположенных в той же полуплоскости относительно сторон треугольника $\Delta p_0p_1p_2$, что и сам треугольник. Пусть q_0, q_1, q_2 – точки, в которых указанные дуги окружностей соединяются. Нумерация точек выполнена так, что бы $f_{ij}(x) = 0$, если x принадлежит дуге q_iq_j. Покажем, что внутри Ω имеется по крайней мере одно решение системы (5). Действительно, заметим, что на дуге q_1q_2 найдется точка q', в которой $f_{01}(q') = f_{02}(q') > 0$. Рассмотрим непрерывную кривую $\gamma(t)$ вдоль которой $f_{01} = f_{02}$ и такую, что $\gamma(0) = p_0, \gamma(1) = q'$. Положим $\varphi(t) = f_{01}(\gamma(t)) = f_{02}(\gamma(t))$ и $\psi(t) = f_{12}(\gamma(t))$. Поскольку $\psi(0) > 0, \psi(1) = 0$ и $\varphi(0) = 0, \varphi(1) > 0$, то найдется такое t_0, что будет выполнено равенство $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$. Не трудно видеть, что точка $\gamma(t_0)$ является решением системы (5). Положим

$$D_c = \{x : f_{01}(x) > c,\ f_{02}(x) > c,\ f_{12}(x) > c\}.$$

Эти множества являются выпуклыми, причем $D_{c''} \subset D_{c'}$ при $c' < c''$. Ясно, что $D_0 = \Omega$ содержит все решения системы (5). Найдется такое $c_0 > 0$, что при всяком $0 < c < c_0$ множество D_c будет содержать все решения системы (5). В дальнейшем считаем, что $0 < c < c_0$.

Рассмотрим множества

$$E^c_{01} = \{x : f_{01} > c, f_{12} > c\},$$

$$E^c_{02} = \{x : f_{01} > c, f_{02} > c\},$$

$$E^c_{12} = \{x : f_{02} > c, f_{12} > c\}.$$

Каждое из этих множеств выпукло и имеет границу состоящую из двух выпуклых дуг линий уровня соответствующих функций. Эти линии уровня явяются выпуклыми кривыми, опирающимися на соответствующие стороны треугольника $\Delta p_0p_1p_2$. Поэтому они пересекаются в двух точках. В результате мы получаем шесть точек пересечения линий уровня функций f_{ij}, причем три из них ограничивают дуги образующих криволинейный треугольник, являющийся границей выпуклого множества D_c. Рассмотрим выпуклое множество

$$D_0 = \cap_{0<c<c_0} \overline{D_c}.$$

Это множество замкнуто и выпукло. Предположим, что его внутренность не пуста. Тогда $D_0 = \overline{D}_{c_0}$ и по выбору значения c_0 на границе этого множества имеется решение q системы (5). Получаем, что с одной стороны $D_0 = \overline{D}_{c_0}$ и граница этого множества состоит из трех выпуклых дуг линий уровня функций $f_{ij}(x)$, а сдругой стороны эти дуги перескаются в точке $q' \in \partial D_0$ на его границе. Получим противоречие с предположением, что внутренность множества D_0 не пуста. Таким образом D_0 состоит из единственной точки q' или является отрезком. Последнее невозможно, так как функции f_{ij} строго выпуклы вверх. Таким образом, q' – единственное решение системы (5). Теорема доказана.

Замечание 1. Из этой теоремы следует однозначное восстановление плоскости пространственного треугольника с точностью до гомотетии по его проекции, при условии, что углы α_i удовлетворяют указанным в теореме требованиям. Действительно, предположим, что можно найти два равных треугольника, но расположенных в различных плоскостях, не сводящихся одна к другой преобразованием гомотетии относительно начала координат и имеющих совпадающие проекции в плоскости $z = 1$. Таким образом мы имеем два тетраэдра в основаниях которых лежат выбранные треугольники, а вершинами является начало координат. Движением совместим основания этих тетраэдров, так, что бы вершины оказались по одно сторону от общей плоскости их оснований. Эти вершины не будут совпадать поскольку треугольники лежали в разных плоскостях. Но, с другой стороны, это противоречит утверждению теоремы 1. Таким образом предположении о существовании двух указанных выше треугольников ошибочно.

Замечание 2. В общем случае теорема существования не справедлива. Действительно, рассмотрим три произвольных, взаимно ортогональных вектора e_1, e_2, e_3, направленных вверх по отношению оси Oz. Построим три луча в направлениях $e_i, i = 1, 2, 3$. Плоскость пересекающая эти три луча пересекает их в вершинах всегда остроугольного треугольника. Таким образом, не существует пространственного треугольника с углами $\beta_i,\ i = 0, 1, 2$ с хотя бы одним углом не меньше чем $\pi/2$ и проектирующегося в треугольник на плоскости $z = 1$ так, что $\alpha_i = \pi/2,\ i = 0, 1, 2$.

Замечание 3. Приведем пример не единственности решения поставленной задачи. Рассмотрим точки $p_0 = (0,0,d)$, $p_1 = (h,0,d)$, $p_2 = (0,h,d)$, лежащие на плоскости $z = d > 1$. Соответствующие проекции этих точек на плоскость $z = 1$ будут $q_0 = (0,0,1)$, $q_1 = (\frac{h}{d},0,1)$, $q_2 = (0,\frac{h}{d},1)$. Будем предполагать, что угол $\angle p_1Op_2 < \pi/4$. В треугольнике Δp_0Op_2 проведем высоту p_0L и рассмотрим точку p_2', лежащую на отрезке OL и такую, что $|p_0p_2'| = |p_0p_2|$. Очевидно, что треугольники $\Delta p_1p_0p_2$ и $\Delta p_1p_0p_2'$ равны так как оба прямоугольные и катеты у них равны. Таким образом, мы получили два треугольника с равными углами, лежащими в не параллельных плоскостях и центральные проекции которых равны одному и тому же треугольнику $\Delta q_1q_0q_2$.

3. Алгоритм поиска приближенных решений задачи

Для приближенного поиска всех решений системы (3) мы будем использовать двумерный аналог метода деления отрезка. Поэтому, в первую очередь, нужно определить прямоугольник на плоскости (u,v), в пределах которого находятся все решения этой системы.

Ясно, что $u > 0, v > 0$. Следовательно, достаточно получить верхнюю оценку границы изменения параметров u и v. Для этого воспользуемся равенствами (1) и (2). Используя неравенства

$$|p_0p_1| \geq ||p_0| - |p_1||,\ |p_0p_2| \geq ||p_0| - |p_2||,\ |p_1p_2| \leq |p_1| + |p_2|,$$

получаем

$$\frac{||p_0| - |p_1||}{|p_1| + |p_2|} \leq \lambda, \quad \frac{||p_0| - |p_2||}{|p_1| + |p_2|} \leq \mu.$$

Тогда, учитывая определения параметров u и v, приходим к неравенствам

$$\frac{|1-u|}{u+v} \leq \lambda,\ \frac{|1-v|}{u+v} \leq \mu.$$

На плоскости (u,v) они определяют четырехугольник с вершинами

$$\left(\frac{1-\lambda+\mu}{1+\lambda+\mu}, \frac{1+\lambda-\mu}{1+\lambda+\mu}\right),\ \left(\frac{1-\lambda-\mu}{1+\lambda-\mu}, \frac{1+\lambda+\mu}{1+\lambda-\mu}\right),$$

$$\left(\frac{1+\lambda+\mu}{1-\lambda+\mu}, \frac{1-\lambda-\mu}{1-\lambda+\mu}\right),\ \left(\frac{1+\lambda-\mu}{1-\lambda-\mu}, \frac{1-\lambda+\mu}{1-\lambda-\mu}\right).$$

Отметим, что из неравенства треугольника и равенств (1) и (2) имеем

$$\lambda + \mu = \frac{|p_0p_1| + |p_0p_2|}{|p_1p_2|} > 1,$$

так как мы раньше предположили, что точки p_0, p_1, p_2 не лежат на одной прямой. Отсюда следует, что часть этого четырехугольника, для которой $u \geq 0$ и $v \geq 0$, будет лежать в прямоугольнике $[0,a] \times [0,b]$, где

$$a = \max\left\{\frac{1-\lambda+\mu}{1+\lambda+\mu}, \frac{1+\lambda+\mu}{1-\lambda+\mu}\right\},$$

$$b = \max\left\{\frac{1+\lambda-\mu}{1+\lambda+\mu}, \frac{1+\lambda+\mu}{1+\lambda-\mu}\right\}.$$

Теперь перейдем к описанию алгоритма. Обозначим через Γ_λ и Γ_μ кривые, задаваемые уравнениями системы (3). Будем предполагать, что Γ_λ и Γ_μ не являются эллипсами.

1. Разделим прямоугольник $[0,a]\times[0,b]$ на четыре прямоугольника прямыми $u=\frac{a}{2}$ и $v=\frac{b}{2}$.

2. Выберем из получившихся прямоугольников те, которые пересекают обе кривые Γ_λ и Γ_μ.

3. Для каждого из найденных прямоугольников повторяем те же действия: разбиваем на четыре прямоугольника прямыми, проходящими через середины сторон и вбираем из получившихся прямоугольников те, которые пересекают обе кривые Γ_λ и Γ_μ.

4. Далее шаг 3 повторяется до тех пор, пока размеры получающихся прямоугольников не будут отвечать требуемой погрешности вычисления корней системы.

5. Затем выбираем не более четырех прямоугольников из получившихся на последнем шаге, каждый из которых не имеет общих точек с другими. В качестве решений можно взять центры этих прямоугольников.

Теперь поясним некоторые моменты алгоритма. Во-первых, отбрасывая прямоугольники, которые не пересекаются с обеими кривыми Γ_λ и Γ_μ, мы на каждом шаге будем иметь не более 16 прямоугольников. Поэтому количество рассматриваемых на каждом шаге прямоугольников не будет неограниченно возрастать. Во-вторых, предположение, что кривые Γ_λ и Γ_μ не эллипсы дает возможность свести проверку пересечения этих кривых с прямоугольником к проверке их пересечения со сторонами прямоугольника. Данная проверка осуществляется следующим образом.

Пусть, для определенности, нужно проверить пересекает ли кривая Γ_λ отрезок (как одну из сторон некоторого прямоугольника) $u=u_0, v_1\le v\le v_2$. Это равносильно тому, что нужно выяснить имеет ли квадратный трехчлен (относительно переменной v)

$$f(v)=(1-\lambda^2)u_0^2-\lambda^2v^2+2\lambda^2u_0v\cos\alpha_1-2u_0\cos\alpha_0+1$$

хотя бы один корень на отрезке $[v_1,v_2]$. Обозначим через $v^*=u_0\cos\alpha_1$ точку, соответствующую вершине параболы. Тогда $f(v)$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[v_1,v_2]$ только в том случае, если выполняется одно из условий

1. $f(v_1)f(v_2)\le 0$;

2. $v^*\in[v_1,v_2]$ и либо $f(v_1)f(v^*)\le 0$ либо $f(v^*)f(v_2)\le 0$.

Аналогично осуществляется проверка для второй кривой и других сторон прямоугольника. Отметим, что описанный алгоритм за n шагов дает погрешность вычисления корней системы (3) не превосходящую величины $\frac{\max\{a,b\}}{2^n}$.

Замечание 4. В силу того, что измерения углов треугольника $q_0q_1q_2$ для последующего вычисления углов $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ несут в себе определенную погрешность, возникает вопрос об устойчивости найденного приближенного решения относительно этих углов. Отметим, что углы β_0,β_1 и β_2 не требуют измерений, так как они считаются известными. Для исследования этого вопроса мы предлагаем следующий подход.

Пусть (u^*,v^*) – точное решение системы (3), а (u_n,v_n) – приближенное решение, сходящееся к (u^*,v^*) и найденное на n-ом шаге итерации. Систему уравнений (3) запишем в виде

$$\begin{cases} F(u,v,\cos\alpha_0,\cos\alpha_1,\cos\alpha_2)=0,\\ G(u,v,\cos\alpha_0,\cos\alpha_1,\cos\alpha_2)=0.\end{cases}$$

Для проверки устойчивости можно воспользоваться теоремой об обратном отображении. Вычислим якобиан этой системы

$$J(u,v) = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = 4(\mu^2\cos\alpha_1 u^2 + \lambda^2\cos\alpha_1 v^2+$$

$$+(1-\lambda^2-\mu^2)uv - (\lambda^2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + (1-\mu^2)\cos\alpha_0)v-$$
$$-((1-\lambda^2)\cos\alpha_2 + \cos\alpha_0\alpha_1\mu^2)u + \cos\alpha_0\cos\alpha_2).$$

Если $J(u_n,v_n)$ не сходится к 0 при $n\to\infty$, то точка (u^*,v^*) будет непрерывно зависеть от α_0,α_1 и α_2. Рассмотрим, например, частный случай, когда $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\pi/2$. Тогда из системы (3) видно, что $u^*\neq 0$ и $v^*\neq 0$. Поэтому они положительны. Следовательно,

$$J(u^*,v^*) = (1-\lambda^2-\mu^2)u^*v^* = 0$$

только если $\lambda^2+\mu^2=1$, что соответствует прямоугольному треугольнику. Таким образом, может наблюдаться неустойчивость решения, если сам треугольник $p_0p_1p_2$ прямоугольный и углы $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\pi/2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов А. П., Чибуничев А. Г. Курс лекций по фотограмметрии. МИИГАиК Ракурс, 2013.

2. Лобанов А. Н., Куприна Н. Т., Чумаченко З. Н. Фотограмметрия. М.: «Недра», 1984. – 552 с.

3. Клячин В.А., Григорьева Е.Г. Алгоритм автоматического определения параметров ориентации камеры в пространстве на основе характерных элементов фотоснимка// Тенденции развития науки и образования. 2018. № 45-6. С. 10–20.

4. Grigorieva E. G., Klyachin V. A. Mathematical model of 3D maps and design of information system for its control//Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2016., № 4 p. 51–58.

5. Локтев Д.А., Быков Ю.А., Коваленко Н. Использование метода анализа размытия изображения для определения внешних дефектов железнодорожного пути // Наука и техника транспорта. 2016. № 1. С. 69–75.

6. Локтев А.А., Локтев Д.А. Метод определения расстояния до объекта путем анализа размытия его изображения // Вестник МГСУ. 2015. № 6. С. 140–151.

7. Локтев А.А., Бахтин В.Ф., Черников И.Ю., Локтев Д.А. Методика определения внешних дефектов сооружений путем анализа серии его изображений в системе мониторинга // Вестник МГСУ. 2015. № 3. С. 7–16.

8. Локтев Д.А., Локтев А.А. Определение расстояния до объекта по серии его изображений // В сборнике: Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе (МИЕСЭКО – 2015) труды Всероссийской научной конференции: в 2-х томах. 2015. С. 52–57.

9. Локтев Д.А. Определение геометрических параметров объекта с помощью анализа серии его изображений // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2015. Т. 9. № 5. С. 47–53.

10. Локтев А.А., Локтев Д.А. Оценка измерений расстояния до объекта при исследовании его графического образа // Вестник МГСУ. 2015. № 10. С. 54–65.

11. Локтев Д.А. Определение параметров объекта по серии его изображений в комплексной системе мониторинга //Путь и путевое хозяйство. 2015. № 2. С. 31–33.

12. Недзьведь О.В., Абламейко С.В., Белоцерковский А.М. Определение объемных характеристик динамических медицинских объектов // «Искусственный интеллект» 2010. № 4. С. 262–270.

13. Миров С., Иванов А., Огурцова Т., Дюкенджиев Е. Применение данных дистанционного зондирования в подометрии // 4-я Международная конференция пользователей ЦФС PHOTOMOD : Сборник тезисов докладов. – 2004. – С. 25–28.

14. Jackson A. S. et al. Large pose 3D face reconstruction from a single image via direct volumetric CNN regression //2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). – IEEE, 2017. – p. 1031–1039.

15. Ferkova, Z., Urbanova, P., Cerny, D., Zuzi, M., & Matula, P. (2018). Age and gender-based human face reconstruction from single frontal image. // Multimedia Tools and Applications, 1–26.

16. Pang, G., Qiu, R., Huang, J., You, S., Neumann, U. (2015, May). Automatic 3D industrial point cloud modeling and recognition. In 2015 14th IAPR international conference on machine vision applications (MVA) (pp. 22-25). IEEE.

17. Kamyab, S., Ghodsi, A., Azimifar, Z. Deep Structure for end-to-end inverse rendering. // ArXiv, abs/1708.08998 (2017).

18. Kamyab S. and Zohreh A. End-to-end 3D shape inverse rendering of different classes of objects from a single input image. // ArXiv, abs/1711.05858 (2017).

19. Левина О.С., Воронин В.В., Письменскова М.М., Гапон Н.В., Куркина А.В. Анализ основных этапов метода реконструкции трехмерных моделей поверхностей объектов // Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации. 2016. № 6-2. С. 25–32.

20. Тагиров Т.С. Алгоритмические методы решения задач реконструкции объектов в 2D и 3D областях // «Современные проблемы науки и образования» № 2, 2014.

21. Penczek P. A. Fundamentals of three-dimensional reconstruction from projections. // Methods Enzymol. 2010;482:1?33. doi:10.1016/S0076-6879(10)82001-4

22. Molnar, J., Frohlich, R., Chetverikov, D., Kato, Z. 3D reconstruction of planar patches seen by omnidirectional cameras. // In 2014 International Conference on Digital Image Computing: Techniques and Applications (DICTA) . IEEE. 2014. p. 1–8.

REFERENCES

1. Mikhailov A. P. & Chibunichev A. G. 2013. *Kurs lekcij po fotogrammetrii [Course of lectures on photogrammetry],* Moscow State University of Geodesy and Cartography, Racurs, Moscow.

2. Lobanov A. N., Kuprina N. T. & Chumachenko З. N. 1984. *Fotogrammetriya [Photogrammetry]*, «Nedra», Moscow, pp. 552.

3. Klyachin V.A. & Grigorieva E.G. 2018. "Algorithm for automatic determination of camera orientation parameters in space based on characteristic elements of a photograph", *Tendencii razvitiya nauki i obrazovaniya.*, no. 45-6, pp. 10 – 20.

4. Grigorieva E. G.& Klyachin V. A. 2016. ”Mathematical model of 3D maps and design of information system for its control”, *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, no. 4, pp. 51 – 58.

5. Loktev D.A., Bykov Yu.A. & Kovalenko N. 2016. ”Using the method of image blur analysis to determine external defects of the railway”, *Nauka i texnika transporta*, no. 1, pp. 69 – 75

6. Loktev A.A. & Loktev D.A. 2015. ”Method of determining the distance to the object by analyzing the blurring of its image”, *Vestnik MGSU*, no. 6, pp. 140 – 151.

7. Loktev A.A., Bakhtin V.F., Chernikov I.Y. & Loktev D.A. 2015. ”Methods for determining the external defects of structures by analyzing a series of its images in the monitoring system”, *Vestnik MGSU*, no. 3, pp. 7 – 16.

8. Loktev D.A. & Loktev A.A. 2015. ”Determining the distance to an object from a series of its images”, *V sbornike: Matematika, informatika, estestvoznanie v ekonomike i obshhestve trudy Vserossijskoj nauchnoj konferencii: v 2-x tomax* (In the collection: Mathematics, Informatics, Science in Economics and Society, works All-Russian scientific conference: in 2 volumes). Moscow. 2015. pp. 52 – 57)

9. Loktev D.A. 2015. ”Determination of geometric parameters of the object by analyzing a series of its images”, *T-Comm: Telekommunikacii i transport*, vol. 9, no. 5, pp. 47 – 53

10. Loktev A.A. & Loktev D.A. 2015. ”Estimation of measurements of distance to object at research of its graphic image”, *Vestnik MGSU*, no. 10, pp. 54 – 65.

11. Loktev D.A. 2015. ”Determination of object parameters by a series of its images in a complex monitoring system”, *Put‘ i putevoe xozyajstvo*, no. 2, pp. 31 – 33.

12. Nedzved O.V., Ablameiko S.V. & Belotserkovsky A.M. 2010. ”Determination of volumetric characteristics dynamic medical objects”, *Iskusstvenny‘j intellekt*, no. 4, pp. 262 – 270.

13. Mirov S., Ivanov A., Ogurtsova T. & Dyukendzhiev E. 2004. ”Application of remote sensing data in podometry”, *4-ya Mezhdunarodnaya konferenciya pol‘zovatelej CzFS PHOTOMOD : Sbornik tezisov dokladov* (4th International Conference of users of CFS PHOTOMOD: Collection of abstracts.) pp. 25 – 28.

14. Jackson A. S. et al. 2017. ”Large pose 3D face reconstruction from a single image via direct volumetric CNN regression” *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV).* IEEE, pp. 1031 – 1039.

15. Ferkova, Z., Urbanova, P., Cerny, D., Zuzi, M., & Matula, P. 2018. ”Age and gender-based human face reconstruction from single frontal image”, *Multimedia Tools and Applications*, pp. 1 – 26.

16. Pang, G., Qiu, R., Huang, J., You, S., & Neumann, U. 2015, ”Automatic 3D industrial point cloud modeling and recognition”, *In 2015 14th IAPR international conference on machine vision applications (MVA).* IEEE. pp. 22 – 25.

17. Kamyab S., Ghodsi A. & Azimifar, Z. 2017, ”Deep Structure for end-to-end inverse rendering”, *ArXiv, abs/1708.08998.*

18. Kamyab S. and Zohreh A. 2017, ”End-to-end 3D shape inverse rendering of different classes of objects from a single input image”, *ArXiv, abs/1711.05858.*

19. Levina O.S., Voronin V.V., Pis'menkova M.M., Gapon N.V.,& Kurkina A.V. 2016, "Analysis of the main stages of the method of reconstruction of three-dimensional models of object surfaces", *Informacionnye tehnologii. Radiojelektronika. Telekommunikacii*, no. 62. pp. 25 – 32.

20. Tagirov T.S. 2014, "Algorithmic methods for solving problems of reconstruction of objects in 2D and 3D regions", *Sovremennye problemy nauki i obrazovanija*, no. 2.

21. Penczek P. A. 2010, "Fundamentals of three-dimensional reconstruction from projections", *Methods Enzymol.*, no. 482, pp. 1 – 33. doi:10.1016/S0076-6879(10)82001-4

22. Molnar, J., Frohlich, R., Chetverikov, D. & Kato, Z. 2014, "3D reconstruction of planar patches seen by omnidirectional cameras", *In 2014 International Conference on Digital Image Computing: Techniques and Applications (DICTA).* IEEE. pp. 1 – 8.

Получено 11.06.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 512.554 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-129-139

Образы неассоциативных мультилинейных полиномов на алгебре камня, ножниц и бумаги с единицей и её подалгебрах

С. Малев, К. Пинс

Сергей Малев — доктор философии, лектор, Ариэльский университет Самарии (г. Ариэль, Израиль).
e-mail: sergeyma@ariel.ac.il
Коби Пинс — бакалавр, студент магистратуры, Ариэльский университет Самарии (г. Ариэль, Израиль).
e-mail: cobypinesdirac@gmail.com

Аннотация

Для произвольного поля $\mathbb{F}$ мы рассматриваем коммутативную неассоциативную четырёхмерную алгебру $\mathfrak{M}$ камня, ножниц и бумаги с единичным элементом над полем $\mathbb{F}$ и доказываем, что образ произвольного неассоциативного мультилинейного полинома над $\mathfrak{M}$ является линейным пространством. Тот же вопрос мы рассматриваем и для двух подалгебр: алгебры камня, ножниц и бумаги без единицы, а также, алгебры элементов нулевого следа и нулевой скалярной части. Кроме того, в работе поставлены задачи и рассмотрены вопросы о возможных образах однородных полиномов на этих алгебрах.

Ключевые слова: Гипотеза Львова-Капланского, мультилинейные полиномы, неассоциативные алгебры, полиномиальные тождества.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
С. Г. Малев, К. Пинс Образы неассоциативных мультилинейных полиномов на алгебре камня, ножниц и бумаги с единицей и её подалгебрах над произвольным полем // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 129–139.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 512.554 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-129-139

The images of multilinear non-associative polynomials evaluated on a rock-paper-scissors algebra with unit over an arbitrary field and its subalgebras

S. Malev, C. Pines

Sergey Malev — PhD, lecturer, Ariel University of Samaria (Ariel, Israel).
e-mail: sergeyma@ariel.ac.il
Coby Pines — bachelor's degree, M.Sc. student, Ariel University of Samaria (Ariel, Israel).
e-mail: cobypinesdirac@gmail.com

Abstract

Let $\mathbb{F}$ be an arbitrary field. We consider a commutative, non-associative, 4-dimensional algebra $\mathfrak{M}$ of the rock, the paper and the scissors with unit over $\mathbb{F}$ and we prove that the image over $\mathfrak{M}$ of every non-associative multilinear polynomial over $\mathbb{F}$ is a vector space. The same question we consider for two subalgebras: an algebra of the rock, the paper and the scissors without unit, and an algebra of trace zero elements with zero scalar part. Moreover in this paper we consider the questions of possible eveluations of homogeneous polynomials on these algebras.

Keywords: L'vov-Kaplansky Conjecture, multilinear polynomials, non-associative algebras, polynomial identities.

Bibliography: 14 titles.

For citation:
S. Malev, C. Pines, 2020, "The images of multilinear non-associative polynomials evaluated on a rock-paper-scissors algebra with unit over an arbitrary field and its subalgebras.", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 129–139.

Dedicated to the 80-th anniversary of A. V. Mikhalev

1. Introduction

The study of images of polynomials evaluated on algebras is one of the most important branches of modern algebra. Similar questions for word maps in groups were considered in [6, 8]. Waring type problems for groups were investigated by Shalev [11, 12, 13]. Similar questions for matrix rings were investigated by Brešar ([6]). A good survey describing these and other references can be found in [5].

One of the central conjectures regarding possible evaluations of multilinear polynomials on matrix algebras was attributed to Kaplansky and formulated by L'vov in [7]:

Conjecture 1 (L'vov-Kaplansky). *Let p be a non-commutative multilinear polynomial. Then the set of values of p on the matrix algebra $M_n(K)$ over an infinite field K is a vector space.*

It is well-known ([1, 2, 3, 4, 5, 9, 10]) that this conjecture can be reformulated as follows:

Conjecture 2. *If p is a multilinear polynomial evaluated on the matrix ring $M_n(K)$, then* $\operatorname{Im} p$ *is either* $\{0\}, K, \mathrm{sl}_n(K)$, *or* $M_n(K)$. *Here K indicates the set of scalar matrices and* $\mathrm{sl}_n(K)$ *is the set of matrices with trace equal to zero.*

When $n = 2$, for the case of K being quadratically closed it was proved in [1], and in [9] it was proved for the case of $K = \mathbb{R}$, and an interesting result was obtained for arbitrary fields.

For $n > 2$ this question was considered in [2, 3, 5] and partial results were obtained. In [10] the same question was considered for the algebra of quaternions with the Hamilton multiplication and it was shown that any evaluation of a multilinear polynomial is a vector space. In the same paper it was said that this question is interesting only for simple algebras, since for non-simple algebras it may be answered negatively. Indeed, this conjecture fails for the Grassmann algebra.

Nevertheless, there is an interest in the investigation of this question for non-simple algebras: for some of them the Kaplansky question can be answered positively. For example, if we consider the 8-dimensional algebra $M_2(K) \oplus M_2(K)$ (which is not simple) then it is easy to see that the evaluation of any multilinear polynomial is a pair of its evaluations on $M_2(K)$ and thus, the only possible multilinear evaluations are vector spaces:

$$\{0\}, K \oplus K, \mathrm{sl}_2(K) \oplus \mathrm{sl}_2(K), \text{ or } M_2(K) \oplus M_2(K).$$

In this paper we consider a non-simple algebra, defined in Section 2. Unlike the previous results regarding this area, this algebra is non-associative and commutative and, although we consider non-associative commutative evaluations, the answer to the L'vov-Kaplansky conjecture for this algebra is positive.

Previously, non-associative algebras (in particular the algebra of Cayley numbers) were considered in [14]. The question of possible multilinear non-associative evaluations was considered in [4] where the Kaplansky conjecture was considered for Lie polynomials.

In [1, 2, 3, 4, 5, 9, 10] the question of possible semi-homogeneous evaluations was investigated, and here we consider such a question as well. Unfortunately, we have not succeeded to answer it. However, in Section 7 we formulate interesting conjectures and discuss them.

2. Preliminaries

Let $(X, \cdot)$ be a finite monad i.e X is a finite set together with a binary operation $\cdot$ for which there is a unit element with respect to $\cdot$. Let $\mathbb{F}$ be an arbitrary field and denote by $M_{\mathbb{F}}(X)$ the free vector space over $\mathbb{F}$ with basis set X. By extending multiplication from X to $M_{\mathbb{F}}(X)$ bilinearly, we obtain a non-associative algebra with unit. We call $M_{\mathbb{F}}(X)$ the monad algebra of X over $\mathbb{F}$.

We now consider the monad $X = \{1, R, P, S\}$ with multiplication defined as follows: multiplication is commutative, 1 serves as the unit element, all elements of X are idempotent and $R \cdot P = P$, $P \cdot S = S$ and $S \cdot R = R$. This monad is the well known rock- paper- scissors magma, where each element is idempotent and the product is the winner in one of the most well-known games.

In what follows, we shall write $\mathfrak{M} := M_{\mathbb{F}}(X)$. It follows that $\mathfrak{M}$ is a commutative, non-associative, 4-dimensional algebra with unit over $\mathbb{F}$.

When evaluating polynomials on non-associative algebras, we must consider non-associative polynomials. A non-associative polynomial over a field $\mathbb{F}$ is, intuitively, a polynomial over $\mathbb{F}$ in which the placing of brackets in each monomial matters. For instance, the polynomials:

$$p_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(x_2(x_3x_4)),\ p_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2)(x_3x_4)$$

are considered to be different non-associative polynomials.

Let $\mathcal{A}$ be a non-associative algebra over a field $\mathbb{F}$ and let $p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ be a non-associative polynomial over $\mathbb{F}$.
The associated polynomial function is denoted by $\tilde{p}$.
The image of p over $\mathcal{A}$, $\mathrm{Im}_{\mathcal{A}}(p)$, is the evaluation of the associated polynomial function $\tilde{p}$ on the algebra $\mathcal{A}$. Usually the choice of the algebra is evident, and we write simply $\mathrm{Im}\, p$.

A non-associative polynomial over a field $\mathbb{F}$ is called multilinear if it is linear with respect to each of the variables. This means in particular, that each variable appears exactly once in each monomial.

For $x = x_0 1 + aP + bR + cS \in \mathfrak{M}$, we define the scalar part of x to be $\mathrm{Sc}(x) := x_0$ and the trace of x to be $\mathrm{tr}(x) := x_0 + a + b + c$.
It is obvious that $\mathrm{Sc}\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{F}$ and $\mathrm{tr}\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{F}$ are linear functions on the vector space $\mathfrak{M}$. Moreover, they also respect multiplication on $\mathfrak{M}$ i.e for $x, y \in \mathfrak{M}$:

$$\mathrm{Sc}(x \cdot y) = \mathrm{Sc}(x)\,\mathrm{Sc}(y)$$

$$\mathrm{tr}(x \cdot y) = \mathrm{tr}(x)\,\mathrm{tr}(y)$$

Therefore, both functions $\mathrm{Sc}(*)$ and $\mathrm{tr}(*)$ are homomorphisms from $\mathfrak{M}$ to $\mathbb{F}$.

We denote by $\mathfrak{M}_0$ the set of elements of $\mathfrak{M}$ with zero trace and zero scalar part.
It follows that $\mathfrak{M}_0$ is a two dimensional subspace of $\mathfrak{M}$, and moreover, it is an ideal and a subalgebra of $\mathfrak{M}$.

3. Main Theorem

Theorem 1. *Let $\mathbb{F}$ be an arbitrary field. If $p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ is a multilinear commutative non-associative polynomial with coefficients in $\mathbb{F}$, then the evaluation of p over $\mathfrak{M}$ is either:*

1. $\{0\}$;
2. $\langle P + R\omega + S\omega^2 \rangle$;
3. $\langle P + R\omega^2 + S\omega \rangle$;
4. $\mathfrak{M}_0$;
5. $\mathfrak{M}$.

By ω we denote 1 if $\mathrm{Char}\, \mathbb{F} = 3$, and a primitive cube root of 1 otherwise (if such an element exists in $\mathbb{F}$). If such element ω does not exist in $\mathbb{F}$, options (2) and (3) are impossible. As well-known, this element (ω) satisfies $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. In particular, such an element exists in $\mathbb{C}$, although it does not exist in $\mathbb{R}$. We will use the following basic fact from linear algebra:

Lemma 1 ([9], Lemma 3). *Let L be a vector space over a field $\mathbb{F}$ and suppose that $f\colon L \times \cdots \times L \to L$ is a multilnear map. Assume that $\mathrm{Im}(f)$ contains two vectors which are not proportional. Then $\mathrm{Im}(f)$ contains a two dimensional subspace. In particular, if $\mathrm{Im}(f)$ is contained in a two dimensional subspace M, then $\mathrm{Im}(f) = M$.*

Remark 1. *As a consequence, one can immediately conclude from Lemma 1, that the image set of any multilinear map (in particular of a multilinear polynomial) is either a vector space or at least a 3-dimensional set. By the dimension of an image set, we mean the dimension of its Zariski closure. Note that a polynomial image is not necessarily Zariski closed.*

Let us first prove the following Lemma:

Lemma 2. *Let $\mathbb{F}$ be an arbitrary field. If $p(x_1, x_2, \dots, x_m)$ is a multilinear commutative non-associative polynomial with coefficients in $\mathbb{F}$, then the evaluation of p over $\mathfrak{M}$ is either:*

1. $\{0\}$;
2. *some one-dimensional vector space;*
3. $\mathfrak{M}_0$;
4. $\mathfrak{M}$.

Proof. Since $p(x_1, \dots, x_m)$ is multilinear, it is a linear combination of monomials such that, in each monomial, every variable x_i appears exactly once. Let the coefficients of the monomials of p be $c_1, \dots, c_d$. Suppose that $c := \sum\limits_{i=1}^{d} c_i \neq 0$. let $a \in \mathfrak{M}$. Then $a = \tilde{p}(c^{-1} \cdot a, 1, \dots, 1)$ and thus $\mathrm{Im}(p) = \mathfrak{M}$.
Thus, suppose that $c = 0$. If $a \in \mathrm{Im}(p)$, then there exist elements $a_1, \dots, a_m \in \mathfrak{M}$ such that $a = \tilde{p}(a_1, \dots, a_m)$. Since $\mathbb{F}$ is commutative and associative with respect to multiplication and tr and Sc are linear and respect multiplication, it follows that

$$\mathrm{tr}(a) = \mathrm{tr}(a_1) \cdots \mathrm{tr}(a_m) \cdot \sum_{i=1}^{d} c_i = 0$$

and similarly $\mathrm{Sc}(a) = 0$. Hence, $\mathrm{Im}(p)$ is contained in $\mathfrak{M}_0$. Note that $\dim\ \mathfrak{M}_0 = 2$. Thus, according to Remark 1, $\mathrm{Im}\, p$ is a vector space: either 2-dimensional (and thus coincides with $\mathfrak{M}_0$), or of dimension 1 or 0. In the last case p is a PI. □

We now give the proof of Theorem 1: Proof. In view of Lemma 2, we have to classify 1-dimensional images. Consider the linear map $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ defined as follows:

$$1 \mapsto 1,\ P \mapsto R, R \mapsto S, S \mapsto P.$$

It is not difficult to see that this map respects multiplication and thus is an automorphism of $\mathfrak{M}$. Therefore, if $p(x_1, \dots, x_m)$ is a multilinear polynomial evaluated on $\mathfrak{M}$, then for any values of x_i we have

$$\varphi(p(x_1, \dots, x_m)) = p(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_m)).$$

Hence, if $\mathrm{Im}\, p$ is a 1-dimensional vector space spanned by an element $x = aP + bR + cS \in \mathfrak{M}_0$, $\varphi(x)$ should be proportional to x i.e it should span the vector space. Note that $\varphi(aP + bR + cS) = cP +$ $+aR + bS$. Thus, $\frac{c}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ and it is not difficult to see that this ratio can be only a cube root of 1. If $\mathrm{Char}\, \mathbb{F} = 3$, the only element in $\mathbb{F}$ satisfying this property is 1 and thus, $\mathrm{Im}\, p = \langle P + R + S \rangle$. If $\mathrm{Char}\, \mathbb{F} \neq 3$ and $\omega \in \mathbb{F}$, there are three elements satisfying this property: $1, \omega$ and ω^2. However, the option $a = b = c$ is impossible since $\mathrm{tr}(P + R + S) = 3$ and this is not an element of $\mathfrak{M}_0$. □

4. Examples

The most important thing to understand is whether or not polynomials with such images exist. Of course, it is very simple to construct an example of a polynomial whose image set is $\mathfrak{M}$: one can take $p(x) = x$, or any other multilinear polynomial with nonzero sum of coefficients.

It is not difficult to see that the set $\mathfrak{M}_0$ can also be achieved, for instance, as the image of the polynomial $g(x, y, z) = (xy)z - (xz)y$. Indeed, its image contains the element $g(P, R, S) = (PR)S - P(RS) = PS - PR = S - P$ and thus, by Theorem 1, $\mathrm{Im}\, g = \mathfrak{M}_0$. Unfortunately, we have not succeeded in constructing examples of multilinear polynomials with 1-dimensional images. However, most likely they exist. Polynomial identities exist as well. Indeed, the computation shows that the polynomial $f(x,y,z,t) = (xy)(zt)-(xz)(yt)$ evaluated on $\mathfrak{M}_0$ is a PI (in Lemma 3, we prove this for the case $\operatorname{Char}\mathbb{F} \neq 3$. However, this is true for arbitrary fields and can be easily checked by basis element evaluations. For example, one can take the elements $P-R$ and $R-S$ as a basis for $\mathfrak{M}_0$ and check all 16 evaluations). We can take four polynomials with image sets $\mathfrak{M}_0$ and put them instead of x, y, z and t inside f: $x = g(x_1, x_2, x_3)$, $y = g(y_1, y_2, y_3)$, $z = g(z_1, z_2, z_3)$ and $t = g(t_1, t_2, t_3)$. As a result, we obtain a multilinear polynomial in 12 variables which is a commutative non-associative polynomial identity of the algebra $\mathfrak{M}$. Of course, 12 is not the minimal possible degree for polynomial identities of $\mathfrak{M}$.

5. PI algebras

Moreover, any finite dimensional commutative non-associative /non-commutative associative /non-commutative non-associative algebra is a PI algebra with nontrivial multilinear PI (i.e. PI of the same type as a type of an algebra). Indeed, let us compute the number of possible multilinear monomials of degree m: the number of associative non-commutative monomials is $m!$, the number of non-associative non-commutative monomials is $m! \cdot C_{m-1}$, where $C_{m-1} = \frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1}$ is a Catalan number. In our case, we are interested in multilinear non-associative commutative monomials. Each monomial has exactly $m-1$ multiplications and for each of them we can change places of the multipliers. Thus, there are exactly 2^{m-1} different non-commutative non-associative monomials, corresponding to each commutative non-associative monomial, and therefore, the number of commutative non-associative monomials is $m! \cdot C_{m-1} \cdot 2^{1-m}$. If our algebra is finite dimensional, let d be its dimension, $A = \langle E_1, \ldots, E_d \rangle$. In this case, a nonzero multilinear polynomial $p(x_1, \ldots, x_m)$ is a PI if and only if its evaluations on all sets of basis elements E_i is zero. We have exactly d^m such evaluations, each of them has d coordinates, and therefore, we have a system of d^{m+1} linear equations, where the unknowns are the coefficients of p. The number of unknowns is the number of possible monomials. Hence, the existence of a PI follows from existence of a number m, such that the number of monomials is larger than d^{m+1}. Remember, that for each m, these numbers (depending on the type of algebra) are $m!$, $m! \cdot C_{m-1}$, and $m! \cdot C_{m-1} 2^{m-1}$. For large m, these numbers exceed d^{m+1} and thus, such an m exists.

6. Subalgebras, good basis, automorphisms and PI-s

Let us consider the algebra $\mathfrak{M}_0$ separately. Unlike $\mathfrak{M}$, this is a simple algebra, i.e it does not contain any non-trivial ideals. In this section we assume that $\operatorname{Char}\mathbb{F} \neq 3$ and $\omega \in \mathbb{F}$. The second condition can be achieved if instead of the field $\mathbb{F}$, we consider either its algebraic closure or its extension $\mathbb{F}[\omega]$. In this case, $\mathfrak{M}_0$ has the following basis (called "the good basis"):

$$U = \frac{1+2\omega}{3}\left(P + R\omega + S\omega^2\right),$$

$$V = \frac{1+2\omega^2}{3}\left(P + R\omega^2 + S\omega\right).$$

Note that the condition $\operatorname{Char}\mathbb{F} \neq 3$ is important: if $\operatorname{Char}\mathbb{F} = 3$ these elements U and V are not well defined. A simple computation shows that

$$U^2 = V,\ V^2 = U,\ \text{and}\ UV (= VU) = 0.$$

The automorphism φ of order 3 defined in the proof of Theorem 1, induces an automorphism of $\mathfrak{M}_0$: $\varphi(U) = \omega^2 U$, $\varphi(V) = \omega V$.

Remark 2. *There is another important automorphism ψ of $\mathfrak{M}_0$: $U \mapsto V$, $V \mapsto U$. This automorphism cannot be extended to $\mathfrak{M}$. Nevertheless, if $\mathbb{F} = K[\omega]$ for some subfield K which does not contain ω, this automorphism can be extended from $\mathfrak{M}_0(K)$ to $\mathfrak{M}(\mathbb{F})$ considered as an algebra over K: $U \mapsto V$, $V \mapsto U, \omega \mapsto \omega^2, \omega^2 \mapsto \omega$. The second two evaluations define the conjugation automorphism of $\mathbb{F}$ preserving K. In the usual basis $\{1, P, R, S\}$ of $\mathfrak{M}$ it leaves basic elements and conjugates field coefficients only. The order of ψ is 2.*

Note that not every field $\mathbb{F}$ containing ω can be presented as $K[\omega]$. For instance, the field $\mathbb{F}_7$ has an element $\omega = 2 \in \mathbb{F}_7$ but does not have any subfields at all.

Now we are ready to prove a lemma about polynomial identities of $\mathfrak{M}_0$:

Lemma 3. *The polynomial $f(x, y, z, t) = (xy)(zt) - (xz)(yt)$ is a PI of $\mathfrak{M}_0$.*

Proof. Consider the evaluations of $f(x, y, z, t)$ on the basis elements U and V: for such evaluations, a product of two different elements equals zero, and a product of the type $(xy)(zt)$ is not zero when $x = y$, $z = t$ and $xy = zt$, which happens if and only if $x = y = z = t$. However, in this case $(xy)(zt) = (xz)(yt)$ and therefore f is PI. □

Remark 3. *Note that if a multilinear polynomial $p(x_1, \ldots, x_m)$ has a 1-dimensional image, i.e. either $< U >$ or $< V >$, it is PI of $\mathfrak{M}_0$. Indeed, its evaluation on $\mathfrak{M}_0$ must either coincide with its evaluation on $\mathfrak{M}$ or it must be $\{0\}$. However, it should be invariant under the automorphism ψ, which is possible only in the case that p is PI of $\mathfrak{M}_0$. Nevertheless, this does not imply that such a polynomial does not exist: even in the case $\mathbb{F} = K[\omega]$, where ψ can be extended to $\mathfrak{M}$, we need to conjugate elements of $\mathbb{F}$, and this will change the coefficients of the polynomial p. The problem considering the existence of such polynomials remains being open.*

The possible multilinear evaluations on $\mathfrak{M}_0$ are described in

Theorem 2. *Let $\mathbb{F}$ satisfy* $\operatorname{Char}\mathbb{F} \neq 3$. *If $p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ is a multilinear commutative non-associative polynomial with coefficients in $\mathbb{F}$, then the evaluation of p over $\mathfrak{M}_0$ is either:*

1. $\{0\}$;
2. $\mathfrak{M}_0$;

Proof. Indeed, there are no 1-dimensional multilinear evaluations since, if $\operatorname{Im} p =< aU + bV >$, $aU + bV$ must be proportional to $\varphi(aU + bV) = a\omega^2 U + b\omega V$ which is possible only if one of the coefficients a or b equals zero. However, this is also impossible, since in this case, $\operatorname{Im} p$ is not invariant under ψ. □

Another important subalgebra of $\mathfrak{M}$ is the subalgebra $\tilde{\mathfrak{M}}$: the rock-paper-scissors without unit, i.e. the kernel of the homomorphism Sc. Here we take the three element basis U, V (which were already defined) and $W = \frac{1}{3}(P + R + S)$. In this case,

$$W^2 = W,\ WU = \frac{1 + 2\omega}{3} U,\ \text{and } WV = \frac{1 + 2\omega^2}{3} V.$$

The problem as to whether a multilinear evaluation on $\tilde{\mathfrak{M}}$ must be a vector space, remains being open. However, we can prove the following:

Lemma 4. *Let $\mathbb{F}$ satisfy* $\operatorname{Char}\mathbb{F} \neq 3$. *If $p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ is a multilinear commutative non-associative polynomial with coefficients in $\mathbb{F}$, then the evaluation of p over $\tilde{\mathfrak{M}}$ is either:*

1. $\{0\}$;
2. $\langle U \rangle$;

3. $\langle V \rangle$*;*

4. $\langle W \rangle$*;*

5. $\mathfrak{M}_0 = \langle U, V \rangle$*;*

6. $\langle U, W \rangle$*;*

7. $\langle V, W \rangle$*;*

8. Zariski dense in $\tilde{\mathfrak{M}}$*.*

Proof. According to Lemma 1, $\operatorname{Im} p$ must be either a vector space or at least 3-dimensional.

If the dimension of $\operatorname{Im} p$ is no more than 2, it is a vector space. If $\dim \operatorname{Im} p = 0$, then p is PI and we have the case (1). If $\dim \operatorname{Im} p = 1$, $\operatorname{Im} p$ is a line which is invariant under the automorphism φ, and we have one of the cases (2)-(4). If $\dim \operatorname{Im} p = 2$, we have a two-dimensional subspace invariant under φ. Consider some evaluation of p: $q = aU + bV + cW$ with at least two nonzero coefficients $a, b, c \in \mathbb{F}$. Note that $\varphi(U) = \omega^2 U, \varphi(V) = \omega V, \varphi(W) = W$. Thus, the elements $\varphi(q) = a\omega^2 U + b\omega V + cW$ and $\varphi^2(q) = a\omega U + b\omega^2 V + cW$ belong to the image of p. The linear span of these three elements is the linear span of the basis elements $\{U, V, W\}$.In particular, we obtain that one of the coefficients of q must zero, and the (2-dimensional) image of p contains a plane spanned by two basis elements (and thus coincides with it). Therefore, we have one of the cases (5)-(7). Finally, if $\dim \operatorname{Im} p = 3$, the image is a Zariski dense subset, and we have the case (8). $\square$

Note that not all these options are possible:

Theorem 3. *Let* $\mathbb{F}$ *satisfy* $\operatorname{Char} \mathbb{F} \neq 3$*. If* $p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *is a multilinear commutative nonassociative polynomial with coefficients in* $\mathbb{F}$*, then the evaluation of* p *over* $\tilde{\mathfrak{M}}$ *is either:*

1. $\{0\}$*;*

2. $\langle U \rangle$*;*

3. $\langle V \rangle$*;*

4. $\mathfrak{M}_0 = \langle U, V \rangle$*;*

5. Zariski dense in $\tilde{\mathfrak{M}}$*.*

Proof. Options (4), (6) and (7) in Lemma 4 are impossible since if the sum of coefficients of p is $c \neq 0$, the element $p(I, I, I, \ldots, I) = cI$ belongs to the image of p, for I being arbitrary idempotent of $\tilde{M}$. In particular, P, R and S are idempotents. In this case the linear span of $\operatorname{Im} p$ must be equal to $\tilde{M}$, which does not hold for these three cases. $\square$

Unfortunately, the question of possibility of cases (2) and (3) remains being open. The other problem is, whether or not the polynomial in the last case must be surjective.

7. Semi-homogeneous polynomials

In this section, we have more questions than answers. Nevertheless, we can definitely claim the following: the evaluation of any such polynomial should be invariant with respect to the automorphism φ. We have a conjecture:

Conjecture 3. *Any homogeneous polynomial in one variable with nonzero sum of coefficients, has a Zariski dense image set.*

This is an interesting question to study. Indeed, considering monomials depending on one variable, there are different monomials of the same degree. For instance, the monomial $(x^2)^2$ is not the same as $x(x(x^2))$. Not only as monomials are they different: they also have different evaluations. For example, if $x = P + R - 2S$ then $(x^2)^2 = 9(R - P)$ and $x(x(x^2)) = 9(P - R)$. Of course, if $\operatorname{Char}\mathbb{F} = 2$, this is the same. The case $\operatorname{Char}\mathbb{F} = 2$ can be considered separately. In particular, for $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ being the field of two elements, the evaluations of $(x^2)^2$ and $x(x(x^2))$ coincide for every x. Moreover, evaluations of any two monomials in one variable of equal degree coincide, which makes the monomial function x^d being well defined.

If Conjecture 3 holds, we can conclude the following:

Conjecture 4. *Let $p(x_1, \dots, x_m)$ be any semi-homogeneous polynomial evaluated on $\mathfrak{M}$ of degree d, and suppose that the field $\mathbb{F}$ is closed under d-roots. Then the image set of p satisfies one of the following conditions:*

1. $\operatorname{Im} p = \{0\}$;
2. $\operatorname{Im} p = \langle P + R\omega + S\omega^2 \rangle$;
3. $\operatorname{Im} p = \langle P + R\omega^2 + S\omega \rangle$;
4. $\operatorname{Im} p$ *is Zariski dense in* $\mathfrak{M}_0$;
5. $\operatorname{Im} p$ *is Zariski dense in* $\mathfrak{M}$.

This conjecture follows from the previous one: if the sum of the coefficients is not zero, we can consider the polynomial $q(x) = p(x, x, \dots, x)$, which according to Conjecture 3, has a Zariski dense image set in $\mathfrak{M}$, and its image is a subset of the image of p. If the sum of the coefficients is zero, then, as we know,both $\operatorname{Sc}(p)$ and $\operatorname{tr}(p)$ vanish on each evaluation and hence $\operatorname{Im} p \subseteq \mathfrak{M}_0$. The image of any semi-homogeneous polynomial is a cone, and therefore, there are three options:The image is 2-dimensional and its Zariski closure is $\mathfrak{M}_0$; The image is 1-dimensional and its image is one of the two possible lines; The image is 0-dimensional, and in this case, p should be a PI. Note that if conjecture 3 does not hold, then there is one more possible option for the 1-dimensional image: the line $\langle P + R + S \rangle$.

8. Conclusion

Questions related to the evaluations of multilinear and homogeneous polynomials are actual and applicable. This work continues series of works [1, 2, 3, 4, 5, 9, 10]

9. Acknowledgements

We would like to thank A.Kanel-Belov and A. Domoshnitsky for interesting and fruitful discussions.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belov, A.; Malev, S.; Rowen, L. The images of noncommutative polynomials evaluated on 2×2 matrices // Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 465–478.

2. Belov, A.; Malev, S.; Rowen, L., The images of multilinear polynomials evaluated on 3×3 matrices // Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), 7–19.

3. Belov, A.; Malev, S.; Rowen, L., Power-central polynomials on matrices // Journal of Pure and Applied Algebra **220** (2016), 2164–2176.

4. Belov, A.; Malev, S.; Rowen, L., The images of Lie polynomials evaluated on matrices // Communications in Algebra **45** (11) (2017), 4801–4808.

5. Belov, A.; Malev, S.; Rowen, L., Yavich, R. Evaluations of noncommutative polynomials on algebras: Methods and problems, and the L'vov-Kaplansky Conjecture. // SIGMA 16 (2020), 071, 61 pages.

6. Brešar, M., Commutators and images of noncommutative polynomials // preprint, available on arXiv:2001.10392 (2020).

7. Днестровская тетрадь. Нерешённые проблемы теории колец и модулей // Новосибирск, Изд-во ИМ СО РАН, (1993).

8. Гордеев, Н.Л., Кунявский, Б.Э., Плоткин Е.Б. Геометрия вербальных уравнений в простых алгебраических группах над специальными полями // УМН, 73:5(443) (2018), 3–52; Russian Math. Surveys, 73:5 (2018), 753–796.

9. Malev, S., The images of noncommutative polynomials evaluated on 2×2 matrices over an arbitrary field // Journal of Algebra and its Applications **13**(2014), no.6., 145004, 12 pp.

10. Malev, S., The images of noncommutative polynomials evaluated on the Quaternion algebra // Journal of Algebra and its Applications (2021), 8 pp. `https://doi.org/10.1142/S0219498821500742`

11. Shalev, A. Commutators, words, conjugacy classes and character methods // Turkish J. Math. **31** (2007), 131–148.

12. Shalev, A. Word maps, conjugacy classes, and a noncommutative Waring-type theorem // Annals of Math., **170** (2009), 1383–1416.

13. Shalev, A. Some results and problems in the theory of word maps // "Erdös Centennial" (L. Lovász, I. Ruzsa, V. T. Sós, D. Palvolgyi, Eds.), Bolyai Soc. Math. Studies, **25**, Springer, (2013), 611–649.

14. Жевлаков, К.; Слинько, А.; Шестаков, И; Ширшов, А. Кольца, близкие к ассоциативным //Москва, наука (1978), 432 стр.

REFERENCES

1. Belov, A.& Malev, S.& Rowen, L., " The images of noncommutative polynomials evaluated on 2×2 matrices" *Proc. Amer. Math. Soc.* **140** (2012), 465–478.

2. Belov, A.& Malev, S.& Rowen, L., "The images of multilinear polynomials evaluated on 3×3 matrices", *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), 7–19.

3. Belov, A.& Malev, S.& Rowen, L., *Power-central polynomials on matrices,* Journal of Pure and Applied Algebra **220** (2016), 2164–2176.

4. Belov, A.& Malev, S.& Rowen, L., *The images of Lie polynomials evaluated on matrices,* Communications in Algebra **45** (11) (2017), 4801–4808

5. Belov, A.& Malev, S.& Rowen, L.& Yavich, R.*Evaluations of noncommutative polynomials on algebras: Methods and problems, and the L'vov-Kaplansky Conjecture.*, SIGMA 16 (2020), 071, 61 pages.

6. Brešar, M., *Commutators and images of noncommutative polynomials*, preprint available on arXiv:2001.10392 (2020).

7. *DNIESTER NOTEBOOK: Unsolved Problems in the Theory of Rings and Modules*, Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences Siberian Branch, Novosibirsk Fourth Edition, (1993)

8. Gordeev, N.& Kunyavskii, B.& Plotkin, E. *Geometry of word equations in simple algebraic groups over special fields (Russian. Russian summary)*, Uspekhi Mat. Nauk **73** (2018), no. 5(443), 3–52; translation in Russian Math. Surveys **73** (2018), no. 5, 753–796.

9. Malev, S., *The images of noncommutative polynomials evaluated on* 2×2 *matrices over an arbitrary field,* Journal of Algebra and its Applications **13**(2014), no.6., 145004, 12 pp.

10. Malev, S., *The images of noncommutative polynomials evaluated on the Quaternion algebra,* Journal of Algebra and its Applications (2021), 8 pp. `https://doi.org/10.1142/S0219498821500742`

11. Shalev, A. *Commutators, words, conjugacy classes and character methods*, Turkish J. Math. **31** (2007), 131–148.

12. Shalev, A. *Word maps, conjugacy classes, and a noncommutative Waring-type theorem*, Annals of Math., **170** (2009), 1383–1416.

13. Shalev, A. *Some results and problems in the theory of word maps*, in: “Erdös Centennial” (L. Lovász, I. Ruzsa, V. T. Sós, D. Palvolgyi, Eds.), Bolyai Soc. Math. Studies, **25**, Springer, (2013), 611–649.

14. Zhevlakov, K.& Slinko, A.& Shestakov, I.& Shirshov, A. *Rings close to associative*, Moscow, Nauka (1978), 432 pp.

Получено 27.05.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 51-7 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-140-151

Лемма о компактности в непериодических структурах и ее применении при усреднении уравнений диффузии-конвекции[1]

А. М. Мейрманов, О. В. Гальцев

Анварбек Мукатович Мейрманов — доктор физико-математических наук, профессор, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).
e-mail: anvarbek@list.ru
Олег Владимирович Гальцев — кандидат физико-математических наук, доцент, Белгородский государственный национальный исследовательский университет (г. Белгород).
e-mail: galtsev_o@bsu.edu.ru

Аннотация

В работе доказывается сильная компактность последовательности $\{\tilde{c}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\}$ в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\Omega_T = \Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, ограниченную в пространстве $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ с последовательностью производных по времени $\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}\big(\chi(\boldsymbol{x},t,\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})\tilde{c}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\big)\right\}$ ограниченной в пространстве $\mathbb{L}_2\big((0,T);\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)\big)$, где характеристическая функция $\chi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ есть 1-периодическая в $\boldsymbol{y}\in Y=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)^3\subset\mathbb{R}^3$.

В качестве приложения рассмотрим усреднение уравнения диффузии-конвекции в непериодической структуре, заданной 1-периодической в $\boldsymbol{y}$ характеристической функцией $\chi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ с последовательностью бездивергентных скоростей $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\}$, слабо сходящейся в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$.

Ключевые слова: лемма о компактности, усреднение, квадратично-суммируемые производные.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. М. Мейрманов, О. В. Гальцев О компактности в непериодических структурах и ее применении при усреднении уравнений диффузии-конвекции // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 140–151.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-00105).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 51-7 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-140-151

A compactness result for non-periodic structures and its application to homogenization of diffusion-convection equations

A. M. Meirmanov, O. V. Galtsev

Anvarbek Mukatovich Meirmanov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow Technical University of Communications and Informatics (Moscow).
e-mail: anvarbek@list.ru
Oleg Vladimirovich Galtsev — PhD in Physics and Mathematics, Assistant professor, Belgorod State National Research University (Belgorod).
e-mail: galtsev_o@bsu.edu.ru

Abstract

The paper proves the strong compactness of the sequence $\{\tilde{c}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\}$ in $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, bounded in the space $\mathbb{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$ with the sequence of time derivatives $\Big\{\dfrac{\partial}{\partial t}\big(\chi(\boldsymbol{x},t,\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})\ \tilde{c}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\big)\Big\}$ bounded in the space $\mathbb{L}_2\big((0,T);\mathbb{W}^{-1}_2(\Omega)\big)$, where characteristic function $\chi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ is 1-periodic in a variable $\boldsymbol{y}\in Y=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)^3\subset\mathbb{R}^3$.

As an application we consider the homogenization of a diffusion-convection equation in non-periodic structure, given by 1-periodic in $\boldsymbol{y}$ characteristic function $\chi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ with a sequence of divergent-free velocities $\{\boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\}$ weakly convergent in $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$.

Keywords: compactness lemma, homogenization, square-summable derivatives.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. M. Meirmanov, O. V. Galtsev, 2020, "A compactness result for non-periodic structures and its application to homogenization of diffusion-convection equations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 140–151.

1. Введение

В настоящей работе доказана лемма о компактности типа леммы Обэна [1, 2] для непериодических структур и с ее помощью находится усреднение уравнений диффузии-конвекции в такой среде. До настоящего времени известны несколько вариантов этой леммы (см. [3, 5], но ни один из них не применим к исследуемому нами случаю.

Для описания задачи рассмотрим 1-периодическую по переменной $\boldsymbol{y}\in Y=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)^3\subset\mathbb{R}^3$ измеримую функцию $\chi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ такую, что $\chi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=1$ при $\boldsymbol{y}\in Y_f(\boldsymbol{x})$ и $\chi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=0$ при $\boldsymbol{y}\in Y_s(\boldsymbol{x})$.

Здесь $\overline{Y_f(\boldsymbol{x})\cup Y_s(\boldsymbol{x})}=\overline{Y}$, $Y_f(\boldsymbol{x})\cap Y_s(\boldsymbol{x})=\emptyset$, $Y_f(\boldsymbol{x})\cap Y_s(\boldsymbol{x})=\gamma(\boldsymbol{x})$ и поверхность $\gamma(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет условию Липшица. Например, $Y_s(\boldsymbol{x})=\left\{\boldsymbol{y}\in Y:|\boldsymbol{y}|<r(\boldsymbol{x})<\dfrac{1}{2}\right\}$, $Y_f(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}\in Y:|\boldsymbol{y}|>r(\boldsymbol{x})\}$ и $\gamma(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}\in Y:|\boldsymbol{y}|=r(\boldsymbol{x})\}$.

Положим далее $\Omega_f^\varepsilon = \Big\{\boldsymbol{x} : \chi(\boldsymbol{x}, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}) = 1\Big\}$, $\Omega_s^\varepsilon = \Big\{\boldsymbol{x} : \chi(\boldsymbol{x}, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}) = 0\Big\}$, $Q_f^\varepsilon = \Omega_f^\varepsilon \times (0,T)$, $Q_s^\varepsilon = \Omega_s^\varepsilon \times (0,T)$, $\Gamma^\varepsilon = \overline{\Omega}_f^\varepsilon \cap \overline{\Omega}_s^\varepsilon$.

Всюду ниже ограничимся двумя структурами:

Структура 1:

$$Y_s(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in Y : |\boldsymbol{y}| < r(\boldsymbol{x})\},\ \ Y_f(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in Y : |\boldsymbol{y}| > r(\boldsymbol{x})\},$$

$$\chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}\big(r(\boldsymbol{x}) - |\boldsymbol{\varsigma}(\boldsymbol{y})|\big),\ \ 0 \leqslant r(\boldsymbol{x}) < \frac{1}{2},$$

где $r(\boldsymbol{x}) : 0 < r(\boldsymbol{x}) < \dfrac{1}{2}$, $r \in \mathbb{W}^{1,0}_\infty(\Omega_T)$ есть заданная функция, а периодическая функция $\boldsymbol{\varsigma}(\boldsymbol{y})$ определяется формулой

$$\boldsymbol{\varsigma}(\boldsymbol{y}) = (y_1 - [|y_1|], y_2 - [|y_2|], y_3 - [|y_3|]),$$

$[|a|]$ есть целая часть числа a;

Структура 2:

$$Y_s(\boldsymbol{x}) = Y_s^1(\boldsymbol{x}) \cup Y_s^2(\boldsymbol{x}) \cup Y_s^3(\boldsymbol{x});$$
$$Y_s^1(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in Y : y_2^2 + y_3^2 < r(\boldsymbol{x})\},$$
$$Y_s^2(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in Y : y_1^2 + y_3^2 < r(\boldsymbol{x})\},$$
$$Y_s^3(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in Y : y_1^2 + y_2^2 < r(\boldsymbol{x})\},\ \ Y_f(\boldsymbol{x}) = Y \setminus \overline{Y_s}(\boldsymbol{x});$$
$$\chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \chi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\chi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\chi_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$
$$\chi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{sng}\big(r^2(\boldsymbol{x}) - y_2^2 - y_3^2\big),$$
$$\chi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{sng}\big(r^2(\boldsymbol{x}) - y_1^2 - y_3^2\big),$$
$$\chi_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{sng}\big(r^2(\boldsymbol{x}) - y_1^2 - y_2^2\big),\ \ \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi\left(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right).$$

Предположим для простоты, что $\Omega = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)^3$, $S = \partial\Omega$, $S^{\varepsilon,\pm} = \overline{\Omega}_f^\varepsilon \cap \Big\{x_1 = \pm\dfrac{1}{2}\Big\}$, $S^\pm = \Big\{x_1 = \pm\dfrac{1}{2}\Big\}$, $S^{\varepsilon,0} = \overline{\Omega}_f^\varepsilon \setminus \Big(\overline{S}^{\varepsilon,+} \cup \overline{S}^{\varepsilon,-}\Big)$, $S^0 = \left(\partial\Omega \setminus \left(\{x_1 = \dfrac{1}{2}\} \cup \Big\{x_1 = -\dfrac{1}{2}\Big\}\right)\right)$.

Рассмотрим начально-краевую задачу, описывающую диффузию-конвекцию примеси с концентрацией c^ε в области Q_f^ε с заданной скоростью $\boldsymbol{v}^\varepsilon$, $\nabla \cdot \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0, (\boldsymbol{x}, t) \in Q_f^\varepsilon$:

$$\frac{\partial c^\varepsilon}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla c^\varepsilon - c^\varepsilon\, \boldsymbol{v}^\varepsilon),\ \ (\boldsymbol{x}, t) \in Q_f^\varepsilon, \tag{1}$$

$$\frac{\partial c^\varepsilon}{\partial n}(\boldsymbol{x}, t) = 0,\ \ (\boldsymbol{x}, t) \in \Gamma^\varepsilon \times (0,T), \tag{2}$$

$$\frac{\partial c^\varepsilon}{\partial n}(\boldsymbol{x}, t) = 0,\ \ (\boldsymbol{x}, t) \in S^{0,\varepsilon} \times (0,T), \tag{3}$$

$$c^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) = c^\pm(\boldsymbol{x}, t),\ (\boldsymbol{x}, t) \in S^{\varepsilon,\pm} \times (0,T), \tag{4}$$

$$c^\varepsilon(\boldsymbol{x}, 0) = c_0(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon. \tag{5}$$

В (1) – (5) D есть заданная положительная постоянная и $\boldsymbol{n}$ нормальный вектор к границе $S^{0,\varepsilon}$.

Согласно [6], задача (1) – (4) имеет единственное обобщенное решение $c^\varepsilon \in \mathbb{W}_2^{1,0}(Q^{f,\varepsilon}) \cap \mathbb{L}_\infty(Q^{f,\varepsilon})$ равномерно ограниченное в пространстве $\mathbb{W}_2^{1,0}(Q^{f,\varepsilon}) \cap \mathbb{L}_\infty(Q^{f,\varepsilon})$.

Далее, используя результаты [8, 9], продолжим полученные решения на всю область Ω_T.

Пусть $\widetilde{c}^\varepsilon$ будут такими продолжениями. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{\widetilde{c}^\varepsilon\}$ слабо сходится к некоторой функции $c \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T) \cap \mathbb{L}_\infty(\Omega_T)$.

В качестве следующего шага покажем, что последовательность $\{\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t_0)\, \widetilde{c}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t_0)\}$ слабо сходится к функции $m(\boldsymbol{x}, t_0)\, c(\boldsymbol{x}, t_0)$ почти для всех $t_0 \in (0, T)$.

Здесь

$$m(\boldsymbol{x}, t) = \int_Y \chi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) dy. \tag{6}$$

В первую очередь покажем, что существует некоторая подпоследовательность $\{\varepsilon_k\}$, такая, что почти для всех $t_0 \in (0, T)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon_k^2 \int_\Omega |\nabla \widetilde{c}^{\varepsilon_k}(\boldsymbol{x}, t_0)|^2 dx = 0, \tag{7}$$

и почти для всех $t_0 \in (0, T)$ последовательность $\{\widetilde{c}^{\varepsilon_k}(\boldsymbol{x}, t_0)\}$ сходится слабо и двухмасштабно к функции $c(\boldsymbol{x}, t_0)$.

Наконец, в качестве последнего шага докажем, что последовательность $\{\widetilde{c}^{\varepsilon_k}\}$ сильно сходится в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$ к функции $c(\boldsymbol{x}, t)$.

Здесь и всюду далее для функциональных пространств и норм в этих пространствах будем использовать обозначения из [2, 6].

2. Вспомогательные утверждения

В этом разделе определим понятие двухмасштабной сходимости в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$ и сформулируем основные результаты из [7, 8, 9] необходимые для доказательства основных утверждений.

Определение 1. Последовательность $\{u^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)\}$, $u^\varepsilon \in L_2(\Omega_T)$, двухмасштабно сходится при $n \to \infty$ к 1-периодической в $\boldsymbol{y} \in Y = (0,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$ функции $U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_T} \Psi(\boldsymbol{x}, t, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}) u^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) dxdt = \int_{\Omega_T} \left(\int_Y \Psi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) dy \right) dxdt$$

для любой гладкой 1-периодической в $\boldsymbol{y}$ функции $\Psi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$.

Обозначение: $u^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) \overset{two-sc.}{\longrightarrow} U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$.

Теорема 1. *(Габриэль Нгуэтсенг)*

1) Любая ограниченная в $L_2(\Omega_T)$ последовательность $\{u^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходится в $L_2(\Omega_T)$ (с точностью до некоторой подпоследовательности) к некоторой 1-периодической в $\boldsymbol{y}$ функции $U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \in L_2(\Omega_T \times Y)$:

$$u^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) \overset{two-sc.}{\longrightarrow} U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}).$$

2) Пусть последовательность $\{u^\varepsilon\}$ ограничена в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$. Тогда последовательности $\{u^\varepsilon\}$ и $\{\nabla u^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходится (с точностью до некоторой подпоследовательности) к некоторым функциям $u(\boldsymbol{x}, t)$ и $\nabla u(\boldsymbol{x}, t) + \nabla_y U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ соответственно, где $u \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$ и $\nabla_y U \in L_2(\Omega_T \times Y)$:

$$u^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) \overset{two-sc.}{\longrightarrow} u(\boldsymbol{x}, t),$$

$$\nabla u^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) \overset{two-sc.}{\longrightarrow} \nabla u(\boldsymbol{x}, t) + \nabla_y U(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}).$$

Определение 2. Последовательность $\{v^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\}$, $v^\varepsilon\in L_2(\Omega_T)$, слабо сходится как $n\to\infty$ к некоторой функции $v(\boldsymbol{x},t)$, $v\in L_2(\Omega_T)$ если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\varphi(\boldsymbol{x},t)v^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)dxdt=\int_{\Omega_T}\varphi(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x},t)dxdt$$

для любой гладкой функции $\varphi(\boldsymbol{x},t)$.

Примечание: $v^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\rightharpoonup v(\boldsymbol{x},t)$.

Теорема 2. *[12]*
Любая ограниченная в $L_2(\Omega_T)$ последовательность $\{v^\varepsilon\}$ содержит слабо сходящиеся в $L_2(\Omega_T)$ подпоследовательности.

Переход к пределу в перфорированной области требует продолжения функций, определенных в области Q^ε_f, в область Ω_T. Для этого воспользуемся результатами для непериодических структур, аналогичными результатам [8, 9], доказанным для периодических структур. Из-за особого типа структур 1 и 2, особенно для структуры 1 (мягкие включения), доказательства в [8, 9] применимы и для наших случаев. Точнее, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $c^\varepsilon\in\mathbb{W}^{1,0}_2(Q^\varepsilon_f)$. Тогда существует продолжение $\widetilde{c}^\varepsilon\in\mathbb{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$ этой функции из Q^ε_f в Ω_T такой, что*

$$\int_{\Omega_T}|\widetilde{c}^\varepsilon|^2dxdt\leqslant M\int_{Q^\varepsilon_f}|c^\varepsilon|^2dxdt,\quad \int_{\Omega_T}|\nabla\widetilde{c}^\varepsilon|^2dxdt\leqslant M\int_{Q^\varepsilon_f}|\nabla c^\varepsilon|^2dxdt. \tag{8}$$

Здесь и всюду далее через M обозначается любая постоянная, не зависящая от ε.

3. Основные результаты

Пусть выполнены следующие условия:
Условия А
1) $c^\pm(\boldsymbol{x},t)=c^\pm(\boldsymbol{x})$;
2) *существует функция $c^0(\boldsymbol{x})$ такая, что $0\leqslant c^0(\boldsymbol{x})\leqslant 1$, $c^0\in\mathbb{W}^1_2(\Omega)$, и c^0 удовлетворяет граничным условиям (3) и (4);*
3) *функции $\boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ удовлетворяют условиям*

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}^\varepsilon=0,\ (\boldsymbol{x},t)\in Q^\varepsilon_f,\ \boldsymbol{v}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{n}=0,\ (\boldsymbol{x},t)\in(S^0\cup\Gamma^\varepsilon)\times(0,T),$$

$$\int_{Q^\varepsilon_f,}\big(|\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2+|\nabla\boldsymbol{v}^\varepsilon|^2\big)dxdt\leqslant M^2;$$

4) *существует продолжение $\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon$ функций $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ из области $Q^{f,\varepsilon}$ в область Ω_T такое, что*

$$\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon=0,\ (\boldsymbol{x},t)\in Q^\varepsilon_f,\ \widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{n}=0,\ (\boldsymbol{x},t)\in(S^0\cup\Gamma^\varepsilon)\times(0,T),$$

$$\int_{\Omega_T}\big(|\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon|^2+|\nabla\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon|^2\big)dx\leqslant M^2,$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon\rightharpoonup\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t),\ \ \boldsymbol{v}\in L_2(\Omega_T),\ \text{и}\ \widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon\overset{two-sc.}{\longrightarrow}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t),\ \ \boldsymbol{v}\in L_2(\Omega_T),$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T,\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}=0,\ \boldsymbol{x}\in S^0\times(0,T).$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ есть вектор нормали к соответствующим границам.

Определение 3. Функция $c^\varepsilon \in \mathbb{W}_2^{1,0}(Q^{f,\varepsilon})$ называется обобщенным решением задачи (1) – (5) если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q^{f,\varepsilon}} \Big(- c^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \big(D\,\nabla c^\varepsilon - c^\varepsilon\, \boldsymbol{v}^\varepsilon\big) \cdot \nabla \varphi \Big) dxdt = \int_{\Omega^{f,\varepsilon}(0)} c_0(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x},0) dx \tag{9}$$

для любой гладкой функции φ равной нулю на $S^{\varepsilon,\pm} \times (0,T)$ и при $\{t = T\}$ и краевым и начальным условиям (2) – (5).

Лемма 2. *При выполнении условий A для почти всех $\varepsilon > 0$ существует единственное обобщенное решение $c^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\}$ задачи (1) – (5) такое, что*

$$\int_{Q^\varepsilon_f} |c^{\,\varepsilon}|^2 dxdt + \int_{Q^\varepsilon_f} |\nabla c^{\,\varepsilon}|^2 dxdt \leqslant M. \tag{10}$$

Лемма 3. *Пусть $\widetilde{c}^\varepsilon$ есть продолжение функции c^ε из Q^ε_f в Ω_T такое, что*

$$\int_{\Omega_T} |\widetilde{c}^\varepsilon|^2 dxdt \leqslant M \int_{Q^\varepsilon_f} |c^{\,\varepsilon}|^2 dxdt, \int_{\Omega_T} |\nabla \widetilde{c}^\varepsilon|^2 dxdt \leqslant M \int_{Q^\varepsilon_f} |\nabla c^{\,\varepsilon}|^2 dxdt. \tag{11}$$

Тогда при выполнении условий A для почти всех $t_0 \in (0,T)$ последовательность $\{\chi^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_0)\, \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_0)\}$ сходится слабо в $\mathbb{L}_2(\Omega)$ к функции $m(\boldsymbol{x},t_0)\, c(\boldsymbol{x},t_0)$.

Лемма 4. *При выполнении условий A для почти всех $t_0 \in (0,T)$ существует некоторая подпоследовательность $\{\varepsilon_k\}$ такая, что*

$$\lim_{\varepsilon_k \to 0} \varepsilon_k^2 \int_\Omega |\nabla\, \widetilde{c}^{\,\varepsilon_k}(\boldsymbol{x},t_0)|^2 dxdt = 0. \tag{12}$$

Лемма 5. *При выполнении условий A для почти всех $t_0 \in (0,T)$ последовательность $\{\widetilde{c}^{\,\varepsilon_k}(\boldsymbol{x},t_0)\}$ сходится слабо и двухмасштабно в $\mathbb{L}_2(\Omega)$ к функции $c(\boldsymbol{x},t_0)$.*

Лемма 6. *При выполнении условий A последовательность $\{\widetilde{c}^{\,\varepsilon_k}(\boldsymbol{x},t)\}$ сходится сильно в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$ к функции $c(\boldsymbol{x},t)$ из $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$.*

Теорема 3. *Предельная функция $c \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ удовлетворяет граничным и начальным условиям*

$$\big(D\,\mathbb{B} \cdot \nabla c - c\,\boldsymbol{v}\big) \cdot \boldsymbol{n} = 0, \ \ (\boldsymbol{x},t) \in S^0 \times (0,T), \tag{13}$$

$$c(\boldsymbol{x},t) = c^\pm(\boldsymbol{x}), \ \ (\boldsymbol{x},t) \in S^\pm \times (0,T), \tag{14}$$

$$c(\boldsymbol{x},0) = c_0(\boldsymbol{x}), \ \ \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{15}$$

и усредненному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(m(\boldsymbol{x},t)\, c\big) = \nabla \cdot (D\,\mathbb{B} \cdot \nabla c - c\,\boldsymbol{v}) \tag{16}$$

в области Ω_T как решение интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T} \Big(- m(\boldsymbol{x},t)\, c\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \big(D\,\mathbb{B} \cdot \nabla c - c\,\boldsymbol{v}\big) \cdot \nabla \varphi \Big) dxdt = 0 \tag{17}$$

для любых гладких функций φ, равных нулю на $S^\pm \times (0,T)$.

В (13) – (17) $\boldsymbol{n}$ есть нормальный вектор к границе S^0 и симметричная и строго положительно определенная матрица $\mathbb{B}$ определяется формулой (36).

4. Доказательство теоремы 3

4.1. Доказательство леммы 2

Доказательство леммы простое и основано на априорных оценках

$$\int\int_{Q^{\varepsilon}_{f}} \big(D\,|\nabla c^{\varepsilon}|^{2}\big)dxdt \leqslant M\Big(\int_{\Omega^{f,\varepsilon}(0)} |c_{0}(\boldsymbol{x})|^{2}dx + \int\int_{Q^{\varepsilon}_{f}} |c^{0}(\boldsymbol{x})|^{2}dxdt\Big) \tag{18}$$

$$0 \leqslant c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t) \leqslant 1, \tag{19}$$

которые следуют из интегрального тождества (9) после замены пробной функции φ на функцию $(c^{\varepsilon} - c^{0})$, и из принципа максимума (см., например [6]).

4.2. Доказательство леммы 3

В силу Леммы B.1.5 (Приложение B, [10]) последовательность $\{\widetilde{c}^{\varepsilon}\}$ сходится двухмасштабно в $\mathbb{L}_{2}(\Omega_{T})$ к функции c. То есть

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_{T}} \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\,\varphi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)dxdt = \int_{\Omega_{T}} c(\boldsymbol{x},t)\left(\int_{Y}\varphi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})dy\right)dxdt. \tag{20}$$

Пусть

$$\varphi(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}) = \chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\,\eta(t)\,\psi(\boldsymbol{x}),$$

$$f^{\varepsilon}_{\psi}(t) = \int_{\Omega}\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\,\psi(\boldsymbol{x})dx,\;\; f_{\psi} = \int_{\Omega} m(\boldsymbol{x},t)\,\psi(\boldsymbol{x})dx.$$

Равенство (20) означает, что

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{T}\eta(t)\,f^{\varepsilon}_{\psi}(t)dt = \int_{0}^{T}\eta(t)\,f_{\psi}(t)dt. \tag{21}$$

Обращаясь к тождеству (9) в форме

$$\int_{\Omega_{T}}\chi^{\varepsilon}\left(-\widetilde{c}^{\,\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \big(D\,\nabla\widetilde{c}^{\,\varepsilon} - \widetilde{c}^{\,\varepsilon}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}\big)\cdot\nabla\varphi\right)dxdt = 0 \tag{22}$$

с пробной функцией $\varphi\left(\boldsymbol{x},t,\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right) = \eta(t)\,\psi(\boldsymbol{x})$, получим

$$\int_{0}^{T}\Big(\frac{d\eta}{dt}\,f^{\varepsilon}_{\psi} + \eta\,U^{\varepsilon}\Big)dt = 0, U^{\varepsilon} = \int_{\Omega}\big(\chi^{\varepsilon}\,D\,\nabla\widetilde{c}^{\,\varepsilon} - \widetilde{c}^{\,\varepsilon}\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}\big)\cdot\nabla\psi dx$$

$$\int_{0}^{T}|U^{\varepsilon}|^{2}dt \leqslant M^{2}\,T\int_{\Omega}|\nabla\psi|^{2}dx. \tag{23}$$

Следовательно,

$$\frac{df^{\varepsilon}_{\psi}}{dt} = U^{\varepsilon},\;\; f^{\varepsilon}_{\psi}\in\mathbb{W}^{1}_{2}(0,T);\;\; |f^{\varepsilon}_{\psi}(t)| \leqslant M_{\psi},\;\; |f^{\varepsilon}_{\psi}(t_{1}) - f^{\varepsilon}_{\psi}(t_{2})| \leqslant M_{\psi}\,|t_{1}-t_{2}|^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема Арцела-Асколи [11] позволяет нам выбрать подпоследовательность $\{f^{\varepsilon_{k}}_{\psi}\}$, сильно сходящуюся в пространстве $\mathbb{C}(0,T)$ к некоторой функции $\overline{f}_{\psi}$.

С другой стороны, в силу (21)

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{T}\eta(t)\,f^{\varepsilon}_{\psi}(t)dt = \int_{0}^{T}\eta(t)\,\overline{f}_{\psi}(t)dt \tag{24}$$

для произвольной функции $\eta(t)$.

То есть, $f_{\psi} = \overline{f}_{\psi}$ почти всюду в $(0,T)$, что и доказывает лемму.

4.3. Доказательство леммы 4

В самом деле, равномерная ограниченность по ε величины $\int_{\Omega_T} |\nabla \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)|^2 dxdt$ влечет равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \int_{\Omega_T} |\nabla \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)|^2 dxdt = 0. \tag{25}$$

Пусть

$$u_\varepsilon(t_0) = \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)|^2 dx. \tag{26}$$

Тогда (25) означает, что последовательность $\{u_\varepsilon\}$ сходится к нулю в пространстве $\mathbb{L}_1(0,T)$. Согласно [12] (теорема 1, §1, глава VII) существует подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_k}\}$ сходящаяся к нулю почти всюду в $(0,T)$, что доказывает утверждение леммы.

4.4. Доказательство леммы 5

Поскольку последовательность $\{\widetilde{c}^{\,\varepsilon}\}$ ограничена в $\mathbb{L}_2(\Omega)$, то найдется подпоследовательность (оставим для простоты изложения прежние индексы), сходящаяся двух-масштабно к некоторой 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\overline{C}(\boldsymbol{x},t_0,\boldsymbol{y})$ из пространства $\mathbb{L}_2(\Omega\times Y)$.

Интегрируя по частям выражение $\varepsilon_k \nabla \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k}\right)\psi(\boldsymbol{x})$, получим равенство

$$\varepsilon_k \int_\Omega \nabla \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_0)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k})\psi(\boldsymbol{x})dx = \\ -\varepsilon_k \int_\Omega \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_0)\big(\boldsymbol{\varphi}(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k})\cdot\nabla\psi(\boldsymbol{x})\big)dx - \int_\Omega \widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_0)\big(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k})\big)\psi(\boldsymbol{x})dx$$

справедливое для произвольных функций $\boldsymbol{\varphi}\in\mathbb{W}^1_2(Y)$ и $\psi\in\overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^1_2(\Omega)$.

Предельный переход при $\varepsilon_k\to 0$ доставляет нам равенство

$$\int_\Omega \psi(\boldsymbol{x})\int_Y \overline{C}(\boldsymbol{x},t_0,\boldsymbol{y})\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})dy = 0,$$

которое, в силу произвольного выбора функций $\boldsymbol{\varphi}$ и ψ, эквивалентно соотношению

$$\overline{C}(\boldsymbol{x},t_0,\boldsymbol{y}) = \overline{c}(\boldsymbol{x},t_0).$$

Поскольку $\overline{c}(\boldsymbol{x},t_0)$ является и слабым пределом последовательности $\{\widetilde{c}^{\,\varepsilon_k}(\boldsymbol{x},t_0)\}$, то в силу единственности слабого предела $\overline{c}(\boldsymbol{x},t_0) = c(\boldsymbol{x},t_0)$.

4.5. Доказательство леммы 6

Для доказательства этой леммы положим

$$\mathbb{H}^1 = \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^1{}_2(\Omega)\subset\mathbb{H}^0 = \mathbb{L}_2(\Omega)\subset\mathbb{H}^{-1} = \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^{-1}{}_2(\Omega),\;\; w_k(\boldsymbol{x},t_0) = \widetilde{c}^{\,\varepsilon_k}(\boldsymbol{x},t_0) - c(\boldsymbol{x},t_0)$$

и воспользуемся неравенством (оценка (9), § 10, главы III, [13])

$$\|w_k(.,t_0)\|^2_{\mathbb{H}^0} \leqslant \eta\,\|w_k(.,t_0)\|^2_{\mathbb{H}^1} + C_\eta\,\|w_k(.,t_0)\|^2_{\mathbb{H}^{-1}}.$$

Далее проинтегрируем по времени

$$\int_0^T \|w_k(.,t)\|^2_{\mathbb{H}^0}dt \leqslant \eta\int_0^T \|w_k(.,t)\|^2_{\mathbb{H}^1}dt + C_\eta\int_0^T \|w_k(.,t)\|^2_{\mathbb{H}^{-1}}dt,$$

и воспользуемся компактным вложением пространства $\mathbb{H}^0$ в пространство $\mathbb{H}^{-1}$ [14, 15]: слабая сходимость последовательности $\{w_k(.,t)\}$ в пространстве $\mathbb{H}^0(\Omega)$ влечет сильную сходимость этой последовательности в пространстве $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. То есть

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \|w_k(.,t)\|^2_{\mathbb{H}^{-1}}dt = 0.$$

Последнее соотношение и произвольный выбор η обеспечивают равенство

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \|w_k(.,t)\|^2_{\mathbb{H}^{0}}dt = 0,$$

что завершает доказательство леммы.

4.6. Доказательство Теоремы 3

Теперь мы можем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве (22) и получить необходимую усредненную систему уравнений (2) – (5). Теорема 1 позволяет извлечь некоторую подпоследовательность последовательности $\{\widetilde{c}^{\,\varepsilon}\}$ (для простоты оставим те же индексы) такую, что

$$\widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\overset{two-sc.}{\longrightarrow} c(\boldsymbol{x},t),\ \nabla_x\widetilde{c}^{\,\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\overset{two-sc.}{\longrightarrow} \nabla_x c(\boldsymbol{x},t)+\nabla_y C(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \tag{27}$$

с некоторой 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функцией $C(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\nabla_y C\in L_2(Q\times Y)$.

В силу условий A последовательность $\widetilde{\boldsymbol{v}}^{\,\varepsilon}$ слабо сходится в $L_2(\Omega_T)$ к некоторой функции $\boldsymbol{v}\in L_2(\Omega_T)$ такой, что

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\ \ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T,\ \ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x},t)=0,\ \ (\boldsymbol{x},t)\in S^0. \tag{28}$$

Прежде всего рассмотрим в качестве пробной функции в (22) произвольную функцию $\varphi=\varphi_0(\boldsymbol{x},t)$ равной нулю на $S^{\pm}\times(0,T)$.

После перехода к пределу $\varepsilon\to 0$ получим

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\left(-\chi^\varepsilon\,\widetilde{c}^\varepsilon\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+(D\,\chi^\varepsilon\,\nabla\widetilde{c}^\varepsilon\ \nabla\varphi-\chi^\varepsilon\,c^\varepsilon\,\widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon\cdot\nabla\varphi_0)\right)dxdt=$$
$$\int_{\Omega_T}\left(-m\,c\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+\left(D\,\left(\nabla_x c+\int_Y\chi\,\nabla_y C\,dy\right)\cdot\nabla\varphi_0-m\,c\,\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi_0\right)\right)dxdt=0. \tag{29}$$

Повторное интегрирование (29) дает необходимое усредненное уравнение диффузии-конвекции

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\,c)=\nabla_x\cdot\left(D\,\left(\nabla_x c+\left(\int_Y\chi\,\nabla_y C\,dy\right)\right)-m\,c\,\boldsymbol{v}\right) \tag{30}$$

с неизвестной функцией $C(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{x})$.

Чтобы найти функцию C выберем в качестве пробной функции в (22) функцию $\varphi=\varphi_0(\boldsymbol{x},t)\ \varphi_1(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})$ с произвольной $\varphi_1(\boldsymbol{y})$.

После предельного перехода получим следующее интегральное тождество

$$0=\int_{\Omega_T}\varphi_0(\boldsymbol{x},t)\left(\int_Y(\nabla_x c+\nabla_y C-m\,c\,\boldsymbol{v})\cdot\nabla_y\varphi_1\right)dxdt \tag{31}$$

с произвольными пробными функциями φ_0 и φ_1.

В силу произвольности этих функций данное интегральное тождество эквивалентно следующей краевой задаче

$$\nabla_y\cdot\big(\nabla_x c+\nabla_y C-m\,c\,\boldsymbol{v}\big)=0,\ \boldsymbol{y}\in Y_f(\boldsymbol{x}),\ \big(\nabla_x c+\nabla_y C-m\,c\,\boldsymbol{v}\big)\cdot\boldsymbol{N}=0,\ \boldsymbol{y}\in\gamma(\boldsymbol{x}), \tag{32}$$

где $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, N_3)$ вектор нормали к границе $\gamma(\boldsymbol{x})$.

Подстановка представления

$$C = \sum_{i=1}^{3} C_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, f_i(\boldsymbol{x}, t), \quad f_i = \frac{\partial c}{\partial x_i} - m\, c\, v_i \tag{33}$$

в (32) приводит к краевой задаче

$$\triangle C_i = 0, \ \boldsymbol{y} \in Y_f(\boldsymbol{x}), \ (\nabla_y C_i + \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{N} = 0, \ \in \gamma(\boldsymbol{x}), \tag{34}$$

имеющей единственное (с точностью до некоторой постоянной) решение [4, 8, 16] и

$$\nabla_x c + \nabla_y C - m\, c\, \boldsymbol{v} = D\, \mathbb{B}^c(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla_x c - m\, c\, \boldsymbol{v}), \tag{35}$$

где строго положительно определенная матрица $\mathbb{B}^c(\boldsymbol{x})$ определяется формулой

$$\mathbb{B}^c(\boldsymbol{x}) = \mathbb{I} + \sum_{i=1}^{3} \int_{Y_f(\boldsymbol{x})} \nabla C_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) dy. \tag{36}$$

Таким образом, усредненное уравнение диффузии-конвекции в области Ω_T примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\, c) = \nabla_x \big(D\, \mathbb{B}^c(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla_x c - m\, c\, \boldsymbol{v}) \big). \tag{37}$$

Легко показывается, что

$$c(\boldsymbol{x}, t) = c^{\pm}, \ (\boldsymbol{x}, t) \in S^{\pm} \times (0, T), \ \frac{\partial c}{\partial n} = 0, \ (\boldsymbol{x}, t) \in S^0 \times (0, T) \tag{38}$$

и

$$c(\boldsymbol{x}, 0) = c_0, \ \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{39}$$

5. Заключение

В настоящей работе доказана лемма о компактности в непериодических структурах, позволяющая строго обосновать усреднение начально-краевой задачи, описывающей диффузию конвекцию примеси с заданным вектором скорости несущей жидкости. Данный результат можно использовать для описания диффузии-конвекции примеси при фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в непериодическом скелете грунта.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aubin J. P. Un théorème de compacité // C. R. Acad. Sci. 1963. V. 256. P. 5042-5044.
2. Lions J. L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire. // Dunod, Paris. 1969. 576 p.
3. Chen X., Jungel A., Liu J. Note on Aubin-Lions-Dubinskii Lemmas // Acta. Appl. Math. 2014. V. 133. P. 33-43. DOI: 10.1007/s10440-013-9858-8
4. Meirmanov A., Zimin R. Compactness result for periodic structures and its application to the homogenization of a diffusion-convection equation // Electron. J. Diff. Equ. 2011. V. 2011. P. 1-11. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2011/115/meirmanov.pdf

5. Meirmanov A., Shmarev S. A compactness lemma of Aubin type and its application to a class of degenerate parabolic equations // Electron. J. Diff. Equ. 2014. V. 2014. P. 1-13. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/227/meirmanov.pdf

6. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N. Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type. // Providence, Rhode Island. 1968. 667 p.

7. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608-623. DOI: 10.1137/0520043

8. Jikov V. V., Kozlov S. M., Oleinik O. A. Homogenization of differential operators and integral functionals. // Springer-Verlag. 1994. 570 p.

9. Acerbi E., Chiad‘o V., Maso G., Percivale D. An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains // Nonlinear Anal. 1992. V. 5. P. 481-496. DOI: 10.1016/0362-546X(92)90015-7

10. Meirmanov A. Mathematical models for poroelastic flow. // Paris, Atlantis Press. 2014. 449 p.

11. Rudin W. Principles of mathematical analysis. // McGraw-Hill. 1976. 351 p.

12. Kolmogorov A. N., Fomin S.V. Introductory real analysis. // Dover Publications, New York. 1975. 416 p.

13. Adams R. A. Sobolev spaces. // Academic Press, New York. 1975. 320 p.

14. Lions J. L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire. // Dunon, Gauthier-Vllar, Paris. 1969. 554 p.

15. Mikhailov V. P., Gushchin A. K. Additional chapters of the course “Equations of Mathematical Physics". // Lecture courses REC, Issue 7, V.A. Steklov’s Mathematical Institute, RAS, Moscow. 2007. 146 p.

16. Bensoussan A., Lions J., Papanicolau G. Asymptotic Analysis for Periodic Structure. // Amsterdam: North Holland. 1978. 699 p.

REFERENCES

1. Aubin, J. P. 1963, “Un théorème de compacité“, *C. R. Acad. Sci.* , vol. 256, pp. 5042-5044.

2. Lions, J. L. 1969, “Quelques methodes de resolution des problemes aux limites nonlineaire“, *Dunod, Paris*, 576 p.

3. Chen, X. & Jungel, A. & Liu, J. 2014, “Note on Aubin-Lions-Dubinskii Lemmas“, *Acta. Appl. Math.*, vol. 133, pp. 33-43. DOI: 10.1007/s10440-013-9858-8

4. Meirmanov, A. & Zimin, R. 2011, “Compactness result for periodic structures and its application to the homogenization of a diffusion-convection equation“, *Electron. J. Diff. Equ.*, vol. 2011, pp. 1-11. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2011/115/meirmanov.pdf

5. Meirmanov, A. & Shmarev, S. 2014, “A compactness lemma of Aubin type and its application to a class of degenerate parabolic equations“, *Electron. J. Diff. Equ.*, vol. 2014, pp. 1-13. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/227/meirmanov.pdf

6. Ladyzhenskaya, O. A. & Solonnikov, V. A. & Uraltseva, N. N. 1968, “Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type“, *Providence, Rhode Island*, 667 p.

7. Nguetseng, G. 1989, “A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization“, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 20, pp. 608-623. DOI: 10.1137/0520043

8. Jikov, V. V. & Kozlov, S. M. & Oleinik, O. A. 1994, “Homogenization of differential operators and integral functionals“, *Springer*, 570 p.

9. Acerbi, E. & Chiad‘o, V. & Maso, G. & Percivale, D. 1992, “An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains“, *Nonlinear Anal.*, vol. 5, pp. 481-496. DOI: 10.1016/0362-546X(92)90015-7

10. Meirmanov, A. 2014, “Mathematical models for poroelastic flow“, *Paris, Atlantis Press*, 449 p.

11. Rudin, W. 1976, “Principles of mathematical analysis“, *McGraw-Hill*, 351 p.

12. Kolmogorov, A. N. & Fomin, S. V. 1975, “Introductory real analysis“, *Dover Publications, INC., New York*, 416 p.

13. Adams, R. A. 1975, “Sobolev spaces“, *Academic Press, New York*, 320 p.

14. Lions, J. L. 1969, “Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaire“, *Dunon, Gauthier-Vllar, Paris*, 554 p.

15. Mikhailov, V. P. & Gushchin, A. K. 2007, “Additional chapters of the course “Equations of Mathematical Physics„‘, *Lecture courses REC, Issue 7, V.A. Steklov’s Mathematical Institute, RAS, Moscow*, 146 p.

16. Bensoussan, A. & Lions, J. & Papanicolau, G. 1978, “Asymptotic Analysis for Periodic Structure“, *Amsterdam: North Holland*, 699 p.

Получено 11.03.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-152-161

Пары микровесовых торов в GL_n

В. В. Нестеров, Н. А. Вавилов

Владимир Викторович Нестеров — кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: vl.nesterov@mail.ru
Николай Александрович Вавилов — доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru

Аннотация

В настоящей заметке мы доказываем теорему редукции для подгрупп полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, T)$ над телом T, порожденных парой микровесовых торов одного и того же типа. Оказывается, что любая пара торов вычета m сопряжена такой же паре в $\mathrm{GL}(3m, T)$. При этом пары, которые не могут быть вложены далее в $\mathrm{GL}(3m-1, T)$, образуют единственную $\mathrm{GL}(3m, T)$-орбиту. В случае $m = 1$ нам остаётся проанализировать $\mathrm{GL}(2, T)$, что было сделано два десятилетия назад вторым автором, Коэном, Кюйперсом и Стерком. Для следующего значения $m = 2$ это означает, что единственными случаями, которые должны быть рассмотрены, являются группы $\mathrm{GL}(4, T)$ и $\mathrm{GL}(5, T)$. В этих случаях задача может быть полностью решена (прямыми, но достаточно длинными) матричными вычислениями, которые осуществлены в готовящейся статье авторов.

Ключевые слова: Полная линейная группа, унипотентные корневые подгруппы, полупростые корневые подгруппы, диагональная подгруппа.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
В. В. Нестеров, Н. А. Вавилов. Пары микровесовых торов в GL_n // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 152–161.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-152-161

Pairs of microweight tori in GL_n

V. V. Nesterov, N. A. Vavilov

Vladimir Viktorovich Nesterov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).
e-mail: vl.nesterov@mail.ru
Nikolay Alexandrovich Vavilov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).
e-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru

Abstract

In the present note we prove a reduction theorem for subgroups of the general linear group $\mathrm{GL}(n,T)$ over a skew-field T, generated by a pair of microweight tori of the same type. It turns out, that any pair of tori of residue m is conjugate to such a pair in $\mathrm{GL}(3m,T)$, and the pairs that cannot be further reduced to $\mathrm{GL}(3m-1,T)$ form a single $\mathrm{GL}(3m,T)$-orbit. For the case $m=1$ this leaves us with the analysis of $\mathrm{GL}(2,T)$, that was carried through some two decades ago by the second author, Cohen, Cuypers and Sterk. For the next case $m=2$ this means that the only cases to be considered are $\mathrm{GL}(4,T)$ and $\mathrm{GL}(5,T)$. In these cases the problem can be fully resolved by (direct but rather lengthy) matrix calculations, which are relegated to a forthcoming paper by the authors.

Keywords: General linear group, unipotent root subgroups, semisimple root subgroups, m-tori, diagonal subgroup.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
V. V. Nesterov, N. A. Vavilov, 2020, "Pairs of microweight tori in GL_n", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 152–161.

Introduction

The present paper opens a major cycle of joint papers by the authors dedicated to the geometry of *microweight tori* and *long root tori* in Chevalley groups that was announced in [9]. In the present paper we make one of the first steps towards description of orbits and spans for pairs of microweight tori in the simplest case of the group $\mathrm{GL}(n,K)$. Namely we prove a reduction theorem for subgroups generated by a pair of such tori. However, in this case such a reduction can be established by elementary linear algebra (rather than representation theory of algebraic groups), and can be stated in a more general setting. Thus, we decided to publish this case separately.

Recall that as of today, the geometry of microweight tori is fully understood only for the simplest possible case (A_l,ϖ_1). From the elementary viewpoint these are 1-*tori* also called *reflection tori* in $\mathrm{GL}(n,K)$, $n=l+1$, in other words, the one-parameter groups of pseudo-reflections. The second author, Cohen, Cuypers and Sterk [7, 2] completely described orbits of $\mathrm{GL}(n,K)$ on pairs of such tori, and the corresponding spans. One important corollary of these results is that for $|K|\geqslant 7$ the span $\langle X,Y\rangle$ of two non-commuting 1-tori X and Y contains a unipotent root subgroup.

In our forthcoming papers [16, 17] we do the same for the next case of (A_l,ϖ_2), in other words, for the 2-*tori* also called *bireflection tori* in $\mathrm{GL}(n,K)$ which are one-parameter subgroups of dilations $\mathrm{diag}(\varepsilon,\varepsilon,1,\dots,1)$ of residue 2. This case naturally occurs in the analysis of the microweight cases (D_l,ϖ_1), (E_6,ϖ_1) and (E_7,ϖ_7), and that of the semi-simple root elements for all simply-laced types, including the immensely interesting exceptional cases (E_6,ϖ_2), (E_7,ϖ_1) and (E_8,ϖ_8).

For $m\geqslant 3$ the m-tori in $\mathrm{GL}(n,T)$, could be fun in themselves, but they play no such special role in the investigation of other cases. Also, explicit description of orbits and spans, or even extraction of unipotents, become progressively harder for larger values of m. However, the *parametrisation* of the m-tori themselves, and *reduction theorems* for such tori the case $m=2$ are not any easier than for the general case. In the present paper we introduce the obvious geometric invariants for pairs X and Y of m-tori, and bound their span $\langle X,Y\rangle$.

Observe that our main results are closely related to the classification of subgroups generated by semisimple elements of a given type. Originally, one would mostly consider *finite* such groups. Of course, classically one would think of finite groups generated by reflections and pseudo-reflections, which over fields of characteristic 0 were classified by Coxeter, and Shephard—Todd, and which arise in many contexts, such as Chevalley theorem. Subsequently, Wagner, Zalessky, Serezhkin and others generalised these results to fields of positive characteristic.

However, further geometric applications required classification of finite groups generated by semisimple elements with *two* non-trivial eigenvalues. After initial successes, mostly due to Huffmann and Wales, the subject lay dormant for couple decades, but recently there is a surge of activity, in the works of Lange, Mikhailova, Blum-Smith, and others, see [5, 4, 1], and references there.

The present paper is a part of a major project whose goal is, in particular, to obtain similar results in much more general contexts, removing the condition that $\mathrm{char}(K)=0$ and relaxing the assumption of finiteness in such similar results. In the bibliography we list some of our previous papers that provide background or premises for this and/or establish parallel results in other related contexts, see [14, 15, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13].

1. Notation

Let T be a skew-field, in deeper results and actual applications it will be commutative, in which case it is denoted by K. Further, let $V=T^n$ be the *right* vector space of columns of height n over T, and let $e_1,\dots,e_n$ be the standard base of T^n. Here e_i is the column, whose i-th component equals 1, whereas all other components are equal to 0.

The dual vector space $V^*={}^nT$ is a *left* vector space over T. It can be interpreted as the space of rows of length n with components in T. By $f_1,\dots,f_n$ we denote the standard base of ${}^nT$. It is dual to $e_1,\dots,e_n$ with respect to the standard pairing, $V^*\times V\longrightarrow T$, $(u,v)\longrightarrow uv$.

For a subspace $U\leqslant T^n$ we denote by

$$^{\perp}U=\big\{x\in T^n\mid \forall u\in U,\ xu=0\big\}.$$

Dually, for a subspace $W\leqslant {}^nT$ we denote by

$$W^{\perp}=\big\{y\in {}^nT\mid \forall v\in W,\ vy=0\big\}.$$

As usual, $M(m,n,T)$ denotes the left/right vector space of matrices of size $m\times n$ over T, and $M(n,T)=M(n,n,T)$ is the full matrix ring of degree n over T. Further, $G=\mathrm{GL}(n,T)=M(n,T)^*$ is the general linear group of degree n over T. Sometimes we identify a matrix $g\in G$ with the corresponding linear map $T^n\longrightarrow T^n$, $v\longrightarrow gv$. Here g acts *on the left*. Similarly, transformations of left vector spaces are written on the right. To stress that we are using this geometric viewpoint, in such cases we call elements of G *transformations*.

For a matrix $g\in\mathrm{GL}(n,T)$ we denote by g_{ij} its entry in the position (i,j), so that $g=(g_{ij})$, $1\leqslant i,j\leqslant n$. As usual, $g^{-1}=(g'_{ij})$ denotes the inverse of g, e denotes the identity matrix and e_{ij} is a standard matrix unit, i.e. the matrix whose entry in the position (i,j) is 1 and all the remaining entries are zeroes. Thus $g=\sum g_{ij}e_{ij}$. By g^t we denote the *formal* transpose of g, whose entry in the position (i,j) equals g_{ji} considered as an element of T. (In the correct definition of a transpose g_{ji} should be considered an element of the *opposite* skew-field T^0).

Let $D=D(n,T)$ be the group of diagonal matrices, and $N=N(n,T)$ be the group of monomial matrices. The quotient group N/D is isomorphic to S_n, the symmetric group on n letters. Denote by $W=W_n$ the group of permutation matrices in G. We identify S_n and W_n via the isomorphism $\pi\mapsto w_\pi$, where w_π is the matrix whose entry in the position (i,j) is $\delta_{i,\pi j}$.

By $t_{ij}(\xi)=e+\xi e_{ij}$ for $\xi\in T$ and $1\leqslant i\neq j\leqslant n$ we denote an *elementary transvection*. For given $i\neq j$ we consider the corresponding unipotent *root subgroup* $X_{ij}=\{t_{ij}(\xi),\xi\in T\}$. The subgroup $E(n,T)$ of G, generated by all X_{ij}, $1\leqslant i\neq j\leqslant n$, is called the *elementary* subgroup of G. When $T=K$ is commutative, it coincides with the special linear group $\mathrm{SL}(n,K)$. Similarly, by $d_i(\varepsilon)=e+(\varepsilon-1)e_{ii}$ we denote an *elementary pseudo-reflection*. For a given i we consider the corresponding 1-**torus** $Q_i=\{d_i(\varepsilon),\ \varepsilon\in T^*\}$. Clearly, $\mathrm{GL}(n,T)$ is generated by $E(n,T)$ and Q_1.

2. One-dimensional transformations

Recall that a transformation $g \in G$ is called *m-dimensional*, if $\mathrm{rk}(g-e) = m$. An alternative terminology is to call $\mathrm{res}(g) = \mathrm{rk}(g-e)$ the *residue* of g, and speak of m-dimensional transformations as transformations of residue m. The largest subspace $W \leqslant V$ such that $g|_W = \mathrm{id}$ is called the *axis* of g. Similarly, the subspace $U = \{gv - v \mid v \in T^n\}$ is called the *residual space* of g or, alternatively, the *centre* of g. Clearly, $\dim U = m$ and $\dim W = n - m$. Many useful properties of residues and residual spaces can be found in [3].

The most important individual elements of $\mathrm{GL}(n,T)$ are the 1-dimensional tranformations, also called *elementary transformations* of the first/second kind. The general form of an 1-dimensional transformation is $x_{vu}(\xi) = e + v\xi u$, where $v \in T^n$, $u \in {}^nT$, and $\xi \in T$. In this case the centre of $x_{vu}(\xi)$ is the space generated by v, whereas its axis is the hyperplane orthogonal to u. Let $uv = \delta$. If $\delta = 0$, the tranformation $x_{vu}(\xi)$ is a *transvection* for all $\xi \in T$. If $\delta \neq 0$, then replacing ξ, if necessary, we an assume that $\delta = 1$. In this case $x_{vu}(\xi)$ is a *pseudo-reflection* for all $\xi \in K \setminus \{-1\}$.

For ensuing reference, let us reproduce one of the principal results of our paper [7], Theorem 1. The geometric invariants occuring here are explained in a more general context in the next section.

Lemma 1. *Assume that $|T| \geqslant 7$. Then for any $n \geqslant 3$ there are the following orbits of* $\mathrm{GL}(n,T)$ *acting by simultaneous conjugation on pairs (X,Y) of 1-tori. These orbits can be distinguished by the values of l, m, p, q and c. The values of these invariants on orbits and the corresponding spans are identified in the following table.*

NN.	l	m	p	q	c	$\langle X,Y\rangle$
1.	1	1	1	1	1	Q_1
2.	1	2	1	1	1	Q_1X_{12}
3.	2	1	1	1	1	Q_1X_{21}
4.	2	2	0	0	–	Q_1Q_2
5.	2	2	0	1	–	$Q_1Q_2X_{12}$
6.	2	2	1	0	–	$Q_1Q_2X_{12}$
7.	2	2	1	1	1	$Q_2X_{12}X_{13}X_{23}$
$8*$.	2	2	1	1	$\neq 1$	$\mathrm{GL}(2,T)$

Our immediate goal is to obtain a similar result for the next case of 2-tori, which is crucial for the analysis of the exceptional microweight cases. However, already in this case the lists are conspicuously longer, and the identification of spans is significantly more involved. Nevertheless, the initial warm-up fragments of the proof, namely the reduction to $\mathrm{GL}(3,T)$ and the analysis of those orbits in $\mathrm{GL}(3,T)$ that do not occur in $\mathrm{GL}(2,T)$ (roughly corresponding to §§ 2 and 3 of [7]), readily generalise to m-tori over skew-fields. Predictably, in this case $\mathrm{GL}(3,T)$ should be replaced by $\mathrm{GL}(3m,T)$. This is precisely what we carry out in this note.

3. m-dimensional transformations

Our goal is to study orbits of $\mathrm{GL}(n,T)$ for the conjugation action on the pairs of m-tori

$$(X,Y) \mapsto (gXg^{-1}, gYg^{-1}), \qquad g \in G,$$

and to identify the corresponding spans. In the present section we introduce the obvious invariants of such pairs, and prove a reduction theorem that for the case of $m = 2$ reduces analysis to the *three* cases, of degrees 4,5 and 6, respectively.

Observe that any m-torus is conjugate to the elementary torus Q, consisting of diagonal matrices whose first m entries at the principal diagonal are $\varepsilon \in T^*$, whereas all other diagonal entries are 1:

$$Q = \{\mathrm{diag}(\varepsilon, \dots, \varepsilon, 1, \dots, 1),\ \varepsilon \in T^*\}.$$

The elementary torus $Q = Q_{U_0,W_0}$ corresponds to the subspaces $U_0 = \langle e_1, \dots, e_m\rangle$ and $W_0 = \langle f_1, \dots, f_m\rangle$ generated by the first m base vectors. In other words, the elements of Q are

$$d_0(\varepsilon) = e + e_1(\varepsilon - 1)f_1 + \ldots + e_m(\varepsilon - 1)f_m, \qquad \varepsilon \in T^*,$$

Then the elements of an arbitrary m-torus can be expressed as

$$d(\varepsilon) = e + u_1(\varepsilon - 1)v_1 + \ldots + u_m(\varepsilon - 1)v_m, \qquad \varepsilon \in T^*,$$

where $u_i = ge_i$, $v_i = f_ig^{-1}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, for some matrix $g \in \mathrm{GL}(n,T)$. At that, $U = \langle u_1, \dots, u_m\rangle$ and $W = \langle v_1, \dots, v_m\rangle$.

The subspace U is precisely the *centre* of Q_{UW}, in the sense of being the centre of every $d(\varepsilon) \in Q_{UW}$, $\varepsilon \neq 1$. Similarly, the subspace $W^{\perp}$ orthogonal to $W \leqslant {}^nT$ with respect to the canonical pairing ${}^nT \times T^n \longrightarrow T$, is precisely the *axis* of Q_{UW}, in the above sense. Oftentimes we loosely refer to W itself as the axis of Q_{UW}. The following two observations are obvious.

Lemma 2. *Every m-torus $Q = Q_{UW}$ is completely determined by the subspaces $U \leqslant T^n$, $W \leqslant {}^nT$ such that*

$$\dim(U) = \dim(W) = m, \qquad T^n = U \oplus W^{\perp}.$$

Lemma 3. *For any $g \in \mathrm{GL}(n,T)$ we have $gQ_{UW}g^{-1} = Q_{gU,Wg^{-1}}$.*

Lemma 4. *For any subspace $U \leqslant T^n$ and any $g \in \mathrm{GL}(n,T)$ one has ${}^{\perp}(gU) = {}^{\perp}Ug^{-1}$. Dually, for any subspace $W \leqslant {}^nT$ and any $g \in \mathrm{GL}(n,T)$ one has $(Wg)^{\perp} = g^{-1}W^{\perp}$.*

Proof. To prove the first claim, recall that ${}^{\perp}(gU)$ consists of all $x \in {}^nT$ such that $x(gu) = 0$ for all $u \in U$. This equality can be rewritten as $(xg)u$ for all $u \in U$. Thus, $xg \in {}^{\perp}U$, or, what is the same, $x \in {}^{\perp}Ug^{-1}$, as claimed. The second claim can be established similarly (and, in fact, follows by duality). $\square$

Now we are in a position to construct some obvious invariants of a pair of m-tori.

4. Obvious invariants

Now, let X and Y be two m-tori with centres U_1 and U_2 and axes W_1 and W_2, respectively. We introduce the following notation.

- $r = r(X,Y) = \dim(U_1 + U_2)$,
- $s = s(X,Y) = \dim(W_1 + W_2)$.

Clearly, the parameters r and s take their values in the interval $m \leqslant r, s \leqslant 2m$.

Further, we introduce the following notation

- $p = p(X,Y) = \dim(U_1 \cap W_2^{\perp})$,
- $q = q(X,Y) = \dim(U_2 \cap W_1^{\perp})$.

It is easy to see that the parameters p and q take their values in the interval $0 \leqslant p, q \leqslant m$.

Lemma 5. *The above parameters r, s, p and q are not changed under simultaneous conjugation.*

Proof. For r and s this is obvious. To prove the invariance of p, recall that by Lemma 4 one has

$$p(gXg^{-1}, gYg^{-1}) = \dim(gU_1 \cap (W_2 g^{-1})^{\perp}) = \dim(gU_1 \cap gW_2^{\perp}) = \dim(U_1 \cap W_2^{\perp}) = p(X,Y),$$

the invariance of q is verified similarly. □

To classify *orbits* on pairs of 1-tori, in [7] we introduced yet another invariant of a pair of tori. However, the *span* of such a pair was only influenced by whether that invariant was equal to 1 or distinct from 1. Since we are interested in classifying possible spans much more than in classifying orbits, here we limit ourselves to the discrete part of that invariant. Namely, we set

- $t = t(X,Y) = \max\Big(\dim\big((U_1+U_2)\cap(W_1+W_2)^{\perp}\big), \dim\big({}^{\perp}(U_1+U_2)\cap(W_1+W_2)\big)\Big)$

Clearly, the parameter t takes values in the interval $0 \leqslant t \leqslant m$ and, by the same token as in Lemma 5, it is not changed under simultaneous conjugation.

5. Degree reduction

In the next result we denote by H_m the linear group of degree $3m$, generated by Q_1 and by all X_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant 2m$, $1 \leqslant j \leqslant 3m$. In other words,

$$H_m = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & e \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathrm{GL}(2m,T),\ y \in M(2m,m,T) \right\} \leqslant \mathrm{GL}(3m,T).$$

By default, we identify linear groups of different degrees via the stability embedding. In other words, for $m \leqslant n$, we set

$$\mathrm{GL}(m,T) \longrightarrow \mathrm{GL}(n,T), \qquad g \mapsto g \oplus e = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

where e is the identity matrix of degree $n-m$. Let

$$H(n)_m = H_m \cap \mathrm{GL}(n,T),$$

By the very definition $H(n)_m = H_m$ for all $n \geqslant 3m$.

Now we are all set to start proving our basic reduction to degree $3m$.

Lemma 6. *Let X and Y be two m-tori in $\mathrm{GL}(n,T)$, $n \geqslant m+1$. Then there exists an $g \in \mathrm{GL}(n,T)$ such that $gXg^{-1}, gYg^{-1} \leqslant H(n)_m$.*

Proof. From the very beginning we can assume that $X = Q_{U_0,W_0}$, where $U_0 = \langle e_1,\dots,e_m\rangle$, $W_0 = \langle f_1,\dots,f_m\rangle$. Let $Y = Q_{U_1,W_1}$.

Consider the factor-space V/U_0 and let $\dim(U_0 \cap U_1) = k$, $0 \leqslant k \leqslant m$. We denote $\overline{U_1} = U_1/(U_0 \cap U_1)$. Then there exists an element $\overline{g_1} \in \mathrm{GL}(n-m+k,T)$ such that $\overline{g_1}\,\overline{U_1}$ is contained in the subspace $\overline{V_1}$, spanned by the projections of the first $2m-k$ vectors of the standard base $e_1,\dots,e_{2m-k}$. Then the matrix $\overline{g_1}$ only differs from the identity matrix in the block g' of size $m-k$, standing in the upper left corner.

Setting $g_1 = e_m \oplus g' \oplus e_{n-2m+k} \in \mathrm{GL}(n,T)$ we get $g_1(U_0+U_1) \subseteq V_1$, $W_0 g_1^{-1} = W_0$. Now, it remains to repeat the same argument for W's.

Set $U = U_0 + U_1$, $\dim U = 2m-k$, and consider the dual space V^*/U^*. There exists an element $\overline{g_2} \in \mathrm{GL}(n-2m+k,T)$ such that $\overline{W_1 g_2^{-1}}$ is contained in the subspace generated by the projections of the dual standard base $f_{2m-k+1},\dots,f_{3m-k}$. The matrix $\overline{g_2}$ only differs from the identity matrix by its block g'' of size $m-k$, standing in the upper left corner.

As above, set $g_2 = e_{2m-k} \oplus g'' \oplus e_{n-3m+k} \in \mathrm{GL}(n, T)$. Then $g = g_1 g_2$ is the required conjugating matrix. $\square$

From now on, we can assume that we are inside $\mathrm{GL}(3m, T)$ — all orbits on pairs of tori have representatives inside this group. Interchanging centres and axes in the above argument, we get a similar reduction inside the transpose of $H(n)^t_m$.

Lemma 7. *Let X and Y be two m-tori in $\mathrm{GL}(n, T)$, $n \geqslant m + 1$. Then there exists an $g \in \mathrm{GL}(n, T)$ such that $gXg^{-1}, gYg^{-1} \leqslant H(n)^t_m$.*

Obviously, any pair of parabolic subgroups is simultaneously conjugate to a pair P_1, wP_2w^{-1}, where P_1 and P_2 are standard parabolic subgroups and w is an element of the Weyl group. Thus, the previous lemma immediately implies the following result.

Theorem 1. *Let X and Y be two m-tori in $\mathrm{GL}(n, T)$, $n \geqslant m + 1$. Then there exists an $g \in \mathrm{GL}(n, K)$ such that*

$$gXg^{-1}, gYg^{-1} \leqslant H(n)_m \cap wH(n)^t_m w^{-1}$$

for some $w \in W_n$.

In particular for $m = 2$, only one of the three possibilities may occur for the intersection of two maximal parabolic subgroups stabilising a 4-subspace and a 2-subspace in $\mathrm{GL}(6, T)$. Thus, any pair of 2-tori is simultaneous conjugate to a pair contained in one of the following subgroups

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

depending on whether $t = 0, 1, 2$.

6. The highest degree orbit

As above, we consider a pair of m-tori X and Y, by U_1, U_2 and by W_1, W_2 we denote their axes and centres, respectively. We fix some bases in these subspaces

$$U_1 = \langle u_1, \dots, u_m \rangle, \quad U_2 = \langle u_{m+1}, \dots, u_{2m} \rangle, \quad W_1 = \langle v_1, \dots, v_m \rangle, \quad W_2 = \langle v_{m+1} \dots, v_{2m} \rangle.$$

For the standard m-torus Q we have $U = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$, $W = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$.

In the present section we consider the simplest possible type of subgroups generated by two m-tori, viz. the direct sums of m isomorphic linear groups generated by 1-tori.

With this end consider the representation

$$\phi_m : \mathrm{GL}(n, T) \longrightarrow \mathrm{GL}(mn, T), \qquad g \mapsto g \oplus \dots \oplus g = \mathrm{diag}(g, \dots, g),$$

where the number of summands equals m.

Clearly, the image of an 1-torus under ϕ_m is an m-torus. Thus, applying this map to the subgroups listed in [7], Theorem 1 (= Lemma 1 above), we get *some* subgroups generated by m-tori, which we call **replications** of subgroups generated by a pair of 1-tori.

The unique new orbit of $\mathrm{GL}(3m, T)$ on the pairs of m-tori is the orbit obtained by the replication of the unique new $\mathrm{GL}(3, T)$-orbit on the pairs of 1-tori.

Theorem 2. *There exists a unique orbit of* $\mathrm{GL}(3m,T)$ *on pairs of* m*-tori that are not contained in* $\mathrm{GL}(3m-1,T)$. *For this orbit the parameters introduced in § 4 take the following values:* $r=s=2m$, $p=q=0$, $t=m$.

Proof. By hypothesis our orbit is not contained in $\mathrm{GL}(3m-1,T)$, so that without loss of generality we can assume that

$$U_1+U_2\leqslant\langle e_1,\dots,e_{2m}\rangle,\qquad W_1+W_2\leqslant\langle f_{m+1},\dots,f_{3m}\rangle,$$

we construct the series of conjugations to reduce such a pair to the canonical form.

• Conjugating by appropriate transvections from X_{ij}, where $1\leqslant i\leqslant m$, $m+1\leqslant j\leqslant 2m$, we can assume that $u_i=e_{m+i}$, for all $1\leqslant i\leqslant m$.

• Similarly, conjugating by appropriate transvections from X_{hk}, $m+1\leqslant h\leqslant 2m$, $2m+1\leqslant k\leqslant 3m$, we can assume that, moreover, $v_i=f_i$, for all $m+1\leqslant i\leqslant 2m$.

Then the remaining axes and centres are of the form

$$(u_{m+1},\dots,u_{2m})=(e_{m+1},\dots,e_{2m})+(e_1,\dots,e_m)g_1,$$

and of the form

$$\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{m+1}\\ \vdots\\ f_{2m}\end{pmatrix}+g_2\begin{pmatrix}f_{2m+1}\\ \vdots\\ f_{3m}\end{pmatrix},$$

respectively. Since $r=2m$, the matrix g_1 is invertible, and since $s=2m$, the matrix g_2 is also invertible.

• Conjugating by g_1^{-1} in the embedding of $\mathrm{GL}(m,T)\longrightarrow\mathrm{GL}(2m,T)$ on the first m positions (the usual stability embedding), we can assume that $u_{m+i}=e_i+e_{m+i}$, for all $1\leqslant i\leqslant m$.

• Conjugating by g_2 in the embedding of $\mathrm{GL}(m,T)\longrightarrow\mathrm{GL}(2m,T)$ on the last m positions, we can, moreover, assume that $v_i=f_{m+i}+f_{2m+i}$, for all $1\leqslant i\leqslant m$.

Recall one more piece of notation from [7]. For $u\in T^n$ and $v\in {}^nT$ such that $vu=1$, we set

$$Q_{uv}=\{e+u(\varepsilon-1)v\mid\varepsilon\in T^*\}\,.$$

Then the above means precisely that any such pair of m-tori is conjugate to the image under ϕ_m of the following pair of 1-tori:

$$Q_{e_2,f_2+f_3},Q_{e_1+e_2,f_2}\in\mathrm{GL}(3,T),$$

as claimed. □

In the forthcoming papers we take it from here for the next simplest case $m=2$. In [16] the first author considers the most difficult case of pairs of 2-tori in $\mathrm{GL}(4,R)$, and under some assumptions on T identifies their spans. In [17] we consider the remaining case of pairs of 2-tori in $\mathrm{GL}(5,T)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Blum-Smith B., A rotation group whose subspace arrangement is not from a real reflection group // Linear Algebra Appl. 581 (2019), 405–412.

2. Cohen A. M., Cuypers H., Sterk H., Linear groups generated by reflection tori // Canad. J. Math. 51 (1999), no. 6, 1149–1174.

3. Hahn A. J., O'Meara O. T., The classical groups and K-theory // Springer, Berlin et al. 1989

4. Lange Ch., Characterization of finite groups generated by reflections and rotations // J. Topol. 9 (2016), no. 4, 1109–1129.
5. Lange Ch., Mikhailova M. A., Classification of finite groups generated by reflections and rotations // Transform. Groups 21 (2016), no. 4, 1155–1201.
6. Вавилов Н. А., Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор // Труды Ленингр. Мат. Общ., 1 (1990), 64–109.
7. Вавилов Н. А., Геометрия 1-торов в GL_n // Алгебра и анализ 19 (2007), no. 3, 120–151.
8. Вавилов Н. А., Весовые элементы групп Шевалле // Алгебра и анализ 20 (2008), no. 1, 34–85.
9. Вавилов Н. А., Нестеров В. В., *Геометрия микровесовых торов* // Владикавказский мат. журнал 10 (2008), no. 1, 10–23.
10. Вавилов Н. А., Певзнер И. М., Тройки длинных корневых подгрупп // Зап. научн. сем. ПОМИ 343 (2007), 54–83.
11. Вавилов Н. А., Семенов А. А., *Разложение Брюа длинных корневых торов в группах Шевавлле* // Зап. науч. семин. ЛОМИ 175 (1989), 12–23.
12. Вавилов Н. А., Семенов А. А., Длинные корневые полупростые элементы в группах Шевалле // Доклады Акад. наук, сер. Математика 338 (1994), no. 6, 725–727.
13. Вавилов Н. А., Семенов А. А., Длинные корневые торы в группах Шевалле // Алгебра и анализ 24 (2012), no. 3, 22–83.
14. Нестеров В. В., Порождение пар коротких корневых подгрупп в группах Шевалле // Алгебра и анализ 16 (2004), no. 6, 172–208.
15. Нестеров В. В., Теоремы редукции для троек коротких корневых подгрупп в группах Шевалле // Зап. науч. семин. ПОМИ 443 (2016), no. 4, 437–452 .
16. Нестеров В. В., Извлечение малоранговых унипотентных элементов в $\mathrm{GL}(4, K)$ // Записки науч. сем. ПОМИ (2020), 10 стр.
17. Нестеров В. В., Вавилов В. В., Подгруппы, порожденные парой 2-торов в $\mathrm{GL}(n, K)$, in preparation (2020).

REFERENCES

1. Blum-Smith B., A rotation group whose subspace arrangement is not from a real reflection group, *Linear Algebra Appl.* 581 (2019), 405–412.
2. Cohen A. M., Cuypers H., Sterk H., Linear groups generated by reflection tori, *Canad. J. Math.* 51 (1999), no. 6, 1149–1174.
3. Hahn A. J., O'Meara O. T., The classical groups and K-theory, Springer, Berlin et al. 1989
4. Lange Ch., Characterization of finite groups generated by reflections and rotations, *J. Topol.* 9 (2016), no. 4, 1109–1129.
5. Lange Ch., Mikhailova M. A., Classification of finite groups generated by reflections and rotations, *Transform. Groups* 21 (2016), no. 4, 1155–1201.

6. Nesterov V. V., *Generation of pairs of short root subgroups in Chevalley groups*, *St. Petersburg Math. J.* 16 (2005), no. 6, 1051–1077.

7. Nesterov V. V., Reduction theorems for triples of short root subgroups in Chevalley groups, *J. Math. Sci. (N.Y.)* 222 (2017), no. 4, 437–452 .

8. Nesterov V. V., Extraction of small rank unipotent elements in $\mathrm{GL}(4, K)$, submitted to *J. Math. Sci. (N.Y.)* (2020), 10pp.

9. Nesterov V. V., Vavilov N. A., Subgroups generated by a pair of 2-tori in $\mathrm{GL}(n, K)$, in preparation (2020).

10. Vavilov N. A., Subgroups of Chevalley groups that contain a maximal torus, *Trudy Leningr. Mat. Obshch.*, 1 (1990), 64–109.

11. Vavilov N. A., Geometry of 1-tori in GL_n, *St. Petersburg Math. J.* 19 (2008), no. 3, 407–429.

12. Vavilov N. A., Weight elements of Chevalley groups, *St. Petersburg Math. J.* 20 (2009), no. 1, 23–57.

13. Vavilov N. A., Nesterov V. V., Geometry of microweight tori, *Vladikavkaz. Mat. Zh.* 10 (2008), no. 1, 10–23, (Russian).

14. Vavilov N. A., Pevzner I. M., Triples of long root subgroups, *J. Math. Sci. (N.Y.)* 147 (2007), no. 5, 7005–7020.

15. Vavilov N. A., Semenov A. A., Bruhat decomposition for long root tori in Chevalley groups, *J. Soviet Math.* 57 (1991), no. 6, 3453–3458

16. Vavilov N. A., Semenov A. A., Long root semisimple elements in Chevalley groups, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.* 50 (1995), no. 2, 325–329.

17. Vavilov N. A., Semenov A. A., Long root tori in Chevalley groups, *St. Petersburg Math. J.* 24 (2013), no. 3, 22–83.

Получено 5.07.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.53 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-162-170

Регулярность преобразования Лапласа и преобразование Фурье

А. В. Павлов

Андрей Валерианович Павлов — кандидат физико-математических наук, доцент, МИРЭА — Российский технологический университет (г. Москва).
e-mail: a_pavlov@mirea.ru

Аннотация

Доказывается регулярность в окрестности нуля преобразования Лапласа от преобразования Фурье от четной функции, полученной из регулярной в окрестности действительной оси нечетной функции изменением четности. Из данного факта следует перестановочность синус и косинус преобразований Фурье с точностью до знака.

Ключевые слова: преобразование Фурье, перестановочность косинус и синус преобразований Фурье, регулярность преобразования Лапласа от преобразования Фурье.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:
А. В. Павлов. Регулярность преобразования Лапласа и преобразование Фурье // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 162–170.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 517.53 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-162-170

The regularity of the transform of Laplace and the transform of Fourier

A. V. Pavlov

Andrey Valerianovich Pavlov — Candidate of physico-mathematical sciences, Associate professor, MIREA — Russian Technological University (Moscow).
e-mail: a_pavlov@mirea.ru

Abstract

The paper proves the regularity in a neighborhood of zero of the Laplace transform of the Fourier transform of an even function obtained from an odd function regular in a neighborhood of the real axis by changing the parity. This fact implies that the sine and cosine of the Fourier transforms are commutable up to the sign.

Keywords: Fourier transform, sine and cosine Fourier transform transposition, Laplace transform regularity of Fourier transform.

Bibliography: 13 titles.

For citation:
A. V. Pavlov, 2020, “The regularity of the transform of Laplace and the transform of Fourier”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 162–170.

1. Введение

Основным результатом статьи япляется регулярность и однолистность в окрестности нуля преобразования Лапласа от преобразования Фурье от четной функции, полученной изменением регулярности регулярной в открытой окрестности нуля нечетной функции (теорема 1) [1,4,5,6,9]. Из данной регулярности вытекает перестановочность с обратным знаком операторов синус и косинус преобразований Фурье, определенных на действительной полуоси: $C^0S^0 = -S^0C^0$ для широкого класса функций (теорема 2).

Данные результаты согласуются со статьями автора данной статьи [1,5,9], из которых следет основное положение о возможности продолжить регулярно преобразование Лапласа в форме теоремы 1 в окрестность нуля.

Отметим, что данные результаты (теорема 1 и предложение 2) требуют в дальнейшем отдельноого изучения, например, с точки зрения приложений к математической физике и теории функций комплексного применения [3,4,8,10,12,13].

Введем обозначения

$$F_{\pm}u(x)(\cdot)(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pm isx}u(x)dx, F_{\pm}^{0}u(x)(\cdot)(s) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{\pm isx}u(x)dx, s \in (-\infty, \infty),$$

$$L_{\pm}u(x)(\cdot)(p) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{\pm px}u(x)dx, L_{-} = L,$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \cos vx\, u(x)dx = C^0u(x)(\cdot)(v), \int\limits_{0}^{\infty} sinvx\, u(x)dx = S^0u(x)(\cdot)(v), v \in (-\infty, \infty).$$

2. Регулярность преобразования Лапласа

В теоремах 1 и 2 используется условие Y1.

Условие У1. Для функции $u(x)$ выполнено условие Y1, если функция $u(p)$ регулярна в области $|Re\, p| < a \bigcup Im\, p| < a$ при некотором положительном $a > 0$, $u(0) = 0$, причем существует δ такая, что в области регулярности

$$\max[|u(p)|, |du(p)/dp|, |d^2u(p)/dp^2|]|p^{1+\delta}| \to 0,$$

$p \to \infty, \delta > 0$; $\delta = const.$.

Теорема 1. *Функция $LF_{+}^{0}u(x)(\cdot)(p)$ вместе со своим аналитическим продолжением регулярна в области $|Re\, p| < \varepsilon \bigcup Im\, p| < \varepsilon, \varepsilon > 0$, при некотором пооҗительном $\varepsilon < a$, если для нечетной функции $u(-p) = -u(p)$ выполнено условие Y1.*

Доказательство. Докажем взпомогательное предложение 1 [6,8].

Предложение 1.

При выполнеии условия Y1 для функции $u(p)$ $LF_{+}^{0}u(x)(\cdot)(v) = iF_{-}^{0}Lu(x)(\cdot)(v), v \in [0, \infty)$, причем

$$LC^0u(x)(\cdot)(v) = S^0Lu(x)(\cdot)(v), LS^0u(x)(\cdot)(v) = C^0Lu(x)(\cdot)(v), v \in [0, \infty).$$

Доказательство. После изменения порядка интегрирования в обеих частях равенства предложения 1 получаем основное равенство. При этом возможность поменять пределы интегрирования следует из абсолютной и равномерной сходимости внутренних интегралов равенства [11] (для функции $LF_{+}^{0}u(x)(\cdot)(v), v > 0$ данный факт очевиден, для второй функции и при

$v = 0$ после двукратного интегрирования по частям с учетом $u(0) = 0$ используем неравенство

$$|Lu(x)(\cdot)(t)| = |du(0)/dx/t^2 + (1/t^2)L(d^2u(x)/dx^2)(\cdot)(t)| \leqslant c_1/t^2, t \to \infty, c_1 = const.,$$

$c_1 < \infty$, непрерывность внутренних интегралов тождества на $[0, +\infty)$ очевидна [11].

Приравнивая действительную и мнимую часть доказанного тождества, получаем другие равенства предложения 1.

Воспользуемся тождеством предложения 1 $LF^0_+u(x)(\cdot)(v) = iF^0_-Lu(x)(\cdot)(v), v \in [0, \infty)$.

Функция $F^0_-Lu(x)(\cdot)(p)$ определена при всех $Im\, p \leqslant 0$. Данный факт и непрерывность этой функции на всей действительной оси $p \in (-\infty, \infty)$ проверяется с помощью формулы интегрирования по частям как при доказательстве предложения 1 с учетом $u(0) = 0$ [11].

Сумма данной функции с аналогичной функцией $F^0_+Lu(x)(\cdot)(p)$, определенной в другой полуплоскости $Im\, p \geqslant 0$, равна

$$F^0_-Lu(x)(\cdot)(p) + F^0_+Lu(x)(\cdot)(p) = 2C^0Lu(x)(\cdot)(p) = F(p), p = y, y \in (-\infty, \infty),$$

при всех чисто действительных значениях p.

Из предложения 1 следует равенство $C^0Lu(x)(\cdot)(y) = LS^0u(x)(\cdot)(y), p = y \in [0, \infty)$.

Совпадение функции $F(p)$ с четной на всей действительной оси (не только на ее положительной части) регулярной в открытой окрестности лействительной и мнимой оси функцией $LS^0u(x)(\cdot)(p)$ следует при нечетной $u(p)$ из предложения 2.

Предложение 2.

1.

Для четной $u(p)$, удовлетворяющей условию Y1, функции

$$f(ip) = f_1(p), f(p) = LF_+u(x)(\cdot)(-ip)$$

при всех $p = x+ix, x \in (-\infty, \infty)$, совпадают с точностью до константы в области регулярности обеих выражений (например, в области $|p| < a$ с константой а из условия Y1).

2.

При выполнении условия Y1 для нечетной функции $u(p)$ функция $LF_+u(x)(\cdot)(p)$ четна в некоторой открытой окрестности с дополнительным условием

$$Re\, f(ix) = f(ix), x \in (-\infty, \infty).$$

Доказательство. Отметим, что $f(iy) = LF_+u(x)(\cdot)(y) = Re\, LF_+u(x)(\cdot)(y), y \in [0, +\infty)$ при четной $u(p)$, удовлетворяющей условию Y1.

Функция $f(ip)$ совпадает с функцией, повернутой относительно функции $f(p)$ на угол $\pi/2$ по часовой стрелке около нуля: $f(ix) = f(x), x \in (-\infty, \infty)$. Из равенства

$$df(z)/dz|_{z=ix} = df(ix)/dix = -idf(ix)/dx = -idf_1(z)/dz|_{z=x},$$

при всех $x \in (-\infty, \infty)$, из области регулярности $f(z), f_1(z) = f(iz), z = ix$, получаем, что производные функций $f(z)$ и $f_1(z)$ с точностью до константы $-i$ совпадают в точках, повернутых одна относительно другой на угол $\pi/2$ по часовой стрелке: $df(z)/dz|_{z=ip} = -idf_1(z)/dz|_{z=p}$, в том числе при $z = x + ix, x \in (-\infty, \infty)$, в области регулярности данных выражений.

Так как функция $f(z)$ действительна на мнимой оси, то повернутая фнкция $f_1(z)$ чисто действительна на действительной оси. Следовательно, ее аналитиское продолжение (продолжение функции $f_1(z)$ через действительную ось) по теореме Римана о продолжении [10], совпадает с функций , значения которой сопряжены в сопряженных точках. Тоже самое соотношеие выполнено для производных функции $f_1(z)$ (например, по той же теореме Римана о продолжении через действительную ось функции $df_1(z)/dz$ действительной на данной оси [10], так как производная действительной на этой оси функции тоже действительна на этой оси), то есть значения производной функции $f_1(z)$ на диагоналях $z = x + ix, z = x - ix$ сопряжены, и

$$df_1(z)/dz|_{z=x-ix} = \overline{df_1(z)/dz|_{z=x+ix}},$$

$x \in (-\infty, \infty)$, в области регулярности данных выражений.

Сравнивая с отмеченным выражением производных функций $f(z), f_1(z)$ на этих диагоналях, получаем:

$$df(z)/dz|_{z=x+ix} = -idf_1(z)/dz|_{z=x-ix} = -i\overline{df_1(z)/dz|_{z=x+ix}},$$

в области регулярности данных выражений при $x \in (-\infty, \infty)$.

Так как

$$df(z)/dz|_{z=x+ix} = \partial U(x,y)/\partial x|_{z=x+ix} + i\partial V(x,y)/\partial x|_{z=x+ix}, f(z) = U(x,y) + iV(x,y),$$

$$df_1(z)/dz|_{z=x+ix} = \partial U_1(x,y)/\partial x|_{z=x+ix} + i\partial V_1(x,y)/\partial x|_{z=x+ix}, f_1(z) = U_1(x,y) + iV_1(x,y),$$

в области регулярности данных выражений, то мы доказали, что

$$\partial U(x,y)/\partial x|_{z=x+ix} + i\partial V(x,y)/\partial x|_{z=x+ix} = -i\overline{\partial U_1(x,y)/\partial x|_{z=x+ix} + i\partial V_1(x,y)/\partial x|_{z=x+ix}} =$$
$$= -[i\partial U_1(x,y)/\partial x|_{z=x+ix} + \partial V_1(x,y)/\partial x|_{z=x+ix}],$$

в области регулярности данных выражений на диагонали $z = x + ix$. Мы доказали, что на диагонали

$$\partial U(x,y)/\partial x = -V_1(x,y)/\partial x, \partial V(x,y)/\partial x = \partial U_1(x,y)/\partial x, x = y \in (-\infty, \infty).$$

Аналогичные равенства $\partial U/\partial y = -\partial V_1/\partial y, \partial V/\partial y = \partial U_1/\partial y$ выполнены для частных производных по y (доказывается аналогично).

Производная по направлению $e = 1 + i$ функций $f(z), f_1(z)$ совпадает, соответственно, с

$$df(z)/dz_e = [\partial U(x,y)/\partial x + \partial U(x,y)/\partial y + i\partial V(x,y)/\partial x + \partial V(x,y)/\partial y](1/(1+i)$$

и

$$df_1(z)/dz_e = -[\partial U_1(x,y)/\partial x + \partial U_1(x,y)/\partial y + i\partial V_(x,y)/\partial x + \partial V_1(x,y)/\partial y](1/(1+i).$$

Данный факт для $f(z)$ следует из равенства

$$[(U(x+dx, y+dx) - U(x,y)) + i(V(x+dx, y+dx) - V(x,y))]/(1+i)dx =$$
$$= ([(U(x+dx, y+dx) - U(x+dx, y)) + (U(x+dx, y) - U(x,y))] + i[(V(x+dx, y+dx) -$$
$$-V(x+dx, y)) + (V(x+dx, y) - V(x,y))])/(1+i)dx \to ([\partial U/\partial y + \partial U/\partial x] +$$
$$+i[\partial V/\partial y + \partial V/\partial x])/(1+i),$$

при всех $x = y \in (-\infty, \infty)$. Для $f_1(z)$ аналогично.

Заметим, что здесь с точностью до константы сохраняюся знаки у действительной и мнимой части.

Следовательно,значения рассматриваемых функций на диагонали равны интегралам от их производных по направлению вдоль линии l на этой диагонали, и мнжитель $(1/(1+i)$ сокращается ввиду $dz = (1+i)dx$:

$$f(z) = \int\limits_l [df(z)/dz_e]dz = \int\limits_0^{x_0} (1+i)dx\,([\partial U/\partial y + \partial U/\partial x] + i[\partial V/\partial y + \partial V/\partial x])/(1+i) =$$

$$= \int_0^{x_0} dx\,([\partial U/\partial y + \partial U/\partial x] + i[\partial V/\partial y + \partial V/\partial x]) = A(x) + iB(x), z = x + ix, 0 < x < x_0.$$

Аналогично для $f_1(z)$:

$$f_1(z) = \int_0^{x_0} dx\,([\partial U_1/\partial y + \partial U_1/\partial x] + i[\partial V_1/\partial y + \partial V_1/\partial x]) = A_1(x) + iB_1(x),$$

$$z = x + ix, 0 < x < x_0, Re\, x = x, x_0 \in (0, +\infty).$$

Пользуясь доказанными в начале первого пункта утверждениями, получаем:

$$f(z) = -\int_0^{x_0} dx\,([\partial V_1/\partial y + \partial V_1/\partial x] + i[\partial U_1/\partial y + \partial U_1/\partial x]) =$$

$$= -(B_1(x) + A_1(x)i) = i(A_1(x) - iB_1(x)), z = x + ix.$$

Мы доказали равенство

$$f(z) = i(A_1(x) - iB_1(x)), f_1(z) = f(iz) = A_1(x) + iB_1(x), z = x + ix, Re\, x = x \in (0, +\infty).$$

Ввиду сопряженности значений $f_1(x + ix)$ и $f(x + ix)$ получаеи $f(z) = i(A(x) + iB(x))$ на диагонали $x = y$ в области регулярности обеих выражений, и первое утверждение предложения 2 доказано.

Для доказательства второго пункта предложения 2 отметим чистую комплексности $LF_+u(x)(\cdot)(z)$, $Re\, z > 0$, на положительной части действительной оси, аналогичное равенство $f(x+ix) = f_1(x+ix)+c$ выполнено при нечетной $u(p)$ для функций $f(p) = LF{+}u(x)(\cdot)(-ip)/i$, $f_1(p) = f(ip)$ (проверяется дословным повторением доказательства первого пункта предложения 2 для этих функций с учетом $Re\, LF_+u(x)(\cdot)(x)/i = LF_+u(x)(\cdot)(x)/i, x \in (0, +\infty)$).

Теперь из равенства $f(i(x + ix)) = f(x + ix) + c$ первого пункта предложения 2, $f(p) = LF_+u(x)(\cdot)\ (-ip)$, $c = const., c < \infty$, , получаем, что повернутая на угол $\pi/2$ по часовой стрелке функция совпадает с исходной и $f(x) = f(ix)$ [88], что ввиду аналитических выражений данной функции на действительной и мнимой оси эквивалентно утверждению $LF_+u(x)(\cdot)(x) = iC^0S^0u(x)(\cdot)(x), x \in (0, +\infty)$, то есть данное выражение четно при нечетной функции $u(p)$, удовлетворяющей условию Y1 и регулярно в открытой окрестности нуля (регулярность в таких условиях $C^0S^0u(x)(\cdot)(p)$ давно известна [8-10]).

Предложение 2 доказано.

Теперь четность $LS^0u(x)(\cdot)(p)$ в некоторой открытой окрестности нуля вытекает после изменения пределов интегрирования из равенства

$$LS^0u(x)(\cdot)(y) = c\int_0^{\infty} (u(x)/(y + ix) + u(x)/(-y + ix))dx, y \in [0, \infty), c = const.,$$

с четной подинтегральной суммой в данной окрестности нуля [10,11].

Отметим, что $LS^0u(x)(\cdot)(p) = C^0Lu(x)(\cdot)(p)$ регулярна (вместе со своим аналитическим продолжением) в полосе $|Re\, p| < \varepsilon \bigcup Im\, p| < \varepsilon, \varepsilon > 0$, при выполнении условия Y1 для функции $u(p)$ при нечетной $u(-p) = -u(p)$ (данный факт легко проверяется и давно известен [6,8]). Следовательно, аналитическим продолжением функции $F^0_-Lu(x)(\cdot)(p)$ с нижней полуплоскости на верхнюю через всю действительную ось является разность [10]

$$F^0_-Lu(x)(\cdot)(p) = F(p) - F^0_+Lu(x)(\cdot)(p), p \in (\infty, \infty),$$

(непрерывность обеих функций $F^0_- Lu(x)(\cdot)(p), F^0_+ Lu(x)(\cdot)(p)$ на всей мнимой оси со стороны своих областей определения, как уже отмечалась, вытекала из формулы интегрирования по частям учетом $u(0) = 0$).

Теорема 1 доказана.

Отметим, что аналогичный факт для четной функции следует из результатов работ [1,4,5,9], но он доказывается с использованием других методов и выходит за рамки данной работы.

Непосредственным следствием регулярности $LF^0 u(x)(\cdot)(p)$ (по теореме 1) и $LS^0 u(x)(\cdot)(p)$ (широко-известный факт [8,9]) в $|Re\, p| < \varepsilon > 0$ является следствие 1.

Следствие 1.

В усовиях теоремы 1 функция $LC^0 u(x)(\cdot)(p)$ регулярна в полосе $|Re\, p| < \varepsilon > 0$, если $u(-p) = -u(p)$ в области своей регулярности.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1*

$$C^0 S^0 u(x)(\cdot)(t) = -S^0 C^0 u(x)(\cdot)(t), t \in (0, \infty).$$

Доказательство.

По определению $u(x) = u_1(x), x \in [0, +\infty)$, $-u(x) = u_1(x), x \in (-\infty, 0)$.

Рассмотрим равенство для сумм сопряженных функций

$$l_1(iy) + l_2(iy) = 2\pi u(y) = L_1(iy) + L_2(iy), y \in [0, \infty),$$

где

$$l_1(p) = L_+ F_- u(x)(\cdot)(p), L_1(p) = L_+ F_- u_1(x)(\cdot)(p), Re\, p \leqslant 0,$$

$$l_2(p) = L_- F_+ u(x)(\cdot)(p), L_2(p) = L_- F_+ u_1(x)(\cdot)(p), Re\, p \geqslant 0,$$

которое следует из формул обращения преобразований Фурье [2] с учетом

$$Re\, l_1(iy) = 2S^0 S^0 u(x)(\cdot)(y) = \pi u(y) = Re\, L_1(iy) = 2C^0 C^0 u(x)(\cdot)(y), y \in [0, \infty),$$

при нечетной $u(x)$ и четной $u_1(x)$.

Из данного равенства следует, что данные суммы совпадают в области их регулярности, и

$$l_1(p) - L_1(p) = L_2(p) - l_2(p),$$

в области регулярности каждой разности, в том числе на ганице области определения каждой функции, то есть на всей мнимой оси. Совпадение на отрицательной части мнимой оси вытекает из регулярности каждой из этих функций в открытой окрестности всей мнимой оси. При этом регулярность $l_1(p), l_2(p)$ является следствием регулярности нечетной функции $u(p)$ по условию Y1 [8,9,10], а регулярность $L_1(p), L_2(p)$ доказана в следствии 1 к теореме 1 (из данного следствия следует, что эти функции однолистны в области $|Re\, p| < \varepsilon > 0$).

Заметим, что все эти функции ограничены в области своего определения, и первая разность аналитически продолжается с левой полуплоскости в правую с помощью второй разности ввиду непрерывности обеих разностей на всей границе [10]. Следовательно, данные разности тождественно равны нулю [10] (стремление к нулю в области определения данных функций очевидно). При этом ограниченность в области своего определения, в том числе на мнимой оси, вытекает из

$$|L_+ F_- u(x)(\cdot)(p)| \leqslant \int\limits_0^\infty |e^{yt)}|dt| \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-ixt} u(x) dx| < const. < \infty, y \leqslant 0,$$

ввиду $|F^0u(x)(\cdot)(t)| \leqslant c_2/t^2, t \to \infty, c_2 = const., c_2 < \infty$, после двукратного интегрирования по частям как при доказательстве предложения 1 с учетом $u(0) = 0$ [11]. (Непрерывность на границе следует из этого же неравенства и проверялась в теореме 1). Для остальных функций $L_1(p), L_2(p), l_2(p)$ аналогично.

Мы доказали, что $l_2(iy) - L_2(iy) \equiv 0, y \in (-\infty, \infty)$, что ввиду четности и нечетности $u_1(p)$, $u(p)$, $u(x) = u_1(x)$, $x \in [0, +\infty)$, эквивалентно

$$\int_0^\infty e^{-iyt}dt \int_{-\infty}^0 e^{iyt}u(x)dx = -i[C^0S^0u(-x)(\cdot)(t) + S^0C^0u(-x)(\cdot)(t)] \equiv 0, t \in (0, \infty), u(-x) = -u(x).$$

Теорема 2 доказана.

3. Заключение

Из теоремы 1, по-видимому, вытекает равенство по модулю между синус и косинус преобразованиями Фурье на полуоси $[0, +\infty)$: $|C^0| = |S^0|$, но данный результат выходит за рамки этой статьи.

Отметим, что несколько нетрадиционный результат теоремы 1 и предложения 2 по мнению автора представляет интерес в связи с, например, двойным представлением одного выражения в виде разложения на элементарные дроби:

$$1/(p-1) + 1/(p+1) = 2p/(p-1), 1/(p-1)^2 + 1/(p^2-1) = 2p/(p-1)^2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов А. В., *Дисциплины с приоритетом коротким требованиям и идентичное обслуживание* // Москва. Электронное издание, ФГБОУ ВПО МГТУ МИРЭА, 2013, 119 с. Available at: http://catalog.inforeg.ru/Inet/GetEzineByID/300386.

2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа* // Москва. Наука, 1976. 544 с.

3. Pavlov A. V. The Dirichlet problem and disappearance of the imaginary part of the Laplace transform on the imaginary axis in connection with the Fourier, Laplace operators // Moscow. RUDN Universit., Math. Inst. nam. Steklov, The 8th Int. Conferen. on Differential and Functional Differential Equations, August 13-20, ABSTRACTS , 2017, p. 137.

4. Pavlov A. V. Identical service and the odd or even transform of Laplace // Moscow. Moscow University nam M.V.Lomonosov and RUDN., Conferen. Anal. and comp.meth. in probab.theor. and its appl., (ACMPT2017), 23-27 okt., Abstracts , Moscow, pp.31-35, 2017. ISBN 978-5-209-08291-0.

5. Pavlov A. V. The correctness of geometrical methods in the theorem of Fermat; the transform of Laplace // Berlin. 7th Eur. Congr. of Math., July 18-22, Tech. Univers. Section.Alg. and Comp. Geom.(Poster PS-03 sec.), p. 84.

6. Pavlov A. V. Application of regularity of the double Laplace transform to the general properties of the integral Fourier transform // Moscow, Math. Inst. nam.Steklov.(KSA Innov.Group). Intern. Confer. Math. theory of optimal control. Materials of Intern.Conferen.dedic. to the 90th birthday of Acad. R.V. Gamkrelidze, june 1 – 2, 2017, pp. 113-115. ISBN 978-5-98419-074-9.

7. Павлов А. В. Преобразование Фурье и формула обращения преобразования Лапласа // Москва. Мат. заметки.2011, Том 90, №6. сс. 792–796.

8. Pavlov A. V. About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier // Petrozavodsk. Issues of Analysis. 2016. Vol. 23, №1 , p. 21-30.

9. Павлов А. В. Достоверное прогнозирование функций, представимых в виде преобразования Фурье или Лапласа // Москва. Вестник МГТУ МИРЭА, 2014. Vol. 3, №2, сс. 78-85. ISSN: 2313-5026.

10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* Москва, Наука. 1987. 688 с.

11. Fichtenholz G. M. *Курс дифференциального и интегрального исчисления,II.* Москва. Наука. 1969. 800 с.

12. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. О математических работах профессора А.А. Карацубы // Москва. Труды МИАН. 1997. Vol. 218, pp. 7-19.

13. Лыков А. А., Малышев В. А., Чубариков В. Н. Регулярные континуальные системы точечных частиц. I: Системы без взаимодействия // М: Чебышевский сбор.,2016, Vol. 17, №3, сс. 148-165.

REFERENCES

1. Pavlov A. V. 2013, *The disciplines of service with prior to the shortest and identical service*, MGTUREA(MIREA) Publishers, Moscow, 119 p. ISBN 978-5-7339-1261-5. Available at: `http://catalog.inforeg.ru/Inet/GetEzineByID/300386.`

2. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. 1976, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, Science, Moscow,544 p.

3. Pavlov A. V. “The Dirichlet problem and disappearance of the imaginary part of the Laplace transform on the imaginary axis in connection with the Fourier, Laplace operators“ RUDN Universit., Math. Inst. nam. Steklov, *The 8th Int. Conferen. on Differential and Functional Differential Equations, August 13-20, ABSTRACTS* , Moscow, 2017, pp. 137.

4. Pavlov A. V. 2017, “Identical service and the odd or even transform of Laplace“ Moscow. Moscow University nam M.V.Lomonosov and RUDN., Conferen.*Anal. and comp.meth. in probab.theor. and its appl., (ACMPT2017), 23-27 okt., Abstracts* , Moscow, pp. 31-35. ISBN 978-5-209-08291-0.

5. Pavlov A. V. 2016, "The correctness of geometrical methods in the theorem of Fermat; the transform of Laplace" *Abstracts of 7th Eur. Congr. of Math., July 18-22, Section.Alg. and Comp. Geom.(Poster PS-03 sec.)*, Berlin Tech. Univers., p. 84.

6. Pavlov A. V. 2017,“Application of regularity of the double Laplace transform to the general properties of the integral Fourier transform“ ,*Intern. Confer. Math. theory of optimal control.* (Materials of Intern.Conferen.dedic. to the 90th birthday of Acad. R.V. Gamkrelidze, june 1 - 2), Moscow, Math. Inst. nam.Steklov.(KSA Innov.Group). pp. 113-115. ISBN 978-5-98419-074-9.

7. Pavlov A. V. 2011, “The Fourier transform and new inversion formula of the Laplace transform“, *Springer Publishers, Math. notes*, Vol. 90, no.6, pp. 793 - 796.

8. Pavlov A. V. 2016, “About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier“, Petrozavodsk. *Issues of Analysis*,Petrozavodsk, Vol. 23, no. 1 , pp. 21-30.

9. Pavlov A. V. 2013, “Reliable prognosis of the functions in the form of transformations of Fourier or Laplace11, *Herald of MIREA, MIREA (MTU)*, Vol.3, no. 2, Moscow, pp. 78-85. ISSN 2313-5026.

10. Lavrentiev M. A. ,Shabat B. V. 1987, *Methods of the theory of the functions of complex variables*. Science, Moscow, 688 p.

11. Fichtenholz G. M. 1969, *Course of differential and integral calculus.II*, Science, Moscow, 800 p.

12. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. 1997, “On the mathematical papers of Professor A.A. Karatsuba“ *Works of MIAS*, Mat. Inst. Steklova , Vol. 218, pp. 7-19.

13. Lykov A. A. , Malyshev V. A., Chubarikov V. N. 2016, “Regular continuum systems of point particles. I: Systems without interaction“,*Chebyshevskii Sb.*, Vol. 17,no. 3, pp. 148-165.

Получено 27.11.18 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.958:530.145 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-171-195

Локальные системы координат на квантовых флаговых многообразиях

Ф. Разавиниа

Фаррох Разавиниа — Московский физико-технический институт (г. Долгопрудный).
e-mail: f.razavinia@phystech.edu

Аннотация

Этот документ состоит из 3 разделов. В первом разделе мы дадим краткое введение в «гомоморфизмы Фейгина» и увидим, как они помогут нам доказать наши основные и фундаментальные теоремы, связанные с квантовыми соотношениями Серра и операторами экранирования.

Во втором разделе мы введем локальный интеграл движений как пространство инвариантов нильпотента часть квантовых аффинных алгебр Ли и найдет двух- и трехточечные инварианты в случае $U_q(\ hatsl_2)$, используя схему Волкова.

В третьем разделе мы введем решеточные алгебры Вирасоро как пространство инвариантов борелевской части $U_q(B_+)$ в $U_q(g)$ для простой алгебры Ли g и найдем множество образующих Решеточная алгебра Вирасоро, соединенная с sl_2 и $U_q(sl_2)$

И как новый результат, мы нашли множество некоторых образующих решетки алгебры Вирасоро.

Ключевые слова: Решетки W алгебры, квантовые группы, гомоморфизмы Фейгина.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
Ф. Разавиниа Локальные системы координат на квантовых флаговых многообразиях // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 171–195.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 517.958:530.145 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-171-195

Local coordinate systems on quantum flag manifolds[1]

F. Razavinia

Farrokh Razavinia — Moscow Institute of Physics and Technology (Dolgoprudny).
e-mail: f.razavinia@phystech.edu

Abstract

[1] the paper was supported by Russian Science foundation grant N 17-11-01377

This paper consists of 3 sections. In the first section, we will give a brief introduction to the "Feigin's homomorphisms" and will see how they will help us to prove our main and fundamental theorems related to quantum Serre relations and screening operators.

In the second section, we will introduce Local integral of motions as the space of invariants of nilpotent part of quantum affine Lie algebras and will find two and three-point invariants in the case of $U_q(\hat{sl_2})$ by using Volkov's scheme.

In the third section, we will introduce lattice Virasoro algebras as the space of invariants of Borel part $U_q(B_+)$ of $U_q(g)$ for simple Lie algebra g and will find the set of generators of Lattice Virasoro algebra connected to sl_2 and $U_q(sl_2)$

And as a new result, we found the set of some generators of lattice Virasoro algebra.

Keywords: Lattice W algebras, quantum groups, Feigin's homomorphisms.

Bibliography: 14 titles.

For citation:

F. Razavinia, 2020, "Local coordinate systems on quantum flag manifolds" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 171–195.

1. Introduction

In this section we will introduce Feigin's homomorphisms and we will see that how they will help us to prove our main and fundamental theorems on screening operators.
"Feigin's homomorphisms"was born in his new formulation on quantum Gelfand-Kirillov conjecture, which came on a public view at RIMS in 1992 for the nilpotent part $U_q(\mathfrak{n})$, that are now known as "Feigin's Conjecture".
In that mentioned talk, Feigin proposed the existence of a family of homomorphisms from a quantized enveloping algebra to rings of skew-polynomials. These "homomorphisms"are became very useful tools for to study the fraction field of quantized enveloping algebra. [6]

Feigin's homomorphisms on $U_q(\mathfrak{n})$

Here we will briefly try to show that what are Feigin's homomorphisms and how they will guide us to reach and to prove that the screening operators are satisfying in quantum Serre relations.

Set C as an arbitrary symmetrizable Cartan matrix of rank r, and $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_+$ the standard maximal nilpotent sub-algebra in the Kac-Moody algebra associated with C (thus, n is generated by the elements $E_1, ..., E_r$ satisfying in the Serre relations). As always $U_q(n)$ is the quantized enveloping algebra of n. And $A = (A_{ij}) = (d_i c_{ij})$ is the symmetric matrix corresponding to C for non-zero relatively prime integers $d_1, ..., d_n$ such that $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ for all i, j. And set g as a Kac-Moody Lie algebra attached to A, on generators $E_i, F_i, H_i, 1 \leq i \leq n$.[11] Let us to mention some of the structures related to g that we will use them here:

the triangular decomposition $g = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$;

the dual space $\mathfrak{h}^*$; elements of $\mathfrak{h}^*$ will be referred to as weights;

the root space decomposition $\mathfrak{n}_\pm = \oplus_{\alpha\in\Delta_\pm} g_\alpha, g_{\alpha_i} = \mathbb{C}E_i$;

the root lattice $\Lambda \in \mathfrak{h}^*, \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset \Delta_+ \subset \mathfrak{h}^*$ being the set of simple roots;

the invariant bilinear form $\Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ defined by $< \alpha_i, \alpha_j >= d_i a_{ij}$. [11]

Set A_1 and A_2 as a $\Lambda-$ graded associative algebras and define a $q-$ twisted tensor product as the algebra $A_1 \overline{\otimes} A_2$ isomorphic with $A_1 \otimes A_2$ as a linear space with multiplication given by $(a_1 \otimes a_2) \cdot (a'_1 \otimes a'_2) := q^{<\alpha'_1, \alpha_2>} a_1 a'_1 \otimes a_2 a'_2$, where $\alpha'_1 = deg(a'_1)$ and $\alpha_2 = deg(a_2)$. And by this definition $A_1 \overline{\otimes} A_2$ become a $\Lambda-$ graded algebra.

Proposition 1.1. Set g an arbitrary Kac-Moody algebra, then the map

$$\overline{\Delta} : U_q^\pm(g) \to U_q^\pm(g) \overline{\otimes} U_q^\pm(g) \tag{1}$$

Such that

$$\begin{cases} \overline{\Delta}(1) := 1 \otimes 1 \\ \overline{\Delta}(E_i) := E_i \otimes 1 + 1 \otimes E_i \\ \overline{\Delta}(F_i) := F_i \otimes 1 + 1 \otimes F_i \end{cases}$$

for $1 \leqslant i \leqslant n$, is a homomorphism of associative algebras. [9][6]

Remark 1.2. there is no such map as $U_q^{\pm}(g) \to U_q^{\pm}(g) \overline{\otimes} U_q^{\pm}(g)$ in the case that g is an associative algebra. [9]

And as always after defining a co-multiplication, $\overline{\Delta}$, then we can extend it by a iteration as a sequence of maps [1]

$$\overline{\Delta}^n : U_q^-(g) \to U_q^-(g)^{\otimes n}, n = 2, 3, ... \tag{2}$$

determined by $\overline{\Delta}^2 = \overline{\Delta}, \overline{\Delta}^m = (\overline{\Delta} \otimes id) \circ \overline{\Delta}^{n-1}$.

Now set $\mathbb{C}[X_i]$ as a ring of polynomials in one variable and by equipping it by grading structure $degX_i = \alpha_i$ for any simple root α_i, we can regard it as a $\Lambda-$ graded.
By this grading there will be a morphism of $\Lambda-$ graded associative algebras

$$\phi_i : U_q^-(g) \to \mathbb{C}[X_i] : F_j \mapsto \delta_{ij} x_i \tag{3}$$

By following this construction for any sequence of simple roots $\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_k}$, there will be a morphism of $\Lambda-$ graded associative algebras

$$(\phi_{i_1} \otimes \phi_{i_k}) \circ \overline{\Delta}^k : U_q^-(g) \to \mathbb{C}[X_{1i_1}] \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} \mathbb{C}[X_{ki_k}] \tag{4}$$

(the cause of double indexation here is the appearance of i_js more than once in the sequence). And finally, $\mathbb{C}[X_{1i_1}] \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} \mathbb{C}[X_{ki_k}]$ is an algebra of skew polynomials $\mathbb{C}[X_{1i_1}, \cdots, X_{ki_k}]$, with $\Lambda-$ grading $X_{si_s} X_{ti_t} = q^{<\alpha_{i_s}, \alpha_{i_t}>} X_{ti_t} X_{si_s}$, for $s > t$. But let us to simplify it as $X_i X_j = q^{<degX_i, degX_j>} X_j X_i$; the one that we will use it always.

So very briefly we constructed the already mentioned family of morphisms (Feigin's homomorphisms) from $U_q^-(g)$ (the maximal nilpotent sub-algebra of a quantum group associated to an arbitrary Kac-Moody algebra) to the algebra of skew polynomials.

2. The contribution between Quantum Serre relations and screening operators

Theorem 2.1. Set $Q = q^2$ and points $x_1, \cdots, x_n$ such that $x_i x_j = Q x_i x_j$ for $i < j$. And set $\Sigma^x = x_1 + \cdots + x_n$. If $Q^N = 1$ and $x_i^N = 0$ for some natural number N, then we claim that $(\Sigma^x)^N = 0$

Proof. It's straightforward, just needs to use q-calculation. □

2.1. sl(3) case

As we know, $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ is the generalized Cartan matrix for $sl(3)$. Set $M_{q_2} = \begin{bmatrix} q^2 & q^{-1} \\ q^{-1} & q^2 \end{bmatrix}$ and call it Cartan type matrix related to M_2.

Theorem 2.2. Suppose we have two different types of points x_i, Namely, set $(x_{2i-1})_i$, that we will call them of type 1 and $(x_{2i})_i$, that we will call them of type 2 for $i \in I = \{1, 2\}$, and the following $q-$ commutative relations:

$$\begin{cases} x_j x_{j'} = q^2 x_{j'} x_j & \text{if } j < j' and j, j' \in \{1, 3\} and j = j' \\ x_i x_{i'} = q^2 x_{i'} x_i & \text{if } i < i' and i, i' \in \{2, 4\} and i = i' \\ x_i x_j = q^{-1} x_j x_i & \text{if } i < j \end{cases}$$

Set $\Sigma_1^x = \Sigma_{i\in I} x_{2i+1}$ and $\Sigma_2^x = \Sigma_{i\in I} x_{2i}$. We will call them screening operators. Then we claim that Σ_1^x and Σ_2^x are satisfying on quantum Serre relations:

$$(\Sigma_1^x)^2\Sigma_2^x - [2]_q\Sigma_1^x\Sigma_2^x\Sigma_1^x + \Sigma_2^x(\Sigma_1^x)^2 = 0 \tag{5}$$

$$(\Sigma_2^x)^2\Sigma_1^x - [2]_q\Sigma_2^x\Sigma_1^x\Sigma_2^x + \Sigma_1^x(\Sigma_2^x)^2 = 0$$

Proof. It's straightforward, just needs to use q-calculation. □

Theorem 2.3. Prove Theorem 2.2 in a general case, i.e. Set points $X_i \in \{X_1, \cdots, X_n\}$ and $Y_i \in \{Y_1, \cdots, Y_n\}$ with the following relations;

$$\begin{cases} X_iX_j = q^2X_jX_i & \text{if } i<j \\ Y_iY_j = q^2Y_jY_i & \text{if } i<j \\ X_iY_j = q^{-1}Y_jX_i & \text{if } i<j \end{cases}$$

and the screening operators $\Sigma_1^x = \Sigma_{i=1}^k X_i$ and $\Sigma_1^y = \Sigma_{j=1}^k Y_j$.

We claim that Σ_1^x and Σ_1^y are satisfying in quantum Serre relations.

Proof. Proof by induction on k.

As we see in theorem 2.2, it's true for $k = 2$.

Suppose that is true for $k = n$, we will prove that it's true for $k = n + 1$.

As we set it out, $\mathfrak{n}$ is a nilpotent Lie algebra, so the Cartan sub-algebra of $\mathfrak{n}$ is equal to $\mathfrak{n}$ with Chevally generators Σ_1^X and Σ_1^y as they are satisfying in quantum Serre relations.

So we can define $U_q(n) :=< \Sigma_1^x, \Sigma_1^y | (\Sigma_1^x)^2\Sigma_1^y - (q+q^{-1})\Sigma_1^x\Sigma_1^y\Sigma_1^x + \Sigma_1^y(\Sigma_1^x)^2 = 0 >$.

Let $\mathbb{C}_q[X]$ be the quantum polynomial ring in one variable. We define:

$U_q(n)\overline{\otimes}\mathbb{C}_q[X] :=< \Sigma_1^x, \Sigma_1^y, X | (\Sigma_1^x)^2\Sigma_1^y - (q+q^{-1})\Sigma_1^x\Sigma_1^y\Sigma_1^x + \Sigma_1^y(\Sigma_1^x)^2 = 0, \Sigma_1^xX = q^2X\Sigma_1^x$, $\Sigma_1^yX = q^{-1}X\Sigma_1^y >$.

Here $\overline{\otimes}$ means quantum twisted tensor product.

We define the embedding $U_q(n) \to U_q(n)\overline{\otimes}\mathbb{C}_q[X]$: $\Sigma_1^X \mapsto \Sigma_1^x + X$; $\Sigma_1^y \mapsto \Sigma_1^y$.

Claim 1:

$(\Sigma_1^x + X) and \Sigma_1^y$ are satisfying on quantum Serre relations.

proof of claim 1:

$(\Sigma_1^x+X)^2\Sigma_1^y - (q+q^{-1})(\Sigma_1^x+X)\Sigma_1^y(\Sigma_1^x+X) + \Sigma_1^y(\Sigma_1^x+X)^2 = (\Sigma_1^x)^2\Sigma_1^y + \Sigma_1^xX\Sigma_1^y + X\Sigma_1^x\Sigma_1^y + X^2\Sigma_1^y - (q+q^{-1})(\Sigma_1^x\Sigma_1^y\Sigma_1^x + X\Sigma_1^y\Sigma_1^x + \Sigma_1^x\Sigma_1^yX + X\Sigma_1^yX) + \Sigma_1^y(\Sigma_1^x)^2 + \Sigma_1^y\Sigma_1^xX + \Sigma_1^yX\Sigma_1^x + \Sigma_1^yX^2 = (\Sigma_1^x)^2\Sigma_1^y - (q+q^{-1})\Sigma_1^x\Sigma_1^y\Sigma_1^x + \Sigma_1^y(\Sigma_1^x)^2 + (q^2X\Sigma_1^x\Sigma_1^y + X\Sigma_1^x\Sigma_1^y + X^2\Sigma_1^y - (q+q^{-1})X\Sigma_1^y\Sigma_1^x - (q+q^{-1})qX\Sigma_1^x\Sigma_1^y - (q+q^{-1})q^{-1}X^2\Sigma_1^y + qX\Sigma_1^y\Sigma_1^x + q^{-1}X\Sigma_1^y\Sigma_1^x + q^{-2}X^2\Sigma_1^y = 0 + 0 = 0.$

So it's well defined.

Now set $X = X_{n+1}$.

We will have the new operators $\Sigma_1^{x\prime} = X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1}$ and $\Sigma_1^{y\prime} = Y_1 + \cdots + Y_n$.

Now define:

$$U_q(n) \to U_q(n)\overline{\otimes}\mathbb{C}_q[X] \hookrightarrow U_q(n)\overline{\otimes}\mathbb{C}_q[X]\overline{\otimes}\mathbb{C}_q[Y]$$

such that

$$\Sigma_1^x \longmapsto \Sigma_1^x + X \longmapsto \Sigma_1^{x\prime}$$

$$\Sigma_1^y \longmapsto \Sigma_1^y \longmapsto \Sigma_1^{y\prime} + Y$$

Notice that $\mathbb{C}_q[X]\overline{\otimes}\mathbb{C}_q[Y] \cong \mathbb{C} < X, Y | XY = q^{-1}YX >$.

And Define:
$U_q(n)\overline{\otimes}\mathbb{C}_q[X,Y] :=< \Sigma_1^x, \Sigma_1^y, X, Y|\Sigma_1^x$ and Σ_1^y stisfying q-Serre relations and $\Sigma_1^x X = q^2 X\Sigma_1^x$, $\Sigma_1^y X = q^{-1}X\Sigma_1^y, \Sigma_1^x Y = q^{-1}Y\Sigma_1^x, \Sigma_1^y Y = q^2 Y\Sigma_1^y, XY = q^{-1}YX >$.

Claim 2:
$\Sigma_1^x{}' and (\Sigma_1^{y\prime} + Y)$ are satisfying on quantum Serre relations.

proof of claim 2:
$(\Sigma_1^x{}')^2(\Sigma_1^{y\prime} + Y) - (q+q^{-1})\Sigma_1^x{}'(\Sigma_1^{y\prime} + Y)\Sigma_1^x{}' + (\Sigma_1^{y\prime} + Y)(\Sigma_1^x{}')^2 = (\Sigma_1^x{}')^2\Sigma_1^{y\prime} + (\Sigma_1^x{}')^2 Y - (q+q^{-1})(\Sigma_1^x{}'\Sigma_1^{y\prime}\Sigma_1^x{}' + \Sigma_1^x{}' Y\Sigma_1^x{}') + \Sigma_1^{y\prime}(\Sigma_1^x{}')^2 + Y(\Sigma_1^x{}')^2 = (\Sigma_1^x{}')^2\Sigma_1^{y\prime} - (q+q^{-1})\Sigma_1^x{}'\Sigma_1^{y\prime}\Sigma_1^x{}' + \Sigma_1^{y\prime}(\Sigma_1^x{}')^2 + (\Sigma_1^x{}')^2 Y + \Sigma_1^x{}' Y = 0 + q^{-2}Y(\Sigma_1^x{}')^2 - (q+q^{-1})q^{-1}Y(\Sigma_1^x{}')^2 + Y(\Sigma_1^x{}')^2 = 0 + 0 = 0$.
lets do some part of this computation that maybe make confusion:
$(\Sigma_1^x{}')^2 Y = (\Sigma_1^x + X_{n+1})^2 Y = (\Sigma_1^x)^2 Y + X_{n+1}^2 Y + \Sigma_1^x X_{n+1} Y + X_{n+1}\Sigma_1^x Y + q^{-2}Y(\Sigma_1^x)^2 + q^{-2}YX_{n+1}^2 + q^{-2}Y\Sigma_1^x X_{n+1} + q^{-2}YX_{n+1}\Sigma_1^x = q^{-2}(Y((\Sigma_1^{x2} + X_{n+1}^2 + \Sigma_1^x X_{n+1} + X_{n+1}\Sigma_1^x)) = q^{-2}Y(\Sigma_1^x{}')^2$.

And $\Sigma_1^x{}' Y = (\Sigma_1^x + X_{n+1})Y = \Sigma_1^x Y + X_{n+1}Y = q^{-1}Y\Sigma_1^x + q^{-1}YX_{n+1} = q^{-1}(Y(\Sigma_1^x + X_{n+1})) = q^{-1}Y\Sigma_1^x{}'$. And by substituting these, we have the result.
So our definition is well defined.
Now set $Y = Y_{n+1}$ and we are done. □

2.2. affinized Lie algebra $s\hat{l(2)}$

As we know, $\hat{M}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ is the generalized Cartan matrix for $s\hat{l(2)}$. Set $\hat{M}_{q_2} = \begin{bmatrix} q^2 & q^{-2} \\ q^{-2} & q^2 \end{bmatrix}$ and call it Cartan type matrix related to $\hat{M}_2$.

$s\hat{l(2)}$ is satisfying in Theorems 2.2 and 2.3 as well; but what we need is just to change the quantum Serre relations in the following case:

$$(\Sigma_1^x)^3\Sigma_1^y - (q^2+1+q^{-2})(\Sigma_1^x)^2\Sigma_1^y\Sigma_1^x + (q^2+1+q^{-2})\Sigma_1^x\Sigma_1^y(\Sigma_1^x)^2 - \Sigma_1^y(\Sigma_1^x)^3 = 0 \tag{6}$$

$$(\Sigma_1^y)^3\Sigma_1^x - (q^2+1+q^{-2})(\Sigma_1^y)^2\Sigma_1^x\Sigma_1^y + (q^2+1+q^{-2})\Sigma_1^y\Sigma_1^x(\Sigma_1^y)^2 - \Sigma_1^x(\Sigma_1^y)^3 = 0.$$

And to change the $q-$ commutation relations also; according to our new Cartan type matrix

$$\begin{cases} X_iX_j = q^2X_jX_i & \text{if } i<j \\ Y_iY_j = q^2Y_jY_i & \text{if } i<j \\ X_iY_j = q^{-2}Y_jX_i & \text{if } i<j \end{cases}$$

But lets try to prove it in the case of Laurent skew $q-$polynomials $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$.

THEOREM 2.4. Set points $X_i \in \{X_1, \cdots, X_k\}$ and $X_j^{-1} \in \{X_1^{-1}, \cdots, X_k^{-1}\}$ with the following relations;

$$\begin{cases} X_iX_j = q^2X_jX_i & \text{if } i<j \\ X_iX_j^{-1} = q^{-2}X_j^{-1}X_i & \text{if } i<j \end{cases}$$

and the screening operators $\Sigma_1^x = \Sigma_{i=1}^k X_i$ and $\Sigma_1^{x^{-1}} = \Sigma_{j=1}^k X_j^{-1}$.
Again we claim that Σ_1^x and $\Sigma_1^{x^{-1}}$ are satisfying in quantum Serre relations (6).

PROOF. Proof by induction on k.
For $k = 2$, Set $\Sigma_1^x = x_1 + x_2$ and $\Sigma_1^{x^{-1}} = x_1^{-1} + x_2^{-1}$ and as we checked out, it's straightforward to show that they are satisfying in quantum Serre relations (6).
Suppose that it's true for $k = n$ components $x_1, \cdots, x_n$. Again as before we define:

$$U_q(n) := \{\Sigma_1^x, \Sigma_1^{x^{-1}}|(\Sigma_1^x)^3\Sigma_1^{x^{-1}} - (q^2+1+q^{-2})(\Sigma_1^x)^2\Sigma_1^{x^{-1}}\Sigma_1^x + (q^2+1+q^{-2})\Sigma_1^{x^{-1}}\Sigma_1^x(\Sigma_1^{x^{-1}})^2$$

$-\Sigma_1^{x^{-1}}(\Sigma_1^x)^3=0\}$
Define $U_q(n)\to\mathbb{C}_q[X,X^{-1}]$; $\Sigma_1^x\mapsto\lambda X$; $\Sigma_1^{x^{-1}}\mapsto X^{-1}$ for $\lambda\in\mathbb{C}^*$
And define $U_q(n)\to U_q(n)\overline{\otimes}U_q(n)\to U_q(n)\overline{\otimes}\mathbb{C}[X,X^{-1}]$; $\Sigma_1^x\mapsto\Sigma_1^x\otimes 1+X\overline{\otimes}\Sigma_1^x$;$\Sigma_1^{x^{-1}}\mapsto\Sigma_1^{x^{-1}}\otimes 1+X^{-1}\overline{\otimes}\Sigma_1^{x^{-1}}$.

And $U_q(n)\to\underbrace{U_q(n)\overline{\otimes}U_q(n)\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}U_q(n)}_{nterms}\to\mathbb{C}[X_1,X_1^{-1}]\overline{\otimes}\mathbb{C}[X_2,X_2^{-1}]\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}\mathbb{C}[X_n,X_n^{-1}]\cong\mathbb{C}[X_1,X_1^{-1},\cdots,X_n,X_n^{-1}]$

□

3. Local integral of motions; Volkov's scheme

Set two screening operators

$$\Sigma_i^{x^{-1}}=\Sigma_i x_i^{-1},\qquad \Sigma_j^x=\Sigma_j x_j. \tag{7}$$

as we already saw, for these operators we have $(ad_q\Sigma_i^{x^{-1}})^{1-a_{ij}}(\Sigma_j^x)=0$.

The project here is to find an analogue of $R-$ matrix $''R''$ such that

$$(X_1+\cdots+X_k)R(X_1,\cdots,X_k)=R(X_1,\cdots,X_k)(X_1+\cdots+X_k) \tag{8}$$

satisfy.

In this section we will try to find a solution for this equation as Volkov planed. We call these kind of solutions as "Local integral of motions".
In the sense of Feigin-Pugai [13], the main idea for to solve such kind of equations is to add "spectral parameter" β to k points screening operator and to define an analogue of $R-$ matrix:

$$(\beta x_1+x_2+\cdots+X_k)R(x_1,x_2,\cdots,X_k)=R(x_1,x_2,\cdots,X_k)(x_1+x_2+\cdots+\beta X_k), \tag{9}$$
$$(\beta x_1^{-1}+x_2^{-1}+\cdots+x_k^{-1})R(x_1,x_2,\cdots,X_k)=R(x_1,x_2,\cdots,X_k)(x_1^{-1}+x_2^{-1}+\cdots+\beta x_k^{-1})$$

Example $U_q(\hat{sl}_2)$; two point invariants

Let us try to solve this equation for just two points x_1 and x_2.
In this case, our equations (9) will reduce to the following ones:

$$(\beta x_1+x_2)R(x_1,x_2)=R(x_1,x_2)(x_1+\beta x_2), \tag{10}$$
$$(\beta x_1^{-1}+x_2^{-1})R(x_1,x_2)=R(x_1,x_2)(x_1^{-1}+\beta x_2^{-1})$$

There is a solution for these equation in [2], but we are interested on re finding them again here. For to do this, let us change the equations (10) to the following one, for simplicity. Set $\alpha_1=x_1x_2^{-1}$ and $R(x_1,x_2):=R_{1,2}$,

$$(\beta x_1+x_2)R(x_1x_2^{-1})=R(x_1x_2^{-1})(x_1+\beta x_2), \tag{11}$$
$$(\beta x_1^{-1}+x_2^{-1})R(x_1x_2^{-1})=R(x_1x_2^{-1})(x_1^{-1}+\beta x_2^{-1})$$

The solutions of these equations are identical to the previous one, we did this change just because to find the solutions in these ones are easier than the previous one and less confusing.
Then both of (11) will reduce to this linear difference equation:

$$(\beta\alpha_1+1)R_{1,2}(q^{-1}u;\beta)=(u+\beta)R_{1,2}(u;\beta), \tag{12}$$

Let us do it for one of them (the first one) for to see the procedure (there is an identical approach for the second one):
$(\beta x_1 + x_2)R(x_1x_2^{-1}) = R(x_1x_2^{-1})(x_1 + \beta x_2)$
$(\beta x_1x_2^{-1} + 1)x_2R(x_1x_2^{-1}) = R(x_1x_2^{-1})(x_1x_2^{-1} + \beta)x_2$
Set $R(\alpha_1) = \Sigma C_{m0}\alpha_1^m$ and then distribute x_2 in it from the left and then bring it out to the right hand side, by using the $q-$commutation relations. The idea is to disappear x_2 from the both sides by multiplying the equation by x_2^{-1} from the right side. So we have
$(\beta x_1x_2^{-1} + 1)R(q^{-1}x_1x_2^{-1})x_2 = R(x_1, x_2)(x_1x_2^{-1} + \beta)x_2$

$$(\beta\alpha_1 + 1)R_{1,2}(q^{-1}\alpha_1; \beta) = R_{1,2}(\alpha_1; \beta)(\alpha_1 + \beta) \tag{13}$$

Lets try to find $R_{1,2}(\alpha_1; \beta)$:

$$\begin{aligned}(12) \Rightarrow R_{1,2}(\alpha_1; \beta) &= \tfrac{\beta\alpha_1+1}{\alpha_1+\beta}R_{1,2}(q^{-1}\alpha_1; \beta)\\ &= \tfrac{\beta\alpha_1+1}{\alpha_1+\beta}\cdot\tfrac{\beta q^{-1}\alpha_1+1}{q^{-1}\alpha_1+\beta}R_{2,3}(q^{-2}\alpha_1; \beta)\\ &= \tfrac{\beta\alpha_1+1}{\alpha_1+\beta}\cdot\tfrac{\beta q^{-1}\alpha_1+1}{q^{-1}\alpha_1+\beta}\cdot\tfrac{\beta q^{-2}\alpha_1+1}{q^{-2}\alpha_1+\beta}R_{3,4}(q^{-3}\alpha_1; \beta) \qquad = \cdots = \textstyle\prod_{i=0}^{\infty} R_{i,i+1}\\ &= \textstyle\prod_{i=0}^{\infty}\tfrac{\beta q^{-i}\alpha_1+1}{q^{-i}\alpha_1+\beta}\end{aligned}$$

But we need some thing more, so lets continue;
For to find its recursive sequence we have to pass the following steps:

$$(\beta x_1 + x_2)R(\alpha_1; \beta) = R(\alpha_1; \beta)(x_1 + \beta x_2)$$
$$(\beta\alpha_1 + 1)R(q^{-1}\alpha_1; \beta) = R(\alpha_1; \beta)(\alpha_1 + \beta)$$
$$\Rightarrow_{R(\alpha_1;\beta)=\Sigma_{i=0}^{\infty}C_{i,0}\alpha_1^i}\ \Sigma_{i=0}^{\infty}C_{i,0}q^{-i}\beta\alpha_1^{i+1} + \Sigma_{i=0}^{\infty}C_{i,0}q^{-i}\alpha_1^i = \Sigma_{i=0}^{\infty}C_{i,0}\alpha_1^{i+1} + \Sigma_{i=0}^{\infty}C_{i,0}\beta\alpha_1^i$$
$$\Sigma_{i=1}^{\infty}C_{i-1,0}q^{-i+1}\beta\alpha_1^i + \Sigma_{i=1}^{\infty}C_{i,0}q^{-i}\alpha_1^i + C_{0,0} = \Sigma_{i=1}^{\infty}C_{i-1,0}\alpha_1^i + \Sigma_{i=1}^{\infty}C_{i,0}\beta\alpha_1^i + \beta C_{0,0}$$
$$\Sigma_{i=1}^{\infty}((q^{-i+1}\beta - 1)C_{i-1,0} + (q^{-i} - \beta)C_{i,0})\alpha_1^i = 0$$

And then by comparing the coefficients in both side of the equation, we reach to the following key rule recursive sequence that we will use it for to find our final solution in the case of two points.

$$\begin{cases} C_{0,0} = 1 \\ C_{i,0} = \frac{1-q^{-i+1}\beta}{q^{-i}-\beta}C_{i-1,0} \qquad for i = 1, ..., \infty \\ C_{0,0} = \beta C_{0,0} \Rightarrow \beta = 1 \end{cases}$$

And now let us to set an general agreement for to simplify writing:

Set $(\beta)_n := (1 - \beta)(1 - q\beta)(1 - q^2\beta)\cdots(1 - q^{n-1}\beta)$ and let our summation be finite, i.e. set $i \in \{0, \cdots, n\}$ and $R(\alpha_1; \beta) = \Sigma_{i=0}^{n}C_{i,0}\alpha_1^i$ and in the next step we can extend our radius of convergence.

Now lets try to find it:

$$C_{i,0} = \frac{1-q^{-i+1}\beta}{q^{-i}-\beta}C_{i-1,0}$$
$$C_{i,0} = \frac{1-q^{-i+1}\beta}{q^{-i}-\beta}\cdot\frac{1-q^{-i+2}\beta}{q^{-i+1}-\beta}C_{i-2,0}$$
$$C_{i,0} = \frac{1-q^{-i+1}\beta}{q^{-i}-\beta}\cdot\frac{1-q^{-i+2}\beta}{q^{-i+1}-\beta}\cdot\frac{1-q^{-i+3}\beta}{q^{-i+2}-\beta}C_{i-3,0}$$
$$\vdots$$
$$C_{i,0} = \frac{1-q^{-i+1}\beta}{q^{-i}-\beta}\cdot\frac{1-q^{-i+2}\beta}{q^{-i+1}-\beta}\cdot\frac{1-q^{-i+3}\beta}{q^{-i+2}-\beta}\cdots\frac{1-q^{-3}\beta}{q^{2}-\beta}\cdot\frac{1-q^{-2}\beta}{q-\beta}\cdot\frac{1-q^{-1}\beta}{1-\beta}$$
$$C_{i,0} = \frac{(1-q^{-i+1}\beta)(1-q^{-i+2}\beta)(1-q^{-i+3}\beta)\cdots(1-q^{-3}\beta)(1-q^{-2}\beta)(1-q^{-1}\beta)}{(q^{-i}-\beta)(q^{-i+1}-\beta)(q^{-i+2}-\beta)(q^{-i+3}-\beta)\cdots(q^{2}-\beta)(q-\beta)(1-\beta)}$$
$$C_{i,0} = \frac{(1-q^{-i+1}\beta)(1-q^{-i+2}\beta)(1-q^{-i+3}\beta)\cdots(1-q^{-3}\beta)(1-q^{-2}\beta)(1-q^{-1}\beta)}{q^{-i}(1-q^{i}\beta)q^{-i+1}(1-q^{i-1}\beta)q^{-i+2}(1-q^{i-2}\beta)q^{-i+3}(1-q^{i-3}\beta)\cdots q^{-2}(1-q^{2}\beta)q^{-1}(1-q\beta)(1-\beta)}$$
$$C_{i,0} = \frac{(1-q^{-i+1}\beta)(1-q^{-i+2}\beta)(1-q^{-i+3}\beta)\cdots(1-q^{-3}\beta)(1-q^{-2}\beta)(1-q^{-1}\beta)}{q^{-i}q^{-i+1}q^{-i+2}q^{-i+3}\cdots q^{-2}q^{-1}(1-q^{i}\beta)(1-q^{i-1}\beta)(1-q^{i-2}\beta)(1-q^{i-3}\beta)\cdots(1-q^{2}\beta)(1-q\beta)(1-\beta)}$$
$$C_{i,0} = \frac{(1-q^{-i+1}\beta)(1-q^{-i+2}\beta)(1-q^{-i+3}\beta)}{q^{(-i+0)+(-i+1)+(-i+2)+(-i+3)+\cdots+(-i+(i-2))+(-i+(i-1))+(-i+(i+0))}}$$
$$\cdot\frac{\cdots}{\cdots}\cdot$$
$$\frac{(1-q^{-3}\beta)(1-q^{-2}\beta)(1-q^{-1}\beta)}{(1-q^{i}\beta)(1-q^{i-1}\beta)(1-q^{i-2}\beta)(1-q^{i-3}\beta)\cdots(1-q^{2}\beta)(1-q\beta)(1-\beta)}$$

In infinity when $i \to +\infty$ we have $q^{-i} \to 1$; So we have:

$$C_{i,0} = \tfrac{(1-q^{-i+1}\beta)(1-q^{-i+2}\beta)(1-q^{-i+3}\beta)}{q^{(0)+(1)+(2)+(3)+\cdots+((i-2))+((i-1))+((i+0))}} \cdot \tfrac{\cdots}{\cdots} \cdot \tfrac{(1-q^{-3}\beta)(1-q^{-2}\beta)(1-q^{-1}\beta)}{(1-q^{i}\beta)(1-q^{i-1}\beta)(1-q^{i-2}\beta)(1-q^{i-3}\beta)\cdots(1-q^{2}\beta)(1-q\beta)(1-\beta)}$$

$$C_{i,0} = \frac{(1-q^{-i+1}\beta)(1-q^{-i+2}\beta)(1-q^{-i+3}\beta)\cdots(1-q^{-3}\beta)(1-q^{-2}\beta)(1-q^{-1}\beta)}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q\beta)_n}$$

$$C_{i,0} = \frac{(1-q^{-i}q\beta)(1-q^{-i+1}q\beta)(1-q^{-i+2}q\beta)\cdots(1-q^{-4}q\beta)(1-q^{-3}q\beta)(1-q^{-2}q\beta)}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q\beta)_n}$$

$$C_{i,0} = \frac{(q\beta)(\frac{q^{-1}}{\beta}-q^{-i})(q\beta)(\frac{q^{-1}}{\beta}-q^{-i+1})(q\beta)(\frac{q^{-1}}{\beta}-q^{-i+2})\cdots(q\beta)(\frac{q^{-1}}{\beta}-q^{-4})(q\beta)(\frac{q^{-1}}{\beta}-q^{-3})(q\beta)(\frac{q^{-1}}{\beta}-q^{-2})(1-\frac{1}{\beta})}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q\beta)_n(-q\beta)^{-1}}$$

$$C_{i,0} = \frac{(q\beta)^{n-1}(q^{-i}q^{-i+1}q^{-i+2}\cdots q^{-2}q^{-1})(\frac{q^{i-1}}{\beta}-1)(\frac{q^{i-2}}{\beta}-1)(\frac{q^{i-3}}{\beta}-1)\cdots(\frac{q^{3}}{\beta}-1)(\frac{q^{2}}{\beta}-1)(\frac{q^{1}}{\beta}-1)(1-\frac{1}{\beta})}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q\beta)_n(-q\beta)^{-1}}$$

$$C_{i,0} = \frac{(-q\beta)^{n}(q^{\frac{n(n-1)}{2}})(1-\frac{q^{i-1}}{\beta})(1-\frac{q^{i-2}}{\beta})(1-\frac{q^{i-3}}{\beta})\cdots(1-\frac{q^{3}}{\beta})(1-\frac{q^{2}}{\beta})(1-\frac{q}{\beta})(1-\frac{1}{\beta})}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q\beta)_n}$$

$$C_{i,0} = \frac{(-q\beta)^{n}(\frac{1}{\beta})_n}{(q\beta)_n} \tag{14}$$

Example $U_q(\hat{sl_2})$; three point invariants

As what we had for previous example in two points; we will proceed the same steps for to find the solution of the equation (8) for three points x_0, x_1, x_2.
Set $\alpha_i = x_i x_{i+1}^{-1}$; such that $\alpha_i\alpha_j = q\alpha_j\alpha_i$ for $i, j \in I$ as usual, and $R(\alpha_0, \alpha_1) = \Sigma_{n,m} C_{n,m}\alpha_0^n\alpha_1^m$.

We are trying to solve the following difference equation subject to R;

$$(\beta x_0 + x_1 + x_2)R(\alpha_0, \alpha_1; \beta) = R(\alpha_0, \alpha_1; \beta)(x_0 + x_1 + \beta x_2), \tag{15}$$

The process is exactly same as the previous one, so we will skip writing them here.
For this equation We got the following recursive sequences, that will guide us to reach to our main solution for $n, m = 1, ..., +\infty$.

$$\begin{cases} C_{0,0} = 1 \\ C_{n,m} = \frac{q^{-m+1}-q^{-n-m+2}\beta}{q^{-m}-\beta}C_{n-1,m-1} + \frac{1-q^{-n-m+1}}{q^{-m}-\beta}C_{n,m-1} \\ C_{0,m} = \frac{1-q^{-m+1}}{\beta-q^{-m}}C_{0,m-1} \end{cases}$$

And by considering the second sequence as our main key, and following it; we arrived to a nice and important sequence:

$$C_{n,m} = \frac{(-q\beta)^n q^{\frac{m(m-1)}{2}}(\frac{1}{\beta})_n}{(\beta)_m(q\beta)_{n-m}} \tag{16}$$

That is compatible with the equation (14) when $m = 0$. And this can show the correctness of our calculation.

4. Lattice Virasoro algebra

In this section we are interested on solutions Σ_{1_x} of system of difference equation

$$\begin{cases} X_iX_j = qX_jX_i \\ deg(\Sigma_{1_x}) = 0 \\ [\Sigma_{-\infty}^{+\infty}X_i, \Sigma_{1_x}]_q = 0 \end{cases}$$

that will be a generator of lattice Virasoro algebra.
If we be able to find such kind of solution; then we can extend it to an another generator by a shift operator:

$$\begin{aligned}\Sigma_{2_x} &= \Sigma_{1_x}[x_1 \to x_2, x_2 \to x_3, x_3 \to x_4, \cdots \\ \Sigma_{3_x} &= \Sigma_2^x[x_2 \to x_3, x_3 \to x_4, x_4 \to x_5, \cdots \\ &\vdots\end{aligned} \tag{17}$$

where $\Sigma_{1_x} = \Sigma_{1_x}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$.

Lattice Virasoro algebra connected to sl_2

Here as always, we have the $q-$commutation relation $X_iX_j = qX_jX_i, i < j$ between the points in sl_2.

Let us try to find three points invariants; this means to try to solve the following system of difference equation:

$$\begin{cases} X_iX_j = qX_jX_i \\ deg(\Sigma_{1_x}) = 0 \\ (X_1 + X_2 + X_3)\Sigma_{1_x}(X_1, X_2, X_3) = \Sigma_{1_x}(X_1, X_2, X_3)(X_1 + X_2 + X_3). \end{cases}$$

One can find easily the trivial solutions of the second equation as follows:

$$\left\{ \Sigma_{11_x}(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3 \Sigma_{12_x}(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2^{-1}X_3 \right.$$

but as we see, non of them have zero grading. So we should find another solution.

By just keeping to look at them for a while, we can see that by multiplying these kind of solutions, one can find a zero grading expression, but it's not satisfying for these two ones. Again we note that for a solution; it's inverse is again a solution, so by this remark, we have two options here. We can inverse Σ_{11_x} or Σ_{12_x} and then multiply it with the other one. In both case we will have same set of generators except that in the first case (inverse of Σ_{11_x}), lattice Virasoro algebra is generated by elements of form $\Sigma_{i_x} = X_iX_{i+1}^{-1}X_{i+2}(X_i + X_{i+1} + X_{i+2})^{-1}$ and in the second case (inverse of Σ_{12_x}), lattice Virasoro algebra is generated by elements of form $\Sigma_{i_x} = (X_i + X_{i+1} + X_{i+2})X_i^{-1}X_{i+1}X_{i+2}^{-1}$. And by a simple fact that our space of working is closed under multiplication, so these new recently found objects can be a trivial solution for our system of difference equation. And then by shift operators (17), we will have the set of generators for our lattice Virasoro algebra connected to sl_2.

Lattice Virasoro algebra connected to $U_q(sl_2)$

Set $A = \frac{\mathbb{C}[q]<x_j,x_i>}{(x_ix_j - qx_jx_i)}$ the algebra of polynomials in variables q, x_i over $\mathbb{C}$ for $i \in I$(our ordered index set), such that

$$\begin{cases} qx_i = x_iq & fori \in I \\ x_ix_j = qx_jx_i & \text{if } i < j \end{cases}$$

Our first project is to extend the usual binomial expansion to this algebra, for example we can see the shape of such expansion in a lower exponent 3:

$$\begin{aligned}(x_i + x_j)^3 &= (x_i + x_j)(x_i + x_j)(x_i + x_j) \\ &= x_ix_ix_i + x_ix_jx_i + x_jx_ix_i + x_jx_jx_i + x_ix_ix_j + x_ix_jx_j + x_jx_ix_j + x_jx_jx_j \\ &= x_ix_ix_i + qx_jx_ix_i + x_jx_ix_i + x_jx_jx_i + q^2x_jx_ix_i + q^2x_jx_jx_i + qx_jx_jx_i + \\ &\quad x_jx_jx_j \\ &= x_i^3 + qx_jx_i^2 + x_jx_i^2 + x_j^2x_i + q^2x_jx_i^2 + q^2x_j^2x_i + qx_j^2x_i + x_j^3\end{aligned}$$

$= x_i^3 + (1+q+q^2)x_j^2 x_i + (1+q+q^2)x_j x_i^2 + x_j^3$
$= \Sigma_{k=0}^{3}\binom{3}{k}_q x_j^{3-k}x_i^k$

But for to prove it in a general case, we will use some techniques from combinatorics:

Suppose x_j and x_i as above and set ω as a word formed by x_j and x_i. Then it's easy to see that any such kind of words can be permuted to $x_j^l x_i^k$ along with a factor power of q, by using the $q-$commutation rule. For example, $x_i x_j x_j x_i x_i x_j x_j x_i x_i x_j x_i = q^{13}x_j^5 x_i^6$, as the first x_i should pass 5 x_j's and the second and third x_i should pass 3 x_j's and forth and fifth x_i should pass 1 x_j and sixth will be stable.

Now according to this fact , each word ω consist of k x_i's and $n-k=l$ x_j's in $(x_i+x_j)^n$. That corresponds to a partition which lies inside an $(n-k)\times k$ rectangle. On the other hand each such partition corresponds to a unique word ω. Lets look at our example again; we have $\omega = x_i x_j x_j x_i x_i x_j x_j x_i x_i x_j x_i$, and the partition is 533110. If $\omega = q^m x_j^{n-k}x_i^k$, then as we see m is the sum of the parts of the partition. And the generating function for all partitions lie inside an $(n-k)\times k$ rectangle is the definition of the $q-$ binomial coefficient $\binom{n}{n-k}_q = \binom{n}{k}_q$. So for a positive complex number n we will have

$$(x_i+x_j)^n = \Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q x_j^{n-k}x_i^k$$

But what will happen for the negative exponents?

It's our next deal for to face. What we need to prove is to see what $\binom{n}{k}_q$ will be when we replace n with $-n$?

According to the definition $q-$ binomial coefficient, we have

$\binom{n}{k}_q = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\cdots(1-q^1)}$.

Now by replacing n with $-n$ we will have:

$\binom{-n}{k}_q = \frac{(1-q^{-n})(1-q^{-n-1})(1-q^{-n-2})\cdots(1-q^{-n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\cdots(1-q^1)}$

$= \frac{(1-{q^{-1}}^{n})(1-{q^{-1}}^{n-1})(1-{q^{-1}}^{n-2})\cdots(1-{q^{-1}}^{n+k-1})}{(1-{q^{-1}}^{-k})(1-{q^{-1}}^{-k+1})\cdots(1-{q^{-1}}^{-1})}$

$= \frac{(1-{q^{-1}}^{n+k-1})(1-{q^{-1}}^{n+k-2})\cdots(1-{q^{-1}}^{n+k-(k-2)})(1-{q^{-1}}^{n+k-(k-1)})(1-{q^{-1}}^{n+k-(k)})}{(q^{-1})^{-k}((q^{-1})^k-1))(q^{-1})^{-k+1}((q^{-1})^{k-1}-1))\cdots(q^{-1})^{-1}((q^{-1})^1-1))}$

$= \frac{(1-{q^{-1}}^{n+k-1})(1-{q^{-1}}^{n+k-2})\cdots(1-{q^{-1}}^{n+k-(k-2)})(1-{q^{-1}}^{n+k-(k-1)})(1-{q^{-1}}^{n+k-(k)})}{((q^{-1})^{-k}(q^{-1})^{-k+1}\cdots(q^{-1})^1)(-1)^k(1-(q^{-1})^k)(1-(q^{-1})^{k-1})\cdots(1-(q^{-1})^1)}$

$= \frac{(1-{q^{-1}}^{n+k-1})(1-{q^{-1}}^{n+k-2})\cdots(1-{q^{-1}}^{n+k-(k-2)})(1-{q^{-1}}^{n+k-(k-1)})(1-{q^{-1}}^{n+k-(k)})}{(q^{\frac{k(-k+1)}{2}})(-1)^k((1-(q^{-1})^k)(1-(q^{-1})^{k-1})\cdots(1-(q^{-1})^1))}$

$= \frac{(-1)^{-k}q^{\frac{-k(-k+1)}{2}}(1-{q^{-1}}^{n+k-1})(1-{q^{-1}}^{n+k-2})\cdots(1-{q^{-1}}^{n+k-(k-2)})(1-{q^{-1}}^{n+k-(k-1)})(1-{q^{-1}}^{n+k-(k)})}{(1-(q^{-1})^k)(1-(q^{-1})^{k-1})\cdots(1-(q^{-1})^1)}$

$= \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}(1-{q^{-1}}^{n+k-1})\cdots(1-{q^{-1}}^{n})}{(1-(q^{-1})^k)(1-(q^{-1})^{k-1})\cdots(1-(q^{-1})^1)}$

$= (-1)^k q^{\binom{k}{2}}\binom{n+k-1}{k}_{q^{-1}}$.

So as what we had for a positive exponent, we will have the result for negative exponent as follows:

$$(x_i+x_j)^{-n} = \Sigma_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}_q x_j^{-n-k}x_i^k = \Sigma_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\binom{n+k-1}{k}_{q^{-1}} x_j^{-n-k}x_i^k \tag{18}$$

Remark 4.1. And it's identical to write the summation (18) from $-\infty$ to 0 as follows:

$$(x_i+x_j)^{-n} = \Sigma_{k=-\infty}^{0}\binom{-n}{k}_{q^{-1}} x_j^{-n+k}x_i^{-k} = \Sigma_{k=-\infty}^{0}(-1)^k q^{\frac{k(k+1)}{2}}\binom{n-k-1}{-k}_q x_j^{-n+k}x_i^{-k} \tag{19}$$

Formulation for to extend to four and more invariant points

Set $\Sigma^x = U_- + \Sigma_{i=1}^k X_i + U_+$, where $U_+ = \Sigma_{i=k+1}^{+\infty} X_i$ and $U_- = \Sigma_{i=-\infty}^{0} X_i$.
Set $(F_{1,k}^x)^{(0)} = f(x_1, \cdots, x_k) = \Sigma C_\beta X_1^{\beta_1} \cdots X_k^{\beta_k}$ such that

$$
\begin{aligned}
[U_+, (F_{1,k}^x)^{(0)}] &= U_+(F_{1,k}^x)^{(0)} - (F_{1,k}^x)^{(0)} U_+ \\
&= U_+(F_{1,k}^x)^{(0)} - (F_{1,k}^x)^{(0)} X_{k+1} - (F_{1,k}^x)^{(0)} X_{k+2} - \cdots \\
&= U_+(F_{1,k}^x)^{(0)} - q^{-deg(F_{1,k}^x)^{(0)}} (X_{k+1} + X_{k+2} + \cdots)(F_{1,k}^x)^{(0)} \\
&= U_+(F_{1,k}^x)^{(0)} - q^{-deg(F_{1,k}^x)^{(0)}} U_+(F_{1,k}^x)^{(0)} \\
&= (1 - q^{-deg(F_{1,k}^x)^{(0)}}) U_+(F_{1,k}^x)^{(0)}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

as well as for U_-

$$[U_-, (F_{1,k}^x)^{(0)}] = (1 - q^{deg(F_{1,k}^x)^{(0)}}) U_-(F_{1,k}^x)^{(0)} \tag{21}$$

If we suppose $deg(F_{1,k}^x)^{(0)} = 0$, then both of $[U_+, (F_{1,k}^x)^{(0)}]$ and $[U_-, (F_{1,k}^x)^{(0)}]$ will be zero and we will have to check the correctness of $[\Sigma_{i=1}^k, (F_{1,k}^x)^{(0)}] \overset{?}{=} 0$. If it was true? then we will have a generator for lattice Virasoro algebra and by the shift operator, we will have all set of generators for it.

Let us define a Poisson bracket as Drinfeld defined and then compute some results by using that:
$\{X_j, X_i^n\} := Lim_{q\to 1} \frac{ad_{X_j} X_i^n}{1-q}$ and then we have:
$ad_{X_i} X_i^n = 0$, in both classical and quantum case.
$ad_{X_i} X_j^n = (1-q^n) X_i X_j^n$ and $ad_{X_j} X_i^n = (1-q^n) X_j X_i^n$ for $i < j$ in quantum case.
$ad_{X_i} X_j^n = 0$ and $ad_{X_j} X_i^n = 0$ for $i < j$ in classical case.
Now let us find the Poisson bracket for X_1 and X_i^n in classical case

$$\{X_1, X_i^n\} = Lim_{q\to 1} \frac{(1-q^n) X_1 X_i^n}{1-q} = -n X_1 X_i^n \partial_{X_i} for i < 1 \tag{22}$$

$$\{X_1, X_i^n\} = Lim_{q\to 1} \frac{(1-q^{-n}) X_1 X_i^n}{1-q} = n X_1 X_i^n \partial_{X_i} for i > 1 \tag{23}$$

For example we have $\{X_1, X_2\} = X_1 X_2 \partial_{X_2}$

By using this operators in the case of the equation (21) we see that this part when $q \to 1$ will be zero and so after this time we just will deal with $\Sigma^{X_i} = \Sigma_{i=1}^k X_i + U_+$.
And also we can find these relations in a more general case for a one variable function on X_i as follows:

And let us consider E_i, F_i, H_i as the generators for $U_q(sl_2)$, then E_i and H_i will produce the Borel part B_+; One of the ways that we can act B_+ on the $\mathbb{C}[X_i, X_i^{-1}]$ is as follows

$$\pi : B_+ \times \mathbb{C}[X_i, X_i^{-1}] \to \mathbb{C}[X_i, X_i^{-1}] : (E_i, P) \mapsto \pi(E_i)P := ad_{\Sigma^X} P = [\Sigma^X, P]_q \tag{24}$$

$$\pi : B_+ \times \mathbb{C}[X_i, X_i^{-1}] \to \mathbb{C}[X_i, X_i^{-1}] : (H_i, P) \mapsto \pi(H_i)P := <\alpha_i, degP> P \tag{25}$$

where α_i is a simple root related to H_i and P an arbitrary homogeneous element of $\mathbb{C}[X_i, X_i^{-1}]$

Definition 4.2. Generators of lattice Virasoro algebra associated to simple Lie algebra g constitute the functional basis of space $Inv_{U_q(B_+}(\mathbb{C}[X_i, X_i^{-1}])$. And for to find these generators we need to solve the following functional equations;[13]

$$[\Sigma_{i_x}, \Sigma^X] = 0 and H_i \Sigma_{i_x} = 0 (**)$$

Now the next question is that "how many variable X_i is enough for to find a nontrivial solution for equations $(**)$?

The answer is if we deal with q in a general position, then one can expect that the dimension is $\dim(B_+)+1$. [13] So in the case of sl_2 it will be 3, the number of variables.[13]

Now let us to go back to our example;

$X_1 f(X_0) = f(q^{-1}X_0)X_1$

Set $q = exp(H)$;

$= f(e^{-H}X_0)X_1$

When $q \to 1$ then $e^{-H} \to (1-H)$ and $e^{H} \to (1+H)$;

$= f((1-H)X_0)X_1 = f(X_0 - HX_0)X_1$

$= (f(X_0) - f(HX_0))X_1 = (f(X_0) - Hf(X_0))X_1$

$= (f(X_0) - X_1Hf(X_0)) = (f(X_0) - X_1X_0\partial_{X_0}f(X_0))$

$\Rightarrow \{X_1, f(X_0)\} = -X_1X_0\partial_{X_0}f(X_0)$ So in general if we repeat the process for any $X_{j<1}$, we will have

$$\{X_i, f(X_{j<i})\} = -X_iX_j\partial_{X_j}f(X_{j<i}) \tag{26}$$

According to the Poisson bracket and our early calculation, equations $(**)$ will have the following form

$$E_i\Sigma_{i_x} = (X_1(X_1+X_2+X_3+U_+)\partial_{X_1} + X_2(X_2+X_3+U_+)\partial_{X_2} + X_3U_+\partial_{X_3} + U_+^2\partial_{U_+})\Sigma_{i_x} = 0 \tag{27}$$

$$H_i\Sigma_{i_x} = (X_1\partial_{X_1} + X_2\partial_{X_2} + X_3\partial_{X_3} + U_+\partial_{U_+})\Sigma_{i_x} = 0$$

in three point invariants X_1, X_2 and X_3.

As well as there is a same process with a minor differ for when we have $j > 1$;

$$\{X_i, f(X_{j>i})\} = X_iX_j\partial_{X_j}f(X_{j>i}) \tag{28}$$

And also $X_if(X_i) = f(X_i)X_i = f(e^HX_i)X_i$

$= f((1+H)X_i)X_i = f(X_i + HX_i)X_i$

$= f(X_i)X_i + X_iHf(X_i) = f(X_i)X_i + X_i^2\partial_{X_i}f(X_i)$

$$\{X_i, f(X_i)\} = X_i^2\partial_{X_i}f(X_i) \tag{29}$$

Now set $f = f(X_1, X_2) = (F^x_{1,2})^{(-\frac{1}{2})}$, (here $(-\frac{1}{2})$ means that our polynomial is of the degree $-\frac{1}{2}$) then by previous definition of ∂_{U_+}, we have $\partial_{U_+}f = 0$.

Set $(F^x_{1,2})^{(\frac{1}{2})} = [\Sigma^X, (F^x_{1,2})^{(-\frac{1}{2})}]_q = ad_{\Sigma^X}(F^x_{1,2})^{(-\frac{1}{2})}$, then by using the previous discussion we have $(F^x_{1,2})^{(\frac{1}{2})} = (F^x_{1,2})^{(\frac{1}{2})}(U_+, X_1, X_2)$.

Now consider the following representation of $(sl_2)_q$;

$$\begin{gathered} F = \partial_{U_+} \\ H = U_+\partial_{U_+} + X_1\partial_{X_1} + X_2\partial_{X_2} \\ E = U_+^2\partial_{U_+} + (X_1^2 + X_1X_2 + X_1U_+)\partial_{X_1} + (X_2^2 + X_2U_+)\partial_{X_2} \end{gathered} \tag{30}$$

We need the highest weight vector of this representation that is the solution of equations (30). So we should have $E(F^x_{1,2})^{(-\frac{1}{2})} = ad_{\Sigma^X}[\Sigma^X, (F^x_{1,2})^{(-\frac{1}{2})}] = 0$. There is a solution for these equations in [13]. Here we use the same solution and procedure.

The Idea is to suppose existing of the local fields [13] $(F^x_{1,k})^{(0)}, (F^x_{2,k+1})^{(0)}, \cdots$ (here (0) means that the degree is 0) and the modules created from these local fields as follows for degrees i and j. According to [13] we try to find the exchange algebra relations

$$(F^x_{1,k})^{(i)} = [\Sigma^X, [\Sigma^X, [\cdots, [\Sigma^X, (F^x_{1,k})^{(0)}] \cdots]]](i \ -times) \tag{31}$$

And then again will use the shift operator and will shift it once for to find another module as follows

$$(F^x_{2,k+1})^{(j)} = [\Sigma^X, [\Sigma^X, [\cdots, [\Sigma^X, (F^x_{2,k+1})^{(0)}] \cdots]]](j \ -times)$$

Let us to proceed as what we planned:
Set $k \in \{2\}$ and $i = -\frac{1}{2}$

$$(F^x_{1,2})^{(-\frac{1}{2})} = X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}} \tag{32}$$

as [13]. Then

$$[\Sigma^X, (F^x_{1,2})^{(-\frac{1}{2})}] = [U_- + (X_1 + X_2) + U_+, X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}}]$$
$$= (1 - q^{-\frac{1}{2}}) U_+ X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}} \ [13].$$

Where $U_+ = \Sigma_3^{+\infty}$. Let us to call it $(F^x_{1,2})^{(\frac{1}{2})}$; because it's degree is $\frac{1}{2}$ and to find another module from it by using shift $X_1 \to X_3$ and $X_2 \to X_4$ as follows:

$$(F^x_{3,4})^{(-\frac{1}{2})} = X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}} \tag{33}$$

And again in a same process we will have

$$(F^x_{3,4})^{(\frac{1}{2})} = [\Sigma^X, F^x_{3,4})^{(-\frac{1}{2}}] = (1 - q^{-\frac{1}{2}})(U_+ - X_3 - X_4) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}} [13] \tag{34}$$

Now let us multiply the equations (33) and (34) (because we need zero degree) with each other for to see what will happen?

$$(F^x_{1,2})^{(-\frac{1}{2})} (F^x_{3,4})^{(\frac{1}{2})} \tag{35}$$
$$= X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}} ((1 - q^{-\frac{1}{2}})(U_+ - X_3 - X_4) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}})$$
$$= X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}} U_+ X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}}$$
$$- X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}} X_3 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}}$$
$$- X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}} X_4 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}}$$
$$- q^{-\frac{1}{2}} X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}} U_+ X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}}$$
$$- q^{-\frac{1}{2}} X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}} X_3 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}}$$
$$- q^{-\frac{1}{2}} X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}} X_4 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}}$$

And again let us proceed as [13] and to find:

$$-q^{\frac{1}{2}} (F^x_{1,2})^{(\frac{1}{2})} (F^x_{3,4})^{(-\frac{1}{2})} \tag{36}$$
$$= q^{\frac{1}{2}} ((1 - q^{-\frac{1}{2}}) U_+ X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}}) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -q^{\frac{1}{2}} U_+ X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}} X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+U_+X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}X_3^{\frac{1}{2}}X_4^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=-X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}U_+X_3^{\frac{1}{2}}X_4^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+q^{-\frac{1}{2}}X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}U_+X_3^{\frac{1}{2}}X_4^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$$

And again by following [13], by adding the equations (35) and (36) for to find an object with zero grading that can be a four point invariant generator of lattice Virasoro algebra

$$\rho_{1,4}=(F^x_{1,2})^{(-\frac{1}{2})}(F^x_{3,4})^{(\frac{1}{2})}-q^{\frac{1}{2}}(F^x_{1,2})^{(\frac{1}{2})}(F^x_{3,4})^{(-\frac{1}{2})} \tag{37}$$

$$=-(1+q^{-\frac{1}{2}})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)X_3^{\frac{1}{2}}X_4^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$$

But now let us follow precisely the notation from [13] for to not be confused

$$\Delta_{1,3}=X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)X_3^{\frac{1}{2}}X_4^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}} \tag{38}$$

that is a four point generator of lattice Virasoro algebra, but we are not looking for such kind of solutions, because to extend it to a general form is somehow difficult. So we are looking for a simple solution.

Now let us to define another such kind of solutions as we experienced.

$$(F^x_{2,3})^{(-\frac{1}{2})}:=X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}} \tag{39}$$

$$(F^x_{2,3})^{(\frac{1}{2})}:=(1-q^{-\frac{1}{2}})(U_+-X_3)X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}} \tag{40}$$

then define

$$\rho_{1,3}=(F^x_{1,2})^{(-\frac{1}{2})}(F^x_{2,3})^{(\frac{1}{2})}-q^{\frac{1}{2}}(F^x_{1,2})^{(\frac{1}{2})}(F^x_{2,3})^{(-\frac{1}{2})} \tag{41}$$

Let us calculate it;

$$(F^x_{1,2})^{(-\frac{1}{2})}(F^x_{2,3})^{(\frac{1}{2})} \tag{42}$$

$$=X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}(1-q^{-\frac{1}{2}})(U_+-X_3)X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}(U_+-X_3)X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=q^{-\frac{1}{2}}X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}(U_+-X_3)X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}U_+X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$-X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}X_3X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$-q^{-\frac{1}{2}}X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}U_+X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+q^{-\frac{1}{2}}X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}X_3X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$$

Now let us calculate the other part

$$-q^{\frac{1}{2}}(F^x_{1,2})^{(\frac{1}{2})}(F^x_{2,3})^{(-\frac{1}{2})} \tag{43}$$

$$=-q^{\frac{1}{2}}(1-q^{-\frac{1}{2}})U_+X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=-q^{\frac{1}{2}}U_+X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+U_+X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=-X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}U_+X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+q^{-\frac{1}{2}}X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}U_+X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$$

And again by following [13], by adding the equations (42) and (43), we have another generator of lattice Virasoro algebra, but of three point invariant:

$$\rho_{1,3} = (q^{-\frac{1}{2}} - 1)X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}}X_3X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} \tag{44}$$

But now let us follow precisely the notation from [13] for to not be confused

$$\Delta_{1,2} = X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1 + X_2)^{-\frac{1}{2}}X_3X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} \tag{45}$$

$$(\Delta_{1,3})^{-1} = (X_3 + X_4)^{\frac{1}{2}}X_4^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3 + X_4)^{-1}(X_1 + X_2)^{\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}X_1^{-\frac{1}{2}} \tag{46}$$

is again a solution.
Now let us multiply the equations (45) and (46) for to see what will happen?

$(\Delta_{1,3})^{-1}\Delta_{1,2} =$
$(X_3+X_4)^{\frac{1}{2}}X_4^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-1}(X_1+X_2)^{\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}X_1^{-\frac{1}{2}}X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_1+X_2)^{-\frac{1}{2}}X_3X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$
$= (X_3 + X_4)^{\frac{1}{2}}X_4^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3 + X_4)^{-1}X_3X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}}$

by using the equations (45) and (46) we have the following result which has been mentioned in [13]:

$$\Sigma = (x_3 + x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2 + x_3)^{-\frac{1}{2}} \tag{47}$$

Our next goal is to prove that Σ is a generator for lattice Virasoro algebra.

Now let us to set some $q-$commutation relations such that any other relation comes from them by using the inverse and multiplication operators.

$$\begin{cases} X_iX_j = qX_jX_i \\ X_iX_j^{-1} = q^{-1}X_j^{-1}X_i \\ X_iX_j^{-\frac{1}{2}} = q^{-\frac{1}{2}}X_j^{-\frac{1}{2}}X_i \\ X_iX_j^{\frac{1}{2}} = q^{\frac{1}{2}}X_j^{-\frac{1}{2}}X_i \\ X_j^{\frac{1}{2}}X_i^{-1} = q^{\frac{1}{2}}X_i^{-1}X_j^{\frac{1}{2}} \\ X_j^{\frac{1}{2}}X_i = q^{-\frac{1}{2}}X_iX_j^{\frac{1}{2}} \\ X_j^{-\frac{1}{2}}X_i^{-1} = q^{-\frac{1}{2}}X_i^{-1}X_j^{\frac{1}{2}} \\ X_jX_i^{-\frac{1}{2}} = q^{\frac{1}{2}}X_i^{-\frac{1}{2}}X_j \\ X_i^{\frac{1}{2}}X_j^{\frac{1}{2}} = q^{\frac{1}{4}}X_j^{\frac{1}{2}}X_i^{\frac{1}{2}} \\ X_i^{\frac{1}{2}}X_j^{-\frac{1}{2}} = q^{-\frac{1}{4}}X_j^{-\frac{1}{2}}X_i^{\frac{1}{2}} \\ X_i^{-\frac{1}{2}}X_j^{\frac{1}{2}} = q^{-\frac{1}{4}}X_j^{\frac{1}{2}}X_i^{-\frac{1}{2}} \\ X_jX_i^{\frac{1}{2}} = q^{-\frac{1}{2}}X_i^{\frac{1}{2}}X_j \\ X_i^{\frac{1}{2}}X_j^{-1} = q^{-\frac{1}{2}}X_j^{-1}X_i^{\frac{1}{2}} \\ X_iX_j^{-\frac{1}{2}} = q^{\frac{1}{2}}X_j^{-\frac{1}{2}}X_i \end{cases}$$

Set $\Sigma^x = \Sigma_{j=-\infty}^{j=+\infty}x_j$. We want to show that Σ^X will commute with

$$\Sigma = (x_3 + x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2 + x_3)^{-\frac{1}{2}}$$

by using the usual commutator$[x, y] = xy - yx$, i.e. to show that the equation $[\Sigma^x, \Sigma] \stackrel{?}{=} 0$ is correct.

For to show it, one can easily check that the contributions of many entries vanishes. Namely, the elements X_j with indexes j from minus infinity to 1 and from 5 to plus infinity definitely commute due to the rules mentioned above. And after that we can concentrate on the sum $x_2+x_3+x_4$. So lets do it,

$[x_2+x_3+x_4,(x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}]$
$\overset{?}{=}(x_2+x_3+x_4)((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}})-((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+ x_3)^{-\frac{1}{2}})(x_2+x_3+x_4)$

for to do this job, let us divide the project to the following small projects. We must demonstrate that the following equations are satisfying.

$$(x_2)((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}})\overset{?}{=}((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}})(x_2) \tag{48}$$

$$(x_3)((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}})\overset{?}{=}((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}})(x_3) \tag{49}$$

$$(x_4)((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}})\overset{?}{=}((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}})(x_4) \tag{50}$$

Let start with equation (48):

$$(x_2)((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}})\overset{?}{=}((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}})(x_2)$$

multiply the equation from the left side with $(x_3+x_4)^{\frac{1}{2}}$.

$$(x_3+x_4)^{\frac{1}{2}}x_2(x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}\overset{?}{=}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_2$$

Now we have two options for x_2 to move, it can go to the left direction and act on the $(x_3+x_4)^{\frac{1}{2}}$ or to the right direction and act on the $(x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}$.

As we see, in $(x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}$, our summation will take part from $k=0$ to $k=+\infty$. We can use of this fact for to skip some factors in the powers of q that will appear in our calculation when that our partners in action are not two.

In the case of x_2, in the left hand side we have no problem in our action; because x_2 will act on x_3 and x_4 and we have two different partners in our action. So we can move x_2 to the left hand side and act it on $(x_3+x_4)^{\frac{1}{2}}$:

$(\Sigma_{k=0}^{\frac{1}{2}}\binom{\frac{1}{2}}{k}_q x_4^{\frac{1}{2}-k}x_3^k)x_2(x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}\overset{?}{=}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_2$
$x_2(\Sigma_{k=0}^{\frac{1}{2}}\binom{\frac{1}{2}}{k}_q q^{-\frac{1}{2}-k}x_4^{\frac{1}{2}-k}q^{-k}x_3^k)(x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}\overset{?}{=}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_2$
$x_2q^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{k=0}^{\frac{1}{2}}\binom{\frac{1}{2}}{k}_q x_4^{\frac{1}{2}-k}x_3^k)(x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}\overset{?}{=}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_2$
$q^{-\frac{1}{2}}x_2x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}\overset{?}{=}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_2$

Now multiply both side of the equation from the right hand side by $(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$; we will have:

$q^{-\frac{1}{2}}x_2x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}\overset{?}{=}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_2(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$

In the right hand side, we have just one partner in action, i.e. we just have the action of x_2 on x_3; So there will be a factor of the power of q. And as I mentioned it already for to skip this factor we will use of limit in infinity. So x_2 should act on $(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}$. Lets see what will happen; (here we have to use the equation (18) for to expand $(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}$):

$q^{-\frac{1}{2}}x_2x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}\overset{?}{=}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{k=-\infty}^{0}(-1)^kq^{\frac{k(k+1)}{2}}\binom{-\frac{3}{2}-k}{-k}_q x_3^{-\frac{1}{2}+k}x_2^{-k})x_2(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$
$q^{-\frac{1}{2}}x_2x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}\overset{?}{=}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{k=-\infty}^{0}(-1)^kq^{\frac{k(k+1)}{2}}\binom{-\frac{3}{2}-k}{-k}_q q^{\frac{1}{2}-k}x_3^{-\frac{1}{2}+k}x_2^{-k})x_2(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$

By using the fact that when $k\to+\infty$ then $q^{\frac{1}{2}-k}\to q^{\frac{1}{2}}$ we have:

$q^{-\frac{1}{2}}x_2x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}\overset{?}{=}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}x_2(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$
$q^{-\frac{1}{2}}x_2x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}\overset{?}{=}q^{\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}x_2(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$
$q^{-\frac{1}{2}}x_2x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}\overset{?}{=}q^{\frac{1}{2}}x_2q^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$
$q^{-\frac{1}{2}}x_2x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}=q^{-\frac{1}{2}}x_2x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}$

So it's correct in the case of x_2.

The case of x_3 and x_4 are almost identical to the case of x_2 with just some minor differs.

Lets do it for x_3;

$(x_3)((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}) \stackrel{?}{=} ((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}})(x_3)$

multiply the equation with $(x_3+x_4)^{\frac{1}{2}}$ from the left hand side;

$(x_3+x_4)^{\frac{1}{2}}x_3(x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_3$

$(x_3+x_4)^{\frac{1}{2}}x_3(\Sigma_{k=0}^{+\infty}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\binom{-\frac{3}{2}}{k}_{q^{-1}}x_4^{-\frac{1}{2}-k}x_3^k)x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_3$

$(x_3+x_4)^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{k=0}^{+\infty}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\binom{-\frac{3}{2}}{k}_{q^{-1}}q^{-\frac{1}{2}-k}x_4^{-\frac{1}{2}-k}q^k x_3^k)x_3x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_3$

By using the fact that when $k\to+\infty$ then $q^{-\frac{1}{2}-k}\to q^{-\frac{1}{2}}$ we have:

$q^{-\frac{1}{2}}x_3x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_3$

multiply the equation with $(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$ from the right hand side;

$q^{-\frac{1}{2}}x_3x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_3(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$

$q^{-\frac{1}{2}}x_3x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{k=0}^{+\infty}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\binom{-\frac{3}{2}}{k}_{q^{-1}}x_3^{-\frac{1}{2}-k}x_2^k)x_3(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$

here again we have to change our equation to (18);

$q^{-\frac{1}{2}}x_3x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{k=-\infty}^{0}(-1)^k q^{\frac{k(k+1)}{2}}\binom{-\frac{3}{2}-k}{-k}_q x_3^{-\frac{1}{2}+k}x_2^{-k})x_3(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$

$q^{-\frac{1}{2}}x_3x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}x_3(\Sigma_{k=-\infty}^{0}(-1)^k q^{\frac{k(k+1)}{2}}\binom{-\frac{3}{2}-k}{-k}_q x_3^{-\frac{1}{2}+k}q^{-k}x_2^{-k})(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$

By using the fact that when $k\to+\infty$ then $q^{-k}\to 1$ we have:

$q^{-\frac{1}{2}}x_3x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}x_3$

$q^{-\frac{1}{2}}x_3x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} = q^{-\frac{1}{2}}x_3x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}$

Lets do it for x_4;

$(x_4)((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}) \stackrel{?}{=} ((x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}})(x_4)$

multiply the equation with $(x_3+x_4)^{\frac{1}{2}}$ from the left hand side;

$(x_3+x_4)^{\frac{1}{2}}x_4(x_3+x_4)^{-\frac{1}{2}}x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_4$

$(x_3+x_4)^{\frac{1}{2}}x_4(\Sigma_{k=0}^{+\infty}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\binom{-\frac{3}{2}}{k}_{q^{-1}}x_4^{-\frac{1}{2}-k}x_3^k)x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_4$

$(x_3+x_4)^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{k=0}^{+\infty}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\binom{-\frac{3}{2}}{k}_{q^{-1}}x_4^{-\frac{1}{2}-k}q^{-k}x_3^k)x_4x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_4$

By using the fact that when $k\to+\infty$ then $q^{-k}\to 1$ we have:

$x_4x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_4$

multiply the equation with $(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$ from the left hand side;

$x_4x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_4(x_2+x_3)^{\frac{1}{2}}$

$x_4x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}x_4(\Sigma_{k=0}^{\frac{1}{2}}\binom{\frac{1}{2}}{k}_q x_3^{\frac{1}{2}-k}x_2^k)$

$x_4x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{k=0}^{\frac{1}{2}}\binom{\frac{1}{2}}{k}_q q^{-\frac{1}{2}+k}x_3^{\frac{1}{2}-k}q^{-k}x_2^k)x_4$

$x_4x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}(x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{k=0}^{\frac{1}{2}}\binom{\frac{1}{2}}{k}_q x_3^{\frac{1}{2}-k}x_2^k)x_4$

$x_4x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}x_4$

$x_4x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} q^{-\frac{1}{2}}x_4x_4^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}$

$x_4x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}} = x_4x_4^{\frac{1}{2}}x_3^{\frac{1}{2}}$

And then again by using the shift operators (17), we will have the set of generators Σ_{i_x} for our lattice Virasoro algebra connected to $U_q(sl_2)$.

Generators of lattice Virasoro algebra coming from 2-dimensional representation of sl_2

Claim 4.3. $[\Sigma_{j=-\infty}^{j=+\infty}x_j, (x_3+x_4)^{-1}x_4x_3(x_2+x_3)^{-1}] = 0$

Proof. The proof is identical to the proof for fractional exponent $\frac{1}{2}$,above. $\square$

Claim 4.4. $[\Sigma_{j=-\infty}^{j=+\infty}x_j, (x_2+x_3+x_4)^{-1}(x_3+x_4)x_2(x_1+x_2)^{-1}] = 0$

Proof. The proof is identical to the proof for fractional exponent $\frac{1}{2}$. Just what you need is to set $x_3+x_4 = x_3'$. The rest is exactly identical. $\square$

Claim 4.5. $[\Sigma_{j=-\infty}^{j=+\infty}x_j, (x_2+\cdots+x_k)^{-1}(x_3+\cdots+x_k)x_2(x_1+x_2)^{-1}] = 0$

Proof. Proof by induction on k.
It is true for $k=3$.
Suppose that it is true for $k-1$ component. Then for k component we have:

$$[\Sigma_{j=-\infty}^{j=+\infty}x_j, ((x_2+\cdots+x_{k-1})+x_k)^{-1}((x_3+\cdots+x_{k-1})+x_k)x_2(x_1+x_2)^{-1}]$$

Set $(x_2+\cdots+x_{k-1}) = x_{k-1}'$;
$= [\Sigma_{j=-\infty}^{j=+\infty}x_j, (x_{k-1}'+x_k)^{-1}(x_{k-1}'+x_k)x_2(x_1+x_2)^{-1}]$;
So the rest will come from $k=3$ and we are done. $\square$

And then by using the shift operators (17), we will have the set of all generators.

Results; Generators of lattice Virasoro algebra coming from 3 and 4-dimensional representation of sl_2

Let us suppose the following $3-$dimensional representation of sl_2. The process of defining this representation is the same as (30).
Define:

$$\begin{aligned} F &= \partial_{(U_+-X_3)} \\ H &= U_+\partial_{U_+} + X_1\partial_{X_1} + X_2\partial_{X_2} + X_3\partial_{X_3} \\ E &= (U_+-X_3)^2\partial_{(U_+-X_3)} + (X_1^2+X_1X_2+X_1X_3+X_1(U_+-X_3))\partial_{X_1} \\ &\quad +(X_2^2+X_2X_3+X_2(U_+-X_3))\partial_{X_2} + (X_3^2+X_3(U_+-X_3))\partial_{X_3} \end{aligned} \tag{51}$$

As before set

$$(F_{k,k+1,k+2}^x)^{(i)} = [\Sigma^X, [\Sigma^X, [\cdots, [\Sigma^X, (F_{1,k,k+1}^x)^{(i)}]]\cdots]]$$
$$(F_{k+1,k+2,k+3}^x)^{(j)} = [\Sigma^X, [\Sigma^X, [\cdots, [\Sigma^X, (F_{2,k,k+1}^x)^{(j)}]]\cdots]$$

Set $k=1$ and $i=-\frac{1}{2}$ and set $(F_{1,2,3}^x)^{(-\frac{1}{2})} = X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$; because it's satisfying in the relation $[\Sigma^X, [\Sigma^X, (F_{1,2,3}^x)^{(-\frac{1}{2})}]] = 0$ and is our highest vector in this representation.

Then
$[\Sigma^X, (F_{1,2,3}^x)^{(-\frac{1}{2})}] = [U_- + (X_1+X_2+X_3) + (U_+-X_3), X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}]$
$= (1-q^{-\frac{1}{2}})(U_+-X_3)X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}$
where as usual $U_+ = \Sigma_{i=3}^{+\infty}X_i$. We call it as usual $(F_{1,2,3}^x)^{(\frac{1}{2})}$, because it has degree $\frac{1}{2}$.

Set $X_1 \to X_3$ and $X_2 \to X_4$ and $X_3 \to X_5$ in $(F^x_{1,2,3})^{(-\frac{1}{2})}$, then we will have,

$$(F^x_{3,4,5})^{(-\frac{1}{2})} = X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}} \tag{52}$$

and again in a same process we have,

$(F^x_{3,4,5})^{(-\frac{1}{2})} = [\Sigma^X, (F^x_{3,4,5})^{(-\frac{1}{2})}]$

$= (1 - q^{-\frac{1}{2}})(U_+ - X_3 - X_4 - X_5) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$

Now let us multiply $(F^x_{1,2,3})^{(-\frac{1}{2})} = X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}}$ with $(F^x_{3,4,5})^{(\frac{1}{2})} =$ $(1 - q^{-\frac{1}{2}})(U_+ - X_3 - X_4 - X_5) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$ for to have

$(F^x_{1,2,3})^{(-\frac{1}{2})} (F^x_{3,4,5})^{(\frac{1}{2})}$

$= X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} (1 - q^{-\frac{1}{2}})(U_+ - X_3 - X_4 - X_5) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$

$= X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} ((U_+ - X_3 - X_4 - X_5) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}) -$
$q^{-\frac{1}{2}} (U_+ - X_3 - X_4 - X_5) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}})$

$= X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} (U_+ - X_3 - X_4 - X_5) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}} -$
$q^{-\frac{1}{2}} X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} (U_+ - X_3 - X_4 - X_5) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$

$= X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} U_+ X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$- X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_3 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$- X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_4 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$- X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_5 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$- q^{-\frac{1}{2}} X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} U_+ X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$- q^{-\frac{1}{2}} X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_3 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$- q^{-\frac{1}{2}} X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_4 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$- q^{-\frac{1}{2}} X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_5 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$= (1 - q^{-\frac{1}{2}}) X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} U_+ X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$+ (1 - q^{-\frac{1}{2}}) X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_3 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$+ (1 - q^{-\frac{1}{2}}) X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_4 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$+ (1 - q^{-\frac{1}{2}}) X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_5 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$

And again let us calculate the multiplication:

$$-q^{-\frac{1}{2}} (F^x_{1,2,3})^{(\frac{1}{2})} (F^x_{3,4,5})^{(-\frac{1}{2})} \tag{53}$$

$= -q^{-\frac{1}{2}} (1 - q^{-\frac{1}{2}})(U_+ - X_3) X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$= -q^{-\frac{1}{2}} (1 - q^{-\frac{1}{2}}) U_+ X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$+ q^{-\frac{1}{2}} (1 - q^{-\frac{1}{2}}) X_3 X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$= -(1 - q^{-\frac{1}{2}}) X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} U_+ X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$-(1 - q^{-\frac{1}{2}}) X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_3 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$\Rightarrow (F^x_{1,2,3})^{(-\frac{1}{2})} (F^x_{3,4,5})^{(\frac{1}{2})} - q^{-\frac{1}{2}} (F^x_{1,2,3})^{(\frac{1}{2})} (F^x_{3,4,5})^{(-\frac{1}{2})} = (1 - q^{-\frac{1}{2}}) X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2 + X_3)^{-\frac{1}{2}} X_3^{\frac{1}{2}}$
$X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}}$

Lets call it $\rho_{1,5}$. But the coefficients here are not so important for us, so let us skip it and write it as follows:

$$\rho_{1,5}=X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}X_3^{\frac{1}{2}}X_4^{-\frac{1}{2}}(X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}} \tag{54}$$

that is a five points generator of lattice Virasoro algebra, but again we are not interested on it and still looking for a simplest one of type $ABCD$.
So let us to define another such kind of solutions as we proposed and experienced already;

$$(F^x_{2,3,4})^{(-\frac{1}{2})}:=X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}} \tag{55}$$

$$(F^x_{2,3,4})^{(\frac{1}{2})}:=(1-q^{-\frac{1}{2}})(U_+-X_3-X_4)X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}} \tag{56}$$

and then define;

$$\rho_{1,4}=(F^x_{1,2,3})^{(-\frac{1}{2})}(F^x_{2,3,4})^{(\frac{1}{2})}-q^{-\frac{1}{2}}(F^x_{1,2,3})^{(\frac{1}{2})}(F^x_{2,3,4})^{(-\frac{1}{2})} \tag{57}$$

Let us calculate it;

$$(F^x_{1,2,3})^{(-\frac{1}{2})}(F^x_{2,3,4})^{(\frac{1}{2})} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
&=X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}((1-q^{-\frac{1}{2}})(U_+-X_3-X_4)X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}\\
&=(1-q^{-\frac{1}{2}})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}(U_+-X_3-X_4)X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}\\
&=(1-q^{-\frac{1}{2}})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}U_+X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}\\
&-(1-q^{-\frac{1}{2}})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}X_3X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}\\
&-(1-q^{-\frac{1}{2}})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}X_4X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Now let us calculate the other part as well;

$$-q^{-\frac{1}{2}}(F^x_{1,2,3})^{(\frac{1}{2})}(F^x_{2,3,4})^{(-\frac{1}{2})} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
&=-q^{-\frac{1}{2}}(1-q^{-\frac{1}{2}})(U_+-X_3)X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}\\
&=-q^{-\frac{1}{2}}(1-q^{-\frac{1}{2}})U_+X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}\\
&+q^{-\frac{1}{2}}(1-q^{-\frac{1}{2}})X_3X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}\\
&=-(1-q^{-\frac{1}{2}})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}U_+X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}\\
&+(1-q^{-\frac{1}{2}})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}X_3X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

So we have

$$\rho_{1,4}=-(1-q^{-\frac{1}{2}})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}X_4X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}} \tag{60}$$

that has degree zero, so it can be one of the generators for lattice Virasoro algebra, but still again is not interested for us, so we should look for a simplest one. And again the coefficient is not important for us, so lets skip it. So we have

$$\rho_{1,4}=X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3)^{-\frac{1}{2}}X_4X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}} \tag{61}$$

and

$$\rho_{1,5}^{-1}=(X_4+X_5)^{\frac{1}{2}}X_4^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_4+X_5)^{-1}(X_2+X_3)^{\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}X_1^{-\frac{1}{2}} \tag{62}$$

Let us calculate the multiplication $\rho_{1,5}^{-1}\rho_{1,4}$ for to see what will happen?

Claim 4.6. The claim is that $\rho_{1,5}^{-1}\rho_{1,4}$ should give us the answer?

PROOF. $\rho_{1,5}^{-1}\rho_{1,4} = (X_4+X_5)^{\frac{1}{2}} X_4^{\frac{1}{2}} X_3^{-\frac{1}{2}} (X_4+X_5)^{-1} X_4 X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-\frac{1}{2}} (X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$
$= (X_4+X_5)^{\frac{1}{2}} X_4^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} (X_4+X_5)^{-1} X_3^{-\frac{1}{2}} X_4 X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-\frac{1}{2}} (X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$
$= (X_4+X_5)^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} (X_4+X_5)^{-1} X_4^{\frac{1}{2}} X_3^{-\frac{1}{2}} X_4 X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-\frac{1}{2}} (X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$
$= (X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{1}{2}} X_3^{-\frac{1}{2}} X_4 X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-\frac{1}{2}} (X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$
$= (X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} X_4 X_3^{-\frac{1}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-\frac{1}{2}} (X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$
$= (X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} X_4 X_2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{4}} X_3^{-1} (X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$
$= (X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{1}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{3}{4}} X_4 X_3^{-1} (X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$
$= q^{-\frac{3}{4}} (X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{1}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} (X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$

And as always the coefficients are not important for us, so let us the set the final solution as follows:

$$\rho_{1,5}^{-1}\rho_{1,4} = (X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{1}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} (X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}} \tag{63}$$

as we were looking for. □

Now suppose the following representation of sl_2.
Define:

$$\begin{gathered} F = \partial_{(U_+-X_3-X_4)} \\ H = (U_+-X_3-X_4)\partial_{(U_+-X_3-X_4)} + X_1\partial_{X_1} + X_2\partial_{X_2} + X_3\partial_{X_3} \\ E = (U_+-X_3-X_4)^2\partial_{(U_+-X_3-X_4)} + (X_1^2+X_1X_2+X_1X_3+X_1(U_+-X_3-X_4))\partial_{X_1} \\ +(X_2^2+X_2X_3+X_2(U_+-X_3-X_4))\partial_{X_2} + (X_3^2+X_3(U_+-X_3-X_4))\partial_{X_3} \end{gathered} \tag{64}$$

As before set

$$\begin{gathered} (F^x_{k,k+3})^{(i)} = (F^x_{k,k+1,k+2,k+3})^{(i)} := [\Sigma^X, [\Sigma^X, [\cdots, [\Sigma^X, (F^x_{k,k+3})^{(i)}]] \cdots]] \\ (F^x_{k+1,k+4})^{(j)} = (F^x_{k+1,k+2,k+3,k+4})^{(j)} = [\Sigma^X, [\Sigma^X, [\cdots, [\Sigma^X, (F^x_{k+1,k+4})^{(j)}]] \cdots] \end{gathered}$$

Set $k=1$ and $i=-\frac{1}{2}$ and set $(F^x_{1,4})^{(-\frac{1}{2})} = X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}$.
and as what we had already, set

$$(F^x_{1,4})^{(\frac{1}{2})} = (1-q^{(-\frac{1}{2})})(U_+-X_3-X_4) X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}} \tag{65}$$

where as usual $U_+ = \Sigma_{i=3}^{+\infty} X_i$.
Now as before, set $X_1 \to X_3$ and $X_2 \to X_4$ and $X_3 \to X_5$ and $X_4 \to X_6$ in $(F^x_{1,4})^{(-\frac{1}{2})}$, then we will have,

$$(F^x_{3,6})^{(-\frac{1}{2})} = (F^x_{3,4,5,6})^{(-\frac{1}{2})} = X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4+X_5+X_6)^{-\frac{1}{2}} \tag{66}$$

$$(F^x_{3,6})^{(\frac{1}{2})} = (1-q^{(-\frac{1}{2})})(U_+-X_3-X_4-X_5-X_6) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4+X_5+X_6)^{-\frac{1}{2}} \tag{67}$$

and then we will proceed as before again

$$(F^x_{1,4})^{(-\frac{1}{2})} (F^x_{3,6})^{(\frac{1}{2})} \tag{68}$$

$= X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}} (1-q^{(-\frac{1}{2})})(U_+-X_3-X_4-X_5-X_6) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4+X_5+X_6)^{-\frac{1}{2}}$
$= (1-q^{(-\frac{1}{2})}) X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}} (U_+-X_3-X_4) X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4+X_5+X_6)^{-\frac{1}{2}}$
$-(1-q^{(-\frac{1}{2})}) X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{-\frac{1}{2}} (X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}} X_5 X_3^{\frac{1}{2}} X_4^{-\frac{1}{2}} (X_4+X_5+X_6)^{-\frac{1}{2}}$

$-(1-q^{(-\frac{1}{2})})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}X_6X_3^{\frac{1}{2}}X_4^{-\frac{1}{2}}(X_4+X_5+X_6)^{-\frac{1}{2}}$
and on the other hand, we have

$$-q^{(-\frac{1}{2})}(F^x_{1,4})^{(\frac{1}{2})}(F^x_{3,6})^{(-\frac{1}{2})} \tag{69}$$

$=-q^{(-\frac{1}{2})}(1-q^{(-\frac{1}{2})})(U_+-X_3-X_4)X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}X_3^{\frac{1}{2}}X_4^{-\frac{1}{2}}(X_4+X_5+X_6)^{-\frac{1}{2}}$
$=-(1-q^{(-\frac{1}{2})})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}(U_+-X_3-X_4)X_3^{\frac{1}{2}}X_4^{-\frac{1}{2}}(X_4+X_5+X_6)^{-\frac{1}{2}}$
and so $(F^x_{1,4})^{(-\frac{1}{2})}(F^x_{3,6})^{(\frac{1}{2})}-q^{(-\frac{1}{2})}(F^x_{1,4})^{(\frac{1}{2})}(F^x_{3,6})^{(-\frac{1}{2})}$
$=-(1-q^{(-\frac{1}{2})})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}(X_5+X_6)X_3^{\frac{1}{2}}X_4^{-\frac{1}{2}}(X_4+X_5+X_6)^{-\frac{1}{2}}$
as always let us call it

$$\rho_{1,6}=X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}(X_4+X_5+X_6)X_3^{\frac{1}{2}}X_4^{-\frac{1}{2}}(X_4+X_5+X_6)^{-\frac{1}{2}} \tag{70}$$

$$\rho_{1,6}^{-1}=(X_4+X_5+X_6)^{\frac{1}{2}}X_4^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_4+X_5+X_6)^{-1}(X_2+X_3+X_4)^{\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}X_1^{-\frac{1}{2}} \tag{71}$$

Now again let us define another such kind of solutions:

$$(F^x_{2,5})^{(-\frac{1}{2})}=(F^x_{2,3,4,5})^{(-\frac{1}{2})}:=X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}} \tag{72}$$

$$(F^x_{2,5})^{(\frac{1}{2})}=(F^x_{2,3,4,5})^{(\frac{1}{2})}:=(1-q^{(-\frac{1}{2})})(U_+-X_3-X_4-X_5)X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}} \tag{73}$$

and we are looking for the value of the following objects;

$$(F^x_{1,4})^{(-\frac{1}{2})}(F^x_{2,5})^{(\frac{1}{2})} \tag{74}$$

$=X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}((1-q^{(-\frac{1}{2})})(U_+-X_3-X_4-X_5)X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$=((1-q^{(-\frac{1}{2})})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}(U_+-X_3-X_4)X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$-((1-q^{(-\frac{1}{2})})X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}X_5X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}}$
and on the other side we have:

$$-q^{(-\frac{1}{2})}(F^x_{1,4})^{(\frac{1}{2})}(F^x_{2,5})^{(-\frac{1}{2})} \tag{75}$$

$=-q^{(-\frac{1}{2})}(1-q^{(-\frac{1}{2})})(U_+-X_3-X_4)X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$=-(1-q^{(-\frac{1}{2})})X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}(U_+-X_3-X_4)X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}}$ so we have:
$\rho_{1,5}=(F^x_{1,4})^{(-\frac{1}{2})}(F^x_{2,5})^{(\frac{1}{2})}-q^{(-\frac{1}{2})}(F^x_{1,4})^{(\frac{1}{2})}(F^x_{2,5})^{(-\frac{1}{2})}$

$$\rho_{1,5}=X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}X_5X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}} \tag{76}$$

Claim 4.7. $\rho_{1,6}^{-1}\rho_{1,5}$ has degree zero.

Proof. $\rho_{1,6}^{-1}\rho_{1,5}=(X_4+X_5+X_6)^{\frac{1}{2}}X_4^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_4+X_5+X_6)^{-1}(X_2+X_3+X_4)^{\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}X_1^{-\frac{1}{2}}X_1^{\frac{1}{2}}$
$X_2^{-\frac{1}{2}}(X_2+X_3+X_4)^{-\frac{1}{2}}X_5X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$=(X_4+X_5+X_6)^{\frac{1}{2}}X_4^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_4+X_5+X_6)^{-1}X_5X_2^{\frac{1}{2}}X_3^{-\frac{1}{2}}(X_3+X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}}$
$=q^{(-\frac{3}{4})}(X_4+X_5+X_6)^{-\frac{1}{2}}X_4^{\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}(X_3+X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}}$ □

So we have:

$$\rho_{1,6}^{-1}\rho_{1,5}=(X_4+X_5+X_6)^{-\frac{1}{2}}X_4^{\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}(X_3+X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}} \tag{77}$$

5. Conclusion

Four point invariant, that's coming from the 3-dimensional representation of sl_2;

$$[\Sigma_{-\infty}^{+\infty} X_i, (X_4 + X_5)^{-1} X_4 X_2 (X_3 + X_4)^{-1}]_q = 0$$

Five point invariant, that's coming from the 4-dimensional representation of sl_2;

$$[\Sigma_{-\infty}^{+\infty} X_i, (X_4 + X_5 + X_6)^{-1} X_4 X_2 (X_3 + X_4 + X_5)^{-1}]_q = 0$$

Claim 5.1. We have the following n-point invariant that's coming from the n-dimensional representation.

$$(X_4 + \cdots + X_n)^{-1} X_4 X_2 (X_3 + \cdots + X_{n-1})^{-1}$$

And then by using the shift operators (17), we will have the space of all nontrivial generators of lattice Virasoro algebra.
We call these kind of generators that are the only nontrivial ones:

$$Generators of type "ABCD"$$

These (new lattice) algebras are so important and may in principle lead to a new integrable chain equations which people can hardly provide.

Now let us check the satisfactory of our generators in quantum Serre relations.

We need to show the correctness of $(X_2+X_3+X_4+X_5)((X_4+X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} (X_3+X_4)^{\frac{1}{2}}) \stackrel{?}{=} ((X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}})(X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$

So let us proceed it as before on each component:

$X_2(X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} (X_3 + X_4)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}} X_2$

$(X_4 + X_5)^{\frac{1}{2}} X_2 (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} \stackrel{?}{=} X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}} X_2 (X_3 + X_4)^{\frac{1}{2}}$

$X_2 X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} \stackrel{?}{=} q^{\frac{1}{2}} X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} X_2$

$X_2 X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} \stackrel{?}{=} q^{\frac{1}{2}} q X_4^{\frac{3}{2}} X_2 X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1}$

$X_2 X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} \stackrel{?}{=} q^{\frac{1}{2}} q X_4^{\frac{3}{2}} X_2 X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1}$

$X_2 X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} = q^{\frac{1}{2}} q q^{-\frac{3}{2}} X_4^{\frac{3}{2}} X_2 X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1}$

$X_2 X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} = X_2 X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1}$

Lets do it for X_3;

$X_3(X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} (X_3 + X_4)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} (X_4 + X_5)^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} (X_3 + X_4)^{-\frac{1}{2}} X_3$

$q^{-\frac{1}{2}} X_3 X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} \stackrel{?}{=} q^{-\frac{1}{2}} X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} X_3$

$q^{-\frac{1}{2}} X_3 X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} \stackrel{?}{=} q^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} X_4^{\frac{3}{2}} X_3 X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1}$

$q^{-\frac{1}{2}} X_3 X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1} \stackrel{?}{=} q^{-\frac{1}{2}} X_3 X_4^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3^{-1}$

And after repeating a similar trend for X_4 and X_5 we will get the desired result.

Acknowledgments

It is a great pleasure to thank Professor Boris Feigin for to suggesting this interesting problem to me and enlightening discussions during the preparation for this paper and also I wish to thank Professor Yaroslav Pugai for his wonderful article and his very useful advices and comments.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alekseev, A., Faddeev, L. and Semenov-Tian-Shansky, M., 1992. Hidden quantum groups inside Kac-Moody algebra. //Communications in mathematical physics, 149(2), pp.335-345.
2. Brown, K. and Goodearl, K.R., 2012. Lectures on algebraic quantum groups. //Birkhäuser.
3. Frenkel, E., 1995. Free field realizations in representation theory and conformal field theory. //In Proceedings of the International Congress of Mathematicians (pp. 1256-1269). Birkhäuser, Basel.
4. Feigin, B.L. :// talk at RIMS 1992.
5. Gelfand, I. and Dickey, L. A Lie algebra structure in a formal variations calculus, //Functional Anal. Appi., 10 (1976), 16–22.
6. Iohara, K. and Malikov, F., 1994. Rings of skew polynomials and Gel'fand-Kirillov conjecture for quantum groups. //Communications in mathematical physics, 164(2), pp.217-237.
7. Majid, S., 2002. A quantum groups primer (Vol. 292).// Cambridge University Press.
8. Kac, V.G., 1990. Infinite-dimensional Lie algebras. //Cambridge university press.
9. Kassel, C., 2012. Quantum groups (Vol. 155). //Springer Science & Business Media.
10. Kupershmidt, B.A. and Wilson, G., 1981. Conservation laws and symmetries of generalized sine-Gordon equations.// Communications in Mathematical Physics, 81(2), pp.189-202.
11. Klimyk, A. and Schmüdgen, K., 2012. Quantum groups and their representations. //Springer Science & Business Media.
12. Laugwitz, R., Quantum Groups and Their Representations.
13. Pugay, Y.P., 1994. Lattice W algebras and quantum groups.// Theoretical and Mathematical Physics, 100(1), pp.900-911.
14. Sklyanin, E.K., 1985. On an algebra generated by quadratic relations. //Usp. Mat. Nauk, 40, p.214.
15. Stanley, R.P., 1986. Enumerative combinatorics, //Wadsworth Publ. Co., Belmont, CA.

REFERENCES

1. Alekseev, A., Faddeev, L. and Semenov-Tian-Shansky, M., 1992. "Hidden quantum groups inside Kac-Moody algebra". Communications in mathematical physics, 149(2), pp.335-345.
2. Brown, K. and Goodearl, K.R., 2012. "Lectures on algebraic quantum groups". Birkhäuser.
3. Frenkel, E., 1995. "Free field realizations in representation theory and conformal field theory". In Proceedings of the International Congress of Mathematicians (pp. 1256-1269). Birkhäuser, Basel.
4. Feigin, B.L. talk at RIMS 1992.
5. Gelfand, I. and Dickey, L. "A Lie algebra structure in a formal variations calculus", Functional Anal. Appi., 10 (1976), 16–22.

6. Iohara, K. and Malikov, F., 1994. ”Rings of skew polynomials and Gel’fand-Kirillov conjecture for quantum groups”. Communications in mathematical physics, 164(2), pp.217-237.

7. Majid, S., 2002. ”A quantum groups primer” (Vol. 292). Cambridge University Press.

8. Kac, V.G., 1990. ”Infinite-dimensional Lie algebras”. Cambridge university press.

9. Kassel, C., 2012. ”Quantum groups” (Vol. 155). Springer Science & Business Media.

10. Kupershmidt, B.A. and Wilson, G., 1981. ”Conservation laws and symmetries of generalized sine-Gordon equations”. Communications in Mathematical Physics, 81(2), pp.189-202.

11. Klimyk, A. and Schmüdgen, K., 2012. ”Quantum groups and their representations”. Springer Science & Business Media.

12. Laugwitz, R., ”Quantum Groups and Their Representations”.

13. Pugay, Y.P., 1994. ”Lattice W algebras and quantum groups”. Theoretical and Mathematical Physics, 100(1), pp.900-911.

14. Sklyanin, E.K., 1985. ”On an algebra generated by quadratic relations”. Usp. Mat. Nauk, 40, p.214.

15. Stanley, R.P., 1986. ”Enumerative combinatorics”, Wadsworth Publ. Co., Belmont, CA.

Получено 27.06.20 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2020–21-4-196-217

Н. М. Коробов, В. И. Нечаев, С. Б. Стечкин, Н. М. Добровольский и возрождение Тульской школы теории чисел[1]

И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков

Ирина Юрьевна Реброва — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Владимир Николаевич Чубариков — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Аннотация

В работе приводятся многие неизвестные факты из истории Тульской школы теории чисел. Показано, что основную роль в возрождении Тульской школы теории чисел сыграли профессора Н. М. Коробов, В. И. Нечаев, С. Б. Стечкин, Н. М. Добровольский.

Раскрывается роль этих основных участников в возрождении в Туле научной школы по теории чисел. Приводятся различные подробности взаимоотношений между этими участниками процесса возрождения Тульской школы теории чисел.

Для характеризации деятельности Тульской научной школы по теории чисел после её возрождения приводится обзор основных направлений её работы за последние 45 лет и краткое описание проделанных работ. Дается библиография основных научных публикаций по теоретико-числовому методу в приближенном анализе Н. М. Коробова и Н. М. Добровольского, на которых базировалось возрождение Тульской школы теории чисел и её функционирование последние 45 лет.

Ключевые слова: Н. М. Коробов, В. И. Нечаев, С. Б. Стечкин, Н. М. Добровольский, Тульская школа теории чисел, теоретико-числовой метод в приближенном анализе, решётки, сетки, квадратурные формулы, интерполяционные формулы, гиперболическая дзета-функция решёток, дзета-функции моноидов натуральных чисел, равномерное распределение, метрическое пространство решёток, гладкое многообразие решёток, приближение алгебраических чисел.

Библиография: 57 названия.

Для цитирования:
И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков. Н. М. Коробов, В. И. Нечаев, С. Б. Стечкин, Н. М. Добровольский и возрождение Тульской школы теории чисел // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 4, С. 196–217.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2020–21-4-196-217

N. M. Korobov, V. I. Nechaev, S. B. Stechkin, N. M. Dobrovolsky and the revival of the Tula School of number theory[2]

I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov

Irina Yuryevna Rebrova — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Vladimir Nikolaevich Chubarikov — doctor of physical and mathematical sciences, professor, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Abstract

The paper presents many unknown facts from the history of the Tula school of number theory. It is shown that the main role in the revival of the Tula school of number theory was played by professors N. M. Korobov, V. I. Nechaev, S. B. Stechkin, and N. M. Dobrovolsky.

The role of these main participants in the revival of the scientific school of number theory in Tula is revealed. Various details of the relationship between these participants in the process of reviving the Tula school of number theory are given.

To characterize the activities of the Tula scientific school on number theory after its revival, an overview of the main directions of its work over the past 45 years and a brief description of the work done is provided. The article provides a bibliography of the main scientific publications on the number-theoretic method in approximate analysis by N. M. Korobov and N. M. Dobrovolsky, on which the revival of the Tula school of number theory and its subsequent functioning over the past 45 years were based.

Keywords: N. M. Korobov, V. I. Nechaev, S. B. Stechkin, N. M. Dobrovolsky, the Tula school of number theory, numerical-theoretic method in approximate analysis, lattices, grids, quadrature formulas, interpolation formulas, hyperbolic Zeta function of lattices, Zeta functions of monoids of natural numbers, uniform distribution, metric space of lattices, smooth variety of lattices, approximation of algebraic numbers.

Bibliography: 57 titles.

For citation:
I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, 2020, "N. M. Korobov, V. I. Nechaev, S. B. Stechkin, N. M. Dobrovolsky and the revival of the Tula School of number theory", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 196–217.

1. Введение

Тульской школе теории чисел в этом году исполнилось 70 лет. Её возникновение связано с именем доцента Владимира Дмитриевича Подсыпанина (16.01.1910–11.10.1968). В работе [23] достаточно подробно приводятся сведения из биографии В. Д. Подсыпанина. В создании Тульской школы теории чисел значительную роль сыграл тот факт, что В. Д. Подсыпанин был первым аспирантом будущего члена-корреспондента АН СССР Дмитрия Константиновича Фаддеева (30.06.1907–20.10.1989) и хорошо знал члена-корреспондента АН СССР Бориса Николаевича Делоне (15.03.1890–17.07.1980). Благодаря поддержке Б. Н. Делоне в 1950 году в Туле была открыта на базе ТГПИ (Тульский государственный педагогический институт) аспирантура по алгебре и теории чисел. Первым аспирантом Владимира Дмитриевича

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

стал один из отличников Астраханского педагогического института Владимир Ильич Баулин (26.02.1928–05.04.2008), который был направлен в ТГПИ для обучения в аспирантуре.

Как отмечено в работе [23], "Следующим аспирантом стал Михаил Николаевич Добровольский, с которым Владимир Дмитриевич начал большую работу по разрешению проблемы «ограниченности неполных частных» с помощью полиномов Туэ. Эта работа, к сожалению, осталась незавершенной, хотя целый ряд сообщений в начале и середине шестидесятых годов Владимир Дмитриевич и Михаил Николаевич сделали на семинарах Ленинградского и Московского университетов. После смерти Владимира Дмитриевича в 1968 г. рукопись этой работы была передана его ученику М. Н. Добровольскому, но в то время опубликована так и не была."

В то время М. Н. Добровольский готовил к защите свою диссертацию по комбинаторному анализу на тему "Некоторые комбинаторные задачи о перестановках с ограничением позиций". Оппонентами были Наум Яковлевич Виленкин (30.10.1920–19.10.1991), Михаил Ефимович Деза (27.04.1939–23.11.2016), ведущая организация Владимирский государственный педагогический институт, отзыв подготовил Борис Вениаминович Левин (29.04.1927–29.03.1991). Он защитил диссертацию в Москве по латинским прямоугольникам в 1971 г., а вскоре в 1975 г. умер, и продолжателей у этой работы долгое время не находилось.

Таким образом, первый этап истории Тульской школы теории чисел был с 1950 по 1975 годы и занял 25 лет из общей истории продолжительностью 70 лет. Возрождение деятельности этой научной школы произошло уже начиная с конца 1975 года.

Целью данной работы является изучение роли профессоров Н. М. Коробова, В. И. Нечаева, С. Б. Стечкина, Н. М. Добровольского в возрождении Тульской школы теории чисел.

Данная работа посвящена столетию со дня рождения профессоров В. И. Нечаева, С. Б. Стечкина и семидесятилетию профессора Н. М. Добровольского.

2. Н. М. Коробов и Тульская школа теории чисел

Сравнительно недавно отмечалось столетие со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Николая Михайловича Коробова (23.11.1917 –25.10.2004) — одного из крупнейших специалистов по теории чисел в СССР и России. Его научные интересы были сосредоточены в трёх областях: теория равномерного распределения, теория тригонометрических сумм и теоретико-числовой метод в приближенном анализе. Он был основателем последнего метода и занимался его развитием на протяжении 47 лет с 1956 года по 2004 год, когда его не стало. За это время он написал не очень много работ [25]–[49], [21], [22]. Но эти работы определили целое научное направление и стали фундаментом для дальнейших исследований его последователей.

Как уже было сказано во введении, Тульская школа теории чисел была основана в 1950 году доцентом В. Д. Подсыпаниным. При поддержке члена-корреспондента АН СССР профессора Б. Н. Делоне и профессора Д. К. Фаддеева, у которых он учился в 30-х годах в Ленинграде, он открыл аспирантуру по теории чисел в Тульском государственном педагогическом институте. Под руководством В. Д. Подсыпанина Тульская школа теории чисел работала до 1968 года, когда его не стало. После его кончины исследования по теории чисел и комбинаторному анализу в Туле до 1975 года продолжал его ученик М. Н. Добровольский (27.10.1922–18.01.1975).

Как указано в работе [23], возрождение Тульской школы теории чисел началось с 1980 года, когда благодаря заведующему кафедрой алгебры доценту Альберту Рубеновичу Есаяну (10.11.1937–04.12.2018), доценту Самуилу Израилевичу Рабиновичу (20.02.1928–19.06.2006), заведующему кафедрой геометрии и элементарной математики Ивану Ивановичу Гайдукову (11.09.1915–23.07.1990) и декану математического факультета доценту Ашоту Енофовичу

Устяну (01.09.1937) Н. М. Добровольский (17.06.1950) перешёл на работу из КИВЦ Главприокскстроя в ТГПИ им. Л. Н. Толстого на кафедру геометрии и элементарной математики.

На этом этапе важную роль сыграли профессора, доктора физико-математических наук Мартин Давидович Гриндлингер (15.03.1932) и Н. М. Коробов.

В 1981 году Н. М. Добровольский поступил в аспирантуру к М. Д. Гриндлингеру, который возглавлял Тульскую алгебраическую школу, но предоставил своему новому аспиранту полную свободу творчества, благодаря этому продолжились занятия Н. М. Добровольского на семинаре у Н. М. Коробова в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Контакты между профессором Н. М. Коробовым и Тульской школой теории чисел начались ещё в 56-м году XX столетия, когда Н. М. Коробов был учёным секретарем III-го съезда математиков СССР в г. Москве, а в 1965 году В. Д. Подсыпанин и М. Н. Добровольский сделали серию докладов в МГУ на научно-исследовательском семинаре кафедры теории чисел под руководством члена-корреспондента АН СССР профессора А. О. Гельфонда (24.10.1906–07.11.1968) с результатами своих исследований по полиномам Туэ. Профессор Н. М. Коробов и доцент В. И. Нечаев (11.01.1920–18.02.1999) активно участвовали в обсуждении этих докладов.

Лично Н. М. Добровольский познакомился с профессором Н. М. Коробовым ещё в феврале 1967 года в десятом классе, когда по совету своего первого учителя по теории чисел, профессора А. А. Карацубы (31.01.1937–28.09.2008) стал посещать лекции в Московском университете у профессора Н. М. Коробова. После поступления в 1967 году на механико-математический факультет МГУ Н. М. Добровольский участвовал в работе студенческого семинара под руководством профессоров Н. М. Коробова и А. А. Карацубы. В 1968 году Н. М. Коробов стал научным руководителем у студента Н. М. Добровольского.

После недолгого перерыва в 1975 году совместное сотрудничество с Н. М. Коробовым возобновилось и продлилось ещё 29 лет до кончины Н. М. Коробова 25 октября 2004 года.

Именно с конца 1975 года и началось возрождение Тульской школы теории чисел, хотя в работе [23] берется другая более поздняя дата.

Дело в том, что после смерти своего отца Н. М. Добровольский, находящийся в Тульской областной противотуберкулезной больнице, был вынужден перевестись в ТГПИ им. Л. Н. Толстого на заочное отделение, так как только таким образом можно было совмещать лечение и обучение, который закончил летом 1975 года. Ему даже удалось оперативно пройти педагогическую практику в школе для детей из детского отделения этой больницы, так как по естественным причинам он долгое время не мог работать в образовательных учреждениях любого уровня. Под руководством доцента С. И. Рабиновича он написал дипломную работу по оптимальным коэффициентам параллелепипедальных сеток. В этой работе он доказал существование оптимальных коэффициентов по любому модулю N. А начинал эту работу он ещё в феврале 1974 года, когда заболел воспалением легких и когда ещё был жив его отец М. Н. Добровольский. Они вместе обсуждали получающиеся результаты. Так что фактически перерыва в работе Тульской школы теории чисел не было. Просто её ряды пополнил ученик профессора Н. М. Коробова, которому пришлось волей судеб принять интеллектуальную эстафету по продолжению теоретико-числовых исследований в Туле.

После окончания ТГПИ им. Л. Н. Толстого 15 июля 1975 года Н. М. Добровольский по рекомендации А. Р. Есаяна поступил на работу в КИВЦ Главприокскстроя, которым руководил будущий депутат Государственной думы первого созыва Эдуард Александрович Пащенко (17.03.1939–04.02.2005). Благодаря Э. А. Пащенко и начальнику отдела программирования, выпускнику мех-мата МГУ Борису Шабсовичу Глузману (14.06.1944) Н. М. Добровольский начал регулярно по пятницам ездить на семинары в МГУ к Н. М. Коробову, кроме этого он посещал на ВМК семинары по базам данным доцента Игоря Борисовича Задыхайло (11.02.1931–02.08.1998).

В этот период с 1975 по 1980 год в теоретико-числовом методе в приближенном анализе произошло важное, принципиальное событие. В 1976 году в Докладах академии наук вышла статья Константина Константиновича Фролова, в которой были введены алгебраические сетки с весами и с их помощью была получена верхняя оценка погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α совпадающая с нижней оценкой 1963 года, полученной Игорем Федоровичем Шарыгиным (13.02.1937–12.03.2004). Надо отметить, что по указанию Н. М. Коробова Н. М. Добровольский на третьем курсе посещал спецкурс по кубатурным формулам, который читал для студентов отделения вычислительной математики И. Ф. Шарыгин. Позднее это отделение было преобразовано в факультет ВМК.

В 1978 году Н. М. Коробов привлёк Н. М. Добровольского к проверке диссертации К. К. Фролова. Эта была достаточно кропотливая работа. Список замечаний содержал более 40 позиций. Так как Н. М. Коробов должен был быть оппонентом по диссертации К. К. Фролова, у которого научным руководителем был Владимир Михайлович Солодов — ученик Н. М. Коробова, то по требованию Н. М. Коробова К. К. Фролову пришлось существенно переработать диссертацию. Новый вариант, хотя также содержал отдельные недочёты, но был допущен к защите, так как Н. М. Коробов высоко ценил работу К. К. Фролова, считал его талантливым молодым человеком, а недочёты списывал на то, что соискатель не прошёл мех-матовской школы, а был выпускником Физ-теха.

Эта работа оказала на Н. М. Добровольского неоценимое влияние и он позднее использовал это в своей диссертации, в которой в одной из глав дал существенное усовершенствование метода Фролова.

Так как в начале 80-х годов Н. М. Коробов не принимал новых аспирантов, считая, что это небезопасно для них, так как определённые силы, по его мнению, препятствовали их научной карьере, то Н. М. Добровольский вынужден был поступить в аспирантуру к М. Д. Гриндлингеру. Учеба в аспирантуре в начале проходила негладко. Когда в апреле 1982 года Н. М. Добровольский привёз некоторый текст, который можно было считать развернутым планом диссертации, то встретил весьма нелицеприятную критику со стороны Н. М. Коробова.

В этот сложный период Н. М. Добровольский получил существенную поддержку от своего старшего товарища заведующего кафедрой алгебры доцента А. Р. Есаяна. Всё лето они просидели за столом у А. Р. Есаяна дома, разбирая работы по локализации корней многочленов — области, в которой А. Р. Есаян был специалистом. Позднее по результатам этой работы они сделали совместную публикацию.

А в сентябре ситуация изменилась к лучшему. Позвонил Дмитрий Алексеевич Митькин (25.04.1951–09.04.2007) и от имени Н. М. Коробова пригласил на семинар. Естественно, что это было встречено с большим энтузиазмом. На семинаре Н. М. Коробов дал поручение сделать обзор работ за последние двадцать лет по теории равномерного распределения и по теоретико-числовым методам в приближенном анализе. Теперь каждую пятницу Н. М. Добровольский начинал своё посещение Москвы либо с Ленинской библиотеки, либо с читального зала мех-мата на 14-ом этаже. Иногда, когда требовалось посмотреть какую-нибудь диссертацию приходилось, посещать читальный зал на 15-ом этаже, который был предназначен для преподавателей.

Эта работа была приурочена к готовящейся всесоюзной научной конференции «Теория трансцендентных чисел и её приложения» (2–4 января 1983 г., председатель оргкомитета чл.-корр. АН СССР О. Б. Лупанов, ученый секретарь доцент А. И. Галочкин). На этой конференции собрались, наверное, все теоретико-числовики СССР. С одним из пленарных докладов выступил Н. М. Коробов. Уже во время конференции Александр Иванович Галочкин (14.05.1944) по просьбе Н. М. Коробова включил выступление Н. М. Добровольского в секцию, которой руководил молодой белорусский математик Василий Иванович Берник (09.01.1947).

После конференции состоялся принципиальный разговор Н. М. Коробова с Н. М. Добровольским. В этом разговоре Н. М. Коробов поставил перед Н. М. Добровольским задачу о получении рационального эффективного варианта работы [54] Клауса Фридриха Рота (29.10.1925–10.11.2015) 1980 года, в которой он доказал неулучшаемость нижней оценки квадратичного отклонения сеток, полученной им в 1954 году [53].

Н. М. Коробов привёл пример истории возникновения метода оптимальных коэффициентов, который он создал на пути получения рационального варианта теоремы Ильи Иосифовича Пятецкого-Шапиро (30.03.1929–21.02.2009) о существовании набора вещественных чисел, задающих для каждой функции квадратурную формулу с хорошим порядком убывания погрешности приближенного интегрирования.

Н. М. Коробов поставил очень жесткие сроки — два, три месяца. Н. М. Добровольскому удалось уложиться в эти сроки и уже 25 апреля 1983 года он передал текст статьи с эффективным доказательством теоремы Рота Владимиру Михайловичу Тихомирову (22.11.1934), который представил статью в Успехи математических наук, и эта первая печатная работа Н. М. Добровольского вышла в 1984 году [6].

После этого успеха дела пошли в гору. За лето 1983 года Н. М. Добровольский подготовил большую статью по оценкам отклонений модифицированных сеток Хэммерсли — Рота [7]. Затем были подготовлены еще три статьи [8]–[10]. Все эти статьи были депонированы в ВИНИТИ по представлению профессора Н. М. Коробова. А уже летом 1984 года был готов текст диссертации и на свой день рождения Н. М. Добровольский сделал себе подарок — вписал формулы в отпечатанный текст диссертации.

В 1985 году 21 октября Н. М. Добровольский защитил кандидатскую диссертацию на тему "Теоретико-числовые сетки и их приложения" в диссертационном совете МГПИ им. В. И. Ленина.

Это произошло через 14 лет после защиты в этом же совете 18 января 1971 г. кандидатской диссертации его отца Добровольского М. Н., который умер ровно через 4 года 18 января 1975 г.

Научный руководитель Н. М. Добровольского — профессор М. Д. Гриндлингер, оппоненты — профессор Н. М. Коробов и кандидат физико-математических наук К. К. Фролов, ведущей организацией был Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова, отзыв готовил профессор Александр Васильевич Малышев (17.11.1928–10.05.1993).

В 1986 году началось сотрудничество Н. М. Добровольского с В. С. Ваньковой, которая стала соискателем у профессора В. И. Нечаева — заведующего кафедрой теории чисел в МГПИ им. В. И. Ленина. О степени влияния профессора Н. М. Коробова можно судить по тому факту, что пять лет каждую пятницу В. С. Ванькова и Н. М. Добровольский ездили на семинар по тригонометрическим суммам и их приложению, который вёл в МГУ уже на протяжении 20 лет профессор Н. М. Коробов.

Отметим, что в это время к руководству семинара присоединился и профессор Д. А. Митькин, с которым Н. М. Добровольский учился в параллельных классах ещё в ЮМШ, школе-интернате № 18 при МГУ в 1965–1967 годах, а потом в одной группе на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова с 1969 по 1971 годы под руководством профессора Н. М. Коробова.

В 1992 году В. С. Ванькова успешно защитила кандидатскую диссертацию под руководством профессора В. И. Нечаева в диссертационном совете МПГУ. Её диссертация была посвящена изучению квадратичного отклонения различных теоретико-числовых сеток.

Под руководством В. И. Нечаева были ещё защищены две диссертации аспирантками из Тулы: А. Л. Рощеней (1998 г.) и И. Ю. Ребровой (2000 г.). Их диссертации были посвящены изучению гиперболической дзета-функции решёток и обобщённой гиперболической дзета-функции решёток. Эта тематика находилась под пристальным вниманием профессора Н. М. Коробова. В июне 2000 г. состоялась защита докторской диссертации Н. М. Добровольского, на которой Н. М. Коробов выступал как научный консультант.

Во втором издании своей монографии [48] Н. М. Коробов целый раздел посвятил результатам, полученным в Тульской школе теории чисел.

В 1991 году профессорами Н. М. Коробовым и В. И. Нечаевым на семинаре в МГУ им. М. В. Ломоносова при обсуждении кандидатской диссертации В. С. Ваньковой была поставлена задача о вычислении квадратичного отклонения плоской сетки Хэммерсли. В работах В. С. Ваньковой, в частности, исследовалось среднее арифметическое квадратичных отклонений модифицированных сеток Хэммерсли — Рота и были получены оценки сверху для этого среднего. Задача Коробова — Нечаева подразумевала и получение асимптотической формулы среднего арифметического квадратичных отклонений полных плоских модифицированных сеток Хэммерсли — Рота.

В диссертации Г. Т. Вронской, выполненой в аспирантуре МПГУ под руководством Н. М. Добровольского в 2005 г., было дано решение задачи Коробова — Нечаева для:

— количественной характеристики качества и квадратичного отклонения полных плоских сеток Хэммерсли;

— среднего арифметического квадратичных отклонений полных модифицированных сеток Хэммерсли — Рота;

— количественной характеристики качества плоских сеток Воронина;

— среднего арифметического квадратичных отклонений модифицированных параллелепипедальных сеток.

Начиная с конца семидесятых годов, в Туле традиционно все исследования по теории чисел сконцентрированы в направлении развития основанного в 1957 году профессором Н. М. Коробовым теоретико-числового метода приближенного анализа. В последнее время эти исследования стали всё больше примыкать к тематике, разрабатываемой В. Д. Подсыпаниным и М. Н. Добровольским в 50–60 годах XX столетия.

Дело в том, что сама логика исследований диктует для дальнейшего развития теоретико-числового метода в приближенном анализе рассматривать вопросы диофантовых приближений алгебраических чисел, то есть те вопросы, которыми в 50–60-ые годы XX столетия занимались В. Д. Подсыпанин и М. Н. Добровольский.

Профессор Н. М. Коробов стоял у истоков двух важнейших начинаний: организации международных конференций по теории чисел в г. Туле и издании нового математического журнала "Чебышевский сборник" .

Именно после беседы с Н. М. Коробовым и А. Б. Шидловским возникла идея организации Первой международной конференции "Современные проблемы теории чисел и её приложения" , которая состоялась 27 лет тому назад в сентябре 1993 года. В избранных трудах этой конференции, опубликованных в Математических заметках в 1994 году вышла очень важная работа Н. М. Коробова по комбинированным сеткам [41].

Н. М. Коробов горячо поддержал идею создания журнала "Чебышевский сборник" , в котором он опубликовал четыре статьи [21], [22], [46], [49]. Последняя статья вышла в свет уже после кончины Н. М. Коробова.

Другим примером влияния Н. М. Коробова на современные исследования могут служить работа [20], в которой обсуждаются актуальные проблемы гиперболической дзета-функции решёток, впервые появившейся в работах Н. М. Коробова 1959–1960 годов. Сам термин ввёл Н. М. Добровольский гораздо позже в 1984 году.

Всё выше сказанное позволяет говорить об определяющей роли, которую трудно переоценить, профессора Н. М. Коробова в судьбе Тульской школы теории чисел.

3. Роль Василия Ильича Нечаева в возрождении Тульской школы теории чисел

11 января 2020 года исполнилось сто лет со дня рождения Василия Ильича Нечаева — известного советского математика, доктора физико-математических наук, профессора, ведущего научного сотрудника Математического института имени В. А. Стеклова Академии наук СССР (РАН), заведующего кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета (МПГУ) с 1978 по 1999 годы.

Его деятельность как педагога, ученного и организатора науки и высшего педагогического образования была многогранна. Она достаточно полно освящена в работе [52].

В этом разделе мы остановимся на одном её аспекте — роль В. И. Нечаева в возрождении Тульской школы теории чисел.

Определенные научные связи с Тульской школой теории чисел у Василия Ильича Нечаева установились ещё 55 лет тому назад, когда В. Д. Подсыпанин и М. Н. Добровольский выступали с докладами по результатам своих исследований по полиномам Туэ и матричным разложениям алгебраических иррациональностей на научно-исследовательском семинаре кафедры теории чисел МГУ под руководством члена-корреспондента АН СССР А. О. Гельфонда в 1965 году. Он давал доброжелательные комментарии и справки во время их выступления.

Развитие этих связей было продолжено уже в 1986 году, когда Василий Ильич согласился взять к себе соискателем В. С. Ванькову, преподавателя Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого.

Профессор М. Д. Гриндлингер в 1981–1983 годах позволил Н. М. Добровольскому в аспирантуре продолжать заниматься теорией чисел по тематике профессора Н. М. Коробова в области теоретико-числового метода в приближенном анализе. Профессор Н. М. Коробова в рамках своего научного семинара в МГУ им. М. В. Ломоносова, который он вёл совместно с Д. А. Митькиным, продолжил руководить научными исследованиями Н. М. Добровольского. Профессор В. И. Нечаев согласился сотрудничать в области подготовки специалистов по теоретико-числовому методу приближенного анализа с Тульским государственным педагогическим институтом им. Л. Н. Толстого и МГУ имени М. В. Ломоносова. Благодаря этим профессорам в Туле после десятилетнего перерыва начала возрождаться теоретико-числовая научная школа, основанная В. Д. Подсыпаниным в 1949 году.

Как мы писали выше, фактически полного перерыва не было. Десять лет прошли в активной подготовке к переходу на новый этап возрождения Тульской школы теории чисел.

За это время В. И. Нечаев хорошо познакомился с Н. М. Добровольским. Защита кандидатской диссертации Н. М. Добровольского была в диссертационном совете МГПИ им. В. И. Ленина и представление диссертации к защите осуществлялось кафедрой теории чисел, заведующим которой был профессор В. И. Нечаев. Он несколько раз слушал выступления Н. М. Добровольского на научно-исследовательском семинаре кафедры теории чисел в МГУ. В частности, после выступления Н. М. Добровольского на этом семинаре с новым доказательством теоремы Рота о квадратичном отклонении сеток он высоко оценил качество этого доказательства и посоветовал его опубликовать. Позднее одна из глав докторской диссертации Н. М. Добровольского была посвящена обобщенной теореме Рота для сеток с весами. Отметим, что тем самым была поставлена точка в длинной истории работы Н. М. Добровольского над теоремой Рота о квадратичном отклонении, так как она была темой его курсовой работы на 4-ом курсе в 1970-71 учебном году.

Поэтому, когда Н. М. Добровольский обратился с просьбой к В. И. Нечаеву взять В. С. Ванькову соискателем, был получен положительный ответ и начался новый этап возрождения Тульской школы теории чисел, который продолжался 13 лет до безвременной кончины профессора В. И. Нечаева 18 февраля 1999 года.

У всех тульских аспирантов Василия Ильича остались самые теплые воспоминания о домашних консультациях, которые он ежемесячно проводил для них. На этих консультациях Василий Ильич прежде всего сосредотачивал свои усилия на тщательной подготовке аспирантов по программе кандидатского экзамена по специальности. Огромное впечатление на тульских аспирантов производила научная библиотека профессора, в которой он быстро находил нужную справку по любому научному вопросу, возникавшему в процессе занятий.

Необходимо отметить, что поддержка Тульской школы теории чисел была более разветвленной. Со стороны МПГУ это сотрудничество осуществлялось профессорами: В. И. Нечаевым, Д. А. Митькиным, С. М. Ворониным, В. Г. Чирским, А. В. Жмулевой. Благодаря этому сотрудничеству были подготовлены кандидатские диссертации по теории чисел:

- В. С. Ванькова "Многомерные теоретико-числовые сетки" (МПГУ, 1992 г. рук. В. И. Нечаев);
- А. Л. Рощеня "Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решеток" (МПГУ, 1998 г. рук. В. И. Нечаев);
- И. Ю. Реброва "Пространство решеток и функции на нем" (МПГУ, 2000 г. рук. В. И. Нечаев, Н. М. Добровольский);
- О. В. Родионова "Обобщенные параллелепипедальные сетки и их приложения" (МПГУ, 2000 г. рук. Д. А. Митькин, Н. М. Добровольский);
- Г. Т. Вронская "Квадратичное отклонение плоских сеток" (МПГУ, 2005 г. рук. Н. М. Добровольский);
- Л. П. Добровольская "Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов" (МПГУ, 2009 г. рук. В. Н. Чубариков);
- А. С. Герцог "Чисто-вещественные биквадратичные алгебраические поля и их приложения" (МПГУ 2012 г. рук. Н. М. Добровольский);
- Е. Д. Ребров "Некоторые теоретико-числовые методы приближенных вычислений" (МГУ, 2013 г. рук. Н. М. Добровольский).

В это же время были успешно защищены ещё две диссертации представителями Тульской школы теории чисел в диссертационном совете МГУ

- М. Н. Добровольский (младший) "Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа" (МГУ, 2009 г. рук. В. Н. Чубариков);
- Н. Н. Добровольский "Гиперболический параметр сеток с весами и его применение" (МГУ, 2014 г. рук. В. И. Иванов).

Отметим один интересный факт. На семинаре под руководством Н. М. Коробова в МГУ в 1992 году в процессе обсуждения диссертации В. С. Ваньковой Василий Ильич вместе с Николаем Михайловичем сформулировали задачу получения асимптотических формул для плоских сеток. Эта задача стала известна как задача Коробова-Нечаева. Её удалось решить Г. Т. Вронской в своей кандидатской диссертации.

Сотрудничество между кафедрой теории чисел МПГУ и кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии ТГПУ им. Л. Н. Толстого по подготовке аспирантов успешно продолжается и сейчас.

Другое важное направление научного сотрудничества связано с организацией и проведением научных конференций сначала по теории чисел, а потом по алгебре и теории чисел.

Василий Ильич Нечаев активно участвовал в организации и проведении этих Международных конференций. Прежде всего надо отметить активную совместную работу профессоров С. Б. Стечкина и В. И. Нечаева по организации первой Международной конференции по теории чисел в Туле в 1993 году.

В. И. Нечаев успел лично принять участие в трёх первых конференциях. На каждой из этих конференций он настаивал на необходимости организации специализированного журнала по теории чисел. К сожалению, ему не удалось дожить то того момента, когда по решению IV-ой Международной конференции, которая проходила в Туле в 2001 году, его мечта была осуществлена и был организован Чебышевский сборник. В настоящее время журнал вошёл в 3-ю квартиль Scopus и уверенно развивается.

4. С. Б. Стечкин и конференции по теории чисел в ТГПУ им. Л. Н. Толстого

Сергей Борисович Стечкин родился 6 сентября 1920 года в семье будущего академика АН СССР Бориса Сергеевича Стечкина в городе Москве. Его отец Б. С. Стечкин родился в г. Туле 24 июля 1891 года.

Вся жизнь С. Б. Стечкина была связана с двумя организациями: с 1939 года с механико-математическим факультетом Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, а с 1949 года с Математическим институтом им. В. А. Стеклова АН СССР.

В 1967 году С. Б. Стечкин начал читать курс математического анализа на первом потоке первого курса 1967 года набора. С этим потоком он не расставался 7 семестров (4 семестра математического анализа, потом 3 семестра функционального анализа).

Наверное, многим студентам этого потока запомнилась лекция на третьем курсе 8 сентября 1970 года, когда в воскресенье 6 сентября исполнилось 50 лет любимому профессору. С. Б. Стечкин был приятно удивлен, войдя в потоковую аудиторию на 16 этаже, где на доске было написано поздравление с днём рождения, а Ира Стенина вручила чудесный букет роз.

Наверное, трудно привести ещё один пример когда заслуженный профессор выступает перед своими студентами с отчетом и анализом своей научной деятельности. Именно такой отчёт и состоялся 50 лет тому назад, когда так удачно сразу после дня рождения студенты поздравили профессора с его юбилеем.

Знакомство Н. М. Добровольского с С. Б. Стечкиным стало более тесным на втором курсе в 1968 году, когда уже 4 декабря на досрочной сдаче экзамена по математическому анализу, который длился 5 часов, было видно, что С. Б. Стечкин знает студента Н. М. Добровольского. Отчасти это объясняется тем, что в параллельной группе учился Б. С. Стечкин, с которым они общались начиная с первого курса, а он, наверное, делился информацией со своим отцом.

Как известно, студенты мех-мата в конце второго курса выбирают кафедру и научного руководителя для специализации на третьем курсе. Н. М. Добровольский пошёл на кафедру теории чисел к Н. М. Коробову. Он всё время ходил на семинары и спецкурсы, которые читал Н. М. Коробов, но на третьем курсе ещё ходил один семестр на семинар по теории приближений к С. Б. Стечкину.

Семинар у С. Б. Стечкина был гораздо более многочисленный, чем у Н. М. Коробова. Это объясняется тем, что традиционно на теорию чисел шло минимальное количество студентов, да и кафедра теории чисел в те времена была самой малочисленной.

В начале года С. Б. Стечкин раздавал всем участникам семинара индивидуальные темы на выбор. Н. М. Добровольский взял тему, связанную с константами Лебега. И первый научный результат, который ему удалось получить, был на семинаре С. Б. Стечкина. Но до публикации дело не дошло, надо было проделать ещё дополнительные исследования и пришлось выбирать

— что делать дальше? Н. М. Добровольский выбрал продолжение работы по курсовой, которая была посвящена отклонению сеток Смоляка. А там работа оказалась совсем непростой и требовала всех усилий, так что на семинар С. Б. Стекина времени не оставалось.

В конце января 1970 года, когда сессия уже закончилась, Н. М. Добровольский и Б. С. Стечкин помогали С. Б. Стечкину перевезти домой коллекцию оттисков статей, подаренных профессору, доктору физико-математических наук Нине Карловне Бари (19.11.1901–15.07.1961) математиками со всего мира. Эту коллекцию передал С. Б. Стечкину его бывший научный руководитель, заведующий кафедрой функционального анализа член-корреспондент АН СССР Дмитрий Евгеньевич Меньшов (18.04.1892–25.11.1988), так как на кафедре в связи с переездом не было места для хранения этой коллекции, а С. Б. Стечкин был страстным библиофилом и хорошо знал Н. К. Бари, с которой сотрудничал, например, их статья [1] была процитирована 70 раз. Тогда Н. М. Добровольский впервые оказался у С. Б. Стечкина дома.

19 января 1971 года С. Б. Стечкин и Н. М. Добровольский встретились в коридоре мехмата (в это день был экзамен по функциональному анализу) и С. Б. Стечкин делился своими впечатлениями от защиты диссертации М. Н. Добровольского, так как он был на защите как член диссертационного совета, а Н. М. Добровольский там не был, так как готовился к экзамену.

После этого был достаточно длительный перерыв в их общении, который возобновился только в конце 80 годов, когда С. Б. Стечкин приехал с группой своих коллег по Математическому институту им. В. А. Стеклова АН СССР в Тулу на конференцию в Тульский политехнический институт, которую проводил профессор Леонид Александрович Толоконников (07.06.1923 — 17.02.1998), с которым они были знакомы ещё по годам учебы в Москве.

Вместе с С. Б. Стечкиным на этой конференции был Сергей Михайлович Воронин (11.03.1946–18.10.1997). Именно на этой конференции Н. М. Добровольский познакомился с С. М. Ворониным, с которым достаточно тесно стал после этого общаться.

Как раз в это время в поле интересов С. М. Воронина попали различные подходы к вопросам численного интегрирования и интерполирования. По этому направлению с 1984 по 1997 год С. М. Воронин опубликовал 8 важных работ в ведущих математических журналах СССР и России таких как Известия РАН. Сер. матем. (4 ст.), Труды МИАН (1 ст.), Математические заметки (2 ст.), Доклады АН СССР (1 ст.).

Важность этих работ объясняется тем, что С. М. Воронин привлёк совершенно новые соображения к построению многомерных квадратурных формул. А именно, в этих работах стали использоваться результаты из теории дивизоров в алгебраических полях, что принципиально отличалось от элементарного метода, которым пользовался Н. М. Коробов для построения параллелепипедальных сеток.

В конце 40-х — начале 50-х годов XX столетия Н. М. Коробов и С. Б. Стечкин были дружны и часто обменивались оттисками своих работ с дарственными надписями. Позднее их пути разошлись. Парадоксы жизни проявились в том, что С. Б. Стечкин скончался 22.11.1995 года накануне дня рождения Н. М. Коробова 23.11.1995, когда Коробову исполнилось 78 лет, который ещё прожил 9 лет, продолжая активно работать.

В конце ноября 1992 года Н. М. Коробов неожиданно сообщил Н. М. Добровольскому, что ему нравится что он делает в последнее время и считает, что пора готовить докторскую диссертацию. Д. А. Митькин раньше объяснял, что надо обязательно выступить в различных научных центрах и на Всероссийской конференции. Андрей Борисович Шидловский (13.08.1915–23.03.2007), который был с 1968 года заведующим кафедрой теории чисел на мех-мате МГУ, на вопрос о ближайшей конференции ответил, что вроде бы никаких не планируется.

Возвращаясь после семинара вместе с В. С. Ваньковой в Тулу, Н. М. Добровольский в электричке вдруг подумал, а что если такую конференцию организовать в Туле? Это было в пятницу 29 ноября 1992. Первым идею о проведении конференции поддержал заведующий кафедрой Информатики и вычислительной техники профессор А. Р. Есаян, на которой в то время работал Н. М. Добровольский, а затем вновь избранный ректор Надежда Анатольевна Шайденко (23.11.1952). Единственное её требование было, чтобы это была Всероссийская конференция.

После этого встал вопрос о председателе программного комитета, так как в это время среди теоретико-числовиков не было явного лидера, который согласился бы взяться за организацию такой конференции в то непростое время. Другой вопрос был связан с печатью избранных трудов конференции.

И здесь сработала ассоциация. Н. М. Добровольский ещё по рассказам отца знал об участии С. Б. Стечкина в конференциях по теории чисел, с другой стороны, С. Б. Стечкин был главным редактором академического журнала "Математические заметки", который он основал в 1967 году. Уже 4 декабря Н. М. Добровольский звонил С. Б. Стечкину по поводу своего предложения. С. Б. Стечкин просил перезвонить через несколько дней. На следующей неделе он дал своё согласие, а уже 11 декабря Н. М. Добровольский был впервые на квартире С. Б. Стечкина в Коньково. Когда С. Б. Стечкин представлял Н. М. Добровольского своей младшей дочери Валерии, то сказал, что теперь он будет ездить к нему каждую пятницу как на работу. Так и произошло. Началась долгая и кропотливая работа по организации конференции.

Для Н. М. Добровольского подготовка к конференции совпала с ещё одной новой и сложной работой. На майском совете университета его утвердили заведующем новой кафедры "Информационные технологии", надо было организовывать деятельность этой обще-университетской кафедры. Но это давало дополнительный административный ресурс, который помогал успешно справиться с подготовкой конференции.

С. Б. Стечкин очень серьёзно подошёл к проблеме организации конференции. Последняя всесоюзная конференция по теории чисел была в сентябре 1985 года в Тбилиси. После этого была относительно небольшая Республиканская конференция в 1990 году в Ташкенте, которую организовал Александр Федорович Лаврик (05.11.1927–28.05.2010), который в 1989 году стал член-корреспондентом Академии наук Узбекистана. С. Б. Стечкин сразу поднял уровень конференции до международного, что особенно поразило молодого ректора Н. А. Шайденко. Для этого он связался с Пал Эрдёшем, который дал согласиее стать почётным председателем программного комитета, и сумел дать объявление в Mathematical Reviews о проведении Международной конференции "Теория чисел: современные проблемы и приложения".

Несмотря на очень сложную внутриполитическую обстановку в стране (накануне открытия конференции был опубликован небезызвестный указ 1400) конференция прошла очень успешно.

Интересный эпизод произошёл во время проведения культурной программы, когда в Тульском музее оружия экскурсанты подошли к витрине, посвящённой Игорю Яковлевичу Стечкину (15.11.1922–28.11.2001) двоюродному брату С. Б. Стечкина и конструктору знаменитого АПС (автоматический пистолет Стечкина). Около витрины С. Б. Стечкин воскликнул: "Теперь вы понимаете, почему конференция в Туле!"

К открытию конференции был издан сборник тезисов, а после конференции в 1994 году во втором выпуске 55 тома Математических заметок были изданы избранные труды конференции. Именно в этом выпуске вышла принципиальная работа Н. М. Коробова по комбинированным сеткам [41].

Таким образом, двацать семь лет тому назад была заложена традиция проведения Международных конференций по теории чисел в новой России.

В сентябре 2020 прошла XVIII международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории", которая была посвящена столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и

С. Б. Стечкина. Впервые, в условиях коронавируса, конференция проходила в режиме ВКС. Несмотря на такие необычные условия проведения, конференция вызвала значительный интерес у математиков. На сайте конференции зарегистрировалось 316 участников, а сборник материалов конференции составил увесистый том в 452 страницы формата А4.

5. Чебышевский сборник

Как уже писалось выше, по решению IV Международной конференции «Современные проблемы теории чисел и ее приложения», посвященной 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова, силами представителей Тульской школы теории чисел начал издаваться новый математический журнал «Чебышевский сборник». Первые два тома были изданы на средства от гранта РФФИ на проведение указанной конференции. А дальше финансирование издания журнала до 2015 года проходило из средств грантов РФФИ, которые регулярно выигрывал Н. М. Добровольский для проведения исследований по теории чисел. Ядром творческого коллектива по выполнению этих проектов, поддержанных грантами РФФИ, были С. А. Пихтильков и А. Р. Есаян. Благодаря совместной работе этих трёх профессоров и проходила успешная деятельность Тульской школы теории чисел по проведению исследований по теоретико-числовому методу в приближенном анализе, проведению международных конференций, по изданию научного журнала.

На сегодняшний день научно-теоретический журнал «Чебышевский сборник» является частью мирового научного пространства. Журнал индексируется в электронных базах данных MathSciNet Американского математического общества и Zentralblatt MATH издательства Springer. В 2017 году научно-теоретический журнал «Чебышевский сборник» включен в международную реферативную базу данных Scopus.

Журнал был отобран в число 100 научных журналов в рамках проекта поддержки программ развития научных журналов МИНОБРНАУКИ РФ и АНРИ, а по итогам 2018 года «Чебышевский сборник» вошел уже в топ-70 научных журналов.

По результатам ранжирования научных журналов базы данных Scopus, индексирующей около 21000 журналов, в 2019 году «Чебышевский сборник» попал в квартиль Q3, что подтверждает рост уровня цитируемости и востребованности журнала мировым научным сообществом.

За двадцать лет существования журнала вышло 20 томов из 75 выпусков. В нём опубликовалось более 750 авторов. Вышло около 1000 статей.

В создании журнала Чебышевский сборник значительную роль сыграл Сергей Алексеевич Пихтильков (2.03.1953–24.12.2015). Он взял на себя нелёгкую задачу сформировать первый состав редколлегии. Стал её первым ответственным секретарём. Первые девять лет вся работа по выпуску Чебышевского сборника и созданию его первого сайта легла на плечи С. А. Пихтилькова и его жены Ольги Александровны Пихтильковой (23.01.1973).

В настоящее время функционирует третья версия сайта, созданная лабораторией Elpub Национального электронно-информационного консорциума (НП «НЭИКОН», НЭИКОН).

Одна из проблем развития журнала состоит в том, что ни на одном сайте, в том числе и на Math-Net.Ru, нет электронных версий всех выпусков журнала. А значит, в полной мере не выполнен принцип журнала открытого доступа, когда все материалы журнала доступны любому пользователю.

Поэтому одной из ближайших задач становится перенос и на Общероссийский портал Math-Net.Ru [56] и на официальный сайт журнала Чебышевский сборник [57] и на сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU [55] всех выпусков журнала.

Параллельно сайту Чебышевского сборника развивалась система ПОИВС (Проблемно Ориентированная Информационно-Вычислительная Система) http://poivs.tsput.ru/rus

Несомненно, что главным достижением Тульской школы теории чисел является, помимо чисто математической продукции, успешное функционирование триумвирата Конференции — ПОИВС — журнал.

6. Основные научные направления исследований Тульской школы теории чисел

Если попытаться коротко охарактеризовать деятельность Тульской школы теории чисел за последние 45 лет, то это развитие теоретико-числового метода в приближенном анализе.

На протяжении всех 45 лет деятельности в возрожденной Тульской школе теории чисел прежде всего исследования были сосредоточены на решении задач по теории равномерного распределения, решёткам, сеткам, квадратурным формулам для классов E_s^α и H_s^α, и по теории гиперболической дзета-функции решёток. Об этом можно судить уже по первым работам Н. М. Добровольского [6]–[13].

В теории равномерного распределения было введено важное понятие *группы преобразований сеток* (см. [14]). Неожиданным был результат, что средние по орбитам многомерных сеток для двух групп преобразований — группа арифметических сдвигов и группа поразрядных сдвигов — совпадают [15]–[16].

Всякое продвижение в теории квадратурных формул, обычно, позволяет получить новые результаты по интерполяционным формулам, по методам решения интегральных уравнений и уравнений с частными производными. Весь этот спектр исследований присутствует в работах представителей Тульской школы теории чисел.

Необходимо отметить следующее обстоятельство. Если мы рассматриваем задачу численного интегрирования функций из классов E_s^α и H_s^α, то достаточно один раз свести задачу численного интегрирования к задаче теории чисел, а дальше исследования сосредоточиваются на исследовании свойств либо дзета-функции сеток, либо гиперболической дзета-функции решёток. И мы получаем задачу на стыке аналитической теории чисел и геометрии чисел. Неудивительно, что последние исследования по теоретико-числовому методу в приближенном анализе, проводимые в последнее время в Тульской школе теории чисел, на первый взгляд, далеки от исходной задачи приближенного анализа. Но это не так. В силу логики развития предметной области, для дальнейшего продвижения непосредственно в теоретико-числовом методе приближенного анализа необходимо проводить исследования по решению некоторых фундаментальных задач теории чисел, так как они непосредственно связаны с основными объектами теоретико-числового метода такими, как решётка, сетка, дзета-функция сеток, гиперболическая дзета-функция решёток.

Именно поэтому в последнее время внимание исследователей в Тульской школе теории чисел сосредоточено на изучении приближения одних решёток другими в метрическом пространстве решёток. Естественно, что возникает вопрос о построении и изучении гладкого многообразия решёток, что необходимо для понимания дифференциальных свойств основных объектов.

Так как дзета-функция сеток и гиперболическая дзета-функция решёток являются рядами Дирихле, то естественным образом возникла необходимость изучения дзета-функции моноидов натуральных чисел. Здесь мы столкнулись с новым явлением, которое связано с появлением новых классов периодических функций. Эти классы дают примеры функций, которые ранее не изучались в теоретико-числовом методе в приближенном анализе.

Именно логика научного исследования привела к необходимости современных представителей Тульской школы теории чисел вернуться к вопросам приближения алгебраических чисел. Это те вопросы, которыми занимались В. Д. Подсыпанин и М. Н. Добровольский (старший) на первом этапе развития Тульской школы теории чисел. Здесь удалось обнаружить совершенно неожиданный результат. Было установлено, что для любой вещественной алгебраической иррациональности, начиная с некоторого места все остаточные дроби в разложении в цепную дробь являются либо приведенными алгебраическими иррациональностями (если алгебраическая иррациональность из чисто вещественного алгебраического поля), либо обобщённым числом Пизо.

Здесь мы сталкиваемся с той ситуацией, о которой говорил профессор С. Б. Стечкин студентам на своих лекциях, что формула умнее математика, который её написал. Она задаёт новые вопросы и открывает новые направления исследований. Применительно к алгебраическим числам это означало, что надо изучать не только приближение к алгебраическому числу, но и к совокупности всех его сопряженных чисел.

7. Заключение

Из материала статьи видно очередное подтверждение закона *"об интеллектуальной эстафете"*, согласно которому развитие научных направлений происходит по линии от учителей к ученикам. И если интеллектуальная эстафета обрывается, то развитие останавливается.

В качестве примера, иллюстрирующего последнее утверждение, можно привести исторические исследования по математике в Тульском регионе. С 1952 года по 1965 год в Туле работал один из корифеев отечественной истории математики профессор, доктор физико-математических наук Марк Яковлевич Выгодский (2.10.1898–26.09.1965). М. Я. Выгодский не успел создать школу по истории математики в Туле. В ТГПИ им. Л. Н. Толстого после кончины М. Я. Выгодского работала по истории математики только Варвара Ивановна Антропова, которая была ученицей доктора физико-математических наук, профессора Адольфа Павловича Юшкевича (15.07.1906–17.07.1993). После её смерти в Туле вообще прекратились исследования по истории математики. И только в последнее время по инициативе Н. М. Добровольского такие исследования были возобновлены, так как это диктовалось потребностями развития Тульской школы теории чисел и реализации принципа интеллектуальной эстафеты в области теоретико-числового метода в приближенном анализе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. К. Бари, С. Б. Стечкин. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. ММО, 5, ГИТТЛ, М., 1956, С. 483–522.

2. Воронин С. М. О квадратурных формулах // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58. № 5. С. 189–194.

3. Воронин С. М. О построении квадратурных формул // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59. № 4.

4. Воронин С. М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Мат. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 34–41.

5. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2017. Том 18 № 4(64). С. 6-85.

6. Добровольский Н. М. Эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении // УМН. Т. 39 (123). 1984. С. 155–156.

7. Добровольский Н. М. Оценки отклонений модифицированных сеток Хэммерсли — Рота. / Деп. в ВИНИТИ 23.02.84, N 1365–84.

8. Н. М. Добровольский Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6089–84.

9. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

10. Н. М. Добровольский О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

11. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. / Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

12. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: / Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

13. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

14. Добровольский Н. М. Группы преобразований многомерных сеток // Современные проблемы теории чисел: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1993. С. 46.

15. Добровольский Н. М. Средние по орбитам многомерных сеток // Мат. заметки. 1995. Т. 58, вып. 1. С. 48–66.

16. Добровольский Н. М. Means over of Multidimensional Lattices. // Mathematical Notes. Vol. 58. No 1. 1995. P. 710–721.

17. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения: / Дис. ... док. физ.–мат. наук. Москва, 2000.

18. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения к приближенному анализу // Сб. IV Международная конференция „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова. Тула, 10—15 сентября, 2001 Актуальные проблемы Ч. I. М. МГУ, 2002. С. 54—80.

19. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

20. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

21. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток. // Чебышевский сборник, Т. 2, Тула, 2001, С. 41–53.

22. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002 Т. 3, вып. 1(3). С. 41–48.

23. Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. Е. Устян, Ф. В. Подсыпанин, Е. В. Подсыпанин. К 105–летнему юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанина (16.01.1910–11.10.1968) // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1, С. 301–316.

24. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Устян А. Е., Подсыпанин Ф. В., Подсыпанин Е. В. Тульская школа теории чисел (к 105-летнему юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанина (16.01.1910 - 11.10.1968) и 65-летию Тульской школы теории чисел) // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, Дополнительный том. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 20-85.

25. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. 115. № 6. С. 1062–1065.

26. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

27. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, № 2. С. 235–238.

28. Коробов Н. М. О некоторых теоретико-числовых методах приближенного вычисления кратных интегралов. Резюме докл. на заседании Моск. мат. об-ва. // УМН. 1959. Т. 14, вып. 2 (86). С. 227–230.

29. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

30. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.

31. Коробов Н. М. Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, 1961. Т. 60, Изд-во АН СССР, М., С. 195–210.

32. Коробов Н. М. О применении теоретико-числовых сеток // Вычислительные методы и программирование: // Сб. Моск. ун-т. 1962. С. 80–102.

33. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах в приближенном анализе // Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники. М.: Машгиз. 1963.

34. Коробов Н. М. О некоторых задачах теории чисел, возникающих из потребностей приближенного анализа: Сообщение на IV математическом съезде (не опубл.).

35. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

36. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22, 3 (135). С. 83 — 118.

37. Коробов Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 267. 1982. N2. С. 289 — 292.

38. Коробов Н. М. Об одной оценке А. О. Гельфонда // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1983. N3. С. 3 — 7.

39. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // Тезисы докладов всесоюзной конференции „Теория трансцендентных чисел и ее приложения“. 1983. С. 62.

40. Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.

41. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83—90.

42. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах приближенного интегрирования // Историко-матем. исследования. СПб., 1994. Вып. XXXV. С. 285—301.

43. Коробов Н. М. Специальные полиномы и их приложения // Диофантовы приближения. Матем. записки. 1996. Т. 2. С. 77-89.

44. Коробов Н. М. О конечных цепных дробях // УМН. 1998. Т. 52. 3. С. 167-168.

45. Коробов Н. М. О теоретико-числовых интерполяционных формулах // Историко-матем. исследования. М.: „Янус // К“. 2001. Вып. 6 (41). С. 266-276.

46. Коробов Н. М. О некоторых свойствах специальных полиномов // Труды IV Международной конференции "Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ Чебышевский сборник. 2001. Т. 1. С. 40–49.

47. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики “ Тула. 2002. с. 39–40.

48. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

49. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский. Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 105–128.

50. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818–821.

51. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1971.

52. В. Н. Чубариков, В. Г. Чирский, Е. И. Деза, Ю. Н. Баулина, Л. В. Котова, Е. В. Неискашова, В. С. Ванькова, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. Л. Рощеня. Василий Ильич Нечаев. К 100-летнему юбилею // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 404–414.

53. Roth K. F. On irregularities of distribution // Mathematika. 1. 1954, P. 73–79.

54. Roth K. F. On irregularities of distribution – IV, // Acta Arithm. 37. 1980. P. 65–75.

55. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU —
https://www.elibrary.ru/title_about.asp?id=32553

56. Общероссийский портал Math-Net.Ru —
http://www.mathnet.ru/index.phtml/?option_lang=rus

57. Сайт журнала Чебышевский сборник — https://www.chebsbornik.ru/jour/index

REFERENCES

1. N. K. Bary, S. B. Stechkin, 1956, "Best approximations and differential properties of two conjugate functions" , *Tr. MMO, 5, GITTL*, M., P. 483–522.
2. Voronin, S.M. 1994, "On quadrature formulas" , *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya*, vol. 58, no. 5, pp. 189–194.
3. Voronin, S.M. 1995, "About the construction of quadrature formulas" , *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya*, vol. 59, no. 4.
4. Voronin, S.M. & Temirgaliev, N. 1989, "On quadrature formulas associated to divisors of the field of Gaussian numbers", *Matematicheskie zametki*, vol. 46, no. 2, pp. 34–41.
5. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" , *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.
6. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "An effective proof of Roth's quadratic deviation theorem", Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 39(123), pp. 155–156.
7. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Estimates of variance of modified grids Hammersly Rota", Dep. v VINITI, no. 1365– 84.
8. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", *Dep. v VINITI*, no. 6089–84.
9. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", *Dep. v VINITI*, no. 6091–84.
10. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", *Dep. v VINITI*, no. 6090–84.
11. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Number-theoretic meshes and their applications", Ph.D. Thesis, Tula, Russia.
12. Dobrovol'skii, N. M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Abstract of Ph.D. dissertation, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.
13. Dobrovol'skii, N. M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Teoriya chisel i ee prilozheniya: Tezisy dokladov Vsesoyuznoj konferentsii, Tbilisi, USSR, pp. 67–70.
14. Dobrovol'skii, N. M. 1993, "Groups of transformations of multidimensional grids", Sovremennye problemy teorii chisel: Tezisy dokladov Mezhdunarodnoj konferentsii, Tula, Russia, p. 46.
15. Dobrovol'skii, N. M. 1995, "The average orbits of multidimensional grids", Matematicheskie zametki, vol. 58, no. 1, pp. 48–66.
16. Dobrovol'skii, N. M. 1995, "Means over of Multidimensional Lattices", Mathematical Notes, vol. 58. no. 1, pp. 710–721.
17. Dobrovol'skii, N. M. 2000, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications", D. Sc. Thesis, Tula State Pedagogical University, Tula, Russia.

18. Dobrovol'skii, N. M. 2001, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications to approximate analysis", Sbornik IV Mezhdunarodnaya konferentsiya "Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya", posvyashhennaya 180-letiyu P. L. Chebysheva i 110-letiyu I. M. Vinogradova (A collection of the IV international conference "Modern problems of number theory and its applications", dedicated to 180th anniversary of P. L. Chebyshev and 110th anniversary of I. M. Vinogradov), Tula, Russia, 10-15 September, pp. 54–80.

19. Dobrovol'skii, N. M. 2005, Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i ikh prilozheniya [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni L.N.Tolstogo, Tula, Russia.

20. Dobrovol'skii, N. M. 2015, "On modern problems of the theory of hyperbolic Zeta function of lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 16, no. 1, pp. 176–190.

21. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2001, "The optimal coefficients for mixed meshes", Chebyshevskij sbornik, vol. 2, pp. 41–53.

22. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2002, "On the error estimation of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 1(3), pp. 41–48.

23. N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. E. Ustyan, F. V. Podsypanin, E. V. Podsypanin, 2015, "The 105-year anniversary of Vladimir Dmitrievich Podsypanin (16.01.1910 – 11.10.1968)", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 16, no. 1(53), pp. 301–316.

24. N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. E. Ustyan, F. V. Podsypanin, E. V. Podsypanin, 2015, "Tula school of number theory (for the 105th anniversary of Vladimir Dmitrievich Podsypanin (16.01.1910-11.10.1968) and the 65th anniversary of the Tula school of number theory)", *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications Proceedings of the XIII International conference*, Additional volume. Tula state pedagogical University named after L. N. Tolstoy. P. 20-85.

25. Korobov, N.M. 1957, "Approximate evaluation of multiple integrals by using methods of the theory of numbers", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 115, no. 6, pp. 1062–1065.

26. Korobov, N.M. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.

27. Korobov, N.M. 1959, "On approximate solution of integral equations", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 128, no. 2, pp. 235–237.

28. Korobov, N.M. 1959, "On some number-theoretic methods for approximate computation of multiple integrals. Abstract of the report at the meeting of the Moscow mathematical society", Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 14, no. 2(86), pp. 227–230.

29. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

30. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

31. Korobov, N. M., 1961, "Application of number-theoretic nets to integral equations and interpolation formulas", *Sbornik statej. Posvyashhaetsya akademiku Mikhailu Alekseevichu Lavrent'evu k ego shestidesyatiletiyu, Trudy MIAN SSSR*, vol. 60, pp. 195–210.

32. Korobov, N.M. 1962, “On the application of number-theoretic grids”, Vychislitel’nye metody i programmirovanie, pp. 80–102.

33. Korobov, N.M., 1963, "On number-theoretic methods in approximate analysis" , *Questions of computational mathematics and computer engineering*, M.: Mashgiz.

34. Korobov, N.M., 1961, "On some problems of number theory arising from the needs of approximate analysis" *Message at the IV mathematical Congress (not published).*

35. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

36. Korobov, N.M. 1967, “About some questions of the theory of Diophantine approximations”, Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 22, no. 3(135), pp. 83–118.

37. Korobov, N.M. 1982, “On the calculation of optimal coefficients”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 267, no. 2, pp. 289–292.

38. Korobov, N.M. 1983, “About one assessment of A. O. Gelfond”, Vestnik MGU. Seriya 1. Matematika, mekhanika, no. 3, pp. 3–7.

39. Korobov, N.M. 1983, “About some questions of the theory of Diophantine approximations”, Tezisy dokladov vsesoyuznoj konferentsii “Teoriya transtsendentnykh chisel i ee prilozheniya”, p. 62.

40. Korobov, N.M. 1989, Trigonometricheskie summy i ikh prilozheniya [Trigonometric sums and their applications], Nauka, Moscow, Russia.

41. Korobov, N.M. 1994, “Quadrature formulas with combined grids”, Matematicheskie zametki, vol. 55, no. 2, pp. 83–90.

42. Korobov, N.M. 1994, “On numerical-theoretic methods of approximate integration”, Istoriko-matematicheskie issledovaniya, no. XXXV, pp. 285–301.

43. Korobov, N.M. 1996, “Special polynomials and their applications”, Diofantovy priblizheniya. Matematicheskie zapiski, vol. 2, pp. 77–89.

44. Korobov, N.M. 1998, “About the end of the chain fractions”, Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 52, no. 2, pp. 167–168.

45. Korobov, N.M. 2001, “On number-theoretic interpolation formulas”, Istoriko-matematicheskie issledovaniya, no. 6(41), pp. 266–276.

46. Korobov, N.M. 2001, “On some properties of special polynomials”, Trudy IV Mezhdunarodnoj konferentsii “Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya” Chebyshevskij sbornik (Proceedings of the IV international conference "Modern problems of number theory and its applications” Chebyshev collection), vol. 1, pp. 40–49.

47. Korobov, N.M. 2002, “About one estimation in the method of optimal coefficients”, Tezisy IV Vserossijskoj konferentsii “Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki”, pp. 39–40.

48. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

49. Korobov, N. M. & Dobrovol'skii, N. M., 2007, "Optimality criteria and algorithms for finding optimal coefficients" , *Chebyshevskij sbornik*, vol. 8, no. 4(24). P. 105–128.

50. Frolov, K. K. 1976, “Estimates from above of the error of quadrature formulas on function classes“, *DAN SSSR*, no.4, pp. 818–821.

51. Frolov, K. K. 1979, “Quadrature formulas on function classes“, Ph.D. Thesis, Computing Center of the Russian Academy of Sciences of the USSR, Moscow, Russia.

52. V. N. Chubarikov, V. G. Cherskii, E. I. Deza, I. N. Baoulina, L. V. Kotova, E. V. Neiskashova, V. S. Vankova, N. M. Dobrovolskii, I. Yu. Rebrova, A. L. Roshchenya, 2020, "Vassiliy Ilyich Nechaev. To the 100-th anniversary Chebyshevskii sbornik, vol. 21, no. 1, pp. 404–414.

53. Roth K. F., 1954, "On irregularities of distribution" , *Mathematika*. 1. P. 73–79.

54. Roth K. F., 1980, "On irregularities of distribution – IV" , *Acta Arithm.* 37. P. 65–75.

55. Scientific electronic library eLIBRARY.RU —
https://www.elibrary.ru/title_about.asp?id=32553

56. All-Russian portal Math-Net.Ru — http://www.mathnet.ru/index.phtml/?option_lang=rus

57. The website of the journal Chebyshevskii sbornik — https://www.chebsbornik.ru/jour/index

Получено 27.06.20 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-218-226

О приближении средними Фейера классов аналитических периодических функций

О. Г. Ровенская, $\boxed{\text{О. А. Новиков}}$

Ольга Геннадиевна Ровенская — кандидат физико-математических наук, Донбасская государственная машиностроительная академия (г. Краматорск, Украина).
e-mail: rovenskaya.olga.math@gmail.com

$\boxed{\textbf{Олег Александрович Новиков}}$ — кандидат физико-математических наук, Донбасский государственный педагогический университет (г. Славянск, Украина).
e-mail: sgpi@slav.dn.ua

Аннотация

Работа посвящена вопросам приближения периодических функций высокой гладкости средними арифметическими сумм Фурье. Наиболее естественным и простым примером линейного процесса аппроксимации периодических непрерывных функций действительной переменной является приближение елементами последовательности частичных сумм ряда Фурье. Известно, что последовательности частичных сумм ряда Фурье не являются равномерно сходящимися на всем пространстве C 2π-периодических непрерывных функций. Поэтому значительное число работ данного направления посвящено изучению аппроксимативных свойств других методов приближения, которые для заданной функции f образуются с помощью некоторых преобразований частичных сумм ее ряда Фурье, и позволяют построить последовательности тригонометрических полиномов, которые равномерно сходятся для каждой функции $f \in C$. В частности, на протяжении последних десятилетий интенсивно изучаются суммы Валле Пуссена и суммы Фейера. В настоящее время в публикациях этой тематики накоплено значительное количество фактического материала. Одним из наиболее важных направлений в этой области является изучение асимптотического поведения верхних граней уклонений средних арифметических сумм Фурье по различным классам периодических функций. Методы исследования интегральных представлений уклонений тригонометрических полиномов, которые порождаются линейными методами суммирования рядов Фурье, возникли и получили свое развитие в работах С.М. Никольского, С.Б. Стечкина, Н.П. Корнейчука, В.К. Дзядыка и их учеников.

Целью работы является систематизация известных результатов, касающихся приближения классов периодических функций высокой гладкости средними арифметическими сумм Фурье, и представление новых фактов, полученных для их частных случаев.

В работе изучено аппроксимативные свойства сумм Фейера на классах периодических функций, которые можно регулярно продолжить в соответствующую полосу комплексной плоскости. Получена асимптотическая формула для верхних граней уклонений в равномерной метрике сумм Фейера на классах интегралов Пуассона. Полученная формула обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова-Никольского без дополнительных условий.

Ключевые слова: асимптотическое равенство, сумма Фейера, интеграл Пуассона.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

О. Г. Ровенская, О. А. Новиков. О приближении средними Фейера классов аналитических периодических функций // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 218–226.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-218-226

On approximation of classes of analytic periodic functions by Fejer means

O. G. Rovenska, $\boxed{\text{O. A. Novikov}}$

Olga Gennadievna Rovenskaya — PhD, Donbas State Engeneering Academy (Kramatorsk, Ukraine).
e-mail: rovenskaya.olga.math@gmail.com
$\boxed{\textbf{Oleg Alexandrovich Novikov}}$ — PhD, Donbass State Pedagogical University (Slavyansk, Ukraine).
e-mail: sgpi@slav.dn.ua

Abstract

The paper is devoted to the approximation of periodic functions of high smoothness by arithmetic means of Fourier sums. The simplest and natural example of a linear process of approximation of continuous periodic functions of a real variable is the approximation of these functions by partial sums of the Fourier series. However, the sequences of partial Fourier sums are not uniformly convergent over the entire class of continuous 2π-periodic functions. In connection with this, a significant number of papers is devoted to the study of the approximative properties of other approximation methods, which are generated by certain transformations of the partial sums of Fourier series and allow us to construct sequences of trigonometrical polynomials that would be uniformly convergent for each function $f \in C$. In particular, over the past decades, de la Vallee Poussin sums and Fejer sums have been widely studied. Today, publications have accumulated a large amount of factual material. One of the most important directions in this field is the study of the asymptotic behavior of upper bounds of deviations of arithmetic means of Fourier sums on different classes of periodic functions. Methods of investigation of integral representations of deviations of trigonometric polynomials generated by linear methods of summation of Fourier series, were originated and developed in the works of S.M. Nikolsky, S.B. Stechkin, N.P. Korneichuk, V.K. Dzadyk and others.

The aim of the work is to systematize known results related to the approximation of classes of periodic functions of high smoothness by arithmetic means of Fourier sums and to present new facts obtained for particular cases.

and to present new approximative properties of Fejer sums on the classes of periodic functions that can be regularly extended into the corresponding strip of the complex plane. Under certain conditions, we obtained asymptotic formulas for upper bounds of deviations in the uniform metric of Fejer sums on Poisson integrals classes. The deduced formula provides a solution of the corresponding Kolmogorov-Nikolsky problem without any additional conditions.

Keywords: asymptotic equation, Fejer sum, Poisson integral.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

O. G. Rovenska, O. O. Novikov, 2020, "On approximation of classes of analytic periodic functions by Fejer means", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 218–226.

1. Введение

Пусть $C^q_{\beta,\infty}$ — множество непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, которые с точностью до константы можно задать с помощью свертки

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)P^q_\beta(t),$$

где

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}), \quad q \in (0;1), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

— ядро Пуассона, функция $f^q_\beta(t)$ почти всюду удовлетворяет условию $|f^q_\beta(t)| \leq 1$. Известно, (напр., [1, с. 31]) что классы $C^q_{\beta,\infty}$ содержат функции $f(x)$, для которых возможно аналитическое продолжение $f(z) = f(x+iy)$ в полосу комплексной плоскости

$$|\mathrm{Im}\ z| \leqslant \ln\frac{1}{q}.$$

Суммы Валле Пуссена для заданной функции $f \in L$ определяются соотношением

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x),$$

где $S_n(f;x)$ — частичные суммы ряда Фурье функции f. В случае, когда $p=1$ суммы Валле Пуссена совпадают с суммами Фурье, а при $p=n$ — с суммами Фейера функции f

$$V_{n,n}(f;x) = \sigma_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x).$$

Вопросы, связанные с исследованием асимптотического поведения верхних граней уклонений тригонометрических полиномов $V_{n,p}(f;x)$ и их частных случаев на классах интегралов Пуассона, изучались во многих работах. В 1946 г. С.М. Никольским [2] было получено асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) = \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x) - S_n(f;x)||_C = \frac{8K(q)}{\pi^2}q^n + O(1)\frac{q^n}{n},$$

где

$$K(q) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода, $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n. В 1980 г. С.Б. Стечкин [3] уточнил этот результат:

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) = \frac{8K(q)}{\pi^2}q^n + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)},$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n и q. Отметим, что приведенные равенства являются асимптотически точными при любых значениях параметров, которые они содержат. Аналогичные задачи для классов периодических функций $C^q_\beta H_\omega$, которые учитывают более тонкие свойства функций по сравнению с классами $C^q_{\beta,\infty}$, были решены А.И. Степанцом в работах [4, 5].

Асимптотическая формула для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена на классах $C^q_{\beta,\infty}$ в случае $n-p\to\infty$, $p\to\infty$ получена в работе В.И. Рукасова, С.О. Чайченко [6] (также [7])

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};V_{n,p}\right)=\sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}}||f(x)-V_{n,p}(f;x)||_C=$$

$$=\frac{4}{\pi(1-q^2)}\frac{q^{n-p+1}}{p}+O(1)\left[\frac{q^n}{(1-q^2)p}+\frac{q^{n-p+1}}{(1-q)^3(n-p)p}\right],$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n, p, q.

В 2004 г. А.С. Сердюк [8] доказал более общую формулу

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};V_{n,p}\right)=\frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p}+O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

где

$$K_{q,p}=\int\limits_0^\pi\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}}{1-2q\cos pt+q^2}dt,\quad s=s(p)=\begin{cases}1, & p=1,\\ 3, & p=2,3,\ldots,\end{cases}$$

$O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n, p и q. В случае произвольного $p=1,2,\ldots,n$ поведение величины $K_{q,p}$ определяется следующим соотношением, полученным в [9]:

$$K_{q,p}=2\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}K(q^p).$$

Вопросы приближения классов интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена рассмотрены в работах [10, 12, 11].

В работе [13] (также [14]) авторами получено асимптотическое равенство для верхних граней уклонений сумм Фейера на классах аналитических функций $C^q_{\beta,\infty}$ в случае $\beta=0$ и $q\in(0;q_0]$, $q_0=\sqrt{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}}\approx 0,346$

$$\mathcal{E}\left(C^q_{0,\infty},\sigma_n\right)=\sup_{f\in C^q_{0,\infty}}||f(x)-\sigma_n(f;x)||_C=\frac{4q}{\pi n(1+q^2)}+O(1)\frac{q^n}{n},$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n.

На классах аналитических функций изучались аппроксимативные свойства и других приближающих методов [15, 16, 17].

В данной работе получено асимптотическое равенство для величин

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty};\sigma_n\right)=\sup_{f\in C^q_{1,\infty}}||f(x)-\sigma_n(f;x)||_C.$$

2. Результат

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть $q\in(0;1)$. Тогда при $n\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty},\sigma_n\right)=\frac{4q}{\pi n(1-q^2)}+O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3},\tag{1}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n, q.

Доказательство.
Обозначим

$$\delta_n(f;x) = f(x) - \sigma_n(f;x) = f(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\rho_k(f;x), \tag{2}$$

где

$$\rho_k(f;x) = f(x) - S_k(f;x).$$

Учитывая, что $f \in C^q_{1,\infty}$ величина $\rho_m(f;x)$ может быть представлена в виде

$$\rho_m(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t)\sum_{k=m+1}^{\infty} q^k \sin ktdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t)\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+m+1}\sin(k+m+1)tdt =$$

$$= \frac{q^{m+1}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t)\left(\sin(m+1)t\sum_{k=0}^{\infty} q^k\cos kt + \cos(m+1)t\sum_{k=0}^{\infty} q^k \sin kt\right)dt. \tag{3}$$

Используя формулы (напр., [1, с. 123])

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k\cos kt = \frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k\sin kt = \frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2},$$

равенство (3) можно переписать в следующем виде

$$\rho_m(f;x) = \frac{q^{m+1}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t)\left\{\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\sin(m+1)t + \frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\cos(m+1)t\right\}dt. \tag{4}$$

Объединяя (2) и (4), получим

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_1^q(x+t)}{1-2q\cos t+q^2}\sum_{k=1}^{n} q^k(\sin kt - q\sin(k-1)t)dt. \tag{5}$$

Используя следствия из формулы Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

и выполняя элементарные преобразования, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} q^k(\sin kt - q\sin(k-1)t) = \sum_{k=1}^{n} q^k\left(\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i} - q\frac{e^{i(k-1)t}-e^{-i(k-1)t}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\left(qe^{it}\right)^k - \left(qe^{-it}\right)^k\right] - q^2\left[\left(qe^{it}\right)^{k-1} - \left(qe^{-it}\right)^{k-1}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{\left[\frac{qe^{it}}{1-qe^{it}} - \frac{qe^{-it}}{1-qe^{-it}}\right] - q^2\left[\frac{1}{1-qe^{it}} - \frac{1}{1-qe^{-it}}\right]\right\} -$$

$$-\frac{1}{2i}\left\{\left[\frac{(qe^{it})^{n+1}}{1-qe^{it}} - \frac{(qe^{-it})^{n+1}}{1-qe^{-it}}\right] - q^2\left[\frac{(qe^{it})^n}{1-qe^{it}} - \frac{(qe^{-it})^n}{1-qe^{-it}}\right]\right\} =$$

$$= \frac{q(1-q^2)\sin t + O(1)q^{n+1}}{1-2q\cos t+q^2},$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n, q.

Учитывая что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt = O(1)\frac{1}{(1-q)^3},$$

на основании формулы (5), можем записать

$$\delta_n(f;x) = \frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t)\frac{(1-q^2)\sin t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \tag{6}$$

Так как для функций $f \in C^q_{1,\infty}$ выполняется условие

$$\operatorname{ess\,sup}|f_1^q(x)| \leqslant 1, \quad x \in [-\pi;\pi],$$

то, на основании (6) имеет место неравенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty}, \sigma_n\right) \leq \frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-q^2)|\sin t|}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \tag{7}$$

Учитывая, что классы $C^q_{\beta,\infty}$ инвариантны относительно сдвига аргумента (напр., [1, с. 78]), имеем

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty}; \sigma_n\right) = \sup_{f \in C^q_{1,\infty}} ||\delta_n(f;0)||_C.$$

Найдем функцию $f_0 \in C^q_{1,\infty}$ для которой имеет место равенство

$$\delta_n(f_0;0) = \frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-q^2)|\sin t|}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \tag{8}$$

На основании (6) для любой $f \in C^q_{1,\infty}$ можем записать

$$\delta_n(f;0) = \frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^q(t)\frac{(1-q^2)\sin t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}.$$

Отметим, что для функции $f_0(t)$ такой, что

$$(f_0(t))_1^q = \operatorname{sign}\frac{(1-q^2)\sin t}{(1-2q\cos t+q^2)^2},$$

имеет место

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^q(t)\frac{(1-q^2)\sin t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-q^2)|\sin t|}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt,$$

и, кроме того, $f_0(t) \in C^q_{1,\infty}$ для любых $q \in (0;1)$. Следовательно, для найденной функции $f_0(t)$ соотношение (8) справедливо.

Объединяя (7), (8), получаем

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty};\sigma_n\right)=\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-q^2)|\sin t|}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \qquad (9)$$

Вычислим интеграл в правой части (9)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin t|dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2}=2\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin tdt}{(1-2q\cos t+q^2)^2}=\frac{-1}{q(1-2q\cos t+q^2)}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4}{(1-q^2)^2}. \qquad (10)$$

На основании (9), (10) получаем асимптотическую формулу (1). Теорема доказана.

3. Заключение

Асимптотическая формула (1) обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова-Никольского [5] без дополнительных условий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций — К. : Наук. думка, 1987. — 268 с.

2. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10, № 3. С. 207–256.

3. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1980. Т. 145. С. 126–151.

4. Степанец А. И. Приближение суммами Фурье интегралов Пуассона непрерывных функций // Докл. РАН. 2000. Т. 373, № 2. С. 171–173.

5. Степанец А. И. Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 1. С. 113–138.

6. Рукасов В. И., Чайченко С. О. Приближение аналитических периодических функций суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 12. С. 1653–1668.

7. Рукасов В. И., Новиков О. А. Приближение аналитических функций суммами Валле–Пуссена // Труды института математики НАН Украины. 1998. Т. 20. С. 228–241.

8. Сердюк А. С. Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. 2004. Т. 56, № 1. С. 97–107.

9. Савчук В. В., Савчук М. В., Чайченко С. О. Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена // Математические студии. 2010. Т. 34, № 2. С. 207–219.

10. Ровенская О. Г., Новиков О. А. Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена // Нелинейные колебания. 2010. Т. 13, № 1. С. 96–99.

11. Новиков О. А., Ровенская О. Г. Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена // Вестник Одесского нац. ун-та. Матем. мех. 2014. Т. 19, вып. 3(23). С. 14–26.

12. Ровенская О. Г., Новиков О. А. Приближение аналитических периодических функций линейными средними рядов Фурье // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 2. С. 170–183.

13. Novikov O. O., Rovenska O. G. Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums // Matematychni Studii. 2017. V. 47, № 2. P. 196–201.

14. Novikov O. O., Rovenska O. G., Kozachenko Yu. A. Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. 2018. Vol. 87. P. 4–12.

15. Новиков О. А., Ровенская О. Г. Приближение классов интегралов Пуассона повторными суммами Фейера // Труды ИПММ НАН Украины. 2015. Т. 29. С. 78–86.

16. Novikov O., Rovenska O. Approximation of Classes of Poisson Integrals by Repeated Fejer Sums // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, № 3. P. 502-–509.

17. Додунова Л. К., Охатрина Д. Д. Обобщение универсального ряда по многочленам Чебышева // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 1, С. 65–72.

REFERENCES

1. Stepanec, A. I. 1987, Classification and Approximation of Periodic Functions. Naukova Dumka, Kiev. (in Russian)

2. Nikolsky, S. M. 1946, "Approximation of functions by trigonometric polynomials in the mean", *Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, vol. 10, no. 3, pp. 207–256. (In Russian)

3. Stechkin, S. B. 1980, "Estimation of the remainder of Fourier series for the differentiable functions", *Tr. Mat. Inst. Acad. Nauk SSSR.*, vol. 145, pp. 126-151. (In Russian)

4. Stepanec, A. I. 2000, "Approximation of Poussin integrals of continuous functions by Fourier sums", *Dokl. RAN*, vol. 373, no 2, pp. 171–173. (In Russian)

5. Stepanec, A. I. 2001, "The solution of Kolmogorov-Nikolsky problem for integral Poisson of continuous functions", *Mat. Sb.*, vol. 192, no. 1, pp. 113–138. (In Russian)

6. Rukasov, V. I. & Chaichenko, S. O. 2002, "Approximation of classes of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums", *Ukrain. Mat. J.*, vol. 54, no. 12, pp. 1653–1658. (In Russian)

7. Rukasov, V. I. & Novikov, O. A. 1998, "Approximation of analytic functions by de la Vallee Poussin sums", *Trudu Inst. Mat. NAN Ukr.*, vol. 20, pp. 228–241. (In Russian)

8. Serdyuk, A. S. 2004, "Approximation of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums", *Ukr. Mat. J.*, vol. 56, no. 1, pp. 97-–107. (In Russian)

9. Savchuk, V. V., Savchuk, M. V. & Chaichenko, S. O. 2010, "Approximation of analytic functions by de la Vallee Poussin sums", *Matematychni Studii*, vol. 34, no. 2, pp. 207–219. (in Ukrainian)

10. Rovenska, O. O. & Novikov, O. O. 2010, "Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums", *Neliniyni Koluvannya*, vol. 13, pp. 96–99. (in Russian)

11. Novikov, O. O. & Rovenska, O. G. 2014, "Approximation of classes of Poisson integrals by r-repeated de la Vallee Poussin sums", *Vestnik Odessk. Nac. Un. Mat. Meh.*, vol. 19, no. 3(23), pp. 14–26. (in Russian)

12. Rovenska, O. G. & Novikov, O. O. 2016, “Approximation of analytic periodic functions by linear means of Fourier series“, *Cheb. Sb.*, vol. 17, no. 2, pp. 170–183. (in Russian)

13. Novikov, O. O. & Rovenska, O. G. 2017, “Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums“, *Matematychni Studii*, vol. 47, no. 2, pp. 196–201.

14. Novikov, O. O., Rovenska, O. G. & Kozachenko, Yu. A. 2018, “Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums“, *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 87, pp. 4–12.

15. Novikov, O. O. & Rovenska, O. G. 2015, “Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums“, *Trudu IPMM NAN Ukrainu*, vol. 29, pp. 78–86. (in Russian)

16. Novikov, O. O. & Rovenska, O. G. 2017, “Approximation of Classes of Poisson Integrals by Repeated Fejer Sums“, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 38, no. 3, pp. 502-–509.

17. Dodunova, L. K. & Okhatrina, D. D. 2017, The generalizationof the universal series in Chebyshev polynomials, *Cheb. Sb.*, vol. 18, no. 1, pp.65–72. (in Russian)

Получено 13.01.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 511.464 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-227-242

Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей

А. С. Самсонов

Алексей Сергеевич Самсонов — аспирант кафедры теории чисел, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы трансцендентности и алгебраической независимости, формулируются и доказываются теоремы для некоторых элементов прямых произведений p-адических полей, а также, теорема об оценке многочлена от таких элементов. Пусть $\mathbb{Q}_p$ — пополнение $\mathbb{Q}$ по p-адической норме, поле Ω_p — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$, $g = p_1 p_2 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел, а пополнение $\mathbb{Q}$ по g-адической псевдонорме это кольцо $\mathbb{Q}_g$, иными словами $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$. Рассматривается кольцо $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$, содержащее $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца. Вопросы о трансцендентности и алгебраической независимости над $\mathbb{Q}_g$ элементов Ω_g привели к результатам полученным в статье. При соблюдении некоторых условий можно делать соответствующие выводы для чисел вида $\alpha = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j g^{r_j}$, где $a_j \in \mathbb{Z}_g$, а неотрицательные рациональные числа r_j образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность.

Ключевые слова: p-адические числа, g-адические числа, трансцендентность, алгебраическая независимость.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
А. С. Самсонов. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 227–242.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 511.464 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-227-242

Arithmetic properties of direct product of p-adic fields elements

A. S. Samsonov

Aleksei Sergeevich Samsonov — postgraduate, department of number theory, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Abstract

The article considers the transcendence and algebraic independence problems, introduce statements and proofs of theorems for some kinds of elements from direct product of p-adic fields and polynomial estimation theorem. Let $\mathbb{Q}_p$ be the p-adic completion of $\mathbb{Q}$, Ω_p be the completion of the algebraic closure of $\mathbb{Q}_p$, $g = p_1 p_2 \dots p_n$ be a composition of separate prime numbers, $\mathbb{Q}_g$ be the g-adic completion of $\mathbb{Q}$, in other words $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$. The ring $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$, contains a subring $\mathbb{Q}_g$. The transcendence and algebraic independence over $\mathbb{Q}_g$ are under consideration. Here are appropriate theorems for numbers like $\alpha = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j g^{r_j}$, where $a_j \in \mathbb{Z}_g$, and non-negative rational numbers r_j increase to strictly unbounded.

Keywords: p-adic numbers, g-adic numbers, transcendence, algebraic independence.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
A. S. Samsonov, 2020, "Arithmetic properties of direct product of p-adic fields elements", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 227–242.

1. Введение

Используются следующие обозначения:

1. p — простое число, $g = p_1 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел;
2. $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, $\mathbb{Z}_g$ — кольцо целых g-адических чисел;
3. $|x|_p = p^{-\operatorname{ord}_p x}$ — p-адическая норма, если $x = 0$, считаем, что $\operatorname{ord}_p x = \infty$;
4. $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, это пополнение поля рациональных чисел по p-адической норме;
5. $|x|_g$ — g-адическая псевдонорма, $\mathbb{Q}_g$ — кольцо g-адических чисел, пополнение множества рациональных чисел по g-адической псевдонорме;
6. Ω_p, оно же $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$.

По аналогии со случаем p-адических чисел, мы хотим построить некое кольцо Ω_g, которое будет расширением кольца $\mathbb{Q}_g$. Поскольку $\mathbb{Q}_g \cong \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$, имеет смысл рассмотреть множество $\Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$. С одной стороны, в подобном расширении уравнения типа $(1,0)x = (0,1)$ не имеют решений. С другой стороны, оно уже является прямой суммой полей, каждое из которых алгебраически замкнуто и полно. Поэтому, кольцо Ω_g будет расширением кольца $\mathbb{Q}_g$ изоморфным $\Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$.

2. Вспомогательные конструкции

Определение 1. *Пусть $\omega_p(x) = g^{-\operatorname{ord}_p x}$ — норма эквивалентная p-адической.*

Согласно [20], с. 12, это действительно так (см. также [4]).

Утверждение 1. *Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — нормированные пространства, с неархимедовыми нормами $\mu_1, \ldots, \mu_n$ соответственно, тогда*

$$\mu(b_1, \ldots, b_n) = \max(\mu_1(b_1), \ldots, \mu_n(b_n))$$

является неархимедовой псевдонормой пространства $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$.

Замечание 1. *Более правильно писать $\mu((b_1, \ldots, b_n))$, однако, здесь и далее мы будем опускать излишние скобки в тех случаях, когда это не вызывает разночтений.*

Для доказательства утверждения 1 проверим свойства неархимедовой псевдонормы:

1. $\mu(b_1, \ldots, b_n) = 0 \Leftrightarrow \max(\mu_1(b_1), \ldots, \mu_n(b_n)) = 0 \Leftrightarrow$
$$\mu_1(b_1) = 0, \ldots, \mu_n(b_n) = 0 \Leftrightarrow b_1 = 0, \ldots, b_n = 0 \Leftrightarrow (b_1, \ldots, b_n) = 0;$$

2. $\mu((b_1, \ldots, b_1)(c_1, \ldots, c_n)) = \mu(b_1c_1, \ldots, b_nc_n) =$
$$\max(\mu_1(b_1c_1), \ldots, \mu_n(b_nc_n)) = \max(\mu_1(b_1)\mu_1(c_1), \ldots, \mu_n(b_n)\mu_n(c_n)) \leqslant$$
$$\max(\mu_1(b_1), \ldots, \mu_n(b_n)) \max(\mu_1(c_1), \ldots, \mu_n(c_n)) = \mu(b_1, \ldots, b_n)\mu(c_1, \ldots, c_n);$$

3. $\mu((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) = \mu(b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) =$
$$\max(\mu_1(b_1 + c_1), \ldots, \mu_n(b_n + c_n)) \leqslant \max(\max(\mu_1(b_1), \mu_1(c_1)), \ldots, \max(\mu_n(b_n), \mu_n(c_n))) =$$
$$\max(\mu_1(b_1), \mu_1(c_1), \ldots, \mu_n(b_n), \mu_n(c_n)) =$$
$$\max(\max(\mu_1(b_1), \ldots, \mu_n(b_n)), \max(\mu_1(c_1), \ldots, \mu_n(c_n))) = \max(\mu(b_1, \ldots, b_n), \mu(c_1, \ldots, c_n)).$$

Определение 2. *Пусть ω_g — псевдонорма на пространстве $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$, заданная следующим соотношением:*

$$\omega_g(b_1, \ldots, b_n) = \max(\omega_{p_1}(b_1), \ldots, \omega_{p_n}(b_n)).$$

Это определение корректно в силу утверждения 1.

Определение 3. *Обозначим $\varphi: \mathbb{Q}_g \to \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ — прямой изоморфизм колец, а $\psi: \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n} \to \mathbb{Q}_g$ — обратный.*

Замечание 2. *Описание изоморфизма $\mathbb{Q}_g \cong \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ см. в [22], с. 59.*

Рассмотрим $\mathbb{Q}_g$ и $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ — пространства с псевдонормами $|\ |_g$ и ω_g соответственно.

Утверждение 2. *Изоморфизмы φ и ψ сохраняют псевдонормы.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{Q}_g$, $\varphi(a) = (b_1, \ldots, b_n)$, докажем, что $|a|_g = \omega_g(b_1, \ldots, b_n)$. При $a = 0$ равенство очевидно. При $a \neq 0$ имеет место представление: $a = \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k g^k$, где a_k — g-адические цифры, $a_m \neq 0$. Заметим, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ и различных простых чисел p и q, число $q^k \in \mathbb{Z}_p$, $\omega_p(q^k) = 1$. Тогда $b_i = \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k p_1^k \ldots p_n^k = \sum\limits_{k=m}^{\infty} c_{i,k} p_i^k$, где $c_{i,k} \in \mathbb{Z}_{p_i}$. Следовательно $\omega_{p_i}(b_i) \leqslant g^{-m}$, а поскольку a_m не может делиться одновременно на каждое из чисел $p_1,\ldots,p_n$, то хотя бы в одном из случаев достигается равенство. Значит $\max(\omega_{p_1}(b_1), \ldots, \omega_{p_n}(b_n)) = g^{-m} = |a|_g$.

Утверждение 3. *Множество $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$ — кольцо, которое содержит кольцо $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ в качестве подкольца. Более того, поскольку можно продолжить нормы $\omega_{p_1},\ldots,\omega_{p_n}$, неархимедова псевдонорма $\omega_g(b_1,\ldots,b_n) = \max(\omega_{p_1}(b_1),\ldots,\omega_{p_n}(b_n))$ тоже имеет продолжение на $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$.*

Содержание этого утверждения очевидно.

Замечание 3. *Пространство $\mathbb{Q}_g$ представляет из себя множество $\{\psi(\beta_1,\ldots,\beta_n)\}$, где $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ пробегает множество $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$, а в силу утверждения 2, это множество наследует не только алгебраическую структуру, но и псевдонорму от $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$.*

Теперь мы построим пространство Ω_g. В силу предыдущего замечания, мы можем дополнить множество $\mathbb{Q}_g$ недостающими элементами и обозначить их $\psi(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, где $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ пробегает множество $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$. Более того, продолжение изоморфизма ψ, которое мы построим, будет отображать элементы $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ в $\psi(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, поэтому совпадение обозначений не приведет к конфликту.

Определение 4. *Пусть $\Omega_g = \{\psi(\beta_1,\ldots,\beta_n)\}$, где $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ пробегает $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$. Алгебраическую структуру и псевдонорму заимствуем из кольца $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$.*

Утверждение 4. *Справедливы следующие заключения.*

1. *Кольцо Ω_g содержит $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца, неархимедова псевдонорма на кольце Ω_g продолжает g-адическую псевдонорму кольца $\mathbb{Q}_g$.*
2. *Существует продолжение изоморфизма $\psi:\ \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n} \to \Omega_g$ и продолжение обратного изоморфизма $\varphi:\ \Omega_g \to \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$.*
3. *Продолженные изоморфизмы по-прежнему будут сохранять псевдонормы.*

Доказательство.

1. В силу замечания 3 и определения 4, очевидно, что кольцо Ω_g содержит $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца, неархимедова псевдонорма на кольце Ω_g продолжает g-адическую псевдонорму кольца $\mathbb{Q}_g$.
2. Продолжение изоморфизма ψ определим следующим образом, пусть ψ отображает элемент $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ в $\psi(\beta_1,\ldots,\beta_n)$. Такое отображение будет изоморфизмом в силу определения 4. Изоморфизм φ продолжим, как обратный к ψ.
3. В силу предыдущего пункта и определения 4, продолженные изоморфизмы по-прежнему будут сохранять псевдонормы.

Определение 5. *Пусть число $\alpha = \psi(\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \Omega_g$. Тогда, обозначим*

$$\operatorname{ord}_g \alpha = \min(\operatorname{ord}_{p_1} \beta_1,\ldots,\operatorname{ord}_{p_n} \beta_n).$$

Замечание 4. *Справедливо следующее соотношение*

$$|\alpha|_g = \omega_g(\beta_1,\ldots,\beta_n) = \max(\omega_{p_1}(\beta_1),\ldots,\omega_{p_n}(\beta_n)) = g^{-\min(\operatorname{ord}_{p_1}\beta_1,\ldots,\operatorname{ord}_{p_n}\beta_n)} = g^{-\operatorname{ord}_g \alpha}.$$

Определение 6. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, обозначим $m^r \in \Omega_g$ — число $\psi(m^r,\ldots,m^r) \in \Omega_g$.*

Это обозначение не противоречиво, числа $m^r \in \mathbb{Q}_g$ совпадают с числами $\psi(m^r,\ldots,m^r)$.

Замечание 5. *Если $\alpha \in \Omega_g$, то $\alpha = \psi(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$, где $\beta_k \in \Omega_{p_k}$. Аналогично, если $\alpha \in \mathbb{Q}_g$, то $\beta_k \in \mathbb{Q}_{p_k}$, если $\alpha \in \mathbb{Z}_g$, то $\beta_k \in \mathbb{Z}_{p_k}$.*

Замечание 6. *Любой многочлен* $G \in \mathbb{Q}_g[x]$ *можно представить в виде*

$$G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n), \text{ где } P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x]$$

и вычислить по формуле

$$G(\alpha) = \psi(P_1(\beta_1), P_2(\beta_2), \ldots, P_n(\beta_n)), \text{ где } \alpha \in \Omega_g, \ \alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Аналогично, если $G \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m]$, *то* $P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x_1, \ldots, x_m]$.

Определение 7. *Обозначим* $U_p := \{\beta \in \mathbb{Q}_p : |\beta|_p = 1\}$. *Обозначим* $U_g := \{\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \ |\beta_k|_{p_k} = 1\}$.

Определение 8. *Обозначим* $\mathbb{Z}_g^* := \{\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \ \beta_k \neq 0\}$.

Определение 9. *Обозначим* $0_k := \{G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] : P_k \equiv 0\}$. *Обозначим* $\widehat{0} := \bigcup\limits_{k=1}^{n} 0_k$.

Определение 10. *Пусть* $\alpha \in \Omega_g$, $\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. *Будем называть* α *глобально трансцендентным над* $\mathbb{Q}_g$ *элементом* Ω_g, *если для любого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *и любого многочлена* $G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_k) \neq 0$.

Определение 11. *Пусть* $\alpha_i \in \Omega_g$, $\alpha_i = \psi(\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, $i = 1, \ldots, m$. *Будем называть* α_i *глобально алгебраически независимыми над* $\mathbb{Q}_g$ *элементами* Ω_g, *если для любого* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *и любого многочлена* $G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) \neq 0$.

3. Первая теорема

Лемма 1. *Пусть*
1) числа r_k *и* s_k, *где* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *являются неотрицательными и рациональными,* $r_0, r_1, r_2, \ldots$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *последовательность;*
2) существует бесконечное множество номеров j *таких, что число* r_{j+1} *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_0, \ldots, r_j$ *и чисел* s_k;
3) числа r'_k *такие, что разность* $r'_k - r_k$ *является неотрицательным целым числом, аналогично для* $s'_k - s_k$;
4) неубывающая последовательность t_k *является упорядоченной* r'_k.

Тогда существует бесконечное множество номеров j *таких, что число* t_{j+1} *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, t_0, \ldots, t_j$ *и чисел* s'_k.

Замечание 7. *Последовательность* r'_k *стремится к* $+\infty$, *поэтому неубывающая* t_k *существует, а четвертый пункт условия является корректным.*

Доказательство. Предположим противное, тогда множество подходящих номеров конечно. Пусть номер n_0 последний из таких, что число t_{n_0} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0-1}$ и чисел s'_k. Если нет ни одного подходящего номера, пусть $n_0 = 0$. Поскольку t_{n_0+1} является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0}$ и чисел s'_k. Получается, что t_{n_0+2} как линейная комбинация с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0+1}$ и чисел s'_k, является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0}$ и чисел s'_k. Таким образом, каждое следующее число в последовательности t_m, при $m > n_0$, является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0}$ и чисел s'_k.

Рассмотрим числа $t_0, \dots, t_{n_0}$ как элементы последовательности r'_k, среди них есть элемент r'_{k_0} с самым большим индексом. Поскольку t_k, очевидно, стремится к $+\infty$, существует номер $n_1 > n_0$ такой, что любое из чисел t_m, при $m > n_1$, больше любого из $r'_0, r'_1, \dots, r'_{k_0}$. Это означает, что для номеров $m > n_1$, в последовательности t_m не встречаются числа $r'_0, r'_1, \dots, r'_{k_0}$, но любое число $t_m = r'_{k_1}$, является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r'_0, r'_1, \dots, r'_{k_0}$ и чисел s'_k, поскольку $m > n_1 > n_0$, причем $k_1 > k_0$, поскольку $m > n_1$. Значит, номер k_1 такой, что число r'_{k_1} является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r'_0, r'_1, \dots, r'_{k_1-1}$ и чисел s'_k. Соответственно, номера, не являющихся таковыми, можно искать при $m \leqslant n_1$, всего их может быть не более чем n_1. Но противоречие в том, что в силу второго и третьего пунктов из условий леммы, существует бесконечное множество номеров j таких, что число r'_{j+1} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r'_0, \dots, r'_j$ и чисел s'_k.

Теорема 1. *Пусть $g = p_1 \dots p_n$ — произведение n различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}}, \text{ где } a_{i,j} \in \mathbb{Z}_g^*,\ i = 1, \dots, m,\ j = 0, 1, 2 \dots.$$

Пусть
1) для любого $i = 1, \dots, m$ неотрицательные рациональные числа $r_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;
2) для любого $i = 1, \dots, m$ существует бесконечное множество номеров j таких, что число $r_{i,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{i,0}, \dots, r_{i,j}$ и чисел $r_{l,k}$, где $l \neq i$, $l = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, 2, \dots$.
3) не существует номеров i, j_1, j_2 таких, что разница $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ является целым числом.

Тогда числа α_i представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Доказательство. Предположим противное, тогда числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ не являются глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$ элементами Ω_g при некотором $m \geqslant 1$. При $m = 1$ подразумеваем, что число α_1 не является глобально трансцендентным над $\mathbb{Q}_g$ элементом Ω_g. Следовательно, считая $\alpha_i = \psi(\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,n})$, существуют $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и $G = \psi(P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \dots, x_m] \backslash \widehat{0}$ такие, что $P_k(\beta_{1,k}, \dots, \beta_{m,k}) = 0$. Значит, числа $\beta_{i,k}$ представляют собой алгебраически зависимые над $\mathbb{Q}_{p_k}$ элементы Ω_{p_k}. Но $a_{i,j} = \psi(b_{i,j,1}, b_{i,j,2}, \dots, b_{i,j,n})$, откуда

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j,k} g^{r_{i,j}}, \text{ где } b_{i,j,k} \in \mathbb{Z}_{p_k},\ i = 1, \dots, m,\ j = 0, 1, 2, \dots.$$

Поскольку $a_{i,j} \in \mathbb{Z}_g^*$, воспользуемся тем, что $(p_k/g) \in \mathbb{Z}_{p_k}$ и освободим коэффициенты от целых степеней p_k

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b'_{i,j,k} g^{r'_{i,j}}, \text{ где } b'_{i,j,k} \in U_{p_k},\ i = 1, \dots, m,\ j = 0, 1, 2, \dots.$$

Воспользуемся леммой 1 для каждого $i = 1, \dots, m$ и получим

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b'_{i,j,k} g^{t_{i,j}}, \text{ где } b'_{i,j,k} \in U_{p_k},\ i = 1, \dots, m,\ j = 0, 1, 2, \dots.$$

Поскольку не существует номеров i, j_1, j_2 таких, что разница $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ является целым числом, для каждого $i = 1, \dots, m$ неотрицательные рациональные числа $t_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность, и существует бесконечное множество номеров j таких, что число $t_{i,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{i,0}, \ldots, t_{i,j}$ и чисел $t_{l,k'}$, где $l \neq i,\ l = 1, \ldots, m,\ k' = 0, 1, 2, \ldots$

Переобозначим $p_k = p,\ \beta_{i,k} = \beta_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{i,j} g^{t_{i,j}},\ b_{i,j} \in U_p$. Числа β_i являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$ элементами Ω_p, а $P(x_1, \ldots, x_m)$ является отличным от нуля многочленом с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$ наименьшей степени по совокупности переменных таким, что $P(\beta_1, \ldots, \beta_m) = 0$.

$$P(x_1, \ldots, x_m) = P((x_1 - \beta_1) + \beta_1, \ldots, (x_m - \beta_m) + \beta_m) =$$
$$= P(\beta_1, \ldots, \beta_m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)(x_i - \beta_i) + P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)(x_i - \beta_i) + P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m)),$$

обозначим $C_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m),\ i = 1, \ldots, m$.

Поскольку степень многочлена $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m)$ по совокупности переменных ниже, чем степень $P(x_1, \ldots, x_m)$, в силу определения последнего, $C_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \neq 0$. Обозначим $c_i = \operatorname{ord}_p C_i$. Без ограничения общности $c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_m$.

Рассмотрим C_i как суммы одночленов, $C_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} A_{i,j} g^{s_{i,j}}$, где $A_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$, а числа $s_{i,j}$ представляют собой линейные комбинации чисел 1 и $t_{i',j'}$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Можно считать, что никакие два из чисел $s_{i,j}$ не могут отличаться на целое число, иначе слагаемые можно объединить по общей степени. Также, числа $A_{i,j}$ можно считать свободными от степеней p, иначе можно воспользоваться тем, что $(p/g) \in \mathbb{Z}_p$. Для каждого i среди чисел $s_{i,j}$ можно выбрать минимальное, поскольку существует лишь конечное множество линейных комбинаций чисел 1 и $t_{i',j'}$ с целыми неотрицательными коэффициентами не превосходящих любое наперед заданное число. Не умаляя общности, пусть числа $s_{i,0}$ будут этими минимальными. Поскольку $\operatorname{ord}_p A_{i,j} g^{s_{i,j}} = s_{i,j}$, то $c_i = \operatorname{ord}_p C_i = \operatorname{ord}_p A_{i,0} g^{s_{i,0}} = s_{i,0}$, следовательно числа c_i представляют собой линейные комбинации конечного набора из чисел 1 и $t_{i',j'}$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Для каждой пары $i, i' = 1, \ldots, m$ обозначим через $N_{i,i'}$ наибольший из номеров j' таких, что число $t_{i',j'}$ входит в вышеупомянутую линейную комбинацию для c_i с положительным коэффициентом. Положим $N_0 = \max_{i,i'=1,\ldots,m} N_{i,i'}$.

Для любой совокупности натуральных чисел $n_i,\ i = 1, \ldots, m$ обозначим

$$\underline{B}_{i,n_i} = \sum_{j=0}^{n_i} b_{i,j} g^{t_{i,j}},\ \overline{B}_{i,n_i} = \sum_{j=n_i+1}^{\infty} b_{i,j} g^{t_{i,j}}.$$

Тогда

$$P(\underline{B}_{1,n_1}, \ldots, \underline{B}_{m,n_m}) = -\sum_{i=1}^{m} C_i \overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m}).$$

Для $i = 1$ существует бесконечное множество чисел j таких, что число $t_{1,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,0}, \ldots, t_{1,j}$ и чисел $t_{l,k'}$, где $l \neq i,\ l = 1, \ldots, m,\ k' = 0, 1, 2, \ldots$ Из этого бесконечного множества выберем число $j = n_1$ так, чтобы выполнялись неравенства $n_1 > N_0$ и $t_{1,n_1+1} > c_1$.

Поскольку, по условию теоремы, при любом $i = 1, \ldots, m$ последовательность $t_{i,j}$, возрастая, стремится к $+\infty$ при $j \to +\infty$, можно выбрать числа $n_2, \ldots, n_m$ так, чтобы имели место неравенства

$$c_1 + t_{1,n_1+1} < c_2 + t_{1,n_2+1} < \ldots < c_m + t_{m,n_m+1}.$$

Поскольку $c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_m$, то $t_{1,n_1+1} < t_{2,n_2+1} < \ldots < t_{m,n_m+1}$.

Коэффициенты многочлена $P^*((x_1-\beta_1),\ldots,(x_m-\beta_m))$ можно выразить в виде многочленов с целыми рациональными коэффициентами от чисел $\beta_1,\ldots,\beta_m$ и коэффициентов многочлена $P(x_1,\ldots,x_m)$. Если степень многочлена P по совокупности переменных $\deg P \geqslant 2$, то $\deg P = \deg P^*$, в остальных случаях многочлен P^* равен тождественно нулю. Таким образом, $\operatorname{ord}_p P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\ldots,-\overline{B}_{m,n_m}) \geqslant 2\operatorname{ord}_p(-\overline{B}_{1,n_1}) = 2t_{1,n_1+1}$.

Заметим, что $\operatorname{ord}_p(-\sum\limits_{i=1}^{m} C_i\overline{B}_{i,n_i}) = c_1 + t_{1,n_1+1} < 2t_{1,n_1+1}$. Таким образом

$$\operatorname{ord}_p P(\underline{B}_{1,n_1},\ldots,\underline{B}_{m,n_m}) = \operatorname{ord}_p(-\sum_{i=1}^{m} C_i\overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\ldots,-\overline{B}_{m,n_m})) = c_1 + t_{1,n_1+1}.$$

С другой стороны, очевидно, что $t_{1,n_1+1} = \operatorname{ord}_p P(\underline{B}_{1,n_1},\ldots,\underline{B}_{m,n_m}) - c_1$ представляет собой линейную комбинацию с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,0},\ldots,t_{1,n_1},\ldots,t_{m,0},\ldots,t_{m,n_m}$, что противоречит выбору n_1.

4. Вторая теорема

Теорема 2. *Пусть $g = p_1\ldots p_n$ — произведение n различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_j},\ \text{где } a_{i,j} \in Z_g,\ i = 1,\ldots,m,\ j = 0,1,2\ldots.$$

Пусть
1) неотрицательные рациональные числа r_j образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;
2) $\varphi(a_{i,j}) = (b_{i,j,1}, b_{i,j,2},\ldots,b_{i,j,n})$, для каждого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и для любого n_0, существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ такие, что $n_1 > n_0$ и

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m,k} := \det(b_{i,n_l,k})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1,k} & \ldots & b_{1,n_m,k} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m,n_1,k} & \ldots & b_{m,n_m,k} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{1}$$

3) для каждого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, существует возрастающая функция $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$r_n - c_k(n) \to +\infty,\ \text{при } n \to \infty,$$

и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ удовлетворяющих неравенству 1, выполняется неравенство

$$\operatorname{ord}_{p_k} \delta_{n_1,\ldots,n_m,k} \leqslant c_k(n_1);$$

4) для любого номера j число r_{j+1} не является суммой линейной комбинации чисел $r_0,\ldots,r_j$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.

Тогда числа α_i представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Доказательство. Так же, как и в доказательстве предыдущей теоремы, из предположения противного получается, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$P_k(\beta_{1,k},\ldots,\beta_{m,k}) = 0,$$

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j,k} g^{r_j}, \text{ где } b_{i,j,k} \in \mathbb{Z}_{p_k}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Переобозначим $p_k = p$, $\beta_{i,k} = \beta_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{i,j} g^{r_j}$, $b_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$. Числа β_i являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$ элементами Ω_p, а $P(x_1, \ldots, x_m)$ является отличным от нуля многочленом с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$ наименьшей степени по совокупности переменных таким, что $P(\beta_1, \ldots, \beta_m) = 0$.

Также, адаптируем остальные условия теоремы:
1) неотрицательные рациональные числа r_j образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;
2) для любого n_0, существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ такие, что $n_1 > n_0$ и

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m} := \det(b_{i,n_l})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1} & \ldots & b_{1,n_m} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m,n_1} & \ldots & b_{m,n_m} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{2}$$

3) существует возрастающая функция $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$r_n - c(n) \to +\infty, \text{ при } n \to \infty, \tag{3}$$

и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ удовлетворяющих неравенству 2, выполняется неравенство

$$\operatorname{ord}_p \delta_{n_1,\ldots,n_m} \leqslant c(n_1);$$

4) для любого номера j число r_{j+1} не является суммой линейной комбинации чисел $r_0, \ldots, r_j$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.

$$P(x_1, \ldots, x_m) = P((x_1 - \beta_1) + \beta_1, \ldots, (x_m - \beta_m) + \beta_m) =$$

$$= P(\beta_1, \ldots, \beta_m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)(x_i - \beta_i) + P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)(x_i - \beta_i) + P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m)),$$

обозначим $C_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Поскольку степень многочлена $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m)$ по совокупности переменных ниже, чем степень $P(x_1, \ldots, x_m)$, в силу определения последнего, $C_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \neq 0$. Обозначим $c_0 = \min\limits_i \operatorname{ord}_p C_i$.

Для любой совокупности натуральных чисел n_i, $i = 1, \ldots, m$ обозначим

$$\underline{B}_{i,n_i} = \sum_{j=0}^{n_i} b_{i,j} g^{r_j}, \ \overline{B}_{i,n_i} = \sum_{j=n_i+1}^{\infty} b_{i,j} g^{r_j}.$$

Тогда

$$P(\underline{B}_{1,n_1}, \ldots, \underline{B}_{m,n_m}) = -\sum_{i=1}^{m} C_i \overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m}).$$

В силу определения $\overline{B}_{i,n_i}$, получаем

$$-\sum_{i=1}^{m} C_i\overline{B}_{i,n_i} = -\sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{j=n_i+1}^{\infty} b_{i,j}g^{r_j} = \sum_{j=n_i+1}^{\infty} g^{r_j}(-\sum_{i=1}^{m} C_i b_{i,j}) = \sum_{j=n_i+1}^{\infty} d_j g^{r_j},$$

где использовано обозначение

$$d_j = -\sum_{i=1}^{m} C_i b_{i,j}.$$

Пусть числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ удовлетворяют неравенству 2. Среди чисел $d_{n_1}, \ldots, d_{n_m}$ есть отличные от нуля, иначе система уравнений $\sum\limits_{i=1}^{m} C_i b_{i,j} = 0$, $j = n_1, \ldots, n_m$ имеет нетривиальное (поскольку $C_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$) решение $C_1, \ldots, C_m$, что противоречит неравенству 2.

Рассмотрим при произвольных $N_0 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, удовлетворяющих неравенству 2, равенства

$$d_j = -\sum_{i=1}^{m} C_i b_{i,j},\ j = n_1, \ldots, n_m,$$

как систему линейных уравнений относительно неизвестных $C_1, \ldots, C_m$. Применяя к ней правило Крамера, получаем, что числа $C_1\delta, \ldots, C_m\delta$ являются линейными комбинациями чисел $d_{n_1}, \ldots, d_{n_m}$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$. Значит для любого $i = 1, \ldots, m$ справедливо неравенство:

$$\min_j \operatorname{ord}_p d_{n_j} \leqslant \operatorname{ord}_p C_i\delta.$$

С другой стороны, поскольку $\operatorname{ord}_p \delta_{n_1,\ldots,n_m} \leqslant c(n_1)$, получаем

$$\min_i(\operatorname{ord}_p C_i\delta) = c_0 + \operatorname{ord}_p \delta \leqslant c_0 + c(n_1).$$

Это значит, что среди чисел $\operatorname{ord}_p d_{n_j}$ есть хотя бы одно такое, что

$$\operatorname{ord}_p d_{n_j} \leqslant c_0 + c(n_1).$$

Из соотношения 3 следует, что существует натуральное число N_0 такое, что при $n_1 \geqslant N_0$ выполняется неравенство $c_0 + c(n_1) < r_{n_1}$. Значит,

$$\operatorname{ord}_p d_{n_j} \leqslant c_0 + c(n_1) < r_{n_1} \leqslant r_{n_j}.$$

Откуда получаем неравенство

$$\operatorname{ord}_p d_{n_j} + r_{n_j} < 2r_{n_j}.$$

Поскольку $\operatorname{ord}_p d_l \geqslant 0$, $r_l \to \infty$, величина $\operatorname{ord}_p d_l + r_l \to \infty$, при $l \to \infty$. Следовательно, для любого натурального числа n_j среди чисел $\operatorname{ord}_p d_l + r_l$ при $l \geqslant n_j$ существует наименьшее. Более того, если для l значение $\operatorname{ord}_p d_l + r_l$ минимальное, то

$$\operatorname{ord}_p d_l + r_l \leqslant \operatorname{ord}_p d_{n_j} + r_{n_j} < 2r_{n_j} \leqslant 2r_l.$$

Учитывая все сказанное, существует достаточно большое l такое, что некоторое число $l+1$ — наибольшее из конечного числа номеров, при котором достигается вышеупомянутое наименьшее значение для $\operatorname{ord}_p d_{l+1} + r_{l+1}$. Тогда

$$\operatorname{ord}_p d_{l+1} + r_{l+1} < 2r_{l+1}.$$

Рассмотрим равенство

$$P(\underline{B}_{1,n_1},\ldots,\underline{B}_{m,n_m}) = -\sum_{i=1}^{m} C_i\overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\ldots,-\overline{B}_{m,n_m}) =$$

$$= -\sum_{j=l+1}^{\infty} d_j g^{r_j} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\ldots,-\overline{B}_{m,n_m}),$$

при выбранном значении l. $P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\ldots,-\overline{B}_{m,n_m})$ либо равен нулю, либо состоит из слагаемых, порядки которых не меньше, чем $2r_{l+1}$ (как и в предыдущей теореме). Поэтому

$$\operatorname{ord}_p P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\ldots,-\overline{B}_{m,n_m}) \geqslant 2r_{l+1}.$$

Первый член ряда

$$\sum_{j=l+1}^{\infty} d_j g^{r_j}$$

имеет наименьший порядок ввиду выбора l. Следовательно,

$$\operatorname{ord}_p \sum_{j=l+1}^{\infty} d_j g^{r_j} = r_{l+1} + \operatorname{ord}_p d_{l+1}.$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\operatorname{ord}_p P(\underline{B}_{1,n_1},\ldots,\underline{B}_{m,n_m}) = \operatorname{ord}_p(-\sum_{i=1}^{m} C_i\overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\ldots,-\overline{B}_{m,n_m})) = \operatorname{ord}_p d_{l+1} + r_{l+1}.$$

Левая часть этого равенства представляет собой линейную комбинацию с неотрицательными целыми коэффициентами чисел $r_0,\ldots,r_l$, а $\operatorname{ord}_p d_{l+1}$ представляет собой линейную комбинацию чисел $1, r_0,\ldots,r_l$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Таким образом, число r_{l+1} представляет собой сумму линейной комбинации чисел $r_0,\ldots,r_l$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа вопреки условиям теоремы.

5. Третья теорема

Теорема 3. *Пусть $g = p_1\ldots p_n$ — произведение различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}},\ \alpha_i \in \Omega_g,\ a_{i,j} \in U_g,\ i = 1,\ldots,m.$$

Пусть
1) для любого $i = 1,\ldots,m$ положительные рациональные числа $r_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;
2) для любого $d \in \mathbb{N}$ существует $N_1 = N_1(d) \in \mathbb{N}$ такое, что для любого целого $N \geqslant N_1$, не могут одновременно выполняться следующие соотношения:

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} D_{i,j} r_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad D_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} |D_{i,j}| \leqslant 2d, \quad \sum_{i=1}^{m} |D_{i,N}| > 0;$$

3) $r_j = \max\{r_{1,j},\ldots,r_{m,j}\}$, для любых натуральных чисел d и h существует $N_2 = N_2(d,h) \in \mathbb{N}$ такое, что неравенство

$$r_{i,N+1} > h + dr_N$$

выполняется для любого $i = 1, \ldots, m$ *и для любого натурального* $N \geqslant N_2$*;*

Если многочлен $G = \psi(P_1, \ldots, P_n) \in \mathbb{Z}_g[x_1, \ldots, x_m]\backslash\{0\}$*, а при некотором* $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, $\deg G = \deg P_{k_0}$ *и любой коэффициент* B_{k_0} *многочлена* P_{k_0} *таков, что либо* $B_{k_0} = 0$*, либо* $\mathrm{ord}_{p_{k_0}} B_{k_0} \leqslant h$*. Тогда неравенство*

$$|G(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|_g \geqslant g^{-h-dr_N}$$

выполняется при $N \geqslant \max(N_1, N_2)$.

Доказательство. Сведем рассуждение к p-адическому случаю. $G = \psi(P_1, \ldots, P_n)$, $\alpha_i = \psi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n})$, для каждого $i = 1, \ldots, m$. Достаточно показать, что для $k = k_0$ справедливо неравенство:

$$\mathrm{ord}_{p_k} P_k(\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{m,k}) \leqslant h + dr_N.$$

Тогда $\mathrm{ord}_g G(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \min\limits_k \mathrm{ord}_{p_k} P_k(\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{m,k}) \leqslant h + dr_N$, а это и надо доказать.

Переобозначим многочлен и соответствующие компоненты, далее будем рассматривать условия теоремы в следующем контексте:
a) $P = P_{k_0}$, $p = p_{k_0}$, $P \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_m]\backslash\{0\}$, $\deg P = d$;
b) любой ненулевой коэффициент B этого многочлена таков, что $\mathrm{ord}_p B \leqslant h$;
c) $\beta_i = \alpha_{i,k_0}$, $\beta_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{i,j} g^{r_{i,j}}$, $\beta_i \in \Omega_p$, $b_{i,j} \in U_p$, $i = 1, \ldots, m$.

Тогда, достаточно доказать, что

$$\mathrm{ord}_p P(\beta_1, \ldots, \beta_m) \leqslant h + dr_N \quad \text{или} \quad |P(\beta_1, \ldots, \beta_m)|_p \geqslant p^{-h-dr_N}.$$

Проверим, что в случае $d = 0$ теорема справедлива. Действительно, если $P = B$, тогда $|P|_p = |B|_p = p^{-\mathrm{ord}_p B} \geqslant p^{-h}$. Далее будем считать, что $d > 0$.

Мы воспользуемся следующими леммами.

Лемма 2. *Пусть* p *— простое число,* $m \in \mathbb{N}$*, числа* $R_1, \ldots, R_m \in \mathbb{Q}$ *различны, а* p*-адическая норма любого из чисел* $B_1, \ldots, B_m \in \Omega_p$ *равна единице, тогда*

$$|B_1 g^{R_1} + \ldots + B_m g^{R_m}|_p = p^{-\min\limits_i R_i}.$$

Лемма 3. *Для любого* $N \geqslant N_1 = N_1(d)$ *выполнено неравенство:*

$$|P(\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{m,N})|_p \geqslant p^{-h-dr_N},$$

где $\beta_{i,N} = \sum\limits_{j=0}^{N} b_{i,j} g^{r_{i,j}}$.

Доказательство. Любой, отличный от нуля, многочлен от m переменных представляет из себя сумму одночленов. Для удобства, будем считать одночлены каждого многочлена упорядоченными следующим образом. Одночлен $x_1^{j_1} \ldots x_m^{j_m}$ будет идти раньше одночлена $x_1^{l_1} \ldots x_m^{l_m}$, если $j_1 + \ldots + j_m > l_1 + \ldots + l_m$, а в случае равенства, если существует $s \in \{0, \ldots, m-2\}$ такое, что $j_1 = l_1, \ldots, j_s = l_s$, $j_{s+1} > l_{s+1}$.

Попробуем подставить числа $x_i = \beta_{i,N}$ в многочлен, для любого $l_i \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ мы получим

$$\beta_{i,N}^{l_i} = \left(\sum_{j=0}^{N} b_{i,j} g^{r_{i,j}} \right)^{l_i},$$

а это число представляет из себя сумму членов вида:

$$Bg^{l_{i,N}r_{i,N}+\ldots+l_{i,0}r_{i,0}},$$

где $B \in \mathbb{Z}_p$, $l_{i,N},\ldots,l_{i,0} \in \mathbb{N}_0$, $l_{i,N}+\ldots+l_{i,0} = l_i$. Таким образом, при подстановке $(x_1,\ldots,x_m) \to (\beta_{1,N},\ldots,\beta_{m,N})$ каждый одночлен $x_1^{l_1}\ldots x_m^{l_m}$ будет представлен суммой членов вида:

$$Cg^{\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} l_{i,j}r_{i,j}}, \tag{4}$$

где $C \in \mathbb{Z}_p$ и $\sum\limits_{j=0}^{N} l_{i,j} = l_i$. Многочлен P является суммой одночленов, таким образом, $P(\beta_{i,N},\ldots,\beta_{m,N})$ будет представлен суммой членов вида 4, а поскольку $\deg P = d$, значит $\sum\limits_{j=0}^{N}\sum\limits_{i=1}^{m} l_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{m} l_i \leqslant d$.

Пусть $B_0x_1^{d_1}\ldots x_m^{d_m}$, где $B_0 \in \mathbb{Z}_p\backslash\{0\}$, $d_1+\ldots+d_m = d \in \mathbb{N}$, первый одночлен в представлении P. Разумеется, мы используем ранее упомянутый порядок одночленов. При подстановке $(x_1,\ldots,x_m) \to (\beta_{1,N},\ldots,\beta_{m,N})$, этот одночлен станет суммой, которая содержит выражение $\widetilde{B_0}g^{\sum_{i=1}^{m} d_ir_{i,N}}$, где $\widetilde{B_0} \in \mathbb{Z}_p\backslash\{0\}$, $\operatorname{ord}_p \widetilde{B_0} = \operatorname{ord}_p B_0$. Попробуем привести подобные члены в сумме $P(\beta_{i,N},\ldots,\beta_{m,N})$ по соответствующим степеням g и покажем, что выражение $\widetilde{B_0}g^{\sum_{i=1}^{m} d_ir_{i,N}}$ не может взаимно уничтожиться с другими членами суммы. Действительно, поскольку они имеют вид $Cg^{\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} l_{i,j}r_{i,j}}$, где $C \in \mathbb{Z}_p$, $\sum\limits_{j=0}^{N} l_{i,j} = l_i$, значит при приведении подобных членов порядки коэффициентов будут целыми числами. Тогда, если выражение $\widetilde{B_0}g^{\sum_{i=1}^{m} d_ir_{i,N}}$ взаимно уничтожится с другими членами суммы, значит есть хотя бы один член вида $Cg^{\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} l_{i,j}r_{i,j}}$ такой, что выражение

$$\operatorname{ord}_p \widetilde{B_0} + \sum_{i=1}^{m} d_ir_{i,N} - \operatorname{ord}_p C - \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} l_{i,j}r_{i,j}$$

является целым числом, откуда

$$\sum_{i=1}^{m} D_{i,N}r_{i,N} + \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{m} D_{i,j}r_{i,j} \in \mathbb{Z},$$

где, для $i = 1,\ldots,m$, мы полагаем $D_{i,N} := d_i - l_{i,N}$ и $D_{i,j} := -l_{i,j}$, для $j = 0,\ldots,N-1$. Но это противоречит условию теоремы поскольку

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} |D_{i,j}| \leqslant \sum_{i=1}^{m} d_i + \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} l_{i,j} \leqslant 2d$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} |D_{i,N}| = \sum_{i=1}^{m} |d_i - l_{i,N}| > 0.$$

Поскольку, последняя сумма обнуляется только если $l_{i,N} = d_i$, $i = 1,\ldots,m$, а это может произойти только в том случае, если мы рассмотрели выражение $\widetilde{B_0}g^{\sum_{i=1}^{m} d_ir_{i,N}}$ дважды.

Поскольку $\operatorname{ord}_p \widetilde{B_0} = \operatorname{ord}_p B_0 \leqslant h$, используя лемму 2 и тот факт, что выражение $\widetilde{B_0}g^{\sum_{i=1}^{m} d_ir_{i,N}}$ не может взаимно уничтожиться с другими членами суммы $P(\beta_{i,N},\ldots,\beta_{m,N})$, получаем

$$|P(\beta_{1,N},\ldots,\beta_{m,N})|_p \geqslant p^{-\operatorname{ord}_p \widetilde{B_0} - \sum\limits_{i=1}^{m} d_ir_{i,N}} \geqslant p^{-h-dr_N},$$

как и предполагалось.

Продолжим доказательство теоремы.

Заметим, что

$$P(\beta_1,\ldots,\beta_m)-P(\beta_{i,N},\ldots,\beta_{m,N})=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(P(\beta_{1,N},\ldots,\beta_{i-1,N},\beta_i,\ldots,\beta_m)-P(\beta_{1,N},\ldots,\beta_{i,N},\beta_{i+1},\ldots,\beta_m)\right).$$

$|P(\beta_{1,N},\ldots,\beta_{i-1,N},\beta_i,\ldots,\beta_m)-P(\beta_{1,N},\ldots,\beta_{i,N},\beta_{i+1},\ldots,\beta_m)|_p \leqslant |\beta_i-\beta_{i,N}|_p$, поскольку все числа β_i и $\beta_{i,N}$ имеют p-адическую норму меньше единицы, $\deg P=d>0$, а коэффициенты многочлена лежат в $\mathbb{Z}_p$. Более того:

$$|\beta_i-\beta_{i,N}|_p=p^{-r_{i,N+1}}<p^{-h-dr_N},$$

последнее неравенство в силу условия 3 выполняется при $N\geqslant N_2$. Таким образом

$$|P(\beta_1,\ldots,\beta_m)-P(\beta_{1,N},\ldots,\beta_{m,N})|_p<p^{-h-dr_N}.$$

Используя это неравенство и лемму 3 получим:

$$|P(\beta_1,\ldots,\beta_m)|_p\geqslant p^{-h-dr_N}$$

для любого $N\geqslant \max(N_1,N_2)$, что и требовалось доказать.

6. Заключение

Данная статья, как исследование, продолжает некоторые работы П. Бундшу и В. Г. Чирского. Доказанные теоремы обобщают некоторые результаты из [5], [6], [7] в том смысле, что для частного случая $g=p$ уже были доказаны в соответствующих формулировках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adams W. Transcendental numbers in the p-adic domain // Amer. J. Math., 1966, V. 88, P. 279–307.

2. Amice Y. Les nombers p-adiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1975.

3. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse, 2004, V. XIII, №2, P. 241–260.

4. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. 3-е изд. доп. М.: Наука, 1985.

5. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I // Arch. Math., 2002, V. 79, P. 345–352.

6. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II // ActaArithm., 2004, V. 113, №4, P. 309–326.

7. Bundschuh P., Chirskii V. G. Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$ // Moscow Journ. of Comb. and Number Th., 2015, V. 5, iss. 1-2, P. 14–20.

8. Чирский В. Г. Метод Зигеля-Шидловского в p-адической области. // Фундаментальная и прикладная математика. 2005, Т. 11, №6, С. 221–230.

9. Chirskii V. G. Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$ // Russian Journ. of Math. Physics, 2013, V. 20, №2, P. 149–154.

10. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады академии наук, 2014, Т. 459, №6, С. 677–679.

11. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Изв. РАН. Сер. мат., 2014, Т. 78, №6, С. 193—210.

12. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Моск. ун-та, Сер.1, мат., мех., 2015, №1, С. 59–61.

13. Чирский В. Г. Арифметические свойства целых полиадических чисел // Чебышёвский сборник, 2015, Т. 16, вып. 1, С. 254–264.

14. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат., 2017, Т. 81, №2, С. 215—232.

15. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko // Russian Journ. of Math. Physics, 2017, V. 24, №2, P. 153–171.

16. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических f-рядов // Доклады академии наук, 2018, Т. 483, №3, С. 257—259.

17. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series // Doklady Mathematics, 2018, V. 98, №3, P. 589-–591.

18. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journ. of Math. Physics, 2019, V. 26, №3, P. 286–305.

19. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric series // Russian Journ. of Math. Physics, 2020, V. 27, №2, P. 175–184.

20. Коблиц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции; пер. с англ. В. В. Шокурова, под ред. Ю. И. Манина. М.: Мир, 1982.

21. Mahler K. Uber transzendente p-adische Zahlen // Compos. Math. 1935, V. 2, P. 259–275.

22. Mahler K. p-adic numbers and their functions; second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

23. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

REFERENCES

1. Adams W. 1966, “Transcendental numbers in the p-adic domain”, *Amer. J. Math.*, vol. 88, pp. 279–307.

2. Amice Y. 1975, Les nombers p-adiques. Presses Universitaires de France, Paris.

3. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. 2004, “Effective estimates for global relations on Euler-type series”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. XIII, no. 2, pp. 241–260.

4. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. 1985, Teoriya Chisel, [The theory of numbers], third edition. “Nauka”, Moscow.

5. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2002, “On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I”, *Arch. Math.*, vol. 79, pp. 345–352.

6. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2004, “On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II”, *ActaArithm.*, vol. 113, no. 4, pp. 309–326.

7. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2015, “Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$”, *Moscow Journ. of Comb. and Number Th.*, vol. 5, iss. 1–2, pp. 14–20.

8. Chirskii V. G. 2005, “Siegel—Shidlovskii method in p-adic domain”, *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 11, no. 6, pp. 221–230.

9. Chirskii V. G. 2013, “Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 20, no. 2, pp. 149–154.

10. Chirskii V. G. 2014, “Arithmetic properties of poliadic series with periodic coefficients”, *Dokladi akademii nauk*, vol. 459, no. 6, pp. 677–679.

11. Chirskii V. G. 2014, “Arithmetic properties of hypergeometric series with irrational parameters”, *Izv. RAN. Ser. mat.*, vol. 78, no. 6, pp. 193—210.

12. Chirskii V. G. 2015, “On the arithmetic properties of Euler-type series”, *Vestnik Mosk. Univ. Ser.1, mat., mech.*, no. 1, pp. 59–61.

13. Chirskii V. G. 2015, “Arithmetic properties of polyadic integer numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 16, no. 1, pp. 254–264.

14. Chirskii V. G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients”, *Izv. RAN. Ser. mat.* vol. 81, no. 2, pp. 215–232.

15. Chirskii V. G. 2017, “Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 24, no. 2, pp. 153–171.

16. Chirskii V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series”, *Dokladi akademii nauk*, vol. 483, no. 3, pp. 257–259.

17. Chirskii V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series”, *Dokladi Mathematics*, vol. 98, no. 3, pp. 589–591.

18. Chirskii V. G. 2019, “Product formula, global relations and polyadic integers”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 26, no. 3, pp. 286–305.

19. Chirskii V. G. 2020, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric series”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 27, no. 2, pp. 175–184.

20. Koblitz N. 1982, p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions, 2nd ed.

21. Mahler K. 1935, “Uber transzendente p-adische Zahlen”, *Compos. Math.*, vol. 2, pp. 259–275.

22. Mahler K. 1981, p-adic numbers and their functions, second edition, Cambridge University Press, Cambridge.

23. Shidlovskii A. B. 1987, Transcendentnie chisla, [Transcendental numbers], “Nauka”, Moscow.

Получено 19.06.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-243-256

Линейная комбинация схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными из условия минимизации порядка погрешности аппроксимации[1]

А. И. Сухинов , А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко, А. М. Атаян

Александр Иванович Сухинов — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, Донской государственный технический университет (г. Ростов-на-Дону).
e-mail: sukhinov@gmail.com

Александр Евгеньевич Чистяков — доктор физико-математических наук, Донской государственный технический университет (г. Ростов-на-Дону).
e-mail: cheese_05@mail.ru

Елена Анатольевна Проценко — кандидат физико-математических наук, Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ) (г. Таганрог).
e-mail: eapros@rambler.ru

Ася Михайловна Атаян — аспирант, Донской государственный технический университет (г. Ростов-на-Дону).
e-mail: atayan24@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена определению диапазона значений сеточного числа Пекле, при котором предложенная схема, представляющая линейную комбинацию схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными из условия минимизации порядка погрешности аппроксимации, обладает лучшей точностью по сравнению с употребительными схемами, в том числе модификациями схемы «кабаре» с ограничителями. В статье получено ограничение на шаг по времени для разностной схемы с весами при котором погрешность расчетов находится в приемлемом диапазоне. Показано, что предложенная схема, построенная на основе линейной комбинации разностной схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами 2/3 и 1/3 соответственно, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации точнее схемы «кабаре» с ограничителями решает задачу конвекции при малых числах Куранта. Рассчитан диапазон чисел Пекле, при котором предложенная аппроксимация оператора конвективного переноса будет эффективна. На основании вышесказанного сделаны выводы о том, что предложенная модификация схемы «кабаре» для численного решения задачи диффузии-конвекции обладает лучшей точностью по сравнению с другими схемами, для значений сеточного числа Пекле в диапазоне $2 \leqslant Pe \leqslant 20$, что позволяет применять данный класс схем для численного решения задач вычислительной океанологии.

Ключевые слова: задача переноса, схема «крест», схема «кабаре», линейно-взвешенная комбинация, повышение точности.

Библиография: 25 названий.

[1]Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект 19–07–00623).

Для цитирования:
А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко, А. М. Атаян Линейная комбинация схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными из условия минимизации порядка погрешности аппроксимации // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 4, с. 243–256.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-243-256

Linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weight coefficients, obtained by minimizing the approximation error

A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. A. Protsenko, A. M. Atayan

Alexander Ivanovich Sukhinov — Corresponding member of the RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Don State Technical University (Rostov-on-Don).
e-mail: sukhinov@gmail.com
Alexander Evgenjevich Chistyakov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Don State Technical University (Rostov-on-Don).
e-mail: cheese_05@mail.ru
Elena Anatolevna Protsenko — PhD in Physico-mathematical sciences, Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of the Rostov State Economic University (RSUE) (Taganrog).
e-mail: eapros@rambler.ru
Asya Mikhaylovna Atayan — PhD student, Don State Technical University (Rostov-on-Don).
e-mail: atayan24@mail.ru

Abstract

The work is devoted to determining the range of grid Peclet number values, for which the proposed scheme, representing a linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weight coefficients, obtained by minimizing the approximation error, has higher accuracy than conventional schemes, including modifications Upwind Leapfrog difference scheme with limiters. The article obtained a limit on the time step for a difference scheme with weights at which the calculation error is in an acceptable range. It is shown that the proposed scheme, based on the basis of a linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weighting coefficients 2/3 and 1/3, respectively, obtained by minimizing the approximation error more precisely, the Upwind Leapfrog difference scheme with limiters solves the convection problem for small Courant numbers. Thus, the proposed modification of the Upwind Leapfrog difference scheme for the numerical solution of the diffusion-convection problem has higher accuracy than other schemes, for the values of the grid Peclet number in the range $2 \leqslant Pe \leqslant 20$, which allows you to use this class of schemes for the numerical solution of problems of computational oceanology.

Keywords: transfer problem, Upwind Leapfrog difference scheme, Standard Leapfrog difference scheme, linear-weighted combination, increase accuracy.

Bibliography: 25 titles.

For citation:
A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. A. Protsenko, A. M. Atayan, 2019, "Linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weight coefficients, obtained by minimizing the approximation error", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 243–256.

1. Введение

При численном решении задач транспорта взвесей в мелководных водоемах [1, 2, 3] на основе центрально-разностных схем возникает проблема, связанная с падением точности для больших значений сеточного числа Пекле [4, 5]. Одним из вариантов решения данной проблемы является измельчение шага по пространственной сетке, что влечет за собой увеличение трудоемкости. Например, при решении трехмерной задачи диффузии-конвекции для уменьшения числа Пекле в два раза необходимо уменьшить шаги по пространству в два раза, а по времени в четыре раза. Таким образом, трудоемкость возрастает в 32 раза. Другим подходом к решению данного класса задач является применение других разностных схем, например, схемы «кабаре». Схемы «кабаре» были разработаны для решения задач аэроакустики [6, 7]. В работе [8] предложено использовать линейную комбинацию схемы «кабаре» и «крест». В работе [9] рассчитаны оптимальные коэффициенты для данной схемы из условия минимизации порядка погрешности аппроксимации [10, 11, 12]. Целью данной работы является определение диапазона значений сеточного числа Пекле, при котором предложенная схема, представляющая линейную комбинацию схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными из условия минимизации порядка погрешности аппроксимации, обладает лучшей точностью по сравнению с употребительными схемами, в том числе модификациями схемы «кабаре» с ограничителями.

2. Точность решения задачи теплопроводности

Постановка задачи. Рассмотрим случай уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами:

$$q'_t = \mu q''_{xx} + f \ , \quad t > 0, \quad 0 < x < l \ , \tag{1}$$

$$q\left(x,t\right)\Big|_{t=0} = q^0\left(x\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \ , \tag{2}$$

$$q\left(0,t\right) = q_0\left(t\right), \qquad q\left(l,t\right) = q_l\left(t\right), \quad t \geqslant 0 \ . \tag{3}$$

Предполагаем необходимую гладкость функций, входящих в соотношения (1)-(3), и согласованность начальных и граничных условий.

Аналитическое решение уравнения диффузии. Найдем аналитическое решение задачи (1) при определенных предположениях. Будем предполагать, что функции и можно представить в виде конечных сумм - разложений по конечному тригонометрическому базису:

$$q \simeq \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(q)}\left(t\right)\sin(\omega m x), f \simeq \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(f)}\sin(\omega m x), \tag{4}$$

где $\omega = \pi/l$, $C_m^{(f)} = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\omega m x)dx$, $C_m^{(q)} = \frac{2}{l}\int_0^l q(x)\sin(\omega m x)dx$.

Следует отметить, что в случае табличного способа задания u_0, например, на пространственной сетке, ряд будет ограничен N гармоникой и для восстановления непрерывной функции применяется интерполяционный тригонометрический полином, где N – количество дискретных значений функции.

Далее рассматриваются функции, имеющие производную порядка α, удовлетворяющие неравенству $f^{(\alpha)}(x) \leqslant K$, с периодом 2π. Имеет место оценка остаточного члена ряда (4) для любого натурального α:

$$\sup|r| = \frac{4K}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^\alpha} + O(1/n^\alpha),$$

где

$$r = u(x/\omega, t) - \sum_{m=1}^{N-1} C\,(t)\sin(mx).$$

Функции u и f подставим в уравнение теплопроводности (1) и в результате несложных преобразований получим:

$$\left(\sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(q)} \sin(\omega m x)\right)_t' = \mu \left(\sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(q)} \sin(\omega m x)\right)_{xx}'' + \sum_{n=1}^{N-1} C_m^{(f)} \sin(\omega m x).$$

Меняя порядок действия операций дифференцирования и суммирования, и вычисляя производную по пространственной переменной, приходим к равенству:

$$\sum_{m=1}^{N-1} \left(C_m^{(q)}(t)\right)_t' \sin(\omega m x) = \sum_{m=1}^{N-1} \mu C_m^{(q)} \left(-\omega^2 m^2 \sin(\omega m x)\right) + \sum_{n=1}^{N-1} C_n^{(f)} \sin(\omega m x).$$

Принимая во внимание линейную независимость функций $\sin(\omega m x)$ для отличающихся друг от друга m, получаем:

$$\left(C_m^{(q)}(t)\right)_t' = -\mu\omega^2 m^2 C_m^{(q)} + C_m^{(f)}. \tag{5}$$

Решение уравнения (5) примет вид:

$$C_m^{(q)}(t) = \left(C_m^{(q)}(0) - \frac{C_m^{(f)}}{\mu\omega^2 m^2}\right) e^{-\mu\omega^2 m^2 t} + \frac{C_m^{(f)}}{\mu\omega^2 m^2}. \tag{6}$$

После преобразований, с учетом заданных начальных и граничных условий получаем следующее представление для функции решения [13]:

$$q = \sum_{m=1}^{N-1} \left(\left(C_m^{(q)}(0) - \frac{C_m^{(f)}}{\mu\omega^2 m^2}\right) e^{-\mu\omega^2 m^2 t} + \frac{C_m^{(f)}}{\mu\omega^2 m^2}\right) \sin(\omega m x). \tag{7}$$

Разностная схема для уравнения теплопроводности. Для численного решения задачи (1) покроем расчетную область равномерной сеткой:

$$w_h = \left\{t^n = n\tau,\, x_i = ih; n = \overline{0..N_t},\, i = \overline{0..N_x}; N_t\tau = T,\, N_x h = l\right\},$$

где τ – шаг по времени, h – шаг по пространству, M – верхняя граница по времени, N – количество узлов по пространству.

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} = \mu \frac{q_{i+1}^{n+\sigma} - 2q_i^{n+\sigma} + q_{i-1}^{n+\sigma}}{h^2} + f_i, \tag{8}$$

где $q_i^{n+\sigma} = \sigma q_i^{n+1} + (1-\sigma)\, q_i^n$, $\sigma \in [0,1]$ – вес схемы.

Необходимое условие устойчивости, полученное на основе метода гармоник, приводит к следующему неравенству [14]:

$$\gamma = \frac{\tau\mu}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом, получили. Несмотря на то, что данная оценка является жестким ограничением для явных разностных схем, на практике шаг по времени необходимо брать ещё меньше.

Модельная задача I. Требуется найти решение уравнения

$$q_t' = \mu q_{xx}'',\ \mu = 1m^2/s,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ q\left(t, 0\right) = 0$$

с начальными условиями: $q^0\left(x\right) = \theta(20 - x) - \theta(10 - x)$, где $\theta(x)$ – функция Хэвисайда.

Параметры расчетной сетки: шаг по времени находится в диапазоне от 0,001 до 10 с, шаг по пространству h =1 м, длина интервала по времени Т равна 60 с. На рисунке 1 представлена погрешность решения модельной задачи I на основе схемы (8), 1 – схема с весами ($\sigma = 0.5$), 2 – явная схема. Погрешность вычислений рассчитывается по формуле $\Psi = \sqrt{\sum_i \left(\tilde{q}_i - q_i\right)^2 / \sum_i q_i^2}$, где q_i – точное значение решения задачи диффузии в узле i, $\tilde{q}_i$ – численное решение, зависящее от величины шага по времени. По горизонтальной оси отложена величина шага по времени τ_0 отнесенного к величине $\tau_{\max}$ ($\tau_0 = \tau/\tau_{\max}$).

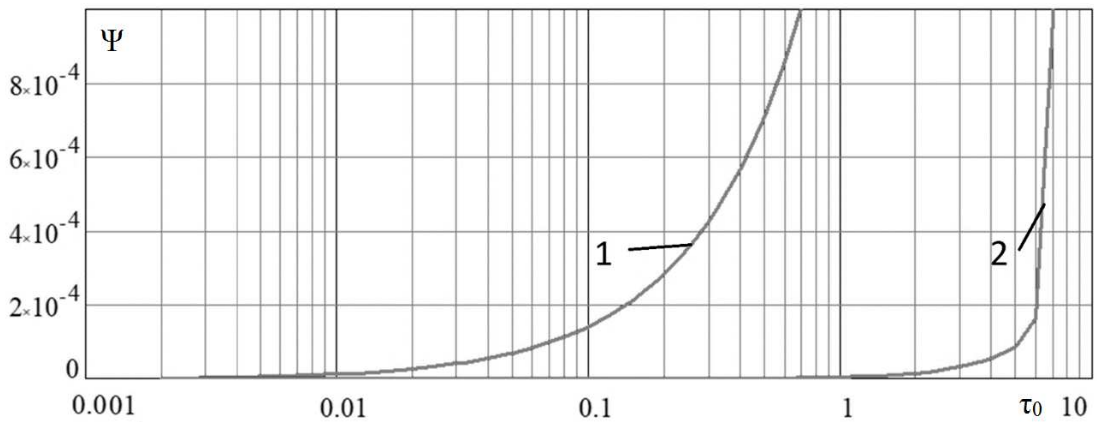


Рис. 1: Функция зависимости погрешности аппроксимации от шага по времени. 1 – для явной схемы, 2 – для схемы с весами

Для того чтобы относительная погрешность явной схемы была равна 0.01 % необходимо величину τ_0 брать равной 0.0717, в случае использования предложенной схемы с весами параметр τ_0 равен 5.1858.

Модельная задача II. Рассмотрим задачу, возникающую при моделировании транспорта взвеси в мелководных водоемах [15, 16]. Требуется найти решение двумерного уравнения диффузии для области, вытянутой в одном направлении

$$q_t' = \mu_x q_{xx}'' + \mu_y q_{yy}'' \ , \quad t > 0, \quad 0 < x < l_x \ , \quad 0 < y < l_y \ ,$$
$$\mu_x = 100\, m^2/s,\ \mu_y = 0.5\, m^2/s,\ l_x = 2000\, m,\ l_y = 5\, m$$

с начальными условиями:

$$q\left(x, y, t\right)|_{t=0} = \left(\theta(1100 - x) - \theta(900 - x)\right)\left(\theta(3 - y) - \theta(2 - y)\right),\ 0 \leqslant x \leqslant l_x, 0 \leqslant y \leqslant l_y$$

и граничными условиями в форме Дирихле.

Параметры расчетной сетки: шаги по пространству h_x=100 м и h_y=0.5 м, длина интервала по времени T равна 600 с. На рисунке 2 представлены решения модельной задачи II на основе: 1 – схемы с весами, 2 – явной схемы.

Из рисунков 1, 2 видим, что погрешность достижения для явной схемы ограничение на шаг по времени существенно меньше, чем для схемы с весами. Для того чтобы относительная погрешность явной схемы была равна одному проценту необходимо величину τ_0 брать равной 0.01376, в случае использования предложенной схемы с весами параметр τ_0 равен 0.34844.

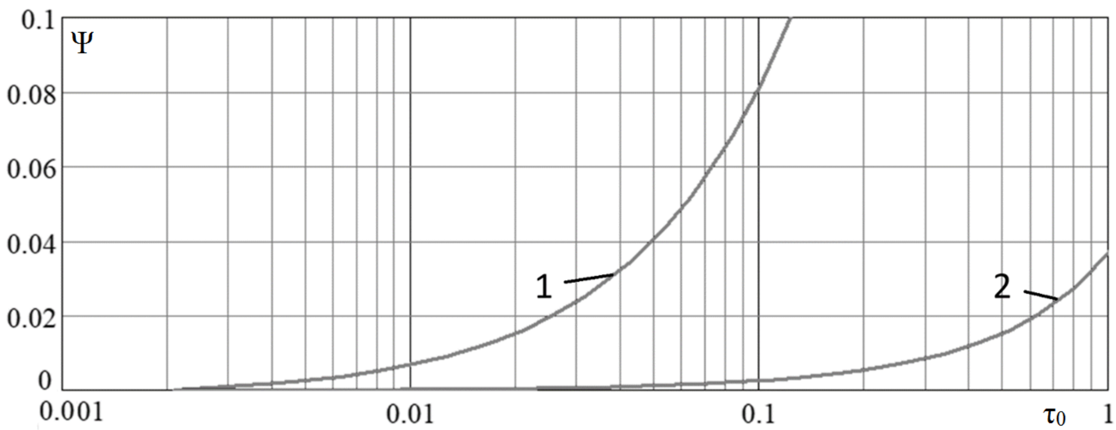


Рис. 2: Функция зависимости погрешности аппроксимации от шага по времени. 1 – для явной схемы, 2 – для схемы с весами

Замечание 1. Явная схема имеет устойчивое решение при ограничении $\tau \leqslant O\left(h^2\right)$ [17], а схема с весами при $\sigma \geqslant 0.5$ не имеет ограничений на шаг по времени. На практике для того, чтобы погрешность расчетов, на основе разностной схемы (8) с весом $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, находилась в приемлемом диапазоне необходимо использовать следующее ограничение на шаг по времени: $\tau \leqslant \Delta \cdot \left(\sum_{i=1}^{r} 2\mu_i/h_i^2\right)^{-1}$, где r – размерность пространства. Параметр Δ описывает отношение шага, который необходимо брать для того чтобы точность расчетов находилась в приемлемом диапазоне τ, к шагу полученному из ограничения на устойчивость явной схемы $\tau_{\max}$, при этом имеет место оценка $\tau_0 \leqslant \Delta$. При решении задач диффузии-конвекции необходимо находить значения Δ иначе, если шаг τ берется слишком большим, то погрешность будет велика, а если маленьким, то велики вычислительные трудозатраты. Для явной схемы параметр Δ рекомендуется брать равным 0.01, а для схемы с весом $\sigma = 0.5$ параметр Δ можно брать равным 0.3.

3. Решение задачи переноса на основе схемы «кабаре»

Рассмотрим уравнение переноса [18, 19]

$$q'_t + uq'_x = 0, \tag{9}$$

где $t \in [0, T]$, $x \in [0, l]$, $q\,(0, x) = q^0\,(x)$, $q\,(t, 0) = 0$, $u = const$.

Введем равномерную расчетную сетку

$$\omega = \overline{\omega}_h \times \omega_\tau,$$

где

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i | \, x_i = ih, \;\; i = 0, 1, ..., N, \;\; Nh = l \right\},$$

$$\omega_\tau = \left\{ t^n | \; n = 0, 1, \dots, \; T \right\}, \tau = t^{n+1} - t^n = const.$$

Для численного решения поставленной задачи можно использовать следующие конечно-разностные схемы: – схема «кабаре» [20]:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u\frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} = 0, u \geqslant 0; \tag{10}$$

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u\frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} = 0, u < 0;$$

– схема «крест» («чехарда»):

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}}{2\tau} + u\frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2h} = 0. \tag{11}$$

Замечание 2. Известно, что решение задачи (9) на основе центральных разностных схем не устойчиво при этом для решения данного класса задач показала свою эффективность схема «кабаре» с ограничителями [20].

Для решения задачи (9) будем использовать схему, построенную на основе линейной комбинации разностной схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами 2/3 и 1/3 соответственно, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3}\left(\frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u\frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h}\right) + \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u\frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} = 0,\ u \geqslant 0, \tag{12}$$

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3}\left(\frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u\frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h}\right) + \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u\frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} = 0, u < 0.$$

Модельная задача III. Рассмотрим задачу движения фронта концентраций [19, 21]. Требуется найти решение уравнения

$$q_t' + uq_x' = 0, u = 0.5m/s, 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant l, q\left(t, 0\right) = 0$$

с начальными условиями: $q^0\left(x\right) = \theta(70 - x) - \theta(60 - x)$.

На рис. 3. представлены значения погрешностей в норме L_1 ($\Psi^n = \sum_i \psi_i^n h$, $\psi_i^n = |q_i^n - q\left(x_i, t^n\right)|$, где $q\left(x_i, t^n\right)$ – точное решение задачи (9) в узле i, q_i^n – численное решение на временном шаге n, $n = T$) численного решения модельной задачи III на основе предложенной схемы (12), а также схем «крест» и «кабаре» с ограничителями в зависимости от значений чисел Куранта ($c = |u|\,\tau/h$). Длина интервала по времени T равна 100 c. Шаг по времени τ принимал значения 0.02 с до 2 с. Числа Куранта находятся в диапазоне от 0.01 до 1.

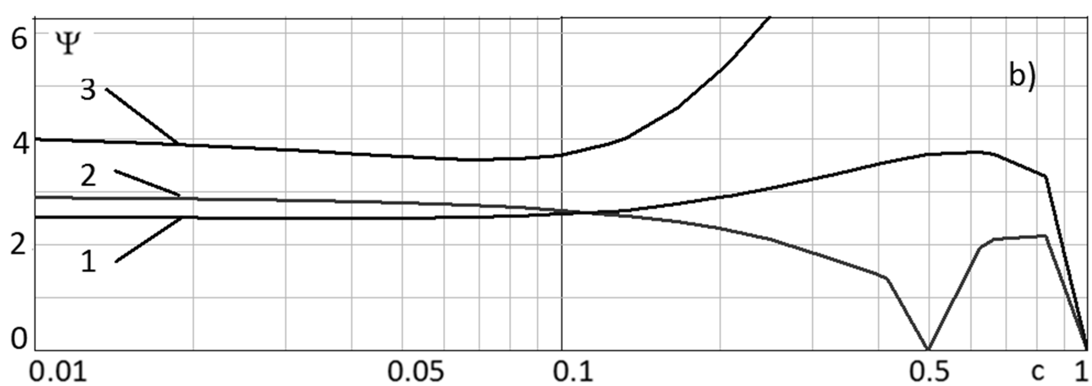


Рис. 3: Значения погрешностей численного решения модельной задачи III в зависимости от значений чисел Куранта. 1 – схемы, построенной на основе линейной комбинации разностной схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами 2/3 и 1/3 соответственно, 2 – схемы «кабаре» с ограничителями и 3 – схемы «крест» с ограничителями

Замечание 3. Из результатов расчета модельной задачи III видно, что предложенная схема (12) точнее схемы «кабаре» с ограничителями решает задачу конвекции при малых числах Куранта ($c = |u|\,\tau/h \leqslant 0.1$). Из результатов расчета задачи диффузии следует, что для явных схем имеет место ограничение $\tau \leqslant \Delta \cdot \tau_{\max}$, $\tau_{\max} = h^2/2\mu$, $\Delta = 0.01$. Из данных оценок следует, $\Delta\,|u|\,h/2\mu \leqslant 0.1$, где $Pe = |u|\,h/\mu \leqslant 0.1/\Delta = 20$, где Pe – сеточное число Пекле [13]. В данном диапазоне чисел Пекле будет эффективна предложенная аппроксимация оператора конвективного переноса (рассмотрен случай отсутствия монотонности схем, построенных на основе центрально-разностных аппроксимациях $Pe > 2$).

4. Решение задачи конвекции-диффузии

Рассмотрим уравнение конвекции-диффузии [22, 23]:

$$q'_t + uq'_x = \mu q''_{xx}, \tag{13}$$

где $t \in [0, T]$, $x \in [0, l]$, с граничными и начальными условиями:

$$q\,(0, x) = q^0\,(x)\,, q\,(t, 0) = q\,(t, l) = 0, u = const.$$

Аппроксимация задачи (13) с учетом разностного аналога оператора конвективного переноса (12) запишем в виде:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3}\left(\frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u\frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h}\right) + \tag{14}$$

$$+\frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u\frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} = 2\mu\frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{h^2}, \qquad u \geqslant 0,$$

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3}\left(\frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u\frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h}\right) +$$

$$+\frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u\frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} = 2\mu\frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{h^2}, u < 0.$$

Модельная задача IV. Требуется найти решение уравнения:

$$q'_t + uq'_x = \mu q''_{xx}, u = 0.5m/s, \mu = const, 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant l$$

с начальными и граничными условиями:

$$q^0\,(x) = \theta(70 - x) - \theta(60 - x), q\,(t, 0) = q\,(t, l) = 0.$$

Решение модельной задачи IV может быть представлено в виде [13]:

$$q\,(t, x) = \sum_{m=1}^{N-1} c_m^0 e^{-\mu\omega^2 m^2 t}\sin(\omega m x), c_m^0 = \frac{2}{L}\int_0^l q^0(x + ut)\sin(\omega m x)dx, \omega = \frac{\pi}{l}.$$

На рисунке 4 представлены графики функции погрешности Ψ^n решения модельной задачи IV на основе разностной схемы (14) и схемы «кабаре» с ограничителями решения в норме L_1, зависящей от сеточного числа Пекле. Параметры расчетной сетки: шаг по пространству $h = 1$ *м*, шаг по времени $\tau = 0.02$ с, пространственный интервал $L = 200$ м, величина интервала по времени T равна 100 *с*, коэффициент диффузии находится в диапазоне от $5{\times}10^{-4}$ до 0.5 м^2/с.

Замечание 4. Из результатов расчета модельной задачи IV видно, что предложенная схема (14) имеет незначительную погрешность в диапазоне чисел Пекле $Pe \leqslant 20$.

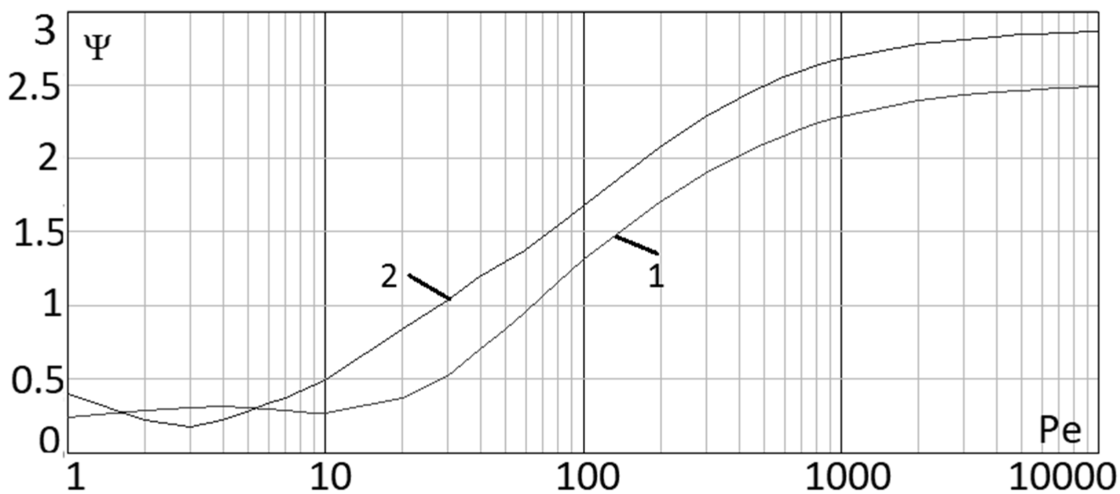


Рис. 4: Графики функции погрешности Ψ^n решения модельной задачи IV на основе разностной схемы (14) и схемы «кабаре» с ограничителями решения в норме L_1, зависящей от сеточного числа Пекле

Аппроксимация задачи (13) на основе явных центрально разностных схемах запишется в виде [24, 25]:

$$\frac{q_i^{n+1}-q_i^n}{\tau}+u\frac{q_{i+1}^n-q_{i-1}^n}{2h}=\mu\frac{q_{i+1}^n-2q_i^n+q_{i-1}^n}{h^2}. \qquad (15)$$

На рисунке 5 представлены графики функции погрешности Ψ^n решения модельной задачи IV на основе разностной схемы (14) и центрально-разностной схемы (15) в норме L_1, зависящей от сеточного числа Пекле. Параметры расчетной сетки: шаг по пространству h=1*м*, шаг по времени τ=0.02, пространственный интервал L = 200 м, величина интервала по времени T равна 100 *с*, коэффициент диффузии находится в диапазоне от 5×10^{-3} до 5 м^2/с.

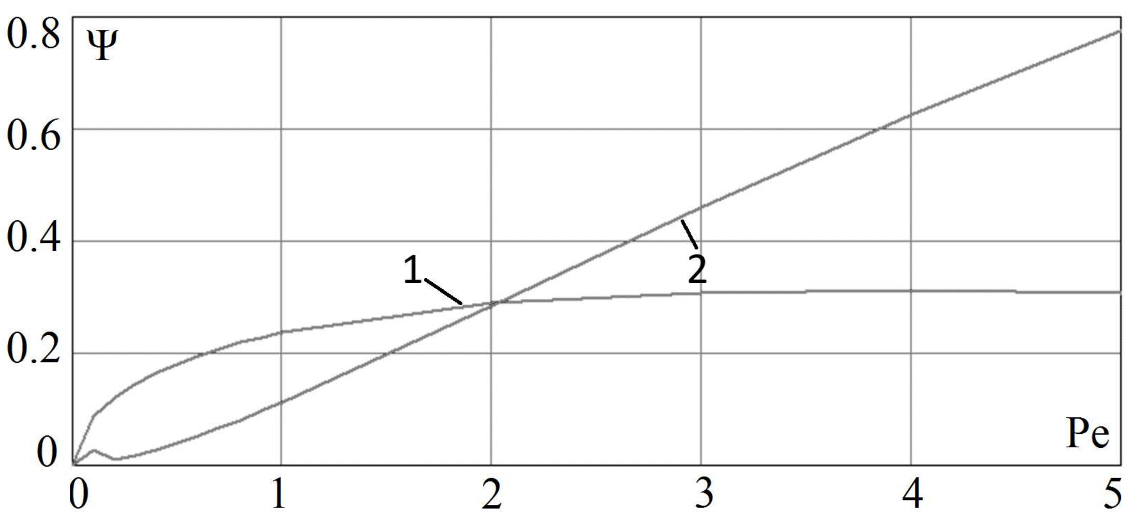


Рис. 5: Графики функции погрешности Ψ^n решения модельной задачи IV на основе разностной схемы (14) и центрально-разностной схемы (15) в норме L_1, зависящей от сеточного числа Пекле

Замечание 5. Из результатов расчета модельной задачи IV видно, что центрально-разностная схема (15) имеет меньшую погрешность в диапазоне чисел Пекле от 0 до 2 по сравнению с предложенной разностной схемой (14). На основании вышесказанного можно сделать вывод, что предложенная модификация схемы «кабаре» (14) обладает лучшей точностью по сравнению с другими рассмотренными в статье схемами для численного решения задачи диффузии-конвекции при следующих значениях сеточного числа Пекле: $2 \leqslant Pe \leqslant 20$.

5. Заключение

Явная схема имеет устойчивое решение при ограничении на шаг по времени $\tau \leqslant O\left(h^2\right)$, схема с весами безусловно устойчива для $\sigma \geqslant 0.5$. На практике для того, чтобы погрешность расчетов, на основе разностной схемы с весами при $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ была приемлемой можно ориентироваться на следующее ограничение на шаг по времени: $\tau \leqslant \Delta \cdot \left(\sum_{i=1}^{r} 2\mu_i/h_i^2\right)^{-1}$, где r – размерность пространства, параметр есть отношение вида $\tau/\tau_{\max}$, при этом имеет место оценка $\tau_0 \leqslant \Delta$. При решении задач диффузии-конвекции следует предварительно находить значения Δ. В противном случае для шагов, существенно превышающих рекомендованное значение τ, погрешность будет слишком велика, а если использовать значительно меньшие шаги по времени следует ожидать существенного увеличения вычислительных затрат. Для явной схемы параметр Δ рекомендуется брать равным 0.01, а для схемы с весом $\sigma = 0.5$ параметр Δ можно брать равным 0.3.

Для численного решения задачи конвекции на основе схем «кабаре» с ограничителями получено улучшение точности. Из результатов расчета модельной задачи III видно, что предложенная модификация схемы «кабаре» точнее, чем схема «кабаре» с ограничителями при малых числах Куранта ($c \leqslant 0.1$). Из результатов численного решения задачи диффузии следует, что для явных схем имеет место ограничение $\tau \leqslant \Delta \cdot \tau_{\max}$, $\tau_{\max} = h^2/2\mu$, $\Delta = 0.01$. Из данных оценок следует, что построенная линейная комбинация схемы «кабаре» и «крест» имеет превосходство по точности при значениях сеточного числа Пекле, вплоть до 20 ($Pe \leqslant 20$).

Численное решение модельной задачи IV показало, что центрально-разностная схема имеет меньшую погрешность для сеточного числа Пекле от 0 до 2 по сравнению с предложенной разностной схемой. На основании вышесказанного можно сделать вывод, что предложенная модификация схемы «кабаре» для численного решения задачи диффузии-конвекции обладает лучшей точностью по сравнению с другими схемами, рассматриваемыми в статье для значений сеточного числа Пекле в диапазоне $2 \leqslant Pe \leqslant 20$, что позволяет применять данный класс схем для численного решения задач вычислительной океанологии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alekseenko E. Coastal hydrodynamics in a windy lagoon / Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., Kotarba R., Fougere D. // Computers and Fluids. – 2013. – 77, P. 24-35.

2. А. В. Никитина, А. И. Сухинов, Г. А. Угольницкий, А. Б. Усов, А. Е. Чистяков, М. В. Пучкин, И. С. Семенов, “Оптимальное управление устойчивым развитием при биологической реабилитации Азовского моря”, Матем. моделирование, 28:7 (2016), 96–106.

3. А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. В. Алексеенко, “Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе”, Матем. моделирование, 23:3 (2011), 3–21.

4. А. И. Сухинов, Д. С. Хачунц, А. Е. Чистяков, “Математическая модель распространения примеси в приземном слое атмосферы прибрежной зоны и ее программная реализация”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 55:7 (2015), 1238–1254.

5. А. И. Сухинов, Ю. В. Белова, А. Е. Чистяков, “Решение задачи переноса веществ при больших числах Пекле”, Выч. мет. программирование, 18:4 (2017), 371–380.

6. Thomas, J.P. and Roe P.L., "Development of Non-Dissipative Numerical Schemes for Computational Aeroacoustics,"AIAA paper 93-3382-CP, presented at the 11th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida, July 6– 9, 1993.

7. S. C. Chang, X. Y. Wang, and C. Y. Chow, New Developments in the Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element—Applications to Two-Dimensional Time-Marching Problems, NASA TM 106758 (NASA, December 1994).

8. В. Ю. Глотов, В. М. Головизнин, “Схема КАБАРЕ для двумерной несжимаемой жидкости в переменных “скорость–давление””, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 53:6 (2013), 898–913.

9. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., “ О разностных схемах кабаре и крест ”, Выч. мет. программирование, 20:2 (2019), 170-181.

10. А. А. Самарский, “О регуляризации разностных схем”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7:1 (1967), 62–93.

11. А. А. Самарский, “Классы устойчивых схем”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7:5 (1967), 1096–1133.

12. Р. П. Федоренко, “Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2:6 (1962).

13. А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, М. В. Якобовский, “Точность численного решения уравнения диффузии-конвекции на основе разностных схем второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации”, Вестн. ЮУрГУ. Сер. Выч. матем. информ., 5:1 (2016), 47–62.

14. П. Н. Вабищевич, А. А. Самарский, “Разностные схемы для задач конвекции-диффузии на нерегулярных сетках”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 40:5 (2000), 726–739; Comput. Math. Math. Phys., 40:5 (2000), 692–704.

15. Sukhinov A. Modelling of oil spill spread / Sukhinov A., Chistyakov A., Nikitina A., (...), Korovin I., Schaefer G. // 5th International Conference on Informatics, Electronics and Vision, ICIEV 2016. – 2016. – 7760176, P. 1134-1139.

16. Sukhinov A.I. Complex of models, explicit regularized schemes of high-order of accuracy and applications for predictive modeling of after-math of emergency oil spill / Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Semenyakina A.A., Chistyakov A.E. // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – 1576, P. 308-319.

17. Б. Н. Четверушкин, “Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред”, Матем. моделирование, 24:11 (2012), 33–52; Boris N. Chetverushkin, “Resolution limits of continuous media models and their mathematical formulations”, Math. Models Comput. Simul., 5:3 (2013), 266–279.

18. Sukhinov A.I. Solution of the problem of biological rehabilitation of shallow waters on multiprocessor computer system / Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Levin I.I., (...), Nikitina A.V., Semenyakina A.A. //5th International Conference on Informatics, Electronics and Vision, ICIEV 2016. – 2016. – 7760175, P. 1128-1133.

19. В. А. Гущин, “Об одном семействе квазимонотонных разностных схем второго порядка аппроксимации”, Матем. моделирование, 28:2 (2016), 6–18.

20. В. М. Головизнин, А. А. Самарский, “Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной”, Матем. моделирование, 10:1 (1998), 86–100.

21. М. Е. Ладонкина, О. А. Неклюдова, В. Ф. Тишкин, “Использование разрывного метода Галеркина при решении задач газовой динамики”, Матем. моделирование, 26:1 (2014), 17–32.

22. И. В. Абалакин, А. Н. Антонов, И. А. Граур, Б. Н. Четверушкин, “Использование алгебраической модели турбулентности для расчета нестационарных течений в окрестности выемок”, Матем. моделирование, 12:1 (2000), 45–56.

23. Buzalo N. Mathematical modeling of microalgae-mineralization-human structure within the environment regeneration system for the biosphere compatible city / Buzalo N., Ermachenko P., Bock T., (...), Zhmenya E., Zakharchenko N. // Procedia Engineering. – 2014. – 85, P. 84-93.

24. А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. Ф. Тимофеева, А. В. Шишеня, “Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов”, Матем. моделирование, 24:8 (2012), 32–44.

25. Sukhinov A.I. Reconstruction of 2001 Ecological Disaster in the Azov Sea on the Basis of Precise Hydrophysics Models (Book Chapter) // Sukhinov A.I., Sukhinov A.A. // Parallel Computational Fluid Dynamics 2004: Multidisciplinary Applications. – 2005. – P. 231-238.

REFERENCES

1. Alekseenko E. Coastal hydrodynamics in a windy lagoon / Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., Kotarba R., Fougere D. // Computers and Fluids. – 2013. – 77, P. 24-35.

2. A. Nikitina, A. I. Sukhinov, G. A. Ugolnitsky, A. B. Usov, A. E. Chistyakov, M. Puchkin, I. S. Semenov, “Optimal control of sustainable development in biological rehabilitation of the Azov Sea”, Math. Models Comput. Simul., 9:1 (2017), 101–107.

3. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. V. Alekseenko, “Numerical realization of three-dimensional model of hydrodynamics for shallow water basins on high-performance system”, Math. Models Comput. Simul., 3:5 (2011), 562–574.

4. A. I. Sukhinov, D. S. Khachunts, A. E. Chistyakov, “A mathematical model of pollutant propagation in near-ground atmospheric layer of a coastal region and its software implementation”, Comput. Math. Math. Phys., 55:7 (2015), 1216–1231.

5. Sukhinov A.I. Solution of the matter transport problem at high Peclet number / A. I. Sukhinov, Yu. V. Belova, A. E. Chistyakov // Vychisl. Metody Programm. – 2017. – v. 18, No 4. – P. 371-380.

6. Thomas, J.P. and Roe P.L., "Development of Non-Dissipative Numerical Schemes for Computational Aeroacoustics,"AIAA paper 93-3382-CP, presented at the 11th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida, July 6– 9, 1993.

7. S. C. Chang, X. Y. Wang, and C. Y. Chow, New Developments in the Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element—Applications to Two-Dimensional Time-Marching Problems, NASA TM 106758 (NASA, December 1994).

8. V. Yu. Glotov, V. M. Goloviznin, “CABARET scheme in velocity-pressure formulation for two-dimensional incompressible fluids”, Comput. Math. Math. Phys., 53:6 (2013), 721–735.

9. Sukhinov A., Chistyakov A., Protsenko E., Upwind and standard leapfrog difference schemes, Vychisl. Metody Programm. 20:2 (2019), 170-181.

10. A. A. Samarskii, “Regularization of difference schemes”, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 7:1 (1967), 79–120.

11. A. A. Samarskii, “Classes of stable schemes”, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 7:5 (1967), 171–223.

12. R. P. Fedorenko, “The application of difference schemes of high accuracy to the numerical solution of hyperbolic equations”, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 2:6 (1963), 1355–1365.

13. Sukhinov A.I. Accuracy of the numerical solution of the equations of diffusion-convection using the difference schemes of second and fourth order approximation error / A. I. Sukhinov, A. E. Chistakov, M. V. Iakobovskii // Vestn. YuUrGU. Ser. Vych. Matem. Inform. – 2016. – Vol.5. – № 1. – P. 47-62.

14. Samarskii A. A., Numerical methods for solving convection-diffusion problems / A. A. Samarskiy, P. N. Vabischevich. – M.: Ed. URSS, 1998. – 248 P. 64.

15. Sukhinov A. Modelling of oil spill spread / Sukhinov A., Chistyakov A., Nikitina A., (...), Korovin I., Schaefer G. // 5th International Conference on Informatics, Electronics and Vision, ICIEV 2016. – 2016. – 7760176, P. 1134-1139.

16. Sukhinov A.I. Complex of models, explicit regularized schemes of high-order of accuracy and applications for predictive modeling of after-math of emergency oil spill / Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Semenyakina A.A., Chistyakov A.E. // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – 1576, P. 308-319.

17. Boris N. Chetverushkin, “Resolution limits of continuous media models and their mathematical formulations”, Math. Models Comput. Simul., 5:3 (2013), 266–279.

18. Sukhinov A.I. Solution of the problem of biological rehabilitation of shallow waters on multiprocessor computer system / Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Levin I.I., (...), Nikitina A.V., Semenyakina A.A. //5th International Conference on Informatics, Electronics and Vision, ICIEV 2016. – 2016. – 7760175, P. 1128-1133.

19. Valentin A. Gushchin, “On a one family of quasimonotone finite-difference schemes of the second order of approximation”, Math. Models Comput. Simul., 8:5 (2016), 487–49.

20. Goloviznin V. M. Finite difference approximation of convective transport equation with space splitting time derivative / V. M. Goloviznin, A. A. Samarskii // Matem. Mod., 10:1 (1998), 86–100.

21. M. E. Ladonkina, O. A. Neklyudova, V. F. Tishkin, “Application of the RKDG method for gas dynamics problems”, Math. Models Comput. Simul., 6:4 (2014), 397–407.

22. Abalakina I. V. Application of the algebraic turbulent model to the unsteady flow simulation around a cavity / I. V. Abalakina, A. N. Antonova, I. A. Graura, B. N. Chetverushkin // Matem. Mod.. – 2000. – v. 12. – No 1. – P. 45-56.

23. Buzalo N. Mathematical modeling of microalgae-mineralization-human structure within the environment regeneration system for the biosphere compatible city / Buzalo N., Ermachenko P., Bock T., (...), Zhmenya E., Zakharchenko N. // Procedia Engineering. – 2014. – 85, P. 84-93.

24. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. F. Timofeeva, A. V. Shishenya, “Mathematical model for calculating coastal wave processes”, Math. Models Comput. Simul., 5:2 (2013), 122–129.

25. Sukhinov A.I. Reconstruction of 2001 Ecological Disaster in the Azov Sea on the Basis of Precise Hydrophysics Models (Book Chapter) // Sukhinov A.I., Sukhinov A.A. // Parallel Computational Fluid Dynamics 2004: Multidisciplinary Applications. – 2005. – P. 231-238.

Получено 12.06.2019 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 51-72; 533; 537 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-257-269

Численное исследование распространения ударной волны малой интенсивности из чистого газа в электрически заряженную запылённую среду

Д. А. Тукмаков, А. А. Ахунов

Дмитрий Алексеевич Тукмаков — кандидат физико-математических наук, ИММ-обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН (г. Казань).
e-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru

Адель Айратович Ахунов — аспирант, Казанский национальный технический университет имени А. Н. Туполева (г. Казань).
e-mail: bars95@yandex.ru

Аннотация

Данная работа посвящена численному моделированию процесса распространения ударной волны малой интенсивности из чистого газа в неоднородную среду представляющею собой газовую взвесь твердых частиц. В вычислительных экспериментах рассматривались как электрические нейтральные, так и заряженные взвеси твердых частиц. В использованной в работе математической модели сохранение компонент импульса несущей среды описывалось системой уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа в двухмерной постановке. При описании взаимодействия несущей и дисперсной фазы газовзвеси учитывались сила Стокса, динамическая сила Архимеда, сила присоединённых масс, также учитывался межфазный теплообмен. Для дисперсной компоненты смеси решалась полная гидродинамическая система уравнений движения, включавшая в себя уравнение неразрывности, сохранений импульса и энергии. Система уравнений математической модели дополненная граничными условиями решалась явным конечно-разностным методом второго порядка точности. Также в численной модели использовался алгоритм подавления численных осцилляций. Численное моделирование показало, что наличие электрического заряда в дисперсной компоненте смеси оказывает воздействие на движение дисперсной компоненты и вследствие межфазного взаимодействия на течение газа. В результате численных расчётов было выявлено, что увеличение размера частиц приводит к существенному росту межфазного скоростного скольжения. Было определено, что интенсивность скоростного скольжения между несущей и дисперсной фазами в электрически заряженной запылённой среде возрастает в направлении увеличения удельной силы Кулона, в то время как в электрически нейтральной газовзвеси рост скоростного скольжения происходит в направлении движения ударной волны.

Ключевые слова: многофазные среды, ударные волны, сила Кулона, межфазное взаимодействие, численное моделирование.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:

Д. А. Тукмаков, А. А. Ахунов. Численное исследование распространения ударной волны малой интенсивности из чистого газа в электрически заряженную запылённую среду // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 257–269.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 51-72; 533; 537 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-257-269

Numerical study of the propagation of a small shock wave intensity from a homogeneous gas to an electrically charged dusty environment

D. A. Tukmakov, A. A. Ahunov

Dmitry Alekseevich Tukmakov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, IME KazSC RAS (Kazan).
e-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru
Adel Ayratovich Ahunov — graduate student, Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev (Kazan).
e-mail: bars95@yandex.ru

Abstract

The paper is devoted to numerical modeling of the process of propagation of a low-intensity shock wave from a pure gas into an inhomogeneous medium, which is a gas suspension of solid particles. Computational experiments considered both electric neutral and charged suspensions of solid particles. In the mathematical model used in the work, the conservation of the momentum components of the carrier medium was described by the system of Navier-Stokes equations for a compressible gas in a two-dimensional formulation. When describing the interaction of the carrier and the dispersed phase of the gas suspension, the Stokes law, Archimedes' principle, the virtual masses force were considered, interphase heat transfer was also taken into account. For the dispersed component of the mixture, a complete hydrodynamic system of equations of motion was solved. It included the equation of continuity, the equation of conservation of momentum and energy. The system of equations of the mathematical model, supplemented by boundary conditions, was solved by an explicit finite-difference method of the second order of accuracy. In the numerical model, an algorithm for suppressing numerical oscillations was also used. Numerical modeling showed that the presence of an electric charge in the dispersed component of the mixture affects the movement of the dispersed component and, due to interfacial interaction, the gas flow. As a result of numerical calculations, it was found that an increase in particle size leads to a significant increase in interfacial velocity slip. It was determined that the intensity of the velocity slip between the carrier and the dispersed phases in an electrically charged dusty medium occurs in the direction of increasing the specific Coulomb force. While in an electrically neutral gas suspension, the growth of velocity slip occurs in the direction of motion of the shock wave.

Keywords: multiphase media, shock waves, Coulomb force, interfacial interaction, numerical simulation.

Bibliography: 27 titles.

For citation:
D. A. Tukmakov, A. A. Ahunov, 2020, "Numerical study of the propagation of a small shock wave intensity from a homogeneous gas to an electrically charged dusty environment", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 257–269.

1. Введение

Одним из разделов современной механики жидкости и газа является механика многофазных сред. Частным случаем многофазных сред являются гетерогенные смеси-среды, состоящие из компонент имеющих разные агрегатные состояния. Такими смесями, например, могут быть газовзвеси — газокапельные и запылённые среды [1-9]. В ряде случаев возникает необходимость моделирования течений газовзвесей компоненты, которых движутся как под действием аэродинамических сил, так и под действием электрических сил [10-15]. Изучение таких процессов требует определения того насколько существенно влияют силы различной природы на общею динамику смеси. В данной работе исследуется воздействие электрического заряда и механических свойств частиц дисперсной компоненты смеси на распространение ударной волны из чистого газа в запылённую среду.

2. Математическая модель

Математическая модель состоит из системы уравнений движения несущей среды- вязкого сжимаемого теплопроводного газа [16] и системы уравнений движения дисперсной фазы. В данной работе используется континуальная методика моделирования гетерогенной смеси [1,2] предполагающая, что для дисперсной компоненты записывается уравнение непрерывности «средней плотности» — произведения объемного содержания дисперсной компоненты на физическую плотность материала дисперсной фазы. Объемное содержание является функцией временной и пространственных переменных. При этом физическая плотность материала дисперсных включений в процессе течения многофазной среды не изменяется. Динамика несущей среды описывается полной двухмерной газодинамической системой уравнений для вязкого сжимаемого теплопроводного газа:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}) = F_x + \alpha\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1 v_1 + p - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_1^2 + p - \tau_{yy}) = F_y + \alpha\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}([e_1 + p - \tau_{xx}]u_1 - \tau_{xy}v_1 + \lambda\frac{\partial T_1}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}([e_1 + p - \tau_{yy}]v_1 - \tau_{xy}u_1 + \lambda\frac{\partial T_1}{\partial y}) =$$

$$= -Q - (|F_x|(u_1 - u_2) + |F_y|(v_1 - v_2)) + \alpha\left(\frac{\partial(pu_1)}{\partial x} + \frac{\partial(pv_1)}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

$$p = (\gamma - 1)(e - \rho(u_1^2 + v_1^2)/2),$$

$$e_1 = \rho_1(I + (u_1^2 + v_1^2)/2),$$

$$\tau_{xx} = \mu\left(2\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3}D\right), \tau_{yy} = \mu\left(2\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3}D\right),$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right), D = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right),$$

Здесь $\rho_1, u_1, v_1, e_1, T_1, \lambda, \mu, \gamma$ — средняя плотность несущей фазы, компоненты вектора скорости несущей фазы, полная энергия и температура высокотемпературного газа, коэффициенты теплопроводности, вязкости и постоянная адиабаты для несущей газообразной среды, $I = RT/(\gamma - 1)$ внутренняя энергия несущей среды (здесь R газовая постоянная для воздуха)

[2]; компоненты силы межфазного трения F_x, F_y и тепловой поток с поверхности дисперсной фазы Q определяются законами межфазного взаимодействия. Для описания движения дисперсной фазы используются уравнение сохранения средней плотности дисперсной фазы, уравнение сохранения импульса и уравнение сохранения внутренней энергии [2]:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial x} + \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_2 u_2 v_2) = -F_{x2} - F_{Ex2} - \alpha\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2 v_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_2 v_2^2) = -F_{y2} - F_{Ey2} - \alpha\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$
$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x}(e_2 v_2) = Nu_{12}\frac{6\alpha}{(2r)^2}\lambda(T_1 - T_2)$$
$$\rho_2 = \alpha\rho_{20}, e_1 = \rho_2 C_{p_2} T_2$$

Здесь α, ρ_2 , e_2 , T_2 — объемное содержание, средняя плотность, внутренняя энергия и температура дисперсной фазы; C_{p_2} , ρ_{20} — удельная теплоемкость и плотность вещества твердых частиц, r-радиус частиц имеющих сферическую форму. Компоненты силы межфазного взаимодействия F_x и F_y определяются следующим образом:

$$F_x = \frac{3\alpha}{8r_2}C_{d2}\rho\sqrt{(u_1-u_2)^2 + ((v_1-v_2)^2}\,(u_1-u_2) + \rho_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) +$$
$$+0.5\alpha\rho_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + F_{Ex}$$
$$F_y = \frac{3\alpha}{8r_2}C_{d2}\rho\sqrt{(u_1-u_2)^2 + ((v_1-v_2)^2}\,(v_1-v_2) + \alpha\rho_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) +$$
$$+0.5\alpha\rho_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial t} - v_2\frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2\frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + F_{Ey}$$

Выражение для межфазного теплообмена:

$$Q = 6\alpha\lambda Nu_{12}(T_1 - T_2)/(2r)^2$$

Параметры межфазного взаимодействия описаны в работе [2]:

$$C_{d2} = C_{d2}^0\phi(M_{12})\psi(\alpha), C_{d2}^0 = \frac{24}{Re_{12}} + \frac{4}{Re_{12}^{0.5}} + 0.4,$$

$$\phi(M_{12}) = 1 + \exp(-\frac{-0.427}{M_{12}^{0.63}}), \psi(\alpha) = (1-\alpha)^{-2.5},$$

$$Re = \rho_1 u_1 D/\mu, Re_{12} = r\rho_1|u_1 - u_2|/\mu, M_{12} = |u_1 - u_2|, Pr_1 = c_{p1}\mu(\lambda)^{-1},$$
$$Nu_{12} = 2\exp(-M_{12}) + 0.459 Re_{12}^{0.55} Pr_1^{0.33}, 0 < M_{12} < 2, 0 < Re < 2 * 10^5.$$

Здесь D-характерный размер системы, r-радиус частиц дисперсной фазы.

Составляющие силы Кулона на единицу объема газовзвеси определяются через ее удельный заряд, объемную плотность твердой фазы и напряженность электрического поля:

$$F_{Ex} = -q_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}, F_{Ey} = -q_0\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

где q_0 — удельный заряд единицы массы твердой компоненты смеси, φ — потенциал электрического поля. Потенциал электрического поля в расчетной области определяется из решения уравнения Пуассона с однородными граничными условиями Неймана, в той части канала, которая заполнена электрически заряженной запалённой средой и однородными граничными условиями Дирихле, в той части канала, которая заполнена однородным газом [17-20]:

$$divE = \frac{\rho_e}{\epsilon\epsilon_0}, E = -\nabla\varphi\ , \rho_e = \alpha\rho_{20}q_0, \Delta\varphi = -\frac{\alpha\rho_{20}q_0}{\epsilon\epsilon_0} \tag{3}$$

В правой части уравнения Пуассона содержится плотность заряда газовзвеси, отнесенная к произведению относительной и абсолютной диэлектрической проницаемости несущей среды $-\epsilon$ и ϵ_0 соответственно. В матричном виде система уравнений (1)-(2) может быть записана как:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = H;$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_1 u_1 \\ \rho_1 v_1 \\ \rho_2 u_2 \\ \rho_2 v_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy} \\ \rho_2 u_2^2 \\ \rho_2 u_2 v_2 \\ (e_1 + p - \tau_{xx})u_1 - \tau_{xy} v_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \\ e_2 u_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho_1 v_1 \\ \rho_2 v_2 \\ \rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy} \\ \rho_1 v_1^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho_2 u_2 v_2 \\ \rho_2 v_2^2 \\ (e_1 + p - \tau_{yy})v_1 - \tau_{xy} u_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial y} \\ e_2 v_2 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_x + \alpha\frac{\partial p}{\partial x} \\ -F_y + \alpha\frac{\partial p}{\partial y} \\ F_x - \alpha\frac{\partial p}{\partial x} \\ -F_y - \alpha\frac{\partial p}{\partial y} \\ -Q - |F_x|(u_1 - u_2) - |F_y|(v_1 - v_2) + \alpha_2\frac{\partial p u_1}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial p v_1}{\partial y} \\ Q \end{bmatrix}.$$

Для системы уравнений (4) численное решение явным методом Мак-Кормака может быть записан следующим образом [21]:

$$q^*_{jk} = q^n_{jk} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(E^n_{j+1k} - E^n_{jk}) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(F^n_{jk+1} - F^n_{jk}) + \Delta t H^n_{jk},$$

$$q^{n+1}_{jk} = 0.5(q^*_{jk} + q^n_{jk}) - 0.5\frac{\Delta t}{\Delta x}(E^*_{jk} - E^*_{j-1k}) - 0.5\frac{\Delta t}{\Delta y}(F^*_{jk} - F^*_{jk-1}) + 0.5\Delta t H^*_{jk}.$$

Монотонность решения достигалась с помощью применения схемы нелинейной коррекции вдоль пространственных направлений x и y по индексам j,k соответсвенно к компонентам вектора независимых переменных [22]: **q**

$$\mathbf{q} = (\rho_1, \rho_2, \rho_1 u_1, \rho_1 v_1, \rho_2 u_2, \rho_2 v_2, e_1, e_2)$$

Пусть $Z^n_{j,k}$ — произвольная независимая функция на n-ом веременном слое в узле j,k. Тогда алгоритм корекции имел бы следующий вид:

$$Z^{n*}_{j,k} = Z^n_{j,k} + \kappa(\delta Z^n_{j+1/2,k} - \delta Z^n_{j-1/2,k}), \tag{5}$$

где $Z^{n*}_{j,k}$ -скорректированная функция.

Данный алгоритм выполняется в случае когда $(\delta Z^n_{j-1/2,k}\delta Z^n_{j+1/2,k}) < 0$ или $(\delta Z^n_{j+1/2,k}$ $\delta Z^n_{j+3/2,k}) < 0$. Здесь используются обозначения

$$\delta Z^n_{j-1/2,k} = Z^n_j - Z^n_{j-1,k}, \delta Z^n_{j+1/2,k} = Z^n_{j+1,k} - Z^n_{j,k}, \delta Z^n_{j+3/2,k} = Z^n_{j+2,k} - Z^n_{j+1k},$$

где κ-коэффициент коррекции.

Уравнение Пуассона (3) для потенциала электрического поля записывалось в обобщенных координатах и решалось методом конечных разностей с помощью итерационной схемы метода установления [23] на газодинамической расчетной сетке. Система уравнений дополнялась соответствующими начальными и граничными условиями. На границах расчетной области задавались граничные условия Дирихле для составляющих скорости несущей и дисперсной фазы и граничные условия Неймана для остальных функций [2,16,18-20,24-26].

В работе [25] было проведено сопоставление результатов расчётов нестационарных течений неоднородной среды, проведенных описанной ниже методикой моделирования, с известными из литературы результатами численного моделирования в которых применялся метод крупных частиц [2]. Также результаты расчётов ударно-волновых течений запылённой среды явным конечно-разностным методом Мак-Кормака [26] были сопоставлены с результатами физического эксперимента [27]. Сопоставление расчётов течений многофазных сред с численными расчетами, проведёнными на основе другой методики моделирования и результатами физического эксперимента, показали приемлемое соответствие.

3. Результаты расчётов

В расчётах предполагалось, что давление газа в камерах высокого и низкого давлений p_2=107.8 КПа и p_1=98 КПа, соответственно. Дисперсная фаза в камере низкого давления имела объёмное содержание α=0.0005, и истинную плотность материала ρ_{20}=1850 кг /м ^{3}. Длинна канала составляла- L=10 м, ширина канала составляла- h=0.1 м; предполагалось, что все частицы дисперсной фазы имеют электрический заряд одинакового знака, с удельным массовым зарядом q_0=0.001 Кл/кг-рис.1.

В отличие от движения ударной волны по чистому газу при заполнении камеры низкого давления запылённой средой –скорость движения ударной волны меньше при этом выше интенсивность давления на переднем крае ударной волны-рис. 2.

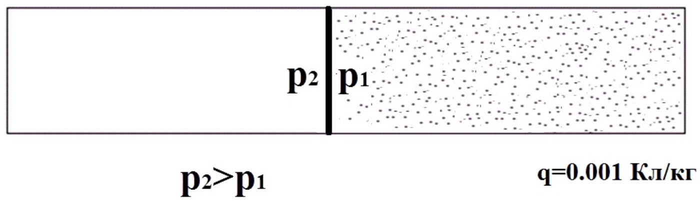


Рис. 1: Схематичное изображение канала с электрически заряженной газовзвесью в начальный момент времени

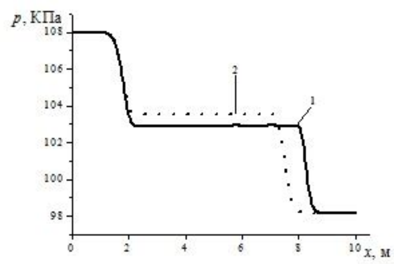


Рис. 2: Распределение давления: в чистом газе –кривая 1 и при распространении ударной волны из чистого газа в запылённую среду-кривая 2. Размер частиц d=4 мкм. t= 11 мс.

В случае, когда камера низкого давления заполнена электрически заряженной дисперсной фазой все частицы которой имеют одинаковый заряд, действие силы Кулона внутреннего электрического поля генерируемого электрически заряженной средой направлено в сторону противоположную положительному направлению координатной оси- рис.3.

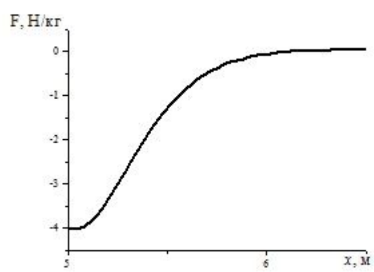


Рис. 3: Распределение удельной силы Кулона вдоль канала.t= 10 мс

На рисунке 4 (а,б) представлены распределения давления при прохождении ударной волны из чистого газа в газовзвесь с электрически заряженной и нейтральной дисперсной фазой для различных размеров частиц твердой компоненты газовзвеси. Сопоставление распределений давления показывает, что в электрически заряженной газовзвеси на участке движущегося за ударной волной спутного потока газа наблюдается неравномерное увеличение и уменьшение давления, характерное для волн сжатия и разряжения. В то время как давление в области спутного потока газа, движущегося за ударной волной в электрически нейтральной газовзвеси распределено монотонно. При уменьшении размера частиц электрически заряженной газовзвеси увеличивается значение максимального перепада давления: для частиц с диаметром d=4 мкм величина перепада между максимальным и минимальным значениями составляет Δp=2013 Па для газовзвесей с диаметром частиц d=400 мкм Δp=316 Па.

В мелкодисперсной газовзвеси наблюдается меньшая скорость движения несущей среды –рис.5 (а,б). Отличие в значении скоростей газа для электрически нейтральной и заряженной

а) б)

Рис. 4: Давление несущей среды при распространении ударной волны в газовзвесь с дисперсностью частиц — d=4 мкм: рис.4,а и и в газовзвесь с размером частиц d=400 мкм:рис.4,б; t= 11 мс. Кривые 1 и 2 соответственно электрически нейтральная и заряженная газовзвеси.

а) б)

Рис. 5: Продольная составляющая скорости газа при распространении ударной волны в газовзвесь с дисперсностью частиц — d=4 мкм: рис.5,а и в газовзвесь с размером частиц d=400 мкм:рис.5,б; t= 11 мс. Кривые 1 и 2 соответственно электрически нейтральная и заряженная газовзвеси.

а) б)

Рис. 6: Продольная составляющая скорости дисперсной компоненты газовзвеси при распространении ударной волны в газовзвесь с дисперсностью частиц — d=4 мкм: рис.6,а и в газовзвесь с размером частиц d=400 мкм:рис.6,б; t= 11 мс. Кривые 1 и 2 соответственно электрически нейтральная и заряженная газовзвеси.

газовзвесей более выражено для частиц меньшего размера. Одновременно с этим в электрически заряженной газовзвеси скорость дисперсной компоненты смеси отличается от скорости дисперсной компоненты в электрически нейтральной запылённой среде –рис. 6 (а,б). Данная закономерность связана с тем, что в электрически заряженной газовзвеси все частицы имеют одинаковый заряд и под действием силы Кулона распространяются в ту часть канала в которой расположен чистый газ, другими словами сила Кулона имеет направление противоположное направлению движения ударной волны. Для мелкодисперсной газовзвеси значение влияние силы Кулона имеет меньшее значение –рис.6,а, чем для крупнодисперсной электрически заряженной среды –рис.6,б.

Одним из наиболее важных параметров описывающих нестационарные течения в дисперс-

а) б)

Рис. 7: Величина скоростного скольжения между несущей и дисперсной компонентами газовзвеси при распространении ударной волны в газовзвесь с дисперсностью частиц — d=4 мкм: рис.7,а и в газовзвесь с размером частиц d=400 мкм:рис.7,б; t= 11 мс. Кривые 1 и 2 соответственно электрически нейтральная и заряженная газовзвеси.

ных средах является скоростное скольжение компонент смеси [2]. В электрически заряженной газовзвеси, когда частицы движутся под действием как аэродинамических, так и электрических сил величина скоростного скольжения отличается от величины скоростного скольжения в нейтральной газовзвеси- рис.7 (а,б). При этом рост абсолютного значения скоростного скольжения фаз сонаправлен увеличению значения силы Кулона воздействующей на единицу массы запылённой среды –рис.3, в то время как наибольшее значение скоростного скольжения электрически нейтральной газовзвеси наблюдается на переднем крае ударной волны. За счёт воздействия сил внутреннего электрического поля электрически заряженных твердых частиц газовзвеси скорость движения дисперсной компоненты смеси при воздействии ударной волны на газовзвесь меньше, чем если бы частицы не имели электрического заряда. В процессе распространения ударной волны из чистого газа в запылённую среду после прохождения ударной волны в газовзвесь втекает спутный поток газа движущейся за ударной волной. В электрически заряженной газовзвеси в связи с меньшей скоростью дисперсной фазы спутный поток газа движущийся за ударной волной формирует отраженное возмущение, распространяющееся по спутному потоку газа в направлении противоположном направлению движения ударной волны.

В данной модели рассматриваться частицы сферической формы по этой причине уменьшение линейного размера частиц приводит к уменьшению площади одной частицы на два порядка и увеличению количества частиц на три порядка. Таким образом уменьшение линейного размера частиц приводит к кратному увеличению площади соприкосновения газа и дисперсной компоненты газовзвеси. Этим можно объяснить, то, что интенсивность отраженного возмущения возрастает с уменьшением размера частиц.

Для дисперсной компоненты смеси наблюдается обратная тенденция — при увеличении линейного размера частицы происходит увеличение массы частицы на три порядка, таким образом на крупные частицы сила Кулона оказывает более существенное влияние-рис.7,б.

4. Выводы

Результаты численных расчётов показывают, что при распространении ударной волны малой интенсивности из чистого газа в запылённую среду на в спутном потоке газа образуется отраженное от поверхности контакта чистого газа и запылённой среды возмущение давления. Интенсивность отраженного возмущения обратно пропорциональна размеру частиц дисперсной фазы. Скорость движения частиц дисперсной фазы в электрической газовзвеси отличается от скорости движения частиц дисперсной фазы в электрически нейтральной запылённой среде для мелкодисперсных частиц скорость дисперсной компоненты меньше, чем в электрически нейтральной среде, для крупнодисперсных частиц скорость движения имеет направление противоположное направлению распространения ударной волны.

С увеличением размера частиц интенсивность межфазного скоростного скольжения возрастает. В электрически заряженной газовзвеси максимальное значения скоростного скольжения достигается в направлении наибольшей удельной силы Кулона.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч.1 Наука, 1987. 464с.
2. Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. Санкт-Петербург: «Недра», 2003, 284 с.
3. Кисилев С. Г., Руев Г. А., Трунев А. П., Фомин В. Ф., Шавалиев М. Ш. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск: Наука, 1992, 261 с.
4. Федоров А. В., Фомин В. М., Хмель Т. А. Волновые процессы в газовзвесях частиц металлов/ Новосибирск, 2015. 301 с.
5. Садин Д. В. TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа//Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 12. С. 2098-2109.
6. Федоров А. В., Михайлов А. Л., Финюшин С. А., Калашников Д. А., Чудаков Е. А., Бутусов Е. И., Гнутов И. С. Регистрация параметров множественного откола и внутренней структуры облака частиц при ударноволновом нагружении металлов //Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2016. Т. 149. № 4. С. 792-795.
7. Вараксин Ю. А. , Протасов М. В., Яценко В. П. Анализ механизмов осаждения твердых частиц на стенки каналов. //Теплофизика высоких температур, 2013, №5. С.738-746.
8. Веревкин А. А., Циркунов Ю. М. Течение дисперсной примеси в сопле Лаваля и рабочей секции двухфазной гиперзвуковой ударной трубы // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49.№ 5 (291). С. 102–113.
9. Глазунов А. А., Дьяченко Н. Н., Дьяченко Л. И. Численное исследование течения ультрадисперсных частиц оксида алюминия в сопле ракетного двигателя твердого топлива. // Теплофизика и аэромеханика, 2013, №1. С. 81-88.
10. Zhuoqing A., Jesse Z. Correlating the apparent viscosity with gas-solid suspension flow in straight pipelines//Powder Technology, Volume 345, 1 March 2019, Pages 346-351. DOI: 10.1016/j.powtec.2018.12.098
11. Tadaa Y. , Yoshioka S., Takimoto A., Hayashi Y. Heat transfer enhancement in a gas–solid suspension flow by applying electric field// International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 93, February 2016, p. 778-787. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.063
12. Jaiswal S., Hall T., LeBlanc S., Mukherjee R., Thomas E. Effect of magnetic field on the phase transition in a dusty plasma //Physics of Plasmas (2017), https://doi.org/10.1063/1.5003972.
13. Mazumder M. K., Wankum D. L., Sims R. A. Influence of powder properties on the performance of electrostatic coating process // J. Electrostat ,1997, Vol. 40, P. 369–374.

14. Зинченко С. П., Толмачёв Г. Н. О накоплении продуктов распыления сегнетоэлектрической мишени в плазме тлеющего высокочастотного разряда //Прикладная физика. 2012. № 5. С. 53-56.

15. Дикалюк А. С., Суржиков С. Т. Численное моделирование разреженной пылевой плазмы в нормальном тлеющем разряде// Теплофизика высоких температур, 2012, том 50, № 5, с. 611–619.

16. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Москва: Издательство "Дрофа". 2003 г. 784 с.

17. Сальянов Ф. А. Основы физики низкотемпературной плазмы, плазменных аппаратов и технологий. Москва: Наука, 1997.240 с.

18. Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Генерация акустического возмущения движущейся заряженной газовзвесью// Инженерно-физический журнал, 2018, №5, С.1-7.

19. Тукмаков А. Л., Кашапов Н. Ф., Тукмаков Д. А., Фазлыйяхматов М. Г. Процесс осаждения заряженной полидисперсной газовзвеси на поверхность пластины в электрическом поле //Теплофизика высоких температур, 2018, том 56, выпуск 4, с.498–502.

20. Тукмаков Д. А. Численное моделирование колебаний электрически заряженной гетерогенной среды, обусловленных межкомпонентным взаимодействием //Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27, № 3. С. 73-85.

21. Fletcher C. A. Computation Techniques for Fluid Dynamics. Berlin:Springer-Verlang, 1988, 502 p.

22. Музафаров И. Ф., Утюжников С. В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование, 1993, т.5, №3, с.74-83.

23. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. Т.2, Москва: «Наука», 1977, 401 с.

24. Тукмаков А. Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2006. № 4. С. 33-36.

25. Губайдуллин Д. А. Тукмаков Д. А. Численное исследование эволюции ударной волны в газовзвеси с учетом неравномерного распределения частиц // Математическое моделирование. 2014, Т.26, №10. С.109- 119.

26. Нигматулин Р. И., Губайдуллин Д. А., Тукмаков Д. А. Ударно-волновой разлет газовзвесей //Доклады академии наук, 2016, том 466, № 4, с. 418–421.

27. Гельфанд Б. Е., Губанов А. В., Медведев Е. И., Цыганов С. А. Ударные волны при разлете сжатого объема газовзвеси твёрдых частиц // ДАН СССР. 1985, Т. 281, № 5 С.1113-1116.

REFERENCES

1. Nigmatulin R. I. 1987, "Dinamika mnogofaznyh sred". Part.1 "Nauka", 464 p.

2. Kisilev S. G., Ruev G. A., Trunev A. P., Fomin V. F., SHavaliev M. SH. 1992, "Udarno-volnovye processy v dvuhkomponentnyh i dvuhfaznyh sredah". Novosibirsk: Nauka, 261 p.

3. Kutushev A. G. 2003, “Matematicheskoe modelirovanie volnovyh processov v aerodispersnyh i poroshkoobraznyh sredah”. Sankt-Peterburg: «Nedra», 284 p.

4. Fedorov A. V., Fomin V. M., Hmel’ T. A. 2015, “Volnovye processy v gazovzvesyah chastic metallov“. Novosibirsk. 301 p.

5. Sadin D. V. 2016, “TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* , V. 56. No 12. pp. 2068-2078.

6. Fedorov A. V., Mikhailov A. L., Finyushin S. A., Kalashnikov D. A., Chudakov E. A., Butusov E. I., Gnutov I. S. 2016, “Detection of the multiple spallation parameters and the internal structure of a particle cloud during shock-wave loading of a metal” *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, V. 122. No 4. pp. 685-688.

7. Varaksin A. Y., Protasov M. V., Yatsenko V. P. 2013, “Analysis of the deposition processes of solid particles onto channel walls” *High Temperature*, V. 51. No 5. pp. 665-672.

8. Verevkin A. A., Tsirkunov Y. M. 2008, “Flow of a dispersed phase in the Laval nozzle and in the test section of a two-phase hypersonic shock tunnel” *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, V. 49. N 5. pp. 789-798.

9. Glazunov A. A., Dyachenko N. N., Dyachenko L. I. 2013, “Numerical investigation of the flow of ultradisperse particles of the aluminum oxide in the solid-fuel rocket engine nozzle” *Thermophysics and Aeromechanics*, 2013. V. 20. No 1. pp. 79-86.

10. Zhuoqing A. Jesse Z. 2019, “Correlating the apparent viscosity with gas-solid suspension flow in straight pipelines” *Powder Technology*, Volume 345, No 1, pp. 346-351. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.12.098`

11. Tadaa Y. , Yoshioka S., Takimoto A., Hayashi Y. 2016, “Heat transfer enhancement in a gas–solid suspension flow by applying electric field” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 93, p. 778-787. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.063

12. Jaiswal S., Hall T., LeBlanc S., Mukherjee R., Thomas E. 2017, “Effect of magnetic field on the phase transition in a dusty plasma” *Physics of Plasmas* https://doi.org/10.1063/1.5003972.

13. Mazumder M. K., Wankum D. L., Sims R. A. 1997, “Influence of powder properties on the performance of electrostatic coating process” *J. Electrostat* , Vol. 40, pp. 369–374.

14. Zinchenko S. P., Tolmachev G. N. 2013, “Accumulation of products of ferroelectric target sputtering in the plasma of an rf glow discharge” *Plasma Physics Reports*, V. 39. No 13. pp. 1096-1098.

15. Dikalyuk A. S., Surzhikov S. T. 2012,“Numerical simulation of rarefied dusty plasma in a normal glow discharge“ *High Temperature*, V. 50. No 5. pp. 571-578.

16. Lojcyanskij L. G. 2003, “ Mekhanika zhidkosti i gaza”. Moskva: Izdatel’stvo “Drofa”. 784 p.

17. Sal’yanov F. A. 1997, “Osnovy fiziki nizkotemperaturnoj plazmy, plazmennyh apparatov i tekhnologij” Moskva: Nauka, 240 p.

18. Tukmakov A. L., Tukmakov D. A. 2018, “Generation of Acoustic Disturbances by a Moving Charged Gas Suspension” *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, Volume 91, Issue 5, pp. 1141–1147.

19. Tukmakov A. L. , Kashapov N. F., Tukmakov D. A., Fazlyyyakhmatov M.G. 2018, “Process of the Deposition of Charged Polydisperse Gas Suspension on the Plate Surface in an Electrical Field“*High Temperature* ,Volume 56, Issue 4, pp. 481–485.

20. Tukmakov D. A. 2019, “CHislennoe modelirovanie kolebanij elektricheski zaryazhennoj geterogennoj sredy, obuslovlennyh mezhkomponentnym vzaimodejstviem” *Izv. vuzov. Prikladnaya nelinejnaya dinamika.* V. 27, No 3. pp. 73-85.

21. Fletcher C. A. 1988, “Computation Techniques for Fluid Dynamics” Berlin:Springer-Verlang, 502 p.

22. Muzafarov I. F., Utyuzhnikov S. V. 1993, “Primenenie kompaktnyh raznostnyh skhem k issledovaniyu nestacionarnyh techenij szhimaemogo gaza” *Matematicheskoe modelirovanie*, V.5, No 3, pp.74-83.

23. Krylov V. I., Bobkov V. V., Monastyrnyj P. I. 1977, “Vychislitel’nye metody“/ Part.2, Moskva: «Nauka», 401 p.

24. Tukmakov A. L. 2006, “CHislennoe modelirovanie akusticheskih techenij pri rezonansnyh kolebaniyah gaza v zakrytoj trube” *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Aviacionnaya tekhnika* No 4. , pp. 33-36.

25. Gubajdulli D. A., Tukmakov D. A. 2015, “Numerical investigation of the evolution of a shock wave in a gas suspension with consideration for the nonuniform distribution of the particles”. *Mathematical Models and Computer Simulations*, V. 7. No 3, pp. 246-253.

26. Nigmatulin R. I., Gubaidullin D. A., Tukmakov D. A. 2016, “Shock Wave Dispersion of Gas–Particle Mixtures” *Doklady Physics*, Vol. 61, No. 2, pp. 70–73.

27. Gel’fand B. E., Gubanov A. V., Medvedev E. I., Cyganov S. A. 1985, Udarnye volny pri razlete szhatogo ob"ema gazovzvesi tvyordyh chastic” *DAN SSSR*, V.281, I. 5-pp.1113-1116.

Получено 11.12.2019 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-270-301

Обобщённая формула бинома Ньютона и формулы суммирования

В. Н. Чубариков

Владимир Николаевич Чубариков — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Аннотация

В основе работы лежит формула бинома Ньютона и её обобщения на последовательности многочленов биномиального типа. Даны применения к обобщённой проблеме Варинга (Хуа Ло-кен) и проблеме Гильберта – Камке (Г.И.Архипов). Доказана формула Тейлора – Маклорена для многочленов и гладких функций и даны её приложения в численном анализе (решение уравнений методом касательных Ньютона, лемма Гензеля в полных неархимедовских полях, приближенное вычисление значений гладких функций в точке). Даётся аналог формулы бинома Ньютона для многочленов Бернулли и доказывается формула Эйлера — Маклорена суммирования значений функции по целым точкам, выведена формула Пуассона суммирования значений функции. Рассмотрены примеры последовательностей многочленов биномиального типа (степени, нижние и верхние факториальные степени, многочлены Абеля и Лагерра). Найдены биномиальные свойства многочленов Аппеля и Эйлера. Для многочленов и гладких функций от нескольких переменных доказана формула Тейлора, получены многомерные аналоги формул Эйлера – Маклорена и Пуассона суммирования значений функции по решётке. Рассмотрен многомерный аналог этих формул для решётки в многомерном комплексном пространстве. Доказаны ряд свойств последовательности многочленов биномиального типа от нескольких переменных.

Ключевые слова: бином Ньютона, последовательность многочленов биномиального типа, нижние и верхние факториальные многочлены, многочлены Абеля, Лагерра, Аппеля, Бернулли, Эйлера, формулы Тейлора–Маклорена, формулы суммирования Эйлера–Маклорена.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков. Обобщённая формула бинома Ньютона и формулы суммирования // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 270–301.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-270-301

A generalized Binomial theorem and a summation formulae

V. N. Chubarikov

Vladimir Nikolaevich Chubarikov — doctor of physical and mathematical sciences, professor, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Abstract

The paper is based on the Binomial theorem and its generalizations to the polynomials of binomial type. Thus, we give some applications to the generalized Waring problemm (Loo-Keng Hua) and Hilbert-Kamke problem (G.I.Arkhipov). We also prove Taylor-Maclaurin formula for the polynomials and smooth functions and give its applications to the numerical analysis (Newton's root-finding algorithm, Hensel lemma in full non-archimedian fields, approximate evaluaion of the function at given point). Next, we prove an analogue of Binomial theorem for Bernoulli polynomials, Euler-Maclaurin summation formula over integers and Poisson summation formula for the lattice and consider some examples of binomial-type polynomials (monomials, rising and falling factorials, Abel and Laguerre polynomials). We prove some binomial properties op Appel and Euler polynomials and establish the multidimensional Taylor formula and the analogues of Euler-Maclaurin and Poisson summation formulas over the lattices. Finally, we consider the multidimensional analogues of these formulas for the multidimensional complex space and prove some properties of binomial-type polynomials of several variables.

Keywords: the Newton binomial formula, a sequence of the binomial type polynomials, lower and upper factoriales, the Abel, Laguerre, Appell, Bernoulli, Euler polynomials, the Taylor–Maclauren formula, the Euler–Maclauren formula.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, 2020, "A generalized Binomial theorem and a summation formulae", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 270–301.

1. Введение

Источником для написания настоящей работы явились прекрасные исследования по комбинаторике, алгебре и математическому анализу ([1]-[18]). В основе её лежат свойства биномиальных коэффициентов и сама формула бинома Ньютона. В первую очередь нас будут интересовать алгебраические и аналитические стороны последовательностей многочленов $p_n(x)$ с коэффициентами из некоторого поля (или евклидова кольца с единицей), удовлетворяющих следующей последовательности тождеств

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(x), p_0(x) = 1, p_m(0) = 0(n \geq 0, m \geq 1),$$

где $p_n(x)$ — многочлен точной степени n со старшим коэффициентом, равным 1. Последовательность таких многочленов называется последовательностью биномиального типа ([9]). Примерами их являются следующие последовательности многочленов:

$$p_n(x) = x^n, n \geq 0$$

(степени),

$$p_n(x) = x(x-1)\dots(x-n+1), n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

(нижние факториалы),

$$p_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1), n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

(верхние факториалы),

$$p_n(x) = x(x-an)^{n-1}, n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

(многочлены Абеля),

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}(-x)^k, n \geq 1, p_0(x) = 1$$

(многочлены Лагерра).

Представляется интересным изучение обобщённого бинома смешанного типа. Пусть задана последовательность многочленов $q_n(x)$ биномиального типа, и пусть выполняется следующая последовательность тождеств

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q_{n-k}(x) p_k(y), n \geq 0,$$

тогда последовательность $p_n(x)$ назовём последовательностью смешанного типа. К такому типу относятся следующие последовательности:

$$p_n(x) = B_n(x), q_n(x) = x^n$$

($B_n(x)$ — многочлены Бернулли),

$$p_n(x) = E_n(x), q_n(x) = x^n$$

($E_n(x)$ — многочлены Эйлера),

$$p_n(x) = A_n(x), q_n(x) = x^n$$

($A_n(x)$ — многочлены Аппеля). Все эти многочлены будут определены позже.

Хотя, как правило, нами используются элементарные методы (принцип математической индукции, рекуррентные соотношения), но при доказательстве ряда теорем мы не отказываемся от методов из основ математического анализа и простейших утверждений из теории дифференциальных уравнений.

Заключительная часть работы посвящена многочленам от нескольких переменных, являющихся обобщёнными многочленами биномиального и полиномиального типа.

2. Бином Ньютона и формула Тейлора–Маклорена

Для полноты изложения здесь мы приводим с полными доказательствами классические утверждения, от которых будем отталкиваться при изучении свойств последовательностей многочленов биномиального и смешанного типов.

2.1. Бином Ньютона

Сразу отметим, что формула бинома Ньютона лежит в основе алгебры и комбинаторики многочленов и математического анализа.

Теорема 1. (Формула бинома Ньютона). *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}.$$

Числа $\binom{n}{m}, 0 \leq m \leq n$, называются биномиальными коэффициентами и равны числу сочетаний из n различных элементов по $m \geq 1$ различным элементам. При $m = 0$ по определению полагаем $\binom{n}{0} = 1$. Сочетанием из n по m различным элементам называется выбор m различных элементов из n различных элементов. Все сочетания из n по m можно разбить на два типа: содержащие n-й элемент или не содержащие его. Число сочетаний первого типа равно $\binom{n-1}{m-1}$, поскольку приходится делать из оставшихся $n-1$ элементов выбор $m-1$ различных элементов. Число сочетаний второго типа равно $\binom{n-1}{m}$. Таким образом получаем основное рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}.$$

Доказательство. При $n = 0$ формула очевидно верна. Предположим, что она справедлива для $n = m$. Докажем её для $n = m+1$. Пользуясь предположением индукции и основным рекуррентным соотношением для биномиальных коэффициентов, имеем цепочку равенств

$$(x+y)^{m+1} = (x+y)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{k+1} y^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} x^k y^{m-k+1} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k+1} =$$

$$\binom{m}{m} x^{m+1} + \binom{m}{0} y^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right) x^k y^{m-k+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^k y^{m-k+1},$$

что и требовалось доказать.

Дадим другое доказательство теоремы, не использующее основное рекуррентное соотношение. Воспользуемся производной степенной функции $(x^n)' = nx^{n-1}$. Индукция по n. При $n = 0$ теорема очевидно верна. Предположим она верна при $n = m$. Докажем утверждение теоремы при $n = m+1$. Используя предположение индукции, имеем

$$\frac{d(x+y)^{m+1}}{dx} = (m+1)(x+y)^m = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k}.$$

Далее проинтегрируем это выражение по x. Получим

$$(x+y)^{m+1} = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} y^{m-k} + C(y) = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^k y^{m-k+1} + C(y).$$

Подставляя в это соотношение $x = 0$, находим

$$C(y) = y^{m+1} = \binom{m+1}{0} y^{m+1}.$$

Следовательно, справедливо искомое равенство.

2.2. Обобщённая проблема Варинга, проблема Гильберта – Камке

Далее дадим арифметические приложения формулы бинома Ньютона к исследованию базисных свойств последовательности значений многочлена степени n (обобщённая проблема Варинга (Хуа Л.-к.[2],1940)) и последовательности значений векторов $(x, x^2, \ldots, x^n)$ (проблема Гильберта – Камке (Г.И.Архипов[13],1981)). Это касается только нижних оценок для числа переменных соответствующих сравнений и систем сравнений полиномиального вида. В оригинальной работе Г.И.Архипова, введённые им многочлены, представлял ись через верхние факториальные многочлены, а многочлены Хуа Ло-кена — через нижние факториальные многочлены.

Теорема 2 (Хуа Л.-к. – Г.И.Архипов). *Пусть $n \geq 1, x$ — целые, и пусть*

$$H_n(x) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} \binom{x}{s} 2^{s-1}$$

многочлен степени n. Тогда имеем

$$H_n(x) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2^n}, & \textit{если} \quad 2|x, \\ (-1)^{n-1} \pmod{2^n}, & \textit{если} \quad 2 \not| x. \end{cases}$$

Доказательство. По формуле Тейлора находим

$$(-1)^x = (1-2)^x = \sum_{s=0}^{x} \binom{x}{s} (-2)^s = 1 + \sum_{s=1}^{n} \binom{x}{s} (-2)^s + \sum_{s=n+1}^{x} \binom{x}{s} (-2)^s \equiv$$

$$\equiv 1 + 2(-1)^n H_n(x) \pmod{2^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$H_n(x) \equiv (-1)^n \frac{(-1)^x - 1}{2} \pmod{2^n}.$$

Теорема доказана.

Пусть $P(x)$ — целозначный многочлен степени n с положительным старшим коэффициентом. Хуа Ло-кен нашёл оценки количества переменных $G(n; P(x))$ для разрешимости при всех достаточно больших N обобщённого уравнения Варинга

$$P(x_1) + \cdots + P(x_s) = N$$

в неотрицательных целых неизвестных $x_1, \ldots, x_s$.

Поскольку $H_n(x)$ принимает только два несравнимых по модулю 2^n значения: 0 и $(-1)^{n-1}$, для разрешимости сравнения

$$H_n(x_1) + \cdots + H_n(x_s) \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$$

необходимо выполнение условия $s \geq 2^n - 1$.

Более того, так как при чётном n многочлен $H_n(x)$ принимает только три несравнимых по модулю 2^{n+1} значения: $0, -1$ и $2^n - 1$, то для разрешимости сравнения

$$H_n(x_1) + \cdots + H_n(x_s) \equiv 2^n \pmod{2^{n+1}}$$

необходимо выполнение условия $s \geq 2^n$.

Следовательно,

$$G(n; H_n(x)) \geq \begin{cases} 2^n - 1, & \text{если } (n, 2) = 1, \\ 2^n, & \text{если } 2|n. \end{cases}$$

Представим многочлен $H_n(x)$ в виде

$$H_n(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s x^s.$$

Г.И.Архипов нашёл необходимые и достаточные условия разрешимости системы уравнений Гильберта – Камке

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k = N_1, \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n = N_n, \end{cases}$$

в натуральных числах $x_1, \dots, x_k$, и дал верхние и нижние оценки для числа переменных k.

Для того чтобы система сравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k \equiv N_1 \pmod{2^n}, \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n \equiv N_n \pmod{2^n}, \end{cases}$$

была разрешима, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$k \geq b_0,$$

где b_0 — наименьший неотрицательный вычет числа $b = b(N_1, \dots, N_n)$ по модулю 2^n,

$$b = \sum_{s=1}^{n} a_s N_s.$$

В самом деле, из разрешимости предыдущей системы сравнений следует, что разрешимо сравнение

$$H_n(x_1) + \dots + H_n(x_k) \equiv b \pmod{2^n}.$$

Если положить $N_1 \equiv \dots \equiv N_k \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$, то $b \equiv b_0 \pmod{2^n}$. Отсюда получим, что при $k \geq b_0 \geq 2^n - 1$ система сравнений Гильберта – Камке разрешима.

Формула бинома Ньютона лежит в основе многочлена Тейлора. Справедливо следующее утверждение.

2.3. Формула Тейлора для многочленов над полем и для гладких функций на вещественной оси

Теорема 3. (Формула Тейлора). *Пусть* $n \geq 0, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, a_n \neq 0,$ — *многочлен степени* n *над некоторым полем* $\mathbf{F}$. *Тогда для любых чисел* x *и* y *из* $\mathbf{F}$ *имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} y^k,$$

где $f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)'$ — k*-я производная многочлена* $f(x)$, *причём*

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1, \quad f^{(0)}(x) = f(x).$$

Доказательство. Индукция по n. При $n=0$ утверждение теоремы очевидно. Предположим утверждение теоремы верно при $n=m$. Докажем справедливость его при $n=m+1$. Имеем

$$f(x)=g(x)+a_{m+1}x^{m+1}, g(x)=\sum_{k=0}^{m}a_kx^k.$$

По предположению индукции получим

$$g(x+y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}y^k,$$

а по формуле бинома Ньютона

$$a_{m+1}(x+y)^{m+1}=a_{m+1}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}x^{m+1-k}y^k=a_{m+1}\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(x^{m+1})^{(k)}}{k!}y^k.$$

Стало быть,

$$f(x+y)=g(x+y)+a_{m+1}(x+y)^{m+1}=\sum_{k=0}^{m}\frac{\left(g(x)+a_{m+1}x^{m+1}\right)^{(k)}}{k!}y^k+\frac{f^{(m+1)}(x)}{(m+1)!}y^{m+1}=$$
$$=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}y^k.$$

Теорема доказана.

Пусть теперь поле $\mathbf{F}$ является полем вещественных чисел. Тогда справедлива следующая формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 4. *Пусть существует $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда для любых чисел x и y из $[a,b]$ справедливо тождество*

$$f(x+y)=P_n(x;y)+R_n(x;y),$$

где

$$P_n(x;y)=P_n(x;y;f)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}y^k,$$

где $f^{(k)}(x)=\left(f^{(k-1)}(x)\right)'$ — k-я производная функции $f(x)$,

$$R_n=R_n(x;y)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}y^{n+1},$$

причём c — некоторая точка, принадлежащая интервалу с концами x и $x+y$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $y>0$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi_n=\varphi_n(x;y)=f(x+y)-P_n(x;y)-Hy^{n+1}.$$

Найдём параметр H из условия $\varphi_n(x;y)=0$.

Очевидно, имеем

$$\varphi_n(x;0)=\left.\frac{d\varphi_n(x;y)}{dy}\right|_{y=0}=\dots=\left.\frac{d^n\varphi_n(x;y)}{dy^n}\right|_{y=0}=0.$$

Из условия $\varphi_n(x;0) = \varphi_n(x;y) = 0$ по теореме Ролля получим, что найдётся точка c_1 такая, что $0 < c_1 < y$ и $\frac{d\varphi_n(x;y)}{dy}\Big|_{y=c_1} = 0$. Аналогично, по теореме Ролля найдётся точка c_2 с условием $0 < c_2 < c_1$ и такая, что $\frac{d^2\varphi_n(x;y)}{dy^2}\Big|_{y=c_2} = 0$, и т.д. Наконец, найдётся точка $c_{n+1}, 0 < c_{n+1} < c_n$, такая, что

$$\frac{d^{n+1}\varphi_n(x;y)}{dy^{n+1}}\bigg|_{y=c_{n+1}} = f^{(n+1)}(x + c_{n+1}) - (n+1)!H = 0.$$

Полагая $c = x + c_{n+1}$, получим $H = f^{(n+1)}(c)/(n+1)!$. Теорема доказана.

2.4. Численное решение уравнений для гладких функций на вещественной оси и неархимедовском полном поле, приближенное вычисление значений гладких функций

Дадим приложение формулы Тейлора к численному решению уравнения $f(x) = 0$ для гладкой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (метод касательных Ньютона, метод последовательных приближений).

Теорема 5. *Пусть $f(a)f(b) < 0$, и пусть на отрезке $[a, b]$ существует вторая непрерывная производная функции $f(x)$, причём для любого x имеем $|f''(x)| \leq M, |f'(x)| \geq m > 0$. Тогда предел последовательности*

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

при

$$\frac{M}{2m}\left|\frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}\right| = q < 1$$

даёт единственное решение $x = \alpha$ уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$, причём

$$|\alpha - \alpha_n| \leq \frac{2m}{M}\frac{q^{2^{n+1}}}{1 - q^{2^{n+1}}}.$$

Доказательство. По формуле Тейлора для любых $x, y \in [a, b]$ до второго члена с остаточным членом в форме Лагранжа находим

$$f(x + y) = f(x) + f'(x)y + \frac{1}{2}f''(c)y^2,$$

где $c \in [a, b]$ — некоторая точка.

Определим две последовательности α_n и $\beta_n, n \geq 0$, из равенств

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n, f(\alpha_n) + \beta_n f'(\alpha_n) = 0 (n \geq 0).$$

Отсюда, используя формулу Тейлора, получим

$$f(\alpha_{n+1}) = f(\alpha_n + \beta_n) = \frac{1}{2}f''(c_n)\beta_n^2,$$

где $c_n \in [a, b]$.

Переходя к оценкам, имеем

$$|\beta_{n+1}| \leq \frac{M}{2m}\beta_n^2 (n \geq 0).$$

Следовательно,

$$|\beta_{n+1}| \leq \frac{2m}{M}q^{2^{n+1}}.$$

Поскольку ряд

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$$

по критерию Коши сходится, находим оценку точности приближения

$$|\alpha - \alpha_n| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |\beta_k| \le \frac{2m}{M} \frac{q^{2^{n+1}}}{1 - q^{2^{n+1}}}.$$

Теорема доказана.

Подобное утверждение (лемма Гензеля) имеет место для неархимедова нормирования. К сожалению, наглядной геометрической трактовки метода последовательных приближений для такого нормирования нет.

Напомним, что неархимедовым нормированием $|\cdot|$ поля $\mathbf{K}$ называется вещественная неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям:

1) $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$;

2) для любых α и β из $\mathbf{K}$ имеем $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$;

3) для любых $|\alpha| \le 1$ из $\mathbf{K}$ имеем $|1 + \alpha| \le 1$, что эквивалентно условию: для любых β и γ из $\mathbf{K}$ справедливо неравенство

$$|\alpha + \beta| \le \max\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

В частности, отсюда следует, что, если $|\gamma| < |\beta|$, то $|\beta + \gamma| = |\beta|$.

Поле $\mathbf{K}$ с нормированием $|\cdot|$ называется полным, если любая фундаментальная последовательность $\alpha_n, n \ge 1$, сходится к некоторому элементу из $\mathbf{K}$. Последовательность $\alpha_n, n \ge 1$, фундаментальна, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для всех номеров $n > n_0$ и $m > n_0$ имеем $|\alpha_m - \alpha_n|\varepsilon$.

Множество тех α, для которых $|\alpha| \le 1$ называется кольцом целых элементов поля $\mathbf{K}$ и обозначается символом Re. Множество $\alpha \in \mathbf{K}$ таких, что $|\alpha| < 1$ образует максимальный идеал $\wp$ в кольце Re.

Теорема 6. *Пусть $\mathbf{K}$ — полное поле, $f(x) \in \mathrm{Re}[x]$, и пусть $\alpha_0 \in \mathrm{Re}$ таково, что $0 < |f(\alpha_0)| < |f'(\alpha_0)|^2$. Тогда предел последовательности*

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

даёт единственное решение $x = \alpha$ уравнения $f(x) = 0$, причём

$$|\alpha - \alpha_n| \le f_0^{2^{n+1}}, \quad f_0 = \frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}.$$

Доказательство. По формуле Тейлора находим

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} y^k,$$

где $f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)'$ — k-я производная многочлена $f(x)$, причём

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + \cdots + a_1 \in \mathrm{Re}[x], \quad f^{(0)}(x) = f(x) \in \mathrm{Re}[x], \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \in \mathrm{Re}[x].$$

Для краткости записи определим величину $\beta_n, n \ge 0$, следующим образом

$$f(\alpha_n) + \beta_n f'(\alpha_n) = 0.$$

Из условия теоремы имеем
$$|\beta_0| = \left|\frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}\right| < |f'(\alpha_0)| \leq 1.$$
Следовательно, $\beta_0 \in \mathrm{Re}$.

Сначала докажем, что 1) $\alpha_n \in \mathrm{Re}$; 2) $|f'(\alpha_{n+1})| = |f'(\alpha_n)|, n \geq 0$; 3) $|f(\alpha_n)| < |f'(\alpha_n)|^2$.

Индукция по n. Утверждения 1) и 3) при $n = 0$ входят в условие теоремы. Применяя формулу Тейлора к многочлену $f'(x)$, находим
$$|f'(\alpha_1) - f'(\alpha_0)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha_0)}{k!}\beta_0\right| = |\beta_0| \cdot |G_1(\alpha_0)| \leq |\beta_0| = \left|\frac{f(\alpha_0)}{f'\alpha_0}\right| < |f'(\alpha_0)|.$$
где
$$G_1(\alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha_m)}{k!}\beta_m^{k-1}, m \geq 0.$$

Отсюда, используя условие 3 в определении нормирования, получим
$$|f'(\alpha_1)| \leq \max\{|f'(\alpha_0)|, |f'(\alpha_1) - f'(\alpha_0)|\} = |f'(\alpha_0)|,$$
$$|f'(\alpha_0)| \leq \max\{|f'(\alpha_1)|, |f'(\alpha_1) - f'(\alpha_0)|\} = |f'(\alpha_1)|,$$
т.е. $|f'(\alpha_1)| = |f'(\alpha_0)|$. Тем самым при $n = 0$ условие 2) доказано.

Предположим, что утверждения 1),2),3) справедливы при $n = m$. Докажем их при $n = m + 1$.

Сначала покажем, что утверждение 1) справедливо. Имеем $\alpha_{m+1} = \alpha_m - \beta_m$. По предположению индукции (условие 1)) $\alpha_m \in \mathrm{Re}$, а из условия 2) находим
$$|\beta_m| = \left|\frac{f(\alpha_m)}{f'(\alpha_m)}\right| < |f'(\alpha_m)| \leq 1,$$
что даёт условие $\beta_m \in \mathrm{Re}$. Следовательно, $\alpha_{m+1} \in \mathrm{Re}$.

Используя формулу Тейлора для многочлена $f'(x)$, получим
$$|f'(\alpha_{m+1}) - f'(\alpha_m)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha_m)}{k!}\beta_m\right| = |\beta_m| \cdot |G_1(\alpha_m)| \leq |\beta_m| = \left|\frac{f(\alpha_m)}{f'\alpha_m}\right| < |f'(\alpha_m)|.$$
Аналогично предыдущему, имеем
$$|f'(\alpha_{m+1})| = |f'(\alpha_m)|, m \geq 0;$$
что приводит к справедливости утверждения 2).

Докажем утверждение 3). По формуле Тейлора находим
$$f(\alpha_{m+1}) = f(\alpha_m) + \beta_m f'(\alpha_m) + \beta_m^2 G_0(\alpha_m),$$
где
$$G_0(\alpha_m) = \sum_{s=2}^{n} \frac{f^{(s)}(x)}{s!}\beta_m^{s-2} \in \mathrm{Re},$$
т.е. $|G_0(\alpha_m)| \leqslant 1$.

Поскольку $f(\alpha_m) + \beta_m f'(\alpha_m) = 0$, получим
$$|f(\alpha_{m+1})| = |\beta_m^2 G_0(\alpha_m)| \leq |\beta_m^2| = \left|\frac{f(\alpha_m)}{f'(\alpha_m)}\right|^2 <$$

(по предположению индукции $|f(\alpha_{m+1})| = |f(\alpha_m)|$ и $|f(\alpha_m)| < |f'(\alpha_m)|^2$)

$$< |f'(\alpha_m)|^2 = |f'(\alpha_{m+1})|^2,$$

т.е. $|f(\alpha_{m+1})| < |f'(\alpha_{m+1})|^2$. Утверждение 3) доказано.

Далее при $n \geq 1$ из условий $|f(\alpha_n)| < |\beta_{n-1}|^2, |f'(\alpha_n)| = |f'(\alpha_0)|$ имеем

$$|\beta_n| \leq \frac{|\beta_{n-1}|^2}{|f'(\alpha_0)|}.$$

Применяя последовательно это рекуррентное неравенство при $n, n-1, \ldots, 1$, находим

$$|\beta_n| \leq \frac{|\beta_{n-1}|^2}{|f'(\alpha_0)|} \leq \frac{|\beta_{n-2}|^{2^2}}{|f'(\alpha_0)|^2} \leq \cdots \leq \frac{|\beta_0|^{2^n}}{|f'(\alpha_0)|^{2^{n-1}}}.$$

Наконец, при $n \geq 1$ из рекуррентного равенства $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}$ получим

$$\alpha_n = \alpha_0 + \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s.$$

Так как $|f(\alpha_0)| < |f'(\alpha_0)|^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер q такой, что для всех $Q \geq 2^q$ выполняется неравенство

$$f_0^Q = \left(\frac{|f(\alpha_0)|}{|f'(\alpha_0)|^2}\right)^Q < \varepsilon.$$

Отсюда, используя критерий Коши для полного поля $\mathbf{K}$, к оценке

$$|\alpha_r - \alpha_q| \leq |\sum_{s=q+1}^{r} \beta_s| \leq \max_{q<s\leq r} |\beta_s| \leq \max_{q<s\leq r} \frac{|\beta_0|^{2^s}}{|f'(\alpha_0)|^{2^{s-1}}} =$$

$$= \max_{q<s\leq r} \frac{|f(\alpha_0)|^{2^s}}{|f'(\alpha_0)|^{2^{2s}}} |f'(\alpha_0)|^{2^{s+1}} \leq \max_{q<s\leq r} \frac{|f(\alpha_0)|^{2^s}}{|f'(\alpha_0)|^{2^{2s}}} = f_0^{2^q} < \varepsilon.$$

Тем самым доказано, что при $n \to \infty$ последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к некоторому элементу α из $\mathbf{K}$.

Оценим скорость сходимости этой последовательности. Имеем

$$|\alpha - \alpha_n| = \left|\sum_{s=n+1}^{\infty} \beta_s\right| = \sup_{q\geq 1} \max_{n<s\leq q} |\beta_s| \leq f_0^{2^{n+1}}.$$

Теорема полностью доказана.

Далее рассмотрим итерационную формулу для вычисления значений гладкой функции в точке на вещественной оси. Пусть $x_0 \in \mathbf{R}$ и $f_0 = f(x_0)$, и пусть f_n — приближение к f_0 с точностью $\Delta_n = |f_n - f_0|$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $G(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки f_0, причём в этой окрестности* $\max |G''(t)| = c$, *и пусть* $f_{n+1} = G(f_n)$

$$G(f_0) = f_0, G(t)|_{t=f_0} = 0.$$

Тогда $\Delta_{n+1} \leq 0,5c\Delta_n^2$.

Действительно, по формуле Тейлора – Маклорена имеем

$$f_{n+1} = G(f_n) = G(f_0) + G'(f_0)(f_n - f_0) + 0,5G''(\xi)(f_n - f_0)^2,$$

где ξ — некоторая точка в окрестности f_0.

Поскольку $G(f_0) + G'(f_0)(f_n - f_0) = f_0$, находим

$$\Delta_{n+1} \leq 0,5c\Delta_n^2.$$

Например, 1) для $x_0 > 0, f(x_0) = \sqrt{x_0}$ получим $f_{n+1} = G(f_n) = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{x_0}{f_n}\right)$;

2) для $0,5 \leq x_0 \leq 1, f(x_0) = \frac{1}{x_0}, G(f_n) = 2f_n - x_0 x_n^2$,

3) для $\frac{1}{8} \leq x_0 \leq 1, f(x_0) = \sqrt[3]{x_0}, G(f_n) = \frac{1}{3}\left(2f_n + \frac{x_0}{f_n^2}\right)$ или $G(f_n) = \frac{f_n(f_n^2+2f_0)}{2f_n^3+f_0}$.

2.5. Многочлены Бернулли

Для дальнейшего необходимы следующие новые понятия. Определим числа Бернулли $B_n, n \geq 0$, из соотношений

$$B_0 = 1, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = B_n, n \geq 0.$$

Далее определим многочлены Бернулли $B_n(x), n \geq 0$, следующим образом

$$B_0(x) = 1, B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k, n \geq 0.$$

В частности, отсюда находим

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42};$$

$$B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Теорема 8. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$B_n(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m B_{n-m}(y).$$

Доказательство. По определению и формуле бинома Ньютона имеем

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} B_{n-k} \binom{n}{k} (x+y)^k = \sum_{k=0}^{n} B_{n-k} \binom{n}{k} \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} x^s y^{k-s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} x^s \sum_{k=s}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{s} B_{n-k} y^{k-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s \sum_{k=0}^{n-s} \binom{n-s}{k} B_{n-k-s} y^k = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s B_{n-s}(y),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 9. (Формула Ньютона для многочленов Бернулли). *Пусть*

$$f(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + \cdots + a_n B_n(x), g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0,$$

многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. Тогда для любых чисел x и y из $\mathbf{F}$ имеем

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(x)}{k!} B_k(y).$$

2.6. Формула Эйлера – Маклорена суммирования значений функции по целым точкам

В теории чисел формула Эйлера – Маклорена часто применяется для дважды непрерывно дифференцируемых функций (формула Н.Я.Сонина).

Теорема 10. (Формула Эйлера-Маклорена суммирования значений функции по целым точкам). *Пусть $m, n \geq 1$ — натуральные числа, a, b — вещественные числа, и пусть $f^{(m)}(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ (или является функцией ограниченной вариации). Тогда имеем*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{B_k(\{x\})}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m,$$

где

$$R_m = (-1)^{m+1} \int\limits_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\,dx.$$

Доказательство. Индукция по m. При $m = 1$ вывод формулы (см., например, [14], гл. VIII, §2, с.205-206) использует формулу Ньютона–Лейбница. Действительно, следует доказать, что

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{B_1(\{x\})}{1!} f^{(0)}(x)\Big|_a^b + \int\limits_a^b \frac{B_1(\{x\})}{1!} f'(x)\,dx.$$

Положим

$$F(y) = \sum_{a<n\leq y} f(n) + B_1(\{y\}) f(y), B_1(y) = y - \frac{1}{2}; G(y) = \int\limits_a^y \frac{B_1(\{x\})}{1!} f'(x)\,dx + B_1(\{a\}) f(a).$$

Функции $F(y)$ и $G(y)$ являются непрерывными на $[a, b]$, поскольку “скачок” суммы в $F(y)$ при переходе через целую точку гасится скачком функции $B_1(\{y\})f(y)$ в этой точке. В нецелых точках производные функций $F(y)$ и $G(y)$ равны. Наконец, $F(a) = G(a) = B_1(\{a\})f(a)$. Следовательно, функции $F(x)$ и $G(x)$, как первообразные от одной и той же функции, совпадают на всём отрезке $[a, b]$. Тем самым в случае $m = 1$ утверждение теоремы доказано. Предположим, что утверждение теоремы верно при $m = s$. Докажем его при $m = s + 1$. Преобразуем R_s. Интегрируя по частям, находим

$$(-1)^{s+1} R_s = \int\limits_a^b \frac{B_s(\{x\})}{s!} f^{(s)}(x)\,dx = \int\limits_a^b \frac{f^{(s)}(x)}{s!} d\left(\int\limits_0^x B_s(\{u\})\,du\right) =$$

$$= \frac{f^{(s)}(x)}{s!} \int\limits_0^x B_s(\{u\})\,du\Bigg|_a^b - \int\limits_a^b \frac{f^{(s+1)}(x)}{s!} \left(\int\limits_0^x B_s(\{u\})\,du\right) dx.$$

Поскольку

$$B_s(\{u\}) = \frac{B'_{s+1}(\{u\})}{s+1},$$

получим

$$\int\limits_0^x B_s(\{u\})\,du = \int\limits_0^x \frac{B_{s+1}(\{u\})}{s+1}\,du = \frac{B_{s+1}(\{x\})}{s+1} - \frac{B_{s+1}(0)}{s+1}.$$

Следовательно,

$$(-1)^{s+1}R_s = \frac{B_{s+1}(\{x\})}{(s+1)!}f^{(s)}(x)\Big|_a^b - R_{s+1}, \quad R_{s+1} = \int\limits_a^b \frac{B_{s+1}(\{x\})}{(s+1)!}f^{(s+1)}(x)\,dx,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Заметим, что для любых целых a и b и при $m \geq 1$ формулу Эйлера–Маклорена можно представить в виде

$$\frac{1}{2}f(a) + \sum_{n=a+1}^{b-1} f(n) + \frac{1}{2}f(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) + R_{2m},$$

где

$$R_{2m} = -\int\limits_a^b \frac{B_{2m}(\{x\})}{(2m)!}f^{(2m)}(x)\,dx,$$

так как $B_k(\{a\}) = B_k(\{b\}) = B_k(0) = B_k$.

При любых целых a и b из предыдущей теоремы следует формула Эйлера суммирования значений гладкой функции

$$\frac{1}{2}f(a) + \sum_{n=a+1}^{b-1} f(n) + \frac{1}{2}f(b) = \int\limits_a^b (f(x) + B_1(\{x\})f'(x))\,dx.$$

Отметим ещё один интересный случай, когда числа a и b — любые полуцелые. Тогда формула Эйлера-Маклорена приобретает вид

$$\sum_{a<n<b} f(n) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}(1/2)}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) + R_{2m},$$

с той же функцией R_{2m}, что и в предыдущей формуле, причём

$$B_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0, B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right)B_{2k}, k \geq 1.$$

При полуцелых a и b также справедлива следующая формула Эйлера

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int\limits_a^b (f(x) + B_1(\{x\})f'(x))\,dx.$$

Последняя формула используется для вывода формулы Пуассона суммирования значений гладкой функции по целым точкам.

2.7. Формула Пуассона суммирования значений гладкой функции по целым точкам

В начале отметим, что подобная формула имеет место и для функций с ограниченным изменением.

Теорема 11. Формула Пуассона. *Пусть числа a и b — полуцелые, функция $f(x)$ имеет непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, причём для любого x из $[a,b]$ имеем $|f'(x)| \leq C$. Тогда при любом натуральном M справедлива формула*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \sum_{m=-M}^{M} \int\limits_a^b f(x)e^{2\pi imx}\,dx + R_M,$$

где

$$R_M \leq \frac{8C(b-a)(\ln M+1)}{M}.$$

Доказательство см., например, в [14], с.442, теорема 3.

3. Последовательность биномиального типа

Далее дадим обобщение формулы бинома Ньютона.

Последовательность многочленов $p_n(x), \deg(p_n(x)) = n, \quad n \geq 0$, со старшим коэффициентом, равным 1, и удовлетворяющих последовательности тождеств

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y)(n\geq 0)p_0(x) = 1, p_s(0) = 0(s\geq 1),$$

называют последовательностью биномиального типа. По существу, эти тождества представляют обобщение формулы бинома Ньютона.

Теорема 12. (Формула бинома для многочленов биномиального типа). *Пусть задана последовательность многочленов биномиального типа $p_n(x), n \geq 0, p_0(x) \equiv 1$, над некоторым полем $\mathbf{F}$. При любом $n \geq 1$ имеем $p_n(0) = 1$. Тогда для любого многочлена $f(x)$ степени n,*

$$f(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + \cdots + a_np_n(x), a_n \neq 0,$$

и для любых чисел x и y из $\mathbf{F}$ справедливо тождество

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^k f(x)}{k!} p_k(y),$$

где $Q^k f(x) = Q\left(Q^{k-1}f(x)\right)$ — k-я итерация линейного оператора Q многочлена $f(x)$ с условиями

$$Q(p_n(x)) = np_{n-1}(x), \quad Qp_0(x) = 0, \quad Q^0p_n(x) = p_n(x), \quad p_n(0) = 0(n\geq 1).$$

Доказательство. Индукция по n. При $n = 0$ утверждение теоремы очевидно. Предположим утверждение теоремы верно при $n = m$. Докажем справедливость его при $n = m+1$. Имеем

$$f(x) = g(x) + a_{m+1}p_{m+1}(x), g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_kp_k(x).$$

По предположению индукции получим

$$g(x+y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{Q^{(k)}g(x)}{k!} p_k(y),$$

а по формуле бинома Ньютона для последовательности многочленов биномиального типа находим

$$a_{m+1}p_{m+1}(x+y) = a_{m+1}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}p_{m+1-k}(x)p_k(y) = \sum_{k=0}^{m+1}\frac{Q^k(a_{m+1}p_{m+1}(x)}{k!}p_k(y).$$

Так как $Q^{m+1}g(x) = 0$, поскольку $Qp_0(x) = 0$, то отсюда имеем

$$f(x+y) = g(x+y) + a_{m+1}p_{m+1}(x+y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{Q^k\left(g(x) + a_{m+1}p_{m+1}(x)\right)}{k!}p_k(y) + \frac{Q^{m+1}f(x)}{(m+1)!}p_{m+1}(y) = \sum_{k=0}^{m+1}\frac{Q^kf(x)}{k!}p_k(y).$$

Теорема доказана.

4. Нижние и верхние факториальные многочлены

Нижние (убывающие) факториальные степени

$$x_{(n)} = x(x-1)\ldots(x-n+1), \quad x_{(0)} = 1, n \geq 0,$$

подсчитывают число взаимно-однозначных функций из множества, состоящего из n различных элементов во множество из x различных элементов. Другими словами, из x различных элементов подсчитывается число перестановок n элементов, а именно перестановки образуются так: первый из x различных элементов можно выбрать x способами, выбор второго элемента потребует $x-1$ способов, и так до выбора n элемента, что можно произвести $x-n+1$ способами. Отсюда получаем формулу для $x_{(n)}$. Заметим, что в каждом сочетании из x по n с заданными n элементами будет содержатся $n!$ перестановок. Таким образом, находим

$$n!\binom{x}{n} = x_{(n)}, \binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = \frac{x!}{n!(x-n)!}.$$

Докажем формулу бинома для нижних факториалов.

Теорема 13. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$(x+y)_{(n)} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x_{(m)}y_{(n-m)}.$$

Доказательство. Очевидно, имеем $x_{(n)} = (x-n+1)x_{(n-1)}$. Индукция по n. При $n=0$ утверждение теоремы справедливо. Предположим, что оно имеет место при $n=m$. Докажем его при $n=m+1$. Используя предположение индукции, находим

$$(x+y)_{(m+1)} = (x+y-m)(x+y)_{(m)} = (x+y-m)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_{(k)}y_{(m-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(x-k)x_{(k)}y_{(m-k)} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_{(k)}(y-m+k)y_{(m-k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}x_{(k)}y_{(m-k+1)} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_{(k)}y_{(m-k+1)} =$$

$$= \binom{m}{m} x_{(m+1)} y_{(0)} + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right) x_{(k)} y_{(m-k+1)} + \binom{m}{0} x_{(0)} y_{(m+1)} =$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x_{(k)} y_{(m-k+1)},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 14. (Формула бинома для нижних факториалов). *Пусть* $n \geq 0, f(x) = a_0 x_{(0)} + a_1 x_{(1)} + \cdots + a_n x_{(n)}, a_n \neq 0,$ — *многочлен степени* n *над некоторым полем* $\mathbf{F}$. *Тогда для любых чисел* x *и* y *из* $\mathbf{F}$ *имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(x)}{k!} y_{(k)},$$

где $\Delta^k f(x) = \Delta\left(\Delta^{k-1} f(x)\right)$ — k*-я убывающая конечная разность многочлена* $f(x)$, *причём*

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \Delta^0 f(x) = f(x).$$

Пусть теперь поле $\mathbf{F}$ является полем вещественных чисел. Тогда справедлива следующая формула Тейлора для нижних факториалов с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 15. *Пусть существует* $f^{(n+1)}(x)$ *на отрезке* $[a, b]$. *Тогда для любых чисел* x *из* $[a, b]$ *и любых* $0 < y < 1$ *справедливо тождество*

$$f(x+y) = P(x; y; n) + R(x; y; n),$$

где

$$P(x; y; n) = P(x; y; n; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^{(k)} f(x)}{k!} y_{(k)},$$

где $\Delta^{(k)} f(x) = \Delta\left(\Delta^{(k-1)} f(x)\right)$ — k*-я конечная убывающая разность функции* $f(x), \Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \Delta^{(0)} f(x) = f(x),$

$$R = R(x; y; n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} y_{n+1},$$

причём c — *некоторая точка, принадлежащая интервалу с концами* x *и* $x+y$.

Доказательство. Сначала докажем, что в точках $y = 0, 1, \ldots, n$ разность $f(x+y) - P(x; y; n)$ обращается в нуль. Индукция по n. Очевидно, утверждение справедливо при $n = 0$. Предположим оно имеет место при параметре $n = m$. Докажем его при $n = m+1$, т.е. справедлива формула

$$f(x+m+1) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{\Delta^{(k)} f(x)}{k!} (m+1)_k = S.$$

Преобразуем правую часть S этой формулы. Используя предположение индукции, имеем

$$S = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \Delta^{(k)} f(x) = \binom{m+1}{0} \Delta^{(0)} f(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right) \Delta^{(k)} f(x) + \binom{m+1}{m+1} \Delta^{(m+1)} f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^{(k)} f(x) + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^{(k+1)} f(x) = f(x+m) + \Delta f(x+m) = f(x+m+1).$$

Рассмотрим далее вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = \varphi(x;t;n) = f(x+t) - P(x;t;n) - Ht_{(n+1)}.$$

Имеем

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \dots = \varphi(n) = 0.$$

Найдём параметр H из условия $\varphi(y) = 0$. Далее, по теореме Ролля из условия, что функция $\varphi(t)$ обращается в нуль в $n+2$ различных точках: $0 < y < 1 < \dots < n$, получим, что найдутся $n+1$ различных $c_1, \dots, c_{n+1}$ точек таких, что

$$\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = \varphi'(c_{n+1}) = 0.$$

Повторяя это рассуждение $n+1$ раз, находим, что существует точка c^* такая, что

$$\varphi^{(n+1)}(c^*) = 0,$$

т.е.

$$f(x+c^*) - (n+1)!H = 0.$$

Положим $c = x + c^*$. Имеем $H = f^{(n+1)}(c)/(n+1)!$. Теорема доказана.

Подобным образом, верхние (возрастающие) факториальные степени

$$x^{(n)} = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad n \geq 1, x^{(0)} = 1,$$

подсчитывают число различных способов размещения n различных шаров в x различных ячеек, когда выбран линейный порядок шаров внутри каждой ячейки и нет ограничений на число шаров в любой из них. Искомое количество $x^{(n)}$ получается размещением сначала n одинаковых шаров в x различных ячеек, т.е. число решений в неотрицательных целых $n_1, \dots, n_x$ уравнения $n_1 + \dots + n_x = n$, а затем для каждого размещения, предполагая, что шары различные, найдем, что их можно переставить $n!$ способами. Таким образом, учитывая, что число решений уравнения равно $\binom{x+n-1}{n}$, получим

$$x^{(n)} = n!\binom{x+n-1}{n}.$$

Докажем, что последовательность верхних (возрастающих) факториалов является последовательностью биномиального типа.

Теорема 16. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$(x+y)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{(m)} y^{(n-m)}.$$

Доказательство. Определим оператор $\nabla x^{(n)} = x^{(n)} - (x-1)^{(n)}$. Имеем $\nabla x^{(n)} = nx^{(n-1)}$, $n \geq 1$.

Докажем утверждение теоремы индукцией по n. При $n = 0$ оно справедливо. Предположим, что утверждение имеет место при $n = m$. Докажем его при $n = m+1$. Используя предположение индукции и предыдущее равенство, находим

$$\nabla(x+y-s)^{(m+1)} = (m+1)(x+y-s)^{(m)} = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x-s)^{(k)} y^{(m-k)}, \quad 0 \leq s \leq x.$$

Суммируя эти равенства по s от 0 до x, получим

$$(x+y)^{(m+1)} - y^{(m+1)} = \sum_{s=0}^{x}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(m+1)(x-s)^{(k)}y^{(m-k)}.$$

Поскольку

$$\sum_{s=0}^{x}(x-s)^{(k)} = \frac{x^{(k+1)}}{k+1},$$

имеем

$$(x+y)^{(m+1)} - y^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(m+1)\left(\sum_{s=0}^{x}(x-s)^{(k)}\right)y^{(m-k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}x^{(k)}y^{(m-k+1)},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 17. (Формула бинома для верхних факториалов). *Пусть $n \geq 0$, $f(x) = a_0x^{(0)} + a_1x^{(1)} + \cdots + a_nx^{(n)}, a_n \neq 0$, — многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. Тогда для любых чисел x и y из $\mathbf{F}$ имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\nabla^k f(x)}{k!}y^{(k)},$$

где $\nabla^k f(x) = \nabla\left(\nabla^{k-1}f(x)\right)$ — k-я разность противоположного сдвига многочлена $f(x)$, причём

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-1), \quad \nabla x^{(0)} = 0, \quad \nabla^0 f(x) = f(x).$$

Теорема 18. *Пусть существует $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда для любых чисел x из $[a,b]$ и любых $y \in [0,1]$ справедливо тождество*

$$f(x+y) = P(x;y;n) + R(x;y;n),$$

где

$$P(x;y;n) = P(x;y;n;f) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\nabla^k f(x)}{k!}y^{(k)},$$

где $\nabla^k f(x) = \nabla\left(\nabla^{k-1}f(x)\right)$ — k-я конечная возрастающая разность функции $f(x), \nabla f(x) = f(x) - f(x-1), \nabla^{(0)}f(x) = f(x)$,

$$R = R(x;y;n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}y^{(n+1)},$$

причём c — некоторая точка, принадлежащая интервалу с концами x и $x+y$.

5. Последовательность многочленов Абеля

В том же духе можно рассмотреть многочлены Абеля

$$A_n(x) = A_n(x;a) = x(x-an)^{n-1}, \quad 0 \leq n < x/a.$$

Далее находим вероятность того, что при случайном бросании дуги окружности длины a на дугу той же окружности длины x при $n < x/a$ испытаниях, любые две дуги длины a не пересекаются. Эта вероятность равна

$$\frac{A_n(x;a)}{x^n} = \frac{x(x-an)^{n-1}}{x^n}.$$

Теорема 19. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$A_n(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A_m(x) A_{n-m}(y).$$

Доказательство. Без ограничения общности теорему достаточно доказать при $a = 1$. Воспользуемся производной степенной функции

$$(A_n(x))' = (x-n)^{n-1} + (n-1)x(x-n)^{n-2} = nA_{n-1}(x-1).$$

Индукция по n. При $n = 0$ теорема очевидно верна. Предположим она верна при $n = m$. Докажем утверждение теоремы при $n = m+1$. Используя предположение индукции, имеем

$$\frac{dA_{m+1}(x+y)}{dx} = (m+1)A_m(x+y-1) = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A_k(x-1)A_{m-k}(y).$$

Проинтегрируем это выражение по x. Получим

$$A_{m+1}(x+y) = (x+y)(x+y-m)^m = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A_{m-k}(y) \left(\int A_k(x-1)\,dx\right) + C(y).$$

Далее при $k \geq 1$ вычислим интеграл

$$\int A_k(x-1)\,dx = \int \frac{x-1}{k} d(x-k-1)^k = \frac{(x-1)(x-k-1)^k}{k} - \frac{1}{k}\int (x-k-1)^k\,dx =$$

$$= \frac{x(x-k-1)^k}{k+1} = \frac{A_{k+1}(x)}{k+1}.$$

Следовательно

$$A_{m+1}(x+y) = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+1}{k} A_k(x)A_{m+1-k}(y) + C(y).$$

Подставляя в это соотношение $x = 0$, находим

$$C(y) = A_{m+1}(y) = \binom{m+1}{0} A_0(x)A_{m+1}(y).$$

Следовательно, справедливо искомое равенство для разложения многочлена Абеля как многочлена биномиального типа.

Теорема 20. (Формула бинома для многочленов Абеля). *Пусть $n \geq 0$, $f(x) = a_0A_0(x) + a_1A_1(x) + \cdots + a_nA_n(x)$, $a_n \neq 0$, — многочлен степени n над некоторым полем* $\mathbf{F}$. *Тогда для любых чисел x и y из* $\mathbf{F}$ *имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(DE)^k f(x)}{k!} A_k(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x+k)}{k!} A_k(y),$$

где $(DE)^k f(x) = DE\left((DE)^{k-1} f(x)\right)$ — k-я итерация композиции операторов сдвига и дифференцирования многочлена $f(x)$, причём

$$DE(A_n(x)) = (A_n(x+1))' = nA_{n-1}(x), \quad (DE)^0 A_n(x) = A_n(x).$$

Теорема 21. *Пусть существует $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда для любых чисел x из $[a,b]$ и любых $y\in[0,1]$ справедливо тождество*

$$f(x+y)=P(x;y;n)+R(x;y;n),$$

где

$$P(x;y;n)=P(x;y;n;f)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(DE)^kf(x)}{k!}A_k(y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x+k)}{k!}A_k(y),$$

где $(DE)^kf(x)=DE\left((DE)^{k-1}f(x)\right)$ — k-я степень линейного оператора DE, применённого к функции $f(x), DE(f(x))=f'(x+1), DE^{(0)}f(x)=f(x)$,

$$R=R(x;y;n)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}A_{n+1}(y),$$

причём c — некоторая точка, принадлежащая интервалу с концами x и $x+y$.

6. Последовательность многочленов Лагерра

Приведём ещё один важный пример последовательности биномиального типа — это последовательность многочленов Лагерра

$$L_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}(-x)^k$$

Теорема 22. *Пусть $n\geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$L_n(x+y)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}L_m(x)L_{n-m}(y).$$

Доказательство. Имеем классическое рекуррентное равенство для многочлена Лагерра

$$(L_n(x))'=n(L_{n-1}(x))'-n(L_{n-1}(x)).$$

Индукция по n. При $n=0$ Теорема очевидно верна. Предположим она верна при $n=m$. Докажем утверждение теоремы при $n=m+1$. Используя предположение индукции, имеем

$$\frac{dL_{m+1}(x+y)}{dx}=(m+1)\frac{L_m(x+y)}{dx}-(m+1)L_m(x+y)=$$

$$=(m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}L_k'(x)L_{m-k}(y)-(m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}L_k(x)L_{m-k}(y).$$

Проинтегрируем это выражение по x. Получим

$$L_{m+1}(x+y)=(m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}L_k(x)L_{m-k}(y)-(m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\int L_k(x)\,dx\right)L_{m-k}(y)+C(y).$$

При $k\geq 1$ вычислим разность

$$L_k(x)-\int L_k(x)\,dx=\sum_{s=1}^{k}(-1)^s\frac{k!}{s!}\binom{k-1}{s-1}x^s-\sum_{s=2}^{k+1}(-1)^{s-1}\frac{k!}{(s-1)!}\binom{k-1}{s-2}\frac{x^s}{s}=$$

$$= \sum_{s=2}^{k} (-1)^s \frac{k!}{s!} \left(\binom{k-1}{s-1} + \binom{k-1}{s-1} \right) x^s - k!x - (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^s \frac{k!}{s!} \binom{k}{s-1} x^s = \frac{L_{k+1}(x)}{k+1}.$$

Следовательно

$$L_{m+1}(x+y) = (m+1) \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} L_{m-k}(y) \frac{L_{k+1}(x)}{k+1} + C(y).$$

Подставляя в это соотношение $x = 0$, находим

$$C(y) = L_{m+1}(y) = \binom{m+1}{0} L_0(x) L_{m+1}(y).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$L_{m+1}(x+y) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{m+1}{k+1} L_{m-k}(y) L_{k+1}(x) + \binom{m+1}{0} L_0(x) L_{m+1}(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} L_{m-k+1}(y) L_k(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 23. (Формула бинома для многочленов Лагерра). *Пусть $n \geq 0$, $f(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \cdots + a_n L_n(x), a_n \neq 0,$ — многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. Тогда для любых чисел x и y из $\mathbf{F}$ имеем*

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{L^k f(x)}{k!} L_k(y),$$

где $(L^k f(x) = L\left(L^{k-1} f(x)\right)$ — k-я итерация оператора Лагерра многочлена $f(x)$, причём

$$L(L_n(x)) = (nL_{n-1}(x) - L_n(x))' = nL_{n-1}(x), \quad L^0 L_n(x) = L_n(x).$$

7. Последовательности многочленов Аппеля и Эйлера

Пусть задана некоторая последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ элементов из поля $\mathbf{F}$. Определим многочлены Аппеля $A_n(x)$ формулой

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}, n \geq 0.$$

Имеем $A_n'(x) = nA_{n-1}(x), n \geq 1$.

Теорема 24. *Пусть $n \geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$A_n(x+y) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m A_{n-m}(y) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(A_n(y))^{(m)}}{m!} x^m.$$

Доказательство. По определению и формуле бинома Ньютона имеем

$$A_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}(x+y)^k=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\binom{n}{k}\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}x^sy^{k-s}=$$

$$=\sum_{s=0}^{n}x^s\sum_{k=s}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{s}a_{n-k}y^{k-s}=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s\binom{n-s}{k}a_{n-k-s}y^k=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^sA_{n-s}(y)=$$

$$=\sum_{s=0}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!}A_{n-s}(y)x^s=\sum_{s=0}^{n}\frac{(A_n(y))^{(s)}}{s!}x^s.$$

что и требовалось доказать.

Теорема 25. (Формула бинома для многочленов Аппеля). *Пусть*

$$f(x)=b_0A_0(x)+b_1A_1(x)+\dots+b_nA_n(x), g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_nx^n, b_n\neq 0,$$

многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. *Тогда для любых чисел x и y из* $\mathbf{F}$ *имеем*

$$f(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}A_k(y).$$

К классу многочленов Аппеля принадлежат многочлены Л.Эйлера

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{E_k}{2^k}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k,$$

где $E_k, k\geq 0$ — числа Эйлера, причём $E_0=1, E_{2k+1}=0$ при $k\geq 0$, и

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}E_{2k}=0, m\geq 1,$$

поскольку эти многочлены удовлетворяют уравнению

$$E_n'(x)=nE_{n-1}(x), n\geq 0.$$

Отметим, также, что

$$\frac{1}{\cos x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kE_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

и производящая функция для многочленов Эйлера имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_k(x)}{k!}t^k=\frac{2e^{xt}}{e^t+1}$$

Теорема 26. *Пусть $n\geq 0$. Тогда для любых чисел x и y имеем*

$$E_n(x+y)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^mE_{n-m}(y)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(E_n(y))^{(m)}}{m!}x^m.$$

Теорема 27. (Формула бинома для многочленов Эйлера). *Пусть*

$$f(x)=b_0E_0(x)+b_1E_1(x)+\dots+b_nE_n(x), g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_nx^n, b_n\neq 0,$$

многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. *Тогда для любых чисел x и y из* $\mathbf{F}$ *имеем*

$$f(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}E_k(y).$$

8. Многочлены от нескольких переменных

Первым обобщением бинома является полином Ньютона.

Теорема 28. (Формула полинома Ньютона). *Пусть $n \geq 0, r \geq 1$ — натуральные числа. Тогда для любых чисел $x_1, \dots, x_r$ имеем*

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\dots+m_r=n}}^{n} \dots \sum_{m_r}^{n} \frac{n!}{m_1! \dots m_r!} x_1^{m_1} \dots x_r{}^{m_r}.$$

Доказательство. При $r = 1$ формула очевидно верна. Предположим, что она справедлива для $r-1$ переменных. Докажем её для r переменных. Положим $x = x_1 + \dots + x_{r-1}$. По формуле бинома Ньютона (теорема 1) находим

$$(x + x_r)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m x_r{}^{n-m}.$$

Далее по предположению индукции имеем

$$x^m = (x_1 + \dots + x_{r-1})^m = \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\dots+m_{r-1}=m}}^{m} \dots \sum_{m_{r-1}=0}^{m} \frac{m!}{m_1! \dots m_{r-1}!} x_1^{m_1} \dots x_{r-1}{}^{m_{r-1}}.$$

Отсюда получим

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x_r^{n-m} \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+\dots+m_{r-1}=m}}^{m} \dots \sum_{m_{r-1}}^{m} \frac{m!}{m_1! \dots m_{r-1}!} x_1^{m_1} \dots x_{r-1}{}^{m_{r-1}},$$

что и даёт искомое равенство.

Теорема 29. (Формула Тейлора для многочленов от нескольких переменных). *Пусть $n \geq 0, r \geq 1$ — целые числа, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$,*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r\leq n}}^{n} \dots \sum_{t_r=0}^{n} a(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r},$$

многочлен степени n над некоторым полем $\mathbf{F}$. Тогда для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеем

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D_{\mathbf{y}}^{(k)} f(\mathbf{x}),$$

где $D_{\mathbf{y}}^{(k)} f(\mathbf{x}) = D\left(D_{\mathbf{y}}^{(k-1)} f(\mathbf{x})\right)$ — k-й дифференциал многочлена $f(\mathbf{x})$, причём

$$D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_s} y_s, \quad D_{\mathbf{y}}^{(0)} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

Заметим, что

$$D_{\mathbf{y}}^{(k)} f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+\dots+k_r=k}}^{n} \dots \sum_{k_r=0}^{n} \frac{k!}{k_1! \dots k_r!} \frac{\partial f^{(k)}(\mathbf{x})}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_r^{k_r}} y_1^{k_1} \dots y_r^{k_r}.$$

Доказательство. При $r = 1$ формула очевидно верна (теорема 2). Предположим, что она справедлива для $r-1$ переменных. Докажем её для r переменных. Положим $\mathbf{x}^{(r-1)} = (x_1, \ldots, x_{r-1}), \mathbf{y}^{(r-1)} = (y_1, \ldots, y_{r-1})$. По формуле Тейлора (теорема 2) находим

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = g(x_r + y_r) = \sum_{m=0}^{n} \frac{g^{(m)}(x_r)}{m!} y_r^m.$$

Далее по предположению индукции имеем

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = h(\mathbf{x}^{(r-1)} + \mathbf{y}^{(r-1)}) = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{1}{k!} D^{(k)}_{\mathbf{y}^{(r-1)}} h(\mathbf{x}^{(r-1)}).$$

Отсюда получим

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{s=0}^{n-m} \frac{1}{s!} D^{s}_{\mathbf{y}^{(r-1)}} \left(\frac{\partial^m f(\mathbf{x})}{\partial x_r^m} y_r^m \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^{(k)}_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}).$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 30. *Пусть существует* $D^{(n+1)} f(\mathbf{x})$ *в некоторой окрестности точки* $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$. *Тогда для любых точки* $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$ *из этой окрестности найдётся такая точка* $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \theta\mathbf{h}$, $0 < \theta < 1$, *что справедлива формула*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = P_n(\mathbf{a}; \mathbf{h}) + R_n(\mathbf{a}; \mathbf{h}),$$

где

$$P_n(\mathbf{a}; \mathbf{h}) = P_n(\mathbf{a}; \mathbf{h}; f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{(k)}_{\mathbf{h}} f(\mathbf{a})}{k!},$$

где $D^{(k)}_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{y}} \left(D^{(k-1)}_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) \right)$ — *k-й дифференциал функции* $f(\mathbf{x})$, *отвечающий приращению аргумента* $\mathbf{y}$,

$$R_n = R_n(\mathbf{a}; \mathbf{h}) = \frac{D^{(n+1)}_{\mathbf{h}} f(\mathbf{c})}{(n+1)!}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi_n(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}), 0 \leq t \leq 1.$$

Тогда по формуле Тейлора (теорема 3) существует постоянная θ такая, что имеем равенство

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

Так как

$$\varphi(0) = f(\mathbf{a}), \varphi'(0) = D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{a}), \ldots, \varphi^{(n)}(0) = D^{(n)}_{\mathbf{h}} f(\mathbf{a}), \varphi^{(n+1)}(\theta) = D^{(n+1)}_{\mathbf{h}} f(\mathbf{c}), \mathbf{c} = \mathbf{a} + \theta\mathbf{h},$$

то подставляя эти выражения в предыдущую формулу получим утверждение теоремы.

9. Формулы суммирования для функций от нескольких переменных

Докажем многомерный аналог формулы Эйлера–Маклорена суммирования значений гладкой функции по целым точкам.

Теорема 31. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_r), \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_r)$ *— векторы с полуцелыми координатами,* $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ *— вектор с вещественными координатами, и пусть* $\frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}}$ *непрерывны в параллелепипеде* $a_k \le x_k \le b_k, 1 \le k \le r$, *по всем наборам* $1 \le j_1 \le \cdots \le j_s \le r, 1 \le s \le r$. *Тогда имеем*

$$\sum_{a_1<n_1<b_1} \cdots \sum_{a_r<n_r<b_r} f(n_1, \ldots, n_r) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le r} 1 \times$$
$$\times \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_r.$$

Доказательство. Индукция по r. При $r = 1$ имеем

$$\sum_{a<n<b} f(n) = \int\limits_a^b (f(x) - \rho(x) f'(x))\, dx, \rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\} = -B_1(\{x\}),$$

что является формулой Эйлера – Маклорена суммирования значений гладкой функции по целым точкам. Это и доказывает теорему при $r = 1$.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при $r = q$, т.е. имеет место формула

$$\sum_{a_1<n_1<b_1} \cdots \sum_{a_q<n_q<b_q} f(n_1, \ldots, n_q) = \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le q} 1 \times$$
$$\times \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_q}^{b_q} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_q.$$

Докажем теорему при $r = q + 1$. Воспользуемся сначала предположением индукции, а затем формулой Эйлера суммирования значений гладкой функции по целым точкам. Получим

$$\sum_{a_1<n_1<b_1} \cdots \sum_{a_q<n_q<b_q} \sum_{a_{q+1}<n_{q+1}<b_{q+1}} f(n_1, \ldots, n_q, n_{q+1}) = \sum_{a_{q+1}<n_{q+1}<b_{q+1}} \left(\sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le q} 1 \times \right.$$
$$\left. \times \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_q}^{b_q} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_q \right) =$$
$$= \int\limits_{a_{q+1}}^{b_{q+1}} \left(\sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le q} \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_q}^{b_q} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_q \right) dx_{q+1} -$$
$$- \int\limits_{a_{q+1}}^{b_{q+1}} \rho(x_{q+1}) \left(\sum_{s=0}^{q} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le q} \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_q}^{b_q} \frac{\partial^{s+1} f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s} \partial x_{q+1}} \rho(x_{j_1}) \ldots \rho(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_q \right) dx_{q+1} =$$

$$
= \sum_{s=0}^{q+1} (-1)^s \sum_{1\le j_1<\dots<j_s\le q+1} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{q+1}}^{b_{q+1}} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1})\dots\rho(x_{j_s})\,dx_1\dots dx_{q+1}.
$$

Теорема доказана.

Следствием многомерной формулы Эйлера-Маклорена является многомерная формула Пуассона суммирования значений гладкой функции.

Теорема 32. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_r), \mathbf{b} = (b_1,\dots,b_r)$ — *векторы с полуцелыми координатами,* $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_r)$ — *вектор с вещественными координатами, и пусть* $\frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_s}}$ *непрерывны в параллелепипеде* $a_k \le x_k \le b_k, 1 \le k \le r$, *по всем наборам* $1 \le j_1 \le \dots \le j_s \le r, 1 \le s \le r$, *причём найдётся постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$
\left| \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_s}} \right| \le C
$$

для всех наборов $1 \le j_1 \le \dots \le j_s \le r, 1 \le s \le r$.

Тогда при любых натуральных $1 \le M_1 \le \dots \le M_r$ *имеем*

$$
\sum_{a_1<n_1<b_1} \cdots \sum_{a_r<n_r<b_r} f(n_1,\dots,n_r) = \sum_{m_1=-M_1}^{M_1} \cdots \sum_{m_r=-M_r}^{M_r} 1\times
$$

$$
\times \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} f(x_1,\dots x_r) e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_rx_r)}\,dx_1\dots dx_r + R(M_1,\dots,M_r),
$$

где

$$
R(M_1,\dots,M_r) \le 8\cdot 3^r C(b_1-a_1)\dots(b_r-a_r)\frac{(\ln M_1+1)\dots(\ln M_r+1)}{M_1}.
$$

Доказательство. Из предыдущей теоремы имеем

$$
S_r = \sum_{a_1<n_1<b_1} \cdots \sum_{a_r<n_r<b_r} f(n_1,\dots,n_r) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{1\le j_1<\dots<j_s\le r} 1\times
$$

$$
\times \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_s}} \rho(x_{j_1})\dots\rho(x_{j_s})\,dx_1\dots dx_r.
$$

Представим $\rho(x)$ при $n \ge 1$ в виде

$$
\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\} = s_n(x) + \sigma_n(x), s_n(x) = \sum_{k\le n} \frac{\sin 2\pi kx}{\pi k},
$$

где $\sigma_n(x) \le \frac{4}{\sqrt{1+n^2\sin^2\pi x}}$.

Тогда

$$
S_r = \sum_{a_1<n_1<b_1} \cdots \sum_{a_r<n_r<b_r} f(n_1,\dots,n_r) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{1\le j_1<\dots<j_s\le r} 1\times
$$

$$
\times \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_s}} (s_{M_{j_1}}(x_{j_1}) + \sigma_{M_{j_1}}(x_{j_1}))\dots(s_{M_{j_s}}(x_{j_1}) + \sigma_{M_{j_s}}(x_{j_1}))\,dx_1\dots dx_r.
$$

Раскрывая скобки, находим $S_r = S(M_1, \ldots, M_r) + \Sigma(M_1, \ldots, M_r)$, где

$$S(M_1, \ldots, M_r) = \sum_{a_1 < n_1 < b_1} \cdots \sum_{a_r < n_r < b_r} f(n_1, \ldots, n_r) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le r} 1 \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} s_{M_{j_1}}(x_{j_1}) \ldots s_{M_{j_s}}(x_{j_1})\, dx_1 \ldots dx_r,$$

сумма $\Sigma(M_1, \ldots, M_r)$ подобна ей, но в ней заменяется в каждом слагаемом по $1 \le j_1 < \cdots <$ $< j_s \le r$ хотя бы один сомножитель $s_{M_{j_t}}(x_{j_t})$ на $\sigma_{M_t}(x_{j_t})$.

В сумме $S(M_1, \ldots, M_r)$ каждый интеграл интегрируем по частям. Используя $s_M(a) =$ $= s_M(b) = 0$, находим

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} \frac{\partial^s f(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} s_{M_{j_1}}(x_{j_1}) \ldots s_{M_{j_s}}(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_r =$$

$$= (-1)^s \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} f(x_1, \ldots, x_r) s'_{M_{j_1}}(x_{j_1}) \ldots s'_{M_{j_s}}(x_{j_s})\, dx_1 \ldots dx_r =$$

$$= (-1)^s \sum_{m_{j_1} = -M_{j_1}}^{M_{j_1}} \cdots \sum_{m_{j_s} = -M_{j_s}}^{M_{j_1}} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} f(x_1, \ldots, x_r) e^{2\pi i (m_{j_1} x_{j_1} + \cdots + m_{j_s} x_{j_s})}\, dx_1 \ldots dx_r.$$

Суммируя по s, получим

$$S(M_1, \ldots, M_r) = \sum_{m_1 = -M_1}^{M_1} \cdots \sum_{m_r = -M_r}^{M_r} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_r}^{b_r} f(x_1, \ldots x_r) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \cdots + m_r x_r)}\, dx_1 \ldots dx_r.$$

Оценим сверху $|\Sigma(M_1, \ldots, M_r)|$. Воспользуемся при полуцелых a и b следующими оценками

$$s_M = \int_a^b |s_M(x)\, dx| \le (b-a)(\ln M + 1), \sigma_M = \int_a^b |\sigma_M(x)|\, dx \le 8(b-a) \frac{\ln M + 1}{M}.$$

Находим

$$|\Sigma(M_1, \ldots, M_r)| \le \sum_{s=1}^{r} (-1)^s \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_s \le r} 8C(b_1 - a_1) \ldots (b_r - a_r) \frac{\ln(M_{j_1} + 1) \ldots \ln(M_{j_s} + 1)}{M_1} \le$$

$$\le \frac{8C}{M_1} \prod_{t=1}^{r} (b_t - a_t)(\ln(M_t + 1)) \sum_{s=1}^{r} 2^s \binom{r}{s} \le \frac{8 \cdot 3^r C}{M_1} \prod_{t=1}^{r} (b_t - a_t)(\ln(M_t + 1)).$$

Теорема доказана.

10. Формула Пуассона суммирования для функций от комплексных переменных

На комплексной плоскости $\mathbf{C}$ зададим область

$$D = D(a, b, c, d) = \{z \in \mathbf{C} \mid a < \operatorname{Re} z < b, c < \operatorname{Im} z < d\},$$

где a, b, c, d — полуцелые вещественные числа.

Теорема 33. *Пусть $z = x + iy$,*

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x}, \frac{\partial f(z)}{\partial y}, \frac{\partial^2 f(z)}{\partial x \partial y},$$

непрерывны в области $D = D(a, b, c, d)$, причём найдётся постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial x}\right| \le C, \left|\frac{\partial f(z)}{\partial y}\right| \le C, \left|\frac{\partial^2 f(z)}{\partial x \partial y}\right| \le C.$$

Тогда, суммируя по целым гауссовым числам z, при любых натуральных $1 \le M, N, \Lambda = \min\{M, N\}$, имеем

$$\sum_{a<\operatorname{Re} z<b} \sum_{c<\operatorname{Im} z<d} f(z) = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} \iint_D f(z) e^{2\pi i \operatorname{Re}(\overline{\mu} z)}\, dx dy + R(M, N),$$

где $\mu = m + in$ — целое гауссово число,

$$R(M, N) \le 72C(b-a)(d-c)\frac{(\ln M + 1)(\ln N + 1)}{\Lambda}.$$

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и формулы Пуассона для функций от вещественных переменных.

Для дальнейшего зададим область

$$D = D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^r \mid a_\nu < \operatorname{Re} z_\nu < b_\nu, c_n u < \operatorname{Im} z_\nu < d_\nu\},$$

где $a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$ — полуцелые вещественные числа.

Теорема 34. *Пусть $z_\nu = x_\nu + iy_\nu, 1 \le \nu \le r$,*

$$\frac{\partial^{s+t} f(\mathbf{z})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s} \partial y_{k_1} \ldots \partial y_{k_t}}$$

непрерывны в области D по всем наборам $1 \le j_1 \le \cdots \le j_s \le r, 1 \le k_1 \le \cdots \le k_t \le r, 1 \le s, t \le r$, причём найдётся постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left|\frac{\partial^{s+t} f(\mathbf{z})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s} \partial y_{k_1} \ldots \partial y_{k_t}}\right| \le C$$

для всех наборов $1 \le j_1 \le \cdots \le j_s \le r, 1 \le k_1 \le \cdots \le k_t \le r, 1 \le s, t \le r$.

Тогда, суммируя по целым гауссовым числам $z_1, \ldots, z_r$, при любых натуральных $1 \le M_1, N_1, \ldots, M_r, N_r, \Lambda = \min\{M_1, N_1, \ldots, M_r, N_r\}$, имеем

$$\sum_{a_1<\operatorname{Re} z_1<b_1} \sum_{c_1<\operatorname{Im} z_1<d_1} \cdots \sum_{a_r<\operatorname{Re} z_r<b_r} \sum_{c_r<\operatorname{Im} z_r<d_r} f(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{m_1=-M_1}^{M_1} \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \cdots \sum_{m_r=-M_r}^{M_r} \sum_{n_r=-N_r}^{N_r} 1 \times$$

$$\times \int\limits_D \cdots \int f(z_1, \dots z_r) e^{2\pi i (\operatorname{Re} \overline{\mu}_1 z_1 + \dots + \overline{\mu}_r z_r)}\, dx_1 dy_1 \dots dx_r dy_r + R(M_1, N_1 \dots, M_r, N_r),$$

где

$$R(M_1, N_1, \dots, M_r, N_r) \le 8 \cdot 3^{2r} \frac{C}{\Lambda} \prod_{s=1}^{r} (b_s - a_s)(d_s - c_s)(\ln M_s + 1)(\ln N_s + 1).$$

Эта теорема является многомерным аналогом предыдущей теоремы.

11. Многочлены биномиального типа от нескольких переменных

Перейдём к обобщению формулы Тейлора для многочленов биномиального типа от нескольких переменных. Приведем формулировку соответствующей теоремы.

Теорема 35. (Формула Ньютона для многочленов биномиального типа от нескольких переменных). *Пусть задана последовательность многочленов биномиального типа $p_n(x), n \ge 0, p_0(x) \equiv 1$, над некоторым полем $\mathbf{F}$. При любом $n \ge 1$ имеем $p_n(0) = 1$. Тогда для любого многочлена $f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$, степени n,*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r \le n}}^{n} \cdots \sum_{t_1=0}^{n} a(t_1, \dots, t_r) p_{t_1}(x_1) \dots p_{t_r}(x_r),$$

и для любых чисел x и y из $\mathbf{F}$ справедливо тождество

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_{\mathbf{y}}^{k} f(\mathbf{x})}{k!},$$

где $Q_{\mathbf{y}}^{(k)} f(\mathbf{x}) = Q_{\mathbf{y}} \left(Q_{\mathbf{y}}^{(k-1)} f(\mathbf{x}) \right)$ — k-я итерация оператора $Q_{\mathbf{y}}$ многочлена $f(\mathbf{x})$ с условиями

$$Q_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{r} \partial_s f(\mathbf{x}) p_1(y_s), \quad Q_{\mathbf{y}}^{(0)} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

$$\partial_s (p_{t_1}(x_1) \dots p_{t_r}(x_r)) = t_s p_{t_s - 1}(x_{t_s}) p_{t_1}(x_1) \dots p_{t_{s-1}}(x_{t_s}) p_{t_{s+1}}(x_{t_s}) \dots p_{t_r}(x_r).$$

12. Заключение

В настоящей статье достаточно подробно изучены интересные свойства классической формулы бинома Ньютона и её многомерных аналогов. Проведён анализ ряда этих свойств для многочленов биномиального типа. Получены многомерные аналоги формул Эйлера – Маклорена и Пуассона суммирования значений гладких функций по решётке. Исследования по дальнейшему изучению этих понятий и свойств предполагается продолжить. Представляется полезным дать их новые приложения ([10]-[18]). В частности, рассмотреть меру Хаара, преобразование Фурье на локально компактных топологических абелевых группах и формулу Пуассона суммирования значений функции по элементам её дискретной подгруппы (диссертация Тейта [19], гл. VII).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pincherle S., Amaldi. Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi (in collborazione U. Amaldi) // Zanichelli, Bologna, 1900.

2. Hurwitz A. Über Abel's Verallgemeinerung der binomischen Formel// Acta Math., 1902, **26,** 199–203.

3. Sheffer I. M. Some properties of polynomials of type zero// Duke Math., 1939, **5,** 590–622.

4. Stefensen J. F. The Poweroid, an Extension of the Mathematical of Power// Acta Math., 1941, **73,** 333–366.

5. Touchard J. Nombres Exponentiels et Nombres de Bernuolli// Canad.J.Math., 1956, **8** 305–320.

6. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М: Изд-во ин. лит., 1963.

7. Riordan J. Inverse Relations and Combinatorial Identities// Amer.Math.Monthly, 1964, **71** 485–498.

8. Riordan J. Combinatorial Identities. — New York: Wiley, 1968.

9. Mullin R., Rota G.-C. On the Foundations of Combinatorial Theory: III. Theory of Binomial Enumeration// Graph Theory and its Applications, 1970, 168–213.

10. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное — М.: Наука, 1980, 144 с.

11. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. — М.: Наука,1983. 240 с.

12. Hua Loo-Keng. Selected Papers. — N.-Y.,Heidelberg, Berlin, 1983. pp.888.

13. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.

14. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 640 с.

15. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1987, 368 с.

16. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004, pp. 554.

17. Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН СССР, 1984, **278,** № 2, 302–304.

18. Чубариков В. Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами// Изв. АН СССР, сер.матем., 1985, **49,** № 5, 1031–1067.

19. Ленг С. Алгебраические числа. — М.: Мир, 1966.

REFERENCES

1. Pincherle S., Amaldi. 1900. “Le operazioni distributive e le loro applicazioni all’analisi (in collborazione U. Amaldi)”, Zanichelli, Bologna.
2. Hurwitz A. 1902. “Uber Abel’s Verallgemeinerung der binomischen Formel” Acta Math., **26,** 199–203.
3. Sheffer I. M. 1939. “Some properties of polynomials of type zero” Duke Math., **5,** 590–622.
4. Stefensen J. F. 1941. “The Poweroid, an Extension of the Mathematical of Power” Acta Math., 1941, **73,** 333–366.
5. Touchard J. 1956. “Nombres Exponentiels et Nombres de Bernuolli” Canad.J.Math., **8** 305–320.
6. Riordan J. 1963. “An introduction to combinatorial analysis. — Moscow: Publ.House of a foreign literature.
7. Riordan J. 1964. “Inverse Relations and Combinatorial Identities” Amer.Math.Monthly, **71** 485–498.
8. Riordan J. 1968. “Combinatorial Identities”. — New York: Wiley.
9. Mullin R., Rota G.-C. 1970. “On the Foundations of Combinatorial Theory: III. Theory of Binomial Enumeration” Graph Theory and its Applications, 168–213.
10. Vinogradov I. M. 1980. “The method of trigonometric sums in the theory of numbers”. 2nd Edition., Moscow.: Nauka. pp. 144.
11. Karatsuba A. A. 1983. “Foundations of analytic number theory”. 2nd Ed. — M.: Nauka, pp. 240 (in Russian).
12. Hua Loo-Keng. 1983. Selected Papers. — N.-Y.,Heidelberg, Berlin, pp.888.
13. Arkhipov G. I., 2013. Selected papers. — Orjol: Publ.House of the Orjol University, pp. 464.
14. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. 2004. “Lecture on mathematical analysis”. 4th Ed., corr. — M.: Drofa. pp. 640.
15. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. 1987. “The theory of multiple trigonometric sums”. — Moscow.: Nauka. 368 c.
16. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 2004. “Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics”, 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, pp. 554.
17. Chubarikov V. N. 1984. “Multiple trigonometric sums with primes” Doklady AN SSSR„ **278,** № 2, 302–304.
18. Chubarikov V. N. 1985. “Estimates of multiple trigonometric sums with primes” Izvestija. AN SSSR, Ser.Matem., **49,** № 5, 1031–1067.
19. Lang S. 1966. “Algebraic numbers”. — M.: Mir.

Получено 04.04.2019 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-302-307

Константы Никольского — Бернштейна в L^p на сфере с весом Данкля[1]

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский

Дмитрий Викторович Горбачев — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

Изучаются точные константы Никольского–Бернштейна для сферических полиномов в пространстве $L^p(\mathbb{S}^d)$ с весом Данкля. Устанавливается взаимосвязь с одномерными константами для алгебраических полиномов в пространстве $L^p[-1,1]$ с весом Гегенбауэра.

Ключевые слова: евклидова сфера, вес Данкля, вес Гегенбауэра, сферические полиномы, константа Никольского, неравенство Бернштейна.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский. Константы Никольского — Бернштейна в L^p на сфере с весом Данкля // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 302–307.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-302-307

Nikolskii–Bernstein constants in L^p on the sphere with Dunkl weight[2]

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovol'skii

Dmitry Viktorovich Gorbachev — Doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of general and theoretical physics, Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).
[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

Abstract

We study the sharp Nikol'skii–Bernstein constants for spherical polynomials in the space $L^p(\mathbb{S}^d)$ with the Dunkl weight. An interrelationship with one-dimensional constants for algebraic polynomials in the space $L^p[-1,1]$ with the Gegenbauer weight is established.

Keywords: Euclidean sphere, Dunkl weight, Gegenbauer weight, spherical polynomials, Nikolskii constant, Bernstein inequality.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovol'skii. 2020, "Nikolskii–Bernstein constants in L^p on the sphere with Dunkl weight", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 302–307.

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_{d+1}y_{d+1}$ — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$, $|x| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ — евклидова длина вектора x; $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \colon |x| = 1\}$ — единичная евклидова сфера; Π_n^d — пространство сферических полиномов порядка не выше $n \in \mathbb{Z}_+$ — сужений на сферу комплекснозначных алгебраических полиномов $f(x) = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_{d+1}\leqslant n} c_{\nu_1\ldots\nu_{d+1}} x_1^{\nu_1}\ldots x_{d+1}^{\nu_{d+1}}$ степени n, где $\nu_j \in \mathbb{Z}_+$; Δ_0 — оператор Лапласа–Бельтрами для сферы $\mathbb{S}^d$; $r \geqslant 0$, $(-\Delta_0)^{r/2}$ — дробная степень Δ_0, определяемая как мультипликатор; $\mathcal{P}_n$ — множество комплекснозначных алгебраических полиномов степени не выше n; $t \in [-1, 1]$, $\alpha \geqslant -1/2$, $w_\alpha(t) = (1-t^2)^\alpha$ — вес Гегенбауэра, $R_n^{(\alpha)}(t) = \frac{P_n^{(\alpha,\alpha)}(t)}{P_n^{(\alpha,\alpha)}(1)}$ — нормированные полиномы Гегенбауэра (Якоби), ортогональные с весом w_α; $g(t) = \sum_{j=0}^n \widehat{g}_j R_n^{(\alpha)}(t)$ для $g \in \mathcal{P}_n$; $D_\alpha = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\alpha+1}{\operatorname{tg} t}\frac{d}{dt}$ — дифференциальный оператор Гегенбауэра, для которого $(-D_\alpha)^{r/2} R_n^{(\alpha)} = \lambda_{\alpha n}^{r/2} R_n^{(\alpha)}$, где $\lambda_{\alpha n} = n(n+2\alpha+1)$ — собственные значения $(-D_\alpha)$, а также $(-\Delta_0)$ при $\alpha = d/2-1$; $0 < p \leqslant \infty$, X — некоторый компакт, v — положительная почти всюду на X весовая функция, $L_v^p(X)$ — пространство Лебега измеримых с весом v комплекснозначных функций на X, для которого $\|f\|_{p,v} = \bigl(c_v \int_X |f(x)|^p v(x)\,dx\bigr)^{1/p}$ при $p < \infty$, $c_v^{-1} = \int_X v(x)\,dx$, $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|$ при $p = \infty$, $L^p(X) = L_1^p(X)$.

В безвесовом случае рассматривается следующая наилучшая константа в неравенстве Никольского–Бернштейна для сферических полиномов в пространстве $L^p(\mathbb{S}^d)$:

$$C_p(d, n, r) = \sup_{f\in\Pi_n^d\setminus\{0\}} \frac{\|(-\Delta_0)^{r/2} f\|_\infty}{\|f\|_p}, \quad r \geqslant 0.$$

При $r = 0$ получаем константу Никольского, случай $d = 1$, $r \in \mathbb{N}$ отвечает классической константе Бернштейна $C_\infty(1, n, r) = n^r$. Известно [4], что при $d \geqslant 1$, $p \geqslant 1$

$$C_p(d, n, r) \asymp n^{r+d/p}, \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Однако точное значение $C_p(d, n, r)$ найдено только в случаях $p = 2, \infty$ [5]. В [7] доказано, что

$$C_p(d, n, 0) = c_p(d) n^{d/p}(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \tag{2}$$

где $c_p(d)$ — константа Никольского в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$ для целых функций экспоненциального сферического типа 1.

Функции на сфере вида $g(\langle x, x_0\rangle)$, где $x_0 \in \mathbb{S}^d$, называются зональными. Можно отождествить $\mathcal{P}_n$ и подмножество зональных полиномов из Π_n^d. В [1] доказано, что при $p \geqslant 1$ существует зональный экстремальный полином g_* степени n с единичным старшим коэффициентом, такой что

$$C_p(d, n, 0) = \frac{|g_*(1)|}{\|g_*\|_{p,w_{d/2-1}}}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что многомерная константа Никольского совпадает с константой Никольского для алгебраических полиномов в пространстве $L^p_{w_{d/2-1}}([-1,1])$ с весом Гегенбауэра. Благодаря этому факту было доказано, что: экстремальный полином g_* характеризуется ортогональностью $g_*\perp\mathcal{P}_{n-1}$ в $L^2_{(1-t)w_{d/2-1}(t)}([-1,1])$ $(n\geqslant 1)$; g_* является решением задачи Чебышева о полиноме, наименее уклоняющемся от нуля в пространстве $L^p_{(1-t)w_{d/2-1}(t)}([-1,1])$; g_* единственный как в одномерной, так и многомерной задачах (с точностью до умножения на константу и вращения аргумента).

Докажем родственный результат об оценке константы Никольского–Бернштейна в пространстве $L^p(\mathbb{S}^d)$ с весом Данкля и дифференциально-разностным оператором Бельтрами–Данкля. Все необходимые сведения из теории гармонического анализа Данкля для случаев $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{S}^{d-1}$ можно найти в книге [8].

Пусть R — система корней в $\mathbb{R}^{d+1}$, R_+ — положительная подсистема R, $\kappa\colon R\to\mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы отражений $G(R)$. Вес Данкля на $\mathbb{R}^{d+1}$ определяется равенством $v_\kappa(x)=\prod_{a\in R_+}|\langle a,x\rangle|^{2\kappa(a)}$. Например, если $\{e_j\}_{j=1}^{d+1}$ — единичные орты $\mathbb{R}^{d+1}$, $R=\{\pm e_1,\dots,\pm e_{d+1}\}$, $R_+=\{e_1,\dots,e_{d+1}\}$, $G(R)=\mathbb{Z}_2^{d+1}$ — группа октаэдра, $\kappa(\pm e_j)=\kappa_j\geqslant 0$, то $v_\kappa(x)=\prod_{j=1}^{d+1}|x_j|^{2k_j}$.

Сужение v_κ на сферу называется сферическим весом Данкля. Имеем $\Pi_n^d=\bigoplus_{j=0}^n\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, где $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$ — подпространства κ-гармоник, ортогональных в $L^2_{v_\kappa}(\mathbb{S}^d)$; $\dim\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)=h_j(d)=$ $=\frac{2j+d-1}{d-1}\binom{j+d-2}{j}$; proj_j — проектор на подпространство $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$; $Z_j^\kappa(x,y)=\sum_{i=1}^{h_j(d)}Y_{ji}(x)\overline{Y_{ji}(y)}$ — воспроизводящее ядро подпространства $\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$, где $\{Y_{ji}\}_{i=1}^{h_j(d)}\subset\mathcal{H}_j^d(v_\kappa)$ — некоторый ортонормированный базис; $\Delta_{\kappa,0}$ — оператор Бельтрами–Данкля; $(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}\,\mathrm{proj}_j=(\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\,\mathrm{proj}_j$, где $\alpha_\kappa=d_\kappa/2-1$ и $d_\kappa=d+2\sum_{a\in R_+}\kappa(a)$ — размерность Данкля.

Пусть V_κ — оператор сплетения Данкля. Роль зональных функций в весовом случае играют функции вида $G(x,y)=V_\kappa[g\langle\,\cdot\,,y\rangle)](x)$, $x,y\in\mathbb{S}^d$. В частности, $Z_j^\kappa(x,y)=h_j(d_\kappa)\widetilde{Z}_j^\kappa(x,y)$, где $\widetilde{Z}_j^\kappa(x,y)=V_\kappa[R_j^{(\alpha_\kappa)}(\langle\,\cdot\,,y\rangle)](x)$. Отметим, что $0\leqslant\widetilde{Z}_j^\kappa(x,x)\leqslant 1$ для любого $x\in\mathbb{S}^d$.

Если функция кратности $\kappa\equiv 0$, то вес $v_0\equiv 1$ и анализ Данкля сводится к безвесовому случаю. В частности, оператор V_0 будет дельта-функцией и $V_0[g\langle\,\cdot\,,y\rangle)](x)=g(\langle x,y\rangle)$.

Рассмотрим следующие весовые константы Никольского–Бернштейна в пространствах $L^p_{v_\kappa}(\mathbb{S}^d)$ и $L^p_{w_\alpha}([-1,1])$ соответственно:

$$C_{p,\kappa}(d,n,r)=\sup_{f\in\Pi_n^d\setminus\{0\}}\frac{\|(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}f\|_\infty}{\|f\|_{p,v_\kappa}},\quad C_{p,\alpha}(n,r)=\sup_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}}\frac{\|(-D_\alpha)^{r/2}P\|_\infty}{\|P\|_{p,w_\alpha}}.$$

Для любого полинома $g(t)=\sum_{j=0}^n\widehat{g}_jR_n^{(\alpha)}(t)\in\mathcal{P}_n$ имеем $(-D_\alpha)^{r/2}g(1)=\sum_{j=0}^n\lambda_{\alpha j}^{r/2}\widehat{g}_j$. Поэтому из результатов работы [2] следует, что

$$C_{p,\alpha}(n,r)=\sup_{\substack{g\in\mathcal{P}_n\\ \|g\|_{p,w_\alpha}=1}}\left|\sum_{j=0}^n\lambda_{\alpha j}^{r/2}\widehat{g}_j\right|. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$, $d\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $r\geqslant 0$, $x_0\in\mathbb{S}^d$. Тогда*

$$\sup\left|\sum_{j=0}^n(\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\widehat{g}_j\widetilde{Z}_j^\kappa(x_0,x_0)\right|\leqslant C_{p,\kappa}(d,n,r)\leqslant\sup\left|\sum_{j=0}^n(\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\widehat{g}_j\right|,$$

где супремумы берутся по всем полиномам $g\in\mathcal{P}_n$, для которых $\|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}}=1$.

В безвесовом случае имеем $\widetilde{Z}_j^0(x_0,x_0)=R_j^{(d/2-1)}(1)=1$ для любых x_0 и j, поэтому

$$C_p(d,n,r)=C_{p,d/2-1}(n,r),\quad r\geqslant 0.$$

С учетом (4) получили обобщение (3) на случай констант Никольского–Бернштейна при $r > 0$.

Доказательство. Будем использовать результаты [8, гл. 3]. Возьмем произвольный полином $g = \sum_{j=0}^n \widehat{g}_j R_n^{(\alpha)}$, такой что $\|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}} = 1$. Положим $G(x) = V_\kappa[g\langle\,\cdot\,, x_0\rangle)](x) = \sum_{j=0}^n \widehat{g}_j \times \times \widetilde{Z}_j^\kappa(x, x_0)$. Тогда $(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}G(x_0) = \sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\widehat{g}_j\widetilde{Z}_j^\kappa(x_0,x_0)$ и $\|G\|_{p,v_\kappa} \leqslant \|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}}$ [8, гл. 3]. Отсюда имеем $C_{p,\kappa}(d,n,r) \geqslant \frac{|(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}G(x_0)|}{\|G\|_{p,v_\kappa}} \geqslant \bigl|\sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\widehat{g}_j\widetilde{Z}_j^\kappa(x_0,x_0)\bigr|$, что влечет оценку снизу.

Для оценки сверху рассмотрим свертку $f *_\kappa g$ с зональным ядром g и оператор сдвига T_θ^κ, действующий на f как мультипликатор $\mathrm{proj}_j(T_\theta^\kappa f) = R_j^{(\alpha_\kappa)}(\cos\theta)\,\mathrm{proj}_j f$, где $\theta \in [0,\pi]$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $f \in \Pi_n^d$ — произвольный сферический полином и $\|(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}f\|_\infty = |(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}f(x')|$, где $x' \in \mathbb{S}^d$. Введем зональный полином $g(\cos\theta) = T_\theta^\kappa f(x') = \sum_{j=0}^n R_j^{(\alpha_\kappa)}(\cos\theta)\,\mathrm{proj}_j f(x')$. Для произвольной интегрируемой зональной функции h имеем [8, гл. 3]

$$(f *_\kappa h)(x') = c_{w_{\alpha_\kappa}} \int_0^\pi T_\theta^\kappa f(x') h(\cos\theta)(\sin\theta)^{2\alpha_\kappa+1}\,d\theta.$$

Пусть $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный показатель. Тогда

$$\|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}} = \sup_{\|h\|_{p',w_{\alpha_\kappa}}\leqslant 1} \left| c_{w_{\alpha_\kappa}} \int_0^\pi g(\cos\theta)h(\cos\theta)(\sin\theta)^{2\alpha_\kappa+1}\,d\theta\right| = \sup_{\|h\|_{p',w_{\alpha_\kappa}}\leqslant 1} |(f *_\kappa h)(x')|.$$

По неравенству Юнга имеем $\|f *_\kappa h\|_\infty \leqslant \|f\|_{p,v_\kappa}\|h\|_{p',w_{\alpha_\kappa}}$ [8, гл. 3]. Поэтому $\|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}} \leqslant \|f\|_{p,v_\kappa}$. Также имеем $(-D_{\alpha_\kappa})^{r/2}g(1) = \sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2}\,\mathrm{proj}_j f(x') = (-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}f(x')$. В итоге получаем

$$\frac{\|(-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}f\|_\infty}{\|f\|_{p,v_\kappa}} \leqslant \frac{|(-D_{\alpha_\kappa})^{r/2}g(1)|}{\|g\|_{p,w_{\alpha_\kappa}}} \leqslant \sup_{\substack{g\in\mathcal{P}_n\\ \|g\|_{p,w_\alpha}=1}} |(-D_{\alpha_\kappa})^{r/2}g(1)|.$$

Теорема доказана. $\square$

Сделаем несколько комментариев к теореме 1. В весовом случае мы не можем сказать, существует ли точка x_0, где все значения $\widetilde{Z}_j^\kappa(x_0,x_0)$ равны 1. В этой связи посмотрим, что происходит в случае $p = 2$, где точная константа стандартно вычисляется следующим образом. Пусть $K_n^\kappa = \sum_{j=0}^n Z_j^\kappa$ — воспроизводящее ядро подпространства Π_n^d, $D = (-\Delta_{\kappa,0})^{r/2}$. Тогда $Df(x) = c_{v_\kappa}\int_{\mathbb{S}^d} D_x K_n^\kappa(x,y) f(y) v_\kappa(y)\,dy$. Отсюда по неравенству Коши–Буняковского получаем $|Df(x)| \leqslant \|D_x K_n^\kappa(x,\cdot\,)\|_{2,v_\kappa}\|f\|_{2,v_\kappa}$. Следовательно, применяя свойства воспроизводящего ядра, получаем

$$C_{2,\kappa}(d,n,r) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{S}^d}\|D_x K_n^\kappa(x,\cdot\,)\|_{2,v_\kappa} = \|D_x K_n^\kappa(x',\cdot\,)\|_{2,v_\kappa} = \left(\sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^r Z_j^\kappa(x',x')\right)^{1/2},$$

где x' зависит только от K_n^κ. Эта оценка точная, поскольку можно взять полином $f(x) = D_x K_n^\kappa(x,x') = \sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^{r/2} Z_j^\kappa(x,x')$, для которого имеем $D_x f(x') = \sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^r \times \times Z_j^\kappa(x',x') = \|D_x K_n^\kappa(x',\cdot\,)\|_{2,v_\kappa}^2 = \|D_x K_n^\kappa(x',\cdot\,)\|_{2,v_\kappa}\|f\|_{2,v_\kappa}$. Таким образом,

$$C_{2,\kappa}(d,n,r) = \left(\sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^r Z_j^\kappa(x',x')\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=0}^n (\lambda_{\alpha_\kappa,j})^r h_j(d_\kappa)\widetilde{Z}_j^\kappa(x',x')\right)^{1/2}.$$

Для уточнения теоремы 1 желательно оценить функции $\widetilde{Z}_n^\kappa(x,x) = \frac{1}{h_n(d_\kappa)}\sum_{i=1}^{h_n(d)} |Y_{ni}(x)|^2$. С одной стороны имеем $\widetilde{Z}_n^\kappa(x,x) \leqslant 1$ для любого x. Можно дать следующую простую, но недостаточную оценку снизу. Ортонормированность Y_{ni} влечет $c_{v_\kappa}\int_{\mathbb{S}^d}\widetilde{Z}_n^\kappa(x,x)v_\kappa(x)\,dx = \frac{h_n(d)}{h_n(d_\kappa)}$.

Поэтому $\max_{x\in\mathbb{S}^d}\widetilde{Z}_n^{\kappa}(x,x)\geqslant\frac{h_n(d)}{h_n(d_\kappa)}$. В безвесовом случае $d=d_0$ дробь равна 1. Однако в весовом случае $d_\kappa>d$ при больших n имеем $\frac{h_n(d)}{h_n(d_\kappa)}\asymp n^{d-d_\kappa}$, что мешает установлению правильного порядка поведения исследуемой величины $C_{p,\kappa}(d,n,r)$.

Тем не менее даже в текущем виде теорема 1 может быть использована для оценок весовой константы. В частности, если функция кратности κ такова, что $d_\kappa\in\mathbb{N}$, то

$$C_{p,\kappa}(d,n,r)\leqslant C_{p,d_\kappa/2-1}(n,r)=C_p(d_\kappa,n,r).$$

В этом случае можно воспользоваться результатами для безвесовой константы $C_p(d_\kappa,n,r)$, в частности, асимптотиками (1), (2), точным значением для $p=\infty$, r четное [5], оценками для $p=1$, $r=0$ [6]. В общем случае для оценок константы $C_{p,\alpha}(n,0)$ и, как следствие, $C_{p,\kappa}(d,n,0)$ можно применить результаты работы [3]. В частности, имеем $C_{p,\kappa}(d,n,0)\lesssim n^{d_\kappa/p}$, $n\to\infty$. Выскажем предположение, что этот порядок правильный.

В качестве открытых проблем укажем уточнение границ $C_{p,\kappa}(d,n,r)$ для $\kappa\not\equiv 0$ и исследование случая $p<1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арестов В.В., Дейкалова М.В. Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Том 19, № 2. С. 34–47.

2. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Константы Маркова–Бернштейна–Никольского для полиномов в пространстве L^p с весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 4.

3. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, № 4. С. 126–137.

4. Иванов В.А. О неравенствах Бернштейна–Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1 // УМН. 1983. Том 38, № 3(231). С. 179–180.

5. Иванов В.А. Точные результаты в задаче о неравенстве Бернштейна–Никольского на компактных симметрических римановых пространствах ранга 1 // Тр. МИАН СССР: сб. тр.: Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Ч. 14. Т. 194. М.: Наука, 1992. С. 111–119.

6. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // arXiv:1907.03832. 2019.

7. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, no. 1. P. 161–185.

8. Dai F., Xu Yu. Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls. New York: Springer, 2013.

REFERENCES

1. Arestov, V.V. & Deikalova, M.V. 2014. "Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere", *Proc. Steklov Inst. Math.* (Suppl.), vol. 284, suppl. 1, pp. 9–23.

2. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2020. "Markov–Bernstein–Nikol'skii constants for polynomials in L^p-space with the Gegenbauer weight", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4. (In Russ.)

3. Gorbachev, D.V. & Mart'yanov, I.A. 2020. "Bounds of the Nikol'skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight", *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, vol. 26, no. 4, pp. 126–137. (In Russ.)

4. Ivanov, V.A. 1983. "On the Bernstein–Nikol'skii and Favard inequalities on compact homogeneous spaces of rank 1", *Russian Math. Surveys*, vol. 38, no. 3, pp. 145–146.

5. Ivanov, V.A. 1993. "Precise results in the problem of the Bernstein–Nikol'skij inequality on compact symmetric Riemannian spaces of rank 1", Investigations in the theory of differentiable functions of many variables and its applications, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 194, pp. 115–124. (In Russ.)

6. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2019. "Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials", arXiv:1907.03832.

7. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. "Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere", *J. d'Anal. Math.*, vol. 140, no. 1, pp. 161–185.

8. Dai F., Xu Yu. Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls. New York: Springer, 2013.

Получено 12.08.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-308-313

О слабой теореме универсальности[1]

А. В. Кирилина

Кирилина Анастасия Вячеславовна — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: juska789@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам приближения квадратичной алгебраической решётки целочисленной решёткой. В ней вычисляются расстояния между квадратичной алгебраической решёткой и целочисленной решёткой, когда они заданы числителем и знаменателем подходящей дроби к корню квадратному из дискриминанта d — свободного от квадратов натурального числа.

Результаты данной работы позволяют изучать вопросы о наилучших приближениях квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
А. В. Кирилина. О слабой теореме универсальности // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 308–313.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-308-313

On the weak universality theorem[2]

A. V. Kirilina

Kirilina Anastasia Vyacheslavovna — Postgraduate Student, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: juska789@mail.ru

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.
[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

Abstract

TThis paper is devoted to the approximation of a quadratic algebraic lattice by an integer lattice. It calculates the distances between a quadratic algebraic lattice and an integer lattice when they are given by the numerator and denominator of a suitable fraction to the square root of the discriminant d — of a square-free natural number.

The results of this work allow us to study questions about the best approximations of quadratic algebraic lattices by integer lattices.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

Bibliography: 9 titles.

For citation:
A. V. Kirilina, 2020, "On the weak universality theorem", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 308–313.

1. Введение

45 лет тому назад в 1975 году вышла работа С. М. Воронина, в которой была доказана знаменитая теорема об универсальности дзета-функции Римана [1].

Теорема 1. *Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(s)$ — функция, аналитическая внутри круга $|s| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(s)$ не имеет нулей внутри круга $|s| \leqslant r$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon)$ такое, что*

$$\max_{|s|\leqslant r}\left|f(s) - \zeta\left(s + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. См. [1] или [2], стр. 240–250. □

Для дальнейшего нам потребуются моноиды M с однозначным разложением на простые числа такие, что для их дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ справедливо разложение в произведение Эйлера

$$\zeta(M|\alpha) = \prod_{p\in P(M)}\left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma \geqslant \sigma_0,$$

где $0 \leqslant \sigma_0 \leqslant \frac{1}{2}$. Доказательство существования таких моноидов содержится в работе [7]. Будем через $\mathfrak{M}_{\sigma_0}$ обозначать класс моноидов M с однозначным разложением на простые числа таких, что дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ представляется в виде произведения Эйлера, абсолютно и равномерно сходящегося в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$.

В работе [10] доказаны следующие утверждения:

Лемма 1. *При $Q > 4$ для любого $q > Q$ и для любого вещественного T справедливы неравенства*

$$\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}}}} - 1\right| < \frac{4}{\sqrt{Q}}, \quad \max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|1 - \frac{1}{q^{\alpha+\frac{3}{4}+iT}}\right| < 1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}.$$

Пусть p_0 — простое число и моноид $M_-(p_0)$ обозначает моноид натуральных чисел, не делящихся на p_0. Дзета-функция $\zeta(M_-(p_0)|\alpha)$ в правой полуплоскости $\sigma > 1$ имеет представление в виде произведения Эйлера:

$$\zeta(M_-(p_0)|\alpha) = \prod_{p\neq p_0}\left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Теорема 2. *Пусть $Q > 4$, $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и $A(r, f) = \max_{|\alpha|\leqslant r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для любого простого $p_0 > Q$ существует вещественное $T = T(\varepsilon, p_0)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f(\alpha) - \zeta\left(M_-(p_0)\left|\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right.\right)\right| < \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}\right) + \frac{4A}{\sqrt{Q}}.$$

Теорему 2 можно существенно усилить. Пусть Q — натуральное число и моноид $M \in \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}$. Определим моноид M_{-Q} как множество натуральных чисел, не делящихся на простые p из $P(M)$ и больших Q. Если определить моноид M_{+Q} как множество натуральных чисел, имеющих в своём каноническом разложении только простые числа $p \in P(M)$, которые больше Q, то $\mathbb{N} = M_{-Q} \cdot M_{+Q}$ и $\zeta(\alpha) = \zeta(M_{-Q}|\alpha)\zeta(M_{+Q}|\alpha)$.

Лемма 2. *Для любого вещественного $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < 1$ найдётся натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что для любого вещественного T справедливы неравенства*

$$\max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4})}{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4} + iT)} - 1\right| < 3\varepsilon_1, \quad \max_{|\alpha|\leqslant\frac{1}{4}}\left|\frac{1}{\zeta\left(M_{+Q}\left|\alpha + \frac{3}{4} + iT\right.\right)}\right| < 1 + \varepsilon_1.$$

Теорема 3. *Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и $A(r, f) = \max_{|\alpha|\leqslant r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякого $1 > \varepsilon_1 > 0$ существует натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что существует вещественное $T = T(\varepsilon, \varepsilon_1)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f(\alpha) - \zeta\left(M_{-Q}\left|\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right.\right)\right| < \varepsilon\left(1 + \varepsilon_1\right) + 3A\varepsilon_1.$$

Цель данной работы — дать новую интерпретацию метода работы [10], которая объясняет возникновение эффекта слабой универсальности.

2. Конструкция функций со слабой изоляцией

Дадим следующее определение делителя слабой изоляции.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $d(\alpha)$ является делителем слабой изоляции с константами $\varepsilon_1, B > 0$, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$d(\alpha)$ аналитична в полосе $\alpha = \sigma + it$, $\frac{3}{4} - r \leqslant \sigma \leqslant \frac{3}{4} + r$;*
2. *$d(\alpha)$ не имеет нулей в этой полосе;*
3. *для любого T в данной полосе выполняются неравенства*

$$\left|\frac{d\left(\frac{3}{4} + \alpha\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)} - 1\right| < \varepsilon_1, \quad \left|\frac{1}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)}\right| < B$$

.

Теорема 4. *Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leqslant r$ и $A(r, f) = \max_{|\alpha|\leqslant r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon)$ такое, что*

$$\max_{|\alpha|\leqslant r}\left|f(\alpha) - \frac{\zeta\left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)}\right| < \varepsilon \cdot B + A\varepsilon_1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_1(\alpha) = f(\alpha) d\left(\frac{3}{4} + \alpha\right),$$

которая удовлетворяет всем условиям теоремы Воронина. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leqslant r} \left| f(\alpha) d\left(\frac{3}{4} + \alpha\right) - \zeta\left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)\right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\max_{|\alpha| \leqslant r} \left| \frac{f(\alpha) d\left(\frac{3}{4} + \alpha\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)} - \frac{\zeta\left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)} \right| < \frac{\varepsilon}{\left|d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)\right|}.$$

Пользуясь определением делителя слабой изоляции, получим

$$\max_{|\alpha| \leqslant r} \left| f(\alpha) - \frac{\zeta\left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)} \right| < \varepsilon \cdot B + \max_{|\alpha| \leqslant r} |f(\alpha)| \cdot \left| \frac{d\left(\frac{3}{4} + \alpha\right)}{d\left(\frac{3}{4} + \alpha + iT\right)} - 1 \right| \leqslant \varepsilon \cdot B + A\varepsilon_1,$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

3. Новое доказательство теоремы о слабой изоляции

Из леммы 1 следует, что для заданного $Q > 4$ функция $d(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{p_0^\alpha}\right)^{-1}$ при $p_0 > Q$ является делителем слабой изоляции с константами $\varepsilon_1 = \frac{4}{\sqrt{Q}}$, $B = 1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}$ и дзета-функция $\zeta(M_-(p_0)|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{d(\alpha)}$ в силу теоремы 4 удовлетворяет теореме 2.

Из леммы 2 следует, что для $Q = Q(\varepsilon_1)$ дзета-функция $\zeta(M_{+Q}|\alpha)$ является делителем слабой изоляции с константами $3\varepsilon_1$, $B = 3$ и дзета-функция $\zeta(M_{-Q}|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M_{+Q}|\alpha)}$ в силу теоремы 4 удовлетворяет теореме 3.

Заметим, что любой делитель слабой изоляции $d(\alpha)$ свойством универсальности или слабой универсальности не обладает, так как он в силу определения ограничен сверху некоторой константой C: $|d(\alpha)| \leqslant C$, а, значит, не может приближать с любой точностью функции, которые по модулю имеют значения больше C.

Из метода доказательства теоремы 4 легко видеть, что универсальность сохраняется только для тривиальных делителей слабой изоляции, которые сами являются константами. Кроме этого, так как никакой делитель слабой изоляции $d(\alpha)$ кроме константы не может удовлетворять третьему условию из определения для любого $\varepsilon_1 > 0$, то становится понятна формулировка теорем из работы [10].

4. Заключение

С помощью теоремы универсальности С. М. Воронина удалось доказать слабую форму теоремы универсальности для широкого класса дзета-функций моноидов натуральных чисел, для которых делитель слабой универсальности сам является дзета-функцией соответствующего моноида, удовлетворяющей определенным условиям.

Как было отмечено в работе [10]: "Было бы интересно выяснить какие элементы доказательства С. М. Воронина непосредственно переносятся на этот класс дзета-функций моноидов натуральных чисел?

Интересно заметить, что как показано в работе [8] среди дзета-функций моноидов натуральных чисел, для которых справедлива слабая теорема универсальности, есть те, для которых область голоморфности совпадает со всей α-полуплоскостью $\sigma > 0$, кроме точки $\alpha = 1$, где у них полюс первого порядка. Таким образом, они продолжаются в лево от полуплоскости абсолютной сходимости, но не на всю плоскость. Если верна гипотеза Линника–Ибрагимова [13], то для них должна быть справедлива и сильная теорема универсальности."

На первый взгляд создается впечатление, что если в доказательстве С. М. Воронина удалить любое конечное множество простых, то оно останется в силе, но это требует отдельной тщательной проверки.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин С. М. Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1975. — Т. 39, № 3. — С. 475–486.

2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

3. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

4. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.

5. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

6. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.

7. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

8. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

9. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о ”заградительном ряде” для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

10. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

11. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

12. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

13. Лауринчикас А. П., Матсумото К., Стеудинг Й. “Универсальность L-функций, связанных с новыми формами”. Изв. РАН. Сер. матем. — Т. 67, № 1 (2003). — С. 83–98; Izv. Math., 67:1 (2003). — P. 77–90.

14. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.

15. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

REFERENCES

1. Voronin, S. M. 1975, “Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function“, *Math. USSR Izv.*, vol. 9, pp. 443–453.

2. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

3. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.

4. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol’skii N. N., Dobrovol’skii N. M., Dobrovol’skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil’kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.

5. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.

6. N. N. Dobrovol’skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.

7. N. N. Dobrovol’skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 142–150.

8. N. N. Dobrovol’skii, M. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

9. N. N. Dobrovol’skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.

10. N. N. Dobrovol’skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii 2018, "On the monoid of quadratic residues" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.

11. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol’skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

12. Laurinčikas, A., Matsumoto, K., Steuding, J. 2003, “The universality of L-functions associated with newforms“, *Izv. RAN, Ser. Mat.*, vol. 67 (1), pp. 83–98 (in Russian) $\equiv$ *Izv. Math.*, vol. 67 (1), pp. 77–90.

13. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

14. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.

Получено 2.08.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 621.762.227 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-314-326

Разработка научных и технологических основ нового экологически чистого и безотходного процесса измельчения токопроводящих отходов в порошки микро- и нанофракций

Е. В. Агеева, Е. В. Агеев, О. А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева

Екатерина Владимировна Агеева — кандидат технических наук, доцент, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).
e-mail: ageeva-ev@yandex.ru
Евгений Викторович Агеев — доктор технических наук, профессор, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).
e-mail: ageev_ev@mail.ru
Александр Евгеньевич Гвоздев — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Ольга Владимировна Кузовлева — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru

Аннотация

В работе представлена реализация технологии электроэрозионного измельчения на примере отходов твердых сплавов. Показано, что мощность электроконтактных тепловых источников может быть достаточной для реализации процесса электроэрозионного диспергирования. Получены зависимости, позволяющие выполнить расчетную оценку фракционного состава порошкового материала, получаемого в условиях действия электроконтактных тепловых источников.

Ключевые слова: металлоотходы, мощность тепловых источников, порошковый материал, размер частиц, электроэрозионное диспергирование.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:
Е. В. Агеева, Е. В. Агеев, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева. Разработка научных и технологических основ нового экологически чистого и безотходного процесса измельчения токопроводящих отходов в порошки микро- и нанофракций // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 314–326.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 621.762.227 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-314-326

Development of scientific and technological foundations for a new environmentally friendly and waste-free process for grinding conductive waste into micro- and nanofractions powders

E. V. Ageeva, E. V. Ageev, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva

Ekaterina Vladimirovna Ageeva — candidate of technical Sciences, associate Professor of the Department of materials and transport technology, Southwestern State University (Kursk).
e-mail: ageeva-ev@yandex.ru
Yevgeniy Viktorovich Ageev — doctor of technical Sciences, Professor of the Department of automobiles and automobile economy, Southwestern State University (Kursk).
e-mail: ageev_ev@mail.ru
Aleksander Evgenyevich Gvozdev — doctor of engineering, Professor, Tula State Pedagogical University L.N. Tolstoy (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Olga Vladimirovna Kuzovleva — candidate of technical Sciences, docent, Russian State University of justice (Moscow).
e-mail: kusovleva@yandex.ru

Abstract

The paper presents the implementation of the technology of electroerosive grinding on the example of solid alloy waste. It is shown that the power of electric contact heat sources can be sufficient for the implementation of the process of electroerosive dispersion. Dependences are obtained that allow us to perform a calculated estimation of the fractional composition of the powder material obtained under the action of electric contact heat sources.

Keywords: metal waste, power of heat sources, powder material, particle size, electroerosive dispersion.

Bibliography: 26 titles.

For citation:
E. V. Ageeva, E. V. Ageev, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, 2020, "Development of scientific and technological foundations for a new environmentally friendly and waste-free process for grinding conductive waste into micro- and nanofractions powders", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 314–326.

1. Введение

Первые исследования по применению явления электроэрозии для получения нанопорошков металлов относятся к 40-м годам прошлого столетия. Изобретенный в 1943 г. Б.Р. Лазаренко и Н.И. Лазаренко метод электроискровой обработки впоследствии разделился на два отдельных – электроэрозионная обработка и электроискровое легирование. Однако возможность создания производительной технологии получения дисперсных нанопорошков металлов и их соединений появилась только в последние десятилетия в результате исследований электроэрозии в межэлектродном промежутке, заполненном свободно соприкасающимися гранулами металла и диэлектрической рабочей жидкостью [1, 2, 3, 4, 5, 6].

В нашей стране и за рубежом такая технология вызвала первоочередной интерес для получения химически чистой окиси алюминия. В ряде исследовательских работ было установлено, что методом электроэрозионного диспергирования (ЭЭД) можно получать нанопорошки практически любых металлов и их проводящих соединений. Отмечается, что нанопорошки, получаемые этим методом, имеют сферическую форму частиц размером от 0,001 до 100 мкм. Причем, изменяя электрические параметры процесса диспергирования, можно управлять шириной и смещением интервала размера частиц [7, 8, 9, 10, 11].

2. Основной текст статьи

В зависимости от среды диспергирования можно получать как химически чистые нанопорошки металлов, так и соединения металлов с элементами среды. В частности, диспергирование металлов в воде является перспективным способом получения нанопорошков оксидов и гидроксидов металла, а диспергирование в углеродсодержащих жидкостях приводит к большому процентному выходу соединения металла с углеродом. Используя различные способы очистки, можно добиваться высокого процента выхода чистого металлического порошка и в случае взаимодействия металла со средой [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18].

Схема данного процесса представлена на рис. 1.

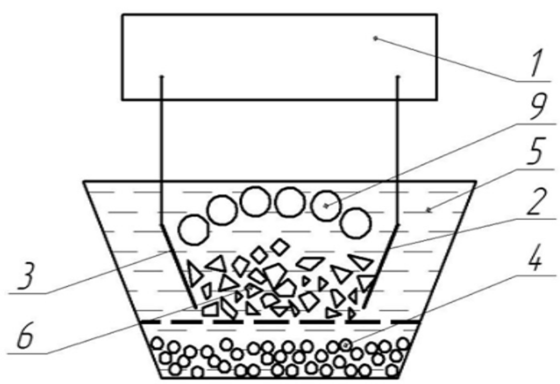


Рис. 1: Схема процесса электроэрозионного диспергирования: 1 – генератор импульсов, 2, 3 – электроды, 4 – полученный порошок, 5 – рабочая жидкость, 6 – диспергируемый материал.

Диспергируемый материал 6 размещается между электродами 2 и 3, подключенным к генератору импульсов 1. Тепловая мощность электрических импульсов тока расходуется на плавление и испарение диспергируемого материала. Металлический пар и расплавленные частицы конденсируются в рабочей жидкости 5 и осаждаются в виде порошкового материала 4 различной фракции [19, 20, 21, 22].

Для описания механизма электроэрозионного диспергирования материалов применительно к различным технологическим процесам в настоящее время широко применяется тепловая теория, согласно которой разрушение материала происходит в результате его высокоскоростного нагрева до температур плавления и испарения. В работе [23] применительно к процессу электроэрозионной обработки металлов выделены три разновидности процессов между электродами. В первом случае под влиянием электрического поля между электродами происходит пробой промежутка. После пробоя капли расплавленного металла и его пары беспрепятственно удаляются из зоны разрядов. Разрушение металла происходит исключительно за счет действия поверхностного теплового источника. Во втором случае, при выбросе металла электроды замыкаются расплавленным металлом. При этом, если достаточно энергии электрического импульса, металлический мостик взрывообразно разрушается при его перегреве джоулевым теплом и межэлектродный промежуток освобождается от металла. В третьем случае к моменту прохождения импульса тока электроды уже соприкасаются друг с другом. При прохождении импульса тока достаточной мощности происходит перегрев и разрушение контактирующих микровыступов джоулевым теплом с последующим возможным образованием разрядного канала. Следует также отметить, что возможность диспергирования компактного металла в результате его перегрева джоулевым теплом показана, например, в работах [24, 25].

Применительно к рассматриваемому процессу электроэрозионного диспергирования реализация первого и второго случаев, предусматривающих электрический пробой межэлектродного промежутка, представляется мало вероятной из-за шунтирования импульсов электрического тока в цепи электрод – объемы диспергируемого металла – электрод. Представляется, что именно третий вариант нагрева с предварительным коротким замыканием и последующим возможным искрообразованием при размыкании электрической цепи является наиболее вероятным механизмом диспергирования.

Целью настоящей работы являлась оценка эффективности мощности тепловыделения на контактных сопротивлениях применительно к процессу электроэрозионного диспергирования металлотходов.

В данной работе выполнена расчетная оценка эффективности мощности тепловыделения на контактных сопротивлениях применительно к процессу электроэрозионного диспергирования без учета последующего искрообразования. При этом ограничились учетом только сопротивления стягивания [26].

3. Результаты и их обсуждение

Была графически представлена схема, представленная на рис. 2.

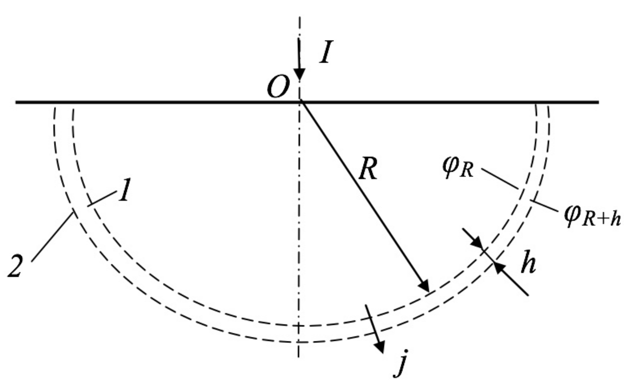


Рис. 2: Схема для расчета нагрева зоны контакта.

Считаем, что электрический контакт возникает в области точки O, причем площадь контакта пренебрежимо мала по сравнению с размерами контактирующих частиц. Предполагаем также, что эквипотенциальные поверхности 1 и 2 с потенциалами φ_R и φ_{R+h}, удаленные друг от друга на расстоянии h, представляют собой полусферы. Из данного допущения следует, что плотность тока j по поверхности сферы с произвольным радиусом R постоянна. Тогда приращение теплоты dQ, выделившееся в объеме частицы, ограниченной эквипотенциальными поверхностями 1 и 2 за время dt составит:

$$dQ = d(I^2 \omega t), \tag{1}$$

где ω – электрическое сопротивление металла частицы, ограниченного эквипотенциальными поверхностями 1 и 2. Полагая, что $R >> h$, получим:

$$\omega = \rho \frac{h}{2\pi R^2}, \tag{2}$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление.

Учтем также зависимость от температуры нагрева T:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha T), \tag{3}$$

где ρ_0 – удельное электрическое сопротивление при начальной температуре, α – температурный коэффициент электрического сопротивления.

Приняв также допущение, что $I = const$, и подставив (2) и (3) в (1), получили:

$$dQ = I^2 \rho_0 (1 + \alpha T) \frac{h}{2\pi R^2} dt. \tag{4}$$

Учитывая кратковременность действия импульсов тока диспергирования¸ а также интенсивное охлаждение частиц рабочей средой, приняли, что возникающее в частицах поле температур определяется исключительно полем мощности тепловыделения, при этом процессы теплопередачи на распределение температур в частице влияния не оказывают.

С другой стороны можно записать

$$dQ = mcdT, \tag{5}$$

где m – масса металла, расположенного между эквипотенциальными поверхностями 1 и 2, c – теплоемкость.

Приравнивая правые части уравнений (4) и (5) получили

$$mcdT = I^2 \rho_0 (1 + \alpha T) \frac{h}{2\pi R^2} dt. \tag{6}$$

На основе геометрических построений из рисунка 1 найдем, что

$$m = 2\pi R^2 h \gamma, \tag{7}$$

где γ – плотность металла.

Подставив (7) в (6), получили:

$$2\pi R^2 h \gamma c dT = I^2 \rho_0 (1 + \alpha T) \frac{h}{2\pi R^2} dt. \tag{8}$$

Перепишем уравнение (8) в виде:

$$\frac{dT}{(1 + \alpha T)} = \frac{I^2 \rho_0}{4\pi^2 R^4 \gamma c} dt. \tag{9}$$

Интегрируя выражение (9), получили:

$$t = \frac{4\pi^2 R^4 c}{I^2 \rho_0 \alpha} \ln(1 + \alpha T) + B, \tag{10}$$

где B – постоянная интегрирования.

При $T < T_{пл}$ (где $T_{пл}$ – температура плавления) $B = 0$ и выражение (10) примет вид:

$$t = \frac{4\pi^2 R^4 c}{I^2 \rho_0 \alpha} \ln(1 + \alpha T). \tag{11}$$

В случае полного расплавления нагреваемого объема металла необходимо учесть скрытую теплоту плавления. В этом случае:

$$B = \frac{4\pi^2 R^4 \lambda}{I^2 \rho_0 (1 + \alpha T_{пл})}, \tag{12}$$

где λ – удельная теплота плавления.

С учетом (10) и (12) время нагрева выделенной сферы с радиусом R до температуры плавления составит:

$$t_{пл} = \frac{4\pi^2 R^4 c}{I^2 \rho_0 \alpha} \ln(1 + \alpha T_{пл}) + \frac{4\pi^2 R^4 \lambda}{I^2 \rho_0 (1 + \alpha T_{пл})}. \tag{13}$$

Для случая нагрева металла до его испарения:

$$B = \frac{4\pi^2 R^4 \lambda}{I^2 \rho_0 (1 + \alpha T_{пл})} + \frac{4\pi^2 R^4 L}{I^2 \rho_0 (1 + \alpha T_{исп})}. \tag{14}$$

Продолжительность $t_{исп}$ нагрева металла до его испарения на основании (10) и (14) составит:

$$t_{исп} = \frac{4\pi^2 R^4 c}{I^2 \rho_0 \alpha} \ln(1 + \alpha T_{исп}) + \frac{4\pi^2 R^4 \lambda}{I^2 \rho_0 (1 + \alpha T_{пл})} + \frac{4\pi^2 R^4 L}{I^2 \rho_0 (1 + \alpha T_{исп})}, \tag{15}$$

где L – удельная теплота парообразования.

Из выражений (13) и (15) можно получить значения радиусов $R_{пл}$ и $R_{исп}$ полусфер, соответствующих границам плавления и испарения металла при произвольной продолжительности нагрева t:

$$R_{пл} = \left(\frac{I}{2\pi}\right)^{0,5} \left(\frac{\rho_0 \alpha t}{c \ln(1 + \alpha T_{пл}) + \dfrac{\lambda}{1 + \alpha T_{пл}}}\right)^{0,25}, \tag{16}$$

$$R_{исп} = \left(\frac{I}{2\pi}\right)^{0,5} \left(\frac{\rho_0 \alpha t}{c \ln(1 + \alpha T_{исп}) + \dfrac{\lambda}{1 + \alpha T_{пл}} + \dfrac{L}{1 + \alpha T_{исп}}}\right)^{0,25}. \tag{17}$$

Объем материала, расположенный на удалении от контакта на расстояние $R < R_{исп}$, при нагреве превращаются в пар. Объем материала, расположенный на удалении от контакта на расстояние $R < R_{пл}$, при нагреве переходит как в жидкое, так и парообразное состояния.

Объем испаренного металла вокруг одного контакта найдем как:

$$V_{исп} = \frac{4}{3}\pi R_{исп}^3. \tag{18}$$

Суммарный объем испаренного и расплавленного металла соответственно составит:

$$V_{пл} = \frac{4}{3}\pi R_{пл}^3. \tag{19}$$

Подставив в (18) и (19) зависимости (16) и (17), получили:

$$V_{исп} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{I}{2\pi}\right)^{1,5} \left(\frac{\rho_0 \alpha t}{c \ln(1 + \alpha T_{исп}) + \dfrac{\lambda}{1 + \alpha T_{пл}} + \dfrac{L}{1 + \alpha T_{исп}}}\right)^{0,75}. \tag{20}$$

и

$$V_{пл} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{I}{2\pi}\right)^{1,5} \left(\frac{\rho_0 \alpha t}{c\ln(1+\alpha T_{пл}) + \dfrac{\lambda}{1+\alpha T_{пл}}}\right)^{0,75} \tag{21}$$

Доля парообразной фазы в диспергированной объеме составит:

$$\mu = \frac{V_{исп}}{V_{пл}}. \tag{22}$$

Подставив в (22) зависимости (20) и (21), получили:

$$\mu = \left(\frac{c\ln(1+\alpha T_{пл}) + \dfrac{\lambda}{1+\alpha T_{пл}}}{c\ln(1+\alpha T_{исп}) + \dfrac{\lambda}{1+\alpha T_{пл}} + \dfrac{L}{1+\alpha T_{исп}}}\right)^{0,75}. \tag{23}$$

Зависимость (23) показывает, что при электроконтактном способе нагрева соотношение объемов, образуемых при диспергировании парообразной и жидкой фаз, определяется теплофизическими свойствами диспергируемого материала.

Рассмотрим в качестве примера диспергирование меди. Приняв, что $T_{пл} = 1083^\circ\ C$, $T_{исп} = 2560^\circ\ C$, $\alpha = 0,01\ldots 0,03$ *град*$^{-1}$ (в диапазоне $T = 0\ldots T_{исп}\ {}^\circ C$), $c = 400$ *Дж/кг · град*, $\lambda = 213$ *Дж/кг*, $L = 4800$ *Дж/кг*, по зависимости (23) получили $\mu \approx 0,1$. Таким образом, около 10% диспергируемого материала должно образовываться при конденсации паров металла. На основе зависимостей (16) и (17) выполнили расчетную оценку размеров частиц, получаемых из парообразной и жидкой фаз в предположении, что за один импульс тока на одном контакте образуется одна шарообразная частица из парообразной фазы диаметром

$$D_п = 2R_{исп}, \tag{24}$$

и одна шарообразная частица из жидкой фазы диаметром

$$D_{ж} = 2(R_{пл} - R_{исп}). \tag{25}$$

Результаты расчетов представлены на рис. 3.

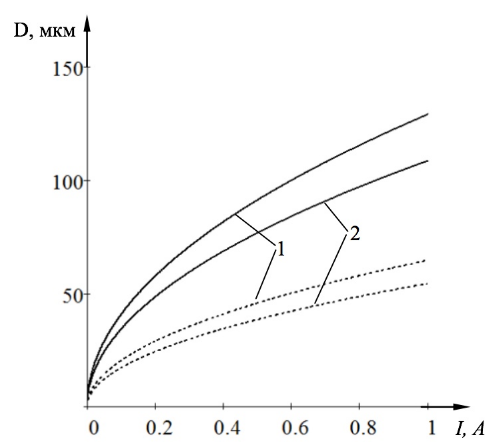


Рис. 3: Изменение размеров частиц в зависимости от силы тока: 1 – для $t = 0,01$ с, 2 – для $t = 0,005$ с, – из жидкой фазы, … – из парообразной фазы.

Анализ зависимостей, представленных на рис. 3 показывает, что размер частиц увеличивается как с повышением силы тока, так и с увеличением продолжительности импульса. Размеры частиц, образованных из парообразной и жидкой фаз резко различается, что объясняет наличие нескольких экстремумов наиболее вероятных размеров частиц в экспериментально определенном фракционном составе полученного порошкового материала (рис. 4 и 5).

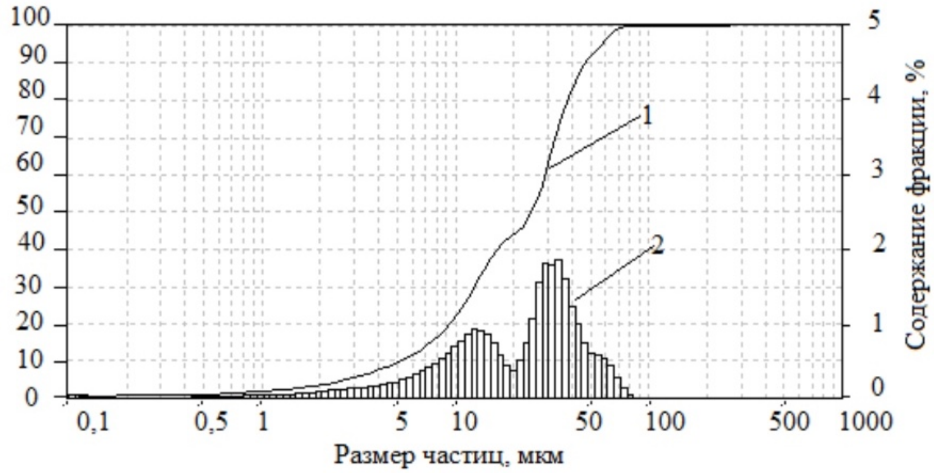


Рис. 4: Распределение по размерам частиц твердого сплава, полученных электроэрозионным диспергированием: 1 – интегральная кривая, 2 – гистограмма.

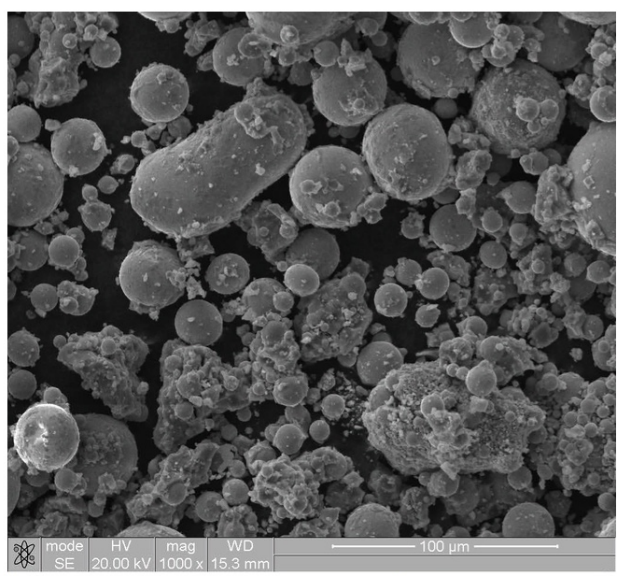


Рис. 5: Электронно-микроскопическое изображение частиц твердого сплава, полученных электроэрозионным диспергированием.

4. Заключение

Мощность электроконтактных тепловых источников может быть достаточной для реализации процесса электроэрозионного диспергирования.

Получены зависимости, позволяющие выполнить расчетную оценку фракционного состава порошкового материала, получаемого в условиях действия электроконтактных тепловых источников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агеев Е. В., Гадалов В. Н., Семенихин Б. А., Агеева Е. В., Латыпов Р. А. Получение износостойких порошков из отходов твердых сплавов // Заготовительные производства в машиностроении. – 2010. – №12. – С. 39–44.

2. Агеев Е. В., Гадалов В. Н., Семенихин Б. А., Агеева Е. В., Латыпов Р. А. Рентгеноструктурный анализ порошков, полученных электроэрозионным диспергированием твердого сплава // Заготовительные производства в машиностроении. – 2011. – №2. – С. 42–44.

3. Агеев Е. В., Гадалов В. Н., Семенихин Б. А., Агеева Е. В., Латыпов Р. А. Рентгеноспектральный микроанализ частиц порошков, полученных электроэрозионным диспергированием твердого сплава // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2011. – №2(74). – С. 13–16.

4. Агеев Е. В., Семенихин Б. А., Агеева Е. В., Латыпов Р. А. Оценка эффективности применения твердосплавных порошков, полученных электроэрозионным диспергированием отходов твердых сплавов, при восстановлении и упрочнении деталей композиционными гальваническими покрытиями // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2011. – №9(81). – С. 14–16.

5. Агеев Е. В., Латыпов Р. А., Агеева Е. В. Исследование свойств электроэрозионных порошков и твердого сплава, полученного из них изостатическим прессованием и спеканием // Известия высших учебных заведений. Цветная металлургия. – 2014. – №6. – С. 51–55.

6. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Агеев Е. В. Морфология и элементный состав медных электроэрозионных порошков, пригодных к спеканию // Вестник машиностроения. – 2014. – №10. – С. 66–68.

7. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Воробьев Е. А. Рентгеноспектральный микроанализ порошка, полученного из отходов быстрорежущей стали электроэрозионным диспергированием в керосине // Вестник машиностроения. – 2014. – №11. – С. 71–72.

8. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Карпенко В. Ю. Рентгеноструктурный анализ порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов электроэрозионным диспергированием в водной среде // Вестник машиностроения. – 2014. – №12. – С. 64–65.

9. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Агеев Е. В. Исследование формы и морфологии электроэрозионных медных порошков, полученных из отходов // Вестник машиностроения. – 2014. –№8. – С. 73–75.

10. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Агеев Е. В. Исследование распределения микрочастиц по размерам в порошках, полученных электроэрозионным диспергированием медных отходов // Вестник машиностроения. – 2014. – №9. – С. 63–64.

11. Агеев Е. В., Агеева Е. В., Воробьев Е. А. Гранулометрический и фазовый составы порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов инструментальных материалов электроэрозионным диспергированием в керосине // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 11–14.

12. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Карпенко В. Ю. Изучение формы и элементного состава порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов инструментальных материалов электроэрозионным диспергированием в водной среде // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 14–17.

13. Хорьякова Н. М., Агеев Е. В., Агеева Е. В. Электроэрозионные медные порошки для гальванических покрытий // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 18–20.

14. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Воробьев Е. А., Осьминина А.С. Получение износостойких покрытий с использованием электродов из твердосплавных электроэрозионных порошков и их исследование // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). – С. 21–23.

15. Агеев Е. В., Агеева Е. В., Карпенко В. Ю., Осьминина А.С. Получение заготовок твердого сплава из порошков, полученных электроэрозионным диспергированием вольфрамсодержащих отходов // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – №4(112). –С. 24–27.

16. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Хорьякова Н. М. Изготовление заготовок из медных порошков, полученных электроэрозионным диспергированием отходов электротехнической меди и изучение их свойств // Наукоемкие технологии в машиностроении. – 2014. – №10(40). – С. 10–13.

17. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Карпенко В. Ю. Размерный анализ частиц порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов электроэрозионным диспергированием в воде // Вестник машиностроения. – 2015. – №3. – С. 45–46.

18. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Воробьев Е. А. Анализ формы и морфологии частиц порошка, полученного из вольфрамсодержащих отходов электроэрозионным диспергированием в керосине // Вестник машиностроения. – 2015. – №7. – С. 72–73.

19. Агеева Е. В., Латыпов Р. А., Агеев Е. В., Алтухов А. Ю., Карпенко В. Ю. Оценка износостойкости электроискровых покрытий, полученных с использованием электроэрозионных порошков быстрорежущей стали // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2015. – №1. – С. 71–76.

20. Агеева Е. В., Латыпов Р. А., Агеев Е. В., Алтухов А. Ю., Карпенко В. Ю. Характеристики электроискровых покрытий, полученных электродами из электроэрозионных порошков быстрорежущей стали // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2015. – №2. – С. 62–65.

21. Агеева Е. В., Агеев Е. В., Латыпов Р. А. Оценка износостойкости электроискровых покрытий, полученных с использованием электроэрозионных порошков быстрорежущей стали // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия

22. Агеева Е. В., Хорьякова Н. М., Пикалов С. В., Агеев Е. В. Состав, структура и свойства медного электроэрозионного порошка, полученного в среде керосина // Известия высших учебных заведений. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2015. – №4. – С. 4–8.

23. Левинсон Е. М. Электроэрозионная обработка металлов. – Л.: Лениздат, 1961. – 184 с.

24. Бурцев В. А. Электрический взрыв проводников и его применение в электрофизических установках / В. А. Бурцев, Н. В. Калинин, А. В. Лучинский. –М.: Энергоатомиздат, 1990. – 288 с.

25. Седой В. С., Валевич В. В. Получение высокодисперсных металлических порошков методом электрического взрыва в азоте пониженного давления // Письма в ЖТФ. – 1999. – Т.25. – Вып. 14. – С. 81–84.

26. Хольм Р. Электрические контакты. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 464 с.

REFERENCES

1. Ageev E.V., Gadalov V.N., Semenikhin B.A., Ageeva E.V., Latypov R.A. 2010, «Obtaining wear-resistant powders from solid alloy waste», *Procurement in mechanical engineering*, No.12, pp. 39-44.

2. Ageev E.V., Gadalov V.N., Semenikhin B.A., Ageeva E.V., Latypov R.A. 2011, «X-ray Structural analysis of powders obtained by electroerosive dispersion of a hard alloy», *Procurement in mechanical engineering*, No.2, pp. 42-44.

3. Ageev E.V., Gadalov V.N., Semenikhin B.A., Ageeva E.V., Latypov R.A. 2011, «X-ray Spectral microanalysis of powder particles obtained by electroerosive dispersion of hard alloy», *Strengthening technologies and coatings*, No.2(74), pp. 13-16.

4. Ageev E.V., Semenikhin B.A., Ageeva E.V., Latypov RA. 2011, «Evaluation of the effectiveness of the use of hard-alloy powders obtained by electroerosive dispersion of solid-alloy waste in the restoration and strengthening of parts with composite electroplating coatings», *Hardening technologies and coatings*, No.9(81), pp. 14-16.

5. Ageev E.V., Latypov R.A., Ageeva E.V. 2014, «Investigation of properties of electroerosive powders and hard alloy obtained from them by isostatic pressing and sintering», *News of higher educational institutions. Nonferrous metallurgy*, No.6, pp. 51-55.

6. Ageeva E.V., Horakova N.M. Ageev E.V. 2014, «Morphology and elemental composition of copper electroerosion powders suitable for sintering», *Bulletin of mechanical engineering*, No.10, pp. 66-68.

7. Ageeva E.V., Ageev E.V., Vorobyov E.A. 2014, «X-ray Spectral microanalysis of a powder obtained from high-speed steel waste by electroerosive dispersion in kerosene», *Bulletin of mechanical engineering*, No.11, pp. 71-72.

8. Ageeva E.V., Ageev E.V., Karpenko V.Yu. 2014, «X-ray Structural analysis of a powder obtained from tungsten-containing waste by electroerosive dispersion in an aqueous medium», *Bulletin of mechanical engineering*, No.12, pp. 64-65.

9. Ageeva E.V., Horyakova N.M., Ageev E.V. 2014, «Investigation of the form and morphology of electroerosive copper powders obtained from waste», *Bulletin of mechanical engineering*, No.8, pp. 73-75.

10. Ageeva E.V., Horyakova N.M., Ageev E.V. 2014, «Investigation of the size distribution of microparticles in powders obtained by electroerosive dispersion of copper waste», *Bulletin of mechanical engineering*, No.9, pp. 63-64.

11. Ageev E.V., Ageeva E.V., Vorobiev E.A. 2014, «Granulometric and phase compositions of powder obtained from tungsten-containing waste of tool materials by electroerosive dispersion in kerosene», *Hardening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 11-14.

12. Ageeva E.V., Ageev E.V., Karpenko V.Yu. 2014, «Study of the form and elemental composition of a powder obtained from tungsten-containing waste of tool materials by electroerosive dispersion in an aqueous medium», *Hardening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 14-17.

13. Horyakova N.M., Ageev E.V., Ageeva E.V. 2014, «Electroerosive copper powders for electroplating coatings», *Strengthening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 18-20.

14. Ageeva E.V., Ageev E.V., Vorobyov E.A., Osminina A.S. 2014, «Obtaining wear-resistant coatings using electrodes from hard-alloy electroerosive powders and their research», *Hardening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 21-23.

15. Ageev E.V., Ageeva E.V., Karpenko V.Yu., Osminina A.S. 2014, «Obtaining hard alloy billets from powders obtained by electroerosive dispersion of tungsten-containing waste», *Hardening technologies and coatings*, No.4(112), pp. 24-27.

16. Ageeva E.V., Ageev E.V., Horyakova N.M. 2014, «Production of blanks from copper powders obtained by electroerosive dispersion of waste electrical copper and study of their properties», *Science-Intensive technologies in mechanical engineering*, No.10(40), pp. 10-13.

17. Ageeva E.V., Ageev E.V., Karpenko V.Yu. 2015, «Dimensional analysis of powder particles obtained from tungsten-containing waste by electroerosive dispersion in water», *Bulletin of mechanical engineering*, No.3, pp. 45-46.

18. Ageeva E.V., Ageev E.V., Vorobiev E.A. 2015, «Analysis of the shape and morphology of powder particles obtained from tungsten-containing waste by electroerosive dispersion in kerosene», *Bulletin of mechanical engineering*, No.7, pp. 72-73.

19. Ageeva E.V., Latypov R.A., Ageev E.V., Altukhov A.Yu., Karpenko V.Yu. 2015, «Assessment of wear resistance of electric spark coatings obtained using high-speed steel electroerosive powders», *News of higher educational institutions. Powder metallurgy and functional coatings*, No.1, pp. 71-76.

20. Ageeva E.V., Latypov R.A., Ageev E.V., Altukhov A.Yu., Karpenko V.Yu. 2015, «Characteristics of electric spark coatings obtained by electrodes from high-speed steel electroerosive powders», *News of higher educational institutions. Powder metallurgy and functional coatings*, No.2, pp. 62-65.

21. Ageeva E.V., Ageev E.V., Latypov R.A. 2015, «Evaluation of wear resistance of electric spark coatings obtained using high-speed steel electroerosive powders», *News of higher educational institutions. Powder metallurgy and functional coatings*, No.3, p. 45.

22. Ageeva E.V., Horakova N.M. Pikalov, S.V., Ageev E.V. 2015, «Composition, structure and properties of copper spark erosion powder obtained in an environment of kerosene», *News of higher educational institutions. Powder metallurgy and functional coatings*, No.4, pp. 4-8.

23. Levinson E.M. 1961, *Electroerosion treatment of metals*. Leningrad, Lenizdat. 184 p.

24. Burtsev V.A., Kalinin N.V., Luchinsky A.V. 1990, *Electric explosion of conductors and its application in electrophysical installations*. Moscow, Energoatomizdat. 288 p.

25. Gray V.S., Valevich V.V. 1999, «Preparation of highly dispersed metal powders method of electric explosion in the nitrogen of low pressure», *Letters to the ZhTF*, Vol.25, No.14, pp. 81-84.

26. Holm R. 1961, *Electrical contacts.* Moscow, Foreign literature Publishing house. 464 p.

Получено 21.01.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 621.2.082.18 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-327-332

Об эволюции математических моделей трения скольжения твердых тел[1]

А. Д. Бреки, С. Г. Чулкин, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева

Александр Джалюльевич Бреки — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург).
e-mail: albreki@yandex.ru
Сергей Георгиевич Чулкин — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru
Александр Евгеньевич Гвоздев — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Ольга Владимировна Кузовлева — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru

Аннотация

В работе приведены сведения об эволюции математических моделей трения скольжения твёрдых тел. Показано, что с учётом отклонений от закона Леонардо да Винчи — Амонтона — Кулона необходимо его уточнение с использованием поправочной функции от нормальной силы. Создана математическая модель обобщённого закона трения скольжения, учитывающая скачкообразные изменения линейной зависимости силы трения от нормальной силы.

Ключевые слова: закон Леонардо да Винчи — Амонтона — Кулона, математическая модель трения, обобщённый закон трения, скачкообразное изменение.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
А. Д. Бреки, С. Г. Чулкин, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева. Об эволюции математических моделей трения скольжения твердых тел // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 327–332.

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Научного центра мирового уровня по направлению «Передовые цифровые технологии» СПбПУ (соглашение от 17.11.2020 № 075-15-2020-934).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 621.2.082.18 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-327-332

On the evolution of mathematical models of friction sliding of solids

A. D. Breki, S. G. Chulkin, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva

Alexander Dzhalyulyevich Breki — candidate of technical Sciences, associate Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS (St. Petersburg).
e-mail: albreki@yandex.ru
Sergey Georgievich Chulkin — doctor of technical Sciences, Professor, Saint Petersburg State marine technical University (St. Petersburg).
e-mail: sergej.chulkin@yandex.ru
Alexander Evgenievich Gvozdev — doctor of engineering, Professor, Tula State pedagogical University L. N. Tolstoy (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Olga Vladimirovna Kuzovleva — candidate of technical Sciences, docent, Russian State University of justice (Moscow).
e-mail: kusovleva@yandex.ru

Abstract

The paper provides information about the evolution of mathematical models of sliding friction of solids. It is Shown that taking into account deviations from the Leonardo da Vinci-Amonton-Coulomb law, it is necessary to Refine it using the correction function of the normal force. A mathematical model of the generalized sliding friction law has been created that takes into account the abrupt changes in the linear dependence of the friction force on the normal force.

Keywords: Leonardo da Vinci–Amonton–Coulomb law, mathematical model of friction, generalized law of friction, abrupt change.

Bibliography: 9 titles.

For citation:
A. D. Breki, S. G. Chulkin, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, 2020, "On the evolution of mathematical models of friction sliding of solids" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 327–332.

1. Введение

Начало исследованию процесса трения положил Леонардо да Винчи в 1508 г., результаты которого отражены в «Атлантическом кодексе». Он сформулировал понятие о коэффициенте трения и выявил, что сила трения не зависит от геометрических размеров (номинальных площадей контакта) взаимодействующих поверхностей трения [1]. Также, Леонардо да Винчи различал мягкие и твёрдые тела при трении, и впервые установил явление шаржирования: в опыте обнаружил явление внедрения частиц в более мягкое контртело и действие последнего по аналогии с напильником на твердое тело.

Далее в 1699 г., французский учёный Гийом Амонтон [2] предложил зависимость, связывающую силу трения при относительном перемещении двух тел с нормальной силой, прижимающей эти тела друг к другу:

$$F_f = f \cdot F_N, \tag{1}$$

где F_f — сила трения, f — коэффициент трения, F_N — нормальная сила, прижимающая тела друг к другу.

Французский физик Шарль Кулон в 1778 г. предложил другой вариант математической модели (1), добавив дополнительное слагаемое в формулу Амонтона [3]:

$$F_f = f \cdot F_N + A, \tag{2}$$

где A — составляющая силы трения, характеризующая сцепление двух тел. Данная формула содержит уже две составляющие силы трения, одна из которых не зависит от нормальной нагрузки.

Математические модели (1) и (2) сохранили своё значение в настоящее время, несмотря на интенсивное развитие трибологии и создание большого количества различных теорий трения. Вместе с тем, в ряде исследований обнаруживаются отклонения от законов (1) и (2), причем такие, что на определённом интервале нагрузок данные законы соблюдаются, а при достижении некоторой критической нагрузки имеет место другая, но имеющая, как правило, также линейный характер зависимость. В связи с этим возникает необходимость создания такой математической модели, которая бы сохраняла справедливость соотношений (1) и (2), но при этом дополняла их с учётом скачкообразного изменения параметров при некотором критическом значении нормальной силы.

2. Уточнение математической модели закона Леонардо да Винчи — Амонтона — Кулона

Вообще говоря, функция (1) является решением следующего дифференциального уравнения:

$$F_f - \frac{dF_f}{dF_N} \cdot F_N = 0. \tag{3}$$

Соответственно функция (2) является решением дифференциального уравнения:

$$F_f - \frac{dF_f}{dF_N} \cdot F_N = A. \tag{4}$$

С учётом наличия отклонений от (1) и (2) на определённом диапазоне изменения нормальной силы естественно предположить, что:

$$F_f - \frac{dF_f}{dF_N} \cdot F_N = A + \varphi(F_N), \tag{5}$$

где $\varphi(F_N)$ — некоторая функция от нормальной силы.

В границах аналитической концепции трения и изнашивания [4, 5, 6, 7, 8, 9] Бреки А.Д. предложил следующий вид функции $\varphi(F_N)$:

$$\varphi(F_N) = \frac{\triangle\, f}{r} \cdot \ln(1 + \exp(r(F_N - F_{N_0}))) - \frac{\triangle\, f \cdot F_N}{1 + \exp(-r(F_N) - F_{N_0})}, \tag{6}$$

где $\triangle\, f$ — приращение коэффициента трения, r — параметр резкости перехода при достижении критической нормальной силы, F_{N_0} — критическое значении нормальной силы.

С учётом функции (6) имеет место следующая математическая модель для закона трения скольжения [7, 8]:

$$F_f = f \cdot F_N + A + \frac{\triangle\, f}{r} \cdot \ln\left(1 + \exp\left(r(F_N - F_{N_0}\right)\right), \tag{7}$$

которую, с учётом наличия n переходов, Бреки А.Д. записывает следующим образом [4, 5, 6, 7, 8, 9]:

$$F_f = f \cdot F_N + A + \sum_{i=1}^{n} \frac{\triangle f_i}{r_i} \cdot \ln\left(1 + \exp\left(r_i(F_N - F_{N_{0i}}\right)\right). \tag{8}$$

Данная модель не опровергает, а уточняет закон Леонардо да Винчи-Амонтона-Кулона (2).

3. Заключение

В заключении приведём качественное графическое представление уточ не ния закона (2) в виде (7), то есть для случая одного перехода (рис. 1).

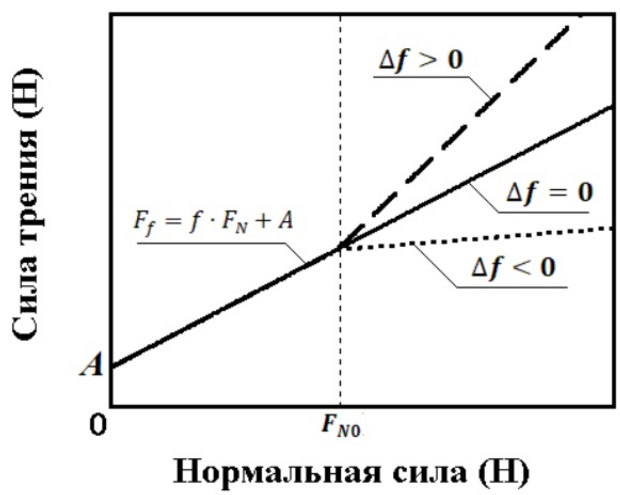


Рис. 1: Качественное графическое представление уточнённого закона трения скольжения для случая одного перехода

Из приведённого рисунка видно, что при различных вариантах приращения коэффициента трения после достижения критической нормальной нагрузки имеют место три варианта развития событий:

1. линейный рост силы трения не меняется;
2. линейный рост силы трения увеличивается;
3. линейный рост силы трения уменьшается.

Соответственно представленный закон (7) при $\triangle f = 0$ переходит в закон Леонардо да Винчи-Амонтона-Кулона (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонардо да Винчи. 1935. *Избранные произведения.* М.: Ладомир, 1995. Т.1. 415 с.
2. Amontons, G. 1699. «De la resistance causée dans les machines», *Memoires de l'Academie Royale*, Paris, pp. 206-222.

3. Coulomb C.A. «Théorie des machines simples», *Collection des Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 10, (1785), pp.163–332.

4. Breki, A., Nosonovsky, M. 2018, «Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition», *Applied Physics Letters*, T. 113, № 24, pp. 241602.

5. Breki, A.D., Nosonovsky, M. 2018, «Einstein's viscosity equation for nanolubricated friction», *Langmuir: the ACS journal of surfaces and colloids*, T. 34, № 43, pp. 12968–12973.

6. Breki, A.D., Vasilyeva, E.S., Tolochko, O.V., Didenko, A.L., Nosonovsky, M. 2019, «Frictional properties of a nanocomposite material with a linear polyimide matrix and tungsten diselinide nanoparticle reinforcement», *Journal of Tribology*, T.141, №8, pp. 082002.

7. Breki, A.D., Gvozdev. A.E., Kolmakov, A.G. 2019, «Semiempirical mathematical models of the pivoting friction of SHKH15 steel over R6M5 steel according to the ball-plane scheme with consideration of wear», *Inorganic Materials: Applied Researc*, T.10. №4. pp. 1008–1013.

8. Breki, A.D., Kolmakov, A.G., Gvozdev, A.E., Sergeev, N.N. 2019, «Investigation of the pivoting friction of SHKH15 steel over R6M5 and 10R6M5-MP steel with the use of mathematical modeling», *Inorganic Materials: Applied Research*, T.10, №4, pp. 927–932.

9. Breki, A.D., Aleksandrov, S.E., Tyurikov, K.S., Kolmakov, A.G., Gvozdev, A.E., Kalinin, A.A. 2018, «Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO2 with MoS2 nanoparticles under conditions of spinning friction on SHKH15 steel», *Inorganic Materials: Applied Research*, T.9, №4, pp. 714–718.

REFERENCES

1. Leonardo da Vinci. 1995, *Selected works. A reprint from the ed.* 1935. Moscow: Ladomir, T.1, 415 pp.

2. Amontons, G. 1699, «De la resistance causée dans les machines», *Memoires de l'Academie Royale*, Paris, pp. 206–222.

3. Coulomb, C.A. 10 (1785), «Théorie des machines simples», *Collection des Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 10 (1785), pp. 163–332.

4. Breki A., Nosonovsky M. 2018, «Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition», *Applied Physics Letters*, T.113, № 24, pp. 241602.

5. Breki, A., Nosonovsky, M. 2018, «Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition», *Applied Physics Letters*, T.113, № 24, pp. 241602.

6. Breki, A., Nosonovsky, M. 2018, «Einstein's viscosity equation for nanolubricated friction», *Langmuir: the ACS journal of surfaces and colloids*, T.34, № 43, pp. 12968-12973.

7. Breki, A.D., Gvozdev, A.E., Kolmakov, A.G. 2019, «Semiempirical mathematical models of the pivoting friction of SHKH15 steel over R6M5 steel according to the ball-plane scheme with consideration of wear» *Inorganic Materials: Applied Research*, T.10, №4, pp. 1008–1013.

8. Breki, A.D., Kolmakov, A.G., Gvozdev, A.E., Sergeev, N.N. 2019, «Investigation of the pivoting friction of SHKH15 steel over R6M5 and 10R6M5-MP steel with the use of mathematical modeling», *Inorganic Materials: Applied Research*, T.10, № 4, pp. 927–932.

9. Breki, A.D., Aleksandrov, S.E., Tyurikov, K.S., Kolmakov, A.G., Gvozdev, A.E., Kalinin, A.A. 2018, «Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO2 with MoS2 nanoparticles under conditions of spinning friction on SHKH15 steel» *Inorganic Materials: Applied Research*, T.9, №4, pp. 714–718.

Получено 21.01.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 51-74 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-333-339

К вопросу о роли математических вычислений в экспертном исследовании процессов структурообразований и фазовых превращений в металлических материалах

О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, А. В. Маляров

Ольга Владимировна Кузовлева — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru

Александр Евгеньевич Гвоздев — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Андрей Викторович Маляров — инженер, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: vascko.andr@yandex.ru

Аннотация

В статье проиллюстрирована роль математики в исследованиях в области технических наук, посвящённых изучению свойств металлических материалов на примере титана.

Ключевые слова: зародыши, изучение, металл, наука, свойства, теория, фазовое превращение.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

О. В. Кузовлева, А. Е. Гвоздев, А. В. Маляров. К вопросу о роли математических вычислений в экспертном исследовании процессов структурообразований и фазовых превращений в металлических материалах // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 333–339.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 51-74 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-333-339

On the role of mathematical calculations in the expert study of the processes of structure formation and phase transformations in metal materials

O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, A. V. Malyarov

Olga Vladimirovna Kuzovleva — candidate of technical Sciences, docent, Russian State University of justice (Moscow).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Alexander Evgenievich Gvozdev — doctor of engineering, Professor, Tula State Pedagogical University L. N. Tolstoy (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Andrey Viktorovich Malyarov — engineer, Tula State Pedagogical University L. N. Tolstoy (Tula).
e-mail: vascko.andr@yandex.ru

Abstract

The article illustrates the role of mathematics in research in the field of technical Sciences, devoted to the study of the properties of metallic materials on the example of titanium.

Keywords: embryos, study, metal, science, properties, theory, phase transformation.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
O. V. Kuzovleva, A. E. Gvozdev, A. V. Malyarov 2020, "On the role of mathematical calculations in the expert study of the processes of structure formation and phase transformations in metal materials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 333–339.

1. Введение

Математика является одной из древнейших наук. Она присутствует в самых различных сферах деятельности человека — в строительстве, экономике, и пересекается с другими науками — статистикой, физикой, астрономией.

Математика — точная наука. В ней и в настоящее время совершаются открытия, которые позволяют двигать вперёд и другие области науки.

Особенно велика роль математики в технических науках. Примером может служить изучение закономерностей изменения свойств металлов и сплавов в интервале критических температур — фазовых превращений, которые имеют большое значение в экспертном исследовании металлов и сплавов, в металловедении и термической обработке металлов и сплавов, т.к. влияют на процессы структурообразования металлических систем, на их механические и структурные свойства и определяют ресурс деталей и конструкций, изготовленных из сталей и сплавов [1].

2. Основной текст статьи

В ряде работ [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] с целью изучения изменения свойств металлов в интервале до температуры фазового перехода выдвигается гипотеза о вкладе объёмной доли зародышей в изменение свойств металлических материалов при определённых условиях. Для того, чтобы показать особое место математических вычислений при изучении свойств материалов, ниже приводится расчёт количества зародышей новой фазы.

Работу образования зародыша критической величины $\triangle F_{g_o}$ оценим как $\dfrac{1}{3}$ поверхностной энергии зародыша [10]:

$$\triangle F_{g_o} = \frac{1}{3}\beta \cdot g_o^{\frac{2}{3}}. \tag{1}$$

Поскольку размер зародыша g_o зависит от температуры, то и $\triangle F_{g_o}$ оказывается различной для разных степеней переохлаждения.

Для расчёта величины работы образования зародыша критической величины оценим энергию поля упругих напряжений $E_{\text{упр}}$, возникающих при образовании зародыша новой фазы.

Согласно данным [11] с учётом дифференцирования упругая энергия при фазовом превращении составит:

$$\frac{\partial E_{\text{упр}}}{\partial g} g_o = \frac{6Gg_o\varepsilon^2}{1+\frac{4}{3}G\chi}, \tag{2}$$

где G — модуль сдвига матрицы; ε — параметр размерного несоответствия; χ — коэффициент сжимаемости.

Оценка по формуле (2) выполнена для $T = 1100\ K$, при этом $g_o = 216$ атомов (максимальная величина зародыша):

$$\frac{\partial E_{\text{упр}}}{\partial g} g_o \approx 21 \cdot 10^{-28}\text{Дж}.$$

С ростом степени переохлаждения работа образования зародыша критической величины уменьшается, как и предсказывает флуктуационная теория зарождения [12, 13, 14, 15].

Далее рассчитывали число зародышей критического размера g_o при фиксированных температурах. Принимали число возможных мест для появления зародыша $N = 10^{28}\text{м}^{-3}$, т.е. делали допущение, что зародыш может возникнуть в каждой элементарной ячейке.

$N \approx \dfrac{1}{a^3}$, где a — период кристаллической решётки.

Расчёт объёмной доли зародышей проведём на примере титана. Для оценки количества зародышей в 1 моле вещества число зародышей в 1м^3 умножили на объём моля титана. Учитывали, что число всех атомов в 1 моле вещества равно числу Авогадро $N_a = 6{,}023 \cdot 10^{23}$.

Для температуры 810 K, при которой начинается отклонение теплоёмкости титана от линейной зависимости, объёмная доля зародышей β-фазы титана составляет:

$$V_{810}^{\beta} = \frac{V_a g_o n_{g_o}}{N_a V_a} = \frac{12{,}19 \cdot 10^{-30} \cdot 64 \cdot 10^{13}}{6{,}023 \cdot 10^{23} \cdot 12{,}19 \cdot 10^{-30}} = 0{,}1 \cdot 10^{-8}.$$

Для температуры 1100 K накопленное количество зародышей равно $1{,}5 \cdot 10^{15}$. В качестве размера зародыша в этих условиях принимали среднее количество атомов в зародышах критической величины, равное 132.

Таким образом, в интервале 800…1156 система может «накопить» объёмную долю зародышей β-фазы, равную:

$$V^{\beta} = \frac{12{,}19 \cdot 10^{-30} \cdot 132 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{15}}{6{,}023 \cdot 10^{23} \cdot 12{,}19 \cdot 10^{-30}} = 0{,}3 \cdot 10^{-6}.$$

Приведенные оценки свидетельствуют о том, что полученные малые значения объёмной доли зародышей новой фазы не могут повлиять на существенное уменьшение теплоёмкости титана вблизи температуры фазового превращения, которое наблюдается при проведении экспериментов.

Такой вывод хорошо согласуется с классическим представлением в термодинамике о том, что при фазовых переходах I рода свойства решётки изменяются скачком только в точке превращения, а до и после неё характеризуются определённой температурной зависимостью.

Полученные результаты могут найти применение при создании ресурсосберегающих технологий обработки конструкционных и инструментальных металлических и композиционных материалов с учётом рекомендаций авторов работ [16–19].

3. Заключение

Приведённые вычисления свидетельствуют о том, что полученное количество зародышей является недостаточным, чтобы привести к изменениям, происходящим в кристаллической решётке металла.

Для объяснения скачкообразного изменения теплоёмкости титана возникновением и ростом зародышей новой фазы задолго до температуры фазового превращения объёмная доля таких зародышей вблизи начала фазового перехода должна иметь гораздо более высокое значение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гераськин М. Ю. Использование метода коэрцитиметрии при исследовании холоднодеформированных стальных изделий для установления очага пожара // М.Ю. Гераськин, Л.В. Дашко, Г.В. Плотникова, А.А. Шеков // Судебная экспертиза. – 2019. – № 2. – С. 80–91.

2. Новиков И. И. Особые состояния металлических кристаллов / И. И. Новиков // Металлы. – 1997. – № 1. – С. 65–69.

3. Эстрин Э. И. Механические свойства высокоуглеродистой легированной стали вблизи температуры фазового превращения / Э. И. Эстрин, Б. М. Могутнов // ДАН РАН. – 2004. – Т. 397. – № 3. – С. 330–333.

4. Гвоздев А. Е. Об эффекте сверхпластичности сталей и сплавов / А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, Н. Е. Стариков, А. С. Пустовгар // Доклады II международной конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». – Москва, 2007. – С.68–70.

5. Гвоздев А. Е. Анализ закономерностей экстремальных эффектов при фазовых переходах в металлических сплавах с помощью разработанного экспериментального программного комплекса // А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, Н. Е. Стариков [и др.]. – Электронное издание № 14225 от 12.09.2008. № гос. рег. 0320801998. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM). – www.inforeg.ru.

6. Блантер М. Е. Аномальные изменения свойств сплавов в процессе фазовых превращений / М. Е. Блантер, А. К. Машков // МиТОМ. – 2002. – № 1. – С. 6–10.

7. Гвоздев А. Е. Деформация, структурообразование и разрушение стали Р6М5 / А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, А. В. Кондрашина // Деформация и разрушение материалов. – 2007. – №8. – С. 25–31.

8. Кузовлева О. В. Аномальные изменения структуры и свойств металлов и сплавов при термомеханических воздействиях в состоянии предпревращения // Под ред. д-ра техн. наук, проф. А. Е. Гвоздева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. 266 с.

9. Состояние предпревращения, механическая нестабильность и сверхпластичность сталей и сплавов / А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, А. Н. Сергеев, А. Н. Чуканов и др. // VII Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов»: сб. материалов. Москва, 7-10 ноября 2017 г. М: ИМЕТ РАН, 2017. С. 78–80.

10. Гуляев А. П. Образование аустенита в низкоуглеродистых сталях (современное состояние вопроса) / А. П. Гуляев // МиТОМ. – 1989. – № 8. – С. 21–24.

11. Хачатурян А. Г. Теория фазовых превращений и структура твёрдых растворов. – М.: Наука, 1974. – 384 с.

12. Воробьёв В. Г. Аномальные свойства металлических веществ во время протекания внутренних превращений и их техническое значение / В. Г. Воробьёв // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 1960. – № 8. – С. 120–131.

13. Гуляев А. П. Состояние предпревращения в сплавах железа / А. П. Гуляев // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1991. – № 6. – С. 7–9.

14. Новиков И. И. Особые состояния металлических кристаллов / И. И. Новиков // Металлы. – 1997. – № 1. – С. 65–69.

15. Эстрин Э. И. О природе пластичности при полиморфных превращениях / Э. И. Эстрин // Физика металлов и материаловедение. – 2006. – Т. 102. – № 1. – С. 123–128.

16. Шоршоров, М.Х., Гвоздев, А.Е., Афанаскин, А.В., Гвоздев, Е.А. 2002, «Расчёт кластерной структуры расплава, её влияние на образование наноаморфных твердых фаз и их структурную релаксацию при последующем нагреве», Металловедение и термическая обработка металлов, №6, С. 12–16.

17. Гвоздев А.Е. 2019. Экстремальные эффекты прочности и пластичности в металлических высоколегированных слитковых и порошковых системах. 2-е изд., испр. и доп. Изд-во ТулГУ, 476 с.

18. Кузовлева О.В., Гвоздев А.Е., Тихонова И.В., Сергеев Н.Н., Бреки А.Д., Стариков Н.Е., Сергеев А.Н., Калинин А.А., Малий Д.В., Титова Ю.Е., Александров С.Е., Крылов Н.А. 2016. О состоянии предпревращения металлов и сплавов. Тула: Изд-во ТулГУ, 245 с.

19. Sergeev, N.N., Minaev, I.V., Tikhonova, I.V., Gvozdev, A.E., Kolmakov, A.G., Sergeev, A.N., Kutepov, S.N., Malii, D.V. 2020, «Selecting Laser Cutting Modes for Engineering Steel Sheets Aiming at Provision of the Required Properties of Surface Quality», Inorganic Materials: Applied Research, V.11, №4, pp. 815–822.

REFERENCES

1. Geraskin, M.Yu., Dashko, L.V., Plotnikova, G.V., Shekov, A.A. 2019, «Using the method of coercimetry in the study of cold-deformed steel products to establish the fire source», *Forensic examination*, No. 2, pp. 80-91.

2. Novikov, I.I. 1997, «Special States of metal crystals», *Metals*, No. 1, pp. 65-69.

3. Estrin, E.I. 2004, «Mechanical properties of high-carbon alloy steel near the temperature of phase transformation», *DAN RAS*, T. 397, No. 3, pp. 330-333.

4. Gvozdev, A.E., Kuzovleva, O.V., Starikov N.E., Pustovgar, A.S. 2007, «About the effect of superplasticity of steels and alloys», *Reports of the II international conference "Deformation and destruction of materials and nanomaterials"*, Moscow, pp. 68-70.

5. Gvozdev, A.E., Kuzovleva O.V., Starikov, N.E. 2008, «Analysis of the laws of extreme effects in phase transitions in metal alloys using the developed experimental software package», Electronic publication No. 14225 of 12.09.2008. state reg.0320801998.-1, El.wholesale.disk (CD-ROM), available at: www.inforeg.ru.

6. Blanter, M.E., Mashkov, A.K. 2002, «Anomalous changes in the properties of alloys in the process of phase transformations», *Mitom*, No. 1, pp. 6-10.

7. Gvozdev, A.E., Kuzovleva, O.V., Kondrashina, A.V. 2007, «Deformation, structure formation and destruction of steel R6M5», *Deformation and destruction of materials*, No. 8, pp. 25-31.

8. Kuzovleva, O.V. 2012, Anomalous changes in the structure and properties of metals and alloys under thermomechanical effects in the pre-rotation state, Tula, *Publishing house of Tula state University*, 266 p.

9. Gvozdev, A.E., Kuzovleva, O.V., Sergeev, A.N., Chukanov, A.N. 2017, «State of pre-rotation, mechanical instability and superplasticity of steels and alloys», *VII international conference "Deformation and destruction of materials and nanomaterials": collection of materials*, Moscow, IMET RAS, pp. 78-80.

10. Gulyaev, A.P. 1989, «Formation of austenite in low-carbon steels (current state of the issue)», *Mitom*, No. 8, pp. 21-24.

11. Khachaturian, A.G. 1974, *Theory of phase transformations and structure of solid solutions*, Moscow, Nauka, 384 p.

12. Vorobjev, V.G. 1960, «Anomalous properties of the metal material during flow of internal transformations and their technological significance», *Izvestiya vuzov. Engineering*, No. 8, pp. 120-131.

13. Gulyaev, A.P. 1991, «State of pre-conversion in iron alloys», *Metallology and heat treatment of metals*, No. 6, pp. 7-9.

14. Novikov, I.I. 1997, «Special States of metal crystals», *Metals*, No. 1. pp. 65-69.

15. Estrin, E.I. 2006, «About the nature of plasticity in polymorphic transformations», *Physics of metals and materials science*, T. 102, No. 1, pp. 123-128.

16. Shorshorov, M.H., Gvozdev, A.E., Afanaskin, A.V., Gvozdev, E.A. 2002, «The calculation of the cluster structure of the melt, its impact on education anamorph solid phases and their structural relaxation upon subsequent heating», The Metallography and heat treatment of metals, No. 6, pp. 12–16.

17. Gvozdev A.E. 2019. Extreme strength and ductility effects in high-alloy metal ingot and powder systems. 2nd ed., ISPR. and add. Tulsu publishing house, 476 pp.

18. Kuzovleva O.V., Gvozdev A.E., Tikhonova I.V., Sergeev N.N., Breki A.D., Starikov N.E., Sergeev A.N., Kalinin A.A., Maliy D.V., Titova Yu.E., Aleksandrov S.E., Krylov N.A. 2016. On the state of pre-conversion of metals and alloys. Tula: Tulsu publishing house, 245 pp.

19. Sergeev, N.N., Minaev, I.V., Tikhonova, I.V., Gvozdev, A.E., Kolmakov, A.G., Sergeev, A.N., Kutepov, S.N., Malii, D.V. 2020, «Selecting Laser Cutting Modes for Engineering Steel Sheets Aiming at Provision of the Required Properties of Surface Quality», Inorganic Materials: Applied Research, V.11, №4, pp. 815–822.

Получено 21.01.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-340-353

Метафизика Московской математической школы на рубеже XIX–XX веков

Р. А. Мельников, О. А. Саввина

Роман Анатольевич Мельников — Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина (г. Елец).
e-mail: oas5@mail.ru

Ольга Алексеевна Саввина — Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина (г. Елец).
e-mail: oas5@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается вопрос о формировании религиозных воззрений у представителей Московской математической школы на рубеже XIX–XX вв. и влиянии миросозерцания на их научное творчество. Основное ядро этой группы ученых составляли Н.Д. Брашман, Н.В. Бугаев, П.А. Некрасов, Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин, П.А. Флоренский.

В эволюции идей московских математиков-мыслителей XIX – начала XX века можно выделить общую тенденцию: они прошли путь от математики к философии и снова вернулись к математике. Из Московского математического общества (Н.Д. Брашман, Н.В. Бугаев и др.) выросла Московская философско-математическая школа (Н.В. Бугаев, П.А. Некрасов, П.А. Флоренский и др.), а последняя послужила импульсом к образованию Московской школы теории функций (Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин и др.).

Впервые выявлены мировоззренческие истоки формирования Московской математической школы. Философские предпочтения представителей этой школы близки к славянофильству (неприятие развития России по западным образцам, учение о цельности духа (отрицающее познание только через разум или чувства без участия духа); учение о соборности как получении свободы через растворение личности в церкви, обществе, государстве; православное миропонимание; любовь к Родине). Эти идеи оказали влияние и на характер математического творчества московских математиков, специфическими чертами которого стали: 1) коллективный характер, генерирование новых направлений в науке и горячее желание делиться ими с другими учеными; 2) сосредоточенность на поиске общих методов и закономерностей; 3) склонность к созерцанию, предпочтение теоретических исследований, а не практических (область научных интересов — теория чисел, теория множеств, теория функций и пр.).

Ключевые слова: московская математическая школа, метафизика истории математики.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:

Р. А. Мельников, О. А. Саввина Метафизика Московской математической школы на рубеже XIX–XX веков // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 340–353.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-340-353

Metaphysics of the Moscow mathematical school on the border of XIX–XX centuries

R. A. Melnikov, O. A. Savvina

Roman Anatolievich Melnikov — Yelets Bunin State University (Yelets).
e-mail: oas5@mail.ru
Olga Alekseevna Savvina — Yelets Bunin State University (Yelets).
e-mail: oas5@mail.ru

Abstract

The work deals with the topic of the formation of religious views among representatives of the Moscow Mathematical School at the turn of the 19th - 20th centuries and the influence of the world outlook on their scientific creativity. The main core of this group of scientists included N.D. Brashman, N.V. Bugaev, P.A. Nekrasov, D.F. Yegorov, N.N. Luzin, P.A. Florensky.

The general tendency can be distinguished in the evolution of ideas of Moscow mathematicians-thinkers of the 19th — early 20th centuries: they went all the way from Mathematics to Philosophy and came back again to Mathematics. Moscow mathematical society (N.D. Brashman, N.V. Bugaev etc.) cultivated Moscow Philosophical and Mathematical School (N.V. Bugaev, P.A. Nekrasov, P.A. Florensky etc.) and the latter one gave an impulse to creating Moscow School of Function Theory (D.F. Yegorov, N.N. Luzin etc.).

The work reveals philosophic sources of forming Moscow Mathematical School for the first time. Philosophic preferences of representatives of this school are close to Slavophilism (negative attitude to the development of Russia according to the Western patterns, the doctrine of spirit integrity (which denies cognition only through reason or through senses not including spirit); the doctrine of collegiality as obtaining freedom through the dissolution of the individual in the church, society, state; Orthodox worldview; love to Motherland). These ideas also influenced the nature of the mathematical creative work of Moscow mathematicians. It got some specific features : 1) collective character, generating new directions in science and a strong wish to share them with other scientists; 2) concentration on seeking general methods and regularities; 3) a tendency to contemplation, a preference for theoretical research over practical (the sphere of scientific interests included number theory, set theory, function theory etc.)

Keywords: Moscow mathematical school, metaphysics of the history of mathematics.

Bibliography: 28 titles.

For citation:
R. A. Melnikov, O. A. Savvina, 2020, "Metaphysics of the Moscow mathematical school on the border of XIX–XX centuries", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 340–353.

Введение

В истории взаимоотношений науки и религии были разные периоды, в том числе, доходившие до крайностей (инквизиция, отлучение от церкви (анафема); научный атеизм и т.п.). Известно немало свидетельств тому, что многие философы (они же математики, физики, естествоиспытатели и др.) либо сами были монахами, либо происходили из благочестивых семей, где традиции веры свято чтились несколькими поколениями предков. Это подтверждают биографии европейских ученых Б. Кавальери (1598–1647), Б. Паскаля (1623–1662), Л. Эйлера (1707–1783) и др.

Клерикальное воспитание, полученное англичанином И. Ньютоном (1642–1727), оказало влияние на формирование его мировосприятия и отразилось в текстах его работ. Так, в «Математических началах натуральной философии» он отмечает: «Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе как по намерению и по власти могущественного и премудрого существа… Бог есть единый и тот же самый Бог всегда и везде…»[1, с.680].

Немецкий математик Г.В. Лейбниц (1646–1716) также тяготел к философско-теологическим изысканиям. В труде «Теологическая система» он изложил свое видение роли христианства. Современный ученый В.Н. Катасонов называет Лейбница христианским философом, для которого «было необходимым согласовать все основные свои метафизические положения с христианским мировоззрением»[2, с.136].

Немало примеров можно найти и в истории отечественной математической науки дореволюционного периода (биографии Д.С. Аничкова (1733–1788), Н.Е. Зёрнова (1804–1862), П.А. Некрасова (1853–1924) и др.). Известно, что Русская Православная церковь после прихода к власти большевиков подвергалась гонениям. В эти смутные для России времена оставались ученые, твердо стоявшие на пути, ведущему к спасению души, не покусившиеся на блага, которые могли открыться перед ними (должности, звания, движение по партийной линии и т.п.). Более того, пострадали за веру математик Д.Ф. Егоров (1869–1931); философ, математик и богослов П.А. Флоренский (1882–1937); механики В.Н. Щелкачев (1907–2005), Н.Н. Бухгольц (1881–1943) и др. Их объединяла принадлежность к Московской математической школе (все они были наставниками или воспитанниками этой школы).

Математика с древнейших времен была способом существования и выражения мысли, а на современном этапе развития человечества она стала ещё и способом действия. Связано это, в первую очередь, с тем, что математический аппарат получил статус «базиса научного менталитета».

По мнению религиозного русского философа Н.О. Лосского (1870–1965):«математическая форма познания мира задействует сферу чистой интуиции познающего субъекта, интуиция же, связана со сферой религиозности»[3].

Другое видение науки предлагали апологеты позитивизма и материализма. Советские марксисты пытались использовать открытия в математике, физике, естествознании и медицине в качестве весомых аргументов для отстаивания своих философских позиций в споре с идеалистами.

После снятия марксистско-ленинских оков с методологии отечественной науки вскрылся ряд противоречий материалистической интерпретации научного знания в советский период. Стали появляться работы, раскрывающие *метафизический подход* к объяснению математики и ее истории. Так, В.Н. Катасонов показал, что математика XVI–XVII столетий — это не некая «чистая» наука, «которой нет дела до остального мира, нет дела до истории с ее трагическими мировоззренческими коллизиями, а как наука в глубокой степени «ангажированная», непосредственно вовлеченная в эти коллизии, наука, совершающая в этих коллизиях свой выбор, свое самоопределение. Это самоопределение математики есть, конечно, самоопределение человека, для которого наука всегда есть не только орган открытия истины, но и один из способов утверждения ее»[2].

В философских исследованиях стали высказываться разные точки зрения на объяснение того, как религиозное мировоззрение оказывает влияние на математический стиль мышления и наоборот. Метафизический подход предполагает, что такое влияние имеет место быть.

И это подтверждает изучение научного и философского наследия, оставленного представителями Московской математической школы на рубеже XIX–XX вв.

Основное ядро этой группы ученых составляли Н.В. Бугаев (1837–1903), П.А. Некрасов, Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин (1883–1950), П.А. Флоренский. Косвенным образом к ним относится философ и логик А.Ф. Лосев (1893–1988).

Оригинальные философские идеи Н.В. Бугаева и его учеников получили признание еще в начале XX века. С восхищением отзывались о работах Н.В. Бугаева мыслитель М.О. Меньшиков (1859–1918), писатель Л.Н. Толстой (1828–1910), философ Л.М. Лопатин (1855–1920) и др. Высокую оценку трудам Н.В. Бугаева давали западные ученые. Известно, что доклад «Математика и научно-философское миросозерцание», сделанный Н.В. Бугаевым на Первом Международном математическом конгрессе, имел огромный успех и был встречен бурными аплодисментами[4, с.103]. По свидетельству П.А. Флоренского, «американские математики изучали русский язык специально для того, чтобы прочесть работы Н.В. Бугаева»[5, с. 284].

Дореволюционный публицист и математик М.Ф. Таубе (1855–1924) обратил внимание на сходство учения Н.В. Бугаева и основных принципов славянофильства[6]. Однако в советское время наследие ученого в силу идеологических пристрастий долгое время представляло тайну за семью печатями. В 1980-х гг. исследователи С.С. Демидов и С.М. Половинкин реанимировали имя Н.В. Бугаева и как математика, и как философа.

С.М. Половинкин подчёркивал, что миросозерцание Н.В. Бугаева эволюционировало от позитивизма к идеалистической метафизике в духе лейбницевой монадологии[7, С. 31-32], а Ю.М. Колягин обратил внимание на православную суть философских взглядов ученого[4, с. 6].

В 1999 г. С.С. Демидов особо отметил разницу во взглядах ведущих представителей петербургской и московской математических школ. Философские взгляды Н.В. Бугаева в контексте русской культуры конца XIX–начала XX вв. рассмотрены в работе В.А. Шапошникова, опубликованной в 2002 г.[8].

Таким образом, творчество Московской математической школы притягивает к себе все больше и больше внимание современных исследователей, что подтверждает его актуальность и в настоящее время.

Часть 1. Московское математическое общество и миросозерцание его создателей

На рубеже XIX–XX вв. наиболее бурно математическая жизнь в России протекала в двух столицах — Петербурге и Москве. В городе на Неве она «била ключом» в Императорской Академии наук, а в Первопрестольной её средоточием был Московский университет.

С.С. Демидов выделил несколько важных черт, характерных для петербургского математического сообщества: «...1) ярко выраженный прикладной характер; 2) постоянное стремление к строгому и одновременно эффективному решению математических задач, к построению алгоритмов, позволяющих доводить решение задачи либо до точного числового ответа, либо до пригодного приближённого решения; 3) стремление к простоте и элементарности используемых средств»[9, с. 415].

Такой подход приводил идеологов этой школы (Маркова и К°) к органическому неприятию некоторых новомодных течений в математике, особенно тех, которые, по их мнению, оказывались связанными с идеалистической философией: «Никакого философского тумана не потерпим!».

Уклад математической жизни в Москве на долгие годы вперёд был предопределен появлением Московского математического общества. По поводу характерных черт работ москвичей С.С. Демидов отмечает следующие: тяготение к теоретическим исследованиям, «приверженность к ясным геометрическим конструкциям, склонность к философии»[9, с. 416]. Философская составляющая исследований математиков Москвы — это своего рода «другой полюс притяжения», из-за которого происходило противостояние двух ведущих отечественных школ.

Таким образом, в Златоглавой в последней трети XIX–начале XX столетий сформировалась философско-математическая школа, ставшая ярким феноменом в истории математики в нашей стране.

Зарождение феномена Московской философско-математической школы обычно связывают с именами Н.Е. Брашмана (1796–1866), Н.Е. Зёрнова (1804–1862) и их ученика Н.В. Бугаева.

Метафизический подход позволяет обнаружить истоки этого уникального явления несколько раньше. Известно, что богословские вопросы входили в поле зрения математика Д.С. Аничкова.

Профессор Московского университета Дмитрий Сергеевич Аничков родился в семье подьячего Троице-Сергиевой лавры. Дмитрий Аничков окончил Троицкую духовную семинарию и помимо учебников по различным отделам математики, написал работу «Рассуждение из натуральной богословии о начале и происшествии натурального богопочитания». Диссертация была посвящена выявлению причин возникновения языческих верований. Д.С. Аничков писал: «Хотя ни места, где Бог, ни фигуры, какую Он имеет, и не знаем, и не видим, однако познаём Его из действий Его»[10]. Однако члены совета увидели в работе пропаганду атеизма, и работа была снята с защиты.

С 1835 г. в Московском университете обучением математике руководили два профессора Н.Е. Зёрнов и Н.Д. Брашман.

Н.Е. Зёрнов родился в Москве в семье служащего иностранной коллегии Московского почтамта. Отец будущего математика окончил духовную семинарию, а дедушка был священником. Воспитание в семье с давними духовными традициями, несомненно, сказалось и на характере Н.Е. Зёрнова, пронесшего сквозь годы глубокое уважение к старшим по возрасту и званию, почтительное отношение к власти, что тогда не было типичным для столичной интеллигенции, уже зараженной вирусом свободы и нигилизма[11].

С именем Н.Е. Зёрнова связано знаковое событие в истории отечественной науки — защита первой докторской диссертации по математике. Никакого систематического изложения теории дифференциальных уравнений с частными производными на русском языке не существовало. Поэтому заслуга Н.Е. Зёрнова состоит еще и в создании русской терминологии по этому разделу математики.

Среди трудов Н.Е. Зёрнова особое место занимает фундаментальный труд «Дифференциальное исчисление с приложением к геометрии», изданный в 1842 г. Его отличительной чертой является своеобразный симбиоз элементов математического анализа и геометрии. В этой книге широко и полно рассмотрены вопросы, связанные с дифференцированием функций одной и нескольких переменных, теорией рядов и дифференциальных уравнений. На наш взгляд, этот труд в определенной степени задал вектор направления исследований московских математиков (например, спустя несколько лет Н.В. Бугаев введет новый признак сходимости рядов, Д.Ф. Егоров защитит диссертацию по уравнениям с частными производными).

В 1843 г. Н.Е. Зёрнов произнес речь «Теория вероятностей, с приложением преимущественно к смертности и страхованию». Это была первая попытка изложить новый раздел математики в стенах Московского университета. В дальнейшем эстафету Н.Е. Зёрнова и Н.Д. Брашмана в этой области подхватят их ученики (П.Л. Чебышев, А.Ю. Давидов и др.).

Происходивший из еврейской семьи, выпускник Венского университета, Н.Д. Брашман приехал в Россию в 1821 г., преподавал математику сначала в Санкт-Петербурге, затем — в Казанском университете. Судя по архивным документам, по прибытии в Москву он принял православие.

Мировоззренческие взгляды Н.Д. Брашмана наиболее полно отражены в его речи «О влиянии математических наук на развитие умственных способностей», произнесенной им на торжественном собрании Московского Императорского университета в 1841 г.

С позиций православного христианина Н.Д. Брашман пояснял специфику математического творчества: «... математики не предполагают открывать первоначальных причин явлений: они известны одному Создателю ... Правда, что математики не занимаются сущностью вещей, потому что они почитают её для себя тайной ... Математик знает, что высокие истины Веры выше человеческой мудрости, что душа, озаренная Божественным светом Веры, сама собой созерцает ее истины, и убежден, что содержание Священного писания истинно, но иногда не понимает, в чем эти истины состоят, равно, как можно видеть свет Солнца, и не знать сущности света»[12, с.11]. Отсюда следует, что математик выступает не как творец законов, а как их интерпретатор.

Кроме того, Н.Д. Брашман указывал, что русский мыслитель с православным взглядом на мир находится в более выгодных условиях, чем западный атеист или иноверец: «Пусть отличные Русские мыслители излагают учение философии сообразно истинам, истекающим из православной Веры и законов, ... в России обширное открывается поприще деятельности всякому, кто хочет трудиться для пользы Отечества, и православная Вера освобождает нас от труда, употреблять целую жизнь на открытие новых доказательств воли человека, бессмертия души и др.»[12, с.16].

Первые научные публикации Н.Д. Брашмана связаны с московским периодом его жизни[13, С. 3-8] и касались области математического анализа. Среди них можно выделить: «Общие рассуждения о математическом анализе и пример исследования дифференциальных уравнений по новому способу Штурма» (1834), «О трансцендентных функциях Абеля» (1834), «Рассуждение Пуассона об интегралах алгебраических функций» (1835) и др.

Блестящим завершением научной жизни Н.Д. Брашмана явилось создание по его инициативе в 1864 г. *Московского математического общества.* В 1866 г. Общество стало издавать свой журнал «Математический сборник», а в 1867 г. был утвержден Устав. На заседаниях Общества обсуждались новейшие достижения науки. Первым президентом Общества был избран Н.Д. Брашман.

Среди следующих президентов Московского математического общества следует выделить двух учеников Н.Д. Брашмана и Н.Е. Зёрнова — В.Я. Цингера (1836–1907) и Н.В. Бугаева.

Василий Яковлевич Цингер воспитывался в семье деда — обрусевшего немца, который по переезде в Россию счел важным всех детей и внуков крестить в православие. Философия вошла в круг интересов В.Я. Цингера после защиты им докторской диссертации «О движении свободной жидкой массы». В 1874 г. он на Торжественном заседании Московского университета выступил с речью «Точные науки и позитивизм». Привлекая математические рассуждения, В.Я. Цингер горячо и убедительно доказал, что позитивизм приводит к искажению научных истин. Для того времени его критика была очень смелой, если учесть, что столичная академическая среда встретила позитивизм довольно восторженно.

В другой речи — «Недоразумения о взглядах на основания геометрии», произнесенной на общем заседании IX Съезда русских естествоиспытателей и врачей в январе 1894 г., В.Я. Цингер был не менее резок в высказывании своих аргументов в опровержение материалистических воззрений на основания геометрии.

Часть 2. Московская философско-математическая школа и научные интересы ее представителей

Личность Николая Васильевича Бугаева заслуживает внимания уже только потому, что он создал новое философско-математическое учение об аритмологии и воспитал целую плеяду ученых, принесших славу русской науке.

Магистерская диссертация Н.В. Бугаева была посвящена математическому анализу, а докторская — теории чисел. В магистерской диссертации он предложил новый обобщающий признак сходимости рядов, который до революции вошел в вузовские учебные курсы по математическому анализу.

С юношеских лет Н.В. Бугаев проявлял интерес к философии и не избежал увлечения позитивизмом. Со временем его мировоззрение не просто эволюционировало, а претерпело настоящее перерождение. Примерно к 1880-м гг. в воззрениях Н.В. Бугаева произошел поворот от позитивизма к исповеданию христианских ценностей. Об этом свидетельствуют тексты его философских сочинений: «О свободе воли», «Основные начала эволюционной монадологии», «Математика и научно-философское миросозерцание».

В центре философии Н.В. Бугаева находилась идея, что математика как наука делится надвое: на учение о непрерывных функциях (классический математический анализ) и на учение о прерывных (разрывных) функциях (аритмологию). Симбиоз этих ветвей математики, по мнению Н.В. Бугаева, есть необходимое условие для пояснения явлений не только физического, материального мира, но и мира духовного, социального.

Понимая аритмологию как математику «прерывности», он тем самым предсказывает активное развитие дискретной математики в будущем. «В настоящее время, — писал ученый, — все приводит к мысли, что аритмология не уступит по обширности своего материала, по общности своих приемов, по замечательной красоте своих результатов. Прерывность гораздо разнообразнее непрерывности. Можно даже сказать, что непрерывность есть прерывность, в которой изменение идет через бесконечно малые и равные промежутки»[14].

Введение Н.В. Бугаевым в математический оборот понятий аритмологии было для того времени очень смелым шагом. Как отмечают Л. Грэхэм и Ж.М. Кантор, многие математики того времени не придавали ценности конструируемым «ужасным и отвратительным» образчикам функций со свойствами, противоречившими «здоровой» математической интуиции. Эрмит называл их «монстрами»[15, с. 68].

При этом аритмология для Н.В. Бугаева не просто ответвление математической мысли, а важнейший раздел математики, имеющий мировоззренческое значение, раздел, призванный дополнить аналитическое миросозерцание, покоящееся на идее непрерывности. В физике аритмологичность находит своё выражение в молекулярной теории, в биологии в понятиях клетки и живых индивидов. Аритмологическими категориями являются понятия свободы, цели. В аритмологии он пытался найти универсальные понятия и законы, действующие во всех областях знания: «под влиянием аналитического взгляда на природу все чаще и чаще в среду ученых стала проникать идея, что в ходе мировых явлений имеет значение одна причинность и не играет никакой роли целесообразность…».

Как считает итальянский исследователь Габриэле Лолли: «с философской точки зрения Бугаев и его коллеги полагали, что развитие мира — постоянный процесс противостояния логоса изначальному хаосу и что математика необходима для поиска общей концепции мира»[16, с. 23].

Истинное научно-философское миросозерцание стремится к тому, чтобы по мере сил ответить не только на вопросы: «как и почему?»…, но и на вопросы: «к чему и зачем?»[17].

Оригинальные суждения Н.В. Бугаева не канули в Лету, а были развиты его коллегами и учениками В.Г. Алексеевым, П.А. Некрасовым, Б.К. Млодзеевским, П.А. Флоренским и др.

Авторитет Н.В. Бугаева позволил ему реализовать преподавание в университете теории разрывных функций — аритмологии. Именно влияние его идей мы обнаруживаем в курсе теории функций действительного переменного его ученика Б.К. Млодзеевского, в курсе новой тогда теории разрывных функций, построенной на базе теории множеств Г. Кантора. В это же время представители петербургской математической школы категорически отрицали ценность этого направления в математике: «это не математика, — говорили они о теории множеств, —

это теология»[9, с. 416]. Серьёзным успехом москвичей стала защита И.И. Жегалкиным (1869–1947) магистерской диссертации «Трансфинитные числа» (1908) — оригинального теоретико-множественного исследования.

Ученик Н.В. Бугаева — В.Г. Алексеев внес вклад в становление и пропаганду идей своего учителя, показав аритмологический характер ряда разделов геометрии и алгебры. Явления физические и астрономические дают полный простор приложениям математического анализа, все остальные явления (химические, биологические, психические, социальные) требуют применения аритмологии.

В 1904 г. выпускник духовной семинарии и Московского университета П.А. Некрасов писал: «С христианской православной точки зрения свобода личности и единство многих могут и должны быть примирены, как в обыкновенной семье, так и в большой семье, отечестве, руководимым нравственным законом веры, взаимной любви и справедливости. Свобода от необходимости — вот суть духовного. Необходимость без свободы — вот суть вещественного. П.А. Некрасов утверждал, что во многих мировых явлениях проявляется непредельный аритмологизм (революции, катастрофы и т.д.), с чем необходимо считаться реформаторам социальной жизни, делающим выбор между предельно и непредельноаритмологической реформой, т.е. эволюцией и революцией[18]. П.А. Некрасов применил философское воззрение Н.В. Бугаева и в педагогике, в частности — в создании курса по теории вероятностей.

Ранние математические интересы П.А. Некрасова относятся к алгебре и математическому анализу. В 1883 г. он защитил магистерскую диссертацию «Исследование уравнений вида $u^m - pu^n - q = 0$», за которую Академия наук присудила ему премию им. В.Я. Буняковского. В этой работе он между параметрами n, m, p и q разбил комплексную плоскость на области, ограниченные дугами концентрических окружностей и лучами, идущими из центра так, чтобы в каждой точке области лежал ровно один корень.

В 1886 г. П.А. Некрасов защитил докторскую диссертацию «Ряд Лагранжа и приближённые выражения функций весьма больших чисел», в которой дал общее и подробное изложение метода перевала (метода наибыстрейшего спуска) за 25 лет до голландского физика П. Дебая (1884–1966), которому зачастую приписывают его открытие [19, с. 152].

В 1890-е годы математик начал проявлять интерес к теории вероятностей, получив ряд результатов в этом разделе и написав несколько учебников для высшей школы. В тот же период ученый активно начал использовать аритмологические идеи, многие из которых в дальнейшем легли в основу построения им социальных теорий. Тем самым он развил идеи своего учителя Н.В. Бугаева.

П.А. Некрасов первым подчеркнул философскую направленность исследований Н.В. Бугаева и его последователей, назвав этот феномен *Московской философско-математической школой*. Это название оказалось настолько удачным, что утвердилось и широко используется в современных научных исследованиях.

Как видим, представители Московской философско-математической школы в своих первых трудах активно применяли и совершенствовали аппарат математического анализа, но с течением времени выходили за рамки классического анализа и включали в поле своих научных исследований аритмологические понятия.

В философско-математическом осмыслении и научном продвижении понятия прерывности дальше всех учеников Н.В. Бугаева продвинулся П.А. Флоренский. Он провел глубокий анализ возникновения, становления и распространения идеи непрерывности и пришел к выводу, что: «...идея непрерывности овладела всеми дисциплинами от богословия до механики, и, казалось, что протестовать против ее захватов значило впадать в ересь. Но вполне естественно было ожидать, что виновница такого соблазна — математика — захочет поправить односторонность, которую она вызвала, хотя и не преднамеренно ...можно было ждать, что критика такой идеи уничтожит односторонность, если она незаконна, и санкционирует ее, если она необходима»[20]. П.А. Флоренский обращал внимание на то, что в основе суждений аритмологов лежат два постулата: 1) вера в закон и 2) вера в математическую выражаемость закона. Принцип непрерывности с ними несовместим. Поэтому вполне закономерно, что математические интересы П.А. Флоренского были сосредоточены в области теории множеств. Его перу принадлежит первая опубликованная в России работа по этой теории — «О символах бесконечности (очерк идей Г. Кантора)».

Дореволюционный мыслитель, барон М.Ф. Таубе в работе «Московская философско-математическая школа, основанная проф. Бугаевым, и славянофильство Хомякова» довольно убедительно доказал родство учения Н.В. Бугаева и основными принципами славянофильства. По мнению барона, профессора Бугаев, Некрасов, Алексеев, по своей сути лишь последовали по пути старой школы славянофилов и «новая московская школа дает новые основания для правильного определения научно-философского мировоззрения»[7].

М.Ф. Таубе утверждал, что если даже в пределах начального обучения возможно определить математически зависимость, то не подлежит сомнению, что и независимость, т.е. свобода от зависимости, также подлежит математическому выражению, что возможно осуществить с помощью понятий аритмологии.

Он обратил внимание на сходство славянофилов и представителей Московской философско-математической школы в определении свободы воли. По А.С. Хомякову, воля есть закон изменения явлений, не понимается человеком извне, в себе, а не вне себя, добыл он ее, как понятие о самом разуме. Основание учения Бугаева есть свободотворчество, а «оглавок» будет непременно верховное совершенство, пути к которому указаны христианством и «пути коего есть сама истина и любовь»[7, с. 21]. Отсюда вытекает положение, что Любовь — главная сила достойной жизни, как у славянофилов, так и в школе Бугаева.

По мнению М.Ф. Таубе, «мудромерность» Московской школы есть этико-математическое научное выражение внутренней сути любомудрия и просвещения славянофильства.

Особое место в Московской математической школе занимает фигура Д.Ф. Егорова. Дмитрий Федорович был воспитан в окружении людей, живших по канонам православной церкви. Например, среди друзей его отца был А.Ф. Малинин — директор Московского учительского института, очень религиозный человек. Публично ученый старался дистанцироваться от обсуждения философских и богословских вопросов. Однако он был и оставался глубоко верующим человеком. Сохранилось свидетельство В.М. Лосевой, оставившей в своих дневниках запись: «…собирались у Егорова. Большею же частью сидели вдвоем Лосев с Егоровым и читали Брянчанинова и о. Иоанна Кронштадтского об Имени Божием»[21, с. 117].

Д.Ф. Егоров вошел в круг людей, поддержавших имяславие — движение почитателей имени Божия, существовавшего в русских монастырях Афона в 1909–1913 гг.

С.С. Демидов объясняет сочувствие московских ученых (П.А. Флоренского, Д.Ф. Егорова, Н.Н. Бухгольца и др.) имяславию двумя обстоятельствами. С одной стороны — традиционной приверженностью Московской математической школы философским проблемам (начиная от В.Я. Цингера, Н.В. Бугаева, П.А. Некрасова). С другой стороны — особым мнением о математическом творчестве, согласно которому математические объекты существуют де-факто, независимо от открывающего их математика, а не выступают как интеллектуальные конструкции [22].

Заключение

В советское время проведение научных исследований московских математиков возглавил выдающийся ученик Н.В. Бугаева и Д.Ф. Егорова Николай Николаевич Лузин.

На стыке XIX и XX вв. теория множеств Г. Кантора столкнулась с рядом апорий (логическими трудностями): парадоксом Чезаре Бурали-Форти (1897); проблемой континуума

(Д. Гильберт, 1900 г.); парадоксом Б. Рассела (1901); проблемой возможности любого множества быть вполне упорядоченным (Ю. Кениг, 1904), аксиомой выбора (Э. Цермело, 1904).

За решение этих вопросов взялись лучшие математические умы планеты, среди которых следует выделить Р. Бэра (1874–1935), Э. Бореля (1871–1956), А.Л. Лебега (1875–1941) и, несомненно, Н.Н. Лузина [23].

Находясь в заграничной командировке, Н.Н. Лузин увлёкся решением «проблемы континуума». Его заинтересовал вопрос: могут ли существовать множества, содержащие больше элементов, чем множества натуральных чисел, но меньше, чем множество точек отрезка? Попутно он занимался проблемой, суть которой состоит в следующем: можно ли представить любую периодическую функцию (даже имеющую бесконечно много точек разрыва) в виде суммы тригонометрического ряда?

В результате была выбрана тема исследования — «Сходимость тригонометрических рядов». Одно из первых крупных достижений Лузина (1912) состояло в построении тригонометрического ряда, коэффициенты которого монотонно убывают, но сам ряд почти всюду расходится. Результат, полученный Лузиным, противоречил предположению Фату (1906) и поразил математиков своей неожиданностью. Тогда же Лузин построил степенной ряд, коэффициенты которого стремятся к нулю и который расходится во всех точках окружности своего круга сходимости.

Что же касается миросозерцания Н.Н. Лузина, то, будучи верующим человеком, он избегал публичного обсуждения вопросов веры, тем более их обсуждения в печати — таковы были время и обстоятельства, при которых он жил. Его публичные высказывания не следует считать единственным источником для характеристики внутреннего мира ученого. Это вопрос довольно сложный и требует детального изучения всех доступных материалов, начиная от его переписки с П.А. Флоренским [25] вплоть до «Лекций об аналитических множествах и их приложениях» [26], опубликованных в 1930 г. в Париже [27], в которых среди прочего он заметил, что, если актуальная бесконечность имеет место быть, то не в математике, а в богословии [28]. Также важно сказать, что в своих математических рукописях Н.Н. Лузин нередко делал религиозного содержания комментарии на полях, о чем свидетельствуют сохранившиеся в архиве РАН документы (АРАН.Ф. 606).

Период с 1914 по 1924 гг. — время расцвета научной и педагогической деятельности Н.Н. Лузина. Кроме обязательных курсов он из года в год читал факультативный курс по теории функций действительного переменного и вел научно-исследовательский семинар. Именно этот читаемый много лет специальный курс и сопровождающий его семинар и стали центром, из которого выросла знаменитая Московская школа теории функций, давшая миру множество новых имен математиков — учеников Лузина[24]. Среди учеников первого поколения «Лузитании» впоследствии стали академиками АН СССР П.С. Александров (1896–1982), А.Н. Колмогоров (1903–1987), М.А. Лаврентьев (1900–1980), П.С. Новиков (1901–1975), а чл.-корреспондентами — Л.А. Люстерник (1899–1981), А.А. Ляпунов (1911–1973), Д.Е. Меньшов (1892–1988), Л.Г. Шнирельман (1905–1938).

***

Таким образом, в эволюции идей московских математиков-мыслителей XIX–начала XX века можно выделить общую тенденцию: они прошли путь от математики к философии и снова вернулись к математике. Из Московского математического общества выросла Московская философско-математическая школа, а последняя послужила импульсом к образованию Московской школы теории функций. Причем, мировоззренческие убеждения Н.В. Бугаева и его последователей сказались и на формировании их педагогических взглядов, поэтому философское наследие Московской математической школы представляет интерес не только для историков философской науки, но и для математиков и педагогов.

Мировоззренческие идеи представителей Московской математической школы близки к славянофильству (неприятие развития России по западным лекалам, учение о цельности духа (отрицающее познание только через разум или чувства без участия духа); учение о соборности как получении свободы через растворение личности в церкви, обществе, государстве; религиозное миропонимание, любовь к Родине). Эти идеи оказали влияние и на характер математического творчества московских математиков, специфическими чертами которого стали: 1) коллективный характер, генерирование новых направлений в науке и горячее желание делиться ими с другими учеными; 2) сосредоточенность на поиске общих методов и закономерностей; 3) склонность к созерцанию, предпочтение теоретических исследований, а не практических (область научных интересов — теория чисел, теория множеств, теория функций и пр.).

Феномен Московской математической школы позволяет констатировать, что для большинства людей, которые в течение жизни знали дорогу в храм, были, несомненно, открыты и врата учености. Такое качество русской веры, как соборность, нашло отражение в том, что для русской математики характерно коллективное (научные школы), а не индивидуальное научное творчество.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ньютон, И. 1989, *Математические начала натуральной философии*, Наука, Москва, 688 с.

2. Катасонов, В.Н. 2011, *Метафизическая математика XVII века*, Либроком, Москва, 144 с.

3. Лосский, Н.О. 1995, *Чувственная, интеллектуальная и мистическая интуиция*, Республика, Москва, 400 с.

4. Колягин, Ю.М., Саввина, О.А. 2009, *Математики — педагоги России. Забытые имена. Книга 4.Николай Васильевич Бугаев*, ЕГУ им. И.А. Бунина, Елец, 276 с.

5. Флоренский, П.А. (священник) 1998, *Сочинения: Письма с Дальнего Востока и Соловков* / Сост. и общ.ред. игумена Андроника (А.С. Трубачева), П.В. Флоренского, М.С. Трубачевой. Том 4. Мысль, Москва, 795 с.

6. Таубе, М.Ф. 1908, *Московская философско-математическая школа, основанная проф. Бугаевым, и славянофильство Хомякова*, Мирный труд, Харьков, 91 с.

7. Половинкин, С.М. 1995, «Бугаев Николай Васильевич» *Русская философия. Малый энциклопедический словарь*, Наука, Москва, С. 72–73.

8. Шапошников, В.А. 2002, «Философские взгляды Н.В. Бугаева и русская культура XIX – начала XX вв.» *Историко-математические исследования.* 2-я серия. Выпуск 7 (42), Янус-К, Москва, С. 62–91.

9. Демидов, С.С. 1999, «Стиль и мышление: ещё раз о конфронтации двух столиц». *Стили в математике: социокультурная философия математики. Под редакцией А.Г. Барабашева*, РХГИ, Санкт-Петербург, 552 с.

10. Аничков, Д.С. 1952, «Рассуждение из натуральной богословии о начале и происшествии натурального богопочитания». *Избранные произведения русских мыслителей второй половины XVIII в.Т. I. Под общей редакцией И.Я. Щипанова*, Государственное издательство политической литераторы, Ленинград, 697 с.

11. Саввина, О.А., Мельников, Р.А., Щербатых, В.Е. 2018, «Николай Ефимович Зёрнов и первая защита докторской диссертации по математике в России». *Вопросы истории естествознания и техники.* Том 39. № 4, Российская академия наук, Москва, С. 711–722. doi: 10.31857/S020596060001809-1

12. Брашман, Н.Д. 1841, *О влиянии математических наук на развитие умственных способностей*, Университетская типография, Москва, 89 с.

13. Грибов, А.Ю., Саввина, О.А. 2011, «Педагог-математик Н.Д. Брашман и его мировоззренческие взгляды», *Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «64 Герценовские чтения», Проблемы теории и практики обучения математике*, Издательство РГПУ им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, С. 3–8.

14. Бугаев, Н.В. 1905, «Математика и научно-философское миросозерцание», *Математический сборник*, 25:2, Москва, С. 349–369.

15. Graham, L., Kantor, J. M. 2009, *Naming Infinity. A True Story of Religious Mysticism and Mathematical Creativity*, The Belknap Press of Harvard University Press, London, 239 pp.

16. Лолли, Г. 2012, *Философия математики: наследие двадцатого столетия*, Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 299 с.

17. Бугаев, Н.В. 1898, *Математика и научно-философское миросозерцание*, Типография С.В. Кульженко, Киев, 19 с.

18. Некрасов, П.А. 1904, «Московская философско-математическая школа и ее основатели», *Математический сборник*, 25:1, Москва, С. 3–249.

19. Петрова, С.С., Соловьёв, А.Д. 1994, «Об истории создания метода перевала», *Историко-математические исследования.* Выпуск 35, Москва, С. 148–164.

20. Флоренский, П.А. 1986, «Введение к диссертации «Об истории создания метода перевала», *Историко-математические исследования.* Выпуск 30, Москва, С. 159–170.

21. Тахо-Годи, А.А. 2007, *Лосев*, 2-е издание, Молодая гвардия, Москва, 534 с. (Жизнь замечательных людей, выпуск №1076).

22. Демидов, С.С. «Имяславие и Московская математическая школа», Резюме доклада на семинаре «Русская философия (традиция и современность)». `http://www.losev-library.ru/index.php?pid=660`

23. Demidov, S.S. 2015, «Vladimir Steklov: A mathematician at the turn of the era», *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 289. no 1. pp. 10–22. doi: 10.1134/S0371968515020028.

24. Demidov, S.S. 1988, «On an early history of the Moscow school of theory of functions», *Philosophia Mathematica*, vol. 2-3, issue 1, Oxford, pp. 29–35. doi: 10.1093/philmat/s2-3.1.29.

25. Лузин, Н.Н., Флоренский, П.А. 1989, «Переписка Н.Н. Лузина с П.А. Флоренским», С.С. Демидов, А.Н. Паршин, С.М. Половинкин и П.В. Флоренский, *Историко-математические исследования.* Выпуск 31. Москва. С. 125 – 190.

26. Лузин, Н.Н. 1953, *Лекции об аналитических множествах и их приложениях*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 360 с.

27. Lusin, N. 1930, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris.

28. Демидов, С.С. 2018, «Николай Николаевич Лузин и отец Павел Флоренский в размышлениях о бесконечности». *Вопросы истории естествознания и техники.* Т. 39. № 1, Москва, С. 9 – 26.

REFERENCES

1. N'yuton, I. 1989, «*Matematicheskie nachala natural'noj filosofii*» [*Mathematical principles of natural philosophy*], Nauka, Moscow.

2. Katasonov, V.N. 2011, «*Metafizicheskaya matematika XVII veka*» [*Metaphysical mathematics of XVII century*], Librokom, Moscow.

3. Losskij, N.O. 1995, «*Chuvstvennaya, intellektual'naya i misticheskaya intuiciya*» [*Sensual, intellectual and mystical intuition*], Respublika, Moscow.

4. Kolyagin, YU.M., Savvina, O.A. 2009, «*Matematiki – pedagogi Rossii. Zabytye imena. Kniga 4. Nikolaj Vasil'evich Bugaev*» [*Mathematics teachers in Russia. Forgotten name. Book 4. Nikolai Vasilievich Bugaev*], Yelets, Bunin Yelets state University.

5. Florenskij, P.A. (svyashchennik) 1998, «*Sochineniya: Pis'ma s Dal'nego Vostoka i Solovkov*» [Works: Letters from the Far East and Solovki], vol. 4, Moscow, Thought.

6. Taube, M.F. 1908, «*Moskovskaya filosofsko-matematicheskaya shkola, osnovannaya prof. Bugaevym, i slavyanofil'stvo Homyakova*» [Moscow philosophical and mathematical school, founded by prof. Bugaev, and Slavophilism Khomyakov], Kharkiv, Peace work.

7. Polovinkin, S.M. 1995, «Bugaev Nikolai», Russian philosophy. Small encyclopaedic dictionary, Moscow, Science, pp. 72–73.

8. Shaposhnikov, V.A. 2002, Philosophical views N. V. Bugaeva and Russian culture XIX–early XX centuries, Episode 2, «*Historical and mathematical research*», issue 7 (42), Moscow, Janus-K, pp. 62–91.

9. Demidov, S.S. 1999, Style and thinking: once again about the confrontation between the two capitals. «*Styles in mathematics: socio-cultural philosophy of mathematics*». Edited by A. G. Barabashev, Saint Petersburg, RGGI.

10. Anichkov, D. S. 1952, «Reasoning from natural theology about the beginning and incident of natural God-reading». *Selected works of Russian thinkers of the second half of the XVIII century*, Leningrad, The General edition of the state publishing house of political writers.

11. Savvina, O.A., Mel'nikov, R.A., Shcherbatyh, V.E. 2018, «Nikolay Yefimovich Zernov and the first defense of the doctoral dissertation in mathematics in Russia», *History of science and technology. vol. 39, № 4, Moscow, Russian Academy of Sciences*, pp. 711-722. doi: 10.31857/S020596060001809-1

12. Brashman, N.D. 1841, «*O vliyanii matematicheskih nauk na razvitie umstvennyh sposobnostej*» [On the influence of mathematical Sciences on the development of mental abilities], Moscow, University printing house.

13. Gribov, A.Yu., Savvina, O.A. 2011, «The teacher-mathematician N. D. Brahman, and his philosophical views», *Collection of scientific papers presented at International scientific conference "64 Gertsenovskie reading" Problems of the theory and practice of teaching mathematics*, St. Petersburg, Publishing house of RGPU im. A. I. Herzen, pp. 3–8.

14. Bugaev, N.V. 1905, «Mathematics and scientific and philosophical world-outlook», Moscow, *Mathematical collection*, 25:2, pp. 349-369.

15. Graham, L., Kantor, J. M. 2009, *Naming Infinity. A True Story of Religious Mysticism and Mathematical Creativity*, The Belknap Press of Harvard University Press, London.

16. Lolli, G. 2012, «*Filosofiya matematiki: nasledie dvadcatogo stoletiya*» [Philosophy of mathematics: heritage of the twentieth century], Nizhny Novgorod, Publishing house of N.I. Lobachevsky Novgorod state University.

17. Bugaev, N. V. 1898, «*Matematika i nauchno-filosofskoe mirosozercanie*» [Mathematics and scientific and philosophical outlook], Kiev, Printing house of S.V. Shulzhenko.

18. Nekrasov, P. A. 1904 «Moscow philosophical school and its founders», *Mathematical collection*, 25:1, Moscow, pp. 3–249.

19. Petrova, S. S., Solov'ev, A. D. 1994, «On the history of the creation of the pass method», *Historical and mathematical research*, issue 35, Moscow, pp. 148-164.

20. Florensky, P. A. 1986, "Introduction to the thesis "the idea of discontinuity as an element of world outlook", Moscow, *Historical and mathematical research*, issue 30, pp. 159–170.

21. Taho-Godi, A. A. 2007, «*Losev*» [Losev], 2-nd edition, Moscow, Molodaya Gvardiya, (Lives of remarkable people, issue No. 1076).

22. Demidov, S. S. «The Name and of the Moscow mathematical school», *Summary report on the seminar «Russian philosophy (tradition and modernity)»*, Available at: http://www.losev-library.ru/index.php?pid=660 (accessed 17 January 2019)

23. Demidov, S.S. 2015, «Vladimir Steklov: A mathematician at the turn of the era», *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 289, № 1, pp. 10–22. doi: 10.1134/S0371968515020028.

24. Demidov, S.S. 1988, «On an early history of the Moscow school of theory of functions», *Philosophia Mathematica*, vol. 2–3, issue 1, Oxford, pp. 29–35. doi: 10.1093/philmat/s2–3.1.29.

25. Luzin, N.N., Florensky, P.A. 1989, «Correspondence of N.N. Luzin with P.A. Florensky». S.S. Demidov, A.N. Parshin, S.M. Polovinkin and P.V. Florensky, *Historical and mathematical research*, issue 31. Moscow, pp. 125-190.

26. Luzin, N.N. 1953, *Lectures on analytic sets and their applications* [Lekcii ob analiticheskih mnozhestvah i ih prilozheniyah], Publishing House of Technical and Theoretical Literature, Moscow, 360 p.

27. Lusin, N. 1930, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris.

28. Demidov, S.S. 2018, «Nikolai Nikolayevich Luzin and father Pavel Florensky in reflection on infinity», *Questions of the history of science and technology*, T. 39, No. 1, Moscow, pp. 9-26.

Получено 04.04.2019 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-354-368

Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражение звука[1]

Л. А. Толоконников, А. Э. Белкин

Лев Алексеевич Толоконников — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Антон Эдуардович Белкин — магистрант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: anton.edurd@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается обратная задача об определении законов неоднородности упругого покрытия абсолютно жесткого цилиндра, находящегося в плоском волноводе, одна граница которого - абсолютно жесткая, а другая - акустически мягкая. Полагается, что волновод заполнен идеальной жидкостью. Вдоль стенок волновода по нормали к поверхности цилиндрического тела распространяется гармоническая звуковая волна давления, возбуждаемая заданным распределением источников на сечении волновода, расположенного на конечном расстоянии от оси цилиндра. Определены параметры неоднородности покрытия, обеспечивающие наименьшее звукоотражение.

Решение обратной задачи получено на основе решения прямой задачи дифракции.

Зависимости плотности и модулей упругости материала покрытия от радиальной координаты аппроксимированы многочленами третьей степени.

Построены функционалы,определенные на классе кубических функций и выражающие усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном сечении волновода при фиксированной частоте или в некотором диапазоне частот.

С помощью генетического алгоритма осуществлена минимизация функционалов. Получено аналитическое описание оптимальных законов неоднородности покрытия цилиндра для обеспечения минимального звукоотражения.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, цилиндр, неоднородное упругое покрытие, законы неоднородности, плоский волновод.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, А. Э. Белкин. Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражение звука // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 354–368.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-354-368

Determination of the inhomogeneity laws of a cylinder covering located in a plane waveguide for providing minimum sound reflection[2]

L. A. Tolokonnikov, A. E. Belkin

Lev Alexeevich Tolokonnikov — doctor of physical and mathematical Sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Anton Eduardovich Belkin — undergraduate, Tula State University (Tula).

e-mail: anton.edurd@yandex.ru

Abstract

The article considers the inverse problem on determination of the inhomogeneity laws of an elastic coating of an absolutely rigid cylinder located in a plane waveguide, one boundary of which is absolutely hard and the other is acoustically soft.

It is believed that the waveguide filled by ideal fluid. The harmonic sound pressure wave excited by a given distribution sources on the section of the waveguide located on the final distance from the axis of the cylinder is propagated along the walls of the waveguide on normal to the surface of the cylindrical body. The inhomogeneity parameters for providing minimum sound reflection are determined.

The solution of the inverse problem is obtained based on the solution of the direct problem diffraction.

Dependences of the density and elastic moduli of the coating material from the radial coordinate are approximated by polynomials of the third degrees.

Functionals defined on the class of cubic functions and expressing the average intensity of sound scattering in a given section of the waveguide at a fixed frequency or at some frequency range are built.

The minimization of the functionals is done with using the genetic algorithm. Analytical description of the optimal inhomogeneity laws of an cylinder coating are received to ensure minimal sound reflection.

Keywords: diffraction, sound waves, elastic cylinder, non-uniform elastic coating, inhomogeneity laws, plane waveguide.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, A. E. Belkin, 2020, "Determination of the inhomogeneity laws of a cylinder covering located in a plane waveguide for providing minimum sound reflection", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 354–368.

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

1. Введение

Влияние покрытий цилиндрических тел на их звукоотражающие свойства исследовалось в ряде работ. В [1] рассмотрены прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на цилиндре с перфорированным покрытием. Выбраны параметры среды резонаторов перфорированного покрытия, обеспечивающие заданный уровень гашения поля дифракции на цилиндре. В [2, 3] обсуждается задача о нерассеивающем покрытии для цилиндра, делающее его акустически прозрачным. Для снижения рассеяния падающей на цилиндр звуковой волны применено тонкое покрытие с протяженной реакцией. Дифракция плоской звуковой волны на упругой цилиндрической оболочке с однородным упругим покрытием исследована в [4]. Выявлены условия, при которых совместный выбор импедансов покрытия и оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. Задачи о рассеянии плоских и цилиндрических звуковых волн жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием решены в [5, 6]. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием рассмотрено в [7], а с дискретно-слоистым покрытием — в [8]. Влияние термоупругости материалов цилиндра и его радиально-неоднородного покрытия на рассеяние звука изучено в работах [10, 11]. При этом в [10] рассмотрены как прямая задача дифракции, так и обратная задача об определении законов неоднородности материала покрытия, обеспечивающих наименьшее звукоотражение в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [11, 12]. В [13] получено приближенное аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на однородном упругом цилиндре, имеющем цилиндрическую полость и радиально-неоднородное покрытие. На основе решения прямой задачи рассмотрена обратная задача об определении законов неоднородности покрытия, обеспечивающих минимальное звукоотражение. В [14] решена задача дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, находящемся вблизи плоской идеальной поверхности (абсолютно жесткой и акустически мягкой). Задачи дифракции звуковых волн на сплошном упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием в плоских волноводах с акустически мягкими и абсолютно жесткими границами решены в [15, 16]. В [17] исследовано рассеяние звука абсолютно жестким цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе, одна граница которого является абсолютно жесткой, а другая — акустически мягкой. В [18] решены обратные задачи дифракции звука об определении квадратичных законов неоднородности покрытия упругого цилиндра в плоских волноводах с акустически мягкими и абсолютно жесткими границами, обеспечивающих наименьшее рассеяние звука в заданном сечении волновода. В настоящей работе решается обратная задача дифракции об определении оптимальных кубических законов неоднородности покрытия абсолютно жесткого цилиндра, находящегося в плоском волноводе, одна граница которого — абсолютно жесткая, а другая — акустически мягкая.

2. Постановка задачи

Рассмотрим плоский волновод шириной d с идеальными границами, заполненный идеальной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c (рис. 1).

Полагаем, что нижняя граница волновода является абсолютно жесткой, а верхняя граница — акустически мягкой. В волновод помещен бесконечный абсолютно жесткий цилиндр радиуса r_0. Цилиндр имеет покрытие в виде коаксиального радиально-неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя с внешним радиусом r_1. Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией радиальной координаты r, а модули упругости

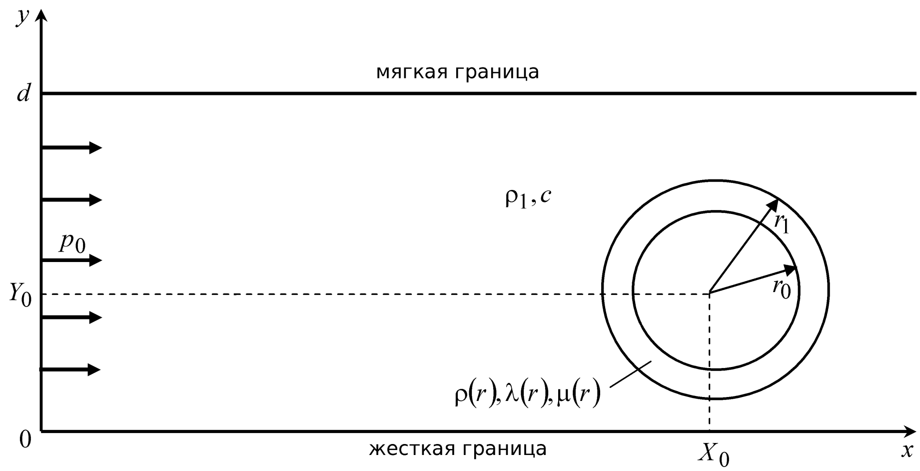


Рис. 1: Волноводная система

λ и μ — дифференцируемыми функциями координаты r цилиндрической системы координат r, φ, z, связанной с цилиндрическим телом. Ось вращения цилиндра совпадает с осью z и параллельна стенкам волновода.

Пусть вдоль стенок волновода по нормали к поверхности цилиндрического тела распространяется гармоническая звуковая волна давления p_0 с круговой частотой ω, возбуждаемая заданным распределением источников на сечении волновода, расположенного на расстоянии X_0 от оси цилиндра. Будем рассматривать общий случай произвольного расположения источников относительно оси волновода.

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z так, чтобы ось x проходила по нижней стенке волновода, ось y лежала в сечении волновода с заданным распределением источников звука, а ось z была параллельна оси цилиндра. В системе координат нижняя граница волновода определяется уравнением $y = 0$, верхняя граница — уравнением $y = d$, а положение оси цилиндра определяется координатами

$$x = X_0, \;\; y = Y_0, \;\; -\infty < z < \infty.$$

Введенные прямоугольные и цилиндрические координаты связаны между собой соотношениями

$$x = X_0 + r\cos\varphi, \;\; y = Y_0 + r\sin\varphi, \;\; z = z.$$

Определим законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающих требуемое звукоотражение.

3. Прямая задача дифракции звука на цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе

Решение прямой задачи дифракции в случае, когда одна граница волновода является абсолютно жесткой, а другая — акустически мягкой, приведено в [17].

В области $x > 0$ давление в падающей волне представляется совокупностью собственных волн волновода, распространяющихся вдоль оси x

$$p_0\,(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\xi_n x} \cos\,\lambda_n y\; e^{-i\omega t},$$

где

$$\xi_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}; \quad k = \omega/c; \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2d}(2n+1);$$

A_n – заданные амплитуды. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается.

В цилиндрической системе координат падающая волна записывается следующим образом:

$$p_0(r,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_m(kr)\, e^{im\varphi},$$

где $J_m(kr)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка m;

$$a_m = i^m \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\xi_n X_0} \cos\ (\lambda_n Y_0 - m\psi)\,, \quad \psi = \arcsin\frac{\lambda_n}{k}.$$

Давление полного акустического поля в волноводе

$$p = p_0 + p_s.$$

Давление рассеянного цилиндром поля p_s представляется в виде потенциала простого слоя

$$p_s(x,y) = \int\limits_{L_0} \nu_1(x_0,y_0)\, G(x,y|x_0,y_0)\, dl_0,$$

где $\nu_1(x_0,y_0)$ — функция, описывающая распределение источников поля p_s на внешней поверхности неоднородного покрытия; $G(x,y|x_0,y_0)$ — функция Грина; L_0 — окружность радиуса r_1 с центром в точке (X_0,Y_0); $dl_0 = r_1 d\varphi_0$ — элемент контура L_0.

Функции Грина имеет вид

$$G(x,y|x_0,y_0) = \frac{i}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+\delta_{0n})\,\xi_n}\cos\lambda_n y\ \cos\lambda_n y_0\ e^{i\xi_n|x-x_0|}.$$

Когда $\lambda_n > k$, $\xi_n = \sqrt{k^2-\lambda_n^2}$ становится чисто мнимым. В этом случае для выполнения условий излучения на бесконечности необходимо, чтобы $\mathrm{Im}\,\xi_\mathrm{n} > 0$, то есть $\xi_n = i\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}$.

В полярных координатах выражение для p_s записывается в виде

$$p_s(r,\varphi) = \int\limits_0^{2\pi} \nu(\varphi_0)\, G(r,\varphi|r_1,\varphi_0)\, d\varphi_0,$$

где $\nu(x_0,y_0) = r_1\nu_1(x_0,y_0)$.

Функцию плотности распределения источников представляется в виде разложения в ряд Фурье

$$\nu(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{im\varphi}.$$

Процедура определения коэффициентов b_m описана в [17].

В декартовой системе координат выражения для рассеянного поля имеют следующий вид: при $x \geqslant X_0 + r_1$

$$p_s(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^r e^{i\xi_n x}\cos\ \lambda_n y\ ,$$

при $x \leqslant X_0 - r_1$

$$p_s(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^l e^{i\xi_n x} \cos\ \lambda_n y\ ,$$

где

$$B_n^r = \frac{2\pi i}{d(1+\delta_{0n})\xi_n} e^{-i\xi_n X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m b_m J_m(kr_1) \cos\ (\lambda_n Y_0 - m\psi)\,;$$

$$B_n^l = \frac{2\pi i}{d(1+\delta_{0n})\xi_n} e^{i\xi_n X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m b_m J_m(kr_1) \cos\ (\lambda_n Y_0 + m\psi)\,.$$

4. Обратная задача дифракции

Для получения требуемых звукоотражающих характеристик цилиндрического тела, расположенного в волноводе, необходимо найти соответствующие законы неоднородности покрытия цилиндра, то есть определить зависимости $\rho(r)$, $\lambda(r)$ и $\mu(r)$.

Будем считать, что функции $\rho(r)$, $\lambda(r)$ и $\mu(r)$ аппроксимированы многочленами третьей степени относительно переменной r, то есть будем рассматривать следующие законы неоднородности материала покрытия:

$$\rho(r) = \tilde{\rho}\ \rho^*(r), \quad \lambda(r) = \tilde{\lambda}\ \lambda^*(r), \quad \mu(r) = \tilde{\mu}\ \mu^*(r), \tag{1}$$

где

$$\rho^*(r) = \sum_{q=0}^{3} \rho^{(q)} r^q, \quad \lambda^*(r) = \sum_{q=0}^{3} \lambda^{(q)} r^q, \quad \mu^*(r) = \sum_{q=0}^{3} \mu^{(q)} r^q; \tag{2}$$

$\tilde{\rho}$, $\tilde{\lambda}$. $\tilde{\mu}$ — характерные величины механических свойств материала покрытия.

Рассеивающую способность тела будем характеризовать с помощью функционалов, построенных специальным образом.

Построим функционал Φ_1, определенный на классе кубических функций (1) и выражающий усредненную интенсивность рассеяния звука в некотором интервале $(a \leqslant y \leqslant b)$ заданного сечения волновода $(x = x_*)$ при фиксированной частоте $\omega = \omega_*$

$$\Phi_1[\rho,\lambda,\mu] = \frac{1}{b-a} \int_a^b |p_s(x_*, y,\ \omega_*)|^2\, dy.$$

В случае, когда частота звуковой волны не является фиксированной, а изменяется в некотором диапазоне $[\omega_1, \omega_2]$, построим функционал Φ_2, выражающий усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном диапазоне частот и в фиксированной точке наблюдения $(x = x_*,\ y = y_*)$.

$$\Phi_2[\rho,\lambda,\mu] = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |p_s(x_*, y_*,\ \omega)|^2\, d\omega.$$

Для случая, когда требуется иметь минимальное звукоотражение в заданном интервале сечения и в некотором диапазоне частот, построим функционал Φ_3.

$$\Phi_3[\rho,\lambda,\mu] = \frac{1}{(b-a)(\omega_2 - \omega_1)} \int_a^b \int_{\omega_1}^{\omega_2} |p_s(x_*, y_*,\ \omega)|^2\, d\omega\, dy.$$

Найдем такие значения коэффициентов $\rho^{(q)}$, $\lambda^{(q)}$, $\mu^{(q)}$ $(q = 0,\,1,\,2,3)$ функций (2), при которых функционалы $\Phi_j[\rho,\lambda,\mu]$ $(j = 1,\,2,\,3)$ достигают минимального значения.

5. Генетический алгоритм

Для нахождения оптимальных законов неоднородности материала покрытия сначала определим область допустимых решений для функций (2) вводя ограничения

$$\alpha_0 \leqslant \rho^*(r) \leqslant \alpha_1, \quad \beta_0 \leqslant \lambda^*(r) \leqslant \beta_1, \quad \gamma_0 \leqslant \mu^*(r) \leqslant \gamma_1, \quad r \in [r_0, r_1] \tag{3}$$

где α_j, β_j, γ_j $(j = 0, 1)$ — некоторые положительные константы.

Каждое из неравенств (3) имеет вид

$$b_0 \leqslant f(r) \leqslant b_1, \tag{4}$$

где

$$f(r) = a^{(0)} + a^{(1)}r + a^{(2)}r^2 + a^{(3)}r^3, \tag{5}$$

и определяет прямоугольную область

$$Q = \{(r, f): \quad r \in [r_0, r_1], \quad f \in [b_0, b_1]\},$$

содержащую бесконечное множество кубических парабол.

Разобьем отрезок $r \in [r_0, r_1]$ на три равные части. В области Q каждая кубическая парабола $f(r)$ однозначно определяется четырьмя точками с координатами (r_0, f_0), (r', f_1), (r'', f_2), (r_1, f_3), где $r' = (2r_0 + r_1)/3$, $r'' = (r_0 + 2r_1)/3$; $f_0 = f(r_0)$, $f_1 = f(r')$, $f_2 = f(r'')$, $f_3 = f(r_1)$.

Подставив координаты этих четырех точек в (5), получим систему четырех уравнений, из которых определим значения $a^{(q)}$ через величины r_0, r_1, f_q $(q = 0, 1, 2, 3)$.

Для некоторых наборов коэффициентов $(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ значения функции $f(r)$ могут выходить из интервала $[b_0,\ b_1]$, что приводит к нарушению ограничений (4). Чтобы исключить такие наборы из рассмотрения, оцениваются значения функции $f(r)$ в стационарных точках, лежащих на отрезке $[r_0, r_1]$, где возможно достижение экстремальных значений.

Если $a^{(3)} \neq 0$, то рассматриваются две стационарные точки $r_c = \dfrac{-a^{(2)} \pm \sqrt{a^{(2)2} - 3a^{(1)}a^{(3)}}}{3a^{(3)}}$. Если $a^{(3)} = 0$, то рассматривается одна точка $r_c = -a^{(1)}/(2a^{(2)})$.

В случае, когда точка r_c попадает в отрезок $[r_0, r_1]$ и при этом $f(r_c) < b_0$ или $f(r_c) > b_1$, то соответствующий набор коэффициентов $(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ исключается из рассмотрения.

Нахождение оптимального набора параметров $\rho^{(q)}$, $\lambda^{(q)}$, $\mu^{(q)}$ $(q = 0, 1, 2, 3)$, удовлетворяющего условиям (3) и минимизирующего функцию двенадцати переменных

$$\Phi_m(\rho^{(0)}, \ldots, \rho^{(3)}, \lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(3)}, \mu^{(0)}, \ldots, \mu^{(3)}) \to \min \quad (m = 1,\ 2, \ldots 3),$$

осуществим с помощью генетического алгоритма [19].

При фиксированном q каждое отдельное значение f_q $(q = 0, 1, 2, 3)$ кодируется в виде последовательности p битов, где p — натуральное число, являющееся одним из параметров генетического алгоритма. Этот параметр называется разрядностью гена. Он выбирается произвольно. При заданном p отдельное значение f_q представляется в виде

$$f_q = b_0 + m_q h, \tag{6}$$

где m_q — целое неотрицательное число, представляемое в виде двоичного p разрядного числа; $h = \dfrac{b_1 - b_0}{2^p - 1}$. Представление (6) обеспечивает удовлетворение условия $f_q \in [b_0, b_1]$ для любого m_q. Таким образом, задание или изменение значения f_q в любом месте алгоритма сводится к заданию или изменению последовательности p битов, называемой в дальнейшем геном, определяющим f_q. Увеличение разрядности гена приводит к увеличению количества значений f_q

на отрезке $[b_0,\ b_1]$. Разрядность, равная p, задаёт на отрезке $[b_0,\ b_1]$ равномерную сетку значений с шагом h, которые может принимать функция $f(r)$ в каждой из точек r_0, r', r'', r_1. Так как эти значения могут отличаться от значений, принимаемых функцией $f(r)$, соответствующей точному решению задачи оптимизации, то задание достаточно большого p необходимо для увеличения потенциальной точности алгоритма.

Каждая из функций $\rho^*(r)$, $\lambda^*(r)$, $\mu^*(r)$ однозначно определяется хромосомой, состоящей из четырех генов, определяющих значения данной функции в точках r_0, r', r'', r_1. Полная конфигурация из трех хромосом, соответствующих функциям $\rho^*(r)$, $\lambda^*(r)$, $\mu^*(r)$, называется особью.

При минимизации функционала с помощью генетического алгоритма рассматривается динамическая совокупность нескольких особей, называемая популяцией. Каждая итерация алгоритма сопровождается изменением популяции. Множество особей, рассматриваемых вместе в течение одной итерации, называется поколением.

Ниже опишем шаги генетического алгоритма.

Шаг 1. Инициализация. На данном шаге генерируется начальное поколение P, состоящее из N_0 особей. Каждая из них задаётся как совокупность трех случайных хромосом. Генерация каждой особи сопровождается проверкой стационарных точек и в неудовлетворительном случае повторяется заново до тех пор, пока не будет получена допустимая конфигурация.

Шаг 2. Оценка приспособленности. Вводится функция приспособленности особи

$$F\left[\rho, \lambda, \mu\right] = C - \Phi\left[\rho, \lambda, \mu\right],$$

где C – положительная константа, определяемая экспериментально так, чтобы $F\left[\rho, \lambda, \mu\right]$ была положительна при всех допустимых конфигурациях ρ^*, λ^*, μ^*. Таким образом, задача минимизации функционала $\Phi\left[\rho, \lambda, \mu\right]$ сводится к задаче максимизации функции приспособленности. На втором шаге алгоритма рассчитывается значение функции приспособленности для каждой особи из начального поколения P. Наибольшее среди полученных значений обозначим $\hat{F}$.

Шаг 3. Проверка критерия остановки алгоритма. Генерация новых поколений останавливается, если на протяжении K поколений относительное улучшение максимального значения $\hat{F}$ функции приспособленности не превышает заранее заданное число δ — пороговое относительное улучшение значения функции приспособленности. Тогда в качестве оптимального решения берётся конфигурация $(\tilde{\rho}^*,\ \tilde{\lambda}^*,\ \tilde{\mu}^*)$, содержащаяся в текущем поколении, такая, что $F\left[\tilde{\rho}^*, \tilde{\lambda}^*, \tilde{\mu}^*\right] = \hat{F}$. Таким образом, K — число поколений для контроля условия остановки

Шаг 4. Селекция хромосом. На данном шаге из текущего поколения выбираются особи, которые будут участвовать в формировании следующего поколения.

Совокупность N_1 особей из P, имеющих наибольшее значение функции приспособленности, формируют набор P_1 и гарантированно переходят в новое поколение. Таким образом, N_1 — число особей, переходящих в новое поколение напрямую. При этом $N_1 < N_0$.

Из особей поколения P, не вошедших в P_1, методом рулетки [19] отбираются $N_2 \leqslant N_0 - N_1$ особей, формирующих набор P_2. N_2 — число особей, попадающих в набор для участия в скрещивании. P_2 является динамическим множеством, так как изменяется на следующем этапе. К особям из $P_1 \cup P_2$ будет применён оператор скрещивания.

Из особей, не вошедших в множество $P_1 \cup P_2$, формируется набор P_4, к которому будет применён оператор мутации.

Шаг 5. Применение оператора скрещивания. Скрещивание выполняется для N_3 пар особей, где $2N_3 \leqslant N_2$. Особи выбираются случайным образом из динамического множества $P_1 \cup P_2$. N_3 — число скрещиваний в одной итерации алгоритма

Особи, полученные в результате скрещивания, формируют новое множество P_3. Особи из P_2, участвовавшие в скрещивании, исключаются из данного множества. Количество потомков, создаваемых при каждом скрещивании, равно количеству участвующих в нём особей из P_2. Данное правило действует для того, чтобы число особей в популяции не изменялось.

Процесс скрещивания заключается в том, что хромосомы потомков формируются из хромосом родителей таким образом, чтобы часть генов каждой хромосомы была получена от одного родителя, часть — от другого. Для этого в каждой хромосоме случайным образом задаётся точка скрещивания так, чтобы обменивающиеся участки хромосом состояли из целого числа генов. Гены до точки скрещивания потомок получает от первого родителя (если формируется второй потомок, то от второго родителя), после точки скрещивания — от второго родителя (для второго потомка от первого родителя).

Шаг 6. Применение оператора мутации. Для особей из P_4, выбираемых случайным образом, выполняются мутации. Число особей в P_4 равно N_4. В гене, подвергаемом мутации, инвертируется двоичный код. Число особей, их хромосом и генов, подвергаемых мутации (а также выбор данных особей, хромосом и генов в них) определяется случайным образом.

Шаг 7. Формирование нового поколения. Новое поколение формируется как множество $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$, после чего происходит переход к шагу 2.

6. Результаты расчетов

По изложенному выше алгоритму были проведены расчеты параметров законов неоднородности покрытия цилиндра, обеспечивающих наименьшее рассеяние звука. Рассматривался цилиндр радиуса $r_0 = 1$ м с покрытием толщиной 0,1 м, находящийся в плоском волноводе шириной $d = 20$ м, заполненном водой ($\rho_1 = 1000$ кг/м^3, $c = 1485$ м/с). Полагалось, что покрытие выполнено на основе полимерного материала, неоднородного по плотности, с характерной плотностью $\tilde{\rho} = 1070$ кг/м^3 и характерными модулями упругости $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м^2 (поливинилбутираль). Положение оси цилиндра определялось координатами $X_0 = 10$ м, $Y_0 = d/10$ м. Амплитуды A_n полагались равными единице.

Полагалось, что $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0,1$, $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1,5$. Такие значения границ неравенств (3) обеспечивают достаточно широкий диапазон изменения функций $\rho(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$.

При расчетах использовались следующие значения параметров генетического алгоритма: $p = 10$, $C = 0,01$, $\delta = 10^{-5}$, $K = 10$, $N_0 = 10$, $N_1 = 3$, $N_2 = 4$, $N_3 = 2$.

Минимизация функционала $\Phi_1[\rho, \lambda, \mu]$ осуществлена при $15 \leqslant y \leqslant 18$, $x_* = 30$ м и частоте падающей волны, соответствующей волновому числу $kr_0 = 5$.

Оптимальное решение задачи минимизации функционала имеет вид:

$$\rho^*(r) = 4001,0 - 11253,9r + 10539,7r^2 - 3285,9r^3,$$

$$\lambda^*(r) = 787,6 - 2560,8r + 2737,4r^2 - 963,5r^3,$$

$$\mu^*(r) = 9151,3 - 26073,7r + 24755,8r^2 - 7831,9r^3.$$

Этим оптимальным законам неоднородности соответствует значение функционала $\Phi_1 = 7,04 \cdot 10^{-6}$.

При минимизации функционала $\Phi_2[\rho, \lambda, \mu]$ полагалось, что $x_* = 30$ м, $y_* = 15$ м, а диапазон частот соответствует изменению волнового размера цилиндра kr_0 от 3 до 8.

Получены следующие оптимальные законы неоднородности материала покрытия:

$$\rho^*(r) = 700,6 - 2211,9\,r + 2306,3\,r^2 - 794,4\,r^3,$$

$$\lambda^*(r) = 3342,0 - 9659,7\,r + 9299,3\,r^2 - 2980,7\,r^3,$$

$$\mu^*(r) = 2991,9 - 8648,4\,r + 8323,2\,r^2 - 2666,6\,r^3.$$

При этом $\Phi_2 = 1,56 \cdot 10^{-5}$.

Минимизация функционала $\Phi_3\,[\rho, \lambda, \mu]$ осуществлена при $x_* = 30$, $y_* = 15$ для интервала сечения волновода $15 \leqslant y \leqslant 18$ и диапазона частот, в котором $5 \leqslant kr_0 \leqslant 8$.

Минимальному значению $\Phi_3 = 1,5 \cdot 10^{-8}$ соответствует покрытие со следующими свойствами:

$$\rho^*(r) = -587,5 = 1641,4\,r - 1527,9\,r^2 + 474,2\,r^3,$$

$$\lambda^*(r) = 12106,5 - 34779,6\,r + 36023,5\,r^2 - 10617,2\,r^3,$$

$$\mu^*(r) = 13230,5 - 37822,6\,r + 36023,5\,r^2 - 11430,1\,r^3.$$

На рис. 2 – 4 приведены графики оптимальных законов неоднородности материала покрытия. Сплошными, штриховыми и пунктирными линиями обозначены зависимости для параметров неоднородности, полученные при минимизации функционалов Φ_1, Φ_2 и Φ_3 соответственно.

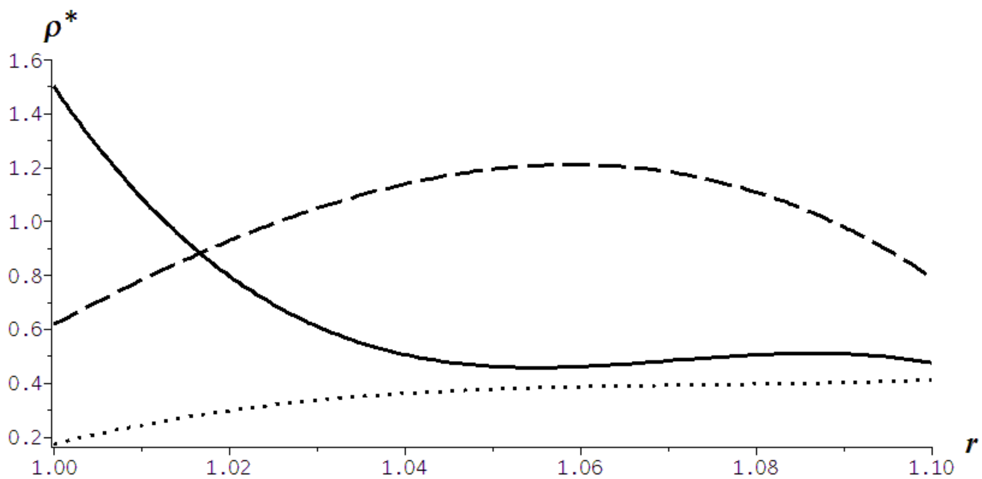


Рис. 2: Зависимости $\rho^*(r)$

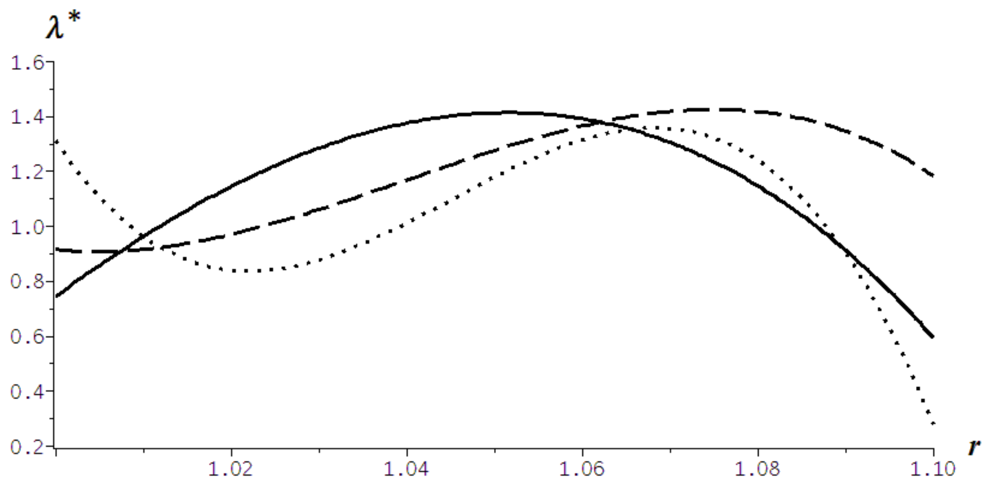


Рис. 3: Зависимости $\lambda^*(r)$

Оценим значение и влияние параметров генетического алгоритма на результаты минимизации функционалов.

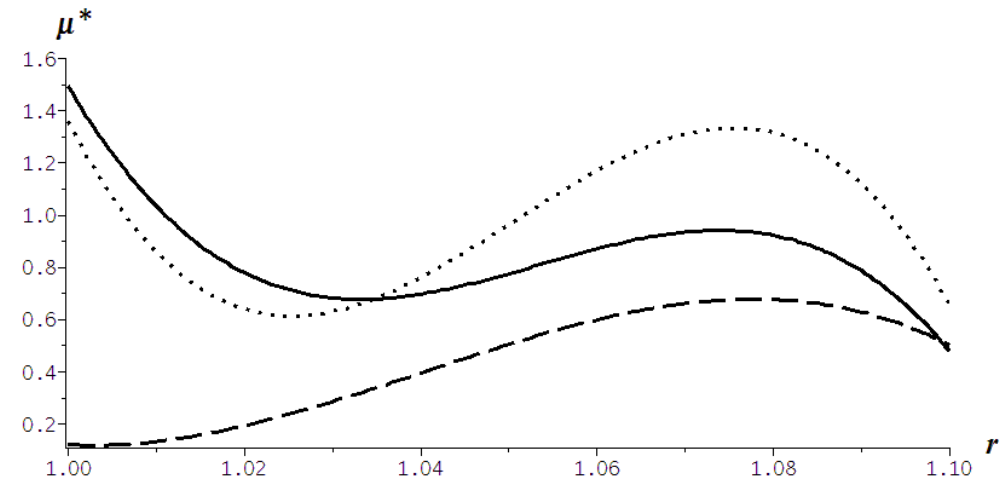


Рис. 4: Зависимости $\mu^*(r)$

Разрядность гена p влияет на погрешность итогового решения. При увеличении разрядности гена на единицу шаг сетки уменьшается примерно в 2 раза, вследствие чего в любой из четырех опорных точек разность между значением точного оптимального закона неоднородности и значением ближайшего к нему в сетке приближенного оптимального решения уменьшается почти в 2 раза. Кроме того, увеличение p может приводить и к обнаружению новых локальных минимумов функционала, если они существуют в области гораздо меньшей шага сетки.

Константа C, используемая для построения функции приспособленности, подлежит экспериментальному определению. Ее минимально возможное значение равно наибольшему значению исследуемого функционала $\Phi[\rho, \lambda, \mu]$, которое может быть обнаружено в процессе применения генетического алгоритма. При большом отличии C от данного значения алгоритм может остановиться раньше, чем погрешность найденного минимального значения функционала станет достаточно малой.

Покажем почему это происходит. Пусть F' — наивысшее среди особей значение функции приспособленности, полученное на предыдущей итерации, а F — значение функции приспособленности, полученное на данной итерации. Критерием остановки алгоритма является выполнение условия $\dfrac{F'-F}{F} \leqslant \delta$ на протяжении K итераций. Так как $\dfrac{F'-F}{F} = \dfrac{(C-\Phi')-(C-\Phi)}{C-\Phi} = \dfrac{\Phi-\dot{\Phi}'}{C-\Phi}$, то при увеличении константы C всегда неотрицательное значение $\dfrac{\Phi-\dot{\Phi}'}{C-\Phi}$ уменьшается и становится меньше порогового значения δ на более ранних итерациях. Поэтому увеличение C, если оно не согласовано с уменьшением δ, приводит к тому, что алгоритм может остановиться раньше достижения приемлемого минимума функционала $\Phi[\rho, \lambda, \mu]$.

Для получения более точного решения задачи минимизации функционала пороговое относительное улучшение значения функции приспособленности δ следует выбирать как можно меньшим, однако при этом увеличивается время работы алгоритма.

Число поколений для контроля условия остановки K определяет минимальное число итераций, на протяжении которых алгоритм должен отвечать критерию остановки. Данный параметр выбирается достаточно большим для того, чтобы в случае попадания в локальный минимум функционала случайные мутации могли вывести его из данной области и позволить продолжить поиск меньшего значения функционала. Определить оптимальное значение K

не представляется возможным из-за неизвестного характера локальных минимумов и чисто случайного характера мутаций.

Число особей в популяции N_0 определяет число конфигураций, рассматриваемых одновременно в пределе одной итерации. От него зависит количество «материала» для скрещиваний и мутаций. Значение N_0 следует выбирать таким, чтобы иметь достаточное количество конфигураций, которые могут принять участие в скрещиваниях и мутациях.

При задании параметров N_1, N_2, N_3, N_4 должны выполняться соотношения $N_1+N_2+N_4=N_0$ и $2N_3 \leqslant N_2$. Если значение $N_2+N_3+N_4$ слишком мало, то алгоритм может «застопориться», то есть относительное улучшение максимального значения функции приспособленности не будет происходить и критерий остановки будет выполнен слишком рано. Но в процессе работы алгоритма за этим можно следить, показывая результат каждой итерации. Во всех остальных случаях конкретные значения N_0,N_1, N_2, N_3, N_4 не играют роли, так как они влияют только на то, сколько итераций потребуется для достижения результата.

7. Заключение

Осуществив минимизацию соответствующих функционалов, получили аналитическое описание оптимальных механических параметров непрерывно-неоднородного покрытия цилиндра для обеспечения минимального звукоотражения. Такое покрытие можно реализовать с помощью дискретной системы тонких однородных упругих слоев, имеющих различные значения механических параметров (плотности и упругих постоянных).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В. П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 791-798.

2. Бобровницкий Ю. И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879-889.

3. Бобровницкий Ю. И., Морозов К. Д., Томилина Т. М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 147-151.

4. Косарев О. И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34-37.

5. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.

6. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.

7. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.

8. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.

9. Ларин Н. В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с непрерывно-неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 6. С. 154-173.

10. Ларин Н. В. О влиянии непрерывно-неоднородного покрытия на звукоотражающие свойства термоупругого цилиндра // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 9. Часть 1. С. 395-403.

11. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54-62.

12. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 4. С. 189-199.

13. Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности покрытия упругого цилиндра с цилиндрической полостью, обеспечивающих минимальное звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 67-81.

14. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276-289.

15. Толоконников Л. А Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с акустически мягкими границами // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 43-53.

16. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с абсолютно жесткими границами // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 76-83.

17. Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 1. С. 270-281.

18. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Математическое моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра, находящегося в плоском волноводе // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 315-323.

19. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия - Телеком, 2006. 452 с.

REFERENCES

1. Ivanov, V. P. 2006, “Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating”, *Acoustical Physics* vol. 52, no 6, pp. 683-690.

2. Bobrovnitskii, Yu. I. 2008, “A nonscattering coating for a cylinder”, *Acoustical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 758-768.

3. Bobrovnitskii, Yu. I., Morozov, K. D. & Tomilina, T. M. 2010, “A periodic surface structure with extreme acoustic properties”, *Acoustical Physics*, vol. 56, no 2, pp. 127-131.

4. Kosarev, O. I. 2012, “Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating”, *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34-37, [in Russian].

5. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, “The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.

6. Tolokonnikov, L. A. 2013, “Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208, [in Russian].

7. Tolokonnikov, L. A. 2013, “Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].

8. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, “The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.

9. Larin, N. V. 2017, “Diffraction of a plane acoustic wave on the thermoelastic cylinder with the continuously inhomogeneous covering”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 154-173, [in Russian].

10. Larin, N. V. 2017, “Influence of the continuously inhomogeneous coating on the thermoelastic cylinder sound-reflecting properties”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9-1, pp. 395-403, [in Russian].

11. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel’tsyn, S. A. 2014, “About definition of linear laws of heterogeneity of the cylindrical elastic layer having the least reflexion in the set direction at sound scattering”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4, pp. 54-62, [in Russian].

12. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel’tsyn, S. A. 2017, “Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no 4, pp. 733-742.

13. Tolokonnikov, L. A. 2017, “Determination of the inhomogeneity laws for an covering of an elastic cylinder with cylindrical cavity,providing minimum sound reflexion”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki* , no 4, pp. 67-81, [in Russian].

14. Tolokonnikov, L. A. 2018, “Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki* , no 9, pp. 276-289, [in Russian].

15. Tolokonnikov, L. A. 2015, “Diffraction of sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating in a plane waveguide with acoustic soft boundaries”,*Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 43-53, [in Russian].

16. Tolokonnikov, L. A. 2015, “Diffraction of sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating in a plane waveguide with absolutely rigid boundaries”,*Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 76-83, [in Russian].

17. Tolokonnikov, L. A. 2019, “Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide”,*Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no 1, pp. 270-281, [in Russian].

18. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2018, “Mathematical modelling of an inhomogeneous coating of an elastic coating in a plane waveguide ”,*Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9, pp. 315-323, [in Russian].

19. Rutkovskaya, D., Pilinskii, M. & Rutkovskii, L. 2006, *“Neural Networks, Genetic Algorithms and Fuzzy Systems”*, Goryachaia Liniya - Telekom, Moscow, 452 p., [in Russian].

Получено 25.02.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-369-381

Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности[1]

Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов

Лев Алексеевич Толоконников — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Ефимов Дмитрий Юрьевич — магистрант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей произвольным образом на упругий круговой цилиндр с радиально-неоднородным покрытием в присутствии плоской поверхности (абсолютно жесткой и акустически мягкой). Методом мнимых источников с применением теорем сложения для цилиндрических волновых функций получено аналитическое решение задачи. Волновые поля в содержащей среде и однородном упругом цилиндре находятся в виде разложений по волновым цилиндрическим функциям, а для нахождения полей смещений в неоднородных покрытиях построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Проведены численные расчеты частотных и угловых характеристик рассеянного поля для упругих однородных цилиндров с покрытием и без него, находящихся вблизи подстилающей плоскости. Выявлено существенное влияние непрерывно-неоднородных упругих покрытий на звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел.

Ключевые слова: рассеяние, звуковые волны, упругий цилиндр, неоднородное упругое покрытие, плоская поврхность.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 369–381.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-369-381

Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface[2]

L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov

Lev Alexeevich Tolokonnikov — doctor of physical and mathematical Sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Efimov Dmitrii Yurevich — undergraduate, Tula State University (Tula).
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Abstract

In article the problem of the scattering of an obliquely incident plane monochromatic sound wave by an elastic cylinder with a radially non-uniform elastic coating in presence of a flat surface (absolutely rigid and acoustically soft) is considered. The analytical solution of the problem by the method of imaginary sources using addition theorems for cylindrical wave functions is received. Wave fields in a containing medium and homogeneous elastic cylinder are found in the form of expansions in wave cylindrical functions. The boundary-value problem for the system of ordinary second order differential equations is constructed for determination of the displacement fields in inhomogeneous coatings.

Numerical calculations of frequency and angular characteristics of the scattered field for elastic homogeneous cylinders with and without coating located near the underlying plane are performed. Influence of continuously inhomogeneous elastic coatings on sound-reflecting properties of elastic cylindrical bodies are revealed.

Keywords: scattering, sound waves, elastic cylinder, non-uniform elastic coating, flat surface.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov, 2020, “Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 369–381.

1. Введение

Возможность изменения звукоотражающих свойств цилиндрических тел с помощью покрытий из функционально-градиентных материалов обсуждалась в ряде работ. В [1, 2] исследовано рассеяние плоских и цилиндрических звуковых волн жестким цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием. При этом в [1] рассматривался случай нормального падения плоской волны, а в [2] полагалось, что ось цилиндрического источника параллельна оси цилиндра. Задачи о рассеянии наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием решены в [3, 4]. В [3] неоднородное покрытие полагалось непрерывно-неоднородным, а в [4] — дискретно-слоистым. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием изучена в [5]. При этом

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

решены как прямая задача дифракции, так и обратная задача об определении квадратичных законов неоднородности материала покрытия, обеспечивающих наименьшее звукоотражение в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [6, 7]. Зависимости плотности и модулей упругости материала покрытия от радиальной координаты аппроксимированы многочленами первой степени в [6] и второй степени в [7].

В работах, приведенных выше, полагалось, что цилиндрические тела находятся в безграничном пространстве. В [8] решена задача дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием, находящемся вблизи плоской идеальной поверхности (абсолютно жесткой и акустически мягкой), когда плоская волна падает перпендикулярно оси цилиндра. В настоящей работе рассматривается задача о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей произвольным образом на упругий круговой цилиндр, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем, в присутствии подстилающей плоскости (абсолютно жесткой и акустически мягкой).

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный упругий цилиндр радиуса r_0, материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0. Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого слоя с внешним радиусом r_1. Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного покрытия описываются дифференцируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты, а плотность ρ — непрерывной функцией этой координаты. Окружающая цилиндрическое тело жидкость является идеальной и характеризуется плотностью ρ_1 и скоростью звука c. Цилиндр с покрытием находится вблизи плоской поверхности Г, которая является абсолютно жесткой или акустически мягкой. Ось цилиндра параллельна плоскости Г и отстоит от нее на расстоянии d.

Пусть из внешнего полупространства на тело под произвольным углом падает плоская гармоническая звуковая волна с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота; t — время. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

При рассеянии звука цилиндром, находящимся вблизи звукоотражающей границы, возникают многократные переотражения между телом и плоскостью, так что близко расположенная подстилающая поверхность оказывает существенное влияние на рассеяние звука цилиндром. Определим акустическое поле, рассеянное цилиндром с покрытием в присутствии плоскости.

3. Аналитическое решение задачи

В рассматриваемой постановке задача является трехмерной. Так как подстилающая плоскость полагается идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой), то решение поставленной задачи можно найти методом мнимых источников. Решение задачи проведем, используя подход, примененный в [8, 9].

Согласно методу мнимых источников исключим плоскость Г, вводя в рассмотрение второй цилиндр, являющийся зеркальным отражением исходного рассеивателя, и вторую плоскую волну, распространяющуюся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_2$ [8]. Причем вектор $\mathbf{k}_2$ является зеркальным отражением волнового вектора $\mathbf{k}_1$ падающей плоской звуковой волны относительно плоскости Г. В результате исходная задача сводится к задаче рассеяния двух плоских волн на двух идентичных цилиндрах, находящихся в безграничном пространстве, заполненном идеальной жидкостью [9].

Введём три одинаково ориентированные прямоугольные декартовы системы координат: основную (x, y, z), связанную с плоскостью Γ, и две локальных (x_{+1}, y_{+1}, z_{+1}) и (x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}), связанные с действительным и фиктивным цилиндрами соответственно (рис. 1). Плоскость xz совмещена с плоскостью Γ, координатные оси z_{+1} и z_{-1} совпадают с осями вращения первого и второго цилиндров соответственно, координатные оси y_{+1} и y_{-1} совпадают с осью y.

Свяжем прямоугольные системы координат (x, y, z), (x_{+1}, y_{+1}, z_{+1}), (x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}) с цилиндрическими системами координат (r, φ, z), $(r_{+1}, \varphi_{+1}, z_{+1})$, $(r_{-1}, \varphi_{-1}, z_{-1})$. Отметим, что $z = z_l$ $(l = \pm 1)$.

В локальных цилиндрических координатах уравнения внешней и внутренней поверхностей покрытия l – го цилиндра имеют вид $r_l = r_1$ и $r_l = r_0$ $(l = \pm 1)$.

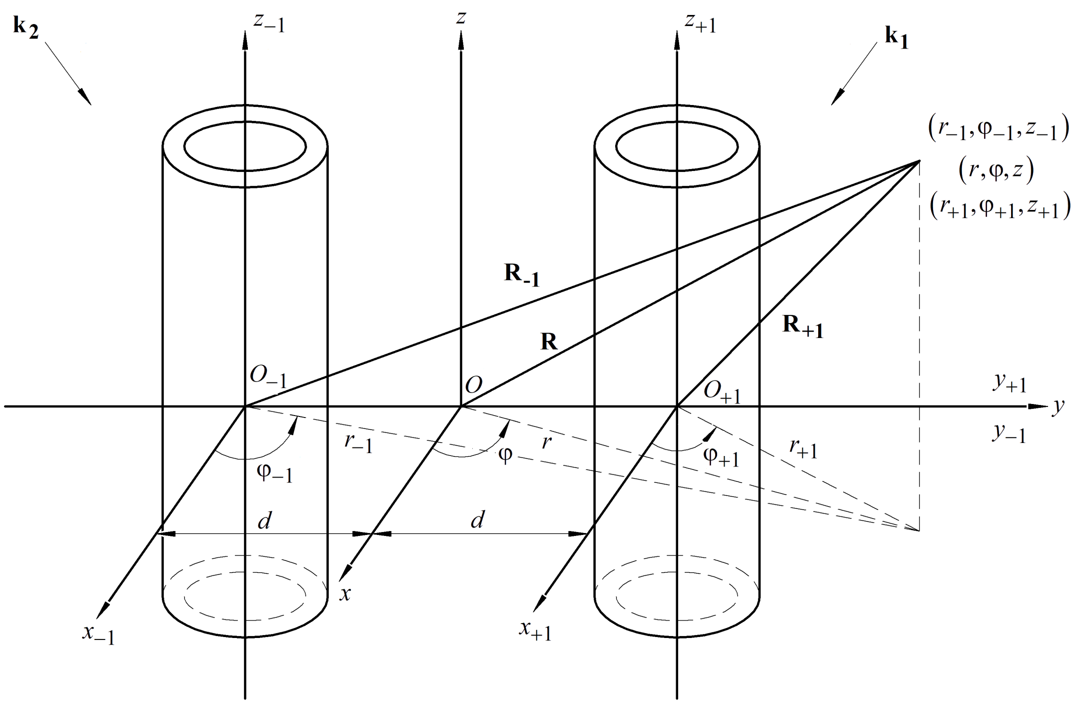


Рис. 1: К задаче рассеяния звука на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями

Потенциал скорости падающей волны, распространяющейся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_1$, в основной системе координат имеет вид

$$\Psi_{01} = A \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{R})],$$

где A — амплитуда волны; $\mathbf{k}_1 = (k \sin\theta_0 \cos\varphi_0;\ \ k \sin\theta_0 \sin\varphi_0;\ \ k \cos\theta_0)$; $k = \omega/c$ — волновое число жидкости; $\mathbf{R} = (x, y, z)$ — радиус-вектор; θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы падения плоской волны.

Чтобы граничные условия на плоскости Γ (при $y = 0$) удовлетворялись автоматически, потенциал скорости второй падающей плоской волны должен быть равен [8]

$$\Psi_{02} = A \exp[i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{R})],$$

если плоскость Γ жесткая, и

$$\Psi_{02} = -A \exp[i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{R})],$$

если плоскость Γ мягкая. При этом $\mathbf{k}_2 = (k \sin\theta_0 \cos\varphi_0;\ \ -k \sin\theta_0 \sin\varphi_0;\ \ k \cos\theta_0)$.

С учетом того, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_l + \mathbf{R}_{Ol}$ ($l = \pm 1$), где $\mathbf{R}_l$ — радиус-вектор точки наблюдения в l – ой локальной системе координат; $\mathbf{R}_{Ol} = (0, dl, 0)$ — радиус-вектор, соединяющий точку O с точкой O_l, потенциалы скорости падающих плоских волн в локальных цилиндрических координатах представляются в виде разложений [11]

$$\Psi_{01}(r_l, \varphi_l, z_l) = Ae^{idl\beta \sin\varphi_0} e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)}, \quad (1)$$

$$\Psi_{02}(r_l, \varphi_l, z_l) = \pm Ae^{-idl\beta \sin\varphi_0} e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)}, \quad (2)$$

где J_n — цилиндрическая функция Бесселя порядка n; $\alpha = k\cos\theta_0$; $\beta = k\sin\theta_0$.

Распространение гармонических звуковых волн в идеальной жидкости описывается уравнением Гельмгольца [10]

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0,$$

где Ψ — потенциал скорости полного акустического поля.

При этом скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi.$$

В силу линейной постановки задачи потенциал скорости полного акустического поля будет равен [8]

$$\Psi = \Psi_{01} + \Psi_{02} + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}, \quad (3)$$

где Ψ_{s1} и Ψ_{s2} — потенциалы скорости рассеянных двумя цилиндрами первой и второй плоских волн соответственно.

Потенциал скорости волны, рассеянной цилиндром в присутствии подстилающей плоской поверхности определяется выражением

$$\Psi_s = \Psi_{02} + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}. \quad (4)$$

Потенциалы Ψ_{sj} представим в виде суммы двух слагаемых

$$\Psi_{sj} = \sum_{l=\pm 1} \Psi_{sj}^{(l)} \qquad (j = 1, 2), \quad (5)$$

каждое из которых представляет собой потенциал скорости волны, рассеянной l – ым цилиндром.

Функции $\Psi_{sj}^{(l)}$ являются решениями уравнений Гельмгольца в локальных цилиндрических координатах и должны удовлетворять условиям излучения на бесконечности. Эти функции будем искать в виде

$$\Psi_{sj}^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l) = e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{jn}^{(l)} H_n(\beta r_l) e^{in(\varphi_l - \varphi_0)} \quad (l = \pm 1, \quad j = 1, 2), \quad (6)$$

где H_n — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n; $A_{jn}^{(l)}$ — коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Рассмотрим теперь уравнения, описывающие распространение упругих волн в однородных упругих цилиндрах (действительном и мнимом).

Представим вектор смещения $\mathbf{u}_{0j}^{(l)}$ частиц упругого изотропного однородного l – го цилиндра при воздействии j – ой плоской волны ($j = 1, 2$) в виде

$$\mathbf{u}_{0j}^{(l)} = \mathrm{grad}F_j^{(l)} + \mathrm{rot}\mathbf{\Phi}_j^{(l)}, \quad \mathrm{div}\mathbf{\Phi}_j^{(l)} = 0,$$

где $L_j^{(l)}$ и $\mathbf{\Phi}_j^{(l)}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения, которые в случае установившегося режима колебаний являются решениями скалярного и векторного уравнений Гельмгольца [12]

$$\Delta F_j^{(l)} + k_\eta^2 F_j^{(l)} = 0, \quad \Delta \mathbf{\Phi}_j{}^{(l)} + k_\tau^2 \mathbf{\Phi}_j{}^{(l)} = 0 \quad (l = \pm 1, \quad j = 1, 2),$$

где $k_\eta = \omega / c_\eta$ и $k_\tau = \omega / c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_\eta = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн.

Представим вектор $\mathbf{\Phi}_j^{(l)}$ в виде

$$\mathbf{\Phi}_j{}^{(l)} = \operatorname{rot}(L_j^{(l)} \overline{e}_{z_l}) + k_\tau M_j^{(l)} \overline{e}_{z_l},$$

где $L_j^{(l)}$ и $M_j^{(l)}$ — скалярные функции пространственных координат r_l, φ_l, z_l; $\overline{e}_{z_l}$ — единичный вектор оси z_l.

Тогда векторное уравнение относительно функции $\mathbf{\Phi}_j$ сведется к двум скалярным уравнениям Гельмгольца относительно функций $L_j^{(l)}$ и $M_j^{(l)}$

$$\Delta L_j^{(l)} + k_\tau^2 L_j^{(l)} = 0,$$

$$\Delta M_j^{(l)} + k_\tau^2 M_j^{(l)} = 0.$$

С учетом условия ограниченности функции $F_j^{(l)}$, $L_j^{(l)}$ и $M_j^{(l)}$ будем искать в виде

$$F_j^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l) = e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{jn}^{(l)} J_n(k_1 r_l) e^{in(\varphi - \varphi_0)} \quad (l = \pm 1, \quad j = 1, 2), \tag{7}$$

$$L_j^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l) = e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{jn}^{(l)} J_n(k_2 r_l) e^{in(\varphi - \varphi_0)} \quad (l = \pm 1, \quad j = 1, 2), \tag{8}$$

$$M_j^{(l)}(r_l, \varphi_l, z_l) = e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{jn}^{(l)} J_n(k_2 r_l) e^{in(\varphi - \varphi_0)} \quad (l = \pm 1, \quad j = 1, 2), \tag{9}$$

где $k_1 = \sqrt{k_\eta^2 - \alpha^2}$; $k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - \alpha^2}$.

Волновые поля в неоднородных упругих покрытиях цилиндров описываются общими уравнениями движения упругой среды [13], которые в локальных цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_{rr}^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(l)}}{\partial \varphi_l} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(l)}}{\partial z_l} + \frac{\sigma_{rr}^{(l)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(l)}}{r_l} = -\omega^2 \rho(r_l) u_r^{(l)}, \\
\frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^{(l)}}{\partial \varphi_l} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}^{(l)}}{\partial z_l} + \frac{2}{r_l} \sigma_{r\varphi}^{(l)} = -\omega^2 \rho(r_l) u_\varphi^{(l)}, \\
\frac{\partial \sigma_{rz}^{(l)}}{\partial r_l} + \frac{1}{r_l} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}^{(l)}}{\partial \varphi_l} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(l)}}{\partial z_l} + \frac{1}{r_l} \sigma_{rz}^{(l)} = -\omega^2 \rho(r_l) u_z^{(l)},
\end{gathered} \tag{10}$$

где $u_r^{(l)}$, $u_\varphi^{(l)}$, $u_z^{(l)}$ и $\sigma_{pq}^{(l)}$ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ и тензора напряжений в покрытии l – го цилиндра, у которых здесь и далее индекс j $(j = 1, 2)$, показывающий под воздействием какой плоской волны происходит деформация в покрытии, опущен для упрощения записи.

Используя соотношения, связывающие компоненты тензора напряжений с компонентами вектора смещения, запишем уравнения (10) через компоненты вектора смещения [3] в локальных цилиндрических координатах.

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ в неоднородном упругом покрытии l – го цилиндра будем искать в виде рядов Фурье

$$u_r^{(l)}(r_l,\varphi_l,z_l)=e^{i\alpha z_l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}U_{1n}^{(l)}(r_l)e^{in(\varphi_l-\varphi_0)},\quad u_\varphi^{(l)}(r_l,\varphi_l,z_l)=e^{i\alpha z_l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}U_{2n}^{(l)}(r_l)e^{in(\varphi_l-\varphi_0)},$$
$$u_z^{(l)}(r_l,\varphi_l,z_l)=e^{i\alpha z_l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}U_{3n}^{(l)}(r_l)e^{in(\varphi_l-\varphi_0)}. \tag{11}$$

Подставляя разложения (11) в уравнения (10), записанные через функции $u_r^{(l)}(r_l,\varphi_l,z_l)$, $u_\varphi^{(l)}(r_l,\varphi_l,z_l)$, $u_z^{(l)}(r_l,\varphi_l,z_l)$, получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{in}^{(l)}(r_l)$ $(i=1,2,3)$ для каждого n:

$$\hat{\mathbf{A}}_n^{(l)}\mathbf{U}_n^{(l)\prime\prime}+\hat{\mathbf{B}}_n^{(l)}\mathbf{U}_n^{(l)\prime}+\hat{\mathbf{C}}_n^{(l)}\mathbf{U}_n^{(l)}=0\qquad(l=\pm1,\quad j=1,2), \tag{12}$$

где $\mathbf{U}_n^{(l)}=\left(U_{1n}^{(l)}(r_l),U_{2n}^{(l)}(r_l),U_{3n}^{(l)}(r_l)\right)^T$; $\hat{\mathbf{A}}_n^{(l)}=(a_{npq})_{3\times3}$, $\hat{\mathbf{B}}_n^{(l)}=(b_{npq})_{3\times3}$, $\hat{\mathbf{C}}_n^{(l)}=(c_{npq})_{3\times3}$ — матрицы третьего порядка с элементами

$$a_{n11}^{(l)}=(\lambda+2\mu)\,r_l^2,\quad a_{n22}^{(l)}=a_{n33}^{(l)}=\mu r_l^2,\quad a_{npq}^{(l)}=0\ \ (p\neq q)\,,$$
$$b_{n11}^{(l)}=\left(\lambda'+2\mu'\right)r_l^2+(\lambda+2\mu)\,r_l,\quad b_{n12}^{(l)}=in\,(\lambda+\mu)\,r_l,\quad b_{n13}^{(l)}=i\alpha\,(\lambda+\mu)\,r_l^2,$$
$$b_{n21}^{(l)}=in\,(\lambda+\mu)\,r_l,\quad b_{n22}^{(l)}=\mu' r_l^2+\mu r_l,\quad b_{n23}^{(l)}=0,\quad b_{n31}^{(l)}=i\alpha\,(\lambda+\mu)\,r_l^2,\quad b_{n32}^{(l)}=0,$$
$$b_{n33}^{(l)}=\mu' r_l^2+\mu r_l,\quad c_{n11}^{(l)}=\lambda' r_l-\lambda-\left(n^2+2+\alpha^2r_l^2\right)\mu+\omega\rho r_l^2,$$
$$c_{n12}^{(l)}=in\left(\lambda' r_l-\lambda-3\mu\right),\quad c_{n13}^{(l)}=i\alpha\lambda' r_l^2,$$
$$c_{n22}^{(l)}=-\mu' r_l-n^2\lambda-\left(2n^2+\alpha^2r_l^2+1\right)\mu+\omega^2\rho r_l^2,\quad c_{n23}^{(l)}=-n\alpha\,(\lambda+\mu)\,r_l,$$
$$c_{n31}^{(l)}=i\alpha\left[\mu' r_l^2+(\lambda+\mu)\,r_l\right],\quad c_{n32}^{(l)}=-n\alpha\,(\lambda+\mu)\,r_l,$$
$$c_{n33}^{(l)}=-\left(n^2+2\alpha^2r_l^2\right)\mu-\alpha^2\lambda r_l^2+\omega^2\rho r_l^2,$$
$$\lambda=\lambda(r_l),\quad \mu=\mu(r_l).$$

Искомые функции $\Psi_{sj}^{(l)}$, $F_j^{(l)}$, $L_j^{(l)}$, $M_j^{(l)}$, $u_r^{(l)}$, $u_\varphi^{(l)}$, $u_z^{(l)}$ $(l=\pm1,\ j=1,2)$ должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на внешней поверхности неоднородного покрытия l – го цилиндра заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$\text{при } r_l=r_1\qquad -i\omega u_r^{(l)}=v_r,\quad \sigma_{rr}^{(l)}=-p,\quad \sigma_{r\varphi}^{(l)}=0,\quad \sigma_{rz}^{(l)}=0. \tag{13}$$

На внутренней поверхности покрытия l – го цилиндра при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\text{при } r_l=r_0\qquad u_r^{(l)}=u_{0r}^{(l)},\ u_\varphi^{(l)}=u_{0\varphi}^{(l)},\ u_z^{(l)}=u_{0z}^{(l)},\ \sigma_{rr}^{(l)}=\sigma_{0rr}^{(l)},\ \sigma_{r\varphi}^{(l)}=\sigma_{0r\varphi}^{(l)},\ \sigma_{rz}^{(l)}=\sigma_{0rz}^{(l)}, \tag{14}$$

где $\sigma_{0pq}^{(l)}$ — компоненты тензора напряжений в однородном l – ом цилиндре (индекс j опущен).

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_{0j}^{(l)}$ и тензора напряжений $\sigma_{0pq}^{(l)}$ в однородном упругом l – ом цилиндре запишем через функции $F_j^{(l)}$, $L_j^{(l)}$ и $M_j^{(l)}$, а компоненты тензора напряжений в неоднородном покрытии l – го цилиндра $\sigma_{pq}^{(l)}$ — через компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(l)}$ [3].

С помощью теоремы сложения для волновых цилиндрических функций [9] из первых двух граничных условий (13) получаем две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (при $i = 1$ и $i = 2$) относительно неизвестных коэффициентов $A_{jn}^{(l)}$ $(l = \pm 1)$

$$A_{jn}^{(l)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{inm}^{(-l,l)} A_{jm}^{(-l)} = S_{in}^{(l)} \quad (i = 1, 2; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad l = \pm 1), \tag{15}$$

где

$$\alpha_{1nm}^{(-l,l)} = \frac{J_n'(\beta r_1)}{H_n'(\beta r_1)} H_{m-n}(2\beta d) e^{i(m-n)(\varphi_{-l,l}-\varphi_0)}, \quad \alpha_{2nm}^{(-l,l)} = \frac{J_n(\beta r_1)}{H_n(\beta r_1)} H_{m-n}(2\beta d) e^{i(m-n)(\varphi_{-l,l}-\varphi_0)},$$

$$S_{1n}^{(l)} = -Ai^n \frac{J_n'(\beta r_1)}{H_n'(\beta r_1)} e^{i\beta dl \sin\varphi_0} - \frac{i\omega U_{1n}^{(l)}(r_1)}{\beta H_n'(\beta r_1)}, \quad S_{2n}^{(l)} = -Ai^n \frac{J_n(\beta r_1)}{H_n(\beta r_1)} e^{i\beta dl \sin\varphi_0} +$$

$$+ \frac{i}{\rho_1 \omega H_n(\beta r_1)} \left[(\lambda(r_1) + 2\mu(r_1))\, U_{1n}^{(l)\prime}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{r_1} \left(U_{1n}^{(l)}(r_1) + inU_{2n}^{(l)}(r_1) \right) + i\alpha\lambda(r_l) U_{3n}^{(l)}(r_l) \right],$$

$$\varphi_{-l,l} = \pi(2 - l)/2,$$

штрихи означают дифференцирование по аргументу функций.

Для решения бесконечных систем линейных уравнений (15) воспользуемся методом усечения [14]. Как и в [9] методом обратной матрицы найдем решения двух усеченных систем (15) при $i = 1$ и $i = 2$, выбрав порядок усечения N. Получим два выражения для коэффициентов $A_{jn}^{(l)}$, записанных через значения функций $U_{1n}^{(l)}(r_l)$, $U_{2n}^{(l)}(r_l)$, $U_{3n}^{(l)}(r_l)$ на внешней поверхности покрытия (при $r_l = r_1$). Приравнивая между собой эти выражения, получаем краевое условие при $r_l = r_1$ для нахождения решения системы дифференциальных уравнений (12).

Условия отсутствия касательных напряжений в (13) дают еще два краевых условия при $r_l = r_1$

$$\mathbf{V}_n^{(l)}(r_1)\mathbf{U}_n^{(l)\prime} + \mathbf{W}_n^{(l)}(r_1)\mathbf{U}_n^{(l)} = 0, \tag{16}$$

где

$$\mathbf{V}_n^{(l)}(r_1) = \left(v_{npq}^{(l)} \right)_{2\times 3}, \quad \mathbf{W}_n^{(l)}(r_1) = \left(w_{npq}^{(l)} \right)_{2\times 3};$$

$$v_{n11}^{(l)} = v_{n13}^{(l)} = v_{n21}^{(l)} = v_{n22}^{(l)} = 0, \quad v_{n12}^{(l)} = v_{n23}^{(l)} = \mu(r_1)$$

$$w_{n11}^{(l)} = in\mu(r_1)/r_1, \quad w_{n12}^{(l)} = -\mu(r_1)/r_1, \quad w_{n21}^{(l)} = i\alpha\mu(r_1),$$

$$w_{n13}^{(l)} = w_{n22}^{(l)} = w_{n23}^{(l)} = 0.$$

Из первых трех граничных условий (14) выразим неизвестные коэффициенты $B_{jn}^{(l)}$, $C_{jn}^{(l)}$, $D_{jn}^{(l)}$ через значения функций $U_{1n}^{(l)}(r_l)$, $U_{2n}^{(l)}(r_l)$, $U_{3n}^{(l)}(r_l)$ на внутренней поверхности покрытия (при $r_l = r_0$).

Получаем

$$\mathbf{K}_n^{(l)} = \left[\mathbf{T}_n^{(l)}(r_0) \right]^{-1} \mathbf{U}_n^{(l)} \quad (l = \pm 1), \tag{17}$$

где

$$\mathbf{K}_n^{(l)} = \left(B_{jn}^{(l)},\ C_{jn}^{(l)},\ D_{jn}^{(l)} \right)^T, \quad \mathbf{T}_n^{(l)}(r_0) = \left(t_{npq}^{(l)} \right)_{3\times 3};$$

$$t_{n11}^{(l)} = k_1 J_n'(k_1 r_0), \quad t_{n12}^{(l)} = i\alpha k_2 J_n'(k_2 r_0), \quad t_{n13}^{(l)} = ink_\tau J_n(k_2 r_0)/r_0,$$
$$t_{n21}^{(l)} = inJ_n(k_1 r_0)/r_0, \quad t_{n22}^{(l)} = -\alpha n J_n(k_2 r_0)/r_0, \quad t_{n23}^{(l)} = -k_\tau k_2 J_n'(k_2 r_0),$$
$$t_{n31}^{(l)} = i\alpha J_n(k_1 r_0), \quad t_{n32}^{(l)} = (k_\tau^2 - \alpha^2) J_n(k_2 r_0), \quad t_{n33}^{(l)} = 0.$$

Из последних трех граничных условий (14) находим

$$\mathbf{E}_n^{(l)}(r_0)\mathbf{U}_n^{(l)\prime}(r_0) + \mathbf{H}_n^{(l)}(r_0)\mathbf{U}_n^{(l)}(r_0) = \mathbf{G}_n^{(l)}(r_0)\mathbf{K}_n^{(l)} \quad (l = \pm 1), \tag{18}$$

где

$$\mathbf{E}_n^{(l)}(r_0) = \left(e_{npq}^{(l)}\right)_{3\times 3}, \quad \mathbf{H}_n^{(l)}(r_0) = \left(h_{npq}^{(l)}\right)_{3\times 3}, \quad \mathbf{G}_n^{(l)}(r_l) = \left(g_{npq}^{(l)}\right)_{3\times 3};$$

$$e_{n11}^{(l)} = \lambda(r_0) + 2\mu(r_0), \quad e_{n22}^{(l)} = e_{n33}^{(l)} = \mu(r_0), \quad e_{nij}^{(l)} = 0 \quad (p \neq q),$$
$$h_{n11}^{(l)} = \lambda(r_0)/r_0, \quad h_{n12}^{(l)} = in\lambda(r_0)/r_0, \quad h_{n13}^{(l)} = i\alpha\lambda(r_0),$$
$$h_{n21}^{(l)} = in\mu(r_0)/r_0, \quad h_{n22}^{(l)} = -\mu(r_0)/r_0, \quad h_{n23}^{(l)} = h_{n32}^{(l)} = h_{n33}^{(l)} = 0, \quad h_{n31}^{(l)} = i\alpha\mu(r_0),$$
$$g_{n11}^{(l)} = -\lambda_0 k_\eta^2 J_n(k_1 r_0) + 2\mu_0 k_1^2 J_n''(k_1 r_0), \quad g_{n12}^{(l)} = 2i\alpha\mu_0 k_2^2 J_n''(k_2 r_0),$$
$$g_{n13}^{(l)} = 2in\mu_0 k_\tau \frac{1}{r_0}\left[k_2 J_n'(k_2 r_0) - \frac{1}{r_0} J_n(k_2 r_0)\right], \quad g_{n21}^{(l)} = 2in\mu_0 \frac{1}{r_0}\left[k_1 J_n'(k_1 r_0) - \frac{1}{r_0} J_n(k_1 r_0)\right],$$
$$g_{n22}^{(l)} = -2\alpha n\mu_0 \frac{1}{r_0}\left[k_2 J_n'(k_2 r_0) - \frac{1}{r_0} J_n(k_2 r_0)\right],$$
$$g_{n23}^{(l)} = -\mu_0 k_\tau \left[k_2^2 J_n''(k_2 r_0) - k_2 \frac{1}{r_0} J_n'(k_2 r_0) + n^2 \frac{1}{r_0^2} J_n(k_2 r_0)\right],$$
$$g_{n31}^{(l)} = 2i\alpha\mu_0 k_1 J_n'(k_1 r_0), \quad g_{n32}^{(l)} = \mu_0 k_2 \left(k_\tau^2 - 2\alpha^2\right) J_n'(k_2 r_0), \quad g_{n33}^{(l)} = -\alpha n\mu_0 k_\tau J_n(k_2 r_0)/r_0.$$

Подставляя (17) в (18), получаем три краевых условия для системы (12) при $r_l = r_0$

$$\mathbf{E}_n^{(l)}(r_0)U_n^{(l)\prime}(r_0) + \mathbf{Y}_n^{(l)}(r_0)U_n^{(l)}(r_0) = 0 \quad (l = \pm 1), \tag{19}$$

где

$$\mathbf{Y}_n^{(l)}(r_0) = \mathbf{H}_n^{(l)}(r_0) - \mathbf{G}_n^{(l)}(r_0)\left[\mathbf{T}_n^{(l)}(r_0)\right]^{-1}.$$

Таким образом, для нахождения функций $U_{1n}^{(l)}(r_l)$, $U_{2n}^{(l)}(r_l)$ и $U_{3n}^{(l)}(r_l)$ $(l = \pm 1)$ для всех n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N)$ необходимо найти решение системы $6(2N+1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений (12), удовлетворяющих полученным выше краевым условиям. Построенная краевая задача может быть решена каким-либо численным или аналитическим методом.

Затем находим неизвестные коэффициенты $A_{jn}^{(l)}$, $B_{jn}^{(l)}$, $C_{jn}^{(l)}$ и $D_{jn}^{(l)}$ разложений (6) – (9) $(l = \pm 1;\ j = 1, 2;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N)$.

В результате на основании (4) – (6) получаем аналитическое описание акустического поля, рассеянного цилиндром с покрытием в присутствии плоскости

$$\Psi_s = \sum_{j=1}^{2} \sum_{l=\pm 1} e^{i\alpha z_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\pm A e^{-idl\beta \sin\varphi_0} i^n J_n(\beta r_l) + A_{jn}^{(l)} H_n(\beta r_l)\right] e^{in(\varphi_l - \varphi_0)}. \tag{20}$$

Отметим, что, используя полученное решение Ψ_{s1} дифракционной задачи для случая, когда падающая плоская волна имеет потенциал скорости Ψ_{01}, легко записать решение задачи дифракции плоской волны с потенциалом скорости Ψ_{02}. Для этого достаточно заменить компоненты волнового вектора $\mathbf{k_1}$ на компоненты вектора $\mathbf{k_2}$, если подстилающая плоскость является акустически жесткой, и дополнительно заменить амплитуду A на $-A$, если плоскость — акустически мягкая.

4. Численные исследования

На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты частотных и угловых характеристик рассеянного поля в дальней зоне.

Краевая задача для системы (12) решалась методом сплайн-коллокации [15]. Каждая функция $U_{1n}^{(l)}(r_l), U_{2n}^{(l)}(r_l), U_{3n}^{(l)}(r_l)$ представлялась в виде разложения по базисным B – сплайнам.

На большом удалении от цилиндра ($kr_l \geqslant 1$) справедливы соотношения

$$r_l \approx r - ld\sin\varphi, \quad \varphi_l \approx \varphi \quad (r >> d; \quad l = \pm 1). \tag{21}$$

Расчеты проводились по формуле (20) в основной системе координат (r, φ, z) с учетом (21) при $r = 100$ м.

Рассматривался алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м^2) радиуса $r_0 = 0,8$ м с покрытием толщиной 0,2 м, находящийся в полупространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 1000$ кг/м^3, $c = 1485$ м/с). Покрытие цилиндра выполнено на основе полимерного материала, неоднородного по плотности, с характерной плотностью $\tilde{\rho} = 1070$ кг/м^3 и характерными модулями упругости $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м^2 (поливинилбутираль). Расстояние от оси цилиндра до плоскости $d = 2$ м. Полагалось, что плоская звуковая волна единичной амплитуды падает на тело под углами $\theta_0 = \pi/4$ и $\varphi_0 = -\pi/6$. Механические характеристики материала неоднородного покрытия менялись по толщине слоя по законам

$$\rho = \tilde{\rho} f(r_{+1}), \qquad \lambda = \tilde{\lambda}, \qquad \mu = \tilde{\mu},$$

где

$$f(r_{+1}) = 0,75\left[\left(\frac{r_{+1} - r_0}{r_1 - r_0}\right)^2 + 1\right], \quad r_0 \leqslant r_{+1} \leqslant r_1.$$

На рис. 2 представлены частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $\left|\dfrac{\Psi_s}{A}\right|$ от волнового размера тела kr_1 в интервале $0 < kr_1 \leqslant 10$ ($\varphi = 5/6\pi$) в случае абсолютно жесткой подстилающей поверхности. Сплошная линия соответствует случаю упругого цилиндра с неоднородным упругим покрытием, пунктирная — упругому цилиндру без покрытия.

Сравнение частотных зависимостей показывает существенное влияние неоднородного покрытия на звукоотражающие свойства цилиндра. Это проявляется в смещении максимумов и минимумов коэффициента обратного отражения и изменении их уровней. Отличие частотных характеристик для тела с покрытием и без него возрастает с увеличением частоты падающей звуковой волны.

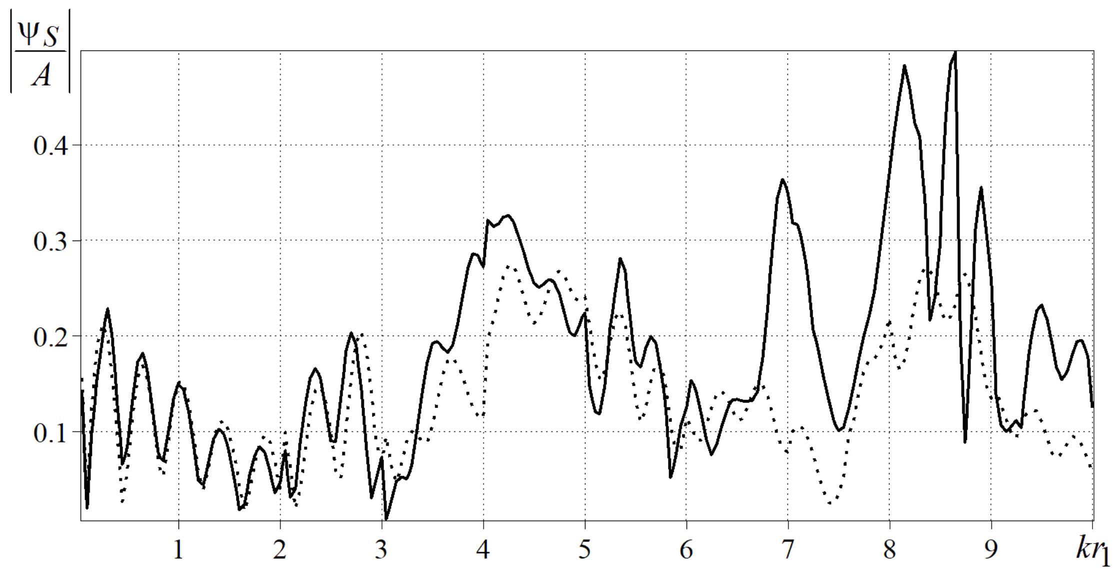


Рис. 2: Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра

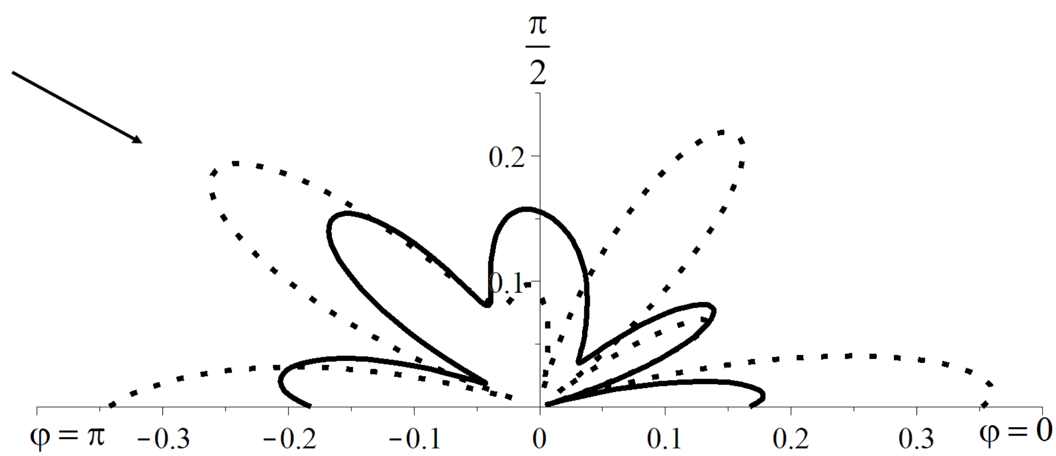


Рис. 3: Диаграммы направленности рассеянного поля

На рис. 3 представлены диаграммы направленности поля, рассеянного упругим цилиндром с однородным покрытием ($\rho = \tilde{\rho}$, $\lambda = \tilde{\lambda}$, $\mu = \tilde{\mu}$) при $kr_1 = 3$. Зависимости $\left|\dfrac{\Psi_s}{A}\right|$ от φ рассчитаны в плоскости xy. Сплошной линией изображена диаграмма для случая наклонного падения плоской волны ($\theta_0 = \pi/4$), а пунктирная линия соответствует случаю нормального падения ($\theta_0 = \pi/2$). Стрелкой показано направление падения плоской звуковой волны ($\varphi_0 = -\pi/6$).

Из рисунка видно, что диаграмма направленности при наклонном падении плоской волны на цилиндр существенно отличается от диаграммы, соответствующей нормальному падению.

5. Заключение

Выявлено существенное влияние непрерывно-неоднородных упругих покрытий на звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел. С помощью непрерывно-неоднородных покрытий можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. Такое покрытие можно реализовать с помощью дискретной системы тонких однородных упругих слоев, имеющих различные значения механических параметров (плотности и упругих постоянных).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.
2. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.
3. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.
4. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.
5. Ларин Н. В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с непрерывно-неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 6. С. 154-173.
6. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54-62.
7. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 4. С. 189-199.
8. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276-289.
9. Толоконников Л. А. Дифракции плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями // Чебышевский сборник, 2018. Т. 19. № 1. С. 238-254.
10. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
11. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
12. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 1994. 560 с.
13. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
14. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматлит, 1962. 708 с.
15. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.

REFERENCES

1. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.

2. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208, [in Russian].

3. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].

4. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.

5. Larin, N. V. 2017, "Diffraction of a plane acoustic wave on the thermoelastic cylinder with the continuously inhomogeneous covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 154-173, [in Russian].

6. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2014, "About definition of linear laws of heterogeneity of the cylindrical elastic layer having the least reflexion in the set direction at sound scattering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4, pp. 54-62, [in Russian].

7. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no 4, pp. 733-742.

8. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki* , no 9, pp. 276-289, [in Russian].

9. Tolokonnikov, L. A. 2018, "Diffraction of a plane sound waves on two elastic cylinders with non-uniform coatings", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no 1, pp. 238-254, [in Russian].

10. Shenderov, E. L. 1972, *"Wave problems of underwater acoustics"*, Sudostroenie, Leningrad, 352 p, [in Russian].

11. Ivanov, E. A. 1968, *"Diffraction of electromagnetic waves by two bodies"*, Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p.,[in Russian].

12. Sedov, L. I. 1994, *"Mechanics of a continuous medium"*, vol. 2, Nauka, Moscow, 560 p.,[in Russian].

13. Nowacki, W. 1975, *"Teoria sprezystosci"*, Mir, Moscow, 872 p.

14. Kantorovich, L. V. & Krilov V. I. 1962, *"Approximate methods of the superior analysis"*, Nauka, Moscow, 708 p.,[in Russian].

15. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980, *"Spline function methods"*, Nauka, Moscow, 352 p.,[in Russian].

Получено 10.06.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 669.537.7:621.357.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-382-395

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в металлических средах на основе концепции силовых линий

А. Н. Чуканов, В. А. Терешин, Е. В. Цой

Александр Николаевич Чуканов — доктор технических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
Валерий Алексеевич Терёшин — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: tereshin.va-tspu@yandex.ru
Евгений Владимирович Цой — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: tsoyev@tsput.ru

Аннотация

В данной статье на базе классических работ Г. Кирша, *K. Inglis*, Г. В. Колосова, Н. И. Мусхелишвили в рамках теории упругости и линейной механики разрушения продолжена разработка математического аппарата, который позволяет получать решения ряда трёхмерных задач механики разрушения в упрочнённой металлической среде.

Опираясь на работы *G. R. Irwin*, Г. И. Баренблатта, Вестергарда (*Westergaard*), Л. Д. Ландау, Е. М. Лившица авторы выполнили математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в объёме нагруженного стального образца в окрестностях пор различной морфологии, возникающих в результате эксплуатационных нагрузок и агрессивных воздействий окружающих сред.

Привлечение авторами представлений о силовых линиях поля напряжений в металлической среде позволило им разработать алгоритм определения компонент тензора напряжений около концентраторов в виде пор различной формы. Был рассмотрен стационарный случай при фиксированном соотношении величин внешнего напряжения и предела текучести металлической среды (стали). Разработана методика и создан математический аппарат для расчёта уравнений силовых линий для трёхмерного случая - «поры в форме сферической линзы». Предлагаемый подход подтвердил наличие в окрестностях поры зон, свободных от напряжений, и выявил связь их размеров с морфологией пор и внешним напряжением.

Ключевые слова: сталь, растяжение, пора, поле напряжений, силовые линии, тензор напряжений.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:

А. Н. Чуканов, В. А. Терешин, Е. В. Цой. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в металлических средах на основе концепции силовых линий // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 382–395.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 669.537.7:621.357.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-382-395

Mathematical modeling of the stress-strain state in metallic media based on the concept of force lines

A. N. Chukanov, V. A. Tereshin, E. V. Tsoi

Alexander Nikolaevich Chukanov — Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: alexchukanov@yandex.ru
Valery Alekseevich Tereshin — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: tereshin.va-tspu@yandex.ru
Evgeny Vladimirovich Tsoi — post-graduate student, Tula state pedagogical University named after L. N. Tolstoy (Tula).
e-mail: tsoyev@tsput.ru

Abstract

In this article, based on the classical works of G. Kirsch, K. Inglis, G. V. Kolosov, and N. I. Muskhelishvili, we continue to develop a mathematical apparatus that allows us to obtain solutions to a number of three-dimensional problems of fracture mechanics in a hardened metal medium.

Based on the work of G. R. Irwin, G. I. Barenblatt, Westergaard, L. D. Landau, and E. M. Livshits, the authors performed mathematical modeling of the stress-strain state in the volume of a loaded steel sample in the vicinity of pores of various morphologies resulting from operational loads and aggressive environmental influences. An algorithm for determining the components of the stress tensor near concentrators in the form of pores of various shapes is proposed for understanding the force lines of the stress field in a metallic medium. A stationary case with a fixed ratio of external stress and yield strength was considered.

Keywords: steel, tension, pore, stress field, force lines, stress tensor.

Bibliography: 22 titles.

For citation:
A. N. Chukanov, V. A. Tereshin, E. V. Tsoi, 2020, “Mathematical modeling of the stress-strain state in metallic media based on the concept of force lines”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 382–395.

1. Введение

В классических работах Г. Кирша, *K. Inglis*, Г. В. Колосова, Н. И. Мусхелишвили, *N.F. Mott* [1-6] был создан математический аппарат теории упругости, который позволил получить решения основных плоских задач механики разрушения, сыгравших большую роль в развитии теории квазихрупкого разрушения.

Благодаря дальнейшим исследованиям *G. R. Irwin*, Г. И. Баренблатта, *D. S. Dugdale*, Вестергарда (*Westergaard*), Л. Д. Ландау, Е. М. Лившица [7-11] напряженно-деформированного состояния (НДС) упругопластических сред с концентраторами напряжений в виде отверстий, пор и трещин развивались представления о распределении компонент поля напряжений около несплошностей различной морфологии в напряженной металлической среде. Несмотря на огромную значимость выполненных работ большая их часть была направлена на решение плоских задач. Разработка же математического аппарата для моделирования НДС металлических сред с порами и трещинами в плане их трёхмерного решения до сих пор продолжается.

В работах, посвящённых оценке влияния НДС в окрестностях объёмных несплошностей различной природы (пор, неметаллических включений, трещин), являющихся в металлической матрице концентраторами внутренних напряжений ценную информацию может дать использование представления о силовых линиях поля напряжений [12-14].

Опираясь на результаты вышеперечисленных исследователей и концепцию силовых линий поля напряжений авторы данной статьи выполнили математическое моделирование НДС в объёме нагруженного стального образца в окрестностях пор различной морфологии, возникающих в результате эксплуатационных нагрузок и агрессивных воздействий окружающих сред. Был рассмотрен стационарный случай при фиксированном соотношении величин внешнего напряжения и предела текучести стального образца.

Цель работы – разработка алгоритма численного расчёта компонент тензора напряжений в металлической среде в окрестностях пор правильной формы (цилиндр, сфера, сферическая линза) на основе методики математического моделирования и построения системы силовых линий поля напряжений.

Основная идея. Обоснование возможности использования концепции силовых линий для математического моделирования компонент поля напряжений в металлической среде и их численного расчёта в окрестностях концентраторов (пор различной морфологии).

2. Методика выполнения работы

Поставленную задачу решали путём: 1) разработки методики построения системы силовых линий, 2) вычисления описывающих их уравнений и 3) использования этих уравнений для решения трёхмерной задачи – описания полей напряжений в окрестностях пор в форме сферы и сферической двояковыпуклой линзы. Дополнительно авторы уточнили параметры зон пластичности в окрестностях пор и выявили связь зон, свободных от напряжений в окрестностях поры, с её геометрией и внешним напряжением.

Для построения системы силовых линий рассмотрели протяжённый металлический образец (длинный и достаточно толстый параллелепипед), к которому приложено внешнее растягивающее напряжение [15,16]. В образце имелась малая цилиндрическая пора, вытянутая в направлении, перпендикулярном оси параллелепипеда (рис. 1а).

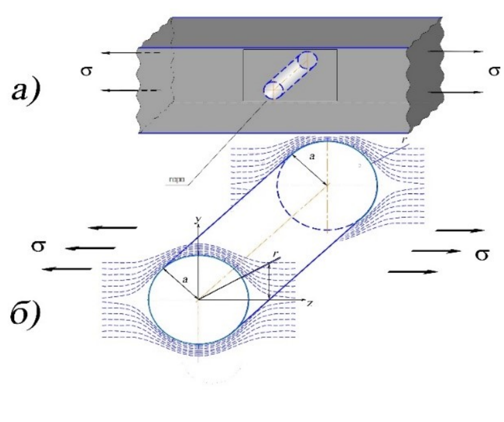


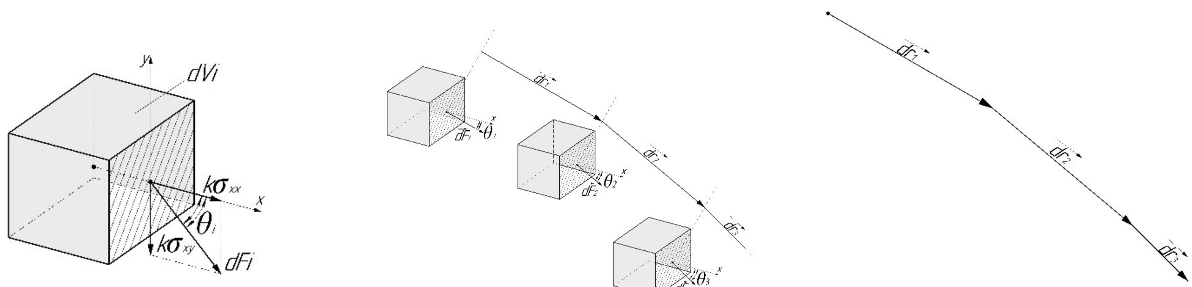
Рис. 1: цилиндрическая пора в растянутом металлическом образце (а); планарные координаты и силовые линии в сечении поры (б) [15].

Ось ox направлена вдоль оси образца (продольная координата), ось oy перпендикулярна его оси (поперечная координата). Ось ox физически выделена, так как она является ещё и осью направления действия внешних напряжений σ (рис. 1б). В плоскостях сечений, перпендикулярных оси образца (т.е., параллельных его оси), характеристики НДС зависят от координат x и y.

Рассматривали выделенный малый элемент объёма образца (микрообъём) dV_1 в виде куба, расположенного справа от внешней границы поры. Грани куба были перпендикулярны осям ox и oy (рис. 2).

Правую грань куба, перпендикулярную оси ox, называли главной гранью. На эту грань действовали силы упругости: нормальная $k\sigma_{xx}$ и касательная сила $k\sigma_{xy}$ (σ_{xx} и σ_{xy} – компоненты тензора напряжений, k – коэффициент пропорциональности (площадь грани)).

Допускали, что вид функций $\sigma_{xx}(x,y)$, $\sigma_{xy}(x,y)$ известен. Положительной силой $k\sigma_{xy}$ являлась сила, направленная в сторону увеличения oy. Результирующая сил $k\sigma_{xx}$ и $k\sigma_{xy}$ $\boldsymbol{dF}_1$ была направлена вниз под углом θ_1 к оси ox (рис. 2). На рис. 2 названные силы показаны стрелками, причём при изображении силы $k\sigma_{xy}$ учитывали, что эта сила отрицательна (опытный факт).



а) б) в)

Рис. 2: Силы $\sigma_{xx}(x,y)$ и $\sigma_{xy}(x,y)$, действующие на кубический микрообъём dV_i и их равнодействующая $\boldsymbol{dF}_i$ (а); кубические микрообъёмы в окрестности поры (б); суммарная силовая линия, составленная из векторов перемещений $\boldsymbol{dr}_i$для серии микрообъёмов dV_i (в).

Для перехода к следующему соседнему элементу dV_2, совершали малое перемещение $\boldsymbol{dr}_1$ в направлении угла θ_1. В отношении элемента dV_2 проводили аналогичные рассуждения и построения, определяя вектор $\boldsymbol{dF}_2$и угол θ_2, а затем совершали малое перемещение $\boldsymbol{dr}_2$ в направлении угла θ_2. После серии подобных шагов (переходов к новым микрообъёмам) получали цепочку векторов $\boldsymbol{dF}_1$, $\boldsymbol{dF}_2$, ..., $\boldsymbol{dF}_N$ и параллельных им перемещений $\boldsymbol{dr}_1$, $\boldsymbol{dr}_2$, ..., $\boldsymbol{dr}_N$. В случае предельно малых $\boldsymbol{dr}_i$ и больших $\boldsymbol{N}$ (количество результирующих векторов в цепочке) получали суммарную ломаную линию, составленную из цепочки векторов $\boldsymbol{dr}_1$, $\boldsymbol{dr}_2$, ..., $\boldsymbol{dr}_N$. Эту линию называли **силовой линией** (рис. 2) [15,16].

В соответствии с изложенным подходом в пространстве, окружающем пору, строили систему силовых линий, не пересекающихся между собой. На бесконечном удалении от поры они переходили в прямые, параллельные оси ox (рис. 1б). Полученная картина силовых линий представляла наглядный образ поля напряжений использованный далее в оценке НДС.

В дальнейшем обсуждении грани элементов dVi, обращённые в сторону роста оси «oy», не рассматривали, так как ось oy не являлась физически выделенной осью. Считали, что в этом направлении внешние силы на образец не действуют.

Построение цепочек векторов $\boldsymbol{dr}_1$, $\boldsymbol{dr}_2$, ..., $\boldsymbol{dr}_N$ начинали с некоторой точки (точка наблюдения) около поры. На бесконечном удалении от неё силовая линия переходила в прямую, параллельную оси Ox. Силовую линию, совпадающую при $z = \infty$ с осью Ox называли нулевой силовой линией. На бесконечном удалении от поверхности поры внешние силы, действующие на неё, считали равными нулю.

В случае более сложного силового воздействия на образец (например, двухосного растяжения) считали необходимым дополнительно учитывать силы, действующие и на другие грани кубического микрообъёма dV_i (например, одну из граней, перпендикулярных главной). В этом случае требуется использовать (построить) две системы силовых линий. В одной из них силовые линии на бесконечном удалении от поры превращаются в прямые, параллельные оси Ox, в другой - в прямые, параллельные оси Oy.

Привлечение понятия (образа) силовых линий поля внутренних напряжений позволило визуализировать и сделать физически более понятной процедуру определения его параметров поля (рассчитать компоненты тензора напряжений).

3. Экспериментальные результаты

В проведенном авторами исследовании построение системы силовых линий использовали для анализа характеристик поля внутренних напряжений в окрестностях пор близких по форме к порам правильной формы (цилиндр, сфера, сферическая линза, эллипсоид вращения). Исследуемую пору (вместе с её окрестностью) считали значительно более малым объектом по сравнению с размерами образца.

На первом этапе исследований объектом была пора в виде цилиндра в образце, находящемся под действием одноосного растягивающего напряжения. Для системы силовых линий в окрестностях такой поры наблюдается её аналогия с системой линий тока, используемых в описании процесса обтекания идеальной жидкостью длинного круглого цилиндра, ориентированного перпендикулярно вектору скорости жидкости, движущейся на пору из бесконечности [11,17,18]. На поверхности поры нормальная составляющая силы была равна нулю. Величины σ_{xx} и σ_{xy}считали аналогами векторов скорости жидкости v_xи v_y в ситуации с её течением [10].

Проводя аналогию между системами силовых линий и линий тока, ввели функции φ (функция потенциала) и ψ (функция тока. В случае цилиндрической поры, находящейся в среде с внешним напряжением σ_∞, действующим по оси ox, функция ψ имела вид (1)

$$\psi = y\left[1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right]. \tag{1}$$

Выражения для величин $\sigma_{xx} = \partial\psi/\partial y$ и $\sigma_{xy} = -\partial\psi/\partial x$ в этом случае принимали вид (2):

$$\sigma_{xx} = 1 + \frac{a^2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{2a^2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \tag{2}$$

При $x \to \infty$ считали справедливым $\sigma_{xx} = 1$. То есть, в выражении (2) под σ_{xx} и σ_{xy} понимали отношение истинных величин напряжений к номинальному действующему в образце напряжению σ равному внешнему растягивающему напряжению.

Третью компоненту тензора напряжений σ_{yy} определили с помощью уравнения статики $\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0$.

Выражение для компоненты σ_{yy} имело вид (3):

$$\sigma_{yy} = const\,(x) + a^2\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \tag{3}$$

Константу интегрирования, которая может быть функцией координаты x, подбирали так, чтобы получать ноль в случаях: 1) $y = a$, $x = 0$; 2) $y = 0$, $x = a$; 3) $x = \infty$.

Учитывая сказанное, уравнение силовой линии представили в виде выражения (1), приравненного к константе b.

$$\psi = b; \quad b = y\left[1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right]. \tag{4}$$

Константа b (далее — параметр b, которым характеризуется каждая отдельная силовая линия), имеет в соответствии с (4) смысл расстояния между силовой линией и осью ox при очень больших x (например, $x >> a$).

Помимо этого, можно учитывали следующее. Если в окрестности поры рассмотреть прямоугольную площадку размером $1 \times b_{fx}$, то в точке $z = \infty$ перпендикулярно оси Ox её пронизывает N силовых линий. В точке $z = 0$ эти же силовые линии будут пронизывать другую прямоугольную площадку размером $1 \times (y_{fx} - a)$. Тогда можно записать равенство (5)

$$n_\infty b_{fx} = \int_a^{y_{fx}} n\,(y)\,dy, \tag{5}$$

где $n(y)$ — функция плотности силовых линий, максимально изменяемая на площадках в точках, близких $z = 0$. В точке $z = \infty$ $n(y) = const = n_\infty$.

Рассмотренный пример относится к так называемому плоскому случаю. Подобный случай рассмотрен в гидродинамике как случай потенциального плоского течения жидкости [15,16]. В нём для функций φ и ψ выполнялись соотношения $\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$; $\partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$.

Приведенные авторами уравнения аналогичны условиям Коши – Римана в теории функции комплексного переменного, чем объясняется широкое применение комплексных функций в задачах гидродинамики и теории упругости (в гидродинамике плоского течения жидкости, в теории упругости, а также в теории прочности и разрушения при анализе плоско деформированного или плосконапряжённого состояния).

В данной работе, объектом приложения концепции силовых линий являлись поля напряжений около пор в форме сферы и двояковыпуклой линзы в металлической среде, подвергнутой внешнему одноосному растягивающему напряжению. Определение параметров поля напряжений около этих объектов в отличие от цилиндрической поры относится уже не к плоским, а к трёхмерным задачам. Переходя к их обсуждению, отмечали, что в трёхмерных случаях также можно применять функции φ и ψ, несмотря, на то, что они в трёхмерной задаче не подчиняются уравнениям Коши – Римана. Далее в рассуждениях использовали две цилиндрические координаты – координату z, вдоль которой направлена сила внешней нагрузки, и радиальную координату ρ. Третья координата α (угловая) являлась циклической. Начало координат находилось в центре исследуемого объекта (поры в форме сферы, двояковыпуклой линзы, эллипсоида вращения).

4. Обсуждение результатов эксперимента

4.1. Поле напряжений около поры в форме сферы (сферическая пора)

Анализируя НДС в окрестности поры в форме сферы (случай 1, рис.3), считали, что уравнение силовых линий имеет общие черты с уравнением (1).

На бесконечности силовые линии должны вырождаться в прямые, параллельные оси Oz. Следовательно, в уравнение силовой линии должен входить параметр b. Однако равенство $\psi = b$ не является очевидным.

Новое соотношение, подобное соотношению (5), записали в виде (6)

$$n_\infty \pi b_{fx}^2 \;\; = \;\; \int_a^{\rho_{fx}} n\,(\rho)\,2\pi\rho d\rho. \tag{6}$$

Сопоставляя (5) и (6), заключили, что функция силовой линии ψ должна иметь размерность $[b^2]$.

С учётом сказанного, составили уравнение силовой линии (7)

$$b^2 = \rho^2 \left[1 - \frac{a^4}{(\rho^2 + \ z^2)^2} \right]. \tag{7}$$

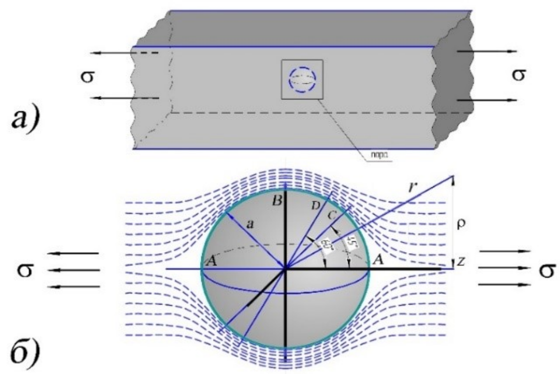


Рис. 3: Сферическая пора в растянутом образце (а); цилиндрические координаты и силовые линии у зон пластичности (б) [15].

Уравнение (7) описывает систему силовых линий в сечении, плоскость которого содержит ось Oz. На этой плоскости сферическая пора выглядит как окружность.

Функция ψ представляет собой правую часть уравнения (7). Рассматривая b^2 как переменную величину (одно из значений функции ψ), компоненты напряжения σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ определили в виде (8).

$$\sigma_{zz} = \partial b^2 / \partial \rho^2; \quad \sigma_{z\rho} = \sigma_{zz} \partial \rho / \partial z. \tag{8}$$

Согласно этим определениям, для компонент тензора напряжений получили выражения (9):

$$\sigma_{zz} = 1 + \frac{a^4 \left(\rho^2 - z^2\right)}{\left(\rho^2 + z^2\right)^3}; \quad \sigma_{z\rho} = \ -\frac{2a^4 \rho z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^3}. \tag{9}$$

Уравнения (9) показывают, что полюса сферической поры ($z = 0$, $\rho = a$) являются концентратами напряжения (точка А на рис. 3б). Величина σ_{zz} в этих точках в два раза больше номинального напряжения.

Используя уравнение статики (10)

$$\frac{\partial \sigma_{z\rho}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \sigma_{\rho\rho}\right) = 0, \tag{10}$$

разработали уравнения (11) для определения величины $\sigma_{\rho\rho}$

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{2}{3} \left[\frac{a}{\rho} - \frac{a^4}{(\rho^2 + z^2)^2} \right] + \frac{a^4 z^2}{15(\rho^2 + z^2)^3}. \tag{11}$$

Формула (11) верна при сравнительно малых z ($z < 0{,}5a$) и достаточно больших ρ ($\rho > 0{,}5a$). При использовании уравнения (10) константу интегрирования связывали с условием $z = 0$, $\rho = a$; $\sigma_{\rho\rho} = 0$.

Точки поля напряжений около поверхности поры с малыми z и заметными ρ представляли наибольший интерес для определения наличия и размеров зон пластичности около концентраторов напряжений в виде пор [18, 19].

4.2. Поле напряжений около поры в форме двояковыпуклой линзы (сферической линзы. Случай 2)

Пору в форме двояковыпуклой линзы рассматривали как область, образованную двумя пересекающимися сферами радиусов a и d (рис. 4). Параметрами поры являлись радиус периметра линзы d (половина габарита — $2d$ диаметр проекции линзы на плоскость, перпендикулярную $0z$) и толщина линзы в её центре $2h$. Ось линзы совпадала с направлением внешнего растягивающего напряжения [20-22].

Важным фактором, определяющим траектории силовых линий около описанной поры, являлась возможность их излома у кромки поверхности линзы. В качестве аксиомы приняли, что непосредственно у кромки поры-линзы силовая линия круто огибается, но не испытывает при этом излома.

а) б)

Рис. 4: Поэтапное представление поры в форме двояковыпуклой линзы (1) объединением сферических пор радиусов a (2) и d (3) (а); нулевая (2) и произвольная (3) силовые линии у поры (б) [20].

Первым этапом определения уравнения силовой линии для случая 2 являлось нахождение координат ρ силовой линии с параметром b при пересечении ею плоскостей z $= 0$ и $z = h$.

Выявление этих двух величин ρ, обозначаемых далее, как ρ_m и ρ_h,позволило составить уравнение силовой линии, проходящей через три точки (третья точка $\rho = b$ при $z = \infty$). При этом принимали во внимание следующие соображения.

1) Если на пути силовой линии с параметром b вместо поры - сферической линзы поместить пору-сферу радиусом d и тем же центром, то координата ρ_m будет равна ρ_1. Где ρ_1 – решение уравнения (7), в котором $z = 0$ и, вместо a использован радиус d. Величина ρ_1 является первым приближением при определении ρ_m. Уточнённое значение ρ_m будет меньше ρ_1, так как у кромки поры плотность силовых линий увеличена по сравнению с остальной её поверхностью.

2) Далее рассматривали точку $z = 0$, $\rho = \rho_1$. Если на пути силовой линии с параметром b вместо поры - сферической линзы поместить пору-сферу радиусом a с центром в точке $z = -L$ ($L = a - h$), то требуется определить уравнение и параметр b_1силовой линии, проходящей через точку $z = 0$, $\rho = \rho_1$. Для этого решали уравнение (7) относительно b, в котором в качестве ρ и z использовали ρ_1 и L.

Согласно перечисленным рассуждениям, величина ρ_m являлась решением системы приведенных ниже трёх уравнений, каждое из которых основывалось на выражении (7).

$$b^2 = \rho_1^2 \left[1 - \frac{d^4}{\rho_1^4}\right]; \quad b_1^2 = \rho_1^2 \left[1 - \frac{a^4}{\left(\rho_1^2 + L^2\right)^2}\right]; \quad b_1^2 = \rho_m^2 \left[1 - \frac{d^4}{\rho_m^4}\right].$$

Результатом решения этих уравнений являлась выражение (12):

$$\rho_m^2 = d^2 + \frac{d^2}{2a^2} + Bb^4, \quad B = \frac{3L^2d^2 + a^4}{8a^4d^2}. \tag{12}$$

При определении величины ρ_h считали, что в крайнем идеальном случае для поры в форме сферы (рис. 3б) её нулевая силовая линия $b = 0$ совпадает с осью Oz вплоть до встречи с поверхностью поры, где испытывает излом и дальше («раздваиваясь») обтекает пору по её поверхности. В этом случае при $b = 0$ выполняется $\rho_h = \rho_{h0} = 0$. При переходе от нулевой силовой линии к силовым линиям с малым b величина ${\rho_h}^2$ возрастает от 0 до $3b^2/4$. Для поры в форме линзы, считали, что при переходе от нулевой линии к линии с малым b величина ${\rho_h}^2$ также изменяется на $3b^2/4$.

Для линз средней кривизны (для которых $L,\ d,\ a$ сопоставимы между собой), в отличие от рассмотренного примера, нулевая силовая линия должна проходить через кромку линзы, не испытывая излома (исходный постулат). То есть, на отрезке $0 < z < h$ нулевая силовая линия не совпадает с поверхностью линзы. Считали, что наблюдается только касание силовой линией границы поры. В таком случае силовая линия должна пересекать плоскость $z = h$ в точке $\rho_{h0} > 0$. Рост величины ${\rho_h}^2$ считали происходящим почти линейно относительно b^2.

В случае линзообразных пор повышенной и высокой кривизны для силовых линий, последовательно удаляющиеся от oz и поверхности поры, рост ${\rho_h}^2$ (или рост b) считали почти линейным относительно b^2 (13):

$$\rho_h^2 = \rho_{h0}^2 + \frac{b^2}{C^2 + b^2}\left(\rho_m^2 - \rho_{h0}^2\right), \tag{13}$$

где C — постоянная, приблизительно равная d. При очень малых b ($b << h$) правая часть в формуле (13) стремится к выражению $\rho_{h0}^2 + 0,75b^2$.

В отношении величины ρ_{h0}^2 приняли следующие допущения. Нулевая силовая линия $\rho = \rho(z)$ испытывала перегиб при значении $z = z_\sim$, несколько превышающем h (рис. 4а). Превышение тем больше, чем больше отношение a/d. При $d = a$ (случай сферической поры) перегиб нулевой силовой линии происходил в точке $z = a$ (т.е., совпадал с точкой излома).

Среднее значение производной $d\rho/dz$ на интервале $01z_\sim$, как и в случае сферической поры, было равно – 1. При $L = 0$ приняли $\rho_{h0} = 0$, а при $L > a$ и $d > 0$ приняли $\rho_{h0} > d$. Исходя из этих соображений составили выражение (14) для ρ_{h0}.

$$\rho_{h0=Lha/d^2}. \tag{14}$$

В качестве проверки его работоспособности определили значения ρ_{h0}и ρ_{h0}/d для трёх разных величин d ($a = 1$). Результаты расчёта приведены в таблице 1.

d/a	0,800	0,707	0,600
ρ_{h0}/a	0,375	0,414	0,445
ρ_{h0}/d	0,469	0,586	0,741

Таблица 1: Значения ρ_{h0} и ρ_{h0}/d в зависимости от величины d (d/a)

Из таблицы видно, что значения ρ_{h0} заметно ниже своих d. Соблюдается тенденция увеличения ρ_{h0}/a и ρ_{h0}/d с уменьшением d/a. То есть существенно уменьшается площадь зоны, расположенной у поверхности поры под системой силовых линий. Зоны свободной от них, то есть – **зоны свободной от напряжений**.

В соответствии с принятым постулатом об отсутствии излома силовой линии, разработали уравнение для произвольной (не нулевой) силовой линии (рис. 4б) записали уравнение (15):

$$\rho^2 = \rho_m^2 - \frac{(\rho_m^2 - b^2)(\rho_m^2 - \rho_h^2) z^2}{(\rho_h^2 - b^2) h^2 + (\rho_m^2 - \rho_h^2) z^2}. \tag{15}$$

Для нулевой силовой линии справедливым считали уравнение (16):

$$\rho^2 = d^2 \frac{\rho_{h0}^2}{\rho_{h0}^2 h^2 + \left(d^2 - \rho_{h0}^2 z^{21}\right)}; \quad \frac{d\rho}{dz} = -\frac{z}{\rho} \frac{d^2 \left(d^2 - \rho_{h0}^2\right) \rho_{h0}^2}{\left[\rho_{h0}^2 h^2 + \left(d^2 - \rho_{h0}^2\right) z^2\right]^2}. \tag{16}$$

Все остальные (произвольные) силовые линии ($b > 0$) располагаются выше нулевой линии (рис. 4).

Используя уравнения (8) и (15) получили выражения (17) и (18) для вычисления компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{zz}^{-1} = \frac{\left[(1-\gamma_m)\left(\rho_m^2 - \rho_h^2\right) + (\gamma_h - \gamma_m)\left(\rho_m^2 - b^2\right)\right]\left(\rho_h^2 - b^2\right) h^2 + (1-\gamma_m)\left(\rho_m^2 - \rho_h^2\right)^2 z^2 - w}{\left[\left(\rho_h^2 - b^2\right) h^2 + \left(\rho_m^2 - \rho_h^2\right) z^2\right]^2} z^2, \tag{17}$$

$$\sigma_{z\rho} = \sigma_{zz} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_b = -\sigma_{zz} \frac{z}{\rho} \frac{(\rho_m^2 - b^2)(\rho_m^2 - \rho_h^2) z^2 (\rho_h^2 - b) h^2}{\left[(\rho_h^2 - b^2) h^2 + (\rho_m^2 - \rho_h^2) z^2\right]^2}, \tag{18}$$

где $w = (1-\gamma_h)(\rho_m^2 - \rho_h^2)(\rho_m^2 - b^2) h^2$ — слагаемое более низкого ранга, содержащее близкий к нулю множитель $(1-\gamma_h)$, в свою очередь $\gamma_h = d\rho_h{}^2/db^2$ — величина, близкая к 1.

Для точек на самой нулевой линии получили уравнения (19)и (20):

$$\sigma_{zz}^{-1} = \gamma_0 + \frac{\left[(1-\rho_0)\left(d^2 - \rho_{h0}^2\right) + (\gamma_h - \gamma_0) d^2\right] \rho_{h0}^2 h^2 + (1-\gamma_0)\left(d^2 - \rho_{h0}^2\right)^2 z^2 - (1-\gamma_h)\left(d^2 - \rho_{h0}^2\right) d^2 h^2}{\left[\rho_{h0}^2 h^2 + \ \left(d^2 - \rho_{h0}^2\right) z^2\right]^2} z^2 \tag{19}$$

$$\sigma_{z\rho} = -\sigma_{zz} \frac{z}{\rho} \frac{d^2 (d^2 - \rho_{h0}^2) \rho_{h0}^2 h^2}{\left[\rho_{h0}^2 h^2 + (d^2 - \rho_{h0}^2) z^2\right]^2. \quad (\gamma_0 = d^2/2a^2)}. \tag{20}$$

На основании вышеизложенного разработали алгоритм вычисления компонент тензора внутренних напряжений. Основные его шаги представлены ниже.

1. Задают параметр b_i из набора значений $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_N$. Для каждого b_i задают значение z_j из диапазона $z_1, z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_N$. ($b$ - расстояние между силовой линией и осью ox при очень больших x (например, $x >> a$).

2. С помощью уравнения нулевой силовой линии (16) и при использовании (12) –(14) определяют ρ_{ij}.

3. С помощью уравнений произвольной (15) и нулевой (16) силовых линий вычисляют компоненты тензора напряжений $(\sigma_{zz})_{ij}$ и $(\sigma_{z\rho})_{ij}$.

4. Данные о всех $(\sigma_{zz}\ \sigma_{z\rho})_{ij}$ перерабатывают и создают таблицу значений z$_i$, ρ_j, а также соответствующих им значений $(\sigma_{zz}\ \sigma_{z\rho})_{ij}$.

Замечание. Приведенный алгоритм считали более рациональным по сравнению с процедурой прямого определения величин σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ в заданных точках (анализ совокупности пар чисел z_i, ρ_i), заключающейся в определении параметра b_i силовой линии, проходящей через данную точку z_i, ρ_i), с помощью уравнений (12) – (15) нулевой и произвольной силовой линии и дальнейшей его подстановке в формулы (17) и (18) для определения σ_{zz}и $\sigma_{z\rho}$.

Важным результатом, полученным в работе при решении трёхмерной задачи на базе концепции силовых линий задачи с порой в форме сферической линзы, является подтверждение авторами факта отсутствия напряжений в некоторой зоне, прилегающей к поверхности поры у оси *oz*.

5. Выводы

1. Разработана методика построения систем силовых линий в нагруженных металлических средах.

2. Создан рациональный алгоритм для случая трёхмерного расчёта компонент тензора напряжений и координат границ зон пластичности в окрестностях пор различной морфологии.

3. Подтверждено наличие в окрестностях пор изученной морфологии зон свободных от напряжений.

4. Выявлена связь параметров зоны, свободной от напряжений в окрестностях поры, с морфологией поры и внешним напряжением.

6. Заключение

На базе концепции силовых линий и предложенной методики их построения разработан алгоритм математического моделирования и вычисления компонент тензора напряжений в окрестностях пор различной морфологии в напряженной металлической среде. Выполненное математическое моделирование позволило уточнить границы зон пластичности в нагруженных металлических образцах у структурных дефектов в виде пор и выявить в их окрестностях наличие зон, свободных от напряжений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc., ser. A. – 1920. – V. 221. – P. 163–198.
2. Irwin G.R. Fracture dynamics. Fracturing of metals // ASM, Cleveland. – 1948. – P. 147–166.
3. Orowan E.O. In: Proc. Symposium on internal stresses in metals and alloys // London: Institute of Metals. – 1948. – P. 451.
4. Mott N.F. Fracture of metals: theoretical considerations // Engineering. – 1948. – V. 165. – P. 16–18.
5. Irwin G.R. Relation of stresses near a crack to the crack extension force // In: Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., Brussels. – 1957. – V. 8. – P. 245–251.
6. Irwin G.R. Plastic zone near a crack and fracture toughness // 7th Sagamore Ardance Materials Research Conference. Syracuse: Syracuse Univ. Press. – 1960.
7. Irwin G.R. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. – 1957. – V. 24, No 3. – P. 361–364.
8. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – V. 8, No 2. – P. 100–108.
9. Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. – 1961. – № 4. – С. 3–56.
10. Разрушение (под ред. Г. Либовица), т. I—VII. – М.: Мир, 1973–1977.

11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10-ти т. Т. VII. Теория упругости. Уч. пособие. – М.: Наука, Гл. ред. физматлитературы, 1982, - 248 с.

12. Knott, J.F., Fundamentals of Fracture Mechanics, London: Butterworths, 1973.

13. Nadai, A., Theory of Flow and Fracture of Solids, New York: McGraw-Hill, 1950.

14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст] [Учебник для вузов по специальности "Механика"]. - 4-е изд., перераб. и доп. - Москва: Наука, 1973. - 847 с.

15. Чуканов А.Н., Терешин В.А. Силовые линии и алгоритм моделирований напряженно-деформированного состояния материала // «Современные проблемы и направления развития металловедения и термической обработки металлов и сплавов», посвящ. 150-летию со дня рожд. академика А.А. Байкова: Сб. научн. статей Межд. научно-техн. конф. (18.09.2020 г.)/ редкол.: Е.В. Агеев (отв. ред.) [и др.]; Юго-Зап. гос. ун-т. Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2020. - 271 с. - С. 241-244.

16. Чуканов А.Н., Терёшин В.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния материала на основе концепции силовых линий // Матер. межд. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная столетию со дня рождения профессоров Бориса Максимовича Бредихина, Василия Ильича Нечаева и Сергея Борисовича Стечкина».- 23-26.09. 20.-Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2020.- С.- (в печати).

17. Чуканов А.Н., Сергеев Н.Н., Терешин В.А., Ростовцев Р.Н., Яковенко А.А., Леонтьев И.М. Термодинамическое обоснование «метанового» механизма деструкции упрочненных конструкционных сталей при электролитическом наводороживании под напряжением // Деформация и разрушение материалов. 2015. № 10. С. 32–39.

18. Sergeev N.N., Chukanov A.N., Baranov V.P., Yakovenko A.A. Development of Damage and Decarburization of High-Strength Low-Alloy Steels Under Hydrogen Embrittlement // Metal Science and Heat Treatment. – 2015. - vol.57.- № 1-2.- P. 63-68.

19. Sergeyev N.N., Tereshin V.A., Chukanov A.N., Kolmakov A.G., Yakovenko A.A., Sergeyev A.N., Leontyev I.M., Khonelidze D.M., and Gvozdev A.E. Formation of Plastic Zones near Spherical Cavity in Hardened Low-Carbon Steels under Conditions of Hydrogen Stress Corrosion // Inorganic Materials: Applied Research, 2018, Vol. 9, No. 4, pp. 663–669.

20. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Яковенко А.А., Хонелидзе Д.М., Широкий И.Ф. Моделирование зон пластичности у газонаполненных пор в литых и порошковых сталях в условиях стресс-коррозии // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2018. - Т. 23. - № 122. - С. 314-319.

21. Чуканов А.Н. Морфология объёмных зон пластичности у газонаполненных пор в литых и порошковых сталях в условиях стресс-коррозии / А.Н. Чуканов, В.А. Терешин, А.Е. Гвоздев, С.Н. Кутепов, А.Н. Сергеев, Е.В. Агеев, А.А. Яковенко // Известия Юго-Западного государственного университета. - 2019; вып. 23(5). - С. 35-52.

22. Чуканов А.Н., Терешин В.А., Гвоздев А.Е., Шатульский А.А., Навоев А.П., Сергеев А.Н., Яковенко А.А., Кутепов С.Н., Цой Е.В. Эволюция зон пластичности в окрестности пор в сталях в условиях стресс-коррозии // Заготовительные производства в машиностроении.- 2020. - Т. 18. - №3.- С. 130-136.

REFERENCES

1. Griffith A.A. “The phenomenon of rupture and flow in solids”, Phil. Trans. Roy. Soc., ser. A.- 1920. - V. 221. - P. 163-198.

2. Irwin G. R. Fracture dynamics. Fracturing of metals / / ASM, Cleveland. - 1948. - P. 147-166.

3. Orowan E. O. In: Proc. Symposium on internal stresses in metals and alloys / / London: Institute of Metals. - 1948. - P. 451.

4. Mott N. F. Fracture of metals: theoretical considerations / / Engineering. - 1948. - V. 165. - P. 16-18.

5. Irwin G.R. Relation of stresses near a crack to the crack extension force // In: Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., Brussels. - 1957. - V. 8. - P. 245-251.

6. Irwin G. R. Plastic zone near a crack and fracture toughness / / 7th Sagamore Ardance Materials Research Conference. Syracuse: Syracuse Univ. Press. – 1960.

7. Irwin G.R. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. - 1957. - V. 24, No 3. - P. 361-364.

8. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits / / J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – V. 8, No 2. – P. 100–108.

9. Barenblatt G. I. Mathematical theory of equilibrium cracks formed during brittle fracture / / PMTF. - 1961. - no. 4. - C. 3-56.

10. Destruction (edited By G. Libowitz), vol. I-VII. - M.: Mir, 1973-1977

11. Landau L. D., Lifshits E. M. Theoretical physics. In 10 vols., Vol. VII. Theory of elasticity. Uch. manual. - M.: Nauka, GL. ed. Fizmatliteratury, 1982, - 248 p.

12. Knott, J.F., Fundamentals of Fracture Mechanics, London: Butterworths, 1973.

13. Nadai, A., Theory of Flow and Fracture of Solids, New York: McGraw-Hill, 1950.

14. Loitsyansky L. G. Mechanics of liquid and gas [Text] [Textbook for universities on the specialty "Mechanics"]. - 4th ed., reprint. Moscow: Nauka, 1973, 847 p.

15. Chukanov A. N., Tereshin V. A. Power lines and an algorithm for modeling the stress-strain state of a material / / "Modern problems and directions of development of metal science and heat treatment of metals and alloys vol. 150th anniversary of birth. academician A. A. Baikov: Sat. scientific. articles Intern. scientific and technical Conf. (18.09.2020) / ed.: E. V. Ageev (ed.) [et al.]; Yugo-Zap. state. UN-t. Kursk: Yugo-Zapad state University. UN-t, 2020. - 271 p. - P. 241-244.

16. Chukanov A. N., Tereshin V. A. Modeling of the stress-strain state of a material based on the concept of force lines // Materials of the international conference "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history dedicated to the centenary of the birth of professors Boris Maksimovich Bredikhin, Vasily Ilyich Nechaev and Sergey Borisovich Stechkin".- 23-26. 09. 20. - Tula, Tolstoy state pedagogical University, 2020. - p. (in print).

17. Chukanov A. N., Sergeev N. N., Tereshin V. A., Rostovtsev R.N., Yakovenko A. A., Leontiev I. M. Thermodynamic justification of the "methane"mechanism of destruction of reinforced structural steels during electrolytic hydrogenation under stress / / Deformation and destruction of materials. 2015. no. 10. Pp. 32-39.

18. Sergeev N. N., Chukanov A. N., Baranov V. P., Yakovenko A. A. Development of Damage and Decarburization of High-Strength Low-Alloy Steels Under Hydrogen Embrittlement / / Metal Science and Heat Treatment. - 2015. - vol. 57. - no. 1-2. - P. 63-68.

19. Sergeyev N.N., Tereshin V.A., Chukanov A.N., Kolmakov A.G., Yakovenko A.A., Sergeyev A.N., Leontyev I.M., Khonelidze D.M., and Gvozdev A.E. Formation of Plastic Zones near Spherical Cavity in Hardened Low-Carbon Steels under Conditions of Hydrogen Stress Corrosion // Inorganic Materials: Applied Research, 2018, Vol. 9, No. 4, pp. 663–669.

20. Chukanov A. N., Tereshin V. A., Gvozdev A. E., Sergeev A. N., Yakovenko A. A., Khonelidze D. M., Shirokiy I. F. Modeling of plasticity zones in gas-filled pores in cast and powder steels under stress-corrosion conditions // Bulletin of Tambov University. Series: Natural and technical Sciences, 2018, Vol. 23, No. 122, Pp. 314-319.

21. Chukanov A. N. Morphology of volume zones of plasticity in gas-filled pores in cast and powder steels under stress-corrosion conditions / A. N. Chukanov, V. A. Tereshin, A. E. Gvozdev, S. N. Kutepov, A. N. Sergeev, E. V. Ageev, A. A. Yakovenko // Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. - 2019; issue 23 (5). - Pp. 35-52.

22. Chukanov A. N., Tereshin V. A., Gvozdev A. E., Shatulsky A. A., Navoev A. P., Sergeev A. N., Yakovenko A. A., Kutepov S. N., Tsoi E. V. Evolution of plasticity zones in the vicinity of pores in steels under stress-corrosion conditions // Procurement production in mechanical engineering. - 2020. - Vol. 18. - No. 3. - Pp. 130-136.

Получено 10.06.2020
Принято в печать 22.10.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 511.464 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-396-421

О научных трудах Дмитрия Александровича Попова

В. М. Бухштабер, М. А. Королёв

Виктор Матвеевич Бухштабер — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (г. Москва).
e-mail: buchstab@mi-ras.ru
Максим Александрович Королёв — доктор физико-математических наук, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (г. Москва).
e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Аннотация

Настоящий очерк посвящён рассказу о жизни и научном творчестве замечательного российского математика Дмитрия Александровича Попова, отметившего свой 80-летний юбилей в августе 2019 г. Д.А. Попов внёс значительный вклад в математические основы рентгеновской, ультразвуковой и акустической томографии, теорию оценок осциллирующих интегралов, в задачи, связанные с распределением целых точек в круге на плоскости и в телах вращения. Особое место в очерке отводится недавним результатам юбиляра по проблемам связи спектра оператора Лапласа на фундаментальной области модулярной группы с распределением простых чисел.

Ключевые слова: рентгеновская томография, ультразвуковая томография, акустическая томография, осциллирующие интегралы, целые точки, проблема круга, спектр оператора Лапласа, простые числа.

Библиография: 31 название.

Для цитирования:
В. М. Бухштабер, М. А. Королёв. О научных трудах Дмитрия Александровича Попова // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 396–421.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 511.464 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-396-421

On the scientific works of Dmitry Alexandrovich Popov

V. M. Buchstaber, M. A. Korolev

Victor Matveevich Buchstaber — Corresponding member of RAS, Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: buchstab@mi-ras.ru

Maxim Aleksandrovich Korolev — doctor of physical and mathematical sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).

e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Abstract

The present essay tells about the life and the scientific creativity of the brilliant Russian mathematician Dmitry Aleksandrovich Popov, who has celebrated his 80th anniversary in August, 2019. D.A. Popov made a considerable contribution to the mathematical foundations of the X-ray, ultrasonic and acoustic tomography, to the theory of the oscillating integrals estimations and to the problems concerning the distribution of lattice points in the plain circle and in the bodies of rotation. A special attention is paid to the recent results of the anniversarian that demonstrate a connection between the spectrum of Laplace operator on the fundamental domain of modular group with the distribution of primes.

Keywords: X-ray tomography, ultrasonic tomography, acoustic tomography, oscillating integrals, lattice points, circle problem, Laplace operator spectrum, prime numbers.

Bibliography: 31 titles.

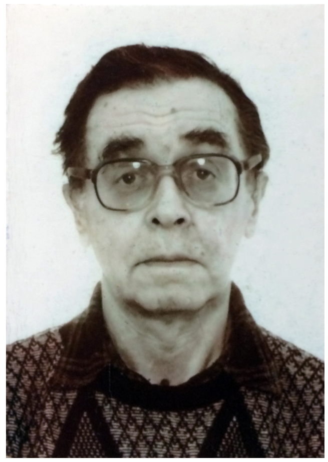
For citation:

V. M. Buchstaber, M. A. Korolev, 2020, "On the scientific works of Dmitry Alexandrovich Popov", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 396–421.

1. Введение

26 августа 2019 года исполнилось 80 лет замечательному учёному Дмитрию Александровичу Попову. Научная деятельность Дмитрия Александровича столь многогранна, что мы посчитали необходимым обратиться к нему с предложением самому рассказать о своих научных достижениях и дать им оценку относительно выдающихся результатов, полученных его предшественниками в разделах науки, в которые он внёс значительный вклад. Наш текст адресован широкой аудитории; он содержит библиографическую информацию и рассказ о творческом пути юбиляра. Изложение использует текст, подготовленный Д.А. Поповым и рассказ о необычных деталях его биографии. Нас связывает с Д.А. Поповым многолетняя дружба и научное сотрудничество. Мы были свидетелями блестящих его выступлений на семинарах и знаем мнение о его результатах крупных специалистов по всем научным проблемам, о которых идёт речь далее. Всё это, естественно, нашло отражение в нашем тексте.

Дмитрий Александрович родился 26 августа 1939 года в Москве, в семье Александра Ивановича Попова и Зои Дмитриевны Шляховой, уроженцев Тульской губернии. Дед по отцовской линии, Иван Павлович Попов, имел в начале XX столетия небольшую колбасную лавку в городе Ефремове. В годы НЭП'а он был арестован и приговорен к ссылке в Сибирь. До окончания срока ему, как неизлечимо больному раком, было разрешено вернуться домой, после чего, примерно через год, он ушёл из жизни. Это случилось в начале 1930-х гг. У Ивана Павловича и его жены Екатерины Сергеевны было пятеро сыновей и дочь. До своей смерти в 1954 г. Екатерина Сергеевна жила в семье Александра Ивановича.



Дмитрий Александрович Попов

Отец, Александр Иванович Попов (1907-1994), в конце 1920-х гг. перебрался в Москву, где стал работать на стройке. Одним из зданий, в строительстве которых он принимал участие, стал Государственный театр киноактера на ул. Воровского[1]. Позже, окончив курсы сварщиков, он устроился на работу на Перовский вагоноремонтный завод. Накопленный за время учебы и работы колоссальный опыт по сварке позволил ему, не имевшему на тот момент высшего образования (он получил его позже, в середине пятидесятых), стать начальником цеха. Перед самой войной Александра Ивановича перевели на работу в Министерство путей сообщения, и таким образом он не попал на фронт. В годы войны ему, как специалисту по сварке, пришлось столкнуться с одной задачей, имевшей оборонное значение. Составы, доставлявшие в действующую армию горючее, нередко попадали под вражеский обстрел. Как быстро залатать пробоины, которые получали при этом цистерны с горючим? Сливать остатки топлива и варить заплаты на стенки пустой цистерны невозможно: пары топлива тут же воспламенялись, что приводило к взрыву. Александр Иванович предложил метод ремонта цистерн без их очистки в полевых условиях и сам участвовал в первых испытаниях, что было сопряжено с определённым риском. По окончании войны Александр Иванович продолжал работать в Министерстве путей сообщения, у затем перешёл на работу в Центральное конструкторское бюро по ремонту вагонов при заводе Войтовича[2], где проработал в должности главного инженера до выхода на на пенсию. Свой опыт он изложил в ряде книг по сварочному процессу[3].

Мама, Зоя Дмитриевна Шляхова (1908-1979), происходила по отцовской линии из дворянского рода Шляховых. Её предки по матери принадлежали к старинному купеческому роду Ивановых. Один из её дядьёв ещё до революции получил инженерное образование в Европе и в годы советской власти занимался строительством элеваторов. Мамин отец, Дмитрий

[1]Современный адрес – ул. Поварская, 33. Изначально здание предназначалось под "Центральный дом каторги и ссылки для Всероссийского общества бывших политкаторжан и ссыльнопоселенцев". Однако в связи с ликвидацией последнего в июне 1935 г. в нём разместился кинотеатр "Первый". В 1945 г. здание было передано Государственному театру киноактёра. В настоящее время оно причислено к объектам культурного московского наследия.

[2]Московский завод по модернизации и строительству вагонов имени В.Е. Войтовича. Располагался по адресу: Москва, ш. Энтузиастов, 4.

[3]В их числе, например: *А.И. Попов, В.К. Куркин*, Стахановские методы сварки паровозных деталей. М.: Трансжелдориздат, 1942.

Шляхов, своё первое образование получил в Германии, где выучился на астронома. Как и многие образованные люди в те годы, он считал своим долгом послужить народу. С этой целью он впоследствии получил высшее юридическое образование и занял судейскую должность в Тульской губернии. Он утонул, пытаясь во время очередного судебного расследования переправиться верхом на лошади по плотине на другой берег реки, разлившейся во время весеннего паводка. Его супруга вскоре умерла от тифа, и Зоя Дмитриевна осталась круглой сиротой. Её взяла к себе на воспитания мамина тётя Мария Дмитриевна Воронова (тетя Маня). У Д.А. Попова сохранилась светлая память о тёте Мане и её муже Андрее Васильевиче.

Зоя Дмитриевна после рождения сына целиком посвятила себя его воспитанию. Благодаря доброте и стремлению всем помочь её дом был центром притяжения для всех многочисленных родственников и друзей.

Дом в Москве, в котором поселились Александр Иванович и Зоя Дмитриевна, находился на Брестской улице. В первый год войны во двор дома попала бомба, и одна из двух частей дома, более ветхая, обрушилась. Вторая, где находилась квартира Поповых, уцелела, однако дом было решено снести. В 1941 г. Поповы уехали в эвакуацию – сначала в д. Пёстровка Пензенской области, потом – в г. Куйбышев. Однако уже в 1942 г. сотрудникам Министерства, где работал отец, было разрешено вернуть своих родных в Москву. Тогда семья Дмитрия Александровича поселилась в ведомственном доме на Беговой улице.

До 9 класса Дмитрий Александрович учился в 146-й школе, которая располагалась на той же Беговой улице. Когда она закрылась, его перевели в расположенную гораздо дальше от дома 689-ю школу на Скаковой улице, которую и окончил в 1956 году. В школьные годы Дмитрий Александрович увлёкся химией, чему способствовал школьный учитель. Другим его увлечением стала физика, интерес к которой пробудился в 7 классе после того, как его друг и одноклассник Лев Регельсон (в будущем - известный религиозный диссидент) дал прочесть книгу А. Эйнштейна “Эволюция физики”[4]. Эта книга увлекла Дмитрия Александровича, хотя в ней было много непонятного.

В старших классах Дмитрий Александрович почувствовал вкус к математике и самостоятельно изучил дифференциальное и интегральное исчисление так, что мог находить максимумы и минимумы функций. Тем не менее по окончании школы Дмитрий Александрович решил поступать на химический факультет Московского университета.

Запомнился вступительный экзамен по математике. Экзаменатор дал несколько сложных задач, которые Дмитрий Александрович решил без труда. После этого он дал ещё одну задачу – построить треугольник по трём биссектрисам. Такое построение, как известно, невозможно[5]. Дмитрий Александрович этого не знал и попытался вывести формулы для длин сторон треугольника аналитически, после чего на их основе произвести построение. Эти усилия не увенчались успехом: доказать неразрешимость тогда не удалось, хотя он вплотную подошёл к этому утверждению. Увидев в абитуриенте ярко выраженные математические способности, экзаменатор принялся безуспешно уговаривать Дмитрия Александровича подать документы на мех-мат.

Во время обучения на химическом факультете интерес Д.А. Попова переместился в сторону теоретической физики, которую он освоил в рамках знаменитого курса Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. После этого он приступил к систематическому изучению математики. Процесс самообразования продолжился и по окончании университета и постепенно включил в себя изучение функционального анализа, топологии, высшей алгебры, теории чисел и современной дифференциальной геометрии.

---

[4] *А. Эйнштейн, Л. Инфельд*, Эволюция физики: развитие идей от первоначальных понятий до теории относительности и квантов. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

[5] См., например: *Ю.И. Манин*, О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки. Энциклопедия элементарной математики. Книга IV. Геометрия. М.: Физматлит, 1963, с. 205–227.

Дипломная работа Дмитрия Александровича была посвящена теории спектров одномерных кристаллов. После окончания университета Д.А. Попов в течение двух лет работал в Институте химической физики АН СССР, где занимался вопросами теории электронного парамагнитного резонанса в отделе Л.А. Блюменфельда.

В 1964 году, в связи с переводом отдела в Черноголовку, Д.А. Попов перешёл на работу во Всесоюзный научно-исследовательский институт источников тока (ВНИИТ), где и проработал до 1994 года, последовательно проходя должности младшего и старшего научного сотрудника, начальника лаборатории. ВНИИТ был режимным предприятием, но в нём существовал теоретический отдел, сотрудники которого пользовались относительной свободой. Работа в теоротделе оставляла много времени для самообразования и занятий наукой. Во время работы во ВНИИТ'е Д.А. Поповым были выполнены работы по теории полей Янга-Миллса[6], математическим вопросам томографии и оценкам осциллирующих интегралов.

В 1994 году по приглашению И.М. Гельфанда Д.А. Попов перешёл на работу в Институт физико-химической биологии имени А.Н. Белозерского МГУ, где и работает в настоящее время в должности старшего научного сотрудника.

Дмитрий Александрович оппонирует на защите докторской диссертации. 26 Декабря 2013 г.

Первые математические работы Д.А. Попова были посвящены некоторым задачам физико-химической гидродинамики [1]-[3]. По результатам этих работ была подготовлена кандидатская диссертация. Она была посвящена уравнениям в частных производных и, в частности, теории диффузионного пограничного слоя. Однако защита этой работы не состоялась в связи с ликвидацией на механико-математическом факультете МГУ кафедры физико-химической гидродинамики.

В начале восьмидесятых годов на мех-мате начал работать ряд семинаров по математическим проблемам современной физики. Д.А. Попов становится участником семинара под руководством тополога А.М. Виноградова, сокурсника академика С.П. Новикова. В ходе изучения теории Янга-Миллса Д.А. Поповым была дана формулировка этой теории на языке теории связностей в главных и векторных расслоениях и доказано, что гравитационное поле является полем Янга-Миллса [4], [5]. Эти результаты сразу привлекли внимание И.М. Гельфанда и Ю.И. Манина. И.М. Гельфанд пригласил Д.А. Попова выступить на его семинаре, а Ю.И. Манин посвятил изложению указанных результатов одну из своих лекций на

[6] Янг Чжэньни́н (р. 1922), китайский и американский физик; Роберт Лоуренс Миллс (1927-1999), американский физик.

механико-математическом факультете.[7] Они легли в основу защищённой в 1977 г. в МИАН им. В.А. Стеклова диссертации по специальности "Теоретическая и математическая физика". Инициатором защиты был С.П. Новиков.

В это же время в СССР начались работы по созданию рентгеновского томографа, и головным предприятием был выбран ВНИИТ. Внутри ВНИИТ'а основным исполнителем стал отдел, возглавляемый специалистом по математическим вопросам квантовой теории поля В.Н. Сушко, известным учеником Ф.А. Березина. Теоретическая лаборатория, начальником которой был Д.А. Попов, входила в этот отдел. В задачи лаборатории входило создание математической модели томографа, включая разработки алгоритмов восстановления и обработки томографических изображений. В процессе разработки алгоритмов восстановления возникли задачи, связанные с вычислением сингулярных сверток и равномерными оценками осциллирующих интегралов (О.И.)

Результаты Д.А. Попова по томографии были высоко оценены И.М. Гельфандом и С.Г. Гиндикиным и нашли отражение в опубликованных в США сборниках под их редакцией (см. [7], [9], [10]).

В 1994 г. И.М. Гельфанд решил организовать исследовательскую группу по проблемам томографии в университете г. Ратгерса (США) и предложил Д.А. Попову войти в эту группу. Дмитрий Александрович отказался, и тогда И.М. Гельфанд предложил ему перейти на работу в Московский государственный университет. Это предложение было с благодарностью принято. Переход в МГУ позволил Д.А. Попову продолжить занятия математикой. К этому времени его интерес переместился в сторону спектральной геометрии и теории чисел. В настоящее время он работает в Научно-исследовательском институте физико-химической биологии имени А.Н. Белозерского (который является одним из научных и образовательных подразделений МГУ) в должности старшего научного сотрудника и читает курс лекций "Численные методы в задачах обработки экспериментальных данных" студентам IV курса факультета биоинженерии и биоинформатики.

Полученные результаты о равномерных оценках осциллирующих интегралов легли в основу докторской диссертации Д.А. Попова. Инициатором защиты был А.А. Карацуба. Защита диссертации по специальности "Алгебра, математическая логика и теория чисел" состоялась в МИАН им. В.А. Стеклова 17 декабря 1998 г.

Наконец, нельзя не упомянуть, что в течение длительного ряда лет Дмитрий Александрович входил в руководство экспертным советом РФФИ по математике. Его научный авторитет и принципиальная позиция при принятии ответственных решений получили признание широкого круга математиков.

2. Математические вопросы рентгеновской томографии

С математической точки зрения, в рентгеновской томографии задача состоит в построении алгоритмов численного обращения преобразования Радона[8].

[7]Они вошли, в частности, в "Математическую энциклопедию", а также в ряд пособий по современной геометрии. См.: Математическая энциклопедия (под ред. И.М. Виноградова), Т.5 "Слу-Я". М.: "Советская энциклопедия", 1984. Стб. 1058-1060; *Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко*, Современная геометрия. Методы и приложения, М.: Наука, 1986, ч. I, §42, задача на с. 41; *С.П. Новиков, И.А. Тайманов*, Современные геометрические структуры и поля, М.: МЦНМО, 2005, пример 2 на с. 558 (в двух последних изданиях авторство результата не указано; в учебнике трех авторов он помещён с пометкой "извлечение из современных работ").

[8]Преобразование Радона — интегральное преобразование функции многих переменных, родственное преобразованию Фурье. Введено в 1917 г. в работе австрийского математика Иоганна Карла Августа Радона (1887-1956).

Пусть $\mu(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}=(x,y)$, – функция с компактным носителем ($\mu(\mathbf{r})\equiv 0$ при $|\mathbf{r}|\geqslant L/2$) вида

$$\mu(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{I} g_i(\mathbf{r})\chi_{D_i}(\mathbf{r}),$$

где χ_{D_i} – характеристическая функция области D_i и g_i – гладкие функции. Преобразование Радона $J(\varphi,q) = (\mathcal{R}\mu)(\varphi,q)$ – это интеграл функции $\mu(\mathbf{r})$ по прямой (φ,q) вида $\langle \mathbf{r},\boldsymbol{\eta}\rangle = x\cos\varphi + y\sin\varphi = q$. Формула обращения имеет вид

$$\mu(\mathbf{r}) = \bigl(\mathcal{R}^{-1}J\bigr)(\mathbf{r}) = (\mathcal{P}\Psi)(\mathbf{r}),$$

причем в этой формуле

$$(\mathcal{P}\Psi)(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Psi\bigl(\varphi,\langle \mathbf{r},\boldsymbol{\eta}\rangle\bigr)\,d\varphi,$$
$$\Psi(\varphi,a) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{+\infty}\bigl(2J(\varphi,a)-J(\varphi,a+t)-J(\varphi,a-t)\bigr)\frac{dt}{t^2}.$$

Таким образом, $\mathcal{R}^{-1}$ – это суперпозиция сингулярной свертки и обратной проекции $\mathcal{P}$.

В своем простейшем варианте (без учета статистических и систематических ошибок, которые учтены в математической модели [9]) задача состоит в восстановлении $\mu(\mathbf{r})$ при условии, что известны величины $J(\varphi_k,q_j)$,

$$\varphi_k = k\Delta\varphi, \quad k=0,1,\dots,2N_\varphi-1, \quad \Delta\varphi=\frac{\pi}{N_\varphi},$$
$$q_j = j\Delta q, \quad j=0,\pm1,\pm2,\dots, \quad L\Delta\varphi=\Delta q.$$

При этом практический интерес представляют только алгоритмы высокого разрешения, позволяющие локализовать границы ∂D_i с точностью $\sim\Delta q$. Само существование таких алгоритмов является нетривиальным фактом.

Алгоритм A свертки и обратной проекции (также в своём простейшем варианте) имеет вид

$$\mu^A(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N_\varphi-1}\Psi^A(\varphi_k,\langle \mathbf{r},\boldsymbol{\eta_k}\rangle)\Delta\varphi, \quad \boldsymbol{\eta_k}=(\cos\varphi_k,\sin\varphi_k),$$
$$\Psi^A(\varphi_k,a) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}H^A(a-q_j)J(\varphi_k,q_j)\Delta q.$$

В последней формуле $H^A(s)$ – некоторая регуляризация обобщенной функции $(2(\pi s)^2)^{-1}$ и

$$\widehat{H}^A(\lambda) = \frac{|\lambda|}{2\pi}R^A(\lambda), \quad R^A(\lambda) = \Omega S^A(\xi), \quad \xi=\lambda\Omega^{-1}, \quad \Omega=\pi/\Delta q,$$

где $\widehat{H}^A(\lambda)$ – преобразование Фурье функции $H^A(s)$, причём величина $S^A(\xi)$ достаточно быстро убывает при $\xi\to+\infty$, и $S^A(\xi)\sim 1$ при $|\xi|<1$. Такой вид функции $R^A(\lambda)$ связан с требованием высокого разрешения.

Результат восстановления $\mu^A(\mathbf{r})$, таким образом, зависит от одного малого параметра Δq. Естественно возникает вопрос о сходимости $\mu^A(\mathbf{r})$ к $\mu(\mathbf{r})$ при $\Delta q\to 0$. Для обеспечения сходимости надо решить вопрос о построении сходящихся квадратурных формул для вычисления интеграла $\Psi^A(\varphi,q)$, в котором подынтегральная функция сингулярным образом зависит от шага дискретизации Δq.

Теория построения алгоритмов высокого разрешения для вычисления сингулярных свёрток заложена в совместных работах Д.А. Попова и его ученика Д.В. Сушко (см. [6], [10]). В них доказаны условия на регуляризатор $R^A(\lambda)$, обеспечивающие сходимость. В рассматриваемом случае эти условия имеют вид $S^A(2p) = 0$, $p = \pm 1, \pm 2, \dots$ (величина $S^A(\xi)$ определена выше). Сходимость алгоритма A доказана в работах [7], [8], [13].

Ошибка восстановления $\Delta\mu^A(\mathbf{r}) = \mu^A(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r})$ может быть представлена в виде

$$\Delta\mu^A(\mathbf{r}) \,=\, \Delta\mu^A_R(\mathbf{r}) \,+\, \Delta\mu^A_T(\mathbf{r}),$$

где $\Delta\mu^A_R(\mathbf{r})$ – ошибка регуляризации, $\Delta\mu^A_T(\mathbf{r})$ – ошибка дискретизации. Для доказательства достаточно рассмотреть случай $\mu(\mathbf{r}) = \chi_D$. Доказательство сходимости алгоритма A основано на представлении величины $\Delta^A_T(\mathbf{r})$ в виде двойного ряда трехмерных О.И. и в случае $\mu(\mathbf{r}) = \chi_D$

$$\Delta\mu^A_T(\mathbf{r}) \,=\, \frac{i\Omega}{2\pi} \sum_{m,n\neq 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} d\xi \int_{\partial D} ds\, e^{-i\Omega\Phi_{n,m}(\varphi,\xi,s)} u_n(\varphi,\xi).$$

Скорость поточечной сходимости характеризуется показателем сходимости $\sigma^A(\mathbf{r})$ таким, что

$$\left|\mu^A(\mathbf{r}) \,-\, \mu(\mathbf{r})\right| \,=\, O(\Omega^{-\sigma^A(\mathbf{r})}), \quad \Omega \to +\infty.$$

Ограничимся случаем, когда ∂D – гладкая кривая. Обозначим через $T(\partial D)$ объединение касательных к ∂D, $T_0(\partial D) = \cup_i T(s_i^0)$ – объединение касательных, проведенных через точки уплощения $\mathbf{r}(s_i^0)$ и p_i – порядок точки уплощения, т.е. $\kappa(s_i^0) = \ldots = \kappa^{(p_i-1)}(s_i^0) = 0$, $\kappa^{(p_i)}(s_i^0) \neq 0$, где $\kappa(s)$ – кривизна ∂D в точке $\mathbf{r}(s)$.

В работе [13] доказано, что при $\mathbf{r} \notin \partial D$

$$\sigma^A(\mathbf{r}) \,=\, \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \mathbf{r} \in T(\partial D), \mathbf{r} \notin T_0(\partial D), \\ \dfrac{1}{p+1}, & \mathbf{r} \in \cup_i T(s_i^0), p = \max p_i, \\ \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{q+2}, & \mathbf{r} \notin T(\partial D), \end{cases}$$

где q – максимальный порядок нуля функции $f(s) = \dfrac{d}{ds}\langle \mathbf{r}, d\mathbf{r}/ds\rangle$.

Приведённый результат основан на доказанных в работе [11] равномерных оценках О.И. Указанные асимптотические оценки являются следствием соответствующих неравенств, имеющих место для конечных Δq. Доказательство основано на том, что фазы $\Phi_{n,m}(\varphi,\xi,s)$ как функции (φ,ξ) имеют только невырожденные критические точки и, следовательно, все особенности фаз $\Phi_{n,m}(\varphi,\xi,s)$ имеют тип A_k по классификации, принятой в теории особенностей.

Алгоритм A не является трансляционно инвариантным и геометрия артефактов на томограмме (т.е. ошибок $\Delta\mu^A(\mathbf{r})$) связана с геометрией обобщенных педальных кривых, задаваемых для контура ∂D уравнениями

$$\mathbf{r}^{\pm}_{\gamma}(s) \,=\, \mathbf{r}(s) - \frac{d\mathbf{r}}{ds}\langle \mathbf{r}(s), \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s)\rangle \,\pm\, \gamma\frac{d\mathbf{r}}{ds}(s), \quad \gamma = \frac{Lm}{n}.$$

Эти кривые входят в каустики фаз $\Phi_{n,m}$.

Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными. В работах [7]-[9], [13] дано математически строгое обоснование рентгеновской томографии, а построенная в них математическая модель позволяет проектировать рентгеновские томографы.

На Конференции по теории чисел и приложениям в честь 80-летия А.А. Карацубы. 25 мая 2017 г.

3. Равномерные составные оценки осциллирующих интегралов

Осциллирующие интегралы – это интегралы вида

$$J_n = J_n[u|\Omega] = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x})e^{i\Omega\Phi(\mathbf{x})}d\mathbf{x}.$$

По традиции, гладкие функции $u(\mathbf{x})$ и $\Phi(\mathbf{x})$ называются, соответственно, амплитудой и фазой; вещественный параметр Ω неограниченно возрастает: $\Omega \to +\infty$.

Для приложений необходимо знать, окрестности каких точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ вносят наибольший вклад в величину J_n. В одномерном случае такими "особыми" точками будут нули производной $\Phi'(x)$. Вклад от такой точки определяется, грубо говоря, порядком роста наименьшей по порядку производной $\Phi(x)$, отличной в этой точке от нуля. Соответствующие утверждения давно и успешно применяются в различных областях математики и, в частности, аналитической теории чисел (Й.Г. ван дер Корпут, И.М. Виноградов и др.).

При $n \geqslant 2$ картина оказывается более сложной. Как и в одномерном случае, здесь приходится исследовать критические точки, в которых обращается в ноль градиент функции $\Phi(\mathbf{x})$, т.е. вектор

$$\operatorname{grad}\Phi = \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right\}.$$

Однако определяющую роль играет и гессиан $H(\Phi)$ функции $\Phi(\mathbf{x})$, т.е. определитель матрицы

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,\,j=1}^{n}.$$

Если в особой точке гессиан отличен от нуля (невырожденная критическая точка), то в силу леммы Морса в окрестности такой точки с помощью гладкой замены переменных функция $\Phi(\mathbf{x})$ приводится к квадратичной форме канонического вида и вопрос об асимптотическом вкладе особой точки в интеграл J_n решается сравнительно просто. Гораздо более сложным оказывается случай, когда в особой точке гессиан обращается в нуль. Однако и здесь вопрос об асимптотическом вкладе в J_n в принципе решён, в рамках теории особенностей.

Совсем иначе обстоит дело с равномерными оценками О.И., которые наиболее важны для приложений. Именно этой, очень трудной проблеме, и посвящён ряд работ Д.А. Попова.

В статье [11] рассматривается следующая постановка задачи о равномерной оценке О.И. Пусть задан О.И.

$$J_n[u|\mathbf{t},\Omega] = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}) e^{i\Omega\Phi(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

в котором как фаза $\Phi(\mathbf{x})$, так и амплитуда $u(\mathbf{x})$ зависят от m-мерного параметра $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m)$, $\mathbf{t} \in T \subset \mathbb{R}^m$. Требуется построить разбиение $T = \bigcup_i T_i(\Omega)$ такое, что при $t \in T_i(\Omega)$, $\Omega > \Omega_i(\mathbf{t})$ и любом $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства

$$\bigl|J_n[u|\mathbf{t},\Omega]\bigr| \leqslant C_i(u,\mathbf{t})\,\Omega^{-\alpha_i+\varepsilon}, \quad \alpha_i > 0,$$

в которых явно указаны константы $C_i(u,\mathbf{t})$. При этом такие оценки должны быть асимптотически точными для любого $t \in T \setminus \mathcal{K}^h$, где $\mathcal{K}^h$ – узкая (ширины $h \sim \Omega^{-\beta}$, $\beta > 0$) окрестность каустики $\mathcal{K} \subset T$ и равномерно (по $\mathbf{t}$) асимптотически точными при $\mathbf{t} \in \mathcal{K}^h$. Принципиальным является то, что указанное разбиение $T = \bigcup_i T_i(\Omega)$ зависит от Ω. Такая постановка задачи является новой и отличается от принятой в теории особенностей. Полученные оценки позволяют, в частности, рассматривать оценки бесконечных рядов О.И., что было необходимо для решения задач п. 1.

Существование нужного разбиения $T = \bigcup_i T_i(\Omega)$ неочевидно и требует доказательства. В простейшем случае интеграла Эйри, для которого $\Phi(x,t) = \frac{1}{3}\,x^3 - tx$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ получаемые оценки имеют вид

$$\bigl|J_n[u|t,\Omega]\bigr| \leqslant \begin{cases} C_1(u)\,t^{-1/4}\Omega^{-1/2}, & C\Omega^{-2/3} < t \leqslant 1, \\ C_2(u)\,\Omega^{-1/3}, & 0 \leqslant t \leqslant C\Omega^{-2/3}. \end{cases}$$

В случае интеграла Пирси ($\Phi(x,t) = \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{2}\,ax^2 + bx$) получаемое разбиение включает в себя 6 областей и не во всех из них оценки определяются вкладом критических точек.

В работе [11] задача получения равномерных составных оценок решена для фаз, все особенности которых имеют тип A_k. Случаи особенностей $D_4^\pm, D_5^\pm$ рассмотрены в работе [20]. Уже для особенностей $D_4^\pm$ речь идёт о построении двумерного аналога известных равномерных оценок одномерных О.И., принадлежащих И.М. Виноградову и Й.Г. ван дер Корпуту. В то время обсуждался результат И. Колен де Вердьера, в котором были заявлены равномерные оценки О.И. с простыми или параболическими особенностями. Этот результат состоит в том, что для простых или параболических особенностей оценки, соответствующие невырожденным критическим точкам, верны вплоть до каустики. С такой формулировкой он вошёл в известную книгу В.И. Арнольда, А.Н. Варченко и С.М. Гусейн-Заде[9]. Д.А. Попов показал, что результат Колен де Вердьера неверен уже для интегралов Пирси. Он обсудил этот результат с В.И. Арнольдом, который признал, что это стало для него сюрпризом. Итогом обсуждения стало появление комментария Д.А. Попова в сборнике задач Арнольда[10]. Полученные в [11] оценки до сих пор превосходят по точности все известные оценки для интеграла Пирси и преобразования Фурье характеристических функций двумерных областей.

Приложение полученных оценок в задаче томографии было рассмотрено выше. О других приложениях будет сказано в п.п. 3, 4.

[9] *В.И. Арнольд, А.М. Варченко, С.М. Гусейн-Заде*, Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984.

[10] См.: Arnold's Problems, V.I. Arnold (ed.). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York & PHASIS, Moscow, 2005; комментарий к задаче № 3 под 1981 г.

4. Сферическая сходимость интегралов и рядов Фурье индикаторов областей

В работе [12] рассмотрена задача о поточечной сходимости общих сферически-симметричных методов суммирования интегралов и рядов Фурье характеристических функций двумерных областей. Ограничимся результатами о методе суммирования по шарам.

Сформулируем рассматриваемую задачу для интеграла Фурье в N-мерном случае. Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $f(\mathbf{x})$ – её характеристическая функция и

$$\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) \,=\, \int_D e^{i\langle\boldsymbol{\omega},\mathbf{x}\rangle} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Результатом суммирования по шарам является функция

$$f_\Omega(\mathbf{x}) \,=\, \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{|\boldsymbol{\omega}|<\Omega} e^{-i\langle\boldsymbol{\omega},\mathbf{x}\rangle} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}.$$

Задача состоит в исследовании зависимости от $\mathbf{x}$ ошибки восстановления

$$\Delta_\Omega(\mathbf{x}) = |f_\Omega(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|.$$

Ниже привлечены только асимптотические результаты (при $\Omega \to +\infty$), хотя в работе [11] при $N = 2$ содержатся оценки $\Delta_\Omega(\mathbf{x})$ при конечных Ω. В двумерном случае приведённые ниже результаты основаны на равномерных оценках величины $|f_\Omega(\mathbf{x})|$, полученных в работе [11].

При $\Omega \to +\infty$ задача состоит в исследовании зависимости от $\mathbf{x}$ показателя сходимости $\sigma(\mathbf{x})$, такого, что при $\mathbf{x} \notin \partial D$

$$|\Delta_\Omega(\mathbf{x})| \,=\, O\big(\Omega^{-\sigma(\mathbf{x})}\big), \quad \Omega \to +\infty.$$

Приведём некоторые результаты, полученные в [12] для двумерного случая.

Пусть граница ∂D состоит из конечного числа гладких дуг, имеющих точки уплощения $\mathbf{r}(s_i^0)$ порядка p_i. Особые точки эволюты Γ – это образы вершин $\mathbf{r}(s_\alpha)$, точек, где кривизна $\kappa(s)$ имеет экстремум порядка j_α ($\kappa^{(1)}(s_\alpha) = \ldots = \kappa^{(j_\alpha - 1)}(s_\alpha) = 0$, $\kappa^{(j_\alpha)}(s_\alpha) \neq 0$). Пусть, далее, $\Gamma_0 \in \Gamma$ – множество особых точек эволюты. В работе [12] доказано:

1) если из точки $\mathbf{r}$ можно опустить нормаль на ∂D, то $\sigma(\mathbf{r}) = 1$, если $a \notin \Gamma$, $\sigma(\mathbf{r}) = \frac{5}{6}$, если $a \in \Gamma, a \notin \Gamma_0$, и $\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} + 1/(j(\mathbf{r}) + 2)$, если $a \in \Gamma_0$ (здесь $j(\mathbf{r}) = \max_\alpha j_\alpha(\mathbf{r})$);

2) если контур ∂D – кусочно-гладкий и из точки $\mathbf{r} \notin \partial D$ нельзя опустить нормаль на ∂D, то $\sigma(\mathbf{r}) = \frac{3}{2}$;

3) $\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}$ только если D – круг и $\mathbf{r}$ – его центр.

В работе [12] рассмотрен и случай, когда ∂D содержит отрезки прямых.

В случае ряда Фурье предполагается, что $\partial D \in [\pi, \pi]$ и $f^T(\mathbf{x})$ – результат периодического продолжения характеристической функции D. В результате суммирования по шарам получаем функцию

$$f_\Omega^T(\mathbf{r}) \,=\, \sum_{|\mathbf{n}|<\Omega} a_\mathbf{n} e^{i\langle\mathbf{n},\mathbf{r}\rangle}, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2), \quad a_\mathbf{n} \,=\, \frac{1}{4\pi^2}\, \hat{f}(-\mathbf{n}), \quad \mathbf{r} \in [\pi, \pi]^2$$

и показатель сходимости $\sigma^T(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \notin \partial D$, определяется из условия

$$|\Delta_\Omega^T f(\mathbf{r})| \,=\, \big|f_\Omega^T(\mathbf{r}) \,-\, f^T(\mathbf{r})\big| \,=\, O\big(\Omega^{-\sigma^T(\mathbf{r})}\big), \quad \Omega \to +\infty.$$

Задача получения аналогичных оценок для двумерного ряда Фурье сталкивается с двумя трудностями. Во-первых, величины $\Delta_\Omega^T f(\mathbf{r})$ теперь представляются в виде двойного ряда О.И. Во-вторых, аналог эволюты может всюду плотно покрывать квадрат $[\pi, \pi]^2$.

При указанных выше условиях на ∂D в [12] доказано, что $\sigma^T(\mathbf{r}) \geqslant \frac{1}{2}$. При дополнительных предположениях этот результат можно улучшить. В частности, если ∂D – выпуклый контур, то $\sigma^T(\mathbf{r}) \geqslant \frac{3}{4}$, а для контура общего положения $\sigma^T(\mathbf{r}) \geqslant \frac{29}{54}$.

Вопрос о поведении величины $\sigma(\mathbf{x})$ для интеграла Фурье при $N \geqslant 3$ рассматривался в работе [14]. Роль эволюты в этом случае играет фокальная поверхность $\mathcal{K}$. В работе [14] на основе теории особенностей получены следующие результаты:

1) если $\mathbf{x} \notin \mathcal{K}$, то $\sigma(\mathbf{x}) = 1$;

2) размерность области расходимости (т.е. области, где $\sigma(\mathbf{x}) \leqslant 0$) не превосходит $N-3$;

3) если ∂D – гиперповерхность общего положения и $N \leqslant 10$, то существует стратификация поверхности

$$K = \bigcup_{p=1}^{N} \mathcal{K}_p, \quad \dim \mathcal{K}_p = N - p,$$

и для каждого p при $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_p$ величина $\sigma(\mathbf{x})$ определяется из таблицы

p	1	2	3	4	6	7	8	9	10
$\sigma(\mathbf{r}) \geqslant$	5/6	3/4	2/3	5/8	1/2	1/2	11/24	7/16	1/3

и эти оценки точны, т.е. существует поверхность общего положения, для которой реализуется знак равенства в оценках.

При $N \geqslant 21$ существует гиперповерхность общего положения, для которой размерность области расходимости $\geqslant N - 21$.

В частности, для характеристической функции трехосного эллипсоида ($\dim \mathcal{K} = 2$) имеем: $\sigma(\mathbf{r}) = 1$, если $\mathbf{r} \notin \mathcal{K}$, $\sigma(\mathbf{x}) = \frac{5}{6}$ в общей точке $\mathcal{K}$, $\sigma(\mathbf{x}) = \frac{3}{4}$ на некоторых кривых в $\mathcal{K}$ и $\sigma(\mathbf{x}) = \frac{2}{3}$ в некоторых точках $\mathcal{K}$.

Заметим, что ранее, до работы [14], эллипсоиды не рассматривались. В случае шара, когда фокальная поверхность вырождается в точку, совпадающую с его центром, было известно, что метод суммирования по шарам при восстановлении характеристической функции шара сходится всюду, кроме центра. Как следует из результатов Д.А. Попова, показатель сходимости во всех таких точках равен единице.

5. Целые точки в трёхмерных телах вращения

В работе [15] рассматривалась задача о целых точках в трёхмерных телах вращения.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ – тело, граница ∂D которого получена вращением плоской замкнутой кривой Γ вокруг оси $\mathscr{A}$, и $\mathscr{A}$ лежит в плоскости, содержащей Γ. Задача состоит в оценке при $t \to +\infty$ величины $\mathcal{R}(t, D)$, определённой равенством

$$\mathcal{N}(t, D) = t^3 \operatorname{vol} D + \mathcal{R}(t, D),$$

где $\mathcal{N}(t, D)$ – число целых точек в области tD. Сформулируем полученный результат. Его доказательство основано на равномерных оценках О.И., входящих в выражения для преобразования Фурье характеристической функции D. Напомним, что меридианом границы ∂D называется её пересечение с плоскостью, содержащей ось вращения. Точки меридиана, не являющиеся точками перегиба, в которых касательная к меридиану ортогональна оси $\mathscr{A}$, называются экстремумами. Предполагается, что

1) все экстремумы – простые, т.е. в них кривизна Γ не равна нулю;

2) максимальный порядок нулей кривизны Γ не превосходит p;

3) касательные к Γ в точках уплощения не ортогональны $\mathscr{A}$.

При этих предположениях в работе [15] доказано, что

$$\mathcal{R}(t,D) \,=\, O\bigl(t^{\beta}\bigr), \quad t+\infty, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \beta = \frac{3}{2}, & \text{если} \;\; p = 0,1,2,3,4; \\ \beta = \frac{7}{4} - \frac{3}{2(p+2)}, & \text{если} \;\; p \geqslant 4. \end{cases}$$

Ранее было известно, что $\beta = \frac{3}{2}$ для невыпуклых областей с границей общего положения. Основной результат работы [15] состоит в доказательстве того, что значение $\beta = \frac{3}{2}$ является точным на классе тел вращения. Величина $\beta = \frac{3}{2}$, в частности, реализуется на полнотории D, граница которого $\partial D = \mathbb{T}^2$ образована вращением эллипса с осями длины a, b, $a < b$, вокруг оси, ортогональной большой оси эллипса. В этом случае в [15] получено равенство

$$\mathcal{R}(t,D) \,=\, -\,t^{3/2}\,2\sqrt{2}\,b\sqrt{a}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos\left(2\pi kat\right)}{k^{3/2}} \,+\, O\bigl(t^{\,3/2-1/287}\bigr).$$

При $x \geqslant x_0(a,b)$ это дает асимптотически точную оценку числа $N(a,b,x) = \mathcal{N}(\sqrt{x}, D)$ решений в целых числах неравенства

$$\bigl(l^2+m^2+n^2(a^2+b^2)\bigr)^2 \,\leqslant\, 4xb^2(xa^2-n^2).$$

6. Ультразвуковая и акустическая томография

С математической точки зрения задача ультразвуковой томографии состоит в восстановлении конформно-плоской метрики $ds^2 = u(x_1,x_2)(dx_1^2+dx_2^2)$ в единичном круге D по длинам геодезических с концами на ∂D. При этом предполагается, что метрика мало отличается от плоской.

Эта нелинейная задача до сих пор не решена. В работе [16] был решён линейный аналог этой задачи. Приведём ее формулировку. Пусть на отрезке $x_0(t)$ прямой (φ, q), лежащем внутри $\overline{D}$, задано векторное поле $z(\varphi,q,t)$ такое, что

$$z(\varphi+\pi,-q,-t) \,=\, z(\varphi,q,t), \quad z(\varphi,q,\pm\sqrt{1-q^2}) \,=\, 0.$$

Это поле определяет кривую $\gamma_z(\varphi,q)$, задаваемую уравнением

$$x(t) \,=\, x^0(t) + z(\varphi,q,t).$$

Требуется восстановить $u(x)$, $x \in D$, если известны интегралы

$$I(\varphi,q) \,=\, (\mathfrak{R}_z u)(\varphi,q) \,=\, \int_{\gamma_z(\varphi,q)} u\,ds.$$

В работе [16] получено решение этой задачи. Доказано, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\|z\|_m < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ (здесь $m \geqslant 3$,

$$\|z\|_m \,=\, \sum_{0\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\max_{\varphi,q,t}\bigl(|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}z_1| + |\partial^{\boldsymbol{\alpha}}z_2|\bigr), \quad \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \,=\, \partial_u^{\alpha_1}\partial_q^{\alpha_2}\partial_t^{\alpha_3}),$$

оператор $A_z = R^{-1}\mathfrak{R}_z$ допускает расширение до “почти унитарного” интегрального оператора Фурье нулевого порядка $A_z \,:\, L^2(\mathbb{R}^2) \,\to\, L^2(\mathbb{R}^2)$, и

$$A_z^T A_t \,=\, \mathbf{1} \,+\, Q(z), \quad \|Q(z)\| \,\leqslant\, C_m\|z\|_m$$

и решение имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = \mathfrak{R}_z^{-1} I(\mathbf{x}), \quad \mathfrak{R}_z^{-1} = (\mathbf{1} + Q(z))^{-1} A_z^T \mathfrak{R}^{-1}.$$

Кроме того, в работе [16] получены условия Кавальери – необходимые условия, которым должна удовлетворять функция на пространстве кривых, чтобы принадлежать образу оператора $\mathfrak{R}_z$. Достаточность этих условий доказана в [18]. Условия Кавальери означают, что образ $\mathfrak{R}_z$ имеет бесконечную коразмерность в пространстве функций на кривых, мало отличающихся от прямых. Это является основным препятствием для доказательства сходимости метода последовательных приближений для решения задачи ультразвуковой томографии методами КАМ теории.

Две совместные с Д.В. Сушко работы [17], [19] посвящены задачам опто-акустической томографии. В этих работах речь идёт о следующей задаче. Пусть заданы величины

$$I(\mathbf{x}, t) = \int_{S(\mathbf{x},t)} f\, ds,$$

где $S(\mathbf{x}, t)$ – сфера радиуса t с центром $\mathbf{x}$, f – функция с компактным носителем $\operatorname{supp} f$ и $\mathbf{x} \in \mathscr{G}$, где $\mathscr{G}$ – некоторая гиперповерхность размерности $\dim \mathscr{G} = N - 1$ в $\mathbb{R}^N$. Требуется найти $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$.

В работе [17] в случае $N = 2$ и 3 построен оператор A и предложено считать $\widetilde{f}(\mathbf{x}) = (AI)(\mathbf{x})$ некоторым приближением к $f(\mathbf{x})$. Кроме того, в этой работе указаны условия, которым должна удовлетворять поверхность $\mathscr{G}$ при заданной геометрии носителя $\operatorname{supp} f$. Одно из условий состоит в том, что через любую точку $\mathbf{x} \in \operatorname{supp} f$ должны проходить сферы $S(\mathbf{x}, t)$ по всем направлениям.

При $N = 3$ в работе [17] доказано, что оператор A задает параметрикс рассматриваемой задачи, т.е. $\widetilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + Bf(\mathbf{x})$, и B – псевдо-дифференциальный оператор нулевого порядка. При $N = 2$ соответствующий результат не доказан.

Проведённый численный эксперимент [19] показал, что при $N = 2$ и 3 метод даёт восстановление, которое удовлетворяет требуемым метрологическим критериям качества..

7. Периодическая задача Штурма-Лиувилля

В работе [21] рассмотрена задача о дискретном спектре, зависящем от параметра a, $0 < a < +\infty$, семейства периодических задач Штурма-Лиувилля

$$u''(x) + \lambda^2 (f(x) - a) u(x) = 0, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad u(-\pi) = u(\pi), \quad u'(-\pi) = u(\pi).$$

Как возникла эта задача, будет ясно из п. 6. Предполагается, что $f(x)$ – гладкая периодическая функция и $0 < a_2 \leqslant f(x) \leqslant a_1$ и функция $f(x)$ имеет один простой максимум ($f(x_{\max}) = a_1$) и один простой минимум ($f(x_{\min}) = a_2$). Таким образом, при $a = a_2$ рождаются две точки поворота и задача из дефинитной превращается в индефинитные. Известно, что при $a < a_2$ дискретный спектр состоит из двух ветвей $\lambda_\pm(a, p)$, нумеруемых выбором знака и положительного числа p. Обе ветви $\lambda_\pm(a, p)$ при $a < a_2$ имеют одинаковые асимптотики при $p \to +\infty$ (асимптотическое вырождение). При $a = a_2$ это асимптотическое вырождение снимается и при $a_2 < a < a_1$ ветви $\lambda_\pm(a, p)$ имеют различную асимптотику при $p \to +\infty$. При $a = a_1$ точки поворота “умирают” и дискретный спектр исчезает (уходит на бесконечность). В работе [21] доказано, что процесс перестройки спектра во всем интервале $0 < a \leqslant a_1$ можно описать единой асимптотической формулой, согласно которой

$$\lambda_\pm(a, p) = \lambda_p^0(a) + F^{-1}(a) H_\pm(\alpha(a) \lambda_p^0(a)) + R_\pm(a, p).$$

В этой формуле

$$\lambda_p^0(a) = \frac{2\pi p}{F(a)}, \quad F(a) = \int_{\substack{f(x)>a \\ -\pi<x<\pi}} \sqrt{f(x)-a}\,dx,$$

$$R_\pm(a,p) = \begin{cases} F^{-1}(a)\,O\big((\lambda_p^0)^{-2/3}\ln\lambda_p^0\big), & a_2 \leqslant a < a_1, \\ O\big((\lambda_p^0)^{-1/2}(\ln\lambda_p^0)^{1/2}\big), & 0 \leqslant a \leqslant a_2. \end{cases}$$

Явный вид функции $\alpha(a)$ приведён в [21], причём $\alpha(a) \to c(f)$ при $a \to a_1$, $\alpha(a) \to 0$ при $a \to a_2$ и функции $H_\pm(x)$ задаются равенствами

$$H_\pm(x) = \pm\operatorname{arctg} e^{\pi x} - x + x\ln|x| - \arg\Gamma\left(\frac{1}{2} + ix\right).$$

Ранее подобных формул известно не было.

8. Спектр оператора Лапласа на замкнутых поверхностях

В 1993 г. в журнале “Успехи математических наук” была опубликована работа Д.В. Косыгина, А.А. Минасова, Я.Г. Синая[11] (КМС), посвящённая исследованию свойств спектра оператора Лапласа на торе $\mathbb{T}^2$ с метрикой Лиувилля $ds^2 = (\rho(x)+h(y))(dx^2+dy^2)$. Эта работа во многом определила тематику дальнейших исследований Д.А. Попова. В частности, работа [21] (см. п. 6) возникла из наблюдения, что результаты работы КМС требуют уточнения.

Пусть $\mathbf{M} \equiv (M,g)$ – гладкая замкнутая (компактная без края) поверхность с римановой метрикой g. Оператор Лапласа $\Delta \equiv \Delta(g)$ отрицательно определён и имеет бесконечный дискретный спектр $\{\lambda_n\}$:

$$\Delta\varphi_n + \lambda_n\varphi_n = 0, \quad \lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots .$$

Согласно формуле Г. Вейля,

$$\mathcal{N}(x) = \frac{\mathbf{M}}{4\pi}\,x + \Delta\mathcal{N}(x),$$

где $\mathcal{N}(x)$ – функция распределения собственных значений,

$$\mathcal{N}(x) = \#\{\lambda_n \leqslant x\}, \quad |\mathbf{M}| \ – \ \text{площадь } \mathbf{M}.$$

Согласно же общему результату Л. Хермандера,

$$\Delta\mathcal{N}(x) = O(x^{1/2}), \quad x \to +\infty.$$

Возникает вопрос о связи геометрии (M,g) с существованием степенного понижения, т.е. оценки

$$\Delta\mathcal{N}(x) = O(x^{\theta+\varepsilon}),$$

где $\theta < \frac{1}{2}$, а $\varepsilon > 0$ – любое. В работе Дж.Дж. Дюистермаат и В.В. Гийемин[12] (1975) было установлено, что необходимым условием существования степенного понижения является равенство $\mu[g] = 0$, где $\mu[g]$ – мера множества замкнутых геодезических, т.е. мера точек в расслоении единичных сфер $S^*(\mathbf{M}) \subset T^*(\mathbf{M})$, отвечающих замкнутым геодезическим ($\dim S^*(\mathbf{M}) = 3$).

[11] *Д. В. Косыгин, А. А. Минасов, Я. Г. Синай*, Статистические свойства спектров операторов Лапласа — Бельтрами на поверхностях Лиувилля, *УМН*, **48**:4(292) (1993), 3–130.

[12] *J.J. Duistermaat, V.W. Guillemin*, The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, *Invent. Math.*, **29**:1 (1975), 39–79.

Если асимптотика спектра известна, то задача о поведении величины $\Delta N(x)$ при $x \to +\infty$ сводится (см. КМС) к задаче о числе целых точек в некоторых областях, которые естественно назвать спектральными. В случае метрики Лиувилля вида $ds^2 = f(x)(dx^2 + dy^2)$ вопрос об асимптотике спектра сводится к задаче, рассмотренной в [21] (см. п. 6). Основываясь на результатах этой работы и решая соответствующую задачу о числе целых точек, в работе [22] на торе $\mathbb{T}^2$ построены метрики Лиувилля, для которых $\mu[g] = 0$ и для любых $p \geqslant 4$, $\varepsilon > 0$

$$\Delta\mathcal{N}(x) \,=\, b_p(x)x^{1-\frac{1}{2(p+2)}} \,+\, O\big(x^{1-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{p+2}+\varepsilon\right)}\big), \quad x \to= \infty.$$

Явный вид функции $b_p(x)$ указан в [22]. Это непрерывная, ограниченная функция (при $x \geqslant x_0$) и она не стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Таким образом, в работе [22] доказано, что условие $\mu[g] = 0$ не является достаточным для существования степенного понижения и оценка Хермандера $\Delta\mathcal{N}(x) = O(x^{1/2})$ не может быть существенно улучшена даже при условии $\mu[g] = 0$. Заметим, что построенные в [22] метрики не являются метриками общего положения и функция $f(x)$ должна удовлетворять некоторым диофантовым условиям. С другой стороны, эти метрики в топологии C^1 плотны в пространстве метрик $ds^2 = f(x)(dx^2 + dy^2)$.

В настоящее время существование степенного понижения доказано только для метрик с интегрируемым геодезическим потоком.

Наибольший интерес представляет задача об асимптотике $\Delta N(x)$ в случае, когда геодезический поток неинтегрируем. В этом случае доказано только, что

$$\Delta N(x) \,=\, O\left(\frac{x^{1/2}}{\ln x}\right), \quad \Delta N(x) \,=\, \Omega\left(\frac{\sqrt{\ln x}}{\ln\ln x}\right).$$

С другой стороны, имеется гипотеза (см. КМС), что для метрик отрицательной кривизны и общего положения

$$\Delta N(x) \,=\, O\big(\sqrt{\ln x}\big).$$

Естественно рассмотреть случай постоянной отрицательной кривизны. В этом случае $(M,g) = \mathcal{F}[\Gamma]$, где $\mathcal{F}[\Gamma] = \Gamma \setminus H$ – компактная риманова поверхность с метрикой Пуанкаре (Γ - компактная дискретная подгруппа группы $SL(2,\mathbb{R})$, H – верхняя полуплоскость). В этом случае возможен подход к исследованию величины $\Delta N(x)$, основанный на формуле Сельберга. Такой подход рассмотрен в трёх работах [23]-[25].

Формула Сельберга для любой пробной функции из класса Сельберга ($h \in \{h\}_S$) даёт выражение для $\sum\limits_n h(r_n)$, $\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2$, вида

$$\sum_n h(r_n) \,=\, \Phi[h|\{N(P)\}],$$

где $\Phi[h|\{N(P)\}]$ – функционал на пространстве $\{h\}_S$, зависящий от спектра $\{N(P)\}$ норм сопряженных гиперболических классов группы Γ ($\{\ln N(P)\}$ – спектр длин замкнутых геодезических).

В работе [23] для случая строго гиперболических групп Γ (Γ не содержит эллиптических элементов) получена явная формула для величины $\Delta N(x)$. В [23] доказано, что

$$\Delta\big(t^2 + \tfrac{1}{4}\big) \,=\, \frac{1}{\pi}\,S(t) \,+\, f(t) \quad (t \geqslant t_0),$$

и в этой формуле

$$S(t) \,=\, \sum_{r_n \geqslant 0}\left\{\mathrm{sgn}(r_n - t)\mathrm{Si}(|t - r_n|b_0) \,-\, \mathrm{Si}((t + r_n)b_0) \,+\, \frac{2\sin{(tb_0)}}{b_0(r_n^2 + \frac{1}{2})}\,(\cos{(r_nb_0)} \,-\, \sin{(r_nb_0)})\right\},$$

$f(t)$ – ограниченная непрерывная функция с асимптотикой

$$f(t) \,=\, c_0 + c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \ldots, \quad t \to +\infty,$$

$\mathrm{Si}(\cdot)$ – интегральный синус и b_0 – минимальная длина замкнутой геодезической.

Некоторые следствия из этой формулы рассмотрены в работе [25], где, в частности, указаны условия, достаточные для существования степенного понижения.

В работе [24] при некоторых дополнительных условиях на пробную функцию ($h \in \{h\}_S^1 \subset \{h\}_S$) доказано, что спектр $\{r_n\}$ для всякой $h \in \{h\}_S^1$ удовлетворяет тождеству вида

$$\sum_n h(r_n) \,=\, \Phi[h|\{r_n\}],$$

где

$$\Phi[h|\{r_n\}] \,=\, \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} rh(r)\,\mathrm{th}\,(\pi r)dr - \\ - \sum_{r_n>0}\frac{1}{r_n^2+\frac14}\int_{b_0}^{+\infty}(\cos(r_n y) + 2r_n\sin(r_n y))\Big(-\frac12\hat{h}(y) + \hat{h}^{(1)}(y)\Big)dy \,+\, \Delta\Phi_\Gamma[h|\alpha_i(\Gamma)],$$

$\hat{h}$ – преобразование Фурье функции h, причем явно указанный в [24] функционал $\Delta\Phi_\Gamma[h|\alpha_i(\Gamma)]$ зависит только от конечного числа параметров $\alpha_i(\Gamma)$.

В случае $h(r) = e^{-tr^2}$ отсюда следует, что

$$\sum_n e^{-tr_n^2} \,=\, \frac{|\mathcal{F}|}{2\pi}\int_0^{+\infty} re^{-tr^2}\,\mathrm{th}\,(\pi r)dr \,+\, O\big(t^{-2}e^{-b_0^2/(4t)}\big) \,= \\ = \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k \,+\, O\big(t^{-2}e^{-b_0^2/(4t)}\big), \quad t \to 0.$$

Интерес к свойствам величины $\Delta N(x)$ связан с теорией квантового хаоса. В этой теории сформулирована гипотеза универсальности, согласно которой поведение спектра $\{\lambda_n\}$ на интервале $(\lambda, \lambda + O(\lambda^{1/2})), \lambda \to +\infty$ (для метрик общего положения) не зависит от λ и зависит только от того, интегрируем или нет геодезический поток. В случае $(M, g) = (\mathbb{T}^2, g_0)$, где g_0 – плоская метрика на $\mathbb{T}^2$, $\lambda_n = \ell^2 + m^2$ ($\ell, m \in \mathbb{Z}$) и $\Delta N(x) = P(x)$, где $P(x)$ – остаточный член в задаче о числе целых точек в круге. Это придаёт дополнительный интерес к проблеме круга и задаче о $\Delta N(x)$ для $(M, g) = \mathcal{F}[\Gamma]$, если рассматривать соответствующие метрики как типичных представителей метрик с интегрируемым и неинтегрируемым геодезическим потоком.

Современному состоянию вопроса о спектре оператора Лапласа на замкнутых поверхностях посвящён подготовленный к печати обзор [30].

9. Число целых точек в круге

Пусть $R(x)$ – число целых точек в круге радиуса $\sqrt{x}$:

$$R(x) \,=\, \sum_{n\leqslant x} r(n), \quad r(n) \,=\, \#\{(\ell, m) \,:\, \ell^2 + m^2\},$$

и величина $P(x)$ определяется равенством

$$R(x) \,=\, \pi x \,+\, P(x).$$

Проблема круга состоит в доказательстве оценки

$$P(x) = O\big(x^{1/4+\varepsilon}\big)$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $x \to +\infty$. В современных работах проблема круга понимается в широком смысле как вопрос о свойствах функции $P(x)$.

В отличие от других известных задач о суммировании арифметических функций, эта задача допускает спектральную интерпретацию и $P(x) = \Delta N(x)$, где $\Delta N(x)$ – второй член в формуле Вейля для плоского тора $(\mathbb{T}^2, g_0)$, а $r(n)$ – кратность собственного значения $\lambda = \ell^2 + m^2 = n$.

В работе [26] получен ряд новых результатов о величине $P(x)$. Доказательство этих результатов основано на усечённой формуле Вороного (Вороного-Харди), согласно которой

$$P(x) = -\frac{x^{1/4}}{\pi} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{r(j)}{j^{3/4}} \cos\big(2\pi\sqrt{jx} + \tfrac{\pi}{4}\big) + \Delta_N P(x),$$

$$|\Delta_N P(x)| \leqslant C(\varepsilon)\left(N^{\varepsilon} + \frac{x^{1/2+\varepsilon}}{\sqrt{N}}\right),$$

$\varepsilon > 0$ – любое. В работе [26] используется следующее уточнение последней формулы:

$$|\Delta_N P(x)| \leqslant C\left(\overline{r}(N)\ln N + \frac{x^{1/2}}{\sqrt{N}}\,\overline{r}(x)\ln x\right), \quad \overline{r}(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right),$$

так что $r(n) \leqslant \overline{r}(n)$.

Так как экстремумы функции $P(x)$ достигаются в точках $x = n$, $r(n) \neq 0$, то достаточно оценивать величины $|P(n)|$, $n \geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N}$. В работе [26] показано, как получить оценку $|P(n)|$, если известны оценки локальных моментов. Сформулируем соответствующие результаты. Пусть

$$\frac{1}{2H}\int_{n-H}^{n+H} |P(x)|^p dx \leqslant F_p(n,H), \quad p \geqslant 1, \quad H \ll n,$$

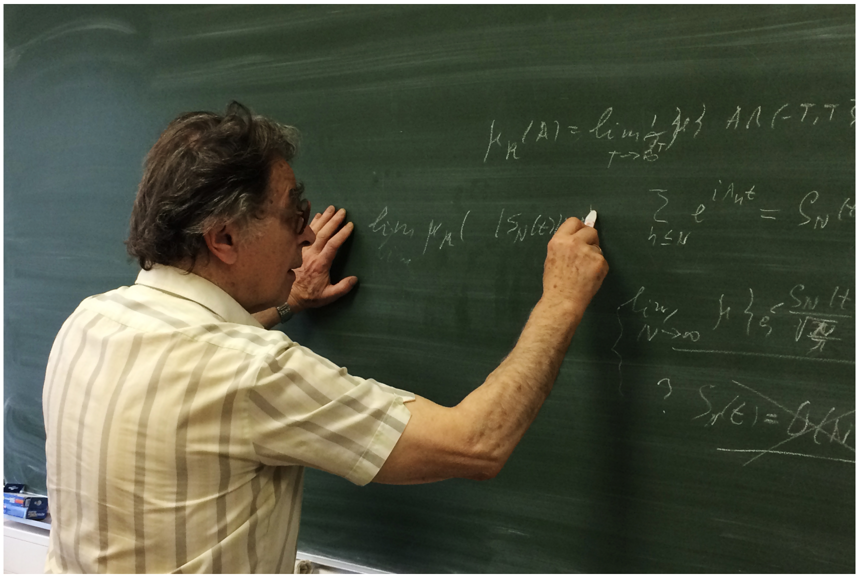
и пусть при этом

$$F_p \leqslant C_p(H\overline{r}(n))^p, \quad |P(n)| \leqslant CH\overline{r}(n).$$

Тогда

$$|P(n)| \leqslant C(H\overline{r}(n)F_p)^{1/(p+1)}.$$

Вопрос о том, при каких $\alpha(p)$ при $p \geqslant 3$, и $H \leqslant Cn^{\alpha(p)+\varepsilon}$ имеет место оценка $F_p \leqslant C_p n^{p/4}$, остается открытым. Из приведённой выше оценки $|P(n)|$ в частности, следует, что если $\alpha(4) = \frac{1}{2}$, то $|P(n)| \leqslant Cn^{3/10+\varepsilon}$. В настоящее время известно только, что $P(x) = O(x^{\theta+\varepsilon})$, $\theta = \frac{517}{1648} = 0.31371\ldots$.



В Математическом институте им. В.А. Стеклова.
20 августа 2019 г.

Приведем ещё два результата из [26]. Пусть n – точка локального максимума величины $|P(x)|$ и $|P(n)| \geqslant Cn^{1/4}$. Этот максимум называется широким, если

$$|P(n) - P(x)| < B|P(n)|, \quad 0 < B < 1, \quad \text{для всех } \ x, \quad |x-n| < n^{1/2-\varepsilon}.$$

В [26] доказано, что если максимум при $x = n$ – широкий, то $|P(n)| \leqslant Cn^{1/4+\varepsilon}$. Это означает, что величина $P(x)$ в интервале $|x-n| < n^{1/2-\varepsilon}$ ведёт себя как случайное блуждание с началом в точке $x = n$.

Давно было известно, что на любом интервале $[T, T + c\sqrt{T}]$, $T \gg 1$, существуют точки x_1, x_2 такие, что $P(x_1) > c_1 x_1^{1/4}$, $P(x_2) < -c_1 x_2^{1/4}$. Из результатов работы Д.Р. Хиз-Брауна и К.М. Тсанга[13] следует, что внутри интервала $[T, 2T]$ $(T \gg 1)$ существуют непересекающиеся интервалы

$$U_\alpha^\pm \;=\; \bigl[x_\alpha^\pm, x_\alpha^\pm + C(\delta)T^{1/2}(\ln T)^{-5}\bigr]$$

такие, что

$$P(x) \;>\; \delta x^{1/4}, \quad x \in U_\alpha^+, \quad P(x) \;<\; -\delta x^{1/4}, \quad x \in U_\alpha^-$$

для любого $0 < \delta \leqslant \delta_0$. При этом

$$\mu(V^\pm) \;\geqslant C(\delta)T, \quad V^\pm \;= \bigcup_\alpha U_\alpha^\pm,$$

$\mu(\cdot)$ – мера Лебега,

$$\frac{1}{2}\,|P(x)| \leqslant |P(x+v)| \;\leqslant\; \frac{3}{2}|P(x)|, \quad x, x+v \in V^\pm.$$

В работе [26] доказано, что $|P(x)| \leqslant Cx^{1/4+\varepsilon}$, $x \in V^+ \cup V^-$, и проблема круга будет решена, если предположить, что максимумы $|P(x)|$ принадлежат $V^+ \cup V^-$.

Из приведённых результатов возникает картина поведения $P(x)$ на интервале $[T, 2T]$, основанная на двух предположениях: 1) интервалы U_α^+ и U_α^- чередуются на $[T, 2T]$; 2) максимумы $|P(x)|$ достигаются на $V^+ \cup V^-$. Оба эти предположения в настоящее время не доказаны. Современные результаты о свойствах функции $P(x)$ содержатся в работе [29].

[13] *D.R. Heath-Brown, K.-M. Tsang,* Sign changes of $E(T)$, $\Delta(x)$, and $P(x)$, *J. Number Theory,* **49**:1 (1994), 73–83.

В духе гипотез универсальности можно предположить, что в случае интегрируемого геодезического потока второй член $\Delta N(x)$ в формуле Вейля на интервале $(x, x + O(x^{1/2}))$ ведёт себя как $P(x)$ и известные результаты о $P(x)$ можно рассматривать как источник гипотез о поведении $\Delta N(x)$.

10. Спектр оператора Лапласа на некомпактных римановых поверхностях с метрикой Пуанкаре и функция Мангольдта

Большой интерес представляют вопросы о дискретном спектре $\{\lambda_n\}$ оператора Лапласа Δ на некомпактной римановой поверхности $\mathcal{F}[\Gamma] = \Gamma \setminus H$ конечной площади $|\mathcal{F}|$: $|\mathcal{F}| < +\infty$.[14] В этом случае говорят, что дискретная группа $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R})$ кофинитна. В случае кофинитной группы Γ оператор Δ имеет непрерывный спектр, покрывающий интервал $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ и о структуре дискретного спектра $\{\lambda_n\}$ мало что известно. Согласно гипотезе Рёльке, спектр $\{\lambda_n\}$ бесконечен. Альтернативная гипотеза принадлежит Сарнаку и Филипсу; согласно этой гипотезе, для групп Γ общего положения, для которых комплексная структура $\Gamma \setminus H$ отвечает точке общего положения в пространстве Тейхмюллера, спектр $\{\lambda_n\}$ конечен.

Формула Сельберга для кофинитных групп имеет вид

$$\sum_n h(r_n) \,=\, \Phi[h|\{N(P)\}, \varphi] \quad \text{для всякой} \;\; h \in \{h\}_S^1,$$

где $\varphi(s) = \det\Phi(s)$, $\Phi(s)$ – матрица рассеяния. В работе [27] доказано, что для любой функции $h \in \{h\}_S^1$ имеет место равенство

$$\sum_n h(r_n) \,=\, \widetilde{\Phi}[h|\{r_n\}, \{s_\alpha\}\varphi],$$

где $\{s_\alpha\}$ – спектр резонансов – полюсов функции $\varphi(s)$ вида $s_\alpha = \beta_\alpha + i\gamma_\alpha$, $\beta_\alpha < \frac{1}{2}$. Последнее равенство можно записать в виде

$$\sum_n h(r_n) \,+\, \sum_{\gamma_\alpha > 0} h(\gamma_\alpha) \,=\, \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r h(r)\, \mathrm{th}\,(\pi r) dr \,- \\ -\, \frac{m}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \frac{\Gamma'}{\Gamma}\,(1 + ir) dr \,+\, \Delta\Phi[\hat{h}|\{r_n\}, \{s_\alpha\}],$$

где m – число неэквивалентных параболических вершин у фундаментальной области Γ, и указан явный вид функционала $\Delta\Phi[\hat{h}|\{r_n\}, \{s_\alpha\}]$.

Если интересоваться асимптотикой спектра $\{r_n\}$, то пробная функция h должна удовлетворять условию типа $h(r) \approx 1$, $|r| < T$, $T \gg 1$. В этом случае её преобразование Фурье $\hat{h}(y)$ имеет носитель, сосредоточенный около точки $y = 0$ и основной вклад в правую часть последней формулы дают два первых члена. В частности, при $h(r) = e^{-tr^2}$ получим:

$$\sum_n e^{-tr_n^2} \,+\, \sum_{\gamma_\alpha > 0} e^{-t\gamma_\alpha^2} \,=\, \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi t} \,-\, \frac{m}{4\sqrt{\pi t}} \ln\frac{1}{t} \,+\, O\biggl(\frac{1}{\sqrt{t}}\biggr), \quad t \to 0.$$

Обнаруженная “симметрия” относительно замены $\{r_n\} \leftrightarrow \{\gamma_\alpha\}$ между спектрами $\{r_n\}$ и $\{\gamma_\alpha\}$ является основным препятствием при попытке доказать гипотезу Рёльке исходя из формулы Сельберга.

[14] Следуя устоявшимся в этой области обозначениям, через $\Gamma \setminus H$ мы обозначаем здесь пространство орбит, т.е. фактор H по Γ.

В случае модулярной группы $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ дискретный спектр бесконечен. Так как в этом случае имеется только одна параболическая точка, то матрица рассеяния скалярна и давно известно, что

$$\Phi(s) \,=\, \varphi(s) \,=\, \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)},$$

где $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана. Таким образом, в этом случае $s_\alpha = \frac{1}{2}\varrho_\alpha$, где ϱ_α – нетривиальные нули ζ-функции. Видимо это позволило П. Сарнаку предположить, что дискретный спектр $\{\lambda_n\}$ в случае $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ должен играть фундаментальную роль в теории чисел. Заметим, что ещё в 1978 г. А.Б. Венков доказал[15], что функция Мангольдта

$$\Lambda(m) \,=\, \begin{cases} \ln p, & m = p^k \;\; (p - \text{ простое}), \\ 0, & m \neq p^k, \end{cases}$$

восстанавливается по спектру $\{r_n\}$ и спектру норм $\{N(P)\}$ гиперболических классов.

В работе [28] доказано, что функция Мангольдта и, следовательно, и функция Чебышёва

$$\psi(x) \,=\, \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n),$$

восстанавливается по спектру $\{r_n\}$. На основе результатов работы [27] в случае $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ в [28] доказано, что для любого целого $\ell \geqslant 1$, и любых $x \geqslant 2$, $t > 0$ таких, что

$$t \,<\, \bigl\{x^4(\ln x)^{2\ell+6}\bigr\}^{-1}$$

имеет место равенство

$$\psi(x) \,=\, 2\sqrt{\pi}t\sum_{2\leqslant m\leqslant x} m\sum_{n=0}^{+\infty}\exp\left(-tr_n^2\right)\cos\left(2r_n\ln m\right) \,+\, R_\ell(x), \quad |R_\ell(x)| \leqslant \frac{C_\ell}{(\ln x)^{2\ell-1/2}}.$$

Определим величину $\Delta\psi(x)$ равенством

$$\psi(x) \,=\, x + \Delta\psi(x).$$

Известно, что при любом фиксированном θ, $\frac{1}{2} < \theta < 1$ и любом $\varepsilon > 0$ равенства

$$\Delta\psi(x) \,=\, O\bigl(x^{\theta+\varepsilon}\bigr), \quad \pi(x) \,=\, \int_2^x\frac{dt}{\ln t} \,+\, O\bigl(x^{\theta+\varepsilon}\bigr)$$

эквивалентны.

В работе [31] доказано, что для некоторого класса $\{h\}_\varrho$ пробных функций имеет место равенство

$$\Delta\psi(x) \,=\, \sum_{m_0\leqslant m\leqslant x} m\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(2r_n\ln m\right)f(x,r_n) \,+\, O(1)$$

и указан метод построения функции f по $h \in \{h\}_\varrho$. В частности, при

$$\varrho(y) \,=\, (y^2+\delta)e^{-y^2}$$

получено равенство

$$\Delta\psi(x) \,=\, \frac{3\sqrt{\pi}}{x^2\tilde{\varrho}(0)}\sum_{m_0\leqslant m\leqslant x} m\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\sigma^2r_n^2}\bigl(1+\delta-\tfrac{1}{2}\sigma^2r_n^2\bigr)\cos\left(2r_n\ln m\right) \,+\, O(1).$$

[15] *А.Б. Венков*, Об одной формуле для пси-функции Чебышёва, *Матем. заметки*, **23**:4 (1978), 497–503.

В этой формуле

$$\tilde{\varrho}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2-(1/3)\sqrt{\pi}\sqrt{\varepsilon(x)}}, \quad \delta = \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon(x)}\tilde{\varrho}(0), \quad \varepsilon(x) = \frac{\alpha}{q\ln x}, \quad \sigma = \frac{2}{x^2}\sqrt{\varepsilon(x)},$$

и α, q – любые числа с условиями $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $q \geqslant 10$.

Таким образом доказано, что гипотеза Римана допускает спектральную формулировку.

Л.Д. Фаддееву принадлежит гипотеза, согласно которой множество $\{\frac{1}{2}+ir_n\}$ содержит все достаточно большие нули ζ-функции Римана; эта гипотеза упоминается в статье А.Б. Венкова[16]. В заключение отметим, что в настоящее время неизвестно, определяет ли спектр $\{r_n\}$ нули ζ-функции Римана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Д.А. О приближении диффузионного пограничного слоя для течения в канале // *ДАН СССР*, **195**:6 (1970), С. 1373–1376.

2. Попов Д.А. Учет продольной диффузии при течении в канале // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*, **6** (1973), С. 63–73.

3. Попов Д.А. Задача с разрывными граничными условиями и приближение диффузионного погранслоя // *Прикладн. матем. мех.*, **39**:1 (1975), С. 109–117.

4. Попов Д.А. К теории полей Янга-Миллса // *ТМФ*, **24**:3 (1975), С. 347-365.

5. Попов Д.А. Дайхин Л.И. Пространства Эйнштейна и поля Янга–Миллса // *ДАН СССР*, **225**:4 (1975), С. 790–793.

6. Попов Д.А. Сушко Д.В. О сходимости алгоритмов численного решения уравнения свертки // *ДАН СССР*, **315**:2 (1990), С. 309–313.

7. Popov D.A. On convergence of a class of algorithms for the numerical Radon transform // *Mathematical Problems of Tomography*, Transl. Math. Monographs, **81**, eds. Gelfand J.M., Gindikin S.G., Amer. Math. Soc., 1990 pp. 7–65.

8. Popov D.A. The convergence of tomographical algorithms and estimation of oscillatory integrals // *Ill-posed Problems in Mathematical Physics and Analysis. Moscow-Utrecht*, 1993

9. Popov D.A., Sokolova E.V., Sushko D.V. Mathematical Models in Two-Dimensional Radon Tomography // *Applied Problems of Radon Transform*, S. Gindikin (ed.), Providence: AMS, 1994, pp. 129–204.

10. Popov D.A., Sushko D.V. Computation of singular convolutions // *Applied Problems of Radon Transform*, S. Gindikin (ed.), Providence: AMS, 1994, pp. 43–127.

11. Попов Д.А. Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов // *УМН*, **52**:1(313) (1997), С. 77–148.

12. Попов Д.А. Сферическая сходимость ряда и интеграла Фурье индикатора двумерной области // *Тр. МИАН*, **218** (1997), С. 354–373.

[16] См.: *А.Б. Венков*, Нули ζ- и L-функций мнимых квадратичных полей и собственные значения $PSL(2,\mathbb{Z})$-автоморфного лапласиана, *Докл. АН СССР*, **250**:3 (1980), 528–531.

13. Попов Д.А. Восстановление характеристических функций в двумерной радоновской томографии // *УМН*, **53**:1(319) (1998), С. 115–198.

14. Попов Д.А. О сферической сходимости интеграла Фурье индикатора N-мерной области // *Матем. сб.*, **189**:7 (1998), С. 145–157.

15. Попов Д.А. О числе целых точек в трехмерных телах вращения // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:2 (2000), С. 121–140.

16. Попов Д.А. Обобщенное преобразование Радона на плоскости, его обращение и условия Кавальери // *Функц. анализ и его прил.*, **35**:4 (2001), С. 38–53.

17. Попов Д.А., Сушко Д.В. Параметрикс для задачи опто-акустической томографии // *Докл. РАН*, **382**:2 (2002), С. 162–164.

18. Попов Д.А. Теорема Пэли–Винера для обобщенного преобразования Радона на плоскости // *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), С. 65–72.

19. Попов Д.А., Сушко Д.В. Восстановление изображений в оптоакустической томографии // *Пробл. передачи информ.*, **40**:3 (2004), С. 81–107.

20. Попов Д.А. Замечания о равномерных составных оценках осциллирующих интегралов с простыми особенностями // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:4 (2008), С. 173–196.

21. Попов Д.А. Поведение асимптотики положительного спектра семейства периодических задач Штурма–Лиувилля при непрерывном переходе от дефинитной к индефинитной задаче // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:3 (2009), С. 151–182.

22. Попов Д.А. О втором члене в формуле Вейля для спектра оператора Лапласа на двумерном торе и числе целых точек в спектральных областях // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), С. 139–176.

23. Попов Д.А. Явная формула для функции распределения собственных значений оператора Лапласа на компактной римановой поверхности рода $g > 1$ // *Функц. анализ и его прил.*, **46**:2 (2012), С. 66–82.

24. Попов Д.А. О формуле Сельберга для строго гиперболических групп // *Функц. анализ и его прил.*, **47**:4 (2013), С. 53–66.

25. Попов Д.А. О формуле Вейля для оператора Лапласа на гиперболических римановых поверхностях // *Функц. анализ и его прил.*, **48**:2 (2014), С. 93–96.

26. Попов Д.А. Оценки и поведение величин $P(x)$, $\Delta(x)$ на коротких интервалах // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **80**:6 (2016), С. 230–246.

27. Попов Д.А. О связях дискретного спектра и спектра резонансов для оператора Лапласа на некомпактной гиперболической римановой поверхности // *Функц. анализ и его прил.*, **53**:3 (2019), С. 61–78.

28. Попов Д.А. Дискретный спектр оператора Лапласа на фундаментальной области модулярной группы и пси-функция Чебышёва // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **83**:5 (2019), С. 167–180.

29. Попов Д.А. Проблема круга и спектр оператора Лапласа на замкнутых двумерных многообразиях // *УМН*, **74**:5(449) (2019), С. 145–162.

30. Попов Д.А. О спектре оператора Лапласа на замкнутых поверхностях // *УМН* (в печати).

31. Попов Д.А. Распределение простых чисел и дискретный спектр оператора Лапласа // *Изв. РАН. Сер. матем.* **84**:5 (2020), С. 151–168.

REFERENCES

1. Popov D.A. 1970, "Approximation of the diffusion boundary layer in flow within a channel", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 195, no. 6, pp. 1373–1376 (Russian).

2. Popov D.A. 1973, "Consideration of longitudinal diffusion in flow within a channel", *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza*, vol. 6, pp. 63–73 (Russian); *Fluid Dynamics*, vol. 8, no. 6, pp. 902–910 (English).

3. Popov D.A. 1975, "A problem with discontinuous boundary conditions and the approximation of the diffusion boundary layer", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 39, no. 1, pp. 109–117 (Russian).

4. Popov D.A. 1975, "Theory of Yang-Mills fields", *TMF*, vol. 24, no. 3, pp. 347–356 (Russian); *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 24, no. 3, pp. 879–885 (English).

5. Popov D.A., Daikhin L.I. 1975, "Einstein spaces and Yang–Mills fields", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 225, no. 4, pp. 790–793 (Russian).

6. Popov D.A., Sushko D.V. 1990, "Convergence of algorithms for the numerical solution of a convolution equation", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 315, no. 2, pp. 309–313 (Russian); 1991, *Dokl. Math.*, vol. 42, no. 3, pp. 784–788 (English).

7. Popov D.A. 1990, "On convergence of a class of algorithms for the numerical Radon transform", *Mathematical Problems of Tomography*, Transl. Math. Monographs, vol. 81, eds. Gelfand J.M., Gindikin S.G., Amer. Math. Soc., pp. 7–65.

8. Popov D.A. 1993, "The convergence of tomographical algorithms and estimation of oscillatory integrals", *Ill-posed Problems in Mathematical Physics and Analysis. Moscow-Utrecht.*

9. Popov D.A., Sokolova E.V., Sushko D.V. 1994, "Mathematical Models in Two-Dimensional Radon Tomography", *Applied Problems of Radon Transform*, S. Gindikin (ed.), Providence: AMS, pp. 129–204.

10. Popov D.A., Sushko D.V. 1994, "Computation of singular convolutions", *Applied Problems of Radon Transform*, S. Gindikin (ed.), Providence: AMS, pp. 43–127.

11. Popov D.A. 1997, "Estimates with constants for some classes of oscillatory integrals", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 52, no. 1(313), pp. 77–148 (Russian); *Russian Math. Surveys*, vol. 52, no. 1, pp. 73–145 (English).

12. Popov D.A. 1997, "Spherical convergence of the Fourier series and integral of the indicator of a two-dimensional domain", *Tr. Mat. Inst. Steklova*, Analytic number theory and applications, Collection of papers. To Prof. Anatolii Alexeevich Karatsuba on occasion of his 60th birthday, vol. 218, Nauka, Moscow, pp. 354–373 (Russian); *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 218, pp. 352–371.

13. Popov D.A. 1998, "Reconstruction of characteristic functions in two-dimensional Radon tomography", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 53, no. 1(319), pp. 115–198 (Russian); *Russian Math. Surveys*, vol. 53, no. 1, pp. 109–193 (English).

14. Popov D.A. 1998, “Spherical convergence of the Fourier integral of the indicator function of an N-dimensional domain”, *Math. sb.*, vol. 189, no. 7, pp. 145–157 (Russian); *Sb. Math.*, vol. 189, no. 7, pp. 1101–1113 (English).

15. Popov D.A. 2000, “On the number of lattice points in three-dimensional solids of revolution”, *Izv. RAN. Ser. Mat*, vol. 64, no. 2, pp. 121–140 (Russian); *Izv. Math.*, vol. 64, no. 2, pp. 343–361 (English).

16. Popov D.A. 2001, “The Generalized Radon Transform on the Plane, the Inverse Transform, and the Cavalieri Conditions”, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 35, no. 4, pp. 38–53 (Russian); *Funct. Anal. Appl.*, vol. 35, no. 4, pp. 270–283 (English).

17. Popov D.A., Sushko D.V. 2002, “A parametrix for a problem of optical-acoustic tomography”, *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 382, no. 2, pp. 162–164 (Russian); 2002, *Dokl. Math.*, vol. 65, no. 1, pp. 19–21 (English).

18. Popov D.A. 2001, “The Paley–Wiener Theorem for the Generalized Radon Transform on the Plane”, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 37, no. 3, pp. 65–72 (Russian); *Funct. Anal. Appl.*, vol. 37, no. 3, pp. 215–220 (English).

19. Popov D.A., Sushko D.V. 2004, “Image Restoration in Optical Acoustic Tomography”, *Probl. Peredachi Inf.*, vol. 40, no. 3, pp. 81–107 (Russian); *Problems Inform. Transmission*, vol. 40, no. 3, pp. 254–278 (English).

20. Popov D.A. 2008, “Remarks on uniform combined estimates of oscillatory integrals with simple singularities”, *Izv. RAN. Ser. Mat*, vol. 72, no. 4, pp. 173–196 (Russian); *Izv. Math.*, vol. 72, no. 4, pp. 793–816 (English).

21. Popov D.A. 2009, “Asymptotic behaviour of the positive spectrum of a family of periodic Sturm–Liouville problems under continuous passage from a definite problem to an indefinite one”, *Izv. RAN. Ser. Mat*, vol. 73, no. 3, pp. 151–182 (Russian); *Izv. Math.*, vol. 73, no. 3, pp. 579–610 (English).

22. Popov D.A. 2011, “On the second term in the Weyl formula for the spectrum of the Laplace operator on the two-dimensional torus and the number of integer points in spectral domains”, *Izv. RAN. Ser. Mat*, vol. 75, no. 5, pp. 139–176 (Russian); *Izv. Math.*, vol. 75, no. 5, pp. 1007–1045 (English).

23. Popov D.A. 2012, “Explicit Formula for the Spectral Counting Function of the Laplace Operator on a Compact Riemannian Surface of Genus $g > 1$”, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 46, no. 2, pp. 66–82 (Russian); *Funct. Anal. Appl.*, vol. 46, no. 2, pp. 133–146 (English).

24. Popov D.A. 2013, “On the Selberg Trace Formula for Strictly Hyperbolic Groups”, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 47, no. 4, pp. 53–66 (Russian); *Funct. Anal. Appl.*, vol. 47, no. 4, pp. 290–301 (English).

25. Popov D.A. 2014, “On the Weyl Formula for the Laplace Operator on Hyperbolic Riemann Surfaces”, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 48, no. 2, pp. 93–96 (Russian); *Funct. Anal. Appl.*, vol. 48, no. 2, pp. 150–153 (English).

26. Popov D.A. 2016, “Bounds and behaviour of the quantities $P(x)$, $\Delta(x)$ on short intervals”, *Izv. RAN. Ser. Mat*, vol. 80, no. 6, pp. 230–246 (Russian); *Izv. Math.*, vol. 80, no. 6, pp. 1213–1230 (English).

27. Popov D.A. 2019, "On relationships between the discrete and resonance spectra for the Laplace operator on a non-compact hyperbolic Riemann surface", *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, vol. 53, no. 3, pp. 61–78 (Russian); *Funct. Anal. Appl.*, to appear (English).

28. Popov D.A. 2019, "The discrete spectrum of the Laplace operator on the fundamental domain of the modular group and the Chebyshev psi-function", *Izv. RAN. Ser. Mat*, vol. 83, no. 5, pp. 167–180 (Russian); *Izv. Math.*, vol. 83, no. 5, pp. 1066–1079 (English).

29. Popov D.A. 2019, "Circle problem and the spectrum of the Laplace operator on closed 2-manifolds", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 74, no. 5(449), pp. 145–162 (Russian); *Russian Math. Surveys*, vol. 74, no. 5, pp. 909–925 (English).

30. Popov D.A. 2021, "On the spectrum of the Laplace operator on closed surfaces", *Uspekhi Mat. Nauk*, to appear (Russian).

31. Popov D.A. 2020, "Distribution of prime numbers and the discrete spectrum of the Laplace operator", Izv. Math., 84:5, pp. 960–977.

Получено 18.07.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.

Сергей Иванович Адян

(1.01.1931–5.05.2020)

5 мая 2020 года на 90-м году жизни скончался выдающийся математик Сергей Иванович Адян (1.01.1931–5.05.2020).

Сергей Иванович поступил на учёбу в Ереванский русский педагогический институт им. Брюсова. После первого курса вместе с группой лучших студентов Еревана его направили для продолжения учёбы в Москву, в Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина (перевод осуществлялся в вуз того же профиля, поэтому в переводе в МГУ ему отказали). Источник.

Сергей Иванович с 1965 года преподавал на кафедре математической логики (с 1992 года кафедра математической логики и теории алгоритмов) механико-математического факультета МГУ. Заведовал отделом математической логики Института математики им. В. А. Стеклова.

С 1991 года — член-корреспондент РАН (секция математики, механики, информатики). С 2000 года — академик РАН.

Работы Сергея Ивановича изменили облик важнейшей области современной алгебры, математической логики и теории алгоритмов. Сергей Иванович сыграл ключевую роль в становлении, развитии и самом существовании кафедры математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета МГУ, Отдела математической логики МИАН.

Выражаем соболезнование родным и близким Сергея Ивановича.

Эрнест Борисович Винберг

(26.07.1937 - 12.05.2020)

С глубоким прискорбием извещаем, что 12 мая 2020 года, после тяжелой болезни скончался доктор физико-математических наук, профессор Эрнест Борисович Винберг (26.07.1937 - 12.05.2020).

Эрнест Борисович широко известен своими яркими работами по группам и алгебрам Ли, алгебраическим группам, гиперболической геометрии. Более 60 лет связывали его с мехматом МГУ, который он окончил в 1959 году, с кафедрой высшей алгебры. Он был блестящим лектором и замечательным педагогом. Многим поколениям студентов запомнились его лекции по основным и специальным алгебраическим курсам. Он подготовил 7 докторов наук и более 40 кандидатов наук.

Светлая память о великолепном ученом и прекрасном человеке Эрнесте Борисовиче Винберге навсегда сохранится в наших сердцах.

Выражаем глубокое соболезнование родным и близким покойного.

Виктор Николаевич Латышев

(9.02.1934 - 13.04.2020)

Деканат, профком, Совет ветеранов механико-математического факультета с глубоким прискорбием извещают, что 13 апреля, после тяжёлой болезни, скончался Виктор Николаевич Латышев (9.02.1934 - 13.04.2020).

Виктор Николаевич д.ф.-м.н., заслуженный профессор МГУ. Широко известен трудами по структурным и алгоритмическим проблемам алгебры, PI-теории. Подготовил много выдающихся учёных. Преподавал на мехмате более 60 лет, его основные и специальные курсы отличались четкостью и глубиной. Виктор Николаевич активно участвовал в жизни МГУ и факультета, в деятельности учёных советов, руководил партийной организацией факультета, был зам. декана по аспирантуре. Около 20 лет заведовал кафедрой высшей алгебры. Он навсегда останется в памяти сотрудников МГУ, студентов и выпускников как замечательный человек, добрый товарищ, чуткий наставник и семьянин.

Евгений Владимирович Подсыпанин

(08.11.1946–19.10.2020)

Евгений Владимирович Подсыпанин — руководитель секции инноватики СПбГПУ. Родился в 1946 г. в г. Махачкала, куда были направлены на работу его родители из г. Ленинграда. В 1949 г. семья переехала в г. Тулу. В 1963 году поступил в школу-интернат №18, созданную при МГУ по инициативе ведущих учёных страны: академиков А. Н. Колмогорова, И. К. Кикоина, И. Г. Петровского и при поддержке Академии наук СССР в лице её президента академика М. В. Келдыша.

В 1965 г. поступил в Ленинградский государственный университет на математико-механический факультет, который закончил с отличием в 1970 г. по специальности «математика». В том же году поступил в аспирантуру ЛГУ по направлению «аналитическая теория чисел».

С января 1974 г. работал в Ленинградском политехническом институте на кафедре «Высшая математика». В 1975 г. защитил кандидатскую диссертацию по специальности 01.01.06 – «Математическая логика, алгебра и теория чисел». В работе использовался круговой метод Харди-Литтлвуда-Раманужана для получения асимптотических формул для числа решений диофантовых уравнений с использованием оценок сумм Клостермана и новый метод оценок сингулярного ряда.

В 1979 г. получил звание доцента по кафедре «Высшая математика», а с 1998 г. профессор кафедры «Высшая математика» СПбГПУ.

Другим направлением его научных исследований было изучение диофантовых неравенств. В соавторстве с профессором А. В. Малышевым написана книга «Аналитические методы в теории систем диофантовых уравнений и неравенств с большим числом неизвестных» в сборнике «Итоги науки и техники Серия Алгебра, Топология, Геометрия, 1974, том 12, страницы

5–50».

Е. В. Подсыпаниным был создан алгоритм, обобщающий цепные дроби, получивший в литературе его имя. Наибольшее количество ссылок на Е. В. Подсыпанина содержится в работах, связанных с этим алгоритмом. Другие авторы исследовали эргодические и другие свойства алгоритма. К этим работам примыкает вопрос о разложении в цепную дробь квадратичных иррациональностей. Е. В. Подсыпаниным были получены интересные формулы для длины периода разложения таких иррациональностей и основных единиц квадратичных полей, в рамках решения диофантовых уравнений и применения методов, упомянутых выше. Едва появившись, эти работы стимулировали появление большого количества работ по этой тематике других авторов.

С 1984 г. по 1987 г. Е. В. Подсыпанин находился в служебной командировке в Алжире (АНДР), где работал по контракту в университете г. Бежайя в должности профессора (maitre-de-conference).

В разные годы работал в приёмной комиссии СПбГПУ. Являлся одним из разработчиков тестовой системы приёмных экзаменов в СПбГПУ и автором большого количества материалов, в частности, книг для подготовки к вступительным экзаменам в вузы.

В советские времена участвовал в выполнении большого количества хоздоговорных работ по прикладным темам в областях исследования магнитных полей, атмосферных явлений, химических реакций с использованием теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей, статистики и теории надёжности. Получил ряд авторских свидетельств.

Светлая память о Евгении Владимировиче сохранится в сердцах его родных, друзей и коллег.

С. В. Востоков, Ю. В. Матиясевич, Ю. В. Нестеренко, В. Н. Чубариков, В. И. Берник, А. Лауринчикас, В. Г. Журавлёв, В. Г. Чирский, Н. М. Добровольский, У. М. Пачев, Ф. В. Подсыпанин, И. Ю. Реброва, Б. М. Широков, Н. Н. Добровольский.

Михаил Александрович Шубин

(1944-2020)

13 мая 2020 скончался известный математик Шубин Михаил Александрович (1944-2020). Он родился в Куйбышеве и учился в той же средней школе, в которой ранее учился Владимир Александрович Кондратьев. В 1966 окончил механико-матем. ф-т МГУ и в 1969 году после окончания аспирантуры (научный руководитель - Марко Иосифович Вишик) был оставлен на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ, где проработал до 1989 года. М.А. Шубин читал оригинальный курс уравнений с частными производными для студентов "экспериментального потока" и различные специальные курсы. Тематика научных работ М.А. Шубина охватывает целый ряд разделов теории уравнений с частными производными, функционального анализа, математической физики. В 1978 году защитил докторскую диссертацию по псевдодифференциальным операторам. С 1994 – в США, профессор Северо-Восточного университета (Бостон, США). М.А.Шубиным написано около 140 печатных работ, под его руководством защитилось 20 кандидатов наук и PhD студентов.

Основные результаты М.А.Шубина связаны с уравнениями в свертках, факторизацией матричных функций и уравнений Винера – Хопфа, он изучал голоморфные семейства подпространств в банаховых пространствах, псевдодифференциальные операторы, методы приближенной спектральной проекции, операторы с почти периодическими коэффициентами, случайные эллиптические операторы, трансверсально эллиптические операторы, псевдодифференциальные операторы на группах Ли, псевдоразностные операторы и их функции Грина, построил полное асимптотическое разложение спектральных инвариантов, применял нестандартный анализ и сингулярные возмущения для обыкновенных дифференциальных уравнений, также изучал эллиптические операторы на многообразиях ограниченной геометрии, нелинейные уравнения, формулы типа Лефшеца, алгебры фон Неймана, идемпотентный анализ, спектры магнитного оператора Шрёдингера. Известен также по инвариантам Новикова-Шубина и замечательным монографиям: "Уравнение Шрёдингера написанной в соавторстве с Феликсом Александровичем Березиным, "Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории и Элементы современной теории", написанной совместно с Юрием Владимировичем Егоровым. Его учебник по уравнениям с частными производными является образцом современного и доступного для студентов. В 2012 году он был награждён Американским математическим обществом за научные результаты.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 21 Выпуск 4

THE EDITORIAL BOARD

Volume 21 Issue 4

TABLE OF CONTENTS

Volume 21 Issue 4