

# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

---

*Научно-теоретический журнал*

Издается с 2001 года

Выходит 4 раза в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-47855

ISSN 2226-8383

Том XXI

Выпуск 3 (75)

Тула

2020

Учредитель: ФГБОУ ВО  
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»  
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,  
г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638,  
8(4872)374051

E-mail: cheb@tspu.ru

URL:  
<http://www.chebsbornik.ru>

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

---

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Министерства просвещения Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

---

---

**Главный редактор**

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

**Ответственные секретари:**

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

**Заместители главного редактора:** Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула), А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

**Редакционная коллегия:**

В. А. Артамонов (Россия, г. Москва)  
В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)  
С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)  
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)  
Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)  
С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)  
С. С. Демидов (Россия, г. Москва)  
В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)  
А. М. Зубков (Россия, г. Москва)  
В. И. Иванов (Россия, г. Тула)  
В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)  
М. А. Королёв (Россия, г. Москва)  
В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)  
Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)  
С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)  
Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)  
У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)  
А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)  
А. А. Фомин (Россия, г. Москва)  
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)  
И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)  
А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)  
В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)  
П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)  
А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)  
Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)  
М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)  
О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)  
З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)  
Х. М. Салиба (Ливан)  
А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)  
Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)  
Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

---

От редакции

---

Данный выпуск Чебышевского сборника посвящен выдающимся представителям математики Санкт-Петербурга: 75-летию профессора Сергея Владимировича Востокова, 80-летию профессора Бориса Бениаминовича Лурье, 80-летию профессора Анатолия Владимировича Яковлева.

К сожалению, 22 августа не стало профессора Бориса Бениаминовича Лурье. Редакция Чебышевского сборника выражает соболезнования родным, друзьям и коллегам Бориса Бениаминовича.

# СОДЕРЖАНИЕ

---

Том 21 Выпуск 3

---

|                                                                                                                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| От редакции .....                                                                                                                                                                                      | 3   |
| С. В. Востоков. Борис Бениаминович Лурье .....                                                                                                                                                         | 6   |
| И. Б. Жуков. К 75-летию Сергея Владимировича Востокова .....                                                                                                                                           | 10  |
| <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Б. Б. Лурье.</span> К 80-летию Анатолия Владимировича Яковлева .....                                                                              | 15  |
| А. А. Артёмов, В. Н. Чубариков. О тригонометрической сумме по модулю разбиения<br>вещественной оси .....                                                                                               | 18  |
| М. В. Бондарко, С. В. Востоков. Ядра весовых структур — это в точности слабо<br>идемпотентно полные категории .....                                                                                    | 29  |
| С. В. Востоков, Т. Ю. Шашков, С. С. Афанасьева. Интеграл Шнирельмана и аналог<br>интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей .....                                                         | 39  |
| С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова. Расширения Инабы полных полей<br>характеристики 0 .....                                                                                                    | 59  |
| Н. М. Глазунов. О гипотезе Ленглендса, глобальных полях и (Д)-штуках .....                                                                                                                             | 68  |
| П. Данчев. Представление матриц над полями в виде матриц с нулевым квадратом<br>и диагональных матриц .....                                                                                            | 84  |
| А. Я. Канель-Белов, Л. Х. Роуэн. Теорема Размыслова — Кемера — Брауна<br>для аффинных PI-алгебр .....                                                                                                  | 89  |
| Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов, Т. А. Акименко, И. Н. Лариошкин. Математическая<br>модель цифровой системы управления с контроллерами фон Неймановского типа<br>сложными многоконтурными объектами ..... | 129 |
| А. Х. Муньос Васкес. Оценки снизу многочленов и линейных форм от значений $F$ -рядов                                                                                                                   | 142 |
| Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва,<br>Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных решёток .....                                                           | 165 |
| М. Е. Чанга. Об асимптотическом поведении некоторых сумм, содержащих функцию<br>количества простых делителей .....                                                                                     | 186 |
| В. В. Юделевич. О среднем значении функций, родственных функции делителей,<br>в кольце многочленов над конечным полем .....                                                                            | 196 |

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

|                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток<br>целочисленными решётками — II ..... | 215 |
| А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических<br>сеток — II .....        | 223 |

---

|                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва. Асимптотическая оценка<br>для тригонометрических сумм алгебраических сеток .....                                                                                                           | 232 |
| А. В. Родионов. Гиперболический параметр приближения квадратичных алгебраических<br>решёток целочисленными .....                                                                                                                             | 241 |
| М. Ш. Шабозов, М. К. Абдукаримзода. Наилучшие квадратурные формулы вычисления<br>криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых .....                                                                                       | 250 |
| ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ                                                                                                                                                                                                              |     |
| И. К. Архипов, В. И. Абрамова, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева. Математическое<br>моделирование свойств упругости в механике композиционных материалов .....                                                                                  | 262 |
| А. Д. Бреки, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, В. Ю. Кузовлев. Эмпирические<br>математические экспертные модели пластичности, прочности и износостойкости<br>материалов на примере стали Р18 .....                                             | 272 |
| Г. М. Журавлев, В. Г. Теличко, Н. С. Куриен, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева.<br>Разработка математического комплекса моделирования процесса разрушения<br>композиционных конструкций на основе высокоскоростных моделей деформирования ..... | 292 |
| В. А. Левин, К. М. Зингерман, К. Ю. Крапивин, М. Я. Яковлев. Спектральный элемент<br>Лежандра в задачах локализации пластических деформаций .....                                                                                            | 306 |
| ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ                                                                                                                                                                                                                                |     |
| А. Е. Устьян, И. В. Добрынина, Ю. Э. Трубицын, А. С. Угаров, Н. М. Добровольский,<br>И. Ю. Реброва. 80-летие профессора Владимира Николаевича Безверхнего .....                                                                              | 317 |
| ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ                                                                                                                                                                                                                            |     |
| Д. В. Горбачев, И. А. Мартыанов. Письмо в редакцию .....                                                                                                                                                                                     | 336 |
| РЕДКОЛЛЕГИЯ .....                                                                                                                                                                                                                            | 339 |
| THE EDITORIAL BOARD .....                                                                                                                                                                                                                    | 343 |
| TABLE OF CONTENTS .....                                                                                                                                                                                                                      | 347 |

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

---

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-6-9

## Борис Бениаминович Лурье

С. В. Востоков

**Сергей Владимирович Востоков** — доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: s.vostokov@spbu.ru*

## Аннотация

Статья посвящена профессору Борису Бениаминовичу Лурье.

*Ключевые слова:* задача погружения, теория Галуа, локальные поля

*Библиография:* 5 названий.

## Для цитирования:

С. В. Востоков. Борис Бениаминович Лурье // Чебышевский сборник, 2020, т.21, вып.3, с. 6–9.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

---

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-6-9

## Boris Beniaminovich Lur'e

S. V. Vostokov

**Sergey Vladimirovich Vostokov** — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, St. Petersburg University (St. Petersburg).

*e-mail: s.vostokov@spbu.ru*

## Abstract

The article is dedicated to Professor Boris Beniaminovich Lurie.

*Keywords:* embedding problem, Galois theory, local fields

*Bibliography:* 5 titles.

## For citation:

S. V. Vostokov, 2020, "Boris Beniaminovich Lur'e", *Chebyshevskii sbornik*, vol.21, no.3, pp. 6–9.



*Борис Бениаминович Лурье*

22 августа 2020 года на 81-м году жизни скончался Борис Бениаминович Лурье, доктор физико-математических наук, многолетний сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, член Санкт-Петербургского Математического общества с 1980 года, многолетний казначей Матеообщества.

Уже в детстве Б. Б. увлёкся математикой, в старших классах школы занимался в математическом кружке Дворца Пионеров (среди его преподавателей был А. Л. Вернер), успешно участвовал в олимпиадах. В 1957 г. стал студентом математико-механического факультета Ленинградского гос. Университета, с 1962 г. до последних дней работал в ПОМИ — Санкт-Петербургском Отделении Математического института им. В.А.Стеклова Российской Академии Наук (ранее — Ленинградском Отделении).

Б. Б. Лурье сначала учился, а затем долгое время работал под руководством Дмитрия Константиновича Фаддеева. Спецкурс Д. К. Фаддеева по теории Галуа, прочитанный в 1961–62 г. определил научные интересы Б. Б. В качестве дипломной работы Б. Б. (по совету Д. К. Фаддеева) выбрал задачу погружения полей с некоммутативным ядром порядка 8 — группой диэдра.

Следует сказать, что задача погружения полей в эти годы была весьма популярна, однако рассматривалась почти исключительно для случая абелева ядра (и вскоре была решена другим учеником Д. К. Фаддеева — А.В.Яковлевым). Б. Б. Лурье первым начал систематическое исследование задачи погружения полей с некоммутативным ядром.

Сначала Б. Б. нашел условия погружаемости для некоммутативных ядер порядка  $p^3$ , (значительно позже, в соавторстве с В. В. Ишхановым, в нескольких статьях был разобран случай  $p^4$ ). Удалось решить задачу погружения для локальных полей, когда ядро содержится в подгруппе Фраттини группы Галуа искомого поля. Эти и некоторые другие результаты вошли в кандидатскую диссертацию Б. Б.

В нескольких работах Б. Б. Лурье исследовал условие согласности Фаддеева-Хассе — необходимое условие разрешимости задачи погружения. В результате это условие удалось свести к случаю  $p$ -групп, а для числовых и локальных полей — к случаю абелева ядра. Был обнаружен класс «универсально разрешимых» задач погружения [1, 2], который шире класса полупрямых задач (это позволило Ж.-П. Серру ввести понятие «ничтожных когомологий»). Был достигнут существенный прогресс при исследовании присоединённых задач погружения, и это позволило решить задачу погружения с ядром, изоморфным знакопеременной группе шести элементов. Было найдено очень простое достаточное условие неразрешимости а радикалах неприводимого уравнения простой степени. Эти результаты легли в основу докторской диссертации Б. Б. Лурье.

В 1990 г. вышла книга «Задача погружения в теории Галуа», написанная Д. К. Фаддеевым, В. В. Ишхановым и Б. Б. Лурье, содержащая систематическое изложение теории погружения и все сколько-нибудь значимые результаты по этой тематике (издательство «Наука» — [5]). В 1997 г. вышел английский перевод этой книги.

В последние годы Б. Б. обратился также к теме поиска рациональных точек на эллиптических кривых. Им предложен новый алгоритм такого поиска и найдены элементарные необходимые условия конгруэнтности чисел [3, 4].

Б. Б. вел и преподавательскую деятельность, был совместителем на кафедре алгебры и теории чисел мат.-мех. факультета. Он много работал со школьниками. В частности, был одним из первых преподавателей Юношеской Математической Школы, вёл кружки во Дворце Пионеров, учительствовал в Академической Гимназии им. Д. К. Фаддеева. Среди учеников Б. Б. немало замечательных учёных. Лекции и семинары Б. Б. всегда собирали много слушателей и отличных отзывов.

В течение многих лет Б. Б. являлся соредактором «Записок научных семинаров ПОМИ», более четверти века был казначеем Петербургского Математического Общества. Б. Б. Лурье увлекался также шахматной композицией. Им опубликовано несколько десятков шахматных этюдов и ретрозадач.

Б. Б. Лурье — был хорошим семьянином, отцом и дедом (жена скончалась в 2016 г.). Его сын Павел — известный ученый, иранист.

Выражаем глубокое соболезнование родственникам и друзьям Б. Б. Добрые воспоминания о Б. Б. на всю жизнь останутся в сердцах всех знавших его людей.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье, Б. Б. Об универсально разрешимых задачах погружения/ Б. Б. Лурье //Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1990. Т. 183. С. 121–126.
2. Ишханов, В. В., Лурье, Б. Б. Универсально разрешимые задачи погружения с циклическим ядром/ В. В. Ишханов , Б. Б. Лурье // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1999. Т. 265. С. 189–197.
3. Лурье, Б. Б. О конгруэнтности простых чисел/ Б. Б. Лурье // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2017. Т. 455. С. 84–90.
4. Лурье, Б. Б., Порецкий, А. М. О конгруэнтности удвоенных простых чисел/ А. М. Порецкий, Б. Б. Лурье // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2018. Т. 470. С. 138–146.
5. Ишханов, В. В., Лурье, Б. Б., Фаддеев, Д. К. Задача погружения в теории Галуа/ В. В. Ишханов , Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев // М.: Наука, 1990.

**REFERENCES**

1. Lurie, B. B., 1990, "On universally solvable immersion problems", Transactions of the V. A. Steklov Mathematical Institute, vol. 183, pp. 121–126.
2. Ishkhanov, V. V., Lurie, B. B., 1999, "Universally Solvable Immersion Problems with Cyclic Kernel", Zap. scientific. this POMI, vol. 265, pp. 189–197.
3. Lurie, B. B., 2017, "On the congruence of primes", Zap. scientific. this POMI, vol. 455, pp. 84–90.
4. Lurie, B. B., Poretsky, A. M., 2018, "On the congruence of doubled primes", Zap. scientific. this POMI, vol. 470, pp. 138–146.
5. Ishkhanov, V. V., Lurie, B. B., Faddeev, D. K., 1990, "The immersion problem in Galois theory", Moscow: Nauka, 1990.

Получено 25.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

---

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-10-14

**К 75-летию Сергея Владимировича Востокова**

И. Б. Жуков

**Игорь Борисович Жуков** — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: i.zhukov@spbu.ru*

**Аннотация**

Статья посвящена юбилею С. В. Востокова.

*Ключевые слова:* локальные поля, локальная теория полей классов, высшие локальные поля, формальные группы, модули Галуа

*Библиография:* 5 названий.

**Для цитирования:**

И. Б. Жуков К 75-летию Сергея Владимировича Востокова // Чебышевский сборник, 2020, т.21, вып.3, с. 10–14.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

---

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-10-14

**To the 75th anniversary of Sergei Vladimirovich Vostokov**

I. B. Zhukov

**Igor Borisovich Zhukov** — Saint Petersburg State University (St. Petersburg).

*e-mail: i.zhukov@spbu.ru*

**Abstract**

The article is dedicated to the 75th anniversary of S. V. Vostokov.

*Keywords:* local fields, local class field theory, higher local fields, formal groups, Galois modules

*Bibliography:* 5 titles.

**For citation:**

I. B. Zhukov, 2020, "To the 75th anniversary of Sergei Vladimirovich Vostokov", *Chebyshevskii sbornik*, vol.21, no.3, pp. 10–14.



*Сергей Владимирович Востоков*

13 апреля 2020 года исполнилось 75 лет крупному российскому математику, заведующему кафедрой высшей алгебры и теории чисел СПбГУ, Президенту Фонда Эйлера Сергею Владимировичу Востокову.

Почти вся жизнь Сергея Владимировича связана с городом на Неве. Здесь он родился, здесь окончил 222 школу («Петришуле»), где преподавал молодой Борис Германович Зив. В 1963 году С. В. Востоков поступает на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (ЛГУ), затем там же — в аспирантуру по кафедре высшей алгебры и теории чисел. В 1973 г. он защитил кандидатскую диссертацию на тему «Аддитивные модули Галуа числовых полей» под руководством З. И. Бореви́ча, в 1980 г. — докторскую диссертацию на тему «Явный закон взаимности в поле алгебраических чисел». В 1982 г. Сергей Владимирович Востоков становится профессором кафедры алгебры и теории чисел ЛГУ, а с 2015 г. возглавляет эту кафедру. В 2013 году С. В. Востоков был награжден премией СПбГУ «За научные труды», а в 2014 году высшей премией Санкт-Петербурга для математиков — премией им. П. Л. Чебышёва.

Главные научные работы С. В. Востокова посвящены теории локальных полей — одному из центральных разделов алгебраической теории чисел. Интерес к этой области сложился у него ещё в студенческие и аспирантские годы благодаря общению с учителями — Зеноном Ивановичем Бореви́чем и Дмитрием Константиновичем Фаддеевым, а также московским математиком Игорем Ростиславовичем Шафаревичем. В кандидатской диссертации Сергей Владимирович получает новые результаты в исследовании аддитивной группы локального поля как модуля Галуа, продолжая направление исследований, начатое З. И. Бореви́чем. Затем он начинает работать над темой явного описания локального символа норменного вычета, то есть локального множителя в законе взаимности Гильберта. В 1978 появляется *opus magnum* С. В. Востокова — работа «Явная форма закона взаимности» [1]. В ней доказана ставшая знаменитой явная фор-

мула для символа норменного вычета  $(a, b)_p$  в терминах разложений  $a$  и  $b$  в степенные ряды. Она включает в себя ранее полученные формулы (например, результат И. Р. Шафаревича) как частные случаи. Локальный символ норменного вычета задаётся независимо от теории полей классов, что создаёт возможности «апостериорного» построения локальной теории полей классов при помощи этой формулы («символа Востокова»). Полученный результат нашёл множество применения в важных теоретико-числовых работах, в том числе у Э. Уайлза и К. Като.

В ряде дальнейших работ С. В. Востокова этот результат обобщается с мультипликативной группы локального поля на случай различных формальных групп  $F$ , определённых над его кольцом целых. Это означает, что вместо обычного символа норменного вычета, то есть спаривания

$$K^*/(K^*)^{p^n} \times K^*/(K^*)^{p^n} \rightarrow \mu_{p^n},$$

где  $\mu_{p^n}$  — группа корней из 1 степени  $p^n$ , строится спаривание

$$K^*/(K^*)^{p^n} \times F(\mathfrak{m}_K)/[p^n]F(\mathfrak{m}_K) \rightarrow \text{Ker}[p^n],$$

где  $F(\mathfrak{m}_K)$  — максимальный идеал кольца целых в локальном поле  $K$  со структурой модуля (над кольцом целых  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Z}_p$  или его надкольцом), задаваемой формальной группой  $F$ , а  $[p^n]$  — умножение на  $p^n$  в этом модуле. Соответствующие результаты были получены последовательно для формальных групп Любина-Тэйта, обобщённых групп Любина-Тэйта, групп Хонды и их обобщений — групп Демченко.

Наиболее впечатляющим продвижением становится обобщение явной формулы для символа норменного вычета на случай многомерных локальных полей.  $n$ -мерные локальные поля были введены в конце 1970-х годов независимо в работах А. Н. Паршина и К. Като. Они определяются рекуррентно: говорят, что на поле  $K$  введена структура  $n$ -мерного локального поля, если на  $K$  задано дискретное нормирование, относительно которого  $K$  полно, и на поле вычетов задана структура  $(n-1)$ -мерного локального поля; при этом под 0-мерными полями подразумеваются конечные поля. (В дальнейшем рассматривался и более общий случай, когда «последнее поле вычетов» — произвольное совершенное поле вычетов простой характеристики, не обязательно конечное.)

Для этих полей А. Н. Паршиным и К. Като была построена теория полей классов, центральный факт которой — существование для такого  $K$  гомоморфизма  $K'_n K \rightarrow \text{Gal}(K^{ab}/K)$ , который для любого конечного абелева расширения  $L/K$  индуцирует изоморфизм между  $K'_n K/N_{L/K} K'_n L$  и  $\text{Gal}(L/K)$ . Здесь  $K'_n K$  —  $n$ -я  $K$ -группа Милнора поля  $K$ , профакторизованная по подгруппе, состоящей из всех бесконечно делимых элементов. Соответственно определён «многомерный» символ норменного вычета (здесь предполагается, что поле  $K$  имеет характеристику 0, а его первое поле вычетов — характеристику  $p > 0$ ).

С. В. Востоков в работе [2] показал, что этот символ индуцируется отображением  $K_{n+1} K \rightarrow \mu_{p^n}$  и получил явную формулу для этого отображения. Как и в одномерном случае, это создаёт возможность явного построения теории полей классов для полей указанного типа.

В 1993 г. AMS издаёт монографию С. В. Востокова и И. Б. Фесенко «Локальные поля и их расширения: конструктивный подход», которая включает как современное введение в теорию локальных полей, так и построение теории полей классов в явном виде на основе формулы для символа норменного вычета и без использования когомологий. Она быстро становится важнейшим источником информации о локальных полях для всех, кто изучает алгебраическую теорию чисел; в 2002 г. выходит в свет новое, расширенное издание [3]. В дальнейшем Сергей Владимирович Востоков получил множество новых результатов в уже названном и смежных направлениях, включая различные обобщения формулы для символа норменного вычета, классификацию формальных групп над кольцами целых локальных полей, описание строения модулей Галуа и др. Фактически С. В. Востоков совместно с учениками создал и

развивает новое направление в теории чисел — «конструктивную теорию полей классов» ([4], [5]). Наконец, недавние работы Сергея Владимировича были посвящены приложениям явных формул к построению криптографических систем.

У С. В. Востокова много учеников, созданная им научная школа — заметное явление в математической жизни страны. Среди тех, кто у него учился и защищался — профессора, работающие в университетах России, Великобритании, Молдовы, Франции. И тут дело не только в научном и педагогическом таланте Сергея Владимировича, но и в том огромном человеческом внимании, которое Сергей Владимирович оказывает ученикам, душевной поддержке, которую они от него получают.

Многие годы и десятилетия работает «арифметический» семинар под руководством С. В. Востокова, где обмениваются идеями ученики С. В., принадлежащие разным поколениям. Сергей Владимирович организовал ряд конференций по алгебраической теории чисел и арифметической геометрии в Санкт-Петербурге, собиравших крупнейших специалистов со всего мира.

Сергей Владимирович Востоков уделяет много сил и времени общественным делам, прежде всего — связанным с математическим образованием. Ещё в 1960-ые годы С. В. был организатором первых ЛМШ (летних математических школ) при ЛГУ, принимал участие в работе кружков Юношеской математической школы, в дальнейшем — в работе ФМШ-45 (Академической гимназии СПбГУ). В 2006 г., в преддверии юбилея Эйлера, создаётся Международный благотворительный фонд поддержки математики имени Леонарда Эйлера, и С. В. Востоков становится его президентом. Запускается целый ряд программ по поддержке учёных, студентов, школьников, учителей математики. В частности, под руководством Сергея Владимировича ежегодно с 2007 г. проходит Олимпиада учителей математики Санкт-Петербурга и Ленинградской области. С. В. руководит работой интернет-школы «Унишанс», организует проходящие 2–3 раза в год выездные семинары для учителей и школьников Ленинградской области. Сергей Владимирович много лет активно участвует в работе Санкт-Петербургского математического общества, он вице-президент Общества.

Наконец — последнее по порядку, но отнюдь не по значению — Сергей Владимирович уже 5 лет, несмотря на все сложности нынешнего времени, успешно руководит нашей кафедрой.

Дорогой Сергей Владимирович, от имени учеников и коллег поздравляю Вас с юбилеем! Желаю новых успехов в науке, работе с учениками, общественных делах, поддержки семьи и друзей, здоровья и долгих лет!

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Востоков, С. В. Явная форма закона взаимности / С. В. Востоков // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42, №6. С. 1288–1321.
2. Востоков, С. В. Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля / С. В. Востоков // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49, №2. С. 283–308.
3. Fesenko I. B., Vostokov, S. V. Local fields and their extensions. A constructive approach / I. B. Fesenko, S. V. Vostokov // Second edition, AMS, Providence, RI, 2002.
4. Беккер, Б. М., Бенуа, Д. Г., Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Смирнов, А. Л., Фесенко, И. Б. О семинаре “Конструктивная теория полей классов” / Б. М. Беккер, Д. Г. Бенуа, С. В. Востоков, И. Б. Жуков, А. Л. Смирнов, И. Б. Фесенко // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, №1. С. 177–193.
5. Востоков, С. В., Афанасьева, С. С., Бондарко, М. В., Волков, В. В., Демченко, О. В., Иконникова, Е. В., Жуков, И. Б., Некрасов, И. И., Питаль, П. Н. Явные конструкции и

арифметика числовых локальных полей/ С. В. Востоков, С. С. Афанасьева, М. В. Бондарко, В. В. Волков, О. В. Демченко, Е. В. Иконникова, И. Б. Жуков, И. И. Некрасов, П. Н. Питайль // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3

## REFERENCES

1. Vostokov, S. V., 1978, "The explicit form of the law of reciprocity", *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. mat.*, vol. 42, no. 6, pp. 1288–1321.
2. Vostokov, S. V., 1985, "An explicit construction of the theory of class fields for a multi-dimensional local field", *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. mat.*, vol. 49, no. 2, pp. 283-308.
3. Fesenko I. B., Vostokov, S. V., 2002, "Local fields and their extensions. A constructive approach", Second edition, AMS, Providence, RI.
4. Becker, B. M., Benois, D. G., Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., Smirnov, A. L., Fesenko, I. B., 1992, "About the seminar "Constructive theory of class fields"", *Algebra and Analysis*, vol. 4, no. 1, pp. 177-193.
5. Vostokov, S.V., Afanasyeva, S.S., Bondarko, M.V., Volkov, V.V., Demchenko, O.V., Ikonnikova, E.V., Zhukov, I.B., Nekrasov, I.I., Pital', P.N., 2017, "Explicit constructions and arithmetic of numerical local fields", *Bulletin of St. Petersburg State University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, vol. 4 (62), iss. 3.

Получено 25.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-15-17

## К 80-летию Анатолия Владимировича Яковлева

Б. Б. Лурье

**Борис Бениаминович Лурье** — Санкт-Петербургское отделение Математического института РАН (г. Санкт-Петербург).  
*e-mail: borislurje@mail.ru*

## Аннотация

Статья посвящена юбилею А. В. Яковлева.

*Ключевые слова:* задача погружения

*Библиография:* 1 название.

## Для цитирования:

Б. Б. Лурье К 80-летию Анатолия Владимировича Яковлева // Чебышевский сборник, 2020, т.21, вып.3, с. 15–17.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 51(09)

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-15-17

## To the 80th anniversary of Anatoly Vladimirovich Yakovlev

B. B. Lur'e

**Boris Beniaminovich Lur'e** — Saint Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of RAS (St. Petersburg).  
*e-mail: — borislurje@mail.ru*

## Abstract

The article is dedicated to the anniversary of A.V. Yakovlev.

*Keywords:* the problem of immersion

*Bibliography:* 1 title.

## For citation:

B. B. Lur'e, 2020, "To the 80th anniversary of Anatoly Vladimirovich Yakovlev", *Chebyshevskii sbornik*, vol.21, no.3, pp. 15–17.



*Анатолий Владимирович Яковлев*

4 мая 2020 г. исполнилось 80 лет Анатолию Владимировичу Яковлеву.

Математическое дарование Анатолия Владимировича проявилось достаточно рано. Он был победителем всех математических олимпиад, при этом в кружках не занимался. В 1957 г. А. В. стал студентом математико-механического факультета Лен. гос. университета, и с тех пор его судьба всегда была связана с факультетом. Будучи сильнейшим из студентов курса, А. В. получал Ленинскую стипендию, и по окончании в 1962 г. был оставлен в аспирантуре.

А. В. Яковлеву повезло с учителями. Достаточно вспомнить имена И. П. Натансона, Б. А. Венкова, В. А. Залгаллера, Н. А. Лебедева, З. И. Боровича, В. А. Рохлина. Но его главным учителем стал Дмитрий Константинович Фаддеев, который всегда гордился тем, что у него такой замечательный ученик. Спецкурс Д. К. Фаддеева, посвящённый теории Галуа и, в первую очередь, задаче погружения полей, определил научные интересы Анатолия Владимировича на многие годы, причём А. В. и сейчас постоянно обращается к этой проблематике.

Уже будучи студентом, А. В. получил свой первый весомый результат — решение задачи погружения с циклическим ядром, и изложил его на 4-м Всесоюзном Математическом съезде (Ленинград, 1961). Но вслед за этим последовала сенсация — полное решение задачи погружения с абелевым ядром [1], которая сразу выдвинула совсем молодого ученого в ряды крупнейших алгебраистов. На защите его кандидатской диссертации И. Р. Шафаревич, сам много занимавшийся этой задачей, сравнил А. В. с римским триумфатором, выведшим на свой триумф побеждённых соперников. Это достижение высоко оценил и Ж.-П. Серр, у которого А. В. стажировался в Париже в 1967–68 г.

Следующим замечательным достижением стало описание группы Галуа алгебраического замыкания локального поля в терминах образующих и соотношений, лёгшее в основу его докторской диссертации, защищённой в 1972 г. В ходе этой работы А. В. Яковлев обобщил теорию симплектических пространств с операторами, начатую в работах Д. К. Фаддеева.

Можно много перечислять замечательные достижения Анатолия Владимировича за его долгую работу в науке. Отметим лишь самые главные: введённое им понятие «универсально согласных» задач погружения (давшее новый подход к обратной задаче теории Галуа); описание строения мультипликативной группы локального поля как группы с операторами; теория алгебр Хопфа; теория целочисленных и  $p$ -адических представлений; теория гомологической определённости; теория абелевых групп без кручения. За цикл работ «Прямые разложения

абелевых групп и модулей» А. В. Яковлев в 2003 году был удостоен премии им. А. И. Мальцева Российской Академии Наук.

Более полувека Анатолий Владимирович преподаёт на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского (ранее — Ленинградского) университета. Его лекции отличает строгость и понятность изложения, разнообразие методов, высокая математическая и общечеловеческая культура. Его влияние испытали на себе многие поколения петербургских математиков. Число учеников А. В. Яковлева огромно. Назовём лишь имена А. А. Суслина (безвременно ушедшего великого учёного), Н. Л. Гордеева, А. С. Меркурьева (последние двое были аспирантами А. В.). В течение многих лет Анатолий Владимирович возглавлял кафедру алгебры и теории чисел, и его руководство сказывается на замечательном климате на кафедре, сформировавшемся при его предшественниках — Б. А. Венкове, Д. К. Фаддееве, З. И. Боровиче. А. В. — неизменный член Ученого Совета факультета, многие годы возглавлял методический совет отделения математики факультета. С 1995 г. А. В. руководит общегородским алгебраическим семинаром им. Д. К. Фаддеева.

Большое внимание А. В. уделяет и работе со школьниками. Он преподавал в Юношеской Математической Школе (ЮМШ) в годы её становления, в 45-м физико-математическом интернате (ныне — Академическая Гимназия им. Д. К. Фаддеева), был членом и председателем жюри городской математической олимпиады.

А. В. Яковлев — с его талантом, чувством долга, интеллигентностью, демократичностью, доброжелательностью — служит тем компасом, на который стремятся равняться его коллеги, ученики и все те, кому повезло его знать.

Мы поздравляем Анатолия Владимировича Яковлева с его славным юбилеем и желаем ему крепкого здоровья и долгих лет жизни.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. В. Яковлев. Задача погружения полей // Докл. АН СССР, 150:5 (1963), С. 1009–1011.

## REFERENCES

1. A. V. Yakovlev, 1963, "The problem of immersion of fields", *Dokl. USSR Academy of Sciences*, 150:5, P. 1009-1011.

Получено 25.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-18-28

О тригонометрической сумме по модулю разбиения  
вещественной оси

А. А. Артемов, В. Н. Чубариков

**Александр Андреевич Артемов** — студент механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: alexartemov21@gmail.com*

**Владимир Николаевич Чубариков** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su*

## Аннотация

Найдена оценка тригонометрической суммы вида

$$S = \sum_{a < t_s \leq b} e^{2\pi i f(t_s)},$$

где  $a \geq 0, a \leq b$  — вещественные числа,  $t_s$  — возрастающая к бесконечности последовательность неотрицательных чисел,  $f(t)$  — гладкая вещественная функция.

Здесь также доказываются аналоги формул Эйлера, Сони́на, Пуассона и ван дер Корпута для рассматриваемой суммы.

Пусть задана последовательность  $\Delta$  точек

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_s < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty,$$

на положительной полуоси вещественной прямой.

Для неотрицательного числа  $x$  определим аналог целой части  $[x]_\Delta$ , отвечающий последовательности  $\Delta : [x]_\Delta = t_s$ , если  $t_s \leq x < t_{s+1}, s \geq 0$ . Дробная часть  $\{x\}_\Delta$  определяется равенством

$$\{x\}_\Delta = \frac{x - t_s}{t_{s+1} - t_s},$$

если  $t_s \leq x < t_{s+1}, s \geq 0$ , причём  $0 \leq \{x\}_\Delta < 1$ .

Определим аналог функции Бернулли, отвечающий последовательности  $\Delta : \rho_\Delta(x) = 0, 5 - \{x\}_\Delta$

Тогда справедлив следующий аналог теоремы ван дер Корпута для разбиений. Пусть  $\Delta = \{t_s\}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s < \dots$ , — разбиение полуоси  $t \geq 0$  вещественной прямой,  $\delta_s = t_{s+1} - t_s \geq 1, \delta(a, b) = \max_{a \leq x \leq b} \rho'_\Delta(x)$  и пусть задана последовательность  $\Delta_0 = \{\mu_s\}, \mu_s = 0, 5(t_s + t_{s+1}), s \geq 0$ , и точки  $a, b \in \Delta_0$ , пусть, также,  $f'(x)$  является непрерывной, монотонной и знакопостоянной функцией в промежутке  $a < x \leq b$ , причём найдётся постоянная  $\delta$  такая, что  $0 < 2\delta\delta^{-1}(a, b) < 1$  и что для всех  $x$  из этого промежутка справедливо неравенство  $|f'(x)| \leq \delta$ . Тогда имеем

$$\sum_{a < t_s \leq b} e^{2\pi i f(t_s)} = \int_a^b \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i f(x)} dx + 10\theta \frac{\delta}{1 - \delta\delta^{-1}(a, b)}, |\theta| \leq 1.$$

*Ключевые слова:* разбиение вещественной оси; тригонометрические суммы по модулю разбиения; теорема Ван дер Корпута о замене тригонометрической суммы по модулю разбиения на интеграл; формулы Эйлера, Сонина, Пуассона суммирования по точкам разбиения.

*Библиография:* 16 названий.

#### Для цитирования:

А. А. Артемов, В. Н. Чубариков. О тригонометрической сумме по модулю разбиения вещественной оси // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 18–28.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-18-28

### On the trigonometric sum modulo subdivision of the real axis

A. A. Artemov, V. N. Chubarikov

**Alexander Andreevich Artemov** — student, Faculty of Mechanics and Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail:* alexartemov21@gmail.com

**Vladimir Nikolaevich Chubarikov** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, president of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail:* chubarik1@mech.math.msu.su

#### Abstract

The estimate of the trigonometric sum of the kind

$$S = \sum_{a < t_s \leq b} e^{2\pi i f(t_s)},$$

where  $a \geq 0, a \leq b$  are real numbers,  $t_s$  is increasing to infinity of non-negative numbers,  $f(t)$  is a smooth real function, is found.

Here also there are proved the analogues of Euler's, Sonin's, Poisson's and van der Corput's formulas for considering sum.

Let be given the sequence of  $\Delta$  points

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_s < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty,$$

on the positive half-axis of the real line.

For non-negative number  $x$  we define the analogue of the integer part  $[x]_\Delta$ , meeting to the sequence  $\Delta : [x]_\Delta = t_s$ , if  $t_s \leq x < t_{s+1}, s \geq 0$ . The fractional part  $\{x\}_\Delta$  is defined by the equality

$$\{x\}_\Delta = \frac{x - t_s}{t_{s+1} - t_s},$$

if  $t_s \leq x < t_{s+1}, s \geq 0$ , moreover  $0 \leq \{x\}_\Delta < 1$ .

We define the analogue of the Bernoulli function meeting to the sequence  $\Delta : \rho_\Delta(x) = 0, 5 - \{x\}_\Delta$ .

Then is valid the following analogue of the van der Corput's theorem for subdivisions.

Let  $\Delta = \{t_s\}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s < \dots$ , be a subdivision of the half-axis  $t \geq 0$  of the real line,  $\delta_s = t_{s+1} - t_s \geq 1$ ,  $\delta(a, b) = \max_{a \leq x \leq b} \rho'_\Delta(x)$ , and let be given the sequence  $\Delta_0 = \{\mu_s\}$ ,  $\mu_s = 0, 5(t_s + t_{s+1}), s \geq 0$ , and points  $a, b \in \Delta_0$ , let, also,  $f'(x)$  be continuous, monotonic sign-constant in the interval  $a < x \leq b$ , moreover there exists the constant  $\delta$  such that  $0 < 2\delta\delta^{-1}(a, b) < 1$  and that for all  $x$  from this interval is valid inequality  $|f'(x)| \leq \delta$ . Then we have

$$\sum_{a < t_s \leq b} e^{2\pi i f(t_s)} = \int_a^b \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i f(x)} dx + 10\theta \frac{\delta}{1 - \delta\delta^{-1}(a, b)}, |\theta| \leq 1.$$

**Keywords:** subdivision of the real axis; the trigonometric sum modulo subdivision; Van der Corput's theorem on replacing a trigonometric sum modulo subdivision to an integral; the Euler's, Sonin's, Poisson's summation formulas on points of subdivision.

**Bibliography:** 16 titles.

### For citation:

A. A. Artemov, V. N. Chubarikov, 2020, "On the trigonometric sum modulo subdivision of the real axis", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 18–28.

## 1. Введение

Настоящую статью авторы посвящают светлой памяти Г. И. Архипова.

В работе [8] (см. [9], с. 355–357, [5], [1], с. 25) была доказана следующая теорема, уточняющая остаточный член в формуле ван дер Корпута [3], [4] о замене тригонометрической суммы на интеграл.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $a$  и  $b$  — полуцелые числа,  $f(x)$  — вещественная функция на  $(a, b)$ , причём  $f'(x)$  непрерывна и монотонна на  $(a, b)$  и  $|f'(x)| \leq \delta < 1$ . Тогда справедлива формула

$$\sum_{a < n < b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx + R_0,$$

где

$$|R_0| \leq \frac{4\delta}{1 - \delta}.$$

Целью настоящей работы является оценка тригонометрической суммы  $S$  по модулю разбиения положительной полуоси вещественной прямой,

$$S = \sum_{s \leq P} e^{2\pi i f(t_s)},$$

где  $t_s$  — возрастающая последовательность неотрицательных чисел,  $f(t)$  — гладкая вещественная функция.

Это предполагает изучение тригонометрических сумм для гладких функций или функций ограниченной вариации на “временной” последовательности, что может привести к решению задач математической физики.

Здесь доказываются аналоги формул Эйлера, Сони́на, Пуассона и ван дер Корпута для разбиения  $\Delta$ .

Рассмотрим последовательность  $\Delta$  точек

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_s < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty,$$

на полуоси вещественной прямой.

Для неотрицательного числа  $x$  определим аналог целой части  $[x]_\Delta$ , отвечающий последовательности  $\Delta : [x]_\Delta = t_s$ , если  $t_s \leq x < t_{s+1}$ ,  $s \geq 0$ . Дробная часть  $\{x\}_\Delta$  определяется равенством

$$\{x\}_\Delta = \frac{x - t_s}{t_{s+1} - t_s},$$

если  $t_s \leq x < t_{s+1}$ ,  $s \geq 0$ , причём  $0 \leq \{x\}_\Delta < 1$ .

Определим также аналог функции Бернулли, отвечающий последовательности  $\Delta : \rho_\Delta(x) = 0,5 - \{x\}_\Delta$

**ТЕОРЕМА 2.** (Теорема ван дер Корпута для разбиений). Пусть

$$\Delta = \{t_s\}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s < \dots,$$

— разбиение полуоси  $t \geq 0$  вещественной прямой,  $\delta_s = t_{s+1} - t_s \geq 1$ ,  $\delta(a, b) = \max_{a \leq x \leq b} \rho'_\Delta(x)$  и пусть задана последовательность  $\Delta_0 = \{\mu_s\}$ ,  $\mu_s = 0,5(t_s + t_{s+1})$ ,  $s \geq 0$ , и точки  $a, b \in \Delta_0$ , пусть, также,  $f'(x)$  является непрерывной, монотонной и знакопостоянной функцией в промежутке  $a < x \leq b$ , причём найдётся постоянная  $\delta$  такая, что  $0 < 2\delta\delta^{-1}(a, b) < 1$  и что для всех  $x$  из этого промежутка справедливо неравенство  $|f'(x)| \leq \delta$ . Тогда имеем

$$\sum_{a < t_s \leq b} e^{2\pi i f(t_s)} = \int_a^b \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i f(x)} dx + 10\theta \frac{\delta}{1 - \delta\delta^{-1}(a, b)}, |\theta| \leq 1.$$

## 2. Вспомогательные утверждения

Для неотрицательного числа  $x$  определим аналог целой части  $[x]_\Delta$ , отвечающий последовательности  $\Delta : [x]_\Delta = t_s$ , если  $t_s \leq x < t_{s+1}$ ,  $s \geq 0$ . Дробная часть  $\{x\}_\Delta$  определяется равенством

$$\{x\}_\Delta = \frac{x - t_s}{t_{s+1} - t_s},$$

если  $t_s \leq x < t_{s+1}$ ,  $s \geq 0$ , причём  $0 \leq \{x\}_\Delta < 1$ .

Определим также аналог функции Бернулли, отвечающий последовательности  $\Delta : \rho_\Delta(x) = 0,5 - \{x\}_\Delta$

**ЛЕММА 1.** (Формула Л. Эйлера для разбиений.) Пусть  $f(x)$  — гладкая функция при  $x \geq 0$ . Тогда

$$\sum_{a < t_s \leq x} f(t_s) - \rho_\Delta(x)f(x) = - \int_a^x (\rho'_\Delta(u)f(u) + \rho_\Delta(u)f'(u)) du - \rho_\Delta(a)f(a).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Правая часть равенства представляет функцию  $F(x)$ , а левая часть — функцию  $G(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . На этом отрезке обе функции — непрерывны, поскольку в точке  $x \in \Delta$  “скачок суммы гасится скачком функции  $-\rho_\Delta(x)f(x)$ ”, функция  $G(x)$  непрерывна по свойству интеграла Римана как функции верхнего предела интегрирования. В остальных точках функции  $F(x)$  и  $G(x)$  дифференцируемы и их производные равны  $-(\rho'_\Delta(u)f(u) + \rho_\Delta(u)f'(u))$ . Кроме того,  $F(a) = G(a) = -\rho_\Delta(a)f(a)$ . Тогда, как первообразные  $F(x) = G(x)$  для любого  $x \in [a, b]$ . Лемма доказана.  $\square$

Далее определим функцию  $\sigma_\Delta(x) = \int_0^x \rho_\Delta(u) du$ . Из формулы Л. Эйлера суммирования значений гладкой функции по целым точкам, отвечающим последовательности  $\Delta$ , имеем интегрированием по частям аналог формулы Н. Я. Сони́на.

ЛЕММА 2. (Формула Н. Я. Сониной для разбиений). Пусть функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную на полуоси  $x \geq 0$ . Тогда

$$\sum_{a < t_s \leq x} f(t_s) = - \int_a^x \rho'_\Delta(x) f(x) dx + \rho_\Delta(x) f(x) - \rho_\Delta(a) f(a) - \\ - \sigma_\Delta(x) f'(x) + \sigma_\Delta(a) f'(a) + \int_a^x \sigma_\Delta(x) f''(x) dx.$$

ЛЕММА 3. (Остаток ряда Фурье периодизированной первой функции Бернулли). Пусть

$$\rho(x) = 0,5 - \{x\}, s_n(x) = \sum_{m=1}^n \frac{\sin(2\pi m x)}{\pi m}, n \geq 1.$$

Тогда при любом натуральном  $n$  справедлива формула

$$\rho(x) = s_n(x) + \sigma_n(x),$$

где

$$|\sigma(x)| \leq r_n(x) = \frac{4}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2 \pi x}}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [10], с. 440, теорема 1.  $\square$

Пусть, как и раньше,  $\Delta = \{t_s\}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s < \dots, \delta_s = t_{s+1} - t_s, s \geq 0$ . Зададим последовательность  $\Delta_0 = \{\mu_s\}, \mu_s = 0,5(t_s + t_{s+1}), s \geq 0$ .

ЛЕММА 4. (Формула Пуассона для разбиений). Пусть  $a \leq b \in \Delta_0$ , и функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную на отрезке  $[a, b]$ , причём найдётся число  $M > 0$  такое, что  $|f'(x)| \leq M$  на  $[a, b]$ .

Тогда для любого натурального числа  $n$  справедлива формула

$$\sum_{a < t_s \leq b} f(t_s) = \sum_{m=-n}^n \int_a^b \rho'_\Delta(x) f(x) e^{2\pi i m \{x\}_\Delta} dx + R_n,$$

где

$$|R_n| \leq \frac{4M(b-a)(1 + \ln n)}{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее воспользуемся формулой Л. Эйлера (лемма 1). Имеем  $\rho_\Delta(a) = \rho_\Delta(b) = 0$ ,

$$S = - \int_a^b (\rho'_\Delta(x) f(x) + \rho_\Delta(x) f'(x)) dx.$$

Заметим, что отсюда при  $s \geq 1$  следует равенство

$$f(t_s) = - \int_{\mu_{s-1}}^{\mu_s} (\rho'_\Delta(x) f(x) + \rho_\Delta(x) f'(x)) dx.$$

При  $t_s < x \leq t_{s+1}, n \geq 1$ , находим

$$\rho_\Delta(x) = 0,5 - \{x\}_\Delta = 0,5 - \left\{ \frac{x - t_s}{\delta_s} \right\} = \rho \left( \frac{x - t_s}{\delta} \right) = s_n \left( \frac{x - t_s}{\delta} \right) + \sigma_n \left( \frac{x - t_s}{\delta} \right),$$

где для любого вещественного  $y$

$$s_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2\pi ky)}{\pi k}, |\sigma_n(y)| \leq r_n(y) = \frac{4}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2(\pi y)}}$$

Далее представим  $S$  в виде  $S = T_n + R_n$ , где

$$T_n = - \sum_{a < t_s \leq b} \left( \int_{\mu_{s-1}}^{t_s} \left( s_n \left( \frac{x - t_{s-1}}{\delta_{s-1}} \right) f'(x) + \frac{f(x)}{\delta_{s-1}} \right) dx + \int_{t_s}^{\mu_s} \left( s_n \left( \frac{x - t_s}{\delta_s} \right) f'(x) + \frac{f(x)}{\delta_s} \right) dx \right),$$

$$|R_n| \leq \sum_{a < t_s \leq b} \left( \int_{\mu_{s-1}}^{t_s} r_n \left( \frac{x - t_{s-1}}{\delta_{s-1}} \right) f'(x) dx + \int_{t_s}^{\mu_s} r_n \left( \frac{x - t_s}{\delta_s} \right) f'(x) dx \right).$$

Интегрируя по частям, преобразуем  $T_n$ . Сначала при  $a < t_s < t_{s+1} < b$  находим

$$\begin{aligned} - \int_{t_s}^{t_{s+1}} s_n \left( \frac{x - t_s}{\delta_s} \right) f'(x) dx &= - f(x) s_n \left( \frac{x - t_s}{\delta_s} \right) \Big|_{t_s}^{t_{s+1}} + \int_{t_s}^{t_{s+1}} s'_n \left( \frac{x - t_s}{\delta_s} \right) f(x) dx = \\ &= \int_{t_s}^{t_{s+1}} \frac{2f(x)}{\delta_s} \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{2\pi k(x - \mu_s)}{\delta_s} \right) dx. \end{aligned}$$

Таким образом

$$- \int_{t_s}^{t_{s+1}} \rho'_\Delta(x) f(x) dx - \int_{t_s}^{t_{s+1}} s_n \left( \frac{x - t_s}{\delta_s} \right) f'(x) dx = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{\delta_s} \int_{t_s}^{t_{s+1}} f(x) e^{\frac{2\pi i k(x - t_s)}{\delta_s}} dx.$$

Аналогично, получим

$$\begin{aligned} - \int_{\mu_s}^{t_{s+1}} \rho'_\Delta(x) f(x) dx - \int_{\mu_s}^{t_{s+1}} s_n \left( \frac{x - t_s}{\delta_s} \right) f'(x) dx &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{\delta_s} \int_{\mu_s}^{t_{s+1}} f(x) e^{\frac{2\pi i k(x - t_s)}{\delta_s}} dx, \\ - \int_{t_s}^{\mu_s} \rho'_\Delta(x) f(x) dx - \int_{t_s}^{\mu_s} s_n \left( \frac{x - t_s}{\delta_s} \right) f'(x) dx &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{\delta_s} \int_{t_s}^{\mu_s} f(x) e^{\frac{2\pi i k(x - t_s)}{\delta_s}} dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$T_n = \int_a^b \rho'_\Delta(x) f(x) e^{2\pi i m\{x\}_\Delta} dx$$

Оценим  $|R_n|$ . Имеем

$$|R_n| = \left| \int_a^b \sigma_n(\{x\}_\Delta) f'(x) dx \right| \leq 4M \int_a^b r_n(\{x\}_\Delta) dx.$$

Поскольку при  $t_s \leq x < t_{s+1}$  справедлива цепочка соотношений

$$\int_a^b r_n(\{x\}_\Delta) dx = 8 \int_0^{0,5\delta_s} \frac{dx}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2(\pi x/\delta_s)}} \leq$$

$$\leq 8 \int_0^{0,5\delta_s n^{-1}} dx + 8 \int_{0,5\delta_s n^{-1}}^{0,5\delta_s} \frac{\delta_s dx}{2n} = 4\delta_s \frac{1 + \ln n}{n}$$

получим

$$|R_n| \leq \frac{4M(b-a)(1 + \ln n)}{n}.$$

Лемма доказана.  $\square$

### 3. Доказательство теоремы 2

Сначала будем предполагать, что на интервале  $(a, b)$  находится не менее двух точек последовательности  $\Delta$ . Без ограничения общности можно предполагать, что  $f'(x) > 0$ . Воспользуемся формулой Пуассона суммирования значений функции по последовательности  $\Delta$ . Имеем  $a < b, a, b \in \Delta_0$ . Положим  $n = [8(b-a) \ln(b-a+1)] + 1$ . Из леммы 4 следует, что

$$\sum_{a < t_s \leq b} f(t_s) = \sum_{m=-n}^n U(m) + R_n,$$

где

$$U(m) = \int_a^b \rho'_\Delta(x) f(x) e^{2\pi i m \{x\}_\Delta} dx, R_n \ll \delta.$$

Заметим, что

$$U(0) = \int_a^b \rho'_\Delta(x) f(x) dx.$$

Оценим  $U(m)$  при  $m \geq 1$ . Имеем

$$U(m) = \sum_{a < t_s \leq b} (U(m, s) + U_a(m) + U_b(m)),$$

где

$$U(m, s) = \int_{t_s}^{t_{s+1}} \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i (f(x) + m \{x\}_\Delta)} dx,$$

$$U_a(m) = \int_a^{a'} \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i (f(x) + m \{x\}_\Delta)} dx,$$

$$U_b(m) = \int_{b'}^b \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i (f(x) + m \{x\}_\Delta)} dx,$$

причём  $a'$  — ближайший к точке  $a$  член последовательности  $\Delta$ , превосходящий  $a$ , и  $b'$  — ближайший к точке  $b$  член последовательности  $\Delta$ , не превосходящий  $b$ .

Произведём в интеграле  $U(m, s)$  замену переменной интегрирования вида

$$y = y(x) = f(x) + \frac{m(x - t_s)}{\delta_s}, y(t_s) = f(t_s), y(t_{s+1}) = f(t_{s+1}) + m.$$

Поскольку

$$|y'| = \left| f'(x) + \frac{m}{\delta_s} \right| \geq \frac{|m|}{\delta_s} - \delta \geq \frac{1}{\delta_s} - \delta > 0,$$

функция  $y = y(x)$  является монотонной, существует гладкая обратная функция  $x = x(y)$ .

Далее, интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} U(m, s) &= \frac{1}{2\pi i \delta_s} \int_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})+m} \frac{1}{f'(x) + \frac{m}{\delta_s}} de^{2\pi i y} = \\ &= \frac{1}{2\pi i \delta_s} e^{2\pi i y} \frac{1}{f'(x(y)) + \frac{m}{\delta_s}} \Big|_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})+m} - \frac{1}{2\pi i \delta_s} \int_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})+m} e^{2\pi i y} d \left( \frac{1}{f'(x(y)) + \frac{m}{\delta_s}} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &2\pi i \delta_s (U(m, s) + U(-m, s)) = \\ &= e^{2\pi i f(t_{s+1})} \left( \frac{1}{f'(x(f(t_{s+1}) + m)) + \frac{m}{\delta_s}} + \frac{1}{f'(x(f(t_{s+1}) - m)) - \frac{m}{\delta_s}} \right) - \\ &- e^{2\pi i f(t_s)} \left( \frac{1}{f'(x(f(t_s))) + \frac{m}{\delta_s}} + \frac{1}{f'(x(f(t_s))) - \frac{m}{\delta_s}} \right) - \\ &- \int_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})+m} e^{2\pi i y} d \left( \frac{1}{f'(x(y)) + \frac{m}{\delta_s}} \right) - \int_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})-m} e^{2\pi i y} d \left( \frac{1}{f'(x(y)) - \frac{m}{\delta_s}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} &2\pi \delta_s |U(m, s) + U(-m, s)| \leq \frac{4\delta}{\frac{m^2}{\delta_s^2} - \delta^2} + \\ &+ \int_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})+m} \left| d \left( \frac{1}{f'(x(y)) + \frac{m}{\delta_s}} \right) \right| + \left| \int_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})-m} d \left( \frac{1}{f'(x(y)) - \frac{m}{\delta_s}} \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{6\delta \delta_s^2}{m^2 - \delta^2 \delta_s^2} + \frac{2\delta \delta_s^2}{m^2} \leq \frac{8\delta \delta_s^2}{m^2 - \delta^2 \delta_s^2}. \end{aligned}$$

Интегралы  $U_a(m)$  и  $U_b(m)$  оцениваются аналогично. Имеем

$$\begin{aligned} U_m(a) &= \frac{1}{2\pi i} \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i y} \frac{1}{f'(x(y)) + m \rho'_\Delta(x)} \Big|_{f(a')-0,5m}^{f(a')} - \frac{1}{2\pi i} \int_{f(a')-0,5m}^{f(a')} e^{2\pi i y} d \left( \frac{\rho'_\Delta(x)}{f'(x(y)) + m \rho'_\Delta(x)} \right), \\ U_m(b) &= \frac{1}{2\pi i} \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i y} \frac{1}{f'(x(y)) + m \rho_\Delta(x)} \Big|_{f(b')}^{f(b')+0,5m} - \frac{1}{2\pi i} \int_{f(b')}^{f(b')+0,5m} e^{2\pi i y} d \left( \frac{\rho'_\Delta(x)}{f'(x(y)) + m \rho'_\Delta(x)} \right). \end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned} &2\pi i (\rho'_\Delta(a))^{-1} (U_a(m) + U_a(-m)) = \\ &= e^{2\pi i f(a')} \left( \frac{1}{f'(x(f(a'))) + 0,5m \rho'_\Delta(a)} + \frac{1}{f'(x(f(a'))) - 0,5m \rho'_\Delta(a)} \right) - \end{aligned}$$

$$-e^{2\pi i f(a)} \left( \frac{1}{f'(x(a)) + 0,5m\rho'_\Delta(a)} + \frac{1}{f'(x(f(a))) - 0,5m\rho'_\Delta(a)} \right) -$$

$$- \int_{f(a)}^{f(a')+0,5m} e^{2\pi i y} d \left( \frac{1}{f'(x(y)) + 0,5m\rho'_\Delta(a)} \right) - \int_{f(a)}^{f(a')-0,5m} e^{2\pi i y} d \left( \frac{1}{f'(x(y)) - 0,5m\rho'_\Delta(a)} \right).$$

Отсюда приходим к оценке

$$|(U_a(m) + U_a(-m))| \leq \frac{\rho'_\Delta(a)}{2\pi} \frac{8\delta}{0,5m^2(\rho'_\Delta(a))^2 - \delta^2} \leq \frac{4\delta(\rho'_\Delta(a))^{-1}}{\pi(0,25m^2 - \delta^2(\rho'_\Delta(a))^{-2})}.$$

Подобным образом такая же оценка с заменой  $a$  на  $b$  получается для  $|(U_b(m) + U_b(-m))|$ .

Заметим, что

$$(\rho'_\Delta(a))^{-1} + \sum_{a < t_s < b} \delta_s + (\rho'_\Delta(b))^{-1} = b - a.$$

Так как  $\delta(a, b) = \max_{a \leq x \leq b} (\rho'_\Delta(x))^{-1}$ , то

$$\sum_{m \geq 1} (|U(m) + U(-m)|) = \sum_{m \geq 1} (|U_a(m) + U_a(-m)| + |U_b(m) + U_b(-m)| +$$

$$+ \sum_{a < t_s \leq b} (|U(m, s) + U(-m, s)|)) \leq$$

$$\leq \sum_{m \geq 1} \left( \frac{4\delta(\rho'_\Delta(a))^{-1}}{\pi(0,25m^2 - \delta^2(\rho'_\Delta(b))^{-2})} + \sum_{a < t_s \leq b} \frac{4\delta\delta_s}{\pi(m^2 - \delta^2\delta_s^2)} \right) \leq$$

$$\leq \frac{4\delta}{\pi(0,25 - \delta^2(\delta(a, b))^{-2})} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{16\delta}{\pi m(m-1)} \leq \frac{10\delta}{1-\delta}.$$

#### 4. Заключение

Основным результатом работы является обобщение формулы ван дер Корпута на тригонометрические суммы по разбиению неотрицательной полуоси вещественной прямой на последовательности, стремящейся к бесконечности. Следующим шагом исследования является формула Корпута — Виноградова, позволяющая заменить эту сумму более короткой. Последняя формула может найти приложения в математической физике.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное — М.: Физматлит. 1980, 144 с.
2. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических. — М.: Физматлит. 1976, 120 с.
3. van der Corput J. G. Zahlentheoretische Abschätzungen // Math. Ann., 1921, **84**, S. 53-79.
4. van der Corput J. G. Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem // Math. Ann., 1922, **87**, S. 39-65.

5. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. — М.: Физматлит. 1983, 240 с. 1966, **30**, № 1.
6. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.-Л.: Изд-во ин.лит. 1953, 408 с.
7. Montgomery H. L. Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis — Providence, Rhode Island: 1994, 220 p.
8. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Три теоремы из анализа о тригонометрических суммах // Докл. РАН, 1994, **335**, № 4, 407.
9. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.
10. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 640 с.
11. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987, 368 с.
12. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004, pp. 554.
13. LeVeque W. J. On uniform distribution modulo a subdivision // Pacific J. Math., 1953, **1**, 757–771.
14. Erdős P., Davenport H. A theorem on uniform distribution // Magyar Tud. Akad. Kutató Int. Közl., 1963, **8**:2, 3–11.
15. Gallagher P. X. A large sieve density estimate near  $\sigma = 1$  // Invent. Math., 1974, **1**, 757–771.
16. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. — М.: Наука, 2001, 418 с.

## REFERENCES

1. Vinogradov I. M. 1980. “The method of trigonometric sums in the theory of numbers”. 2nd Edition., correct. and supplement. — Moscow.: Fizmatlit. pp. 144.
2. Vinogradov I. M. 1976. “The special version of the method of trigonometric sums”. — Moscow.: Fizmatlit. pp. 120.
3. van der Corput J. G. 1921. “Zahlentheoretische Abschätzungen”. Math. Ann., **84**, S. 53-79.
4. van der Corput J. G. 1922. “Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem”. Math. Ann., **87**, S. 39-65.
5. Karatsuba A. A. 1983. “Foundations of the analytic number theory”. 2-nd ed. — М.: Физматлит. pp. 240. 1966, **30**, № 1.
6. Titchmarsh E. C. 1951. “The theory of the Riemann zeta-function”. — Oxford: pp. 408.
7. Montgomery H. L. 1994. “Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis” — Providence, Rhode Island: 220 p.

8. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. 1994. "Three Theorems from Analysis on Trigonometric Sums". Dokl. RAS, **335**, № 4, 407.
9. Arkhipov G. I. 2013, "Selected Works". — Orel: Publishing house of Oryol University, 464 с.
10. Arkhipov G.I., Sadovnichy V.A., Chubarikov V.N. 2004. "Lectures on mathematical analysis". 4th ed., Rev. — M.: Drofa. 640 с.
11. Arkhipov G.I., Karatsuba A.A., Chubarikov V.N. 1987. "Theory of multiple trigonometric sums". — M.: Science. Ch. ed.phys.-mat. lit. 368 с.
12. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 2004. "Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics"; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, pp. 554.
13. LeVeque W. J. 1953. "On uniform distribution modulo a subdivision". Pacific J. Math., **1**, 757–771.
14. Erdős P., Davenport H. 1963. "A theorem on uniform distribution". Magyar Tud.Akad.Kutató Int.Közl., **8**:2, 3–11.
15. Gallagher P. X. 1974. "A large sieve density estimate near  $\sigma = 1$ ". Invent. Math., **1**, 757–771.
16. Kuipers L., Niederreiter H. 1974. "Uniform Distribution of Sequences". — N.Y., London, Sydney, Toronto: John Wiley & Sons. M.: Наука, (2001), 418 с.

Получено 23.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-29-38

**Ядра весовых структур — это в точности слабо идемпотентно полные категории**

М. В. Бондарко, С. В. Востоков

**Михаил Владимирович Бондарко** — доктор физико-математических наук, профессор РАН, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: m.bondarko@spbu.ru*

**Сергей Владимирович Востоков** — доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: s.vostokov@spbu.ru*

**Аннотация**

Мы доказываем, что аддитивные категории, являющиеся ядрами весовых структур — это в точности все слабо идемпотентно полные категории, т. е. категории, в которых расщепимые мономорфизмы соответствуют прямым слагаемым. Мы также приводим ряд условий, эквивалентных слабой идемпотентной полноте (часть их полностью нова), и обсуждаем слабо идемпотентные пополнения аддитивных категорий.

*Ключевые слова:* слабо идемпотентно полная категория, идемпотентное пополнение, слабое ретракт-замыкание, триангулированная категория, весовая структура, ядро.

*Библиография:* 15 названий.

**Для цитирования:**

М. В. Бондарко, С. В. Востоков. Ядра весовых структур — это в точности слабо идемпотентно полные категории // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 29–38.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-29-38

**The hearts of weight structures are the weakly idempotent complete categories<sup>1</sup>**

M. V. Bondarko, S. V. Vostokov

**Mikhail Vladimirovich Bondarko** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, RAS Professor, Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).

*e-mail: m.bondarko@spbu.ru*

**Sergei Vladimirovich Vostokov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).

*e-mail: s.vostokov@spbu.ru*

<sup>1</sup>This work was funded by the Russian Science Foundation under grant no. 16-11-00200.

### Abstract

This paper proves that additive categories that occur as hearts of weight structures are precisely the *weakly idempotent complete* categories, that is, the categories where all split monomorphisms give direct sum decompositions. The work also gives several other conditions equivalent to weak idempotent completeness (some of them are completely new) and discusses weak idempotent completions of additive categories.

**Keywords:** weakly idempotent complete category, idempotent completion, weak retraction-closure, triangulated category, weight structure, heart.

**Bibliography:** 15 titles.

### For citation:

M. V. Bondarko, S. V. Vostokov, 2020, "The hearts of weight structures are the weakly idempotent complete categories", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 29–38.

## 1. Introduction

The goal of this note is to study additive categories that can occur as hearts of weight structures on triangulated categories.<sup>2</sup> Actually, an answer to this question can be extracted from Theorem 4.3.2(I,II) of [3]; yet the corresponding calculation of hearts does not contain all the detail. For this reason, in the current paper we study the corresponding *weakly idempotent complete* (additive) categories and *weak idempotent completions* in detail. Another notion important for this paper is the *weak retraction-closure* (of a subcategory; see Definition 1).

Let us briefly describe the contents of the paper. An additive category  $\underline{B}$  is said to be weakly idempotent complete if any  $\underline{B}$ -split monomorphism gives a direct sum decomposition (see Definition 2(1)); obviously, any idempotent complete category is weakly idempotent complete.  $\underline{B}$  is said to be weakly retraction-closed in  $\underline{B}' \supset \underline{B}$  if for a  $\underline{B}'$ -isomorphism  $Y \cong X \oplus Z$  the object  $Z$  belongs to  $\text{Obj } \underline{B}$  whenever  $X$  and  $Y$  do. In §3 we prove that  $\underline{B}$  is weakly idempotent complete if and only if it is weakly retraction-closed in a (weakly) idempotent complete category  $\underline{B}' \supset \underline{B}$ . These conditions are equivalent to the existence of  $\underline{B}'' \subset \underline{B}$  and an idempotent complete  $\underline{B}' \supset \underline{B}$  such that  $\underline{B}$  equals the corresponding weak retraction-closure of  $\underline{B}''$  in  $\underline{B}'$ . Moreover, the weak retraction-closure of  $\underline{B}$  in the idempotent completion  $\text{Kar}(\underline{B})$  gives a canonical weak idempotent completion  $\text{wKar}(\underline{B})$  of  $\underline{B}$ , and we prove that the universality of the Kar-construction also yields that of the  $\text{wKar}$ -one. Furthermore,  $\underline{B}$  is weakly idempotent complete if and only if any contractible bounded  $\underline{B}$ -complex splits (into a direct sum of isomorphisms; see Proposition 1(7)).

In §4 we recall some basics on weight structures. Recall that these are given by classes  $\underline{C}_{w \leq 0}$  and  $\underline{C}_{w \geq 0}$  of objects of a triangulated category  $\underline{C}$ ; the heart  $\underline{Hw}$  of  $w$  is the additive subcategory  $\underline{C}_{w \leq 0} \cap \underline{C}_{w \geq 0}$ . The aforementioned Theorem 4.3.2(I,II) of [3] (along with the somewhat stronger Corollary 2.1.2 of [5]) gives an almost complete characterization of *bounded* weight structures. Loc. cit. implies that any (additive) *connective* subcategory  $\underline{B}$  of  $\underline{C}$  gives a canonical bounded weight structure  $w$  on the smallest strictly full triangulated subcategory  $\underline{D}$  of  $\underline{C}$  that contains  $\underline{B}$ , and  $\underline{Hw}$  consists of  $\underline{D}$ -retracts of objects of  $\underline{B}$ . Now, Theorem 1 implies that  $\underline{Hw}$  is equivalent to  $\text{wKar}(\underline{B})$ ; thus  $\underline{Hw}$  is equivalent to  $\underline{B}$  whenever  $\underline{B}$  is weakly idempotent complete. Moreover, the results of §3 easily imply that weakly idempotent complete categories are precisely the ones that occur as weakly retraction-closed subcategories of triangulated categories; they are also the categories equivalent to hearts of (bounded) weight structures. Furthermore, we prove that a full embedding  $\underline{B} \rightarrow \underline{B}'$  induces an equivalence of  $K^b(\underline{B})$  with  $K^b(\underline{B}')$  if and only if  $\underline{B}'$  is essentially a subcategory of  $\text{wKar}(\underline{B})$ , and  $K_0^{\text{add}}(\underline{B}) \cong K_0^{\text{add}}(\underline{B}')$  if this is the case.

<sup>2</sup>Recall that weight structures are certain "cousins" of  $t$ -structures (see Remark 4 below) that were introduced in [3] and [8]; in the latter paper they were called co- $t$ -structures. Weight structures have several interesting applications to representation theory, motives, and algebraic topology; see [5] for some references.

## 2. On additive categories and (weak) retraction-closures

All categories and functors (including embedding ones) in this paper will be additive.

- Given a category  $C$  and  $X, Y \in \text{Obj } C$  we will write  $C(X, Y)$  for the set of morphisms from  $X$  to  $Y$  in  $C$ .
- For categories  $C'$  and  $C$  we write  $C' \subset C$  if  $C'$  is a full subcategory of  $C$ .
- Given a category  $C$  and  $X, Y \in \text{Obj } C$ , we say that  $X$  is a *retract* of  $Y$  if  $\text{id}_X$  can be factored through  $Y$ .<sup>3</sup>
- A class of objects  $D$  in (an additive category)  $\underline{B}$  is said to be *retraction-closed* in  $\underline{B}$  if it contains all  $\underline{B}$ -retracts of its elements.
- For any  $(\underline{B}, D)$  as above we will write  $\text{Kar}_{\underline{B}}(D)$  for the class of all  $\underline{B}$ -retracts of elements of  $D$ .
- We will say that  $\underline{B}$  is *idempotent complete* if any idempotent endomorphism gives a direct sum decomposition in it; cf. Definition 1.2 of [1].
- The *idempotent completion*  $\text{Kar}(\underline{B})$  (no lower index) of  $\underline{B}$  is the category of “formal images” of idempotents in  $\underline{B}$ . Respectively, its objects are the pairs  $(B, p)$  for  $B \in \text{Obj } \underline{B}$ ,  $p \in \underline{B}(B, B)$ ,  $p^2 = p$ , and the morphisms are given by the formula

$$\text{Kar}(\underline{B})((X, p), (X', p')) = \{f \in \underline{B}(X, X') : p' \circ f = f \circ p = f\}.$$

The correspondence  $B \mapsto (B, \text{id}_B)$  (for  $B \in \text{Obj } \underline{B}$ ) fully embeds  $\underline{B}$  into  $\text{Kar}(\underline{B})$ , and it is well known that  $\text{Kar}(\underline{B})$  is essentially the smallest idempotent complete category containing  $\underline{B}$ ; see Proposition 1.3 of *ibid*.

Now we will give definitions that appear to be (more or less) new.

DEFINITION 1. Let  $\underline{B}'$  be an (additive) subcategory of  $\underline{B}$ .

1. We will write  $\text{wKar}_{\underline{B}}(\underline{B}')$  for the full subcategory of  $\underline{B}$  whose objects are those  $Z \in \text{Obj } \underline{B}$  such that there exist  $X, Y \in \text{Obj } \underline{B}'$  with  $X \oplus Z \cong Y$ . We will call  $\text{wKar}_{\underline{B}}(\underline{B}')$  the *weak retraction-closure* of  $\underline{B}'$  in  $\underline{B}$ .

2. We will say that  $\underline{B}'$  is *weakly retraction-closed* in  $\underline{B}$  if  $\text{wKar}_{\underline{B}}(\underline{B}') = \underline{B}'$ .

Below we will need the following simple statements.

LEMMA 1. Let  $\underline{B}'$  be a subcategory of  $\underline{B}$ .

1. If  $\underline{B}'$  is retraction-closed in  $\underline{B}$  then it is also weakly retraction-closed in  $\underline{B}$ .
2.  $\text{wKar}_{\underline{B}}(\underline{B}')$  is weakly retraction-closed in  $\underline{B}$ .

PROOF. 1. Obvious.

2. For an object  $Z$  of  $\underline{B}$  and  $X, Y \in \text{Obj } \text{wKar}_{\underline{B}}(\underline{B}')$  such that  $X \oplus Z \cong Y$  we should prove that  $Z$  is an object of  $\text{wKar}_{\underline{B}}(\underline{B}')$  as well. Now we recall Definition 1(1) and choose  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \text{Obj } \underline{B}'$  such that  $X \oplus X_1 \cong X_2$  and  $Y \oplus Y_1 \cong Y_2$ . Then  $Z \oplus (X_2 \oplus Y_1) \cong Y \oplus Y_1 \oplus X_1 \cong Y_2 \oplus X_1$ . Since both  $X_2 \oplus Y_1$  and  $Y_2 \oplus X_1$  are objects of  $\underline{B}'$ , we obtain the result.  $\square$

<sup>3</sup>Clearly, if  $C$  is triangulated then  $X$  is a retract of  $Y$  if and only if  $X$  is its direct summand.

### 3. On weakly idempotent complete categories

Let us give some more definitions. Throughout this paper  $\underline{B}$  will be an (additive) category.

DEFINITION 2. 1. We will say that  $\underline{B}$  is weakly idempotent complete if any split  $\underline{B}$ -monomorphism  $i : X \rightarrow Y$  (that is,  $\text{id}_X$  equals  $p \circ i$  for some  $p \in \underline{B}(Y, X)$ ) is isomorphic to the monomorphism  $\text{id}_X \oplus 0 : X \rightarrow X \oplus Z$  for some object  $Z$  of  $\underline{B}$ .

2. Assume that  $\underline{B}$  is essentially small. Then the split Grothendieck group  $K_0^{\text{add}}(\underline{B})$  is the abelian group whose generators are the isomorphism classes of objects of  $\underline{B}$ , and the relations are of the form  $[B] = [A] + [C]$  for all  $A, B, C \in \text{Obj } \underline{B}$  such that  $B \cong A \oplus C$ .

Now we prove that this definition is equivalent to several other ones.

PROPOSITION 1. The following assumptions on  $\underline{B}$  are equivalent.

1.  $\underline{B}$  is weakly idempotent complete.
2.  $\underline{B}$  is weakly retraction-closed in any (additive) category  $\underline{B}'$  containing  $\underline{B}$  as a strictly full subcategory.
3.  $\underline{B}'$  is a weakly retraction-closed subcategory of some weakly idempotent complete category  $\underline{B}'$ .
4. The obvious embedding of  $\underline{B}$  into the category  $\text{wKar}(\underline{B}) = \text{wKar}_{\text{Kar}(\underline{B})}(\underline{B})$  (see Definition 1 (1)) is an equivalence.
5.  $\underline{B}$  is equivalent to the category  $\text{wKar}(\underline{B}'')$  for some (additive) category  $\underline{B}''$ .
6. There exist additive categories  $\underline{B}'' \subset \underline{B} \subset \underline{B}'$  such that  $\underline{B}'$  is idempotent complete and  $\underline{B} = \text{wKar}_{\underline{B}'}(\underline{B}'')$ .
7. If a bounded  $\underline{B}$ -complex is contractible (i.e., it is zero in  $K^b(\underline{B})$ ) then it splits, that is, it has the form  $\bigoplus \text{id}_{N^i}[-i]$  for some  $N^i \in \text{Obj } \underline{B}$ .

PROOF. Obviously, condition 1 implies condition 2, and condition 4 implies condition 5. Next, replacing  $\underline{B}$  by its isomorphism-closure in  $\text{Kar}(\underline{B})$  we obtain that condition 2 implies condition 4. Moreover, if  $\underline{B}$  is equivalent to the category  $\text{wKar}(\underline{B}'')$  then we can replace  $\underline{B}''$  and  $\text{Kar}(\underline{B}'')$  by equivalent categories so that  $\underline{B}'' \subset \underline{B} \subset \underline{B}'$ ,  $\underline{B}'$  is equivalent to  $\text{Kar}(\underline{B}'')$ , and  $\underline{B}$  is a strict subcategory of  $\underline{B}'$ . Hence condition 5 implies condition 6.

Next, applying Lemma 1(2) we obtain that condition 5 implies condition 3; note that  $\underline{B}'$  is weakly idempotent complete since it is idempotent complete.

Now assume that  $\underline{B}'$  is a weakly retraction-closed subcategory of a weakly idempotent complete category  $\underline{B}'$ . We should prove that any split  $\underline{B}$ -monomorphism  $i : X \rightarrow Y$  is isomorphic to the monomorphism  $\text{id}_X \oplus 0 : X \rightarrow X \oplus Z$  for some object  $Z$  of  $\underline{B}$ . Since  $\underline{B}'$  is weakly idempotent complete, we obtain that  $Z$  as desired exists in the category  $\underline{B}' \supset \underline{B}$ . Since  $\underline{B}$  is a weakly retraction-closed subcategory of  $\underline{B}'$  and  $X \oplus Z \cong Y$ , we obtain  $Y \in \text{Obj } \underline{B}$ ; hence  $\underline{B}$  is weakly idempotent complete indeed.

Lastly we prove the equivalence of conditions 1 and 7. If  $p \circ i = \text{id}_X$  for some  $\underline{B}$ -morphisms  $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} X$  then the complex

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{\text{id}_Y - i \circ p} Y \xrightarrow{p} X \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

is easily seen to be split in  $K(\text{Kar } \underline{B})$ ; hence it is zero in  $K(\underline{B})$  as well. If it is also split in  $K(\underline{B})$  then  $i$  and  $p$  come from a  $\underline{B}$ -isomorphism  $Y \cong X \oplus Z$ ; thus condition 7 follows from condition 1.

Let us establish the converse implication by the induction on the essential length of a complex  $M = (M^i)$ ; that is, we look for the minimal  $l \geq 0$  such that the terms  $M^i$  are zero for  $i < m$  and  $i > n$ , where  $n - m = l$ . Contractible complexes (over an arbitrary additive category) obviously splits if its essential length is at most 1. Now, assume that  $M$  is contractible of length  $l \geq 2$ , and all contractible complexes of length less than  $l$  split. Clearly, the contracting homotopy provides a factorization of  $\text{id}_{M^m}$  through the boundary  $d^m : M^m \rightarrow M^{m+1}$ . Hence the complex  $M$  is isomorphic to  $\text{Cone}(\text{id}_{M^m})[-1-m] \oplus M'$ , where  $M'$  is of length  $l-1$ . Obviously,  $M'$  is contractible as well and we conclude by applying the inductive assumption.  $\square$

REMARK 1. 1. *The notions of a weakly retraction-closed subcategory and of the weak retraction-closure are obviously self-dual.*

*Hence conditions 2, 4, 5, 6 of our proposition are self-dual as well; this is also true for condition 7 (that is, these assumptions are fulfilled for  $\underline{B}$  if and only if they are valid for  $\underline{B}^{\text{op}}$ ). Thus the notion of weak idempotent completeness is self-dual. Hence weak idempotent completions can also be characterized by the duals of conditions 1 and 3 in Proposition 1. In particular, we obtain Lemma 7.1 of [6].*

2. *We will call the category  $\text{wKar}(\underline{B}) = \text{wKar}_{\text{Kar}(\underline{B})}(\underline{B})$  the weak idempotent completion of  $\underline{B}$  following Remark 7.8 of [6]. We will justify this terminology and also prove and extend the claim made in loc. cit. in Corollary 1 below.*

3. *Let  $R$  be an (associative unital) ring. Let us describe certain categories that fulfil the assumptions of Proposition 1(6).*

*Take  $\underline{B}''$  to be the category of free left finitely generated  $R$ -modules and  $\underline{B}'$  to be the category of all left  $R$ -modules. Then the corresponding category  $\underline{B} \cong \text{wKar}(\underline{B}'')$  is just the category of finitely generated stably free left  $R$ -modules.<sup>4</sup>*

*This example demonstrates that weakly idempotent complete categories do not have to be idempotent complete and gives a nice example of weak idempotent completions (along with weak retraction-closures).*

4. *The argument used in the proof of the implication (1)  $\implies$  (7) easily implies that any bounded above or below contractible  $\underline{B}$ -complex splits as well.*

*On the other hand, Proposition 10.9 of [6] says that arbitrary (unbounded) contractible  $\underline{B}$ -complexes split if and only if  $\underline{B}$  is idempotent complete.*

*These statements (along with our arguments above) are closely related to Remark 1.12 of [9].*

COROLLARY 1. *Let  $F : \underline{B}_1 \rightarrow \underline{B}_2$  be an additive functor.*

1. *Then there exists a natural "idempotent complete version"  $\text{Kar}(F) : \text{Kar}(\underline{B}_1) \rightarrow \text{Kar}(\underline{B}_2)$  that restricts to a functor  $\text{wKar}(F) : \text{wKar}(\underline{B}_1) \rightarrow \text{wKar}(\underline{B}_2)$ .*

2. *Consequently, if  $\underline{B}_2$  is (weakly) idempotent complete then  $F$  extends to an additive functor from  $\text{Kar}(\underline{B}_1)$  (resp. from  $\text{wKar}(\underline{B}_1)$ ) into  $\underline{B}_2$ .*

3. *Assume that  $\underline{B}$  is essentially small. Then  $\text{Kar}(\underline{B})$  also is, and  $\text{wKar}(\underline{B})$  consists of those  $M \in \text{Obj Kar}(\underline{B})$  such that the class of  $M$  in  $K_0(\text{Kar}(\underline{B}))$  (see Definition 2(2)) belongs to the image of the obvious homomorphism  $K_0^{\text{add}}(\underline{B}) \rightarrow K_0^{\text{add}}(\text{Kar}(\underline{B}))$ .*

PROOF. 1. It is easily seen that  $F$  yields a canonical additive functor  $\text{Kar}(F)$  that sends  $(B, p)$  for  $B \in \text{Obj } \underline{B}_1$ ,  $p \in \underline{B}_1(B, B)$ ,  $p^2 = p$  into  $(F(B), f(p))$  indeed.

Next, if  $X \oplus Z \cong Y$  in  $\text{Kar}(\underline{B}_1)$  then  $\text{Kar}(F)(X) \oplus \text{Kar}(F)(Z) \cong \text{Kar}(F)(Y)$ . Thus if an object  $Z$  of  $\text{Kar}(\underline{B}_1)$  belongs to  $\text{wKar}(\underline{B}_1)$  then  $\text{Kar}(F)(Z)$  belongs to  $\text{wKar}(\underline{B}_2)$  indeed.

<sup>4</sup>The authors are deeply grateful to Vladimir Sosnilo for this nice observation.

2. If  $\underline{B}_2$  is idempotent complete then it is equivalent to the category  $\text{Kar}(\underline{B}_2)$ ; hence one can modify  $\text{Kar}(F)$  to obtain the extension in question.

Similarly, if  $\underline{B}_2$  is weakly idempotent complete then it is equivalent to the category  $\text{wKar}(\underline{B}_2)$  (see condition 4 in Proposition 1); thus one can modify  $\text{wKar}(F)$  to obtain the result.

3. The essential smallness of  $\text{Kar}(\underline{B})$  obviously follows from that of  $\underline{B}$ .

Next we note that the definition of  $K_0(\text{Kar}(\underline{B}))$  immediately implies the following: we have  $[M] = [N_1] - [N_2]$  for some objects  $N_i$  of  $\underline{B}$  (being more precise, here we consider the objects  $(N_i, \text{id}_{N_i})$  of  $\text{Kar}(\underline{B})$ ) whenever there exists  $B \in \text{Obj Kar}(\underline{B})$  such that  $M \oplus B \oplus N_2 \cong N_1 \oplus B$ . Since  $B$  is a retract of an object of  $\underline{B}$ , this is equivalent to the existence of  $B' \in \text{Obj } \underline{B}$  such that  $M \oplus B' \oplus N_2 \cong N_1 \oplus B'$ . Our assertion follows immediately.  $\square$

REMARK 2. *Let us now relate the terminology in the current paper to that in earlier ones.*

*It appears that the term "weakly idempotent complete" for a category  $\underline{B}$  was introduced in [6, Definition 7.2]. In [7] (probably, this is where this notion was originally introduced) it was said that retracts have complements (in  $\underline{B}$ ),<sup>5</sup> whereas in Definition 1.11 of [9] it was said that  $\underline{B}$  is semi-saturated. Most of the conditions in Proposition 1 and Theorem 1 were not mentioned in these papers.*

Recall also that weak idempotent completions were called *small envelopes* in Definition 4.3.1(3) of [3] and *semi-saturations* in §1.12.1 of [9].

## 4. Weight structures: short reminder

Let us start from the definition of a weight structure (note however that the only axiom of weight structures that we will mention explicitly in this text is the axiom (i)). The symbol  $\underline{C}$  in this paper will always denote some triangulated category.

It will be convenient for us to use the following notation below: for  $D, E \subset \text{Obj } \underline{C}$  we will write  $D \perp E$  if  $\underline{C}(X, Y) = \{0\}$  for all  $X \in D$  and  $Y \in E$ .

DEFINITION 3. *I. A couple  $(\underline{C}_{w \leq 0}, \underline{C}_{w \geq 0})$  of classes of objects of  $\underline{C}$  will be said to give a weight structure  $w$  on  $\underline{C}$  if the following conditions are fulfilled.*

(i)  $\underline{C}_{w \leq 0}$  and  $\underline{C}_{w \geq 0}$  are retraction-closed in  $\underline{C}$  (i.e., contain all  $\underline{C}$ -retracts of their objects).

(ii) **Semi-invariance with respect to translations.**

$\underline{C}_{w \leq 0} \subset \underline{C}_{w \leq 0}[1]$  and  $\underline{C}_{w \geq 0}[1] \subset \underline{C}_{w \geq 0}$ .

(iii) **Orthogonality.**

$\underline{C}_{w \leq 0} \perp \underline{C}_{w \geq 0}[1]$ .

(iv) **Weight decompositions.**

For any  $M \in \text{Obj } \underline{C}$  there exists a distinguished triangle

$$L_w M \rightarrow M \rightarrow R_w M \rightarrow L_w M[1]$$

such that  $L_w M \in \underline{C}_{w \leq 0}$  and  $R_w M \in \underline{C}_{w \geq 0}[1]$ .

We will also need the following definitions.

DEFINITION 4. *Assume that a triangulated category  $\underline{C}$  is endowed with a weight structure  $w$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ .*

1. *The full category  $\underline{Hw} \subset \underline{C}$  whose objects are  $\underline{C}_{w=0} = \underline{C}_{w \geq 0} \cap \underline{C}_{w \leq 0}$  is called the heart of  $w$ .*

2.  $\underline{C}_{w \geq i}$  (resp.  $\underline{C}_{w \leq i}$ , resp.  $\underline{C}_{w=i}$ ) will denote the class  $\underline{C}_{w \geq 0}[i]$  (resp.  $\underline{C}_{w \leq 0}[i]$ , resp.  $\underline{C}_{w=0}[i]$ ).

<sup>5</sup>Recall that the main Proposition of ibid. says that weakly idempotent complete categories closed with respect to countable coproducts are idempotent complete.

3. We will say that  $(\underline{C}, w)$  is bounded and  $\underline{C}$  is a bounded weighted category if  $\text{Obj } \underline{C} = \cup_{i \in \mathbb{Z}} \underline{C}_{w \geq i} = \cup_{i \in \mathbb{Z}} \underline{C}_{w \leq i}$ .
4. Let  $\underline{D}$  be a full triangulated subcategory of  $\underline{C}$ .  
We will say that  $w$  restricts to  $\underline{D}$  whenever the couple  $w_{\underline{D}} = (\underline{C}_{w \leq 0} \cap \text{Obj } \underline{D}, \underline{C}_{w \geq 0} \cap \text{Obj } \underline{D})$  is a weight structure on  $\underline{D}$ .
5. We will say that the subcategory  $\underline{H} \subset \underline{C}$  is connective (in  $\underline{C}$ ) if  $\text{Obj } \underline{H} \perp (\cup_{i > 0} \text{Obj } (\underline{H}[i]))$ .<sup>6</sup>
6. The smallest strictly full triangulated subcategory of  $\underline{C}$  containing  $\underline{H}$  will be called the subcategory strongly generated by  $\underline{H}$  in  $\underline{C}$ .
7. We will say that a class  $\mathcal{P} \subset \text{Obj } \underline{C}$  is extension-closed if  $\mathcal{P}$  contains 0 and for any  $\underline{C}$ -distinguished triangle  $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A[1]$  the object  $B$  belongs to  $\mathcal{P}$  whenever (both)  $A$  and  $C$  do.

REMARK 3. 1. A simple (and still quite useful) example of a weight structure comes from the stupid filtration on the homotopy category of cohomological complexes  $K(\underline{B})$  for an arbitrary additive  $\underline{B}$ ; it can also be restricted to the subcategory  $K^b(\underline{B})$  of bounded complexes (see Definition 4(4)). In this case  $K(\underline{B})_{w_{st} \leq 0}$  (resp.  $K(\underline{B})_{w_{st} \geq 0}$ ) is the class of complexes that are homotopy equivalent to complexes concentrated in degrees  $\geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ); see Remark 1.2.3(1) of [5] for more detail.

The heart of the weight structure  $w_{st}$  is the retraction-closure of  $\underline{B}$  in  $K(\underline{B})$ ; hence it is equivalent to  $\text{Kar}(\underline{B})$  (since both  $K^-(\underline{B})$  and  $K^+(\underline{B})$  are idempotent complete).

The restriction of  $w_{st}$  to  $K^b(\underline{B})$  will be denoted by  $w_{st}^b$ ; in Theorem 1 below we will demonstrate that its heart  $\underline{H}w_{st}^b$  is equivalent to  $\text{wKar}(\underline{B})$ .

2. In this note we use the “homological convention” for weight structures. This is the convention used by several papers of the first author (including [5] and [4]). However, in [3] the so-called cohomological convention was used; in this convention the functor  $[1]$  “shifts weights” by  $-1$ . This is one of the reasons for us not to cite *ibid.* below; another one is that the exposition of the theory of weight complexes (that we will apply in the proof of Theorem 1) in §3 of [3] is rather inaccurate.

Let us now recall the relation of connective subcategories to weight structures.

PROPOSITION 2. Let  $\underline{C}$  be a triangulated category.

I. Assume that  $w$  is a weight structure on  $\underline{C}$ .

1. Then the classes  $\underline{C}_{w \leq 0}$ ,  $\underline{C}_{w \geq 0}$ , and  $\underline{C}_{w=0}$  are extension-closed; consequently, they are additive.
2. Let  $v$  be another weight structure for  $\underline{C}$ ; suppose that  $\underline{C}_{w \leq 0} \subset \underline{C}_{v \leq 0}$  and  $\underline{C}_{w \geq 0} \subset \underline{C}_{v \geq 0}$ . Then  $w = v$  (i.e., the inclusions are equalities).

II. Under the assumptions of Definition 4(5) there exists a unique weight structure  $w_{\underline{B}}$  on the category  $\underline{D} = \langle \underline{B} \rangle$  whose heart contains  $\underline{B}$ . Moreover, this weight structure is bounded and  $\underline{D}_{w_{\underline{B}}=0} = \text{Kar}_{\underline{C}}(\text{Obj } \underline{B})$ .

PROOF. I.1. See Proposition 1.2.4(3) and Remark 1.2.3(4) of [5].

2. This is Proposition 1.2.4(7) of *loc. cit.*

II. Immediate from Corollary 2.1.2 of *ibid.*  $\square$

<sup>6</sup>In earlier texts of the first author connective subcategories were called *negative* ones. Moreover, in several papers (mostly, on representation theory and related matters) a connective subcategory satisfying certain additional assumptions was said to be *silting*; this notion generalizes the one of *tilting*.

## 5. On hearts of weight structures

THEOREM 1. *The following assumptions on (an additive category)  $\underline{B}$  are equivalent as well.*

1.  $\underline{B}$  is weakly idempotent complete.
2. There exists a triangulated category  $\underline{C}$  such that  $\underline{B}$  is its weakly retraction-closed subcategory.
3.  $\underline{B}$  is equivalent to the heart of a weight structure.
4.  $\underline{B}$  is equivalent to the heart of a bounded weight structure.
5.  $\underline{B}$  is equivalent to the heart  $\underline{Hw}_{st}^b$  of the weight structure  $w_{st}^b$  on the category  $K^b(\underline{B})$  (see Remark 3(1)).
6. For any category  $\underline{B}''$  such that the embedding  $\underline{B}'' \rightarrow \text{wKar}(\underline{B}'')$  factors through a fully faithful functor  $\underline{B} \rightarrow \text{wKar}(\underline{B}'')$  and  $\underline{B}''$  is connective in a triangulated category  $\underline{C}$  (see Definition 4(5)), there exists a unique weight structure  $w$  on the triangulated subcategory  $\underline{D}$  of  $\underline{C}$  strongly generated by  $\underline{B}''$  such that the heart  $\underline{Hw}$  is naturally equivalent to  $\underline{B}$  (that is,  $\underline{Hw}$  contains  $\underline{B}''$  and the embedding  $\underline{B}'' \rightarrow \underline{Hw}$  factors through an equivalence of  $\underline{B}$  with  $\underline{Hw}$ ).

PROOF. Clearly, condition 5 implies condition 4, and 4 implies 3. Next, we can take  $\underline{B}'' = \underline{B}$  in condition 6. Since  $\underline{B}$  is connective in the category  $\underline{C} = \underline{D} = K^b(\underline{B})$  and strongly generates it, we obtain that condition 6 implies condition 5.

Now, axiom (i) of Definition 3 implies that  $\underline{Hw}$  is retraction-closed in  $\underline{C}$  (note that it is an additive subcategory by Proposition 2(I.1)). Thus condition 3 implies condition 2.

Furthermore, any triangulated category is easily seen to be weakly idempotent complete since for  $X$  and  $Y$  as in Definition 2(1) we have  $Y \cong X \oplus \text{Cone}(X \rightarrow Y)$ . Thus condition 2 implies that  $\underline{B}$  is weakly idempotent complete (i.e., that condition 1 is fulfilled); see Proposition 1(3).

Thus it remains to verify that any weakly idempotent complete category  $\underline{B}$  fulfils condition 6. The existence and the uniqueness of a weight structure  $w$  on  $\underline{D}$  such that  $\underline{B}'' \subset \underline{Hw}$  follows immediately from Proposition 2(II); we also obtain the existence of a fully faithful functor  $\underline{Hw} \rightarrow \text{Kar}(\underline{B}'')$ , whereas the latter category is clearly equivalent to  $\text{Kar}(\underline{B})$ . Moreover,  $\underline{Hw}$  is weakly idempotent complete (recall that we have just proved that our condition 3 implies condition 1); hence Corollary 1 implies that the embedding  $\underline{B} \rightarrow \underline{B}''$  factors through a full embedding of  $\underline{B}$  into  $\underline{Hw}$ .

Since  $\underline{B}$  is weakly idempotent complete, it remains to verify that for any  $M \in \underline{D}_{w=0}$  there exist objects  $X$  and  $Y$  of  $\underline{B}$  such that  $M \oplus X \cong Y$ . We will deduce this statement from the existence of splittings of contractible complexes in  $K^b(\underline{Hw})$ ; for this purpose we invoke the theory of (weak) weight complex functors as provided by Proposition 1.3.4 of [4].

Part 6 of loc. cit. associates to  $M$  its weight complex  $t(M) \in \text{Obj } K(\underline{Hw})$ . Parts 4 and 10 of loc. cit. imply that  $t(M) \cong M$  (in the homotopy category  $K(\underline{Hw})$ ). On the other hand, parts 4 and 9 easily yield that  $t(M)$  is homotopy equivalent to a complex  $N \in \text{Obj } K^b(\underline{B}'') \subset K(\underline{Hw})$ . Hence there exists a  $K(\underline{Hw})$ -morphism  $f : M \rightarrow N$  such that  $\text{Cone}(f)$  is contractible. Since  $\text{Cone}(f) \in \text{Obj } K^b(\underline{Hw})$  and we have already proved that  $\underline{Hw}$  is weakly idempotent complete, we obtain that  $\text{Cone}(f)$  splits in  $K^b(\underline{Hw})$ . Now, if  $N^i \in \text{Obj } \underline{B}''$  are the terms of  $N$ , then this splitting yields  $M \oplus_{j \in \mathbb{Z}} N^{2i-1} \cong \oplus_{j \in \mathbb{Z}} N^{2i}$ . This concludes the proof.  $\square$

REMARK 4. *Weight structures are well known to be closely related to  $t$ -structures (as introduced in §1.3 of [2]). However, the properties of weight structures are significantly distinct from that of  $t$ -structures. Recall in particular that the hearts of  $t$ -structures are precisely the abelian categories. Hence there are plenty of additive categories that are hearts of some weight structures and cannot occur as hearts of  $t$ -structures; cf. Remark 1(3).*

The following statement gives one more characterization of weak idempotent completions as well as certain Grothendieck group isomorphisms.

**COROLLARY 2.** 1. If  $\underline{B} \subset \underline{B}'$  then the corresponding embedding  $K^b(\underline{B}) \rightarrow K^b(\underline{B}')$  is an equivalence if and only if the embedding  $\underline{B} \rightarrow \mathrm{wKar}(\underline{B})$  factors through a fully faithful functor from  $\underline{B}'$  into  $\mathrm{wKar}(\underline{B})$ .

2. Consequently, if  $\underline{B}'$  is essentially small and  $\underline{B} \subset \underline{B}' \subset \mathrm{wKar}(\underline{B})$  then the obvious homomorphism  $K_0^{\mathrm{add}}(\underline{B}) \rightarrow K_0^{\mathrm{add}}(\underline{B}')$  (see Definition 2(2)) is bijective.

**PROOF.** 1. Assume that the embedding  $K^b(\underline{B}) \rightarrow K^b(\underline{B}')$  is an equivalence. Then we can assume that the stupid weight structure on  $K^b(\underline{B}')$  (see Remark 3(1)) gives a weight structure  $v$  on  $\underline{C} = K^b(\underline{B})$ . Since the classes  $\underline{C}_{v \leq 0}$  and  $\underline{C}_{v \geq 0}$  are closed with respect to isomorphisms (see the axiom (i) in Definition 3), we obtain  $\underline{C}_{w_{st}^b \leq 0} \subset \underline{C}_{v \leq 0}$  and  $\underline{C}_{w_{st}^b \geq 0} \subset \underline{C}_{v \geq 0}$ . Thus  $w_{st}^b = v$  according to Proposition 2(I.2). Since  $\underline{H}w_{st}^b$  is equivalent to  $\mathrm{wKar}(\underline{B})$  (see condition 5 in Theorem 1), this clearly gives a fully faithful functor from  $\underline{B}'$  into  $\mathrm{wKar}(\underline{B})$ .

Now let us prove the converse implication. We should prove that  $\underline{D} = K^b(\underline{B}')$ , where  $\underline{D}$  is the closure of  $K^b(\underline{B})$  in  $K^b(\underline{B}')$  with respect to isomorphisms, if  $\underline{B}'$  is equivalent to a subcategory of  $\mathrm{wKar}(\underline{B})$ . Now,  $\underline{D}$  is a strictly full subcategory of  $K^b(\underline{B}')$  that essentially contains  $\mathrm{wKar}(\underline{B})$  (see condition 6 in Theorem 1). Since  $K^b(\underline{B}')$  is clearly strongly generated (see Definition 4(6)) by  $\underline{B}'$ , we easily obtain the equality in question.

2. According to assertion 1, the embedding  $K^b(\underline{B}) \rightarrow K^b(\underline{B}')$  is an equivalence in this case. Thus it suffices to recall that for any essentially small (additive) category  $\underline{A}$  the group  $K_0^{\mathrm{add}}(\underline{A})$  can be computed as a certain triangulated Grothendieck group of the category  $K^b(\underline{A})$ ; see Definition 2 and Theorem 1 of [10].  $\square$

**REMARK 5.** 1. One can also prove that a category  $\underline{B}' \supset \underline{B}$  is essentially a subcategory of  $\mathrm{Kar}(\underline{B})$  if and only if  $K(\underline{B}) \cong K(\underline{B}')$ ; this is also equivalent to  $K^+(\underline{B}) \cong K^+(\underline{B}')$  and  $K^-(\underline{B}) \cong K^-(\underline{B}')$ . To prove the "if" implications here one can apply stupid weight structure arguments similar to the one in the proof of Corollary 2, and one can invoke either Remark 3.3.2(2) of [4] or Remark 1.12.4 of [9] to obtain the converse implications.

2. This observation along with Proposition 1(7), Proposition 10.9 of [6] (see Remark 1(4)), and Remark 3 justifies the following vague claim:  $\mathrm{Kar}(\underline{B})$  is the "extension" of  $\underline{B}$  corresponding to unbounded  $\underline{B}$ -complexes, whereas  $\mathrm{wKar}(\underline{B})$  "corresponds to"  $K^b(\underline{B})$ .

3. One can also prove Corollary 2(2) more explicitly; cf. Corollary 1(3).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balmer P., Schlichting M., Idempotent completion of triangulated categories// Journal of Algebra 236, no. 2 (2001), 819–834.
2. Beilinson A., Bernstein J., Deligne P., Faisceaux pervers// Asterisque 100 (1982), 5–171.
3. Bondarko M.V., Weight structures vs.  $t$ -structures; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general)// J. of K-theory, v. 6(3), 2010, 387–504, see also <http://arxiv.org/abs/0704.4003>
4. Bondarko M.V., On weight complexes, pure functors, and detecting weights, preprint, 2018, <https://arxiv.org/abs/1812.11952>
5. Bondarko M.V., Sosnilo V.A., On constructing weight structures and extending them to idempotent extensions// Homology, Homotopy and Appl., vol. 20(1), 2018, 37–57.
6. Bühler T., Exact categories// Expo. Math. 28 (2010), 1–69.

7. Freyd P., Splitting homotopy idempotents, in: *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*, La Jolla, CA, 1965, Springer, New York, 1966, 173–176.
8. Pauksztello D., Compact cochain objects in triangulated categories and co-t-structures// *Central European Journal of Mathematics*, vol. 6(1), 2008, 25–42.
9. Neeman A., The derived category of an exact category// *J. Algebra* 135 (2), 1990, 388–394.
10. Rose D., A note on the Grothendieck group of an additive category// *Vestn. Chelyab. Gos. Univ.*, 17(3), 2015, 135–139.

## REFERENCES

1. Balmer P., Schlichting M., 2001, “Idempotent completion of triangulated categories”, *Journal of Algebra*, 236, no. 2, 819–834.
2. Beilinson A., Bernstein J., Deligne P., 1982, “Faisceaux pervers” *Asterisque*, 100, 5–171.
3. Bondarko M. V., 2010, “Weight structures vs.  $t$ -structures; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general)”, *J. of K-theory*, v. 6(3), 387–504, see also <http://arxiv.org/abs/0704.4003>
4. Bondarko M. V., 2018, “On weight complexes, pure functors, and detecting weights”, preprint, <https://arxiv.org/abs/1812.11952>
5. Bondarko M. V., Sosnilo V. A., 2018, “On constructing weight structures and extending them to idempotent extensions”, *Homology, Homotopy and Appl.*, vol. 20(1), 37–57.
6. Bühler T., 2010, “Exact categories”, *Expo. Math.* 28, 1–69.
7. Freyd P., 1965, “Splitting homotopy idempotents”, *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*, La Jolla, CA, Springer, New York, 1966, 173–176.
8. Pauksztello D., 2008, “Compact cochain objects in triangulated categories and co-t-structures”, *Central European Journal of Mathematics*, vol. 6(1), 25–42.
9. Neeman A., 1990, “The derived category of an exact category”, *J. Algebra* 135 (2), 388–394.
10. Rose D., 2015, “A note on the Grothendieck group of an additive category”, *Vestn. Chelyab. Gos. Univ.*, 17(3), 135–139.

Получено 29.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511

DOI 0.22405/2226-8383-2020-21-3-39-58

**Интеграл Шнирельмана и аналог интегральной теоремы Коши  
для двумерных локальных полей<sup>1</sup>**

С. В. Востоков, Т. Ю. Шашков, С. С. Афанасьева

**Сергей Владимирович Востоков** — доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: s.vostokov@spbu.ru*

**Тимофей Юрьевич Шашков** — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: 7197163@mail.ru*

**Софья Сергеевна Афанасьева** — кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: sonya.afan@gmail.com***Аннотация**

Задача работы возникла из потребности исследования связей между теорией полей алгебраических чисел и теорией функций. Один из самых фундаментальных и классических результатов из комплексного анализа «Интегральная теорема Коши» имеет дискретный аналог для случая одномерных локальных полей. Следовательно, возникает естественный вопрос можно ли обобщить аналог Интегральной теоремы Коши на случай двумерных полей. Данная работа отвечает на поставленный вопрос, обобщая интеграла Шнирельмана и доказывая аналог интегральной теоремы Коши. Как следствие, получена связь между символом Гильберта и интегралом Шнирельмана.

*Ключевые слова:* Интеграл Шнирельмана, аналог интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей.

*Библиография:* 15 названий.

**Для цитирования:**

С. В. Востоков, Т. Ю. Шашков, С. С. Афанасьева. Интеграл Шнирельмана и аналог интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 39–58.

<sup>1</sup>Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-10200).

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511

DOI 0.22405/2226-8383-2020-21-3-39-58

**Schnirelmann's integral and analogy of Cauchy integral theorem for two-dimensional local fields**

S. V. Vostokov, T. Yu. Shashkov, S. S. Afanas'eva

**Sergey Vladimirovich Vostokov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).

*e-mail: s.vostokov@spbu.ru*

**Timofei Yurievich Shashkov** — Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).

*e-mail: 7197163@mail.ru*

**Sofya Sergeevna Afanas'eva** — Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).

*e-mail: sonya.afan@gmail.com*

**Abstract**

The problem studied in the thesis arose from the need to find connections between algebraic field theory and theory of functions. The Cauchy integral theorem, which is one of the most basic and classical results of the complex analysis, has a discrete analog in the case of one-dimensional local fields. The natural question then arises whether it is possible to generalize the same result to two-dimensional local fields. The present paper contains the definition of Schnirelmann's integral and the proof of an analog of Cauchy's integral theorem for two-dimensional local fields. As a consequence, links between the Hilbert symbol and Schnirelmann's integral are established.

*Keywords:* Schnirelmann's integral, analog of Cauchy's integral theorem for two-dimensional local fields.

*Bibliography:* 15 titles.

**For citation:**

S. V. Vostokov, T. Yu. Shashkov, S. S. Afanas'eva, 2020, "Schnirelmann's integral and analogy of Cauchy integral theorem for two-dimensional local fields", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 39–58.

**1. Введение**

Одной из центральных тем в алгебраической теории чисел является закон взаимности для локальных полей и его приложения. Первый результат в этом направлении был получен Л. Эйлером и К. Гауссом, известный как квадратичный закон взаимности, связывающий символы Лежандра нечетных простых чисел:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}},$$

где  $p, q$  — нечетные простые числа, а  $\left(\frac{p}{q}\right)$  и  $\left(\frac{q}{p}\right)$  — символы Лежандра.

Для конечных расширений поля  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Q}_p$  (обозначим такое поле через  $E$ ) и сравнений произвольной степени, было получено обобщение квадратичного закона взаимности (начало 20-го века), связывающее произведение степенных вычетов с символами Гильберта:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n^{-1} = \prod_{p|n\infty} \left(\frac{\alpha, \beta}{p}\right)_n,$$

где  $\left(\frac{\alpha, \beta}{p}\right)_n$  — символ Гильберта, а  $\alpha, \beta$  — ненулевые элементы рассматриваемого поля.

Первоначальное определение символа Гильберта было достаточно сложным и возникла потребность в нахождении альтернативного способа (явной формулы) для подсчета символа Гильберта. В 1950 г. в мультипликативной группе локального поля, содержащего все корни  $p^n$ -ой степени из единицы, И. Р. Шафаревичем (см. [15]) был построен базис, который оказался удобным для вычисления символа Гильберта. Окончательная формула была получена в 1978 году С. В. Востоковым (см. [5]), что повлекло за собой массу различных приложений.

Нахождение явной формулы для символа Гильберта оказалось существенным этапом в развитии конструктивной теории полей классов для локальных полей (конечных расширений поля  $p$ -адических чисел).

Помимо этого, можно изучать теорию полей классов для формальных модулей (модулей, построенных на максимальном идеале локального поля с помощью формального группового закона). Важным объектом здесь выступают эллиптические кривые, на которых можно завести структуру абелевой группы. В свою очередь, эллиптические кривые сыграли ключевую роль в доказательстве Великой теоремы Ферма.

### 1.1. Связь между законом взаимности и интегральной теоремой Коши

Один из самых важных результатов теории комплексного анализа — Интегральная теорема Коши, связывающая контурный интеграл мероморфной функции с ее вычетами. Для одномерных локальных полей нулевой характеристики можно определить аналог контурного интеграла (интеграл Шнирельмана), для которого будет верна формулировка теоремы Коши. Аналог этой теоремы для одномерных локальных полей был доказан С. В. Востоковым и М. А. Ивановым в работе [8]. Это позволило, в свою очередь, найти связь между интегралом Шнирельмана и символом Гильберта и, как следствие, получить альтернативный вариант явной формулы для символа Гильберта.

Таким образом существует аналогия между объектами дискретной и непрерывной природы, что позволяет глубже понимать суть вещей и комбинировать методы разной природы для решения задач.

Возникает естественный вопрос о том возможно ли обобщение вышеперечисленных результатов, связанных с интегралом Шнирельмана, с одномерного случая на многомерный. Оказывается, для двумерных полей ответ положительный, и задача этой работы как раз заключается в исследовании интеграла Шнирельмана и его свойств для двумерных локальных полей характеристики 0.

Целью настоящей работы является обобщение результатов, связанных с интегралом Шнирельмана и полученных для одномерных локальных полей характеристики 0, на случай двумерных локальных полей нулевой характеристики. В этой работе обобщено понятие интеграла Шнирельмана для полей указанного вида и доказан аналог интегральной теоремы Коши для двумерных полей. Как следствие интегральной теоремы Коши, была получена связь между интегралом Шнирельмана и символом Гильберта (рассматриваются поля вида  $K = E\{\{t\}\}$ ).

## 2. Обозначения и предварительные сведения

### 2.1. Многомерные локальные поля

Локальная теория полей классов развивается и для многомерных локальных полей (см. [12, 3, 4] и [14]).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Поле  $K$  будем называть  $n$ -мерным локальным полем, если задана цепочка полей  $K = k_n, k_{n-1}, \dots, k_1, k_0$ , где  $k_{i+1}$  — полное дискретно нормированное поле с полем вычетов  $k_i$ , а  $k_0$  — конечное поле.

Иногда предполагается, что  $k_0$  — совершенное поле простой характеристики. В работе будем предполагать, что  $K$  — двумерное локальное поле характеристики 0, а  $E$  — конечное расширение поля  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Q}_p$ .

Введем основные обозначения, которые будут использоваться в работе дальше.

Пусть  $\zeta$  — корень из единицы степени  $q = p^m$  (для результатов, связанных с символом Гильберта, будем дополнительно требовать, чтобы  $\zeta$  был элементом поля  $K$ ).

$\nu = (\nu_1, \nu_2) : K^* \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  — дискретное нормирование ранга 2 (см. [10]). Будем считать, что на группе  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  задан лексикографический порядок:  $(i_1, i_2) < (j_1, j_2)$ , если и только если либо  $i_1 < j_1$  либо  $i_1 = j_1, i_2 < j_2$ . Для упрощения записей в работе периодически двумерный показатель будет сравниваться с 0. В этом случае под 0 понимается на самом деле  $(0, 0)$ .

$\nu_E$  — дискретное нормирование на  $E$ .

$O_K$  — кольцо целых многомерного локального поля  $K$ , то есть множество  $\{x \in K : \nu(x) \geq 0\}$ .

$K^{alg}$  — алгебраическое замыкание локального поля  $K$ .

$\overline{K^{alg}}$  — пополнение алгебраического замыкания локального поля  $K$ .

$|\cdot|_p$  —  $p$ -адическая норма (а точнее одна из класса эквивалентности), а  $\nu_p$  —  $p$ -адический показатель.

Пусть  $k_0, k_1, k_2$  — последовательность полей:

- $k_0$  — конечное поле,
- $k_{i-1}$  — поле вычетов для  $k_i$ ,  $k_i$  — полное дискретно нормированное поле,  $i = 1, 2$ ,
- $k_2 = K$ .

$t_1, t_2$  — система локальных параметров  $k$ , т.е.  $t_2$  — простой элемент поля  $K$ ,  $\nu(t_1) = (0, 1)$ . Иногда простой элемент поля  $K$  будем обозначать через  $\pi$  (традиционно он так обозначается в случае одномерных локальных полей).

### 2.2. Классификация многомерных локальных полей

Для полного дискретно нормированного поля  $E$  положим

$$E\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i t^i \mid a_i \in E, \inf \nu_E(a_i) > -\infty, \lim_{i \rightarrow -\infty} \nu_E(a_i) = +\infty \right\}.$$

Для многомерных локальных полей известна следующая классификационная теорема (Паршин А.Н., [12]).

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $n \geq 2$ . Тогда любое  $n$ -мерное локальное поле либо изоморфно полю  $\mathbb{F}_q((t_1))((t_2))\dots((t_n))$ , либо изоморфно полю вида  $k((t_1))\dots((t_{n-1}))$ , либо является подполем в поле  $k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{i-1}\}\}((t_{i+1}))\dots((t_n))$ , где  $k$  — конечное расширение поля  $p$ -адических чисел, а  $q$  — степень простого числа  $p$ .

Мы будем работать с двумерными локальными полями характеристики 0, поэтому нам достаточно будет рассматривать случаи  $K = E\{\{t\}\}$  и  $K = E((t))$ , где  $E$  — конечное расширение  $\mathbb{Q}_p$  а также их подполя. На самом деле достаточно рассматривать только первые 2 случая, поскольку топология подполя будет индуцированной и все утверждения про сходимость после сужения сохраняются.

Нормирование для полей вида  $K = E\{\{t\}\}$  устроено следующим образом: пусть  $x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_i t^i \in K$ , тогда  $\nu(x)$  равно двумерному вектору  $(\nu_1(x), \nu_2(x))$ , где  $\nu_1(x) = \min_{i \in \mathbb{Z}} (\nu_E(a_i))$ ,  $\nu_2(x) = \min\{i | \nu_E(a_i) = \nu_1(x)\}$ .

Для поля  $K = E((t))$  нормирование устроено так: для  $x = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_i t^i$  выполнено  $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x))$ , где  $\nu_1(x)$  — минимальное  $i$ , для которого  $a_i \neq 0$ ,  $\nu_2(x) = \nu_E(a_{\nu_1(x)})$ .

### 2.3. Символ Гильберта

Для  $n$ -мерного локального поля  $K$  существует канонический гомоморфизм

$$\psi : K_n^M(K) \longrightarrow \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K),$$

где  $K_n^M(K)$  —  $K$ -функтор Милнора (см. [13, 11]),  $K^{\text{ab}}$  — максимальное абелево расширение поля  $K$ . Предположим, что поле  $K$  содержит группу  $\mu_q$  корней степени  $q$  из единицы.

Символ Гильберта, играющий ключевую роль в локальной теории полей классов и связывающий последнюю с теорией Куммера, может быть определен следующим образом:

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)_q : K_n^M(K)/K_n^M(K)^q &\longrightarrow \mu_q, \\ (\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \beta)_q &= \sqrt[q]{\beta^{\psi(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})-1}}. \end{aligned}$$

В работе [6] было получено явное выражение для спаривания Гильберта. Было в явном виде построено мультипликативное по всем аргументам, кососимметричное отображение  $\Gamma : K^* \times \dots \times K^* \longrightarrow \mu_q$ , с помощью которого можно задать непрерывное и невырожденное спаривание

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma : K_n^M(K)/K_n^M(K)^q \times K^*/K^{*q} &\longrightarrow \mu_q \\ \langle x, y \rangle_\Gamma &= \Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n, y). \end{aligned}$$

Спаривание  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  совпадает с символом Гильберта, а значит задает его в явном виде.

Этот результат позволяет независимо строить теорию полей классов многомерного локального поля, а также будет использоваться в настоящей работе.

Отображение  $\Gamma$  задается следующим образом

$$\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \zeta^{\text{tr res } \Phi/s},$$

где  $\text{tr}$  — оператор следа в подполе инерции  $T$  поля  $K$ , а ряды  $\Phi$  и  $s$  будут описаны ниже.

В настоящей работе мы будем рассматривать случай  $K = E\{\{t\}\}$ . Опишем ряды  $\Phi$  и  $s$  в этом случае.  $T$  изоморфно полю частных кольца векторов Витта  $W(k_0)$ .

$\mathcal{O}_T$  — кольцо целых поля  $T$ .

$R = \mathcal{O}_T\{\{t\}\}$ .

$\Delta$  — автоморфизм Фробениуса.

Пусть  $\pi$  — простой элемент, разложим  $\zeta$  как ряд по  $\pi$  с коэффициентами из  $R$ . Тогда можно определить соответствующий ряд  $z(X)$  из  $R((X))$ . Для удобства будем обозначать элементы  $K^*$  и соответствующие ряды с коэффициентами из  $R$  одной буквой. В кольце  $R\{\{X\}\}$  оператор  $\Delta$  действует на переменные  $t_1, X$  как возведение в  $p$ -ю степень, а на коэффициенты как обычный автоморфизм Фробениуса в подполе инерции.

Обозначим через  $s(X)$  ряд  $s(X) = z(X)^q - 1$ . Для любого  $\alpha$  из  $R\{\{X\}\}$  корректно задан (см. [6]) ряд

$$l(\alpha) = \frac{1}{p} \log(\alpha^{p-\Delta})$$

со значениями в  $R\{\{X\}\}$ . Далее, для ряда  $\alpha$  введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \delta_i(\alpha) &= \alpha^{-1} \frac{\partial \alpha}{\partial t_i}, & \text{где } i = 1, 2 \\ \eta_i(\alpha) &= \delta_i(\alpha) - \frac{\partial}{\partial t_i} l(\alpha), & \text{где } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Для элементов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  из  $K^*$  ряд  $\Phi$  определяется следующим образом

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = l(\alpha_1)D_1 - l(\alpha_2)D_2 + l(\alpha_3)D_3,$$

где

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} \eta_1(\alpha_2) & \eta_2(\alpha_2) \\ \eta_1(\alpha_3) & \eta_2(\alpha_3) \end{pmatrix}, D_2 = \det \begin{pmatrix} \delta_1(\alpha_1) & \delta_2(\alpha_1) \\ \eta_1(\alpha_3) & \eta_2(\alpha_3) \end{pmatrix}, D_3 = \det \begin{pmatrix} \delta_1(\alpha_1) & \delta_2(\alpha_1) \\ \delta_1(\alpha_2) & \delta_2(\alpha_2) \end{pmatrix}.$$

### 3. Вспомогательные топологические свойства двумерных локальных полей

Прежде, чем формулировать и доказывать интегральную теорему Коши необходимо будет зафиксировать несколько важных топологических свойств  $K$  и определить интеграл Шнирельмана для двумерных локальных полей.

#### 3.1. Топология двумерных локальных полей и базовые окрестности 0 для полей $E\{\{t\}\}$ и $E((t))$

Прежде всего напомним, как устроена база окрестностей 0 поля  $K$ .

Пусть  $V_i$  — база окрестностей 0 в поле  $E$  (можно считать, что  $V_i = \{x \in E : \nu_E(x) \geq m_i\}$ ), где  $m_i$  — целое или  $-\infty$  (что соответствует случаю, когда окрестность совпадает со всем полем  $E$ ).

Разберем 2 основных случая:

Случай 1.  $K = E\{\{t\}\}$

База окрестностей нуля в рассматриваемом случае определяется так (см. [1], [7]):

Пусть  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  — последовательность базовых окрестностей 0 в  $E$  такая, что:

1. Существует число  $c \in \mathbb{Z}$  такое, что множество  $\{x \in E : \nu_E(x) \geq c\}$  лежит в  $V_i$  для всех целых  $i$ .
2. Для любого целого  $l \in \mathbb{Z}$  множество  $\{x \in E : \nu_E(x) \geq l\}$  лежит в  $V_i$  для достаточно больших  $i$ .

Пусть  $U_{V_i} = \{\sum b_i t^i : b_i \in V_i\}$ . Тогда все множества  $U_{V_i}$  образуют базу окрестностей 0 в  $K$ .

Случай 2.  $K = E((t))$

Согласно [1] и [7] в этом случае база окрестностей нуля задается следующим образом:

Как и в случае  $K = E\{\{t\}\}$  предполагаем, что  $V_i$  — база окрестностей нуля в поле  $E$ , но на этот раз немного с другими условиями:

1.  $V_{j-1} \subset V_j$  для любого целого  $j$ .

2.  $V_j = E$  для достаточно больших  $j$ .

Как и в первом случае, точки базовой окрестности будут иметь вид  $\sum a_i t^i$ , где  $a_i \in V_i$ .

Топология для подполей — индуцированная топология.

Для двумерных локальных полей верны следующие утверждения (см. [1], например):

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** Пусть  $K$  — двумерное локальное поле. Тогда

1.  $K$  — полное топологическое пространство.
2. Умножение на ненулевую константу — гомеоморфизм.
3. Сложение — непрерывная операция, а умножение — секвенциально непрерывная, то есть если  $a_n \rightarrow a$ , а  $b_n \rightarrow b$ , то тогда  $a_n b_n \rightarrow ab$  и, кроме того, если  $b_n, b \neq 0$ , то  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ .

**ЛЕММА 1.** Пусть  $K$  — двумерное локальное поле (вида  $E\{\{t\}\}$  или  $E((t))$ ), где  $E$  — конечное расширение  $\mathbb{Q}_p$ ,  $a_n$  — последовательность элементов из  $K$ ,  $x \in K$ .

Тогда

1. если  $\nu(x) > 0$ , то последовательность  $x^n$  стремится к нулю при  $n \rightarrow +\infty$ ;
2. если  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ , а  $b_n$  — ограниченная последовательность элементов из  $E$ , (то есть такая, что последовательность чисел  $\nu_E(b_n)$  ограничена снизу конечным целым числом), то последовательность  $a_n b_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ .
3. Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  сходится и  $a_i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{i,k} t^k$ . Тогда  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,k}) t^k$ .  
(в случае  $K = E((t))$  считаем, что почти все коэффициенты при отрицательных степенях равны 0).
4. Если  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ , то ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  сходится.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первый случай:  $K = E\{\{t\}\}$ .

Докажем сначала первое утверждение леммы.

Пусть  $U_{V_i}$  — базовая окрестность нуля. Нужно показать, что существует  $N > 0$  такое, что  $x^n \in U_{V_i}$  для любого  $n \geq N$ .

Разберем 2 случая:

1.  $\nu_1(x) > 0$  ( $x = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i t^i$ , где  $\min(\nu_E(a_i)) > 0$ ,  $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x))$ ).

Тогда  $\nu_1(x^n) = n\nu_1(x) \geq n$ . Поскольку по первому свойству  $U_{V_i}$  существует  $n$ , что все коэффициенты лежат в  $V_i$ ,  $x^n \in U_{V_i}$  для достаточно больших  $n$ , а это то, что нужно.

2.  $\nu_1(x) = 0$ ,  $\nu_2(x) > 0$ . Тогда элемент  $x$  можно представить в виде

$$x = \pi \sum_{j=-\infty}^0 b_j t^j + t^i \sum_{j=0}^{+\infty} c_j t^j,$$

где  $i > 0$ ,  $c_0 \neq 0$ ,  $b_j$  и  $c_j \in O_E$  (т.е.  $\nu_E(b_j) \geq 0$  и  $\nu_E(c_j) \geq 0$ ), а  $\pi$  — простой элемент.

По свойству 1 базы окрестности существует  $k \in \mathbb{Z}$  такое, что для любого целого  $j$  множество  $\{x : \nu_E(x) \geq k\}$  лежит в  $U_j$ . Поскольку  $\nu_E(a_i) \rightarrow +\infty$  при  $i \rightarrow -\infty$ , то существует целое число  $M_1$ , что  $\nu_E(a_m) \geq k$  для любого  $m \leq M_1$ . Считаем для удобства, что  $M_1 < 0$ .

Разобьем ряд для  $x$  на 3 суммы:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i t^i = \sum_{i=-\infty}^{M_1} a_i t^i + \sum_{i=M_1+1}^0 a_i t^i + \sum_{i=1}^{+\infty} a_i t^i.$$

Поскольку для любого целого числа  $i$  нормирование  $\nu_E(a_i) \geq 0$ , нетрудно понять, что после раскрытия скобок (при возведении в степень  $n$  суммы вида  $(a + b + c)$ , где  $a$  соответствует первому ряду разбиения,  $b$  — второму и  $c$  — третьему) слагаемые, которые содержат множитель  $a$  будут, очевидно, лежать в множестве  $U_{V_i}$  (так как их первая координата нормирования будет хотя бы  $k$ ).

Значит из замкнутости  $U_{V_i}$  относительно суммы достаточно проверять наше утверждение в предположении, что  $a = 0$ .

Таким образом можно считать, что

$$x = \pi \sum_{j=-m}^0 b_j t^j + t^i \sum_{j=0}^{+\infty} c_j t^j,$$

где  $i > 0$ ,  $c_0 \neq 0$ ,  $b_j, c_j \in O_E$  для любого  $j$ ,  $m$  — целое неотрицательное число.

По второму свойству определения базовых окрестностей  $\{x \in E : \nu_E(x) \geq 0\} \subset U_j$  для достаточно больших  $j$  (больших, скажем, числа  $M'$ ).

Пусть  $M$  — натуральное число, большее, чем  $\frac{k(i+m)+M'}{i}$ .

Возьмем  $n \geq M$ . После раскрытия скобок  $(b + c)^n$  у нас получится сумма слагаемых вида  $b^l c^{n-l}$ , где  $0 \leq l \leq n$ . Покажем, что каждое слагаемое лежит в рассматриваемой базовой окрестности 0. Заметим, что если  $l \geq k$ , тогда это верно по выбору  $k$ . Значит достаточно доказывать это для  $l < k$ .

Пусть  $b^l c^{n-l} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j t^j$ . Покажем, что  $s_j = 0$  для любого  $s < M'$ . Ясно, что этого будет достаточно по выбору  $M'$ .

Нетрудно видеть, что минимальная степень, при которой коэффициент не равен 0, будет не меньше, чем  $-ml + i(n-l)$ . Оценим это число снизу:

$$-ml + i(n-l) = in - l(i+m) > iM - k(i+m) > k(i+m) + M' - k(i+m) = M'.$$

Значит действительно  $s_j = 0$  для любого  $j < M'$ .

Отсюда действительно следует, что  $x^n$  лежит в базовой окрестности 0 для любого  $n \geq M$ . Значит по определению предела  $x^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$  при  $\nu(x) > 0$ . Первое утверждение леммы для случая  $K = E\{\{t\}\}$  доказано.

Докажем второе утверждение:

Пусть последовательность рядов  $a_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{n,i} t^i$  сходится к 0. Также рассмотрим  $U_{V_i}$  — окрестность 0, где  $V_i = \{x \in E : \nu_E(x) \geq m_i\}$ . Понятно, что для достаточно больших  $n$   $a_{n,i} \in \{x : \nu_E(x) \geq m_i - c\}$ , где  $c$  такое целое число, что  $\nu_E(b_n) \geq c$ . Тогда  $\nu_E(a_{n,i} b_n) \geq m_i$  для больших  $n$ . Отсюда сразу следует, что  $a_n b_n$  попало в базовую окрестность, а значит есть сходимость к 0.

Докажем утверждение 3. Поскольку ряд сходится, то существует последовательность

$$b_i \in E, \text{ такая, что } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k t^k.$$

Покажем, что  $b_k = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,k}$  для любого целого  $k$ .

Заметим, что из сходимости ряда следует, что для любой окрестности нуля  $U$  в поле  $E$  элемент  $b_k - \sum_{i=0}^n a_{i,k}$  лежит в  $U$  для достаточно больших  $n$  и любого  $k$ . Это значит, что  $b_k$  —

предел частичных сумм ряда  $a_{i,k}$  по  $i$ . Тогда по определению суммы ряда получаем требуемое, что и доказывает утверждение 3.

Наконец, докажем 4-е утверждение.

Поскольку  $K$  — полное топологическое пространство (см. предложение 1), достаточно проверить сходимость ряда в себе.

Фиксируем окрестность  $U_{V_i}$ . Поскольку  $a_n \rightarrow 0$  сразу получаем, что  $a_n \in U_{V_i}$ . Тогда из замкнутости базовых окрестностей относительно сложения тоже верно и для конечных сумм, то есть сходимость в себе есть, а, следовательно, и сходимость ряда.

Таким образом в случае  $K = E\{\{t\}\}$  лемма полностью доказана.

Теперь второй случай:  $K = E((t))$ .

Докажем утверждение 1.

Фиксируем базовую окрестность нуля  $U_{V_i}$ .

1. Пусть  $\nu_1(x) > 0$ . Тогда  $x = t^m \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ , где  $m > 0$ , тогда ясно, что для любого натурального  $n$  первые  $n - 1$  коэффициентов ряда от  $t$  для  $x^n$  равны 0 (и, следовательно, лежат в  $U_j$ ), тогда для больших  $n$  будет верна импликация:  $b_i \neq 0 \Rightarrow U_i = E$  (где  $x^n = \sum b_i t^i$ ). Значит  $x^n$  лежит в выбранной окрестности, начиная с некоторого  $n$ .

2. Пусть  $\nu_1(x) = 0$ . Значит  $x = a_0 + t^m \sum_{k=0}^{+\infty} a'_k t^k$ , где  $m > 0$  и  $\nu_E(a_0) > 0$ .

Дальнейшие рассуждения проводятся как в первом случае.

Пункты 2 – 4 утверждения доказываются абсолютно аналогично.  $\square$

### 3.2. Равномерная сходимость и ее свойства

Еще два естественных аналитических понятия пригодятся для осуществления предельных переходов в доказательстве теоремы Коши:

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Будем говорить, что последовательность функций  $f_m(X)$  равномерно сходится к  $f(X)$  на множестве  $S$ , если для любой  $U$  — окрестности 0 существует число  $M \in \mathbb{N}$  такое, что для любого элемента  $x \in S$   $(f_m - f)(x) \in U$  для любого целого  $m \geq M$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Будем говорить, что последовательность функций  $f_m(X)$  равномерно сходится в себе на множестве  $S$ , если для любой  $U$  — окрестности 0 существует число  $M \in \mathbb{N}$  такое, что для любого элемента  $x \in S$   $(f_m - f_n)(x) \in U$  и для любых целых чисел  $m, n \geq M$ .

Если последовательность функций  $f_m(X)$  равномерно сходится к  $f(X)$ , будем писать  $f_m(X) \Rightarrow f(X)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Равномерную сходимость достаточно проверять на базовых окрестностях.

Сформулируем еще одно несложное, но полезное утверждение, которое будет использоваться в доказательстве основной теоремы:

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** Пусть дана последовательность функций  $f_m(X)$  и функция  $f(X)$ , такие, что  $f_m(X) \Rightarrow f(X)$  на множестве  $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$ ,

и функция  $g(x)$  такая, что  $g(x) \in E$  для любого  $x$  и  $\nu(g(x))$  — конечное число, не зависящее от  $x$ , для всех  $x$  из  $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$ . Тогда  $f_m(X)g(X) \Rightarrow f(X)g(X)$  на множестве  $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности можем считать, что  $\nu(g(x)) = 0$  для всех  $x$  (иначе поделим на константу, которая никак не влияет на сходимость). Кроме того, для удобства будем считать, что  $x_0 = 0$  и  $f(X) = 0$ .

Первый случай:  $K = E\{\{t\}\}$ .

Нужно показать, что для любой окрестности нуля  $U_{V_i}$  существует целое  $M$ , что  $f_m(X)g(X) \in U_{V_i}$  для любого  $m \geq M$ . Такое свойство верно для последовательности  $f_m(X)$ . Если  $V_i = \{x \in E : \nu_E(x) \geq a_i\}$ , где  $a_i$  — какое-то целое число, а  $\nu_E$  — нормирование в  $E$ , то тогда умножение на любой элемент  $g(x)$  не выводит  $f_m(X)g(X)$  за пределы окрестности (поскольку для любого  $x$  — это элемент из  $E$  с нормированием, равным 0). Отсюда получается, что требуемое свойство выполнены и для последовательности  $f_m(X)g(X)$ .

Случай, когда  $K = E((t))$  разбирается точно так же.

Значит домножение на функции такого вида сохраняют равномерную сходимость.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие утверждения можно ослабить, предполагая равномерную ограниченность  $g(x)$  на множестве  $\{x | \nu(x - x_0) = \nu(x)\}$  и требуя по-прежнему, чтобы  $g(x) \in E$  для всех  $x$ .

Сформулируем еще одно интересное и важное свойство равномерной сходимости рядов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть последовательность функций  $f_m(X) \Rightarrow f(X)$  на множестве  $r\{x \in E : \nu_E(x) = 0\}$  (все элементы домножаются на  $r$ ), где элементы  $r$ ,  $a \in K$ , причем  $\nu(a) \neq \nu(r)$ .

Тогда

$$\frac{f_m(X)}{(X - a)} \Rightarrow \frac{f(X)}{(X - a)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $K = E\{\{t\}\}$ .

Во-первых можно считать, что  $r = 1$  (иначе поделим на  $r$ ). Тогда  $x \in E$  и  $\nu(x) = 0$ .

Первый случай:  $\nu(a) > 0$ .

Рассмотрим базовую окрестность нуля  $U_{V_i}$ . Не умаляя общности можно считать, что  $V_i$  — возрастающая последовательность.

Перепишем разность последовательностей:

$$\frac{f_m(X)}{(X - a)} - \frac{f(X)}{(X - a)} = \frac{1}{(X - a)}(f_m(X) - f(X)) = \frac{1}{X} \frac{1}{(1 - \frac{a}{X})}(f_m(X) - f(X))$$

Первый множитель, очевидно, не влияет на равномерную сходимость, можно его дальше не рассматривать.

Нетрудно понять, что

$$\frac{1}{(1 - \frac{a}{X})} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{X}\right)^j.$$

Действительно,  $\sum_{j=0}^m \left(\frac{a}{X}\right)^j (1 - \frac{a}{X}) = 1 - \left(\frac{a}{X}\right)^{m+1}$ . Тогда из свойства 3 предложения 1 и утверждения 1 леммы 1 следует нужное равенство.

Покажем, что  $\frac{1}{(1 - \frac{a}{X})}(f_m(X) - f(X))$  стремится к 0 равномерно.

Пусть

$$f_m(X) - f(X) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(X)t^k, \text{ а } a^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n,k}t^k.$$

Пусть  $x \in E$ ,  $\nu_E(x) = 0$ .

Перепишем  $\frac{1}{(1-\frac{a}{x})}((f_m - f)(x))$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x) t^k \right) \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \frac{a}{x} \right)^j \right) &= \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x) t^k \right) \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a_{j,k}}{x^j} \cdot t^k \right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{i=-\infty}^k f_{m,i}(x) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a_{j,k-i}}{x^j} \right) t^k. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались утверждением 3 из леммы 1.

Поскольку  $f_m(X) \Rightarrow f(X)$  существует такое натуральное  $M$ , что для любого  $m \geq M$ , любого целого  $k$  и любого  $x$  (из рассматриваемого множества)  $f_{m,k}(x) \in V_k$ .

Докажем, что  $\frac{f_m(x)}{(x-a)} - \frac{f(x)}{(x-a)} \in U_{V_i}$  для любого  $x$  и целого  $m \geq M$ . Для этого достаточно показать, что для любого  $x$  и целого  $k$  выполнено

$$\sum_{i=-\infty}^k f_{m,i}(x) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a_{j,k-i}}{x^j} \in V_k.$$

Ясно, что достаточно показать, что  $f_{m,i}(x) \frac{a_{j,k-i}}{x^j} \in V_k$ , но это очевидно, поскольку  $\nu_E\left(\frac{a_{j,k-i}}{x^j}\right) \geq 0$ .

Второй случай:  $\nu(a) < 0$ .

Действуем так же, как и в первом случае:

$$\frac{f_m(X)}{(X-a)} - \frac{f(X)}{(X-a)} = \frac{1}{(X-a)}(f_m(X) - f(X)) = -\frac{1}{a} \frac{1}{\left(1 - \frac{X}{a}\right)}(f_m(X) - f(X)).$$

Далее, проводя рассуждения как в первом случае, можно доказать равномерную сходимость.

Пусть  $K = E((t))$ ,  $\nu(a) > 0$ .

Тогда  $a = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ .

Как и в первом случае распишем разность:

$$\frac{f_m(X)}{(X-a)} - \frac{f(X)}{(X-a)} = \frac{1}{(X-a)}(f_m(X) - f(X)) = \frac{1}{X} \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{X}\right)}(f_m(X) - f(X)).$$

Опять же первый множитель не влияет на равномерную сходимость.

Разность  $\frac{1}{(1-\frac{a}{x})}(f_m(x) - f(x))$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x) t^k \right) \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \frac{a}{x} \right)^j \right) &= \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x) t^k \right) \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \frac{a}{x} \right)^j \right) = \\ &= \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x) t^k \right) \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} a_i t^i \right)^j x^{-j} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что существует целое  $n$  и целое  $M$ , что для любого  $m \geq M$  любого  $x$  из рассматриваемого множества и любого  $N < n$  выполнено  $f_{m,N}(x) = 0$ . Действительно, пусть не так. Тогда диагональным методом можно построить базовую окрестность, в которую не попадет никакой элемент из последовательности (для некоторых элементов), что будет противоречить равномерной сходимости.

Таким образом можно было с самого начала считать, что для всех  $m, k < n$  и  $x$  имеет место  $f_{m,k}(x) = 0$ .

Тогда ясно из равномерной сходимости, что для наперед заданного числа  $k$  существует  $M$ , что при  $m > M$  в разложении ряда  $\frac{1}{(1-\frac{a}{x})}(f_m(x) - f(x))$  все коэффициенты при всех степенях, меньших  $k$  равны 0, и тогда несложно отсюда вывести утверждение предложения.

Случай  $\nu(a) < 0$  разбирается аналогично.

Утверждение полностью доказано.  $\square$

Важным частным случаем равномерной сходимости, который нам пригодится в дальнейшем будет являться равномерная сходимость степенного ряда на множестве. В следующем подпункте будет доказано 2 важных результата, которые будут ключевыми в доказательстве интегральной теоремы Коши.

### 3.3. Равномерная сходимость рядов

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** Пусть ряд  $\sum_{j=0}^{+\infty} a_j$ , где  $a_i \in K$  сходится. Тогда степенной ряд  $\sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^j$  сходится равномерно на множестве  $\{x \in E : \nu_E(x) = 0\}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем, как обычно, считать, что  $K = E\{\{t\}\}$  (случай  $K = E((t))$  разбирается аналогично)

Заметим, что такой степенной ряд сходится поточечно.

Пусть  $a_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n,k} t^k$ .

Согласно утверждению 1 предложения 1  $K$  — полное топологическое пространство, значит достаточно проверять сходимость последовательности частичных сумм в себе. Как обычно, зафиксируем окрестность  $U_{V_i}$ . Заметим, что последовательность частичных сумм изначального ряда также сходится в себе, а значит  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Таким образом, существует  $M$ , такое, что  $a_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n,k} t^k$  лежит в  $U_{V_i}$  для любого  $n \geq M$ , то есть  $a_{n,k} \in V_i$ . Пусть теперь  $n \geq m \geq M$ . Тогда имеем:

$$\sum_{j=m}^n a_j x^j = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{j=m}^n a_{j,i} x^j \right) t^i.$$

Поскольку  $a_{n,j} \in V_j$  для любого  $j$  и  $i \geq M$ , и, кроме того,  $x^j \in E$  и  $\nu_E(x) = 0$  для любого  $j \in \mathbb{Z}$ , получаем, что  $\sum_{j=m}^n a_j x^j \in V_j$ .

Значит ряд сходится в себе, и следовательно сходится поточечно.

Проверим равномерную сходимость ряда на рассматриваемом множестве (с теми же  $U_{V_i}$ ) и  $M$ .

По утверждению 3 леммы 1 имеем:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,k} x^i \right) t^k.$$

Докажем, что  $\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,k} x^i \in V_k$  для любого целого  $k$  и любого натурального  $n \geq M$ . Это сразу видно для  $a_{i,k} x^i$ . Раз это верно для каждого слагаемого, то, разумеется, и для суммы ряда.

Значит по определению равномерной сходимости наш ряд сходится равномерно на множестве  $\{x : x \in E, \nu_E(x) = 0\}$ .  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть ряд  $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$  сходится для какого-то  $x_0$  вида  $rq_0$ , где  $r \in K$  и не равен 0, а  $q_0 \in E$ , причем  $\nu_E(q_0) = 0$ . Тогда  $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$  сходится равномерно на множестве  $\{x : x = rq, q \in E\}$  (на множестве представимых в таком виде элементов).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $b_i = a_i x_0^i$ . Тогда ряд  $\sum_{i=0}^{+\infty} b_i$  сходится. Следовательно, по предложению 3 ряд  $\sum_{i=0}^{+\infty} b_i x^i$  равномерно сходится на множестве  $\{x \in E : \nu_E(x) = 0\}$ . Перепишем ряд  $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$  через  $b_i$ :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x_0^i \left(\frac{x}{x_0}\right)^i = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i \left(\frac{q}{q_0}\right)^i.$$

Отсюда ясно, что  $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$  сходится равномерно на рассматриваемом множестве, что и требовалось доказать.  $\square$

#### 4. Определение интеграла Шнирельмана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Последовательность многочленов  $g_1(X), \dots, g_n(X), \dots \in \mathbb{Z}[X]$  называется допустимой, если

1. Для любого  $j$  многочлен  $g_j(X)$  не имеет кратных корней в  $\mathbb{Q}_p^{alg}$ .
2.  $g_j(X) = X^{n_j} + c_{j,1}X^{n_{j,1}} + \dots + c_{j,\mu}X^{n_{j,\mu}} + c_0$ , где  $c_{j,i}$  и  $c_0 \in \mathbb{Z}$ .
3.  $|n_j|_p = 1$ .
4.  $\nu(c_0) = 0$ .
5.  $n_j - n_{j,1} \rightarrow +\infty$  при  $j \rightarrow +\infty$ .
6.  $n_{j,\mu} \rightarrow +\infty$  при  $j \rightarrow +\infty$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Интеграл Шнирельмана функции  $f(X) : U \rightarrow \overline{K^{alg}}$  ( $U$  — какое-то подмножество  $\overline{K^{alg}}$ ) с центром в  $x_0 \in \overline{K^{alg}}$  и радиусом  $r \in \overline{K^{alg}}$  по определению равен

$$\int_{x_0, r, g} f(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(x_0 + r\alpha_i),$$

где сходимостъ понимается в смысле топологии двумерного локального поля, а  $\alpha_i$  — корни многочлена  $g_j$  (их ровно  $n_j$  в силу того, что многочлен рассматривается в алгебраическом замыкании и у него нет кратных корней), лежат в  $\mathbb{Q}_p^{alg}$  (т.е. не зависят от  $t$ ).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. При тех же обозначениях будем говорить, что функция  $f$  интегрируема на множестве  $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$ , если интеграл в круге с центром в  $x_0$  и радиуса  $r$  корректно задан. Из теоремы Коши будет следовать, что интегрируемость не зависит от выбора подходящей последовательности многочленов  $g_j(X)$ .

ЗАМЕЧАНИЯ 1. 1. Это определение действительно обобщает интеграл Шнирельмана для одномерного случая (определение для одномерных локальных полей см. в [8]).

2. Мы рассматриваем такой интеграл только при условии, что многочлен  $f(X)$  задан в соответствующих точках и предел определен.

3. В этих определениях нигде, по существу, не использовался вид двумерного локального поля, поэтому определение годится для произвольного двумерного локального поля. Более того, дословно так же можно определить интеграл Шнирельмана для произвольного  $n$ -мерного локального поля и таким образом предполагается дальнейшее обобщение полученных ниже результатов для произвольных многомерных полей.

4. Из определения допустимой последовательности многочленов сразу следует, что  $\nu(\alpha_i) = 0$  для всех  $i$ .

Действительно, если  $\nu(\alpha_i) > 0$ , то  $\nu(g_j(\alpha_i)) = \nu(c_0) = 0$  что не верно.

Если же  $\nu(\alpha_i) < 0$ , то нетрудная проверка показывает, что  $\nu(g_j(\alpha_i)) = n_j \nu(\alpha_i) < 0$ . Снова приходим к противоречию.

Таким образом, единственный вариант это  $\nu(\alpha_i) = 0$ .

## 5. Простейшие свойства интеграла

Перед доказательством основной теоремы этой работы сформулируем и докажем несколько простых, но важных свойств интеграла.

Будем использовать те же обозначения, что и в предыдущем пункте.

Будем считать, что  $K = E\{\{t\}\}$  или  $K = E((t))$ .

СВОЙСТВО 1. Интеграл линеен, то есть для любых функций  $f(x)$ ,  $g(x)$  и элемента поля  $c$

$$1. \int_{x_0, r, g} (f(x) + g(x)) = \int_{x_0, r, g} f(x) + \int_{x_0, r, g} g(x).$$

$$2. \int_{x_0, r, g} cf(x) = c \int_{x_0, r, g} f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из линейности предела.  $\square$

СВОЙСТВО 2. Пусть  $f_m(X)$  — последовательность интегрируемых на множестве  $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$  функций, и последовательность  $f_m(X)$  сходится равномерно на  $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$  к функции  $f(X)$ , которая тоже интегрируема на этом множестве. Тогда

$$\int_{x_0, r, g} f_m(x) \rightarrow \int_{x_0, r, g} f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего можно считать  $f(X) = 0$  (линейность интеграла), а точку  $x_0 = 0$ .

Пусть  $U_{V_i}$  — базовая окрестность нуля. Нужно показать, что существует целое  $M$  такое, что  $\int_{0, r, g} f_m(x) \in U_{V_i}$  для любого  $m > M$ .

$$\int_{0, r, g} f_m(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f_m(r\alpha_i).$$

Множитель  $r$  не зависит от  $j$  и  $m$  и не влияет на сходимость к 0, поэтому его можно не учитывать. Пусть  $V_i = \{x \in E : \nu_E(x) \geq a_i\}$ , где  $a_i$  — какое-то целое число, а  $\nu_E$  — нормирование в  $E$ . Ясно, что  $\nu(\frac{\alpha_i}{n_j}) = 0$  и если  $f_m(x) \in U_{V_i}$  для любого  $x \in \{x : \nu(x) = \nu(r)\}$  (здесь пользуемся равномерной сходимостью функций), то  $\sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{\alpha_i}{n_j} f_m(r\alpha_i) \in U_{V_i}$ . Тогда и

интеграл  $\int_{0,r,g} f_m(x)$  тоже лежит в этой окрестности. Значит последовательность интегралов действительно сходится к нулю, свойство доказано.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** На самом деле в формулировке свойства 2 интегрируемость  $f$  необязательно требовать. Она следует из равномерной сходимости интегрируемых функций автоматически.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Считаем, как обычно,  $x_0 = 0$ . Заметим, что последовательность интегралов  $\int_{0,r,g} f_m(x)$  сходится. Действительно, фиксируем базовую окрестность нуля  $U$  и воспользуемся тем, что последовательность  $f_m$  равномерно сходится в себе. Тогда ясно, что домножение на  $\frac{\alpha_i}{n_j}$  и взятие суммы не нарушает это свойство. Отсюда несложно вывести, что последовательность интегралов равномерно сходится в себе. Тогда из полноты рассматриваемой топологии последовательность интегралов сходится.

Используя равномерную сходимость функций к  $f$  легко получить, что

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{g(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(r\alpha_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{0,r,g} f_m(X),$$

что и означает интегрируемость  $f$ .  $\square$

Далее в работе будут сформулированы и доказаны 2 результата — аналог интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей и связь между интегралом Шнирельмана и символом Гильберта.

## 6. Интегральная теорема Коши для двумерных локальных полей

Зафиксируем элементы  $x_0, r \in K$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $P(X) \in K[[X]]$  сходится на множестве  $\{x : \nu(x - x_0) \geq \nu(r)\}$ , а многочлен  $Q(X) \in K[X]$  не имеет корней на множестве  $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$ .

Тогда:

1.  $\int_{x_0,r,g} \frac{P(x)}{Q(x)}$  корректен не зависит от последовательности допустимых многочленов  $g_j$ .
2.  $\int_{x_0,r,g} \frac{P(x)}{Q(x)}$  равен сумме вычетов функции  $\frac{P(X)}{Q(X)}$  по всем полюсам внутри множества  $\{x : \nu(x - x_0) \geq \nu(r)\}$
3. Пусть  $P(X)$  как и выше, а  $Q(X) = X^m(1 - R(X))$ , где  $R(X) \in K[[X]]$ , такой, что  $\nu(R(x)) > 0$  для любого  $x \in \{x : \nu(x - x_0) \geq \nu(r)\}$ . Кроме того, предположим, что  $\nu(r) > 0$ .

Тогда для дроби  $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$  верны утверждения 1 – 2 этой теоремы.

Таким образом из этих трех предложений получаем корректность определения и даже метод подсчета интеграла.

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Можно опускать индексы и считать последовательность многочленов ("контур") такой:

$$g_j = X^{n_j} - 1, (n_j, p) = 1, n_j \rightarrow +\infty \text{ при } j \rightarrow +\infty$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Простая проверка  $\square$

Теперь будем доказывать теорему 2:

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сперва заметим, что можно считать, что  $x_0 = 0$  (т.е. предполагая, что из этого случая легко выводится общий случай). Для удобства обозначим  $\tilde{f}(y) := f(x_0 + y)$ .

Действительно, по определению

$$\int_{x_0, r, g} f(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(x_0 + r\alpha_i) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} \tilde{f}(r\alpha_i) = \int_{0, r, g} \tilde{f}(x).$$

Далее, интеграл  $\int_{0, r, g} \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$  равен сумме вычетов  $\frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$  по всем полюсам внутри множества  $\{x : \nu(x) > \nu(r)\}$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_a \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (z-a)^{n-1} \tilde{f}(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow a+x_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (z-a-x_0)^{n-1} f(z+x_0-x_0) = \operatorname{res}_{x_0+a} \frac{P(x)}{Q(x)}. \end{aligned}$$

Поэтому можно с самого начала считать, что  $x_0 = 0$ .

Дальнейшее доказательство мы будем проводить в несколько этапов (случаев).

1. Пусть  $f(X) = X^k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\int_{0, r, g} f(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(r\alpha_i).$$

Заметим, что  $\sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(r\alpha_i) = \frac{1}{n_j} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} (r\alpha_i)^{k+1}$ .

Разберем 3 случая:

(а)  $k \geq 0$ .

По теореме Виета коэффициенты многочлена  $g_j$  при степенях  $1, \dots, k+1$  равны 0 при достаточно больших  $j$  (так как  $n_{j,\mu} \rightarrow +\infty$ ). Тогда ясно, что и сумма стремится к 0.

Из линейности сразу получаем, что интеграл от любого многочлена равен 0.

(б)  $k = -1$ . Поскольку корней у  $g_j$  ровно  $n_j$  получаем, что  $\int_{0, r, g} \frac{1}{x} = 1$ .

(с)  $k < -1$ . Пусть  $\beta_i = \frac{1}{\alpha_i}$ . Тогда нетрудно понять, что рассматриваемая сумма — это многочлен от сумм  $\beta_1 + \dots + \beta_n$ ,  $\beta_1\beta_2 + \dots + \beta_{n-1}\beta_n$  и так далее от  $\beta_1\beta_2\dots\beta_k + \dots + \beta_{n-k+1}\dots\beta_n$  — из условия  $n_j - n_{j,1} \rightarrow +\infty$  при  $j \rightarrow +\infty$  следуют, что рано или поздно все эти симметрические функции станут равны 0.

Таким образом при  $k < -1$   $\int_{0, r, g} \frac{1}{x^k} = 0$ .

2. Пусть  $f(X) = \frac{P(X)}{X-a}$ ,  $P(X) \in K[X]$ ,  $\nu(a) > \nu(r)$ . Из теоремы Безу и первого пункта доказательства получаем, что достаточно доказывать для  $P(X) = 1$ .

$$\frac{1}{X-a} = \frac{1}{X} \frac{1}{1-\frac{a}{X}} = \frac{1}{X} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{X}\right)^k = \frac{1}{X} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{r\frac{X}{r}}\right)^k.$$

Поскольку в определении интеграла подставляются только точки вида  $r\alpha_i$ , то по утверждению 4 леммы 1 ряд  $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{r\frac{X}{r}}\right)^k$  сходится поточечно для  $x = r\alpha_i$ , следовательно по предложению 3 этот ряд сходится на множестве  $\{x : x = r\alpha_i, \text{ где } \alpha_i \text{ — корень многочлена } g_j \text{ для некоторого } j\}$  равномерно. Здесь стоит отметить, что корни  $\alpha_i$  вообще говоря не

обязаны лежать в  $E$ , но утверждения, на которые здесь идут отсылки в данном случае остаются верными, поскольку  $\alpha_i$  берутся из конечных алгебраических расширений одномерного локального поля  $\mathbb{Q}_p$ .

По предложению 2 получаем, что последовательность частичных сумм  $\frac{1}{X} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a}{X}\right)^k$  сходится равномерно к бесконечной сумме и тогда по свойству 2 интегралов получаем,

$$\int_{0,r,g} \frac{1}{X} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{X}\right)^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{0,r,g} \frac{1}{X} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a}{X}\right)^k.$$

Тогда из случаев 1b и 1c получаем, что этот предел равен 1.

Аналогично, используя случаи 1a-1c разбираются случаи:

3.  $f(X) = \frac{P(X)}{X-a}$ ,  $P(X) \in K[X]$ ,  $\nu(a) < \nu(r)$ .
4. Случай  $Q(X) = (X-a)^n$ ,  $\nu(a) \neq \nu(r)$ .
5. Теперь разберем случай, когда  $P(X) \in K[[X]]$ , а  $Q(X) = (X-a)^n$  и  $\nu(a) > \nu(r)$ .

$P(X)$  сходится на множестве  $\{x : \nu(x) \geq \nu(r)\}$ , значит последовательность многочленов  $P_m(X)$  сходится  $P(X)$ , где  $P_m$  — сумма первых  $m$  членов ряда  $P(X)$ . По предложению 3 получаем, что  $P_m(X)$  сходится равномерно к  $P(X)$  на множестве  $\{x : x = r\alpha_i, \alpha_i — \text{корень } g_j \text{ для некоторого } j\}$  и по предложению 2 получаем, что  $\frac{P_m(X)}{(X-a)} \Rightarrow \frac{P(X)}{(X-a)}$ . По свойству 2 интегралов Шнирельмана получаем, что  $\int_{0,r,g} \frac{P_m(X)}{(X-a)^n} \rightarrow \int_{0,r,g} \frac{P(X)}{(X-a)^n}$ .

Примечание: строго говоря  $\alpha_i$  могут не лежать в  $E$ , но от перехода к алгебраическим расширениям поля  $E$  утверждения, на которые идут отсылки остаются по-прежнему верными.

Заметим, что отсюда немедленно последует требуемое:

$$\int_{0,r,g} \frac{P_m(X)}{(x-a)^n} = \frac{1}{(n-1)!} P_m^{(n-1)}(a) \rightarrow \frac{1}{(n-1)!} P^{(n-1)}(a) = \text{res}_a f(X)$$

(при  $m \rightarrow +\infty$ ). Тогда ясно, что и  $\int_{0,r,g} \frac{P(X)}{(x-a)^n} = \text{res}_a f(X)$ .

Из всего сказанного выше следует нужная сходимость.

Доказательство случая, когда  $\nu(a) < \nu(r)$  принципиально ничем не отличается. Важно, только, что  $\nu(a) \neq \nu(r)$ .

6. Общий случай. Пусть знаменатель  $Q(X) = (X-a_1)^{\alpha_1}(X-a_2)^{\alpha_2} \dots (X-a_n)^{\alpha_n}$  (возможно, придется перейти к конечному расширению поля  $K$ , в котором  $Q(X)$  раскладывается на линейные множители, для дальнейших рассуждений это непринципально), тогда по линейному разложению НОД существуют многочлены  $A(X)(X-a_1)^{\alpha_1} + B(X)(X-a_2)^{\alpha_2} \dots (X-a_n)^{\alpha_n} = 1$ . Пользуясь этим можно свести подсчет исходного интеграла к подсчету интегралов от функций, у знаменателей которых количество различных корней на 1 меньше, чем было многочленов. В итоге получим интегралы из предыдущего случая и нетрудная аккуратная проверка показывает, что искомое равенство верно.

Утверждения 1-2 проверены.

Осталось утверждение 3.

Ряд  $\frac{1}{1-R(X)} = \sum_{k=0}^{+\infty} R(X)^k$  (поскольку  $\nu(R(X)) > 0$ ).

Тогда по секвенциальной непрерывности произведения получаем, что

$$\frac{P(X)}{X^m(1-R(X))} = \frac{1}{X^m} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X)R(X)^k.$$

Применяя случай 1 получаем, что после раскрытия скобок и приведения подобных все слагаемые ряда  $P(X)R(X)^k$  обнулятся (когда от них возьмем интеграл), кроме слагаемого при степени  $-1$ . Из курса анализа мы знаем, что коэффициент при степени  $-1$  будет соответствовать вычету в 0. Кроме того, ясно, что на множестве  $\{x : \nu(x) \geq \nu(r)\}$  у функции  $f(X)$  особенность есть только в 0.

Таким образом, в этом случае действительно имеет место утверждение теоремы Коши.

Утверждение 3 проверено.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЯ 2. 1. Таким образом можно опускать индекс  $g$  под интегралом.

2. Результат теоремы 2 является дискретным аналогом интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей.

## 7. Связь интеграла Шнирельмана с символом Гильберта

Из интегральной теоремы Коши получаем следствия, которые связывают интеграл Шнирельмана с символом Гильберта для двумерных локальных полей.

Будем здесь считать, что поле  $K$  имеет вид  $E\{\{t\}\}$ , где  $E$  — конечное расширение поля  $\mathbb{Q}_p$ .

СЛЕДСТВИЕ 3.

$$\int_{0,p} \frac{\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{s} = \text{res}_X \left( \frac{\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{s} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряд  $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  сходится на множестве  $\{x : \nu(x) \geq 0\}$  (см. [1]).

Чтобы применить утверждение 3 теоремы 2 нужно убедиться, что  $Q(X)$  имеет вид, как в теореме (возможно, с ненулевым константным множителем).

Рассмотрим знаменатель  $s(X) = z(X)^q - 1$ . Пусть  $z(X) = z_0(X) + 1$ .

Тогда  $s(X) = (z_0(X) + 1)^q - 1 = z_0(X)(z_0(X)^{q-1} + \dots + q)$  (Бином Ньютона).

Пусть  $\zeta = 1 + \zeta_0$ . Тогда имеем  $(1 + \zeta_0)^q = 1$  и, очевидно,  $\zeta_0 \neq 0$ .

Раскроем по Биному Ньютона:  $(1 + \zeta_0)^q = 1 + \binom{q}{1}\zeta_0 + \binom{q}{2}\zeta_0^2 + \dots + \zeta_0^q = 1$ . Учитывая, что  $\zeta_0 \neq 0$  получаем, что  $\binom{q}{1} + \binom{q}{2}\zeta_0 + \dots + \zeta_0^{q-1} = 0$ . Отсюда сразу следует, что  $\nu(\zeta_0) > 0$  и, учитывая неархимедовость нормирования  $\nu$  имеем равенство:

$$n\nu(p) = (p^n - 1)\nu(\zeta_0) > 0.$$

Тогда ясно, что  $z_0(X)$  имеет нужный вид. Осталось это проверить для второго множителя (в знаменателе дроби).

Поскольку  $\nu(p) > 1$  получаем, что  $\nu(z_0^{q-1} + \dots + z_0(\frac{q}{2})) > \nu(q)$ .

Тогда можно отсюда вывести, что  $Q(X) = aX^m(1 - R(X))$ , где  $a$  — ненулевой множитель, а  $R(X)$  удовлетворяет условиям теоремы.

Применяя утверждение 3 теоремы 3, получаем в точности требуемое, следствие доказано.

$\square$

В силу явной формулы для символа Гильберта (см. [6]), получаем нужную связь:

$$\text{СЛЕДСТВИЕ 4. } (\{\alpha_1, \alpha_2\}, y)_q = \zeta^{\text{tr}(\int_{0,p} \frac{\Phi(\alpha_1, \alpha_2, y)}{s})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$(\{\alpha_1, \alpha_2\}, y)_q = \zeta^{\text{tr}(\frac{\Phi(\alpha_1, \alpha_2, y)}{s})} = \zeta^{\text{tr}(\int_{0,p} \frac{\Phi(\alpha_1, \alpha_2, y)}{s})}.$$

$\square$

## 8. Заключение

Доказанный в работе аналог хорошо известной в анализе интегральной теоремы Коши явно выражает связь между теорией алгебраических чисел и теорией алгебраических функций.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhukov, I., Geometry & Topology Monographs Volume 3: Invitation to higher local fields Part I, section 1, pages 5–18
2. Hasse H., Bericht ueber die Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkorper, II, Reziprozitätssatz, Leipzig-Berlin, 1930.
3. Kato K., A generalization of local class field theory by using K-groups. I J.Fac.Sci.Univ.Tokio, Sect 1 Math.26(1979), No2, 303-376
4. Kato K., A generalization of local class field theory by using K-groups. II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27 (1980), no. 3, 603–683. 4
5. Востоков С. В. Явная форма закона взаимности.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, т. 42, № 6, с. 1288—1321.
6. Востоков С. В., Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1985, том 49, выпуск 2, 283–308
7. Востоков С. В., Жуков И. Б., Фесенко И. Б., К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции, Алгебра и анализ, 1990, том 2, выпуск 4, 91–118
8. Востоков С. В., Иванов М. А., Интегральная теорема Коши и классический закон взаимности, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2012, том 154, книга 2, 73–82
9. Иванов М. А., Произведение символов  $p^n$ -х степенных вычетов как абелев интеграл, Алгебра и анализ, 2012, том 24, выпуск 2, 120–129
10. Ломадзе В. Г., К теории ветвления двумерных локальных полей, Матем. сб., 1979, т. 109 (151), номер 3(7), 378–394
11. Милнор Дж. Введение в алгебраическую  $K$ -теорию. М.: Мир, 1974, 196 с.
12. Паршин А. Н. Поля классов и алгебраическая  $K$ -теория.— Успехи матем. наук, 1975, т. 30, № 1, с. 253—254.
13. Паршин А. Н. Локальная теория полей классов.— Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1984, т. 165, с. 143—170.
14. Фесенко И. Б., Теория локальных полей. Локальная теория полей классов. Многомерная локальная теория полей классов, Алгебра и анализ, 1992, том 4, выпуск 3, 1–41
15. Шафаревич И. Р., Общий закон взаимности, Матем. сб., 1950, том 26(68), номер 1, 113–146

## REFERENCES

1. Fesenko I.B. 1993, "Theory of local fields. Local class field theory. Multidimensional local class field theory St. Petersburg Math. J. 4 (1993), no. 3, pp. 403–438.
2. Fesenko, I.B. Vostokov, S.V. & Zhukov, I.B. 1990, "On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions Algebra i Analiz 2 (1990), no. 4, 91–118; English transl. in Leningrad Math. J. 2 (1991).
3. Hasse, H. 1930, "Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper Teil II: Reziprozitätsgesetz., vol.6 of Jahresber. DMV, Ergänzungsband. B. G. Teubner. IV + 204 pp.
4. Ivanov, M.A. 2013, "The product of symbols of  $p^n$ th power residues as an Abelian integral St. Petersburg Mathematical Journal, vol. 24:2, pp. 275–281. doi/10.1090/S1061-0022-2013-01238-6
5. Kato, K. 1979, "A generalization of local class field theory by using  $K$ -groups. I Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics 26, no. 2, pp. 303–376. doi/10.15083/00077072
6. Kato, K. 1980, "A generalization of local class field theory by using  $K$ -groups. II Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics 27, no. 3, pp. 603–683. doi/10.15083/00077073
7. Lomadze, V.G. 1980, "On the ramification theory of two-dimensional local fields Mathematics of the USSR-Sbornik, vol. 37:3, pp. 349–365. doi/10.1070/SM1980v037n03ABEH001957
8. Milnor J. 1971, "Introduction to algebraic K-theory Ann. Math. Stud., no. 72, XIV, 184 pp.
9. Parshin A.N. 1975, "Class fields and algebraic  $K$ -theory Uspekhi Mat. Nauk, vol. 30, no. 1, pp.253–254.
10. Parshin A.N. 1985, "Local class field theory Proc. Steklov Inst. Math., 1985, no. 3.
11. Shafarevich I.R. 1950, "A general reciprocity law", Mat. Sb. (N.S.), 26(68):1 (1950), pp. 113–146
12. Vostokov, S.V. 1979, "Explicit form of the law of reciprocity Mathematics of the USSR-Izvestiya, vol. 13, no. 3, pp. 557–588. doi/10.1070/IM1979v013n03ABEH002077
13. Vostokov, S.V. 1986, "Explicit construction of class field theory for a multidimensional local field Mathematics of the USSR-Izvestiya, vol.26(2):263. doi/10.1070/IM1986v026n02ABEH001141
14. Vostokov, S.V. & Ivanov, M.A. 2012, "Cauchy's integral theorem and classical reciprocity law", Uch. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki 154 (2), pp. 73–82
15. Zhukov, I. 2000, "Higher dimensional local fields Geometry & Topology Monographs, vol. 3, pp. 5–18. doi: 10.2140/gtm.2000.3.5

Получено 25.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 512.623

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-59-67

Расширения Инабы полных полей характеристики 0<sup>1</sup>

С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова

**Сергей Владимирович Востоков** — доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: s.vostokov@spbu.ru*

**Игорь Борисович Жуков** — доктор физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: i.zhukov@spbu.ru*

**Ольга Юрьевна Иванова** — кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: olgaiv80@mail.ru*

## Аннотация

В статье изучаются  $p$ -расширения полных дискретно нормированных полей смешанной характеристики, где  $p$  — характеристика поля вычетов рассматриваемого поля. Известно, что любое вполне разветвленное расширение Галуа степени  $p$  с немаксимальным скачком ветвления может быть задано уравнением Артина-Шрайера; при этом ограничение сверху на скачок ветвления соответствует ограничению снизу на нормирование правой части уравнения. Задача построения расширений с заданной группой Галуа произвольного конечного порядка не решена.

В работах Инабы рассматривались  $p$ -расширения полей характеристики  $p$ , заданные матричным уравнением  $X^{(p)} = AX$ , которое мы здесь называем уравнением Инабы. В этом уравнении  $X^{(p)}$  обозначает матрицу, полученную возведением каждого элемента квадратной матрицы  $X$  в степень  $p$ , а — некоторая унитарная матрица  $A$  над данным полем. Такое уравнение задает последовательность расширений полей, каждое из которых задано уравнением Артина-Шрайера. Было доказано, что любое уравнение Инабы задает расширение Галуа, и обратно, любое конечное  $p$ -расширение Галуа задается уравнением такого вида.

В настоящей работе для полей смешанной характеристики доказано, что расширение, задаваемое уравнением Инабы, является расширением Галуа, если нормирования элементов матрицы удовлетворяют некоторым оценкам снизу, т.е. если скачки промежуточных расширений степени  $p$  достаточно малы.

Данная конструкция может применяться при решении задачи погружения расширений полей. Уравнение Инабы задает последовательность расширений полей, полученную последовательным присоединением элементов диагоналей матрицы. Это означает, что, если расширение  $L/K$  задано уравнением Инабы, и матрица  $A$  выбрана так, что на диагоналях с большими номерами записаны нули, то можно получать расширения, содержащие  $L/K$ , заменяя нули другими элементами. В работе доказано, что любое нециклическое расширение степени  $p^2$  с достаточно маленькими скачками можно погрузить в расширение с группой Галуа, изоморфной группе унитарных матриц  $3 \times 3$  над полем из  $p$  элементов.

В конце статьи сформулирован ряд открытых вопросов, при исследовании которых, возможно, окажется полезной данная конструкция.

**Ключевые слова:** дискретно нормированное поле, скачок ветвления, уравнение Артина-Шрайера.

**Библиография:** 15 названий.

<sup>1</sup>Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-10200).

**Для цитирования:**

С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова Расширения Инабы полных полей характеристики 0 // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 59–67.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 512.623

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-59-67

**Inaba extension of complete field of characteristic 0**

S. V. Vostokov, I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova

**Sergei Vladimirovich Vostokov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Saint Petersburg State University (Saint–Petersburg).

*e-mail: s.vostokov@spbu.ru*

**Igor Borisovich Zhukov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Saint Petersburg State University (Saint–Petersburg).

*e-mail: i.zhukov@spbu.ru*

**Olga Yur'evna Ivanova** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (Saint–Petersburg).

*e-mail: olgaiv80@mail.ru*

**Abstract**

This article is devoted to  $p$ -extensions of complete discrete valuation fields of mixed characteristic where  $p$  is the characteristic of the residue field. It is known that any totally ramified Galois extension with a non-maximal ramification jump can be determined by an Artin-Schreier equation, and the upper bound for the ramification jump corresponds to the lower bound of the valuation in the right-hand side of the equation. The problem of construction of extensions with arbitrary Galois groups is not solved.

Inaba considered  $p$ -extensions of fields of characteristic  $p$  corresponding to a matrix equation  $X^{(p)} = AX$  herein referred to as Inaba equation. Here  $X^{(p)}$  is the result of raising each element of a square matrix  $X$  to power  $p$ , and  $A$  is a unipotent matrix over a given field. Such an equation determines a sequence of Artin-Schreier extensions. It was proved that any Inaba equation determines a Galois extension, and vice versa any finite Galois  $p$ -extension can be determined by an equation of this sort.

In this article for mixed characteristic fields we prove that an extension given by an Inaba extension is a Galois extension provided that the valuations of the elements of the matrix  $A$  satisfy certain lower bounds, i. e., the ramification jumps of intermediate extensions of degree  $p$  are sufficiently small.

This construction can be used in studying the field embedding problem in Galois theory. It is proved that any non-cyclic Galois extension of degree  $p^2$  with sufficiently small ramification jumps can be embedded into an extension with the Galois group isomorphic to the group of unipotent  $3 \times 3$  matrices over  $\mathbb{F}_p$ .

The final part of the article contains a number of open questions that can be possibly approached by means of this construction.

**Keywords:** discrete valuation field, ramification jump, Artin-Schreier equation

**Bibliography:** 15 titles.

**For citation:**

S. V. Vostokov, I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova, 2020, "Inaba extensions of complete fields of characteristic 0", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 59–67.

## 1. Введение

В статье Инабы [4] было показано, что матричное уравнение вида  $X^{(p)} = AX$ , где  $X^{(p)}$  обозначает матрицу, полученную из  $X$  возведением каждого элемента в степень  $p$ , а  $A$  — унипотентная квадратная матрица над полем  $K$  характеристики  $p > 0$ , задаёт  $p$ -расширение Галуа поля  $K$ , и что произвольное конечное  $p$ -расширение Галуа может быть задано уравнением такого вида.

В настоящей работе мы проверяем, что уравнение  $X^{(p)} = AX$  также задаёт  $p$ -расширение Галуа, если  $K$  — полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с произвольным полем вычетов характеристики  $p > 0$ , а нормирования элементов  $A$  удовлетворяют определённым оценкам снизу. Показано, как этот результат можно применить к решению задач погружения для расширений с малыми скачками ветвления.

В заключительном параграфе сформулирован ряд открытых вопросов, решать которые можно с использованием данной конструкции.

## 2. Обозначения и предварительные сведения

В данной статье через  $K$  обозначено полное дискретно нормированное поле характеристики 0 с произвольным полем вычетов характеристики  $p > 0$ , через  $\Omega$  алгебраическое замыкание  $K$ , через  $v$  — нормирование на  $\Omega$  (продолжение дискретного нормирования на  $K$ ), нормализованное условием  $v(p) = 1$ , через  $e_K$  — абсолютный индекс ветвления поля  $K$ , т. е.  $e_K = (v(K^*) : \mathbb{Z})$ . Для строки  $D = (D_1, \dots, D_l)$  из элементов  $\Omega$  считаем  $v(D) = \min(v(D_1), \dots, v(D_l))$ .

Положим  $\mathfrak{m} = \{x \in \Omega \mid v(x) > 0\}$ .

Под унипотентной матрицей мы будем (как и в [4]) понимать верхнетреугольную квадратную матрицу, у которой все элементы на главной диагонали равны 1. Если  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$  — такая матрица, то мы будем полагать  $A[k, l] = a_{l, k+l}$  и  $A[k] = (A[k, 1], \dots, A[k, n-k])$  для всех  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $1 \leq l \leq n-k$ ; при этом  $A[k]$  будем называть  $k$ -й диагональю матрицы  $A$ . Через  $A^{(p)}$  будем обозначать матрицу  $(a_{ij}^p) \in M_n(K)$ .

Через  $\tilde{U}_n$  будет обозначаться множество унипотентных матриц из  $M_n(\mathbb{Z}_p)$ , все элементы которых — элементы Тайхмюллера, т. е. принадлежат  $\mathcal{R} = \mu_{p-1} \cup \{0\}$ ; через  $U_n$  — группа унипотентных матриц из  $M_n(\mathbb{F}_p)$ .

**ЛЕММА 1.** 1. Пусть  $a \in K$ ,  $v(a) > -\frac{p}{p-1}$ ,  $x \in \Omega$ ,  $x^p - x = a$ . Тогда  $K(x)/K$  — расширение Галуа. Если  $v(a) < 0$  и  $p \nmid e_K v(a)$ , то  $K(x)/K$  вполне разветвлено и скачок ветвления  $s(K(x)/K) = -e_K v(a)$ .

2. Если  $a' \in K$ ,  $v(a' - a) > 0$ , то у многочлена  $X^p - X - a'$  есть корень в  $K(x)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое утверждение было доказано в [6] (см. изложение в [2, гл. III]); более простое доказательство с использованием формальных групп Любина-Тэйта получено в [10] (см. также [12]). Второе утверждение легко вытекает из первого с использованием леммы Гензеля.  $\square$

## 3. Основной результат

Пусть  $n$  — натуральное число;  $\alpha$  — рациональное число, меньшее  $1/(n-1)$ .

Пусть  $A \in M_n(K)$  — унипотентная матрица такая, что  $v(A[i, j]) \geq -i\alpha$  при всех  $j$ . Обозначим через  $X$  любую унипотентную матрицу из  $M_n(\Omega)$  такую, что

$$X^{(p)} = AX. \quad (1)$$

Это матричное уравнение эквивалентно набору уравнений

$$X[i, j]^p - X[i, j] = A[1, j]X[i-1, j+1] + \dots + A[i-1, j]X[1, i+j-1] + A[i, j], \quad (2)$$

откуда индукцией по  $i$  мы получаем существование всех  $X[i, j] \in \Omega$ .

Положим  $K_l = K(X[1], \dots, X[l])$ ,  $l = 0, \dots, n$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $X$  — какое-либо решение матричного уравнения (1).

1. Имеем  $v(X[i]) \geq -\frac{i\alpha}{p}$  при всех  $i$ .

2. Для любого  $\sigma \in \text{Gal}(K)$  найдётся единственная матрица  $\Lambda_\sigma \in \tilde{U}_n$  такая, что

$$X^\sigma = X\Lambda_\sigma + \Delta_\sigma, \quad \Delta_\sigma \in M_n(\mathfrak{m}).$$

3. При этом  $v(\Delta_\sigma[i]) > 1 - i\alpha$  при всех  $i$ .

4.  $K_i/K$  — расширение Галуа при всех  $i$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Основная идея состоит в том, что мы будем строить матрицу  $\Lambda_\sigma$  последовательно от 1-й до  $(n-1)$ -й диагонали, проверяя при этом выполнение всех условий применительно к  $X[i]$ ,  $\Lambda_\sigma[i]$  и  $\Delta_\sigma[i]$  для  $i$  от 1 до  $n-1$ .

Будем обозначать через  $\Lambda_\sigma^{[i]}$  матрицу из  $\tilde{U}_n$  такую, что

$$\Lambda_\sigma^{[i]}[j] = \begin{cases} \Lambda_\sigma[j], & j \leq i, \\ 0, & j > i. \end{cases}$$

Эта матрица определена, как только построены элементы  $\Lambda_\sigma$  на диагоналях с 1-й по  $i$ -ю. Нетрудно видеть, что утверждение 2 теоремы сводится к выполнению следующего условия при всех  $i$ .

2'. Для любого  $\sigma \in \text{Gal}(K)$  найдётся единственная строка  $\Lambda_\sigma[i]$  из элементов  $\mathcal{R}$  такая, что

$$X^\sigma[i] = X\Lambda_\sigma^{[i]}[i] + \Delta_\sigma[i],$$

где  $v(\Delta_\sigma[i, j]) > 0$  при всех  $j = 1, \dots, n-i$ .

Мы докажем индукцией по  $i$ , что выполняются утверждения 1, 2', 3 и 4.

Из (2) имеем

$$\begin{aligned} v(X[i, j]) &\geq \frac{1}{p} \min(v(A[1, j]X[i-1, j+1]), \dots, \\ &\quad v(A[i-1, j]X[1, i+j-1]), v(A[i, j])) \\ &\geq -\frac{1}{p} \max(\alpha + \frac{i-1}{p}\alpha, 2\alpha + \frac{i-1}{p}\alpha, \dots, (i-1)\alpha + \frac{1}{p}\alpha, i\alpha) \\ &= -\frac{i}{p}\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее, зафиксируем  $\sigma \in \text{Gal}(K)$  и положим

$$Y = X^\sigma - X \cdot \Lambda_\sigma^{[i-1]}.$$

Поскольку  $(X^\sigma)^{(p)} = AX^\sigma$ , имеем

$$\begin{aligned} (Y^{(p)} - Y)[i] &= ((X^\sigma)^{(p)} - X^\sigma)[i] - ((X\Lambda_\sigma^{[i-1]})^{(p)} - X\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i] \\ &\quad + (Y^{(p)} - (X^\sigma)^{(p)} + (X\Lambda_\sigma^{[i-1]})^{(p)})[i] \\ &= D_1 + D_2 + D_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= ((A - E_n)X^\sigma)[i] - ((X^{(p)} - X)\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i], \\ D_2 &= (X^{(p)}\Lambda_\sigma^{[i-1]} - (X\Lambda_\sigma^{[i-1]})^{(p)})[i], \\ D_3 &= (Y^{(p)} - (X^\sigma)^{(p)} + (X\Lambda_\sigma^{[i-1]})^{(p)})[i]; \end{aligned}$$

здесь  $E_n$  — единичная матрица.

Оценим снизу нормирования всех элементов строк  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ ; в частности, покажем, что эти нормирования положительны.

Поскольку  $(C\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i] = (C\Lambda_\sigma)[i]$  для любой строго верхнетреугольной матрицы  $C$ , в частности, для  $C = A - E_n$  и для  $C = X^{(p)} - X$ , получаем

$$D_1 = ((A - E_n)(X\Lambda_\sigma^{[i-1]} + \Delta_\sigma))[i] - ((X^{(p)} - X)\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i] = ((A - E_n)\Delta_\sigma)[i].$$

(Отметим, что  $\Delta_\sigma[1], \dots, \Delta_\sigma[i-1]$  уже определены.)

Отсюда

$$\begin{aligned} v(D_1) &\geq \min(v(A[1]) + v(\Delta_\sigma[i-1]), \dots, v(A[i-1]) + v(\Delta_\sigma[1])) \\ &> \min(-\alpha + 1 - (i-1)\alpha, \dots, -i\alpha + 1 - \alpha) = 1 - i\alpha \geq 0. \end{aligned}$$

Для оценки  $v(D_2)$  и  $v(D_3)$  воспользуемся тем, что

$$v((a+b)^p - a^p - b^p) \geq 1 + p \min(v(a), v(b)).$$

Это даёт

$$\min(v(D_2), v(D_3)) \geq 1 + p \min(v(X[1]), \dots, v(X[i])) \geq 1 - i\alpha.$$

Таким образом,  $v((Y^{(p)} - Y)[i]) \geq 1 - i\alpha \geq 0$ . Отсюда получаем, что  $v(Y[i]) \geq 0$ , и  $v(Y[i, j]^p - Y[i, j]) > 0$  ( $j = 1, \dots, n-i$ ) что означает  $Y[i, j] \equiv \lambda_j \pmod{\mathfrak{m}}$  для некоторого  $\lambda_j \in \mathcal{R}$ .

Пусть  $\delta_j = Y[i, j] - \lambda_j$  и  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{n-i})$ . Тогда имеем

$$(\lambda_j + \delta_j)^p - (\lambda_j + \delta_j) = (Y^{(p)} - Y)[i, j],$$

откуда  $v(\delta) \geq 1 - i\alpha$ .

Теперь положим  $\Lambda_\sigma[i] = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-i})$ . Получаем

$$\begin{aligned} (X^\sigma - X\Lambda_\sigma)[i] &= (X^\sigma - X\Lambda_\sigma^{[i]})[i] \\ &= (X^\sigma - X\Lambda_\sigma^{[i-1]})[i] + (X(\Lambda_\sigma^{[i-1]} - \Lambda_\sigma^{[i]}))[i] \\ &= Y[i] - \Lambda_\sigma[i] = \delta. \end{aligned}$$

Это доказывает выполнение условий 2' и 3 для данного  $i$ . Осталось проверить условие 4.

Для этого заметим, что  $K_i = K_{i-1}(X[i])$ , при этом элементы  $X[i]$  служат корнями уравнений Артина-Шрайера (2) над  $K_{i-1}$ , и нормирование правой части каждого уравнения не может быть меньше  $-\frac{i}{p} > -1$  (ср. (3)). Такие уравнения Артина-Шрайера задают расширения Галуа (см. лемму 1), и тем самым  $K_i$  нормально над  $K_{i-1}$ . Чтобы доказать, что  $K_i$  нормально над  $K$  достаточно проверить, что при каждом  $j$  и каждом  $\sigma \in \text{Gal}(K)$  выполнено  $X[i, j]^\sigma \in K_i$ .

Из (1) и условия 2' имеем

$$((X^\sigma)^{(p)} - X^\sigma)[i] = ((A - E_n)X^\sigma)[i] = ((A - E_n)X\Lambda_\sigma + (A - E_n)\Delta_\sigma)[i].$$

При этом из (1) также имеем

$$((X\Lambda_\sigma)^{(p)} - X\Lambda_\sigma)[i] = ((A - E_n)X\Lambda_\sigma)[i],$$

то есть при каждом  $j$  уравнение Артина-Шрайера с правой частью, равной  $((A - E_n)X\Lambda_\sigma)[i, j]$ , имеет корень в  $K_i$ . С другой стороны, из  $v(A[j]) \geq -j\alpha$  и  $v(\Delta_\sigma)[j] > 1 - j\alpha$  ( $j = 1, \dots, i-1$ ) следует

$$v(((A - E_n)\Delta_\sigma)[i]) > 1 - i\alpha > 0.$$

Тогда по лемме 1 уравнение с правой частью  $((A - E_n)X\Lambda_\sigma + (A - E_n)\Delta_\sigma)[i, j]$  также имеет корень (а тем самым и  $p$  различных корней) в  $K_i$ , откуда  $X[i, j]^\sigma \in K_i$ .  $\square$

Данная конструкция позволяет доказывать разрешимость определённых задач погружения для  $p$ -расширений полных дискретно нормированных полей, имеющих достаточно малые скачки ветвления. Погружение циклических  $p$ -расширений в циклические изучалось в [7]; явное построение циклических расширений степени  $p^2$  с малыми скачками ветвления было получено в [12] (см. также [9], [8]) и в [14]). Рассмотрим простейший случай погружения абелева расширения в неабелево, а именно в расширение степени  $p^3$  с группой  $U_3$ .

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Пусть  $L/K$  — вполне разветвлённое расширение с группой Галуа, изоморфной  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ , и его скачки ветвления в верхней нумерации не превосходят  $e/2$ , где  $e = e_K > 3$ . Тогда  $L/K$  можно погрузить в расширение с группой Галуа, изоморфной  $U_3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Расширение  $L/K$  представляет собой композит двух циклических расширений, скачки ветвления которых меньше  $e/2$ . Ввиду леммы 1 имеем  $L = K(x_1, x_2)$ , где  $x_i^p - x_i = a_i \in K$ ,  $v(a_i) > -1/2$  ( $i = 1, 2$ ). Выберем  $b \in K$  такое, что  $v(b) > -1$ , положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и построим расширения  $K_1/K$  и  $K_2/K$  как в теореме. Тогда  $K_1 = L$ ,  $K_2 = L(y_b)$ , где

$$y_b^p - y_b = a_1x_2 + b.$$

Заметим, что сопоставление  $\sigma \mapsto \Lambda_\sigma \in \tilde{U}_3$  с последующей редукцией  $\bmod \mathfrak{m}$  задаёт вложение  $\text{Gal}(K_2/K)$  в  $U_3$ . Это вложение не будет изоморфизмом только если  $|\text{Gal}(K_2/K)| < p^3$ , т. е. если  $y_b \in L$ . Таким образом, если утверждение следствия не выполняется, то должно быть выполнено  $y_b \in L$  при всех  $b$ .

В духе [12], обозначим через  $\mathfrak{m}_L$  (соответственно  $\mathfrak{m}_K$ ) идеал нормирования поля  $L' = L(\zeta_p)$  (соответственно  $K' = K(\zeta_p)$ ) со сложением  $+_0$ , определяемым формальной группой Любина-Тэйта (см. [1, 15])  $G_0$  с  $[p](X) = pX + X^p$ , через  $w$  — элемент  $K'$  с  $w^{p-1} = -p$ . Тогда из  $wy_b \in L'$  следует  $w^p(a_1x_2 + b) \in [p]\mathfrak{m}_L$ . Поскольку  $\min(v(w^p(a_1x_2 + b)), v(w^pb)) > v(w^p) - 1 = \frac{1}{p-1}$ , а

$$G_0(X, Y) = X + Y + \text{члены степени } \geq p,$$

то отсюда следует и  $w^pa_1x_2 +_0 w^pb \in [p]\mathfrak{m}_L$ . Это выполняется, в частности, для  $b = 0$ , и вычитанием (в формальном модуле  $\mathfrak{m}_L$ ) получаем  $w^pb \in [p]\mathfrak{m}_L$  для всех  $b$ . По теории Куммера имеем  $w^pb \in \mathfrak{n}$ , где подмодуль  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}_K$  порождён  $w^pa_1$ ,  $w^pa_2$  и  $[p]\mathfrak{m}_K$ . Однако  $w^pb \in \mathfrak{n}$  не может выполняться, если выбрать  $b$  с  $v(b) < \min(v(a_1), v(a_2))$  и  $p \nmid ev(b)$ . Последнее легко сделать, так как в  $[\frac{e}{2}, e)$  найдётся целое число, не кратное  $p$ .  $\square$

## 4. Заключение

Возможность задавать различные  $p$ -расширения Галуа поля  $K$  при помощи уравнения Инабы (1) делает актуальными новые вопросы; возможно, читатели этого текста присоединятся к поиску ответа на них.

1. Мы знаем, что любое расширение Галуа  $L/K$  степени  $p$  при условии  $s(L/K) < \frac{pe_K}{p-1}$  может быть задано уравнением Артина-Шрайера (см. [2, Ch. III]). Можно ли утверждать, что любое конечное  $p$ -расширение Галуа с достаточно малыми скачками ветвлениями может быть задано при помощи уравнения Инабы? Более конкретно: верно ли, что для любой конечной  $p$ -группы  $G$  найдётся  $\varepsilon = \varepsilon_G > 0$  такое, что для любого  $K$  любое  $L/K$  с  $\text{Gal}(L/K) \cong G$  и глубиной ветвления  $< \varepsilon$  (или максимальным скачком  $< \varepsilon e_K$ ) задаётся уравнением Инабы?

2. Можно ли ослабить условия  $\alpha < 1/(n-1)$  и (или)  $v(A[i, j]) \geq -i\alpha$ ? Можно ли модифицировать уравнение Инабы при пограничных значениях  $\alpha$  так, чтобы оно задавало более широкий класс расширений Галуа (например, позволяло бы строить расширения Галуа  $K_n/K$ , у которых максимальные скачки ветвления «цокколя»  $K_1/K$  близки к  $e_K/(n-1)$ )?

3. Каков эффективный способ задавать *циклические*  $p$ -расширения с малой глубиной ветвления при помощи уравнения Инабы? В частности, какие матрицы  $A$  могут быть сопоставлены векторам Витта из [12] (или модифицированным векторам Витта из [14]), задающим циклические расширения степени  $p^2$ ?

4. Можем ли мы задать более широкий класс расширений Галуа поля  $K$  (не только  $p$ -расширения), используя уравнения (1) с не обязательно унитарной матрицей  $A$  (как это сделано в характеристике  $p$  в работе [5])?

5. В работе [12] было показано, что любое вполне разветвлённое циклическое расширение  $L/K$  со скачком ветвления, меньшим  $e_K/(p-1)$ , может быть вложено в циклическое расширение степени  $p^2$ . Может ли этот результат быть обобщён на произвольные конечные  $p$ -группы? А именно, рассмотрим задачу погружения  $(G, H, L/K)$ , где  $G$  — конечная  $p$ -группа,  $H$  — нормальная подгруппа,  $\text{Gal}(L/K) \cong G/H$ . Верно ли, что для некоторого  $\theta > 0$  (зависящего от  $G$  и  $H$ ) эта задача разрешима для любых  $K$  и  $L/K$  с глубиной ветвления  $d(L/K) < \theta$ ? Каково максимальное  $\theta$  при заданных  $G$  и  $H$ ?

6. Для циклического расширения  $L/K$  степени  $p^2$  с промежуточным полем  $M$  глубины ветвления  $d_1 = d(M/K)$  и  $d_2 = d(L/M)$  связаны неравенством Хиодо

$$d_2 \geq \min((p-1+p^{-1})d_1, 1-p^{-1}+p^{-1}d_1),$$

см. [3, Lemma (4-1)] или (без использования теории полей классов) [13, §1]. Можно ли обобщить этот результат на другие задачи погружения  $(G, H, L/K)$  с  $H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ?

7. Положительный ответ на предыдущий вопрос позволил бы предположить, что на «противоположном полюсе», при скачках ветвления близких к максимально возможному, задача погружения достаточного общего вида не имеет решения. Иначе говоря, можно ли утверждать, что для (некоторых) заданных  $G$  и  $H$  найдётся  $\Theta$  такое, что *никакая* задача погружения вида  $(G, H, L/K)$  при  $d(L/K) > \Theta$  не имеет решения (хотя расширения с  $\text{Gal}(L/K) \cong G/H$  и  $d(L/K) > \Theta$  существуют). Например, можно ли утверждать, что все «почти максимально разветвлённые» расширения (см. [11]) абелевы?

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cassels, J.W.S. Frohlich, A. Algebraic Number Theory / J.W.S. Cassels, A. Frohlich // Academiv Press, London and New-York, 1967.

2. Fesenko I. B., Vostokov, S.V. Local fields and their extensions. A constructive approach / I. B. Fesenko and S. V. Vostokov // Second edition, AMS, Providence, RI, 2002.
3. Hyodo, O. Wild ramification in the imperfect residue field case / O. Hyodo // Adv. Stud. Pure Math. 1987 Vol. 12, P. 287-314.
4. Inaba, E. On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic  $p$  / E. Inaba // Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 1961 Vol. 12, P. 26-36.
5. Inaba, E. On generalized Artin-Schreier equations / E. Inaba // Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 1962 Vol. 13, № 2, P. 1-13.
6. MacKenzie, R. E., Whaples, G. Artin-Schreier equations in characteristic zero / R. E. MacKenzie, G. Whaples // Amer. J. Math. 1956 Vol. 78, P. 473-485.
7. Miki, H. On  $Z_p$ -extensions of complete  $p$ -adic power series fields and function fields // H. Miki // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1A 1974 Vol. 21, P. 377-393.
8. Xiao, L., Zhukov, I. Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions / L. Xiao, I. Zhukov // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 5. С. 695-740.
9. Zhukov, I. Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields / I. Zhukov, // in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs, 2000 Vol. 3, P. 117-122.
10. Востоков, С.В., Жуков, И.Б., Фесенко И.Б. К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции / С.В. Востоков, И.Б. Жуков, И.Б. Фесенко // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, № 4. С. 91-118.
11. Востоков, С.В., Жуков, И.Б., Пак, Г.К. Расширения с почти максимальной глубиной ветвления / С.В. Востоков, И.Б. Жуков, Г.К. Пак // Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) 1999 Т. 265, С. 77-109.
12. Востоков, С.В., Жуков И.Б. Некоторые подходы к построению абелевых расширений для  $p$ -адических полей / С.В. Востоков, И.Б. Жуков // Труды С.-Петерб. мат. общ. 1995 Т. 3, С. 194-214.
13. Жуков, И.Б. Структурная теорема для полных полей / И.Б. Жуков // Тр. С.-Петербург. мат. общ-ва. 1995. Т. 3. С. 194-214.
14. Жуков, И. Б., Лысенко, Е. Ф. Построение циклического расширения степени  $p^2$  полного поля / И.Б. Жуков, Е. Ф. Лысенко // Зап. научн. сем. ПОМИ 2017 Т. 455, С. 52-66.
15. Мадунц, А. И. Формальные группы Любина-Тейта над кольцом целых многомерного локального поля / А. И. Мадунц // Зап. научн. сем. ПОМИ 2001 Т. 281, С. 221-226;

## REFERENCES

1. Cassels, J. W. S. Frohlich, A., 1967, “*Algebraic Number Theory*”, Academic Press, London and New-York.
2. Fesenko, I. B., Vostokov, S. V., Zhukov I. B., 1990, “On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions”, *Algebra i Analiz* vol. 2, № 4. pp. 91-118.

3. Fesenko I. B., Vostokov, S. V., 2002, “*Local fields and their extensions. A constructive approach*”, Second edition, AMS, Providence, RI.
4. Hyodo, O., 1987, Wild ramification in the imperfect residue field case”, *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 12, pp. 287-314.
5. Inaba, E., 1961, “On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic  $p$ ”, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, vol. 12, pp. 26-36.
6. Inaba, E., 1962, “On generalized Artin-Schreier equations”, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, vol. 13, № 2, pp. 1-13.
7. Zhukov, I. B., Lysenko, E.F., 2018, “Construction of cyclic extensions of degree  $p^2$  for a complete field”, *J. Math. Sci.*, vol. 234(2), pp. 148–157
8. MacKenzie, R. E., Whaples, G., 1956, “Artin–Schreier equations in characteristic zero”, *Amer. J. Math.*, vol. 78, pp. 473-485.
9. Madunts, A. I., 2004, “Lubin–Tate Formal Groups over the Ring of Integers of a Multidimensional Local Field”, *J. Math. Sci.*, vol. 120(4) pp. 1609–1612
10. Miki, H., 1974, “On  $Z_p$ -extensions of complete  $p$ -adic power series fields and function fields”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1A*, vol. 21, pp. 377-393.
11. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., Pak, G.K., 1999, “Extensions with almost maximal depth of ramification”, *J. Math. Sci.*, vol. 112(3), pp. 4285-4302
12. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., 1995, “Some approaches to the construction of abelian extensions for  $p$ -adic fields”, *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, Vol. III, 157–174, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
13. Xiao, L., Zhukov, I., 2014, “Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions”, *Algebra i Analiz*, vol. 26, № 5. pp. 695-740.
14. Zhukov, I. B., 1995, “Structure theorems for complete fields”, *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, Vol. III, 175–192, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
15. Zhukov, I., 2000, “Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields”, in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) *Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs*, vol. 3, pp. 117-122.

Получено 25.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511+513.6+519.45

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-68-83

## О гипотезе Ленглендса, глобальных полях и (Д)-штуках

Н. М. Глазунов

**Николай Михайлович Глазунов** — доктор физико-математических наук, профессор, Национальный авиационный университет (г. Киев, Украина).

*e-mail: glantm@yahoo.com*

## Аннотация

В обзоре, который посвящен 80-летию А.В. Яковлева, 75-летию С.В. Востокова и 75-летию В.В. Лурье, представлены избранные результаты реализации программы Ленглендса над глобальными полями. Работы юбиляров связаны с алгебраической теорией чисел в её как локальных, так и глобальных аспектах, и с построением соответствующих теорий полей классов. Гипотезы Ленглендса, как отметил И.Р. Шафаревич, имеют целью "обобщение теории полей классов, аналогичное обобщению теории абелевых функций". Обзор является введением в программу Ленглендса, глобальные поля, Д-штуки и конечные штуки над полями функций алгебраических кривых над конечными полями, и не является исчерпывающим. В зависимости от выбора основного поля, результаты реализации программы Ленглендса были получены и обсуждались Ленглендсом, Жаке, Шафаревичем, Паршиным, Дринфельдом, Лаффорге и другими. Напомним, что линейные алгебраические группы нашли важные приложения в программе Ленглендса. Именно, для связной редуктивной группы  $G$  над глобальным полем  $K$  соответствие Ленглендса соотносит автоморфные формы на  $G$  и глобальные параметры Ленглендса, а именно, классы сопряженности гомоморфизмов из абсолютной группы Галуа поля  $K$  в группу Ленглендса  ${}^L G$ . Для полей алгебраических чисел применения и развитие программы Ленглендса позволило усилить теорему Вайлса о гипотезе Шимур-Таниямы-Вейля и доказать гипотезу Сато-Тейта. Дринфельд и Лаффорге исследовали случай общей линейной группы над глобальным функциональными полями ненулевой характеристики (Дринфельд для  $G = GL_2$  и Лаффорге для  $GL_r$ ,  $r$  произвольное положительное целое) и доказали в этом случае соответствие Ленглендса. В процессе этих исследований Дринфельдом была введена концепция  $F$ -пучков, или штук, которая использовалась обоими авторами в процессе установления соответствия Ленглендса. Наряду с использованием штук, были предложены и использованы другие конструкции. Андерсен предложил концепцию  $t$ -мотива. Хартль, его коллеги и ученики предложили и исследовали (связанные со штуками,  $t$ -мотивами и  $\varphi$ -пучками) концепции конечных, локальных и глобальных  $G$ -штуков. В предлагаемой обзорной статье мы начинаем с краткого представления результатов программы Ленглендса над полями алгебраических чисел и их локализаций. Далее кратко представлены подходы Хартля, его коллег и учеников. Эти подходы и их обсуждение связаны как с программой Ленглендса, так и с внутренним развитием теории  $G$ -штуков.

Автор признателен анонимному рецензенту за замечания и советы, доктору Зиян Дингу (Zhiyuan Ding) за замечание, Н.М. Добровольскому за помощь и поддержку в процессе подготовки статьи к печати.

**Ключевые слова:** соответствие Ленглендса, глобальное поле, модуль Дринфельда, штука, конечная штука, локальный модуль Андерсона, кокасательный комплекс, формальная группа.

**Библиография:** 48 названий.

**Для цитирования:**

Н. М. Глазунов. О гипотезе Ленглендса, глобальных полях и (Д)-штуках // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 68–83.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511+513.6+519.45

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-68-83

**On Langlands program, global fields and shtukas**

N. M. Glazunov

**Nikolay Mihaylovich Glazunov** — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, National Aviation University (Kiev, Ukraine).

*e-mail: glanm@yahoo.com*

**Abstract**

The purpose of this paper is to survey some of the important results on Langlands program, global fields,  $D$ -shtukas and finite shtukas which have influenced the development of algebra and number theory. It is intended to be selective rather than exhaustive, as befits the occasion of the 80-th birthday of Yakovlev, 75-th birthday of Vostokov and 75-th birthday of Lurie.

Under assumptions on ground fields results on Langlands program have been proved and discussed by Langlands, Jacquet, Shafarevich, Parshin, Drinfeld, Lafforgue and others.

This communication is an introduction to the Langlands Program, global fields and to  $D$ -shtukas and finite shtukas (over algebraic curves) over function fields. At first recall that linear algebraic groups found important applications in the Langlands program. Namely, for a connected reductive group  $G$  over a global field  $K$ , the Langlands correspondence relates automorphic forms on  $G$  and global Langlands parameters, i.e. conjugacy classes of homomorphisms from the Galois group  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  to the dual Langlands group  $\hat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ . In the case of fields of algebraic numbers, the application and development of elements of the Langlands program made it possible to strengthen the Wiles theorem on the Shimura-Taniyama-Weil hypothesis and to prove the Sato-Tate hypothesis.

V. Drinfeld and L. Lafforgue have investigated the case of functional global fields of characteristic  $p > 0$  ( V. Drinfeld for  $G = GL_2$  and L. Lafforgue for  $G = GL_r$ ,  $r$  is an arbitrary positive integer). They have proved in these cases the Langlands correspondence.

Under the process of these investigations, V. Drinfeld introduced the concept of a  $F$ -bundle, or shtuka, which was used by both authors in the proof for functional global fields of characteristic  $p > 0$  of the studied cases of the existence of the Langlands correspondence.

Along with the use of shtukas developed and used by V. Drinfeld and L. Lafforge, other constructions related to approaches to the Langlands program in the functional case were introduced.

G. Anderson has introduced the concept of a  $t$ -motive. U. Hartl, his colleagues and students have introduced and have explored the concepts of finite, local and global  $G$ -shtukas.

In this review article, we first present results on Langlands program and related representation over algebraic number fields. Then we briefly present approaches by U. Hartl, his colleagues and students to the study of  $D$ -shtukas and finite shtukas. These approaches and our discussion relate to the Langlands program as well as to the internal development of the theory of  $G$ -shtukas.

**Keywords:** Langlands correspondence, global field, Drinfeld module, shtuka, finite shtuka, local Anderson-module, cotangent complex, formal group.

**Bibliography:** 48 titles.

**For citation:**

N. M. Glazunov, 2020, "On Langlands program, global fields and shtukas", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 68–83.

**1. Introduction**

This communication is an introduction to the Langlands Program and to ( $D$ -)shtukas and finite shtukas (over algebraic curves) over function fields. The Langlands correspondence over number fields in its full generality is facing with problems [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. So results from Galois theory, algebraic number theory and function fields can help understand it.

**1.1. Elements of algebraic number theory and field theory.**

The questions what is a Galois group of a given algebraic closure of the number field or the local field, embedding problems of fields and extensions of class field theory belong to fundamental questions of Galois theory and class field theory. A.V. Yakovlev, S.V. Vostokov, B.B. Lur'e works spans many areas of Galois theory, fields theory and class field theory. The results obtained indicate that these questions connect with module theory, homological algebra and with other topics of algebra and number theory [8, 9, 10, 11, 12, 14, 15]. The development and applications of these theories are described in papers by I.R. Shafarevich [4] and by F.N. Parshin [5] (and in references therein). For further details we refer the reader to papers themselves. By the lack of author's competence we discuss here very shortly only connection of local fields with formal modules.

**1.2. The Hensel-Shafarevich canonical basis in complete discrete valuation fields.**

Vostokov has constructed a canonical Hensel-Shafarevich basis in  $\mathbb{Z}_p$ -module of principle units for complete discrete valuation field with an arbitrary residue field [11]. Vostokov and Klimovitski in paper [13] give construction of primary elements in formal module. Ikonnikova, Shaverdova [16] and Ikonnikova [17] use these results under construction, respectively, the Shafarevich basis in higher-dimensional local fields and under proving two theorems on the canonical basis in Lubin-Tate formal modules in the case of local field with perfect residue field and in the case of imperfect residue field. These canonical bases are obtained by applying a variant of the Artin-Hasse function.

**1.3.  ${}^L G$  for reductive group  $G$** 

Here we follow to [1, 3, 27, 28, 29]. At first recall that linear algebraic groups found important applications in the Langlands program. Namely, for a connected reductive group  $G$  over a global field  $K$ , the Langlands correspondence relates automorphic forms on  $G$  and global Langlands parameters, i.e. conjugacy classes of homomorphisms from the Galois group  $\mathcal{Gal}(\overline{K}/K)$  to the dual Langlands group  $\hat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ . Let  $\overline{K}$  be an algebraic closure of  $K$  and  $K_s$  be the separable closure of  $K$  in  $\overline{K}$ .

**DEFINITION 1.** *Let  $G$  be the connected reductive algebraic group over  $\overline{K}$ . The root datum of  $G$  is a quadruple  $(X^*(T), \Delta, X_*(T), \Delta^v)$  where  $X^*$  is the lattice of characters of the maximal torus  $T$ ,  $X_*$  is the dual lattice, given by the 1-parameter subgroups,  $\Delta$  is the set of roots,  $\Delta^v$  is the corresponding set of coroots.*

The dual Langlands group  $\hat{G}$  is a complex reductive group that has the dual root data:  $(X_*(T), \Delta^v, X^*(T), \Delta)$ . Here any maximal torus  $\hat{T}$  of  $\hat{G}$  is isomorphic to the complex dual torus  $X^*(T) \otimes \mathbb{C}^* = \text{Hom}(X_*(T), \mathbb{C}^*)$  of any maximal torus  $T$  in  $G$ . Let  $\Gamma_{\mathbb{Q}} = \mathcal{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ .

Given  $G$ , the Langlands  $L$ -group of  $G$  is defined as semidirect product

$${}^L G = \hat{G} \rtimes \Gamma_{\mathbb{Q}}.$$

In the case of fields of algebraic numbers, the application and development of elements of the Langlands program made it possible to strengthen the Wiles theorem on the Shimura-Taniyama-Weil hypothesis and to prove the Sato-Tate hypothesis. Langlands reciprocity for  $GL_n$  over non-archimedean local fields of characteristic zero is given by Harris-Taylor [20].

#### 1.4. Langlands correspondence over functional global fields of characteristic $p > 0$

V. Drinfeld [6] and L. Lafforgue [7] have investigated the case of functional global fields of characteristic  $p > 0$  ( V. Drinfeld for  $G = GL_2$  and L. Lafforgue for  $G = GL_r$ ,  $r$  is an arbitrary positive integer). They have proved in these cases the Langlands correspondence.

In the process of these studies, V. Drinfeld introduced the concept of a  $F$ -bundle, or shtuka, which was used by both authors in the proof for functional global fields of characteristic  $p > 0$  of the studied cases of the existence of the Langlands correspondence [19].

Along with the use of shtukas developed and used by V. Drinfeld and L. Lafforgue, other constructions related to approaches to the Langlands program in the functional case were introduced.

G. Anderson has introduced the concept of a  $t$ -motive [23]. U. Hartl, his colleagues and postdoc students have introduced and have explored the concepts of finite, local and global  $G$ -shtukas [33, 35, 34, 36, 38, 39].

In this review, we first present results on Langlands program and related representation over algebraic number fields. Then we briefly present approaches by U. Hartl, his colleagues and students to the study of  $G$ -shtukas. These approaches and our discussion relate to the Langlands program as well as to the internal development of the theory of  $G$ -shtukas. Some results on commutative formal groups and commutative formal schemes can be found in [46, 47, 48] and in references therein.

The content of the paper is as follows:

Introduction.

1. Some results of the implementation of the Langlands program for fields of algebraic numbers and their localizations.
2. Elliptic modules and Drinfeld shtukas.
3. Finite  $G$ -shtukas.

The author is grateful to an anonymous reviewer for comments and advice, Dr. Zhiyuan Ding for his remark, N.M. Dobrovolsky for help and support in the process of preparing the article for publication.

## 2. Some results on Langlands program over algebraic number fields and their localizations

Langlands conjectured that some symmetric power  $L$ -functions extend to an entire function and coincide with certain automorphic  $L$ -functions.

### 2.1. Abelian extensions of number fields

In the case of algebraic number fields Langlands conjecture (Langlands correspondence) is the global class field theory:

Representations of the abelian Galois group  $Gal(K^{ab}/K) =$  characters of the Galois group  $Gal(K^{ab}/K)$

correspond to

automorphic forms on  $GL_1$  that are characters of the class group of ideles. Galois group  $Gal(K^{ab}/K)$  is the profinite completion of the group  $\mathbb{A}^*(K)/K^*$  where  $\mathbb{A}(K)$  denotes the adele ring of  $K$ . If  $K$  is the local field, then Galois group  $Gal(K^{ab}/K)$  is canonically isomorphic to the profinite completion of  $K^*$ .

## 2.2. $l$ - adic representations and Tate modules

Let  $K$  be a field and  $\bar{K}$  its separate closure,  $E_n = \{P \in E(\bar{K}) | nP = 0\}$  the group of points of elliptic curve  $E(\bar{K})$  order dividing  $n$ . When  $char K$  does not divide  $n$  then  $E_n$  is a free  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -module of rank 2.

Let  $l$  be prime,  $l \neq char K$ . The projective limit  $T_l(E)$  of the projective system of modules  $E_{l^m}$  is free  $\mathbb{Z}_l$ -adic Tate module of rank 2.

Let  $V_l(E) = T_l(E) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ . Galois group  $Gal(\bar{K}/K)$  acts on all  $E_{l^m}$ , so there is the natural continuous representation ( $l$ -adic representation)

$$\rho_{E,l} : Gal(\bar{K}/K) \rightarrow Aut T_l(E) \subseteq Aut V_l(E).$$

$V_l(E)$  is the first homology group that is dual to the first cohomology group of  $l$ -adic cohomology of elliptic curve  $E$  and Frobenius  $F$  acts on the homology and dually on cohomology. The characteristic polynomial  $P(T)$  of the Frobenius not depends on the prime number  $l$ .

## 2.3. Zeta functions and parabolic forms

Let (in P. Deligne notations)  $X$  be a scheme of finite type over  $\mathbb{Z}$ ,  $|X|$  the set of its closed points, and for each  $x \in |X|$  let  $N(x)$  be the number of points of the residue field  $k(x)$  of  $X$  at  $x$ . The Hasse-Weil zeta-function of  $X$  is, by definition

$$\zeta_X(s) = \prod_{x \in |X|} (1 - N(x)^{-s})^{-1}.$$

In the case when  $X$  is defined over finite field  $\mathbb{F}_q$ , put  $q_x = N(x)$ ,  $deg(x) = [k(x) : \mathbb{F}_q]$ , so  $q_x = q^{deg(x)}$ . Put  $t = q^{-s}$ . Then

$$Z(X, t) = \prod_{x \in |X|} (1 - t^{deg(x)})^{-1}.$$

The Hasse-Weil zeta function of  $E$  over  $\mathbb{Q}$  (an extension of numerators of  $\zeta_E(s)$  by points of bad reduction of  $E$ ) is defined over all primes  $p$ :

$$L(E(\mathbb{Q}), s) = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + \epsilon(p) p^{1-2s})^{-1},$$

here  $\epsilon(p) = 1$  if  $E$  has good reduction at  $p$ , and  $\epsilon(p) = 0$  otherwise.

Put  $T = p^{-s}$ . For points of good reduction we have

$$P(T) = 1 - a_p T + p T^2 = (1 - \alpha T)(1 - \beta T).$$

For symmetric power  $L$ -functions (functions  $L(s; E; Sym^n)$ ,  $n > 0$ ; see below) we have to put

$$P_p(T) = \prod_{i=0}^n (1 - \alpha^i \beta^{n-i} T).$$

For  $GL_2(\mathbb{R})$ , let  $C$  be its center,  $O(2)$  the orthogonal group.

Upper half complex plane has the representation:  $\mathbb{H}^2 = GL_2(\mathbb{R})/O(2)C$ . So it is the homogeneous space of the group  $GL_2(\mathbb{R})$ .

A cusp (parabolic) form of weight  $k \geq 1$  and level  $N \geq 1$  is a holomorphic function  $f$  on the upper half complex plane  $\mathbb{H}^2$  such that

a) For all matrices

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a \equiv 1(N), d \equiv 1(N), c \equiv 0(N)$$

and for all  $z \in \mathbb{H}^2$  we have

$$f(gz) = f((az + b)/(cz + d)) = (cz + d)^k f(z)$$

(automorphic condition).

b)

$$|f(z)|^2 (Imz)^k$$

is bounded on  $\mathbb{H}^2$ .

Mellin transform  $L(f, s)$  of the parabolic form  $f$  coincides with Artin  $L$ -series of the representation  $\rho_f$ .

The space  $\mathcal{M}_n(N)$  of cusp forms of weight  $k$  and level  $N$  is a finite dimensional complex vector space. If  $f \in \mathcal{M}_n(N)$ , then it has expansion

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \exp(2\pi i n z)$$

and  $L$ -function is defined by

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)/n^s.$$

## 2.4. Modularity results

The compact Riemann surface  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  is called the modular curve associated to the subgroup of finite index  $\Gamma$  of  $GL_2(\mathbb{Z})$  and is denoted by  $X(\Gamma)$ . If the modular curve is elliptic it is called the elliptic modular curve.

The modularity theorem states that any elliptic curve over  $\mathbb{Q}$  can be obtained via a rational map with integer coefficients from the elliptic modular curve.

By the Hasse-Weil conjecture (a cusp form of weight two and level  $N$  is an eigenform (an eigenfunction of all Hecke operators)). The conjecture follows from the modularity theorem.

Recall the main (and more stronger than in Wiles [21] and in Wiles-Taylor [22] papers) result by C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor [24].

**THEOREM 1. (Taniyama-Shimura-Weil conjecture - Wiles Theorem.)** *For every elliptic curve  $E$  over  $\mathbb{Q}$  there exists  $f$ , a cusp form of weight 2 for a subgroup  $\Gamma_0(N)$ , such that  $L(f, s) = L(E(\mathbb{Q}), s)$ .*

Here  $\Gamma_0(N)$  is the modular group

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, c \equiv 0 \pmod{N}, \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \right\}.$$

Recall that for projective closure  $\overline{E}$  of the elliptic curve  $E$  we have

$$\overline{E}(\mathbb{F}_p) = 1 - a_p + p.$$

By H. Hasse

$$a_p = 2\sqrt{p} \cos \varphi_p.$$

**CONJECTURE 1. (Sato-Tate conjecture)** Let  $E$  be an elliptic curve without complex multiplication. Sato have computed and Tate gave theoretical evidence that angles  $\varphi_p$  in the case are equidistributed in  $[0, \pi]$  with the Sato-Tate density measure  $\frac{2}{\pi} \sin^2 \varphi$ .

We have two theorems from Serre [18] which give the theoretical explanation in terms of Galois representations. Here we recall the corollary of the theorems.

**COROLLARY 1.** (Serre [18]) *The elements are equidistributed for the  $v$  normalized Haar measure of  $G$  if and only if  $c = 0$  for every  $X$  irreducible character of  $G$ , i. e., if and only if the  $L$ -functions relative to the non trivial irreducible characters of  $G$  are holomorphic and non zero at  $s = 1$ .*

The current state of Sato-Tate conjecture is now Clozel–Harris–Shepherd-Barron–Taylor Theorem [25, 26].

**THEOREM 2.** (Clozel, Harris, Shepherd-Barron, Taylor). *Suppose  $E$  is an elliptic curve over  $\mathbb{Q}$  with non-integral  $j$  invariant. Then for all  $n > 0$ ;  $L(s; E; \text{Sym}^n)$  extends to a meromorphic function which is holomorphic and non-vanishing for  $\text{Re}(s) \geq 1 + n/2$ .*

These conditions and statements are sufficient to prove the Sato-Tate conjecture.

Under the prove of the Sato-Tate conjecture the Taniyama-Shimura-Weil conjecture oriented methods of A. Wiles and R. Taylor are used.

Recall also that the proof of Langlands reciprocity for  $GL_n$  over non-archimedean local fields of characteristic zero is given by Harris-Taylor [20].

### 3. Elliptic modules and Drinfeld shtukas.

Let

$\overline{\mathbb{F}}_q$  be the algebraic closure of  $\mathbb{F}_q$ ,

$\mathcal{C}$  be a smooth projective geometrically irreducible curve over  $\mathbb{F}_q$ ,

$K$  be the function field  $\mathbb{F}_q(\mathcal{C})$  of  $\mathcal{C}$ ,

$\nu$  be a close point of  $\mathcal{C}$ ,

$A$  be the ring of functions regular on  $\mathcal{C} - \nu$ ,

$K_\nu$  be the completion of  $K$  at  $\nu$  with valuation ring  $\mathcal{O}_\nu$ ,

$\mathbb{C}_\nu$  be the completion of the algebraic closure of  $K_\nu$ .

At first recall some known facts about algebraic curves over finite fields. We will identify the set  $|\mathcal{C}|$  of closed points of  $\mathcal{C}$  with  $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{F}}_q) = \text{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q, \mathcal{C})$ . Let  $k(\nu)$  be the residue field of  $\nu$ . Then the degree of  $\nu$  is equal of the number of elements  $[k(\nu) : \mathbb{F}_q]$ .

Below in this section we follow to [30, 19, 31].

#### 3.1. Elliptic modules

**LEMMA 1.** *Let  $k$  be a field of characteristic  $p > 0$  and let  $R$  be a  $k$ -commutative ring with unit (there exists a morphism  $k \rightarrow R$ ). The additive scheme  $\mathbb{G}_a$  over  $R$  is represented by the polynomial ring  $R[X]$  with structural morphism  $\alpha : R[X] \rightarrow R[X] \otimes_R R[X]$ , given by  $\alpha(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ . A morphism  $\varphi : \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a$  of additive schemes over  $R$  is defined by an additive polynomial. If  $\psi$  is another such morphism, then  $\varphi \circ \psi = \varphi(\psi(T))$ . So the set of (endo)morphisms of additive scheme has the structure of a ring.*

**EXAMPLE 1.** *Let  $a \in R[X]$ ,  $pa = 0$ . Then the morphism  $\varphi(T) = aT^{p^n}$ , ( $n \geq 0$ ) is additive. Any additive morphism  $\varphi(T)$  in characteristic  $p$  has the form  $\varphi(T) = a_0T + a_1T^p + \dots + a_nT^{p^n}$ .*

PROPOSITION 1. *Let  $k$  be a field of characteristic  $p > 0$ . Put  $\tau a = a^p \tau$ . There is an isomorphism between  $\text{End}_k(\mathbb{G}_a)$  and the ring of noncommutative polynomials  $k\{\tau\}$ .*

For any  $\varphi(T) = a_0 T + a_1 T^p + \dots + a_n T^{p^n} \in \text{End}_k(\mathbb{G}_a)$  and any  $\varphi(\tau) = a_0 + a_1 \tau + \dots + a_n \tau^n \in k\{\tau\}$  Lubin morphisms [32]  $c_0$  and  $c$  are defined:

$$c_0(\varphi(T)) = a_0, c(\varphi(\tau)) = a_0.$$

Respectively we define

$$\deg(\varphi(T)) = p^n, d(\varphi(\tau)) = n.$$

PROPOSITION 2. *Any ring morphism  $A \rightarrow \text{End}_k(\mathbb{G}_a)$  is either injective or has image contained in the constants  $k \subset k\{\tau\}$ .*

Sketch of the proof.  $k\{\tau\}$  is a domain.  $\text{End}_k(\mathbb{G}_a)$  is isomorphic to  $k\{\tau\}$ .  $A$  is a ring with divisor theory  $\mathfrak{D}$  and for any prime divisor  $\mathfrak{p} \in \mathfrak{D}$  the residue ring  $A/\mathfrak{p}$  is a field. From these statements the proposition follows.

Assume now that  $k$  is an  $A$ -algebra, i.e. there is a morphism  $i : A \rightarrow k$ .

DEFINITION 2. *An elliptic module over  $k$  (of rank  $r = 2$ ) is an injective ring homomorphism*

$$\varphi : A \rightarrow \text{End}_k(\mathbb{G}_a)$$

$$a \mapsto \varphi_a,$$

such that for all  $a \in A$  we have

$$d(\varphi(\tau)) = 2 \cdot \deg(a),$$

$$c(\varphi(\tau)) = i(a).$$

EXAMPLE 2. *Let  $k = \mathbb{F}_q(T)$ ,  $A = \mathbb{F}_q[\mathbb{P}^1 - \nu] = \mathbb{F}_q[T]$ . Let  $i(T) = T^2 + 1$ . In this case an elliptic module  $\varphi$  is given by*

$$\varphi = T^2 + 1 + c_1 \cdot \tau + c_2 \cdot \tau^2, c_1, c_2 \in k, c_2 \neq 0.$$

REMARK 1. *By the same way it is possible to define a Drinfeld module (over a field) for any natural  $r$ .*

Now consider the case of Drinfeld modules over a base scheme. Let  $S$  be an  $A$ -scheme,  $\mathcal{L}$  a line bundle over  $S$ ,  $i^* : S \rightarrow \text{Spec } A$  be an  $A$  scheme morphism dual to the ring homomorphism  $i : A \rightarrow \mathcal{O}_S$

DEFINITION 3. *(Drinfeld module over a base scheme) A Drinfeld module over  $k$  of rank  $r$  is an ring homomorphism*

$$\varphi : A \rightarrow \text{End}_S(\mathcal{L})$$

$$a \mapsto \varphi_a,$$

such that for all  $a \in A$  we have

1) locally, as a polynomial in  $\tau$ ,  $\varphi_a$  has the degree

$$d(\varphi(\tau)) = r \cdot \deg(a),$$

2) a unit as its leading coefficient  $a_n$  and

$$c(\varphi(\tau)) = i(a).$$

### 3.2. Drinfeld shtukas.

In notations of previous subsection let  $x \in k$ ,  $a \in A$ ,  $\varphi_a(\tau)$  be a Drinfeld module of rank  $r$ . Put  $L = k\{\tau\}$ ,  $f(\tau) \in L$ ,  $k[A] = k \otimes_{\mathbb{F}_q} A$ ,  $\deg_\tau f(\tau)$  the degree in  $\tau$  of  $f(\tau)$ .

LEMMA 2. Define the action of  $k[A]$  on  $L$  by the formula:

$$x \otimes a \cdot f(\tau) = x \cdot f(\varphi_a(\tau)).$$

Then  $L$  is a free  $k[A]$ -module of rank  $r$ .

REMARK 2. Let  $E_s = \{f(\tau) \in L | \deg_\tau f(\tau) \leq s\}$ ,  $E = \bigoplus_{s=0}^{\infty} E_s$ ,  $E[1] = \bigoplus_{s=0}^{\infty} E_{s+1}$ .  $E, E[1]$  are graded modules over the graded ring and give rise to locally free sheaves  $\mathcal{F}, \mathcal{E}$  of rank  $r$  over  $\mathcal{C}$ .

Put  $\mathcal{C}_S = \mathcal{C} \times_{\mathbb{F}_q} S$ ,  $\sigma_q = id_{\mathcal{C}} \otimes Frob_{q,S} : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}_S$

DEFINITION 4. A (right)  $\mathcal{D}$ -shtuka ( $F$ -sheaf [19]) of rank  $r$  over an  $\mathbb{F}_q$ -scheme  $S$  is a diagram  $(\mathcal{F} \xrightarrow{c_1} \mathcal{E} \xrightarrow{c_2} (id_{\mathcal{C}} \otimes Frob_{q,S})^* \mathcal{F})$ , such that  $coker\ c_1$  is supported on the graph  $\Gamma_\alpha$  of a morphism  $\alpha : S \rightarrow \mathcal{C}$  and it is a line bundle on support,  $coker\ c_2$  is supported on the graph  $\Gamma_\beta$  of a morphism  $\beta : S \rightarrow \mathcal{C}$  and it is a line bundle on support.

If  $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \emptyset$  it is possible to give the next definition of  $\mathcal{D}$ -shtuka [34, 37].

DEFINITION 5. A global shtuka of rank  $r$  with two legs over an  $\mathbb{F}_q$ -scheme  $S$  is a tuple  $\underline{\mathcal{N}} = (\mathcal{N}, (c_1, c_2), \tau_{\mathcal{N}})$  consisting of 1) a locally free sheaf  $\mathcal{N}$  of rank  $r$  on  $\mathcal{C}_S$ ; 2)  $\mathbb{F}_q$ -morphisms  $c_i : S \rightarrow \mathcal{C}$  ( $i = 1, 2$ ), called the legs of  $\underline{\mathcal{N}}$ ; 3) an isomorphism  $\tau_{\mathcal{N}} : \sigma_q^* \mathcal{N}|_{\mathcal{C}_S - (\Gamma_{c_1} \cup \Gamma_{c_2})} \simeq \mathcal{N}|_{\mathcal{C}_S - (\Gamma_{c_1} \cup \Gamma_{c_2})}$  outside the graphs  $\Gamma_{c_i}$  of  $c_i$ ,  $\Gamma_{c_1} \cap \Gamma_{c_2} = \emptyset$ .

DEFINITION 6. A global shtuka over  $S$  is a  $\mathcal{D}$ -shtuka if  $\tau_{\mathcal{N}}$  satisfies  $\tau_{\mathcal{N}}(\sigma_q^* \mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$  on  $\mathcal{C}_S - \Gamma_{c_2}$  with cokernel locally free of rank 1 as  $\mathcal{O}_S$ -module, and  $\tau_{\mathcal{N}}^{-1}(\mathcal{N}) \subset \sigma_q^* \mathcal{N}$  on  $\mathcal{C}_S - \Gamma_{c_1}$  with cokernel locally free of rank 1 as  $\mathcal{O}_S$ -module.

## 4. Finite $G$ -shtukas.

We follow to [19, 33, 35, 36, 37]. We start with very short indication on the general framework of the section. In connection with Drinfeld's constructions of elliptic modules Anderson [23] has introduced abelian  $t$ -modules and the dual notion of  $t$ -motives. Beside with mentioned papers these are the descent theory by A. Grothendieck [40], cotangent complexes by Illusie [44], by S. Lichtenbaum and M. Schlessinger [41], by Messing [42] and by Abrashkin [43]. In this framework to any morphism  $f : A \rightarrow B$  of commutative ring objects in a topos is associated a cotangent complex  $L_{(B/A)}$  and to any morphism of commutative ring objects in a topos of finite and locally free  $Spec(A)$ -group schemes  $G$  is associated a cotangent complex  $L_{(G/Specc(A))}$  as has presented in books by Illusie [44].

### 4.1. Finite shtukas and formal groups

Let  $S$  be a scheme over  $Spec\ \mathbb{F}_q$ .

DEFINITION 7. A finite  $\mathbb{F}_q$ -shtuka over  $S$  is a pair  $\underline{M} = (M, F_M)$  consisting of a locally free  $\mathcal{O}_S$ -module  $M$  on  $S$  of finite rank and an  $\mathcal{O}_S$ -module homomorphism  $F_M : \sigma_q^* M \rightarrow M$ .

Author [36] investigates relation between finite shtukas and strict finite flat commutative group schemes and relation between divisible local Anderson modules and formal Lie groups. The

cotangent complexes as in papers by S. Lichtenbaum and M. Schlessinger [41], by W. Messing [42], by V. Abrashkin [43] are defined and are proved that they are homotopically equivalent.

Then the deformations of affine group schemes follow to the mentioned paper of Abrashkin are investigated and strict finite  $\mathcal{O}$ -module schemes are defined. Next step of the research is devoted to relation between finite shtukas by V. Drinfeld [19] and strict finite flat commutative group schemes. The comparison between cotangent complex and Frobenius map of finite  $\mathbb{F}_p$ -shtukas is given.

## 4.2. Local shtukas and local Anderson modules

Recall some notions and notations. An ideal  $I$  in a commutative ring  $A$  is locally nilpotent at a prime ideal  $\mathfrak{p}$  if the localization  $I_{\mathfrak{p}}$  is a nilpotent ideal in  $A_{\mathfrak{p}}$ . In the framework of smooth projective geometrically irreducible curves  $\mathcal{C}$  over  $\mathbb{F}_q$  let  $Nilp_{A_{\nu}}$  denote the category of  $A_{\nu}$ -schemes on which the uniformizer  $\xi$  of  $A_{\nu}$  is locally nilpotent. Here  $A_{\nu} \simeq \mathbb{F}_{\nu}[[\xi]]$  is the completion of the local ring  $\mathcal{O}_{\mathcal{C},\nu}$  at a closed point  $\nu \in \mathcal{C}$ .

Let  $Nilp_{\mathbb{F}_q[[\xi]]}$  be the category of  $\mathbb{F}_q[[\xi]]$ -schemes on which  $\xi$  is locally nilpotent. Let  $S \in Nilp_{\mathbb{F}_q[[\xi]]}$ . Let  $M$  be a sheaf of  $\mathcal{O}_S[[z]]$ -modules on  $S$  and let  $\sigma_q^* M = M \otimes_{\mathcal{O}_S[[z]], \sigma_q^*} \mathcal{O}_S[[z]]$ ,  $M[\frac{1}{z-\xi}] = M \otimes_{\mathcal{O}_S[[z]]} \mathcal{O}_S[[z]][\frac{1}{z-\xi}]$ .

**DEFINITION 8.** *A local shtuka of height  $r$  over  $S$  is a pair  $M = (M, F_M)$  consisting of a locally free sheaf  $M$  of  $\mathcal{O}_S[[z]]$ -modules of rank  $r$ , and an isomorphism  $F_M : \sigma_q^* M[\frac{1}{z-\xi}] \simeq M[\frac{1}{z-\xi}]$ .*

The next lemma is proved [37].

**LEMMA 3.** *Let  $R$  be an  $\mathbb{F}_q[[\xi]]$ -algebra in which  $\xi$  is nilpotent. Then the sequence of  $R[[z]]$ -modules*

$$0 \rightarrow R[[z]] \rightarrow R[[z]] \rightarrow R \rightarrow 0$$

$$1 \mapsto z - \xi, z \mapsto \xi$$

*is exact. In particular  $R[[z]] \subset R[[z]][\frac{1}{z-\xi}]$ .*

In the conditions of the lemma authors [37] give the next

**DEFINITION 9.** *A  $z$ -divisible local Anderson module over  $R$  is a sheaf of  $\mathbb{F}_q[[z]]$ -modules  $G$  on the big fppf-site of  $\text{Spec } R$  such that*

- (a)  *$G$  is  $z$ -torsion, that is  $G = \varinjlim G[z^n]$ , where  $G[z^n] = \ker(z^n : G \rightarrow G)$ ,*
- (b)  *$G$  is  $z$ -divisible, that is  $z : G \rightarrow G$  is an epimorphism,*
- (c) *For every  $n$  the  $\mathbb{F}_q$ -module  $G[z^n]$  is representable by a finite locally free strict  $\mathbb{F}_q$ -module scheme over  $R$  in the sense of Faltings ([45, 37]), and*
- (d) *locally on  $\text{Spec } R$  there exists an integer  $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , such that  $(z - \xi)^d = 0$  on  $\omega_G$  where  $\omega_G = \varprojlim \omega_{G[z^n]}$  and  $\omega_{G[z^n]} = \varepsilon^* \Omega^1_{G[z^n]/\text{Spec } R}$  for the unit section  $\varepsilon$  of  $G[z^n]$  over  $R$ .*

$z$ -divisible local Anderson modules by Hartl [33] with improvements in [37] and local shtukas are investigated. The equivalence between the category of effective local shtukas over  $S$  and the category of  $z$ -divisible local Anderson modules over  $S$  is treated by the authors [36, 37]. The theorem about canonical  $\mathbb{F}_p[[\xi]]$ -isomorphism of  $z$ -adic Tate-module of  $z$ -divisible local Anderson module  $G$  of rank  $r$  over  $S$  and Tate module of local shtuka over  $S$  associated to  $G$  is given. The main result of [36] is the following (section 2.5) interesting result: it is possible to associate a formal Lie group to any  $z$ -divisible local Anderson module over  $S$  in the case when  $\xi$  is locally nilpotent on  $S$ . We note that related with [36] and in some cases more general results have presented in the paper by U. Hartl, E. Viehmann [35].

**СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. R. P. Langlands. On the notion of an automorphic representation. Automorphic Forms, Representations, and L-Functions // Proc. Symp. Pure Math., vol. 33, Part I, AMS, Providence, 1979, 203–207.
2. R. P. Langlands. Base change for  $GL(2)$  // Annals of Math. Studies, vol. 96, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980.
3. H. Jacquet, R. P. Langlands. Automorphic Forms on  $GL(2)$  // Lecture Notes in Mathematics, vol. 114, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
4. I.R. Shafarevich. Abelian and nonabelian mathematics (in Russian) // Sochineniya (Works), v.3, part 1, Moscow, Prima-B, 1996, 397–415.
5. A.N. Parshin. Questions and remarks to the Langlands program, // Uspekhi Matem. Nauk, 67, n 3, 2012, 115–146.
6. V. Drinfeld. Langlands' conjecture for  $GL(2)$  over functional fields // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978), Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980, 565–574.
7. L. Lafforgue. Chtoucas de Drinfeld, formule des traces d'Arthur-Selberg et correspondance de Langlands // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), Higher Ed. Press, Beijing, 2002, 383–400.
8. I.R. Shafarevich. On embedding problem for fields // Math. USSR-Izv., vol. 18, 1954, 918–924.
9. A.V. Yakovlev. The embedding problem for number fields // Math. USSR-Izv., vol. 31, no. 2, 1967, 211–224.
10. A.V. Yakovlev. Galois group of the algebraic closure of local fields // Math. USSR-Izv., vol. 32, no. 6, 1968, 1283–1322.
11. S.V. Vostokov. Canonical Hensel-Shafarevich basis in complete discrete valuation fields // Zap. Nauchn. Semin. POMI, 394, 2011, 174–193.
12. S.V. Vostokov. Explicit construction of class field theory for a multidimensional local field // Math. USSR-Izv., vol. 49, no. 2, 1985, 283–308.
13. S.V. Vostokov, I.L. Klimovitskii. Primery elements in formal modules // Mathematics and Informatics, 2, Steklov Math. Inst., RAS, Moscow, 2013, 153–163.
14. B. B. Lur'e. On embedding problem with kernel without center // Math. USSR-Izv., vol. 28, 1964, 1135–1138.
15. B. B. Lur'e. Universally solvable embedding problems // Proc. Steklov Inst. Math., 183, 1991, 141–147.
16. E.V. Ikonnikova, E.V. Shaverdova. The Shafarevich basis in higher-dimensional local field // Zap. Nauchn. Semin. POMI, 413, 2013, 115–133.
17. E.V. Ikonnikova. The Hensel-Shafarevich canonical basis in Lubin-Tate formal modules // J. Math. Sci., New York 219, No. 3, 2016, 462–472.

18. J.-P. Serre. Abelian  $l$ -Adic Representations and Elliptic Curves // Addison-Wesley Publishing Company, NY, 1989.
19. V. Drinfeld. Moduli varieties of  $F$ -sheaves // Func. Anal. and Applications, vol. 21, 1987, 107-122.
20. M. Harris, R. Taylor. The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties // Ann. Math. Stud. 151, Princeton University Press, Princeton, 2001.
21. A. Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem // Ann. of Math. (2) 141, no. 3, 1995, 443-551.
22. R. Taylor, A. Wiles. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras // Ann. of Math. (2) 141, no. 3, 1995, 553-572.
23. G. Anderson.  $t$ -Motives // Duke math. J., vol. 53, 1986, 457-502.
24. C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor. On the modularity of elliptic curves over  $\mathbb{Q}$ : wild 3-adic exercises // J. Amer. Math. Soc. 14, no. 4, 2001, 843-939.
25. L. Clozel, M. Harris, R. Taylor. Automorphy for some  $l$ -adic lifts of automorphic mod  $l$  Galois representations // Pub. Math. I.H.E.S. 108, 2008, 1-181.
26. M. Harris, N. Shepherd-Barron, R. Taylor. A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy // Ann. of Math. (2) vol. 171, no. 2, 2010, 779-813.
27. Arthur J. The principle of functoriality // Bulletin of the Amer. Math. Soc., Vol. 40, no. 1, 39-53, 2003.
28. A. Borel. Automorphic  $L$ -functions // Proc. Symp. Pure Math., vol. 33, Part 2, 1979, 27-61.
29. Tate J. Number theoretic background, Proc. Symp. Pure Math., vol. 33, Part 2, pp. 3-26, 1979.
30. V. Drinfeld. Elliptic modules. *Mat. Sbornik*, vol. 94, no. 4, pp. 594-627, 1974.
31. P. Deligne, D. Husemoller. Survey of Drinfeld's modules // Contemporary Math., vol. 67, 25-91, 1987.
32. J. Lubin. One-parameter formal Lie groups over  $p$ -adic integer rings // Ann. of Math., vol. 80, 1964, 464-484.
33. Urs Hartl. Number Fields and Function fields - Two Parallel Worlds, Papers from the 4th Conference held on Texel Island, April 2004, // Progress in Math. 239, Birkhauser-Verlag, Basel, 2005, 167-222.
34. Urs Hartl, Arasteh Rad. Local  $\mathbb{P}$ -shtukas and their relation to global  $G$ -shtukas // Münster J. Math. 7, No. 2, 2014, 623-670.
35. Urs Hartl, E. Viehmann. // J. reine angew. Math. (Crelle) 656, 2011, 87-129.
36. R. Singh. Local shtukas and divisible local Anderson-modules // Univ. Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik (Diss.). 72 p. 2012.
37. Urs Hartl, R. Singh. Local Shtukas and Divisible Local Anderson Modules, // Canadian J. of Math., vol. 71, no. 5, 2019, 1163-1207.

38. Arasteh Rad, Uniformizing the moduli stacks of global  $\mathfrak{G}$ -shtukas // Univ. Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik, (Diss.). 85 p. 2012.
39. A. Weiß. Foliations in moduli spaces of bounded global  $G$ -shtukas // Univ. Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik, (Diss.). 97 p. 2017.
40. A. Grothendieck. Catégories fibrées et descente, Exposé VI in Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1), Troisième édition, corrigé // Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1963.
41. S. Lichtenbaum, M. Schlessinger. The cotangent complex of morphisms // Transactions of the American Math. society, 128, 1967, 41-70.
42. W. Messing. The Crystals Associated to Barsotti-Tate Groups // LNM 264, Springer-Verlag, Berlin etc. 1973.
43. V. Abrashkin. Compositio Mathematica, 142:4, 2006, 867-888.
44. L. Illusie. Complex cotangent et deformations. I, II // LNM, Vol. 239, Vol. 283, Springer Verlag, Berlin-NY, 1971, 1972.
45. G. Faltings. Group schemes with strict  $\mathcal{O}$ -action // Mosc. Math. J. 2, no. 2, 2002, 249-279.
46. N. Glazunov. Quadratic forms, algebraic groups and number theory // Chebyshevskii Sbornik, vol. 16, no. 4, 2015, 77-89.
47. N. Glazunov. Extremal forms and rigidity in arithmetic geometry and in dynamics // Chebyshevskii Sbornik, vol. 16, no. 3, 2015, 124-146.
48. N. Glazunov. Duality in abelian varieties and formal groups over local fields. I. Chebyshevskii Sbornik, vol. 19, no. 1, 2018, 44-56.

## REFERENCES

1. Langlands R. P. On the notion of an automorphic representation, Automorphic Forms, Representations, and L-Functions, Proc. Symp. Pure Math., vol. 33, Part I, American Mathematical Society, Providence, pp. 203-207, 1979.
2. Langlands R. P., Base change for  $GL(2)$ , Annals of Math. Studies, vol. 96, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980.
3. Jacquet, H., and R. P. Langlands, Automorphic Forms on  $GL(2)$ , Lecture Notes in Mathematics, vol. 114, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
4. Shafarevich I.R. Abelian and nonabelian mathematics (in Russian), Sochineniya (Works), v.3, part 1, Moscow, Prima-B, 397-415, 1996.
5. Parshin A.N. Questions and remarks to the Langlands program, *Uspekhi Matem. Nauk*, 67, n 3, 115-146, 2012.
6. Drinfeld V. Langlands' conjecture for  $GL(2)$  over functional fields. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978), pp. 565-574, Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980.

7. Lafforgue L. Chtoucas de Drinfeld, formule des traces d'Arthur-Selberg et correspondance de Langlands. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), pp. 383–400, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
8. Shafarevich I.R. On embedding problem for fields. *Math. USSR-Izv.*, vol. 18, P. 918–924, 1954.
9. Yakovlev A.V. The embedding problem for number fields. *Math. USSR-Izv.*, vol. 31, no. 2, P. 211–224, 1967.
10. Yakovlev A.V. Galois group of the algebraic closure of local fields. *Math. USSR-Izv.*, vol. 32, no. 6, P. 1283–1322, 1968.
11. Vostokov S.V. Canonical Hensel-Shafarevich basis in complete discrete valuation fields, *Zap. Nauchn. Semin. POMI*, 394, 174–193, 2011.
12. Vostokov S.V. Explicit construction of class field theory for a multidimensional local field *Math. USSR-Izv.*, vol. 49, no. 2, 283–308, 1985.
13. Vostokov S.V. Klimovitskii I.L. Primery elements in formal modules, *Mathematics and Informatics, 2, Steklov Math. Inst.*, RAS, Moscow, 153–163, 2013.
14. B. B. Lur'e. On embedding problem with kernel without center *Math. USSR-Izv.*, vol. 28, 1135–1138, 1964.
15. B. B. Lur'e. Universally solvable embedding problems, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 183, 141–147, 1991.
16. Ikonnikova E.V., Shaverdova E.V. The Shafarevich basis in higher-dimensional local field, *Zap. Nauchn. Semin. POMI*, 413, 115–133, 2013.
17. Ikonnikova E.V. The Hensel-Shafarevich canonical basis in Lubin-Tate formal modules, *J. Math. Sci., New York* 219, No. 3, 462–72, 2016.
18. Serre J.-P. Abelian  $l$ -Adic Representations and Elliptic Curves, Addison-Wesley Publishing Company, NY, 1989.
19. Drinfeld V. Moduli varieties of  $F$ -sheaves. *Func. Anal. and Applications*, vol. 21, pp. 107–122, 1987.
20. Harris M., Taylor R. The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties, *Ann. Math. Stud.* 151, Princeton University Press, Princeton, 2001.
21. Wiles, A., Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Ann. of Math.* (2) 141, no. 3, 443–551, 1995.
22. Taylor, R.; Wiles, A., Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. *Ann. of Math.* (2) 141, no. 3, 553–572, 1995.
23. Anderson G.  $t$ -Motives. *Duke math. J.*, vol. 53, pp. 457–502, 1986.
24. Breuil, C., Conrad, B., Diamond F., Taylor R., On the modularity of elliptic curves over  $\mathbb{Q}$ : wild 3-adic exercises. *J. Amer. Math. Soc.* 14, no. 4, 843–939, 2001.
25. Clozel L., Harris M., Taylor, R., Automorphy for some  $l$ -adic lifts of automorphic mod  $l$  Galois representations, *Pub. Math. I.H.E.S.* 108, 1–181, 2008.

26. Harris M., Shepherd-Barron N., Taylor R. A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy, *Ann. of Math. (2)* vol. 171, no. 2, 779-813, 2010.
27. Arthur J. The principle of functoriality, *Bulletin of the American Math. society*, Vol. 40, no. 1, pp. 39-53, 2003.
28. Borel A. Automorphic  $L$ -functios, *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 33, Part 2, pp. 27-61, 1979.
29. Tate J. Number theoretic background, *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 33, Part 2, pp. 3-26, 1979.
30. Drinfeld V. Elliptic modules. *Mat. Sbornik*, vol. 94, no. 4, pp. 594-627, 1974.
31. Deligne P., Husemoller D., Survey of Drinfeld's modules, *Contemporary Math.*, vol. 67, pp. 25-91, 1987.
32. Lubin J. One-parameter formal Lie groups over  $p$ -adic integer rings, *Ann. of Math.*, vol. 80, pp. 464-484, 1964.
33. Urs Hartl. Number Fields and Function fields - Two Parallel Worlds, Papers from the 4th Conference held on Texel Island, April 2004, *Progress in Math.* 239, Birkhauser-Verlag, Basel, pp. 167-222, 2005.
34. Hartl U., Arasteh Rad. Local  $\mathbb{P}$ -shtukas and their relation to global  $G$ -shtukas. *Münster J. Math.* 7, No. 2, 623-670, 2014.
35. Hartl U., Viehmann E. *J. reine angew. Math. (Crelle)* 656, 87-129, 2011.
36. Singh R., Local shtukas and divisible local Anderson-modules, Univ. Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik (Diss.). 72 p. 2012.
37. Hartl U., Singh R., Local Shtukas and Divisible Local Anderson Modules, *Canadian J. of Math.*, vol. 71, no. 5, 1163-1207, 2019.
38. Arasteh Rad, Uniformizing the moduli stacks of global  $\mathfrak{S}$ -shtukas, Univ. Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik, (Diss.). 85 p. 2012.
39. Weiß A, Foliations in moduli spaces of bounded global  $G$ -shtukas. Univ. Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik, (Diss.). 97 p. 2017.
40. Grothendieck A. Catégories fibrées et descente, Exposé VI in *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Troisième édition, corrigé, Institut des Hautes 'Etudes Scientifiques, Paris, 1963.
41. Lichtenbaum S., Schlessinger M. The cotangent complex of morphisms, *Transactions of the American Math. society*, 128, pp. 41-70. 1967.
42. Messing W. The Cristals Associated to Barsotti-Tate Groups, LNM 264, Springer-Verlag, Berlin etc. 1973.
43. Abrashkin V. *Compositio Mathematica*, 142:4, pp. 867-888, 2006.
44. Illusie L. Complex cotangent et deformations. I, II, LNM, Vol. 239, Vol. 283, Springer Verlag, Berlin-NY, 1971, 1972.
45. Faltings G. Group schemes with strict  $\mathcal{O}$ -action, *Mosc. Math. J.* 2, no. 2, 249-279, 2002.

- 
46. Glazunov N., Quadratic forms, algebraic groups and number theory, Chebyshevskii Sbornik, vol.16, no. 4, P.77–89, 2015.
  47. Glazunov N., Extremal forms and rigidity in arithmetic geometry and in dynamics, Chebyshevskii Sbornik, vol.16, no. 3, P.124–146, 2015.
  48. Glazunov N., Duality in abelian varieties and formal groups over local fields. I. Chebyshevskii Sbornik, vol. 19, no.1, P. 44-56, 2018.

Получено 27.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 51

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-84-88

**Представление матриц над полями в виде матриц с нулевым квадратом и диагональных матриц**

П. Данчев

**Пётр Данчев** — доктор математики, Институт математики и информатики Болгарской академии наук (г. София, Болгария).

*e-mail:* danchev@math.bas.bg; pvdanchev@yahoo.com

**Аннотация**

Мы доказываем, что любая квадратная матрица над произвольным бесконечным полем является суммой матрицы с нулевым квадратом и диагонализуемой матрицы. Этот результат несколько контрастирует с недавней теоремой Бреца, опубликованной в *Linear Algebra & Appl.* (2018).

*Ключевые слова:* матрицы, рациональная форма, диагональная форма, нильпотенты.

*Библиография:* 13 названий.

**Для цитирования:**

П. Данчев. Представление матриц над полями в виде матриц с нулевым квадратом и диагональных матриц // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 84–88.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 51

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-84-88

**Representing Matrices over Fields as Square-Zero Matrices and Diagonal Matrices**

P. Danchev

**Peter Danchev** — Doctor of Mathematics, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences (Sofia, Bulgaria).

*e-mail:* danchev@math.bas.bg; pvdanchev@yahoo.com

**Abstract**

We prove that any square matrix over an arbitrary infinite field is a sum of a square-zero matrix and a diagonalizable matrix. This result somewhat contrasts recent theorem due to Breaz, published in *Linear Algebra & Appl.* (2018).

*Keywords:* matrices, rational form, diagonal form, nilpotents.

*Bibliography:* 13 titles.

**For citation:**

P. Danchev, 2020, “Representing Matrices over Fields as Square-Zero Matrices and Diagonal Matrices”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 84–88.

## 1. Introduction and Basic Facts

The presentation of an arbitrary matrix over a ring as a sum/difference of some special elements like units, nilpotents, idempotents, potents, etc., always plays a central role in the matrix ring theory. A brief collection of principally known historical facts in this branch is as follows: In [4] it was shown that any square matrix over the finite two elements field  $\mathbb{Z}_2$  is a sum of a nilpotent matrix and an idempotent matrix; thereby the full matrix  $n \times n$  ring  $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_2)$  is called *nil-clean*. This important fact was strengthened in [13] by showing that, for any  $n \in \mathbb{N}$  and for every  $n \times n$  matrix  $A$  over  $\mathbb{Z}_2$ , there exists an idempotent matrix  $E$  such that  $(A - E)^4 = 0$ , while over the finite indecomposable ring  $\mathbb{Z}_4$  consisting of four elements this relation is precisely  $(A - E)^8 = 0$  (see [2] and [12] for some further generalizations and specifications, too). In [13] is showed also that the ring  $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_2)$  is both nil-clean and von Neumann regular but *not* strongly  $\pi$ -regular, whereas the ring  $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_4)$  is both nil-clean and regularly nil clean in the sense of [5] but *not*  $\pi$ -regular (see [7], as well). Likewise, in [6] was established that the ring  $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_n(K)$  over an algebraically closed field  $K$  is regularly nil clean even in a more thin setting by viewing that the required nilpotent is of exponent 2.

Moreover, a rather actual question is definitely the following one: *Is every matrix over each field presentable as the direct sum of a nilpotent and a potent?* In that aspect, it was proved in [3] that every  $n \times n$  matrix  $M$  over a field of odd cardinality  $q$  has a decomposition of the form  $M = P + N$ , where  $P^q = P$  is  $q$ -potent and  $N$  is nilpotent with  $N^3 = 0$  but  $N^2 \neq 0$  in general (compare also with the results obtained in [1]).

We, however, conjecture that this is not always true; it is rather a sum of a non-singular matrix and a nilpotent matrix – see, e. g., [10]. But over the four element field  $\mathbb{F}_4$ , which case is in sharp contrast to the aforementioned result from [3], this surely implies that it is a sum of a potent and a nilpotent, not knowing what are the exact degrees neither of the potent nor the nilpotent, however. In this way, a rather eluding question is *of whether or not  $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_4)$  is the sum of a nilpotent of order at most 4 and a potent?*

So, we come to the following basic and intriguing problem, which complete resolution seems to be extremely difficult:

CONJECTURE. Every square matrix  $A$  over a field  $F$  with at least four elements can be represented as  $A = D + Q$  with  $Q^2 = 0$  and  $D$  being diagonalizable over  $F$ .

It is worthwhile noticing that, for fields of three elements (i.e., over  $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}_3$ ), the conjecture fails as illustrated in [3, Example 6]. Nevertheless, concerning the fields with  $|F| = 3$ , we are believing that the same conjecture holds, but only for matrices  $A$  such that the exceptional  $3 \times 3$  matrix from [3] does not appear as a rational normal form - block of  $A$ ,  $A + I$  and  $A - I$ , where  $I$  stands for the standard matrix identity, and also it may be the case that the matrices with such a block have to require index three nilpotents instead of these in the stated above conjecture.

The aim of this very short article is to settle this conjecture in the case of infinite fields (in particular, for algebraically closed fields). This will be successfully done in the sequel by stating and proving Theorem 1 presented below. The case of finite fields seems to be rather more difficult than we anticipate and so it remains still left-open (see Problem 1 stated at the end of the paper).

## 2. The Result and a Problem

We start here by completely solving the quoted above Conjecture for matrices over infinite fields (compare also with the corresponding result from [8], where a different approach is used).

THEOREM 1. *Each square matrix over an infinite field is the sum of a nilpotent square-zero matrix and of a diagonalizable matrix.*

PROOF. We shall separate our arguments related to the arbitrary square matrix  $A$  over a field of infinite cardinality into four points as presented below:

POINT (1). Without loss of generality, we may assume that  $A$  has the rational normal form.

POINT (2). Without loss of generality, we will assume that  $A$  has exactly one block, that is,  $A$  is a non-derogatory matrix.

POINT (3). If  $A$  has characteristic polynomial  $f(t) = t^n - s_{n-1}t^{n-1} + s_{n-2}t^{n-2} + \dots + s_0$ , we write the coefficient  $s_{n-1}$  as a sum of  $n$  pairwise different numbers  $a_1 + \dots + a_n$ . The presentation below shows two matrices of which the first is diagonalizable, and the second one is square-zero. An appropriate choice of  $x_1, \dots, x_{n-1}$  can make their sum equal precisely to  $f(t)$  as being its characteristic polynomial (this can be seen by determining the values of all  $x_i$  one-by-one from the bottom to the top;  $1 \leq i \leq n-1$ ).

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

POINT (4). Note that the sum  $S$  of the matrices is a non-derogatory matrix – in fact, the point being that the 0-th, 1-st,  $\dots$ ,  $(n-1)$ -st powers of  $S$  are linearly independent. To see this, just look at what happens below the main diagonal in these powers, which inspection we leave to the interested reader.

POINT (5). By what we have established above in points 2, 3 and 4, this  $S$  has the same rational normal form as  $A$ , and hence there exists a matrix  $C$  over the same field  $F$  such that the equality  $A = C^{-1}SC$  holds.

This completes the proof after all.  $\square$

We end our work with the following challenging question of some interest and importance.

PROBLEM 1. *Extend, if possibly, the considered above property from Theorem 1 for any finite field.*

ACKNOWLEDGEMENT. The author is very grateful to Prof. Yaroslav Shitov from Moscow Institute of Physics and Technology in Russia for their valuable communication made on the explored theme.

FUNDING: The work of the author on this paper was partially supported by the Bulgarian National Science Fund under Grant KP-06 No 32/1 of December 07, 2019.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.N. Abyzov. Strongly  $q$ -nil-clean rings // Siber. Math. J. (2) No. 60 (2019), 197–208.
2. A.N. Abyzov and I.I. Mukhametgaliev, On some matrix analogs of the little Fermat theorem // Math. Notes (1-2) No. 101 (2017), 187–192.
3. S. Breaz, Matrices over finite fields as sums of periodic and nilpotent elements // Lin. Alg. & Appl. No. 555 (2018), 92–97.

4. S. Breaz, G. Călugăreanu, P. Danchev and T. Micu, Nil-clean matrix rings // Lin. Alg. & Appl. No. 439 (2013), 3115–3119.
5. P.V. Danchev, A generalization of  $\pi$ -regular rings // Turk. J. Math. No. 43 (2019), 702–711.
6. P.V. Danchev, On a property of nilpotent matrices over an algebraically closed field // Chebyshevskii Sbornik (3) No. 20 (2019), 400–403.
7. P.V. Danchev, Certain properties of square matrices over fields with applications to rings // Rev. Colomb. Mat. (2) No. 54 (2020), 109–116.
8. P. Danchev, E. García and M.G. Lozano, Decompositions of matrices into diagonalizable and square-zero matrices // Lin. & Multilin. Alg. No. 69 (2021).
9. E. García, M.G. Lozano, R.M. Alcázar and G. Vera de Salas, A Jordan canonical form for nilpotent elements in an arbitrary ring // Lin. Alg. & Appl. No. 581 (2019), 324–335.
10. D.A. Jaume and R. Sota, On the core-nilpotent decomposition of trees, Lin. Alg. & Appl. // No. 563 (2019), 207–214.
11. K.C. O'Meara, Nilpotents often the difference of two idempotents, (unpublished draft privately circulated on March 2018).
12. Y. Shitov, The ring  $M_{8k+4}(\mathbb{Z}_2)$  is nil-clean of index four, Indag. Math. // No. 30 (2019), 1077–1078.
13. J. Šter, On expressing matrices over  $\mathbb{Z}_2$  as the sum of an idempotent and a nilpotent // Lin. Alg. & Appl. No. 544 (2018), 339–349.

## REFERENCES

1. A.N. Abyzov, *Strongly  $q$ -nil-clean rings*, Siber. Math. J. (2) **60** (2019), 197–208.
2. A.N. Abyzov and I.I. Mukhametgaliev, *On some matrix analogs of the little Fermat theorem*, Math. Notes (1-2) **101** (2017), 187–192.
3. S. Breaz, *Matrices over finite fields as sums of periodic and nilpotent elements*, Lin. Alg. & Appl. **555** (2018), 92–97.
4. S. Breaz, G. Călugăreanu, P. Danchev and T. Micu, *Nil-clean matrix rings*, Lin. Alg. & Appl. **439** (2013), 3115–3119.
5. P.V. Danchev, *A generalization of  $\pi$ -regular rings*, Turk. J. Math. **43** (2019), 702–711.
6. P.V. Danchev, *On a property of nilpotent matrices over an algebraically closed field*, Chebyshevskii Sbornik (3) **20** (2019), 400–403.
7. P.V. Danchev, *Certain properties of square matrices over fields with applications to rings*, Rev. Colomb. Mat. (2) **54** (2020), 109–116.
8. P. Danchev, E. García and M.G. Lozano, *Decompositions of matrices into diagonalizable and square-zero matrices*, Lin. & Multilin. Alg. **69** (2021).
9. E. García, M.G. Lozano, R.M. Alcázar and G. Vera de Salas, *A Jordan canonical form for nilpotent elements in an arbitrary ring*, Lin. Alg. & Appl. **581** (2019), 324–335.

10. D.A. Jaume and R. Sota, *On the core-nilpotent decomposition of trees*, Lin. Alg. & Appl. **563** (2019), 207–214.
11. K.C. O’Meara, *Nilpotents often the difference of two idempotents* (unpublished draft privately circulated on March 2018).
12. Y. Shitov, *The ring  $M_{8k+4}(\mathbb{Z}_2)$  is nil-clean of index four*, Indag. Math. **30** (2019), 1077–1078.
13. J. Šter, *On expressing matrices over  $\mathbb{Z}_2$  as the sum of an idempotent and a nilpotent*, Lin. Alg. & Appl. **544** (2018), 339–349.

Получено 27.01.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 512.552

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-89-128

Теорема Размыслова — Кемера — Брауна для аффинных  
PI-алгебр<sup>1</sup>

Канель-Белов А. Я., Роуэн Луис Халли

**Александр Яковлевич Канель-Белов** — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики MIPIT, профессор Университета им. Бар-Илана (Израиль).

*e-mail: kanelster@gmail.com*

**Роуэн Луис Халли** — Университет им. Бар-Илана (Израиль).

*e-mail: kanelster@gmail.com*

## Аннотация

Дается замкнутое в себе альтернативное комбинаторное изложение доказательства теоремы Размыслова-Кемера-Брауна о нильпотентности радикала аффинной PI-алгебры над нетеровым ассоциативно-коммутативным кольцом. В свое время сообщество не верило в справедливость этого результата и вопреки общественному мнению соответствующий вопрос был поставлен В.Н.Латышевым в его докторской диссертации.

Начнем с определения:

1. Алгебра  $A$  является **аффинной** над коммутативным кольцом  $C$ , если  $A$  порождается как алгебра над  $C$  конечным числом элементов  $a_1, \dots, a_\ell$ ; в этом случае мы пишем  $A = C\{a_1, \dots, a_\ell\}$ .
2. Мы говорим, что алгебра  $A$  является **конечной**, если  $A$  порождено как  $C$ -модуль конечным числом элементов.
3. Алгебры над полем называются **PI алгебрами**, если они удовлетворяют (нетривиальным) полиномиальным тождествам.
4. **Многочлен Капелли**  $\text{Cap}_k$  степени  $2k$  определяется так:

$$\text{Cap}_k(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn}(\pi) x_{\pi(1)} y_1 \cdots x_{\pi(k)} y_k$$

5.  $\text{Jas}(A)$  обозначает радикал Джекобсона алгебры  $A$ , который для PI-алгебр является пересечением максимальных идеалов  $A$  по теореме Капланского.

**Ключевые слова:** алгебры с полиномиальными тождествами, многообразия алгебр; представимые алгебры; относительно свободные алгебры; Ряды Гильберта; Проблема Шпехта

**Библиография:** 34 названий.

## Для цитирования:

Канель-Белов А.Я., Роуэн Луис Халли Теорема Размыслова — Кемера — Брауна для аффинных PI-алгебр // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 89–128.

<sup>1</sup> А.Я.Белов был поддержан РНФ (грант 17-11-01377), Л.Роуэн ISF 1623/16.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 512.552

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-89-128

The Braun–Kemer–Razmyslov Theorem for affine *PI*-algebras

Alexei Kanel Belov, Louis Rowen

**Alexei Kanel Belov** — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor MIPT, professor Bar Ilan University (Israel).

*e-mail: kanelster@gmail.com*

**Louis Rowen** — Bar-Ilan University (Israel).

*e-mail: kanelster@gmail.com*

## Abstract

A self-contained, combinatoric exposition is given for the Braun–Kemer–Razmyslov Theorem over an arbitrary commutative Noetherian ring. At one time, the community did not believe in the validity of this result, and contrary to public opinion, the corresponding question was posed by V.N. Latyshev in his doctoral dissertation.

One of the major theorems in the theory of PI algebras is the Braun-Kemer-Razmyslov Theorem. We preface its statement with some basic definitions.

**1.** An algebra  $A$  is **affine** over a commutative ring  $C$  if  $A$  is generated as an algebra over  $C$  by a finite number of elements  $a_1, \dots, a_\ell$ ; in this case we write  $A = C\{a_1, \dots, a_\ell\}$ .

We say the algebra  $A$  is **finite** if  $A$  is spanned as a  $C$ -module by finitely many elements.

**2.** Algebras over a field are called **PI algebras** if they satisfy (nontrivial) polynomial identities.

**3.** The **Capelli polynomial**  $\text{Cap}_k$  of degree  $2k$  is defined as

$$\text{Cap}_k(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn}(\pi) x_{\pi(1)} y_1 \cdots x_{\pi(k)} y_k$$

**4.**  $\text{Jac}(A)$  denotes the Jacobson radical of the algebra  $A$  which, for PI-algebras is the intersection of the maximal ideals of  $A$ , in view of Kaplansky's theorem.

The aim of this article is to present a readable combinatoric proof of the theorem: **The**

**Braun-Kemer-Razmyslov Theorem** *The Jacobson radical  $\text{Jac}(A)$  of any affine PI algebra  $A$  over a field is nilpotent.*

**Keywords:** algebras with polynomial identity; varieties of algebras; representable algebras; relatively free algebras; Hilbert series; Specht problem

**Bibliography:** 34 titles.

## For citation:

A. Kanel Belov, L. Rowen, 2020, "The Braun–Kemer–Razmyslov Theorem for affine PI-algebras", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 89–128.

# 1. The BKR Theorem

## 1.1. Introduction

One of the major theorems in the theory of PI algebras is the Braun-Kemer-Razmyslov Theorem (Theorem 1.1 below). We preface its statement with some basic definitions.

**DEFINITION 1.** 1. An algebra  $A$  is **affine** over a commutative ring  $C$  if  $A$  is generated as an algebra over  $C$  by a finite number of elements  $a_1, \dots, a_\ell$ ; in this case we write  $A = C\{a_1, \dots, a_\ell\}$ .

2. We say the algebra  $A$  is **finite** if  $A$  is spanned as a  $C$ -module by finitely many elements.

3. Algebras over a field are called **PI algebras** if they satisfy (nontrivial) polynomial identities.

4. The **Capelli polynomial**  $\text{Cap}_k$  of degree  $2k$  is defined as

$$\text{Cap}_k(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) = \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn}(\pi) x_{\pi(1)} y_1 \cdots x_{\pi(k)} y_k$$

5.  $\text{Jac}(A)$  denotes the Jacobson radical of the algebra  $A$  which, for PI-algebras is the intersection of the maximal ideals of  $A$ , in view of Kaplansky's theorem.

**THEOREM 1.1** (The Braun-Kemer-Razmyslov Theorem). The Jacobson radical  $\text{Jac}(A)$  of any affine PI algebra  $A$  over a field is nilpotent.

The aim of this article is to present a readable combinatoric proof (essentially self-contained in characteristic 0).

Let us put the BKR Theorem into its broader context in PI theory. We say a ring is **Jacobson** if the Jacobson radical of every prime homomorphic image is 0. For PI-rings, this means every prime ideal is the intersection of maximal ideals. Obviously any field is Jacobson, since its only prime ideal 0 is maximal. Furthermore, any commutative affine algebra over a field is Noetherian by the Hilbert Basis Theorem and is Jacobson, in view of [28, Proposition 6.37], often called the “weak Nullstellensatz,” implying the following two results:

- (cf. Proposition 1.11) If a commutative algebra  $A$  is affine over a field, then  $\text{Jac}(A)$  is nilpotent.
- (Special case of Theorem 2) If  $A$  is a finite algebra over an affine central subalgebra  $Z$  over a field, then  $\text{Jac}(A)$  is nilpotent. (Sketch of proof: Passing to homomorphic images modulo prime ideals, we may assume that  $A$  is prime PI, and  $Z$  is an affine domain over which  $A$  is torsion-free. The maximal ideals of  $Z$  lift up to maximal ideals of  $A$ , in view of Nakayama's lemma, implying  $Z \cap \text{Jac}(A) \subseteq \text{Jac}(Z) = 0$ . If  $0 \neq a \in \text{Jac}(A)$ , then writing  $a$  as integral over  $Z$ , we have the nonzero constant term in  $Z \cap \text{Jac}(A) = 0$ , a contradiction.)

Since either of these hypotheses implies that  $A$  is a PI-algebra, it is natural to try to find an umbrella result for affine PI-algebras, which is precisely the Braun-Kemer-Razmyslov Theorem. This theorem was proved in several stages. Amitsur [1, Theorem 5], generalizing the weak Nullstellensatz, proved that if  $A$  is affine over a commutative Jacobson ring, then  $\text{Jac}(A)$  is nil. In particular,  $A$  is a Jacobson ring. (Later, Amitsur and Procesi [3, Corollary 1.3] proved that  $\text{Jac}(A)$  is locally nilpotent.) Thus, it remained to prove that every nil ideal of  $A$  is nilpotent.

It was soon proved that this does hold for an affine algebra which can be embedded into a matrix algebra, see Theorem 1 below. However, examples of Small [33] showed the existence of affine PI algebras which can not be embedded into any matrix algebra. Thus, the following theorem by Razmyslov [22] was a major breakthrough in this area.

THEOREM 1.2 (Razmyslov). If an affine algebra  $A$  over a field satisfies a Capelli identity, then its Jacobson radical  $\text{Jac}(A)$  is nilpotent.

Although Razmyslov's theorem was given originally in characteristic zero, he later found a proof that works in any characteristic. As we shall see, the same ideas yield the parallel result:

THEOREM 1.3. Let  $A$  be an affine algebra over a commutative Noetherian ring  $C$ . If  $A$  satisfies a Capelli identity, then any nil ideal of  $A$  is nilpotent.

Following Razmyslov's theorem, Kemer [15] then proved

THEOREM 1.4. [15] In characteristic zero, any affine PI algebra satisfies some Capelli identity (see Theorem 3.3).

Thus, Kemer completed the proof of the following theorem:

THEOREM 1.5 (Kemer-Razmyslov). If  $A$  is an affine PI-algebra over a field  $F$  of characteristic zero, then its Jacobson radical  $\text{Jac}(A)$  is nilpotent.

Then, using different methods relying on the structure of Azumaya algebras, Braun proved the following result, which together with the Amitsur-Procesi Theorem immediately yields Theorem 1.1:

THEOREM 1.6. Any nil ideal of an affine PI-algebra over an arbitrary commutative Noetherian ring is nilpotent.

Note that to prove directly that  $\text{Jac}(A)$  is nilpotent it is enough to prove Theorem 1.6 and show that  $\text{Jac}(A)$  is nil, which is the case when  $A$  is Jacobson, and is called the "weak Nullstellensatz." But the weak Nullstellensatz requires some assumption on the base ring  $C$ . It can be proved without undue difficulty that  $A$  is Jacobson when  $C$  is Jacobson, cf. [26, Theorem 4.4.5]. Thus, in this case the proper general formulation of the nilpotence of  $\text{Jac}(A)$  is:

THEOREM 1.7 (Braun). If  $A$  is an affine PI-algebra over a Jacobson Noetherian base ring, then  $\text{Jac}(A)$  is nilpotent.

Small has pointed out that Theorems 1.6 and 1.7 actually are equivalent, in view of a trick of [25]. Indeed, as just pointed out, Theorem 1.6 implies Theorem 1.7. Conversely, assuming Theorem 1.7, one needs to show that  $\text{Jac}(A)$  is nil. Modding out the nilradical, and then passing to prime images, one may assume that  $A$  is prime. Then one embeds  $A$  into the polynomial algebra  $A[\lambda]$  over the Noetherian ring  $C[\lambda]$ , and localizes at the monic polynomials over  $C[\lambda]$ , yielding a Jacobson base ring by [25, Theorem 2.8].

Braun's qualitative proof was also presented in [27, Theorem 6.3.39], and a detailed exposition, by L'vov [19], is available in Russian. A sketch of Braun's proof is also given in [5, Theorem 3.1.1].

Meanwhile, Kemer [17] proved:

THEOREM 1.8. [17] If  $A$  is a PI algebra (not necessarily affine) over a field  $F$  of characteristic  $p > 0$ , then  $A$  satisfies some Capelli identity.

Together with a characteristic-free proof of Razmyslov's theorem 1.2 due to Zubrilin [34], Kemer's Theorems 1.4 and 1.8 yield another proof of the Braun-Kemer-Razmyslov Theorem 1.1. The paper [34] is given in rather general circumstances, with some non-standard terminology. Zubrilin's method was given in [7], although [7, Remark 2.50] glosses over a key point (given here as Lemma 2.13), so a complete combinatoric proof had not yet appeared in print with all the details. Furthermore, full combinatoric details were provided in [7] only in characteristic 0 because the conclusion of the proof required Kemer's difficult Theorem 1.8. We need the special case, which

we call “Kemer’s Capelli Theorem,” that every affine PI-algebra  $A$  over an arbitrary field satisfies some Capelli identity. This can be proved in two steps: First, that  $A$  satisfies a “sparse” identity, and then a formal argument that every sparse identity implies a Capelli identity. The version given here (Theorem 4.4) uses the representation theory of the symmetric group  $S_n$ , and provides a reasonable quartic bound  $((p-1)p^{\binom{u+1}{2}})$ , where  $u = \frac{2pe(d-1)^2}{3}$  for the degree of the sparse identity of  $A$  in terms of the degree  $d$  of the given PI of  $A$ .

It should be noted that every proof that we have cited of the Braun-Kemer-Razmyslov Theorem ultimately utilizes an idea of Razmyslov defining a module structure on generalized polynomials with coefficients in the base ring, but we cannot locate full details of its implementation anywhere in the literature. One of the objectives of this paper is to provide these details, in §2.5 and §2.6.1. Although the proof is rather intricate for a general expository paper, we feel that the community deserves the opportunity to see the complete argument in print.

We emphasize the combinatoric approach here. Aside from the intrinsic interest in having such a proof available of this important theorem (and characteristic-free), these methods generalize easily to nonassociative algebras, and we plan to use this approach as a framework for the nonassociative PI-theory, as initiated by Zubrilin. (The proofs are nearly the same, but the statements are somewhat more complicated. See [6] for a clarification of Zubrilin’s work in the nonassociative case.) To keep this exposition as readable as we can, we emphasize the case where the base ring  $C$  is a field and prove Theorem 1.1 directly by an induction argument without subdividing it into Theorem 1.6 and the weak Nullstellensatz, although we also treat these general cases.

§2 follows Zubrilin’s short paper [34], and gives full details of Zubrilin’s proof of Razmylov’s theorem 1.2. This self-contained proof is characteristic free.

To complete the proof of the BKR Theorem, it remains to prove Kemer’s Capelli Theorem. In §3 we provide the proof in characteristic 0, by means of Young diagrams, and §4 contains the characteristic  $p$  analog (for affine algebras). An alternative proof could be had by taking the second author’s “pumping procedure” which he developed to answer Specht’s question in characteristic  $p$ , and applying it to the “identity of algebraicity” [7, Proposition 1.59]. We chose the representation-theoretic approach since it might be more familiar to a wider audience. The proof of Theorem 1.6, over arbitrary commutative Noetherian rings, is given in §5.

REMARK 1.9. An early version of Theorem 3.16 was written by Amitai Regev, to whom we are indebted for suggesting this project and providing helpful suggestions all along the way. Below belongs lemma 3.8

## 1.2. Structure of the proof

We assume that  $A$  is an affine  $C$ -algebra and satisfies the  $n+1$  Capelli identity  $\text{Cap}_{n+1}$  (but not necessarily the  $n$  Capelli identity  $\text{Cap}_n$ ), and we induct on  $n$ : if such  $A$  satisfies  $\text{Cap}_n$  then we assume that  $\text{Jac}(A)$  is nilpotent, and we prove this for  $\text{Cap}_{n+1}$ . For the purposes of this sketch, in Steps 1 through 3 and Step 7 we assume that  $C$  is a field  $F$ .

The same argument shows that any nil ideal  $N$  of an affine algebra  $A$  over a Noetherian ring is nilpotent, yielding Theorem 1.3. For this result we would replace  $\text{Jac}(A)$  by  $N$  throughout our sketch.

We write  $C\{x, y, t\}$  for the **free (associative) algebra** over the base ring  $C$ , with indeterminates  $x_i, y_j, t_k, z$ , containing one extra indeterminate  $z$  for further use. This is a free module over  $C$ , whose basis is the set of **words**, i.e., formal strings of the letters  $x_i, y_j, t_k, z$ . The  $x$  and  $y$  indeterminates play a special role and need to be treated separately. We write  $C\{t\}$  for the free subalgebra generated by the  $t_k$  and  $z$ , omitting the  $x$  and  $y$  indeterminates.

1. The induction starts with  $n = 1$ . Then  $n + 1 = 2$ , and any algebra satisfying  $\text{Cap}_2$  is

commutative. We therefore need to show that if  $A$  is commutative affine over a field  $F$ , then  $\text{Jac}(A)$  is nilpotent. This classical case is reviewed in §1.3.1.

2. Next is the *finite* case: If  $A$  is affine over a field  $F$  and a finite module over an affine central subalgebra, then  $\text{Jac}(A)$  is nilpotent. This case was known well before Razmyslov's Theorem, and is reviewed in §1.3.2. Theorem 1.3 follows whenever  $A$  is a subring of a finite dimensional algebra over a field.

3. Let  $\mathcal{CAP}_n = T(\text{Cap}_n)$  be the  $T$ -ideal generated by  $\text{Cap}_n$ , and let  $\mathcal{CAP}_n(A) \subseteq A$  be the ideal generated in  $A$  by the evaluations of  $\text{Cap}_n$  on  $A$ , so  $A/\mathcal{CAP}_n(A)$  satisfies  $\text{Cap}_n$ . Therefore, by induction on  $n$ ,  $\text{Jac}(A/\mathcal{CAP}_n(A))$  is nilpotent. Hence there exists  $q$  such that

$$\text{Jac}(A)^q \subseteq \mathcal{CAP}_n(A), \quad \text{so} \quad \text{Jac}(A)^{2q} \subseteq (\mathcal{CAP}_n(A))^2.$$

4. In §2.2.4 we work over an arbitrary base ring  $C$  (which need not even be Noetherian), and for any algebra  $A$  introduce the ideal  $I_{n,A} \subset A[\xi_{n,A}]$ , for commuting indeterminates  $\xi_{n,A}$ , which provides “generic” integrality relations for elements of  $A$ . Let  $C\widehat{\{x, y, t\}} := C\{x, y, t\}/\mathcal{CAP}_{n+1}$ , the relatively free algebra of  $\text{Cap}_{n+1}$ . Taking the “doubly alternating” polynomial

$$f = t_1 \text{Cap}_n(x_1, \dots, x_n) t_2 \text{Cap}_n(y_1, \dots, y_n) t_3,$$

we construct, in Section 2.2.1, the key  $C\widehat{\{t\}}$ -module  $\widehat{\mathcal{M}} \subset C\widehat{\{x, y, t\}}$ , which contains the polynomial  $\hat{f}$ . A combinatoric argument given in Proposition 2.17 applied to  $C\widehat{\{x, y, t\}}$  (together with substitutions) shows that  $I_{n, C\widehat{\{x, y, t\}}} \cdot \widehat{\mathcal{M}} = 0$ .

5. We introduce the **obstruction to integrality**  $\text{Obst}_n(A) = A \cap I_{n,A} \subset A$  and show that  $A/\text{Obst}_n(A)$  can be embedded into a finite algebra over an affine central  $F$ -subalgebra; hence  $\text{Jac}(A/\text{Obst}_n(A))$  is nilpotent. This implies that there exists  $m$  such that

$$\text{Jac}(A)^m \subseteq \text{Obst}_n(A).$$

The proof of this step applies Shirshov's Height Theorem [32], [7, Theorem 2.3].

6. We prove that  $\text{Obst}_n(A) \cdot (\mathcal{CAP}_n(A))^2 = 0$  over an arbitrary ring  $C$ . This is obtained from Step 4 via a sophisticated specialization argument involving **free products**.

7. We put the pieces together. When  $C$  is a field, Step 3 shows that  $\text{Jac}(A)^q \subseteq \mathcal{CAP}_n(A)$  for some  $q$ , and Step 5 shows that  $\text{Jac}(A)^m \subseteq \text{Obst}_n(A)$  for some  $m$ . Hence

$$\text{Jac}(A)^{2q+m} \subseteq \text{Obst}_n(A) \cdot (\mathcal{CAP}_n(A))^2 = 0,$$

which completes the proof of Theorem 1.2. When  $C$  is Noetherian, any nil ideal  $N$  of  $C$  is nilpotent, so the analogous argument shows that  $N^m \subseteq \text{Obst}_n(A)$  for some  $m$ . Hence

$$N^{2q+m} \subseteq \text{Obst}_n(A) \cdot (\mathcal{CAP}_n(A))^2 = 0,$$

proving Theorem 1.3.

### 1.3. Special cases

We need some classical special cases.

### 1.3.1. The commutative case

Our main objective is to prove that the Jacobson radical  $\text{Jac}(A)$  of an affine PI-algebra  $A$  (over a field) is nilpotent. We start with the classical case for which  $A$  is commutative.

REMARK 1.10. Any commutative affine algebra  $A$  over a Noetherian base ring  $C$  is Noetherian, by Hilbert's Basis Theorem, and hence the intersection of its prime ideals is nilpotent, cf. [29, Theorem 16.24].

But for any ideal  $I \triangleleft A$ , the algebra  $A/I$  is also Noetherian, so the intersection of the prime ideals of  $A$  containing  $I$  is nilpotent modulo  $I$ .

PROPOSITION 1.11. If  $H$  is a commutative affine algebra over a field, then  $\text{Jac}(H)$  is nilpotent.

PROOF. The “weak Nullstellensatz” [28, Proposition 6.37] says that  $H$  is Jacobson, and thus the Jacobson radical  $\text{Jac}(H)$  is contained in the intersection of the prime ideals of  $H$ . But any commutative affine algebra is Noetherian, so we conclude with Remark 1.10.  $\square$

### 1.3.2. The finite case

To extend this to noncommutative algebras, we start with some other classical results:

1. [29, Theorem 15.23] (Wedderburn) Any nil subring of an  $n \times n$  matrix algebra over a field is nilpotent, of nilpotence index  $\leq n$  (in view of [29, Lemma 15.22]).
2. [29, Theorem 15.18] (Jacobson) The Jacobson radical of an  $n$ -dimensional algebra over a field is nilpotent, and thus has nilpotence index  $\leq n$ , by (1).
3. Any algebra finite over a Noetherian central subring  $C$ , is Noetherian (This follows at once from induction applied to [28, Proposition 7.5]).

THEOREM 1. Suppose  $A = C\{a_1, \dots, a_\ell\}$  is an affine algebra over a commutative Noetherian ring  $C$ , with  $A \subseteq M_n(K)$  for a suitable commutative  $C$ -algebra  $K$ . Then

1. Any nil subalgebra  $N$  of  $A$  is nilpotent, of bounded nilpotence index  $\leq mn$ , where  $m$  is given in the proof. When  $K$  is reduced, i.e., without nonzero nilpotent elements, then  $m = 1$ , so  $N^n = 0$ .
2. If  $C$  is a field, then  $\text{Jac}(A)$  is nilpotent.

PROOF. For each  $1 \leq k \leq \ell$ , write each  $a_k$  as an  $n \times n$  matrix  $(a_{ij}^{(k)})$ , for  $a_{ij}^{(k)} \in K$ , and let  $H$  be the commutative  $C$ -subalgebra of  $K$  generated by these finitely many  $a_{ij}^{(k)}$ ; then  $H$  is  $C$ -affine. We can view each  $a_k$  in  $M_n(H)$ , so  $A \subseteq M_n(H)$ .

(1) Let  $N \subseteq A$  be a nil subalgebra. Now  $A \subseteq M_n(H)$ , so  $N \subseteq M_n(H)$  and is nil. Let  $P \subseteq H$  be prime. The homomorphism  $H \rightarrow H/P$  extends to

$$M_n(H) \rightarrow M_n(H/P) \cong M_n(H)/M_n(P).$$

Let  $\bar{N}$  be the image of  $N$ , so  $\bar{N} = (N + M_n(P))/M_n(P)$  so  $\bar{N} \subseteq M_n(H)/M_n(P) \cong M_n(H/P) \subseteq M_n(L)$  where  $L$  is the field of fractions of the domain  $H/P$ . By Wedderburn's theorem  $\bar{N}^n = 0$  which implies that  $N^n \subseteq M_n(P)$  (since  $P = 0$  in  $H/P$  and in  $L$ ). Hence, letting  $U$  denote the prime radical of  $H$ , we have  $N^n \subseteq M_n(U)$ . But, in view of Remark 1.10, we have  $U^m = 0$  for some  $m$ . (If  $K$  is reduced then  $U = 0$ , implying  $m = 1$ .) We conclude that

$$N^{mn} = (N^n)^m \subseteq (M_n(U))^m = M_n(U^m) = 0.$$

(2) We need here the well-known fact [29, Exercise 15.28] that when  $J \triangleleft A$ , with  $J$  nilpotent, then  $\text{Jac}(A/J) = \text{Jac}(A)/J$ . It follows at once that if  $\text{Jac}(A/J)$  is nilpotent, then  $\text{Jac}(A)$  is nilpotent.

By hypothesis  $H$  is affine over the field  $C$ , so  $\text{Jac}(H)$  is nilpotent, and thus  $M_n(\text{Jac}(H)) = \text{Jac}(M_n(H))$  is nilpotent. Let  $\tilde{A} = A/(A \cap M_n(\text{Jac}(H)))$  and  $\tilde{H} = H/\text{Jac}(H)$ . Then

$$\tilde{A} \subseteq M_n(H/\text{Jac}(H)) = M_n(\tilde{H}),$$

and  $\text{Jac}(\tilde{H}) = 0$ . Thus we may assume that  $\text{Jac}(H) = 0$ , and we shall prove that  $J^n = 0$ , where  $J = \text{Jac}(A)$ .

For any maximal ideal  $P$  of  $H$ , we see that  $H/P$  is an affine field extension of  $C$ , and thus is finite dimensional over  $C$ , by [28, Theorem 5.11]. But then the image of  $A$  in  $M_n(H/P)$  is finite dimensional over  $C$ , so the image  $\bar{J}$  of  $J$  is nilpotent, implying  $\bar{J}^n = 0$ . Hence  $J^n$  is contained in  $\cap M_n(P) = M_n(\cap P) = 0$ , where  $P$  runs over the maximal ideals of  $H$ .  $\square$

**THEOREM 2.** *Suppose  $A$  is an algebra that is finite over  $C$ , itself an affine algebra over a field. Then  $\text{Jac}(A)$  is nilpotent.*

**PROOF.** Since  $A$  is Noetherian, its nilradical  $N$  is nilpotent by [29, Remark 16.30(ii)], so modding out  $N$  we may assume that  $A$  is semiprime, and thus the subdirect product of prime algebras  $\{A_i = A/P_i : i \in I\}$  finite over their centers. If  $\text{Jac}(A)^n \subset P_i$  for each  $i \in I$ , then  $\text{Jac}(A)^n \subset \cap P_i = 0$ .

So we may assume that  $A$  is prime. But localizing over the center, we may assume that  $C$  is a field. Let  $n = \dim_C A$ . Then  $A$  is embedded via the regular representation into  $n \times n$  matrices over a field, and we are done by Theorem 1.  $\square$

Since not every affine PI-algebra might satisfy the hypotheses of Theorem 1, cf. [33] and [18], we must proceed further.

## 2. Proof of Razmyslov's Theorem

In this section we give full details for Zubrilin's proof of Theorem 1.2.

### 2.1. Zubrilin's approach

#### 2.1.1. The operator $\delta_{k,z}^{(x,n)}$

Let us fix notation for the next few sections.  $C$  is an arbitrary commutative ring. We start with a polynomial  $f := f(x_1, \dots, x_n) \in C\{x, y, t\}$  in  $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  (which we always notate), as well as possibly  $\vec{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$  (which we sometimes notate), and  $\vec{t} = \{t_1, \dots\}$ , all of which are noncommutative indeterminates.

**DEFINITION 2.1.** Let  $f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{t})$  be multilinear in the  $x_i$  (and perhaps involving additional indeterminates  $\vec{y}$  and  $\vec{t}$ ). Take  $0 \leq k \leq n$ , and expand

$$f^* = f((z+1)x_1, \dots, (z+1)x_n, \vec{y}, \vec{t}),$$

where  $z$  is a new noncommutative indeterminate. Then we write

$$\delta_{k,z}^{(x,n)}(f) := \delta_{k,z}^{(x,n)}(f)(x_1, \dots, x_n, z)$$

for the homogeneous component of  $f^*$  of degree  $k$  in the noncommutative indeterminate  $z$ . (We have suppressed  $\vec{y}, \vec{t}$  in the notation, as indicated above.)

For example let  $n = 2$  and  $f = x_1x_2$ . Then

$$(z+1)x_1(z+1)x_2 = zx_1zx_2 + zx_1x_2 + x_1zx_2 + x_1x_2.$$

Hence  $\delta_{0,z}^{(x,2)}(x_1x_2) = x_1x_2$ ,  $\delta_{1,z}^{(x,2)}(x_1x_2) = zx_1x_2 + x_1zx_2$ , and  $\delta_{2,z}^{(x,2)}(x_1x_2) = zx_1zx_2$ .

More generally, for any  $h \in C\{t\}$  we write  $\delta_{k,h}^{(x,n)}(f) := \delta_{k,h}^{(x,n)}(f)(x_1, \dots, x_n, h)$ , i.e., the specialization of  $\delta_{k,z}^{(x,n)}(f)$  under  $z \mapsto h$ .

REMARK 1.

1. In calculating  $\delta_{k,z}^{(x,n)}(f)$ , the substitution  $x_i \rightarrow (z+1)x_i$  is applied to the first  $n$  positions in  $f$  but not to the other positions. For example, the last (i.e.  $n+1$  st) variable in  $f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, x_n)$  is  $x_n$ , not  $x_{n+1}$ . Hence, to calculate  $\delta_{k,z}^{(x,n)}(f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, x_n))$  we apply  $x_i \rightarrow (z+1)x_i$  to all  $x_i$ 's except  $x_n$ .

2. We can also write

$$\begin{aligned} \delta_{k,z}^{(x,n)}(f(x_1, \dots, x_n, \vec{t})) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f(x_1, \dots, x_n, \vec{t})|_{x_{i_j} \rightarrow zx_{i_j}} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f(x_1, \dots, zx_{i_1}, \dots, zx_{i_k}, \dots, x_n, \vec{t}). \end{aligned}$$

3. In case  $f = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  also involves indeterminates  $y_1, \dots, y_n$ , we still have

$$\delta_{k,z}^{(x,n)}(f) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f|_{x_{i_j} \rightarrow zx_{i_j}},$$

indicating that the other indeterminates  $y_1, \dots, y_n$  remain fixed. Analogously,

$$\delta_{k,z}^{(y,n)}(f) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f|_{y_{i_j} \rightarrow zy_{i_j}},$$

and the indeterminates  $x_1, \dots, x_n$  are fixed.

DEFINITION 2.2. A polynomial  $f(x_1, \dots, x_n, \vec{t})$  is **alternating** in  $x_1, \dots, x_n$  if  $f$  is multilinear in the  $x_i$  and

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n, \vec{t}) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n, \vec{t}) = 0 \text{ for all } i < j. \quad (1)$$

A stronger definition, which would suffice for our purposes, is to require that

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n, \vec{t}) = 0; \quad (2)$$

i.e., we get 0 when specializing  $x_j$  to  $x_i$  for any  $1 \leq i < j \leq n$ . We get (2.2) by linearizing (2), and can recover (2) from (2.2) in characteristic  $\neq 2$ .)

LEMMA 2.3. Let  $f(x_1, \dots, x_n, \vec{t})$  be multilinear and alternating in  $x_1, \dots, x_n$ . Then for each  $0 \leq k \leq n$ ,  $\delta_{k,z}^{(x,n)}(f(x_1, \dots, x_n, \vec{t}))$  is also alternating in  $x_1, \dots, x_n$ .

PROOF. Let  $v = 1 + \varepsilon z$  where  $\varepsilon$  is a central indeterminate. Obviously  $f(vx_1, \dots, vx_n, \vec{t})$  is also alternating in  $x_1, \dots, x_n$ . Since

$$f(vx_1, \dots, vx_n, \vec{t}) = \sum_{k=0}^n \left( \delta_{k,z}^{(x,n)}(f(x_1, \dots, x_n, \vec{t})) \right) \cdot \varepsilon^k$$

is alternating in  $x_1, \dots, x_n$ , it follows that each  $\delta_{k,z}^{(x,n)}(f(x_1, \dots, x_n, \vec{t}))$  is alternating in  $x_1, \dots, x_n$ .  $\square$

REMARK 2.4.

1. Since  $\mathcal{CAP}_n$  is generated as a  $T$ -ideal by polynomials alternating in  $x_1, \dots, x_n$ , we have

$$\delta_{k,z}^{(x,n)}(\mathcal{CAP}_n) \subseteq \mathcal{CAP}_n \quad \text{and} \quad \delta_{k,z}^{(x,n)}(\mathcal{CAP}_{n+1}) \subseteq \mathcal{CAP}_{n+1}.$$

2. The results proved for the indeterminate  $z$  specialize to an arbitrary polynomial  $h$ , and thus can be formulated for  $h$ .

LEMMA 2.5. The  $\delta_{k,z}^{(x,n)}(f)$ -operator is functorial, in the sense that if  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m) \in A$  and  $h(\vec{a}) = h'(\vec{a})$ , then  $\delta_{k,h}^{(x,n)}(f)(\vec{a}) = \delta_{k,h'}^{(x,n)}(f)(\vec{a})$ .

PROOF. We get the same result in Definition 2.1 by specializing  $z$  to  $h$  and then to  $\vec{a}$ , as we get by specializing  $z$  to  $h'$ , and then to  $\vec{a}$ .  $\square$

This observation is needed in our later specialization arguments.

The following observation, which is rather well known, motivates Proposition 2.10 below. Let  $V = Cx_1 \oplus \dots \oplus Cx_n$  and let  $z : V \rightarrow V$  be a linear transformation from  $V$  to  $V$ . Let

$$\det(\lambda I - z) = \sum_{k=0}^n c_k(z) \lambda^k$$

be the characteristic ("Cayley-Hamilton") polynomial of  $z$ . Then we have the following formula from [26, Theorem 1.4.12]:

$$\begin{aligned} \delta_{k,z}^{(x,n)}(\text{Cap}_n(x_1, \dots, x_n; \vec{y})) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{Cap}_n(x_1, \dots, zx_{i_1}, \dots, zx_{i_k}, \dots, x_n; \vec{y}) = \\ &= c_k(z) \cdot \text{Cap}_n(x_1, \dots, x_n; \vec{y}), \end{aligned}$$

and the coefficients  $c_k(z)$  are independent of the particular indeterminates  $x_1, \dots, x_n$ . Proposition 2.10 below displays a similar phenomenon.

## 2.2. Zubrilin's Proposition

Our goal in this section is Proposition 2.17. Let us define the terms used there.

Let  $\widehat{C\{x, y, t\}}$  denote the relatively free algebra  $C\{x, y, t\}/\mathcal{CAP}_{n+1}$ . We denote the image of  $f \in C\{x, y, t\}$  in  $\widehat{C\{x, y, t\}}$  by  $\hat{f}$ .

REMARK 2.6. If  $A$  satisfies  $\text{Cap}_{n+1}$ , then any algebra homomorphism  $\varphi : C\{x, y, t\} \rightarrow A$  naturally induces an algebra homomorphism  $\hat{\varphi} : \widehat{C\{x, y, t\}} \rightarrow A$  given by

$$\hat{\varphi}(\hat{f}) = \varphi(f),$$

since  $\mathcal{CAP}_{n+1} \subseteq \ker \varphi$ .

REMARK 2. Let  $f(x_1, \dots, x_{n+1})$  be multilinear in  $x_1, \dots, x_{n+1}$  and alternating in  $x_1, \dots, x_n$ . Construct

$$\tilde{f} = \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, x_k). \quad (3)$$

(All other variables occurring in  $f$  are left untouched.)

Then  $\tilde{f}$  is  $(n+1)$ -alternating in  $x_1, \dots, x_{n+1}$ .

PROPOSITION 2.7. Let  $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  be multilinear in  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  and alternating in  $x_1, \dots, x_n$  (so  $\tilde{f}$  of Equation (3) is  $(n+1)$ -alternating). Then

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_{j,z}^{(x,n)} (f(x_1, \dots, x_n, z^{n-j} x_{n+1})) \equiv 0 \quad \text{modulo } \mathcal{CAP}_{n+1}.$$

PROOF. Throughout we work modulo  $\mathcal{CAP}_{n+1}$ . Since  $\tilde{f}$  is  $(n+1)$ -alternating, we have

$$0 \equiv \tilde{f} = f(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, x_1) - f(x_1, x_3, \dots, x_{n+1}, x_2) + \dots + (-1)^n f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}).$$

Thus, modulo  $\mathcal{CAP}_{n+1}$  the last summand  $(-1)^n f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$  can be replaced by minus the sum of the other summands:

$$(-1)^n f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \equiv \sum_{k=1}^n (-1)^k f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, x_{n+1}, x_k),$$

Given  $0 \leq j \leq n$ , substitute  $x_{n+1} \mapsto z^{n-j} x_{n+1}$ , so

$$(-1)^n f(x_1, x_2, \dots, x_n, z^{n-j} x_{n+1}) \equiv \sum_{k=1}^n (-1)^k f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, z^{n-j} x_{n+1}, x_k).$$

Applying  $\delta_{j,z}^{(x,n)}$  and summing with sign, we get

$$\begin{aligned} (-1)^n \sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_{j,z}^{(x,n)} (f(x_1, \dots, x_n, z^{n-j} x_{n+1})) &\equiv \\ &\equiv \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{k=1}^n (-1)^k \delta_{j,z}^{(x,n)} (f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, z^{n-j} x_{n+1}, x_k)) = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_{j,z}^{(x,n)} (f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, z^{n-j} x_{n+1}, x_k)). \end{aligned}$$

Denote  $g_{j,k} = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, z^{n-j} x_{n+1}, x_k)$ , and

$$Q_k = \sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_{j,z}^{(x,n)} (g_{j,k}). \quad (4)$$

It suffices to show that  $Q_k \equiv 0$  for each  $k$ . Note that in calculating  $\delta_{j,z}^{(x,n)} (g_{j,k}) = \delta_{j,z}^{(x,n)} (f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, z^{n-j} x_{n+1}, x_k))$ ,  $x_k$  is unchanged (since it is the last indeterminate), while for all other  $x_i$ 's (in particular – for  $x_{n+1}$ ) we substitute  $x_i \mapsto (z+1)x_i$ , cf. Remark 1.1. Therefore

$$\delta_{j,z}^{(x,n)} (g_{j,k}) = \delta_{j,z,[k']}^{(x,n)} (g_{j,k}) + \delta_{j,z,[k'']}^{(x,n)} (g_{j,k})$$

where

$\delta_{j,z,[k']}^{(x,n)}(g_{j,k})$  is the sum of the monomials of  $\delta_{j,z}^{(x,n)}(g_{j,k})$  having  $z$ -degree  $j$ , where  $x_{n+1}$  was replaced by  $zx_{n+1}$ ;

and

$\delta_{j,z,[k'']}^{(x,n)}(g_{j,k})$  is the sum of the monomials of  $\delta_{j,z}^{(x,n)}(g_{j,k})$  having  $z$ -degree  $j$ , where  $x_{n+1}$  was unchanged.

It is not difficult to see that for  $j > 0$ ,

$$\begin{aligned} \delta_{j,z,[k']}^{(x,n)} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, z^{n-j} x_{n+1}, x_k) = \\ \delta_{j-1,z,[k'']}^{(x,n)} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, z^{n-j+1} x_{n+1}, x_k), \end{aligned}$$

namely

$$\delta_{j,z,[k']}^{(x,n)}(g_{j,k}) = \delta_{j-1,z,[k'']}^{(x,n)}(g_{j-1,k}).$$

It also follows from the definitions that  $\delta_{0,z,[k']}^{(x,n)}(g_{0,k}) = \delta_{n,z,[k'']}^{(x,n)}(g_{n,k}) = 0$ . Hence

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_{j,z,[k']}^{(x,n)}(g_{j,k}) &= \sum_{j=1}^n (-1)^j \delta_{j,z,[k']}^{(x,n)}(g_{j,k}) = \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^j \delta_{j-1,z,[k'']}^{(x,n)}(g_{j-1,k}) = - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \delta_{j,z,[k'']}^{(x,n)}(g_{j,k}), \end{aligned}$$

and

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_{j,z,[k'']}^{(x,n)}(g_{j,k}) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \delta_{j,z,[k'']}^{(x,n)}(g_{j,k}).$$

Summing in (4) we get

$$Q_k = \sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_{j,z}^{(x,n)}(g_{j,k}) \equiv \sum_{j=0}^n (-1)^j \left( \delta_{j,z,[k']}^{(x,n)} g_{j,k} + \delta_{j,z,[k'']}^{(x,n)} g_{j,k} \right) \equiv 0.$$

□

### 2.2.1. The module $\widehat{\mathcal{M}}$ over the relatively free algebra of $\text{Cap}_{n+1}$

We need a special sort of alternating polynomials.

DEFINITION 2.8. A polynomial  $f(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; \vec{t})$ , where  $\vec{t}$  denotes other possible indeterminates, is **doubly alternating** if  $f$  is linear and alternating in  $x_1, \dots, x_n$  and  $y_1, \dots, y_n$ .

Our main example is the **double Capelli** polynomial

$$\text{DCap}_n = t_1 \text{Cap}_n(x_1, \dots, x_n; \vec{t}) t_2 \text{Cap}_n(y_1, \dots, y_n; \vec{t}') t_3. \quad (5)$$

Here  $\vec{t}$  and  $\vec{t}'$  are arbitrary sets of extra indeterminates. We suppress the indeterminates  $\vec{t}$ ,  $\vec{t}'$ , and  $t_1, t_2, t_3$  from the notation, since we do not alter them.

DEFINITION 2.9. Let  $\mathcal{M}$  denote the  $C$ -submodule of  $C\{x, y, t\}$  consisting of all doubly alternating polynomials (in  $x_1, \dots, x_n$ , and in  $y_1, \dots, y_n$ ).

$\widehat{\mathcal{M}}$  denotes the image of  $\mathcal{M}$  in  $C\{\widehat{x, y, t}\}$ , i.e., the  $C$ -submodule of  $C\{\widehat{x, y, t}\}$  consisting of the images of all doubly alternating polynomials (in  $x_1, \dots, x_n$ , and in  $y_1, \dots, y_n$ ).

REMARK 3.  $\widehat{\mathcal{M}}$  is a  $C\{t\}$ -submodule of  $C\{\widehat{x, y, t}\}$ , namely  $C\{t\}\widehat{\mathcal{M}} \subseteq \widehat{\mathcal{M}}$ . Indeed, let  $h \in C\{t\}$  and  $f \in \mathcal{M}$ . If either  $h$  or  $f$  is in  $\mathcal{CAP}_{n+1}$  then  $hf \in \mathcal{CAP}_{n+1}$ ; hence the product  $\widehat{hf} = \widehat{h}\widehat{f}$  is well defined. Moreover, if  $f = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t})$  is doubly alternating in the  $x$ 's and in the  $y$ 's, and  $h \in C\{\vec{t}\}$ , then  $hf$  is doubly alternating in the  $x$ 's and in the  $y$ 's.

### 2.2.2. The Zubrilin action

The theory hinges on the following amazing result, which we prove in Section 2.7 below. (This is also proved in [7, Theorem 4.82], but more details are given here.)

PROPOSITION 2.10. Let  $f(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$  be doubly alternating in  $x_1, \dots, x_n$  and in  $y_1, \dots, y_n$  (perhaps involving additional indeterminates). Then for any polynomial  $h$ ,

$$\delta_{k,h}^{(x,n)}(f) \equiv \delta_{k,h}^{(y,n)}(f) \quad \text{modulo } \mathcal{CAP}_{n+1}; \quad (6)$$

namely,

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f|_{x_{i_j} \rightarrow hx_{i_j}} \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f|_{y_{i_j} \rightarrow hy_{i_j}} \quad \text{modulo } \mathcal{CAP}_{n+1}.$$

Before proving Proposition 2.10 we deduce some of its consequences.

REMARK 2.11. It follows from Proposition 2.10 that  $\delta_{k,h}^{(x,n)}(f) - \delta_{k,h}^{(y,n)}(f) \in \mathcal{CAP}_{n+1}$  whenever  $f \in \widehat{\mathcal{M}}$ , so working modulo  $\mathcal{CAP}_{n+1}$  we can suppress  $x$  in the notation, writing  $\widehat{\delta}_{k,h}^{(n)}(\widehat{f})$  for  $\widehat{\delta}_{k,h}^{(x,n)}(\widehat{f})$ .

### 2.2.3. Commutativity of the operators $\delta_{k,h_j}^{(n)}$ modulo $\mathcal{CAP}_{n+1}$

We use  $\widehat{\mathcal{M}}$  instead of  $\mathcal{M}$  because of the following lemma.

LEMMA 2.12. (i)  $\delta_{k,h}^{(n)}$  induces a well-defined map  $\widehat{\delta}_{k,h}^{(n)} : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$  given by  $\widehat{\delta}_{k,h}^{(n)}(\widehat{f}) = \widehat{\delta_{k,h}^{(x,n)}(f)}$ .

(ii)  $\widehat{\delta}_{k,h}^{(n)}$  produces the same result using the indeterminates  $x$  or  $y$ .

PROOF. (i) If  $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  and  $g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  are doubly alternating polynomials, with  $\widehat{f} = \widehat{g}$ , then  $f - g \in \mathcal{CAP}_{n+1}$ , so by Remark 2.4(1),  $\delta_{k,h}^{(n)}(f - g) \in \mathcal{CAP}_{n+1}$  and hence  $\widehat{\delta_{k,h}^{(n)}(f - g)} = 0$ . Therefore we have

$$0 = \widehat{\delta_{k,h}^{(n)}(f - g)} = \widehat{\delta_{k,h}^{(n)}(f)} - \widehat{\delta_{k,h}^{(n)}(g)} = \widehat{\delta}_{k,h}^{(n)}(\widehat{f}) - \widehat{\delta}_{k,h}^{(n)}(\widehat{g}),$$

proving that  $\widehat{\delta}_{k,h}^{(n)}$  is well-defined.

(ii) The assertion follows from Remark 2.11, which shows that  $\widehat{\delta_{k,h}^{(x,n)}(f)} = \widehat{\delta_{k,h}^{(y,n)}(f)}$ .  $\square$

LEMMA 2.13. Let  $f = f(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$  be doubly alternating in  $x_1, \dots, x_n$  and in  $y_1, \dots, y_n$  (and perhaps involving other indeterminates). Let  $1 \leq k, \ell \leq n$ . Then for any  $h_1, h_2 \in C\{t\}$ ,

$$\widehat{\delta}_{k,h_1}^{(n)} \widehat{\delta}_{\ell,h_2}^{(n)}(\widehat{f}) = \widehat{\delta}_{\ell,h_2}^{(n)} \widehat{\delta}_{k,h_1}^{(n)}(\widehat{f}). \quad (7)$$

PROOF. Equation (7) claims that modulo  $\mathcal{CAP}_{n+1}$ ,

(i)

$$\delta_{k,h_1}^{(x,n)} \delta_{\ell,h_2}^{(x,n)}(f) \equiv \delta_{\ell,h_2}^{(x,n)} \delta_{k,h_1}^{(x,n)}(f) \quad \text{and}$$

(ii)

$$\delta_{k,h_1}^{(x,n)} \delta_{\ell,h_2}^{(y,n)}(f) \equiv \delta_{\ell,h_2}^{(y,n)} \delta_{k,h_1}^{(x,n)}(f) \quad \text{and}$$

(iii)

$$\delta_{k,h_1}^{(y,n)} \delta_{\ell,h_2}^{(y,n)}(f) \equiv \delta_{\ell,h_2}^{(y,n)} \delta_{k,h_1}^{(y,n)}(f).$$

The middle equivalence (ii) is an obvious equality. The first and third equivalences are similar, and we prove the first. By Proposition 2.10, by (ii), and again by Proposition 2.10, modulo  $\mathcal{CAP}_{n+1}$  we can write

$$\delta_{k,h_1}^{(x,n)} \delta_{\ell,h_2}^{(x,n)}(f) \equiv \delta_{k,h_1}^{(x,n)} \delta_{\ell,h_2}^{(y,n)}(f) \equiv \delta_{\ell,h_2}^{(y,n)} \delta_{k,h_1}^{(x,n)}(f) \equiv \delta_{\ell,h_2}^{(x,n)} \delta_{k,h_1}^{(x,n)}(f).$$

Note that in the last step, Lemma 2.3 was applied (to  $\delta_{k,h_1}^{(x,n)}(f)$ ).  $\square$

#### 2.2.4. The ideal $I_{n,A} \subset A[\xi_{n,A}]$ and the annihilator of $\hat{M}$

DEFINITION 2.14. For each  $a \in A$  let  $\xi_{1,a}, \dots, \xi_{n,a}$  be  $n$  corresponding new commuting variables, and construct  $A[\xi_{n,A}] = A[\xi_{1,a}, \dots, \xi_{n,a} \mid a \in A]$ . Let  $I_{n,A} \subseteq A[\xi_{n,A}]$  be the ideal generated in  $A[\xi_{n,A}]$  by the elements

$$a^n + \xi_{1,a}a^{n-1} + \dots + \xi_{n,a}, \quad a \in A,$$

namely

$$I_{n,A} = \langle a^n + \xi_{1,a}a^{n-1} + \dots + \xi_{n,a} \mid a \in A \rangle.$$

REMARK 2.15. In view of Proposition 2.10, the map  $\hat{\delta}_{k,h}^{(n)} : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$  of Lemma 2.12 yields an action of the  $C$ -algebra  $\widehat{C\{t\}}[\xi_{n,\widehat{C\{t\}}}]$  on  $\widehat{\mathcal{M}}$ , given by  $\xi_{k,h}f = \hat{\delta}_{k,h}^{(n)}(f)$ .

Working with the relatively free algebra, our next goal is to prove that  $I_{n,\widehat{C\{t\}}} \cdot \widehat{\mathcal{M}} = 0$ . For that we shall need the next result.

PROPOSITION 2.16. (Zubrilin) Assume that a multilinear polynomial  $g(x_1, \dots, x_n)$  is alternating in  $x_1, \dots, x_n$ . Then, modulo  $\mathcal{CAP}_{n+1}$ ,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k h^{n-k} \delta_{k,h}^{(n)}(g) \equiv 0$$

for any  $h \in C\{t\}$ . In particular, if  $g$  is doubly alternating, then (again modulo  $\mathcal{CAP}_{n+1}$ )

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k h^{n-k} \delta_{k,h}^{(n)}(g) \equiv 0.$$

PROOF. First we take  $h$  to be an indeterminate  $z$ . Let  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}g(x_1, \dots, x_n)$ . By Proposition 2.7,  $\widehat{C\{x, y, t\}}$  satisfies the identity

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_{j,z}^{(n)}(f(x_1, \dots, x_n, z^{n-j}x_{n+1})) \equiv 0.$$

Note that in computing  $\delta_{j,z}^{(n)}(f(x_1, \dots, x_n, z^{n-j}x_{n+1}))$ , the last indeterminate is  $x_{n+1}$  and is unchanged, cf. Remark 1.1, so

$$\delta_{j,z}^{(n)}(f(x_1, \dots, x_n, z^{n-j}x_{n+1})) = z^{n-j}x_{n+1}\delta_{j,z}^{(n)}g(x_1, \dots, x_n).$$

Using Proposition 2.7, we have that

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j z^{n-j} x_{n+1} \delta_{j,z}^{(n)}(g(x_1, \dots, x_n)) \in \mathcal{CAP}_{n+1}.$$

The proof now follows by substituting  $x_{n+1} \mapsto 1$  and  $z \rightarrow h \in C\{t\}$ .

□

As a consequence we can now prove the key result:

PROPOSITION 2.17. Let  $\widehat{\mathcal{M}}$  be the module given by Definition 2.9. Then,  $I_{n, \widehat{C\{t\}}} \cdot \widehat{\mathcal{M}} = 0$ .

PROOF. We prove that  $I_{n, \widehat{C\{t\}}} \cdot \widehat{\mathcal{M}} = 0$ , by showing for any doubly alternating polynomial  $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \widehat{\mathcal{M}}$  and  $h \in \widehat{C\{t\}}$ , that

$$(h^n + \xi_{1,h}h^{n-1} + \dots + \xi_{n,h})f \equiv 0 \pmod{\mathcal{CAP}_{n+1}}.$$

It follows from the action  $\xi_{k,h}f = \delta_{k,h}^{(n)}(f)$  and from Proposition 2.16 that modulo  $\mathcal{CAP}_{n+1}$ ,

$$(h^n + \xi_{1,h}h^{n-1} + \dots + \xi_{n,h})f = \sum_{k=0}^n (-1)^k h^{n-k} \delta_{k,h}^{(n)}(f) \equiv 0.$$

□

### 2.3. The ideal $\text{Obst}_n(A) \subseteq A$

In order to utilize these results about integrality, we need another concept. We define  $\text{Obst}_n(A) = A \cap I_{n,A}$ , viewing  $A \subset A[\xi_{n,A}]$ .

REMARK 4.

1. Let

$$\bar{A} = A[\xi_{n,A}]/I_{n,A}, \tag{8}$$

with  $f : A[\xi_{n,A}] \rightarrow \bar{A}$  the natural homomorphism, and  $f_r : A \rightarrow \bar{A}$  be the restriction of  $f$  to  $A$ . Then

$$\ker(f_r) = A \cap I_{n,A} = \text{Obst}_n(A).$$

2. Note that for every  $a \in A$ ,  $f(a)$  is  $n$ -integral (i.e., integral of degree  $n$ ) over  $C[\bar{\xi}_{i,A}]$ , and thus over the center of  $\bar{A}$ . Indeed, apply the homomorphism  $f$  to the element

$$a^n + \xi_{1,a}a^{n-1} + \dots + \xi_{n,a} \quad (\in I_{n,A})$$

to get

$$\bar{a}^n + \bar{\xi}_{1,a}\bar{a}^{n-1} + \dots + \bar{\xi}_{n,a} = (a^n + \xi_{1,a}a^{n-1} + \dots + \xi_{n,a}) + I_{n,A} = 0.$$

LEMMA 2.18.  $\ker(f_r)$  also is the intersection of all kernels  $\ker(g)$  of the following maps  $g$ :

$g : A \rightarrow B$ , where  $B$  is a  $C$ -algebra, and  $g : A \rightarrow B$  is a homomorphism such that for any  $a \in A$ ,  $g(a)$  is  $n$ -integral over the center of  $B$ .

PROOF. Denote the above intersection  $\cap_g \ker(g)$  as  $\text{Obst}'_n(A)$ . Then  $\text{Obst}'_n(A) \subseteq \text{Obst}_n(A)$  since  $\ker(f_r)$  is among these  $\ker(g)$ . To show the opposite inclusion we prove

Claim: For such  $g : A \rightarrow B$ ,  $\ker(g) \supseteq A \cap I_{n,A} = \text{Obst}_n(A)$ .

Extend  $g$  to  $g^* : A[\xi_{n,A}] \rightarrow B$  as follows:  $g^*(a) = a$  if  $a \in A$ , while  $g^*(\xi_{i,a}) = \beta_{i,a}$ . We claim that  $g^*(I_{n,A}) = 0$ . Indeed, let

$$r = a^n + \xi_{1,a}a^{n-1} + \cdots + \xi_{n,a}$$

be one of the generators of  $I_{n,A}$ .

By assumption there exist  $\beta_{1,a}, \dots, \beta_{n,a}$  in the center of  $B$  satisfying

$$g(a)^n + \beta_{1,a}g(a)^{n-1} + \cdots + \beta_{n,a} = 0. \quad (9)$$

Hence,

$$g^*(r) = g(a)^n + \beta_{1,a}g(a)^{n-1} + \cdots + \beta_{n,a} = 0.$$

This shows that as claimed,  $g^*(I_{n,A}) = 0$ .

Finally, if  $a \in A \cap I_{n,A}$  then  $g(a) = g^*(a) = 0$ . Hence  $a \in \ker(g)$ , so  $\ker(g) \supseteq A \cap I_{n,A} = \text{Obst}_n(A)$ .

□

COROLLARY 2.19. If every  $a \in A$  is  $n$ -integral (over the base field), then  $\text{Obst}_n(A) = 0$ .

PROOF. The assumption implies that in the above, the identity map  $id = g : A \rightarrow A$  satisfies the condition of Lemma 2.18. Hence  $0 = \ker(g) \supseteq \text{Obst}_n(A)$ , and the proof follows. □

This corollary explains the notation  $\text{Obst}_n(A)$ : it is the **obstruction** for each  $a \in A$  to be  $n$ -integral. The next result technically is not needed, but helps to show how  $\text{Obst}$  behaves.

LEMMA 2.20.  $\text{Obst}_{n-1}(A) \supseteq \text{Obst}_n(A)$ .

PROOF. Represent

$$\text{Obst}_{n-1}(A) = \cap_h \ker(h) \quad \text{and} \quad \text{Obst}_n(A) = \cap_g \ker(g),$$

with the respective conditions of  $n-1$  integrality and of  $n$  integrality. Take  $a \in A$  and  $h : A \rightarrow B$  with  $h(a)$  being  $n-1$  integral over the center of  $B$ . Then  $h(a)$  is also  $n$  integral over the center of  $B$ . Hence every  $\ker(h)$  in  $\text{Obst}_{n-1}(A)$  also appears in the intersection  $\text{Obst}_n(A) = \cap_g \ker(g)$ , and the assertion follows. □

## 2.4. Reduction to finite modules

The reduction to finite modules is done using Shirshov's theorem.

PROPOSITION 2.21. Let  $A = C\{a_1, \dots, a_\ell\}$  have PI degree  $d$  over the base ring  $C$ . Then the affine algebra  $A/\text{Obst}_n(A)$  can be embedded in an algebra which is finite over a central affine subalgebra.

PROOF.

Let  $B \subseteq A$  be the subset of the words in the alphabet  $a_1, \dots, a_\ell$  of length  $\leq d$ . By Shirshov's Height Theorem there exists an integer  $h$  such that the set

$$W = \{b_1^{k_1} \cdots b_h^{k_h} \mid b_i \in B, \text{ any } k_i \geq 0\}$$

spans  $A$  over the base ring  $C$ .

Similarly to  $A[\xi_{n,A}]$ , construct  $A[\xi_{n,B}] \subseteq A[\xi_{n,A}]$ :

$$A[\xi_{n,B}] = A[\xi_{1,b}, \dots, \xi_{n,b} \mid b \in B],$$

and let  $I_{n,B}$  be the ideal

$$I_{n,B} = \langle b^n + \xi_{1,b}b^{n-1} + \cdots + \xi_{n,b} \mid b \in B \rangle \triangleleft A[\xi_{n,B}]$$

Denote

$$A' = A[\xi_{n,B}]/I_{n,B}. \quad (10)$$

We show that  $A'$  is finite over an affine central subalgebra and thus is Noetherian.

Given  $a \in A$ , denote  $a' = a + I_{n,B} \in A'$ , and similarly  $\xi'_{i,b} = \xi_{i,b} + I_{n,B}$ . Then for every  $b \in B$ ,  $b'$  is  $n$ -integral over  $C[\xi'_{n,B}]$ , where

$$C[\xi'_{n,B}] = C[\xi'_{1,b}, \dots, \xi'_{n,b} \mid b \in B] \subseteq \text{center}(A').$$

Hence the finite subset

$$W' = \{b'^{k_1}_1 \cdots b'^{k_h}_h \mid b_i \in B, \quad k_i \leq n-1\} \quad (\subseteq A') \quad (11)$$

spans  $A'$  over  $C[\xi'_{n,B}]$ . Thus  $A'$  is finite over the affine central subalgebra  $C[\xi'_{n,B}] \subseteq \text{center}(A')$  and thus is Noetherian.

Restricting the natural map  $g : A[\xi_{n,B}] \rightarrow A' = A[\xi_{n,B}]/I_{n,B}$  to  $A$ , we have

$$g_r : A \rightarrow A' \quad (a \mapsto a' = a + I_{n,B}) \quad (12)$$

which satisfies

$$\ker(g_r) = A \cap I_{n,B} \subseteq A \cap I_{n,A} = \text{Obst}_n(A). \quad (13)$$

Let

$$\tilde{A} = A / \text{Obst}_n(A), \quad (14)$$

and for  $a \in A$  denote  $\tilde{a} = a + \text{Obst}_n(A) \in \tilde{A}$ . We then have the corresponding subset  $\tilde{B} = \{\tilde{b} \mid b \in B\} \subseteq \tilde{A}$ , as well as the set of commutative variables  $\xi_{n,\tilde{B}}$  and the ideal  $\tilde{I}_{n,\tilde{B}}$ . Let  $A^* = \tilde{A}[\xi_{n,\tilde{B}}]/\tilde{I}_{n,\tilde{B}}$ .

Replacing  $A$  by  $\tilde{A}$  and  $\xi_{i,B}$  by  $\xi_{i,\tilde{B}}$ , we clearly have the natural homomorphism

$$\tilde{g} : \tilde{A}[\xi_{n,\tilde{B}}] \rightarrow \tilde{A}[\xi_{n,\tilde{B}}]/\tilde{I}_{n,\tilde{B}} := A^*,$$

with restriction

$$\tilde{g}|_{\tilde{A}} = \tilde{g}_r : \tilde{A} \rightarrow A^*.$$

Note that each  $\tilde{a} \in \tilde{A}$  is  $n$ -integral over the center of  $\tilde{A}$ , implying, by Corollary 2.19, that  $\text{Obst}_n(\tilde{A}) = 0$ . Then, as in (13), we deduce that

$$\ker(\tilde{g}_r) \subseteq \text{Obst}_n(\tilde{A}) (= 0).$$

Hence  $\tilde{g}_r$  embeds  $\tilde{A} = A / \text{Obst}_n(A)$  into  $A^*$ . Note that  $A^*$  is a finite algebra over the affine central subalgebra  $Q \subseteq A^*$  generated by the finitely many central elements  $\xi_{k,\tilde{B}} + \tilde{I}_{n,\tilde{B}}$ .

Denote  $b^* = \tilde{b} + I_{n,\tilde{B}}$ . Then, as in (11), the finite subset

$$W^* = \{b_1^{*k_1} \cdots b_h^{*k_h} \mid b_i \in B, \quad k_i \leq n-1\} \quad (\subseteq A^*)$$

spans  $A^*$  over  $Q$ .  $\square$

## 2.5. Proving that $\text{Obst}_n(A) \cdot (\mathcal{CAP}_n(A))^2 = 0$

In this section we show how Proposition 2.17 implies that  $\text{Obst}_n(A) \cdot (\mathcal{CAP}_n(A))^2 = 0$ , thereby completing the proof of Razmyslov's Theorem. For this, we need to specialize down to given algebra  $A$ , requiring a new construction, the **relatively free product**, which enables us to handle  $A$  together with polynomials. Since, to our knowledge, this crucial step, which is needed one way or another in every published proof of the BKR theorem, has not yet appeared in print in full detail, we present two proofs, one faster but more ad hoc (since we intersect with  $A$  and bypass certain difficulties), and the second more structural.

Both approaches are taken in the context of varieties in universal algebra, by taking the free product of  $A$  with the free associative algebra, and then modding out the identities defining its variety.

### 2.5.1. The relatively free product

DEFINITION 2.22. The **free product**  $A *_C B$  of  $C$ -algebras  $A$  and  $B$  is their coproduct in the category of algebras.

(For  $C$ -algebras with 1, there are canonical  $C$ -module maps

$$A \rightarrow A \otimes 1 \subset A \otimes_C B, \quad B \rightarrow 1 \otimes B \subset A \otimes_C B,$$

viewed naturally as  $C$ -modules, so  $A *_C B$  can be identified with the tensor algebra of  $A \otimes_C B$ , as reviewed in [29, Example 18.38].)

Although the results through Theorem 2.32 hold over any commutative base ring  $C$ , it is easier to visualize the situation for algebras over a field  $F$ , in which case we have an explicit description of  $A[\xi_{n,A}] * F\{x; y; t\}$ :

Fix a base  $\mathcal{B}_A = \{1\} \cup \mathcal{B}_0$  of  $A$  over  $F$ , and let  $\mathcal{B}$  be the monomials in the  $\{\xi_{n,a} : a \in A\}$  with coefficients in  $\mathcal{B}_A$ . (For algebras without 1, we take  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$ .) Thus  $\mathcal{B}$  is an  $F$ -base of  $A[\xi_{n,A}]$ , and  $A[\xi_{n,A}] * F\{x; y; t\}$  is the vector space having base comprised of all elements of the form  $b_0 h_1 b_1 h_2 b_2 \cdots h_m b_m$  where  $m \geq 0$ ,  $b_0, b_m \in \mathcal{B}$ ,  $b_1, \dots, b_{m-1} \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$ , and the  $h_i$  are nontrivial words in the indeterminates  $x_i, y_j, t_k$ . The free product  $A[\xi_{n,A}] * F\{x; y; t\}$  becomes an algebra via juxtaposition of terms. In other words, given

$$g_j = b_{j,0} h_{j,1} b_{j,1} h_{j,2} b_{j,2} \cdots h_{j,m_j} b_{j,m_j}$$

for  $j = 1, 2$ , we write  $b_{1,m_1} b_{2,0} = \alpha_1 + \sum_k \alpha_k b_k$  for  $\alpha_k \in F$  and  $b_k$  ranging over  $\mathcal{B} \setminus \{1\}$ , and define

$$\begin{aligned} g_1 g_2 = & \alpha_1 b_{1,0} h_{1,1} b_{1,1} h_{1,2} b_{1,2} \cdots (h_{1,m_1} h_{2,1}) b_{2,1} h_{2,2} b_{2,2} \cdots h_{2,m_2} \\ & + \sum_k \alpha_k b_{1,0} h_{1,1} b_{1,1} h_{1,2} b_{1,2} \cdots h_{1,m_1} b_k h_{2,1} b_{2,1} h_{2,2} b_{2,2} \cdots h_{2,m_2}. \end{aligned} \quad (15)$$

For example, if  $b_1 b_2 = 1 + b_3 + b_4$ , then

$$(b_2 h_{1,1} b_1)(b_2 h_{2,1} b_2) = b_2 (h_{1,1} h_{2,1}) b_2 + b_2 h_{1,1} b_3 h_{2,1} b_2 + b_2 h_{1,1} b_4 h_{2,1} b_2.$$

### 2.5.2. The relatively free product of $A$ and $C\{x; y; t\}$ modulo a T-ideal

Even for algebras over an arbitrary base ring  $C$ , we can describe the free product of a  $C$ -algebra with  $C\{x; y; t\}$  by going over the same construction and mimicking the tensor product. Namely we

form the free  $C$ -module  $M$  having base comprised of all elements of the form  $a_0 h_1 a_1 h_2 a_2 \cdots h_m a_m$ ,  $h_1 a_1 h_2 a_2 \cdots h_m a_m$ ,  $a_0 h_1 a_1 h_2 a_2 \cdots h_m$ , and  $h_1 a_1 h_2 a_2 \cdots h_m$  where  $m \geq 0$ ,  $a_0, \dots, a_m \in A$ , and the  $h_i$  are nontrivial words in the indeterminates  $x_i, y_j, t_k$ .

The free product  $A * C\{x; y; t\}$  is  $M/N$ , where  $N$  is the submodule generated by all

$$a_0 h_1 a_1 h_2 \cdots a_i \cdots h_m a_m + a_0 h_1 a_1 h_2 \cdots a'_i \cdots h_m a_m - a_0 h_1 a_1 h_2 \cdots (a_i + a'_i) \cdots h_m a_m,$$

$$(ch_1) - ch_1,$$

$$ca_0 h_1 a_1 h_2 \cdots a_i - a_0 h_1 a_1 h_2 \cdots (ca_i) \cdots h_m a_m, \quad a_i \in A, \quad c \in C;$$

$A * C\{x; y; t\}$  becomes an algebra via juxtaposition of terms, i.e., given

$$g_j = a_{j,0} h_{j,1} a_{j,1} h_{j,2} a_{j,2} \cdots h_{j,m_j} a_{j,m_j}$$

for  $j = 1, 2$ , we define

$$g_1 g_2 = ca_{1,0} h_{1,1} a_{1,1} h_{1,2} a_{1,2} \cdots (h_{1,m_1} h_{2,1}) a_{2,1} h_{2,2} a_{2,2} \cdots h_{2,m_2} \quad (16)$$

when  $a_{1,m_1} a_{2,0} = c \in C$ , or

$$g_1 g_2 = \alpha_1 a_{1,0} h_{1,1} a_{1,1} h_{1,2} a_{1,2} \cdots h_{1,m_1} (a_{1,m_1} a_{2,0}) h_{2,1} a_{2,1} h_{2,2} a_{2,2} \cdots h_{2,m_2} \quad (17)$$

when  $a_{1,m_1} a_{2,0} \notin C$ .

We write  $A\langle x; y; t \rangle$  for the free product  $A * C\{x; y; t\}$ .

We have the natural embedding  $C\{x; y; t\} \rightarrow A\langle x; y; t \rangle$ . For  $g \in C\{x; y; t\}$ , we write  $\bar{g}$  for its natural image in  $A * C\{x; y; t\}$ .

**DEFINITION 2.23.** Suppose  $\mathcal{I}$  is a T-ideal of  $C\{x; y; t\}$ , for which  $\mathcal{I} \subseteq \text{id}(A)$ . The **relatively free product**  $A\langle x; y; t \rangle_{\mathcal{I}}$  of  $A$  and  $C\{x; y; t\}$  **modulo**  $\mathcal{I}$  is defined as  $(A *_C C\{x; y; t\})/\hat{\mathcal{I}}$ , where  $\hat{\mathcal{I}}$  is the two-sided ideal  $\mathcal{I}(A *_C C\{x; y; t\})$  consisting of all evaluations on  $A *_C C\{x; y; t\}$  of polynomials from  $\mathcal{I}$ .

We can consider  $A\langle x; y; t \rangle_{\mathcal{I}}$  as the ring of (noncommutative) polynomials but with coefficients from  $A$  interspersed throughout, taken modulo the relations in  $\mathcal{I}$ .

This construction is universal in the following sense: Any homomorphic image of  $A\langle x; y; t \rangle$  satisfying these identities (from  $\mathcal{I}$ ) is naturally a homomorphic image of  $A\langle x; y; t \rangle_{\mathcal{I}}$ . Thus, we have:

**LEMMA 2.24.** (i) For any  $g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_k$  in  $A\langle x; y; t \rangle$ , there is a natural endomorphism  $A\langle x; y; t \rangle \rightarrow A\langle x; y; t \rangle$  which fixes  $A$  and all  $t_i$  and sends  $x_i \mapsto g_i$ ,  $y_i \mapsto h_i$ .

(ii) For any  $g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_k$  in  $A\langle x; y; t \rangle_{\mathcal{I}}$ , there is a natural endomorphism

$$A\langle x; y; t \rangle_{\mathcal{I}} \rightarrow A\langle x; y; t \rangle_{\mathcal{I}},$$

which fixes  $A$  and all  $t_i$  and sends  $x_i \mapsto g_i$ ,  $y_i \mapsto h_i$ .

Although difficult to describe explicitly, the relatively free product is needed implicitly in all known proofs of the Braun-Kemer-Razmyslov Theorem in the literature. *From now on, we assume that  $\mathcal{I}$  contains  $\mathcal{CAP}_{n+1}$ , so that we can work with  $\widehat{M}$ .*

Let  $\widehat{\mathcal{M}}_A$  denote the image of  $\mathcal{M}$  under substitutions to  $A$ , i.e., the  $C$ -submodule of  $\widehat{C\{x, y, t\}}$  consisting of the images of all doubly alternating polynomials (in  $x_1, \dots, x_n$ , and in  $y_1, \dots, y_n$ ). In view of Lemma 2.13, the natural action of  $\text{Obst}_n(A)$  on  $\widehat{\mathcal{M}}_A$  respects multiplication by the  $\delta_{k,h}^{(n)}$ -operators.

**PROPOSITION 2.25.**  $\text{Obst}_n(A)\widehat{\mathcal{M}}_A = 0$ .

PROOF. If  $a \in \text{Obst}_n(A)$ , then  $a\mathcal{M} \in \mathcal{I}$ , in view of Lemmas 2.5 and 2.12 and Proposition 2.17, so is 0 modulo  $\mathcal{I}$ .  $\square$

COROLLARY 2.26. If  $b \in A$  belongs to the  $T$ -ideal generated by doubly alternating polynomials, then  $\text{Obst}_n(A)b = 0$ .

PROOF. The element  $b$  belongs to the linear combinations images of  $\widehat{\mathcal{M}}_A$  under specializations  $x_i \mapsto a_i$ .  $\square$

By Step 7 of Section 1.2, this will complete the proof of the nilpotence of  $\text{Jac}(A)$  when  $C$  is a field, or more generally of any nil ideal when  $C$  is Noetherian, once we complete the proof of Proposition 2.10.

## 2.6. A more formal approach to Zubrilin's argument

Rather than push immediately into  $A$ , one can perform these computations first at the level of polynomials and then specialize. This requires a bit more machinery, since it requires adjoining the commuting indeterminates  $\xi_{n,A}$  to the free product, but might be clearer conceptually.

Note that  $\widehat{C\{t\}}[\xi_{n,C\{t\}}] = R \otimes_C \widehat{C\{t\}}$ .

LEMMA 2.27.  $\widehat{\mathcal{M}}$  becomes an  $\widehat{C\{t\}}[\xi_{n,C\{t\}}]$ -module via the action given as follows:

Order the  $\xi_{k,h}$  as  $\xi_j = \xi_{k_j, h_j}$  for  $1 \leq j < \infty$ .

For a letter  $\xi_j = \xi_{k_j, h_j}$ , define

$$\xi_j \hat{f} = \hat{\delta}_{k_j, h_j}^{(n)}(\hat{f}),$$

and, inductively,

$$\xi_j^d \hat{f} = \hat{\delta}_{k_j, h_j}^{(n)}(\xi_j^{d-1} \hat{f}).$$

For a monomial  $h = \xi_j^{d_j} \dots \xi_1^{d_1}$  of degree  $d = d_1 + \dots + d_j$ , define

$$hf = \xi_j^{d_j} (\xi_{j-1}^{d_{j-1}} \dots \xi_1^{d_1} \hat{f})$$

inductively on  $j$ .

Finally, define

$$\sum (c_i h_i) \hat{f} = \sum \alpha_i (h_i \hat{f})$$

where  $c_i \in C$  and  $h_i$  are distinct monomials.

PROOF.

The action is clearly well-defined, so we need to verify the associativity and commutativity of the action. It is enough to show that  $(h_i h_{i'}) \hat{f} = h_i (h_{i'}) \hat{f}$  for any two monomials  $h_i$  and  $h_{i'}$ . But this follows inductively from induction on their length, plus the fact that  $\xi_j(\xi_{j'} \hat{f}) = \xi_{j'}(\xi_j \hat{f})$  for any  $\xi_j$  and  $\xi_{j'}$ .  $\square$

Let us continue to take  $\mathcal{I} = \mathcal{CAP}_{n+1}$ .

REMARK 2.28. Clearly  $A[\xi_{n,A}] *_{C\{t\}} C\{t\} \subset A[\xi_{n,A}] *_{C\{x; y; t\}} C\{x; y; t\}$  in the natural way, and then

$$\mathcal{I}(A[\xi_{n,A}] *_{C\{t\}} C\{t\}) = (A[\xi_{n,A}] *_{C\{t\}} C\{t\}) \cap \mathcal{I}(A[\xi_{n,A}] *_{C\{x; y; t\}} C\{x; y; t\})$$

since we are just restricting the indeterminates  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{t}$  to the indeterminates  $\vec{t}$ .

It follows from Noether's Isomorphism Theorem that

$$\mathcal{F} := (A[\xi_{n,A}] *_{C\{t\}} C\{t\}) / \mathcal{I}(A[\xi_{n,A}] *_{C\{t\}} C\{t\}),$$

can be viewed naturally in  $(A[\xi_{n,A}] *_{\mathcal{C}} C\{x; y; t\})/\mathcal{I}(A[\xi_{n,A}] *_{\mathcal{C}} C\{x; y; t\})$ .

Viewing  $\mathcal{M} \subset C\{x; y; t\} \subset A[\xi_{n,A}] *_{\mathcal{C}} C\{x; y; t\}$ , we define

$$\tilde{\mathcal{M}}' = (A[\xi_{n,A}] *_{\mathcal{C}} C\{t\})\mathcal{M} \subset A[\xi_{n,A}] *_{\mathcal{C}} C\{x; y; t\}, \quad (18)$$

and its image in  $(A[\xi_{n,A}] *_{\mathcal{C}} C\{x; y; t\})/\mathcal{I}(A[\xi_{n,A}] *_{\mathcal{C}} C\{x; y; t\})$ , which we call  $\tilde{\mathcal{M}}$  (intuitively consisting of terms ending with images of doubly alternating polynomials), which acts naturally by right multiplication on  $\mathcal{F}$ . To understand how  $\tilde{\mathcal{M}}$  works, we look at the Capelli polynomial acting on  $A *_{\mathcal{C}} C\{x; y; t\}$  for an arbitrary algebra  $A$  satisfying  $\text{Cap}_{n+1}$ .

There is a more subtle action that we need.  $\tilde{\mathcal{M}}$  can be viewed as an  $R$ -module where  $R = C[\xi_{n, C\widehat{\{x; y; t\}}}]$ , via the crucial Lemma 2.12. But as above,  $\mathcal{M}$  is an  $A * C\{t\}$ -module where the algebra multiplication is induced from (15) (viewing  $\mathcal{M} \subset C\{x; y; t\}$ ), implying  $\widehat{\mathcal{M}}$  is an  $A * C\{t\}$ -module annihilated by  $CAP_{n+1}$ , and  $\tilde{\mathcal{M}}$  thereby becomes an  $A[\xi_{n, C\widehat{\{x; y; t\}}}] * C\{t\}$ -module, where we define

$$\xi_{k,h} \hat{f} = \hat{\delta}_{k,h}^{(n)} \hat{f}$$

for  $h \in C\widehat{\{x; y; t\}}$  and  $\hat{f} \in \widehat{\mathcal{M}}$ , by means of the action given in Lemma 2.27, also cf. Remark 2.15. Our main task is to identify these two actions when they are specialized to  $A$ .

### 2.6.1. The specialization argument

Having in hand the module  $\tilde{\mathcal{M}}$  on which  $A[\xi_{n, C\widehat{\{x; y; t\}}}]$  acts, we can specialize the assertion of Proposition 2.17 down to  $A$  once we succeed in matching the actions of  $A[\xi_{n, C\widehat{\{x; y; t\}}}]$  and  $A[\xi_{n,A}]$  when specializing to  $A$ .

REMARK 2.29.  $CAP_k(A[\xi_{n,A}]) = CAP_k(A)[\xi_{n,A}]$ , since  $\text{Cap}_k$  is multilinear.

We write  $DCAP_n$  for the  $C\{t\}$ -submodule of  $C\{x; y; t\}$  generated by  $\text{DCap}_n$ , cf. (5), and  $\widehat{DCAP}_n$  for its image in  $C\widehat{\{x; y; t\}}$ . This is a set of doubly alternating polynomials in  $x_1, \dots, x_n$  and  $y_1, \dots, y_n$ , with variables  $t_i$  interspersed arbitrarily.

LEMMA 2.30. Any specialization  $\varphi : C\{x; y; t\} \rightarrow A$  (together with its accompanying specialization  $\widehat{\varphi} : C\widehat{\{x; y; t\}} \rightarrow A$ ) gives rise naturally to a map

$$\Phi : A[\xi_{n,A}] \widehat{DCAP}_n \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$$

given by

$$\sum_i a_i \xi_{k, \varphi(h_{j_i})} \hat{f}_i \mapsto \sum_i a_i \widehat{\varphi}(\xi_{k, h_{j_i}} \hat{f}_i) = \sum_i a_i \widehat{\varphi}(\delta_{k, h_{j_i}}^{(x,n)} f_i)$$

where  $\hat{f}_i \in \widehat{DCAP}_n$ .

PROOF. We need to show that this is well-defined, which follows from the functoriality property given in Lemma 2.5. Namely, if  $\varphi(h_{j_i}) = \varphi(h'_{j_i})$ , then  $\widehat{\varphi}(h_{j_i}) = \widehat{\varphi}(h'_{j_i})$  and

$$\sum_i a_i \varphi(\delta_{k, h_{j_i}}^{(x,n)} \hat{f}_i) = \sum_i a_i \varphi(\delta_{k, h'_{j_i}}^{(x,n)} f_i) = \sum_i a_i \varphi(\delta_{k, h'_{j_i}}^{(x,n)} f_i) = \sum_i a_i \varphi(\delta_{k, h'_{j_i}}^{(x,n)} \hat{f}_i).$$

□

The objective of this lemma was to enable us to replace  $A[\xi_{n,A}]$  by  $A$  in our considerations.  $\ker \Phi$  contains all  $\delta_{k,h}^{(n)} \hat{f} - \xi_{k,h} \hat{f}$  (cf. Remark 2.11) as well as  $(\hat{h}^n - \sum_{k=0}^{n-1} \hat{h}^k \xi_{k,h}) \hat{f}$ , where  $h$  ranges over all words and  $\hat{f} \in \widehat{DCAP}_n$ , so we see that the Zubrilin integrality relations are passed on.

LEMMA 2.31. If  $t$  is an infinite set of noncommuting indeterminates whose cardinality  $\aleph$  is at least that of  $A$ , then for any given evaluation  $w$  in  $\mathcal{DCAP}_n(A *_C C\{x; y; t\})$ , there is a map

$$\varphi_w : C\{x; y; t\} \rightarrow A *_C C\{x; y; t\},$$

sending  $\mathcal{DCAP}_n$  to  $\mathcal{DCAP}_n(A *_C C\{x; y; t\})$ , such that  $w$  is in the image of  $\varphi_w$ .

PROOF. Note that  $A *_C C\{x; y; t\}$  has cardinality  $\aleph$ . Setting aside indeterminates

$$\{t_g : g \in A *_C C\{x; y; t\}\},$$

we still have  $\aleph$  indeterminates left over, to map onto our original set  $t$  of  $\aleph$  indeterminates. But any evaluation  $w$  of  $\mathcal{DCAP}_n$  on  $A *_C C\{x; y; t\}$  can be written as

$$w = g \text{Cap}_n(x_1, \dots, x_n; g_1, \dots, g_n) g' \text{Cap}_n(y_1, \dots, y_n; h_1, \dots, h_n) g'', \quad (19)$$

for suitable  $g, g', g'', g_i, h_j \in A *_C C\{x; y; t\}$ . Defining  $\varphi_w$  by sending  $x_i \mapsto x_i$ ,  $y_j \mapsto y_j$ , and sending the appropriate  $t_g \mapsto g$ ,  $t_{g'} \mapsto g'$ ,  $t_{g''} \mapsto g''$ ,  $t_{g_i} \mapsto g_i$ , and  $t_{h_j} \mapsto h_j$ , we have an element in  $\varphi_w^{-1}(w)$ .  $\square$

Clearly  $\varphi_w(\mathcal{CAP}_{n+1}) \subseteq \mathcal{CAP}_{n+1}(A *_C C\{x; y; t\})$ , so, when  $\text{Cap}_{n+1} \in \mathcal{I}$ ,  $\varphi_w$  induces a map

$$\hat{\varphi}_w : C\{\widehat{x; y; t}\} \rightarrow (A *_C C\{x; y; t\})_{\mathcal{I}},$$

which sends  $\widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ .

Although we do not see that  $\mathcal{CAP}_{n+1}$  need be mapped onto  $\mathcal{CAP}_{n+1}(A *_C C\{x; y; t\})$ , Lemma 2.31 says that it is “pointwise” onto, according to any chosen point, and this is enough for our purposes.

THEOREM 2.32.  $\text{Obst}_n(A) \cdot (\mathcal{CAP}_n(A))^2 = 0$ , for any PI-algebra  $A = C\{a_1, \dots, a_\ell\}$  satisfying the Capelli identity  $\text{Cap}_{n+1}$ .

PROOF.

We form the free algebra  $C\{x; y; t\}$  by taking a separate indeterminate  $t_j$  for each element of  $A[\xi_{n,A}] \widehat{\mathcal{DCAP}_n}$ . We work with  $A[\xi_{n,A}] \widehat{\mathcal{DCAP}_n}$ , viewed in the relatively free product  $\tilde{A} := (A[\xi_{n,A}] *_C C\{x; y; t\})_{\mathcal{I}}$ , where  $\mathcal{I} = \mathcal{CAP}_{n+1}(A[\xi_{n,A}] *_C C\{x; y; t\})$ . In view of Lemma 2.30, the relation

$$I_{n, C\{\widehat{x; y; t}\}} \cdot \widehat{\mathcal{M}} \equiv 0 \pmod{\mathcal{CAP}_{n+1}(A[\xi_{n,A}] *_C C\{x; y; t\})}$$

restricts to the relation  $I_{n, C\{\widehat{x; y; t}\}} \widehat{\mathcal{DCAP}_n} \equiv 0 \pmod{\mathcal{CAP}_{n+1}(A[\xi_{n,A}] *_C C\{x; y; t\})}$ . But the various specializations of Lemma 2.31 cover all of  $\mathcal{DCAP}_n(A)$ . Hence Lemma 2.5 applied to Proposition 2.17 and Lemma 2.30 implies  $I_{n,A} \mathcal{DCAP}_n(A) = 0$ , and thus

$$\text{Obst}_n(A) \cdot (\mathcal{CAP}_n(A))^2 \subseteq I_{n,A} \mathcal{DCAP}_n(A) = 0.$$

$\square$

## 2.7. The proof of Proposition 2.10

Now we present the proof of the crucial Proposition 2.10, stating that for a doubly alternating polynomial  $f = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t})$ ,

$$\delta_{k,h}^{(x,n)}(f) \equiv \delta_{k,h}^{(y,n)}(f) \pmod{\mathcal{CAP}_{n+1}}.$$

### 2.7.1. The connection to the group algebra of $S_n$

We begin with the basic correspondence between multilinear identities and elements of the group algebra over  $S_n$ .

$V_n = V_n(x_1, \dots, x_n)$  denotes the  $C$ -module of multilinear polynomials in  $x_1, \dots, x_n$ , i.e.,

$$V_n = \text{span}_C \{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

DEFINITION 2.33. We identify  $V_n$  with the group algebra  $C[S_n]$ , by identifying a permutation  $\sigma \in S_n$  with its corresponding monomial (in  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ):

$$\sigma \leftrightarrow M_\sigma(x_1, \dots, x_n) = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Any polynomial  $\sum \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$  corresponds to an element  $\sum \alpha_\sigma \sigma \in C[S_n]$ , and conversely,  $\sum \alpha_\sigma \sigma$  corresponds to the polynomial

$$\left( \sum \alpha_\sigma \sigma \right) x_1 \cdots x_n = \sum \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Here is a combinatorial identity of interest of its own.

Consider two disjoint sets  $X \cap Y = \emptyset$ , each of cardinality  $n$ , and the symmetric group  $S_{2n} = S_{X \cup Y}$  acting on  $X \cup Y$ . For each subset  $Z \subseteq X$  we define an element  $P(Z) \in C[S_{2n}]$  as follows:

$$P(Z) = \sum_{\sigma(Z) \subseteq Y} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma.$$

In particular

$$P(\emptyset) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma.$$

PROPOSITION 2.34.

$$\sum_{Z \subseteq X} (-1)^{|Z|} P(Z) = \sum_{\sigma(X)=X} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma. \quad (20)$$

PROOF. Let  $\sigma \in S_{2n}$  and let  $a_\sigma$  (resp.  $b_\sigma$ ) be the coefficient of  $\sigma$  on the l.h.s. (resp. r.h.s.) of (20). We show that  $a_\sigma = b_\sigma$ .

Let  $Z(\sigma) = \sigma^{-1}(Y)$  be the largest subset  $Z \subseteq X$  such that  $\sigma(Z) \subseteq Y$ . Note that  $\sigma(X) = X$  if and only if  $Z(\sigma) = \emptyset$ . Therefore

$$b_\sigma = \text{sgn}(\sigma) \text{ if } Z(\sigma) = \emptyset \quad \text{and} \quad b_\sigma = 0 \text{ if } Z(\sigma) \neq \emptyset, \quad (21)$$

since  $P(\emptyset) = \sum \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma$ . We claim that

$$a_\sigma = \text{sgn}(\sigma) \cdot \sum_{Z \subseteq Z(\sigma)} (-1)^{|Z|}.$$

To show this, recall that

$$l.h.s. = \sum_{Z \subseteq X} (-1)^{|Z|} \sum_{\sigma(Z) \subseteq Y} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma.$$

In  $P(Z)$  the coefficient of  $\sigma$  is  $\text{sgn}(\sigma)$  if  $Z \subseteq Z(\sigma)$  (since then  $\sigma(Z) \subseteq Y$ ), and is zero if  $Z \not\subseteq Z(\sigma)$  (since if  $\sigma(Z) \subseteq Y$  then  $\sigma(Z \cup Z(\sigma)) \subseteq Y$ , contradicting the maximality of  $Z(\sigma)$ ). It follows that as claimed,

$$a_\sigma = \text{sgn}(\sigma) \cdot \sum_{Z \subseteq Z(\sigma)} (-1)^{|Z|}.$$

It is well known that  $\sum_{Z \subseteq Z(\sigma)} (-1)^{|Z|} = 1$  when  $Z(\sigma) = \emptyset$  and  $= 0$  otherwise. Therefore

$$a_\sigma = \text{sgn}(\sigma) \quad \text{if} \quad Z(\sigma) = \emptyset \quad \text{and} \quad a_\sigma = 0 \quad \text{if} \quad Z(\sigma) \neq \emptyset. \quad (22)$$

The proof now follows by comparing (21) with (22).

□

LEMMA 2.35. Let  $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t})$  be doubly alternating. Then

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t}) \equiv f(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n, \vec{t}) \quad \text{modulo } \mathcal{CAP}_{n+1}.$$

PROOF. Let  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  and  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ . Then  $|X| = |Y| = n$  and  $X \cap Y = \emptyset$ , and we identify  $S_{2n} = S_{X \cup Y}$ . Let  $M = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \subseteq X$ , with  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , and  $N = \{y_{j_1}, \dots, y_{j_k}\} \subseteq Y$ , with  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ . Thus,  $|M| = |N| = k \leq n$ .  $M$  will play the role of  $Z$  in Proposition 2.34. We consider permutations  $\sigma \in S_{2n}$  with  $\sigma(M) = N$ . Define the permutation

$$\tau_{MN} = (x_{i_1}, y_{j_1}) \cdots (x_{i_k}, y_{j_k}).$$

Since  $M \cap N = \emptyset$ ,  $\tau_{MN}$  has order 2 in  $S_{2n}$ , and satisfies  $\text{sgn}(\tau_{MN}) = (-1)^k$ . If  $M = X$  then  $N = Y$  and  $\text{sgn}(\tau_{MN}) = \text{sgn}(\tau_{XY}) = (-1)^n$ . Moreover  $\tau_{MN}(M) = N$  and  $\tau_{MN}(N) = M$ .

Next, we define

$$T_{MN} = \sum_{\pi(M)=N} \text{sgn}(\pi) \cdot \pi \in C[S_n].$$

Let  $\rho = \tau_{MN} \cdot \pi$ , so that  $\rho(M) = M$ . Then  $\pi = \tau_{MN} \cdot \rho$  and

$$T_{MN} = \text{sgn}(\tau_{MN}) \cdot \tau_{MN} \cdot \left( \sum_{\rho(M)=M} \text{sgn}(\rho) \cdot \rho \right).$$

But by Proposition 2.34,

$$\sum_{M \subseteq X} (-1)^{|M|} P(M) = \sum_{\sigma(X)=X} \text{sgn} \sigma \cdot \sigma. \quad (23)$$

If  $M \subsetneq X$ , then  $P(M)$  is alternating on  $2n - |M| \geq n + 1$  indeterminates, and hence is 0 modulo  $\mathcal{CAP}_{n+1}$ . Thus, modulo  $\mathcal{CAP}_{n+1}$ , the left hand side of (23) equals the unique summand with  $M = X$ , which is

$$\begin{aligned} (-1)^n \sum_{\sigma(X)=X} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma &= (-1)^n \text{sgn}(\tau_{XY}) \cdot \tau_{XY} \cdot \left( \sum_{\sigma(Y)=Y} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma \right) = \\ &= \tau_{XY} \cdot \left( \sum_{\sigma(Y)=Y} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma \right). \end{aligned}$$

Since  $\sigma(X) = X$  if and only if  $\sigma(Y) = Y$ , it follows that

$$\sum_{\sigma(Y)=Y} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma = \sum_{\sigma(X)=X} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma \equiv \tau_{XY} \cdot \left( \sum_{\sigma(Y)=Y} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma \right), \quad \text{modulo } \mathcal{CAP}_{n+1}.$$

Now we identify elements in  $C[S_{2n}]$  with polynomials multilinear in  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ . Taking a monomial  $h(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n; \vec{t})$  multilinear in  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ , we define

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n; \vec{t}) := \left( \sum_{\sigma(Y)=Y} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma \right) h.$$

Then

$$\tau_{XY} \cdot \left( \sum_{\sigma(Y)=Y} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma \right) h = f(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n; \vec{t}).$$

Again, since  $\sigma(X) = X$  if and only if  $\sigma(Y) = Y$ , it follows that  $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n; \vec{t})$  is doubly alternating, and we have proved that

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n; \vec{t}) \equiv f(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n; \vec{t}) \quad \text{modulo } \mathcal{CAP}_{n+1},$$

as desired.

□

### 2.7.2. Proof of Proposition 2.10

We may assume that  $h$  is a new indeterminate  $z$ . Recall that

$$\begin{aligned} \delta_{k,z}^{(x,n)}(f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t})) &= \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t})|_{x_{i_u} \mapsto z x_{i_u}}; \quad u = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \delta_{k,z}^{(y,n)}(f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t})) &= \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t})|_{y_{i_u} \mapsto z y_{i_u}}; \quad u = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Let  $z' = 1 + \varepsilon z$ ,  $\varepsilon$  being a central indeterminate. Then clearly

$$f(z'x_1, \dots, z'x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t}) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \cdot \delta_{k,z}^{(x,n)}(f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t})) \quad (24)$$

and

$$f(x_1, \dots, x_n, z'y_1, \dots, z'y_n, \vec{t}) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \cdot \delta_{k,z}^{(y,n)}(f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t})). \quad (25)$$

By Equations (24) and (25) it is enough to show that

$$f(z'x_1, \dots, z'x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t}) \equiv f(x_1, \dots, x_n, z'y_1, \dots, z'y_n, \vec{t}) \quad \text{modulo } \mathcal{CAP}_{n+1}.$$

Let

$$g_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t}) = f(z'x_1, \dots, z'x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t})$$

and

$$g_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t}) = f(x_1, \dots, x_n, z'y_1, \dots, z'y_n, \vec{t}).$$

We have to show that

$$g_1 \equiv g_2 \quad \text{modulo } \mathcal{CAP}_{n+1}.$$

Denote  $x'_i = z'x_i$ ,  $y'_i = z'y_i$ ;  $i = 1, \dots, n$ . Then

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t}) &= f(x'_1, \dots, x'_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t}) \equiv \\ &\equiv f(y_1, \dots, y_n, x'_1, \dots, x'_n, \vec{t}) = \\ &= g_2(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n, \vec{t}) \equiv \\ &\equiv g_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \vec{t}) \quad \text{modulo } \mathcal{CAP}_{n+1}. \end{aligned}$$

The congruences follow from Lemma 2.35 since both  $f$  and  $g_2$  are doubly alternating.

### 3. Proof of Kemer's "Capelli Theorem,"

To complete the proof of Theorem 1.1, it remains to present an exposition of Kemer's "Capelli Theorem," that any affine PI algebra over a field  $F$  satisfies a Capelli identity  $\text{Cap}_n$  for large enough  $n$ . This is done by abstracting a key property of  $\text{Cap}_n$ , called **sparseness**.

**DEFINITION 3.1.** A multilinear polynomial  $g = \sum \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(d)}$  is a **sparse identity** of  $A$  if, for any monomial  $f(x_1, \dots, x_d; \vec{t})$  we have

$$\sum \alpha_\sigma f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)}; \vec{t}) \in \text{id}(A).$$

See [7, §2.5.2] for more detail. The major example of a sparse identity is the Capelli identity. One proves rather quickly that any sparse identity implies a Capelli identity, so it remains to show that any affine PI algebra over a field satisfies a sparse identity. There are two possible approaches, both using the classical representation theory of  $S_n$ . One proof relies on "the branching theorem," which requires characteristic 0, and the other relies more on the structure of the group algebra  $F[S_n]$ , also with the technique of "pumping" polynomial identities, and works in arbitrary characteristic.

#### 3.1. Affine algebras satisfying a sparse identity

Sparse identities work well with the left lexicographic order  $<$ . If  $b_1 < \dots < b_m$  and  $1 \neq \sigma \in S_m$ , then  $(b_1, \dots, b_m) < (b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(m)})$ . Any sparse identity over a field yields a powerful **sparse reduction procedure**. Namely, we may assume  $\alpha_{(1)} = 1$ ; given  $a_1, \dots, a_d$  in  $A$ , we can replace any term  $f(a_1, \dots, a_d)$  by

$$- \sum_{\sigma \neq 1} \alpha_\sigma f(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(d)}, x_{d+1}, \dots, x_n).$$

(The analogous assertion also holds for  $c_d$ .)

**LEMMA 3.2.** Let  $A = C\{a_1, a_2, \dots\}$  be a PI algebra, satisfying a sparse multilinear identity  $p = \sum_{\sigma \in S_d} \beta_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(d)}$  of degree  $d$ , with  $d \leq n$ , and let  $M(x_1, \dots, x_n; \vec{y})$  be a monomial multilinear in  $x_1, \dots, x_n$  and perhaps involving extra indeterminates  $\vec{y}$ . We consider  $\Delta = M(v_1, \dots, v_n; \vec{y})$ , where  $v_1, \dots, v_n$  are words in the generators  $a_1, a_2, \dots$  and  $\vec{y}$  is an arbitrary specialization of  $\vec{y}$  in  $A$ . Assume that  $k$  of the  $v_i$  satisfy  $|v_i| \geq d$  (length as words in  $a_1, a_2, \dots$ ). If  $\ell \geq d$ , then  $\Delta$  is a linear combination of monomials  $\Delta' = M(v'_1, \dots, v'_n; \vec{y})$  where at most  $\ell - 1$  of the words  $v'_i$  have length  $\geq d$ .

This clearly implies that  $A$  is spanned by monomials  $\Delta' = M(v'_1, v'_2, \dots)$ , with at most  $d - 1$  of the  $v'_i$  having length  $\geq d$ .

PROOF.

CLAIM: If  $|v_{i_1}|, \dots, |v_{i_d}| \geq d$ , then  $\Delta = M(v_1, \dots, v_n; \bar{y})$  is a linear combination of terms  $\Delta' = M(v'_1, \dots, v'_n; \bar{y})$  satisfying

$$(|v'_1|, \dots, |v'_n|) < (|v_1|, \dots, |v_n|).$$

The above Claim implies the existence of descending sequences of monomials, under the left lexicographic order. Such a descending sequence must stop. When it stops we have a corresponding monomial having strictly fewer words  $v'_i$  for which  $|v'_i| \geq d$ . Therefore proving the above Claim will prove the lemma. We now prove the Claim.

We rewrite  $\Delta = M(v_{i_1}, \dots, v_{i_d}; \bar{y})$ , where  $i_1 < i_2 < \dots < i_d$ ; then we may assume that  $i_1 = 1, \dots, i_d = d$ . We write  $v_i = w_i u_i$  where  $|u_i| = d - i$ ,  $1 \leq i \leq d$ . The sparse identity  $p$  implies that  $\Delta$  is a linear combination of terms  $\Delta_\sigma = M(w_1 u_{\sigma(1)}, \dots, w_d u_{\sigma(d)}; \bar{y}) = M(v'_1, \dots, v'_d; \bar{y})$  where  $1 \neq \sigma \in S_d$ . ( $\Delta$  itself corresponds to  $\sigma = 1$ .) To see this, we rewrite  $\Delta = M(w_1 u_1, \dots, w_d u_d; \bar{y})$  as  $N(u_1, \dots, u_d; \bar{W})$ . The sparse identity  $p$  implies that  $N(u_1, \dots, u_d; \bar{W})$  is a linear combination of elements of the form

$$N(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(d)}; \bar{W}) = M(w_1 u_{\sigma(1)}, \dots, w_d u_{\sigma(d)}; \bar{y}), \quad 1 \neq \sigma \in S_d.$$

Denote  $w_i u_{\sigma(i)} = v'_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ . But then  $(|v'_1|, \dots, |v'_d|) < (|v_1|, \dots, |v_d|)$  for such  $\sigma \neq 1$ . This proves the Claim, and completes the proof of the lemma.  $\square$

Although we did not apply Shirshov's Height Theorem, the main argument here is similar. Note also that Lemma 3.2 applies to any PI algebra, not necessarily affine. In the next theorem, due to Kemer, we do assume that  $A$  is affine.

**THEOREM 3.3.** Let  $A = C\{a_1, \dots, a_r\}$  be an affine PI algebra over a commutative ring  $C$ , satisfying a sparse identity  $p$  of degree  $d$ , and let  $n \geq r^d + d$ . Then  $A$  satisfies the Capelli identity  $\text{Cap}_n[x; y]$ .

PROOF. We may assume that  $r \geq 2$ , since otherwise  $A$  is commutative. Consider

$$\text{Cap}_n(v_1, \dots, v_n; w_1, \dots, w_n)$$

where  $v_i, w_i \in A$ . By Lemma 3.2 we may assume that at most  $d - 1$  of the  $v_i$  have length  $\geq d$  (as words in the generators  $a_1, \dots, a_r$ ). Hence at least  $n - (d - 1)$  of the  $v_i$  have length  $\leq d - 1$ . The number of distinct words of length  $q$  is  $\leq r^q$ . Hence the number of words of length  $\leq d - 1$  is

$$\leq 1 + r + r^2 + \dots + r^{d-1} = \frac{r^d - 1}{r - 1} < r^d \quad (\text{since } r \geq 2).$$

But we have at least  $n - (d - 1)$  such words appearing in  $v_1, \dots, v_n$ , and  $n - (d - 1) > r^d$  (since by assumption  $n \geq r^d + d$ ). It follows that there must be repetitions among  $v_1, \dots, v_n$ , so  $\text{Cap}_n(v_1, \dots, v_n; w_1, \dots, w_n) = 0$ .  $\square$

### 3.2. Actions of the group algebra

It remains to prove the existence of sparse identities for affine PI-algebras. For this, we turn to the representation theory of  $S_n$ . After a brief review of actions of  $S_n$  on Young diagrams, we treat

the characteristic 0 case, cf. Kemer [15]. The characteristic  $p > 0$  proof, which requires some results about modular representations but bypassing branching, is done in §3.2 and §4.

Given  $\sigma, \pi \in S_n$ , by convention we take  $\sigma\pi(i) = \pi(\sigma(i))$ . The product  $\sigma\pi$  corresponding (by Definition 2.33) to the monomial

$$M_{\sigma\pi} = x_{\sigma\pi(1)} \cdots x_{\sigma\pi(n)}$$

can be interpreted in two ways, according to **left** and **right** actions of  $S_n$  on  $V_n$ , described respectively as follows:

Let  $\sigma, \pi \in S_n$ . Let  $y_i = x_{\sigma(i)}$ . Then

- (i)  $\sigma M_\pi(x_1, \dots, x_n) := M_{\sigma\pi} = M_\pi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$  and
- (ii)  $M_\sigma(x_1, \dots, x_n)\pi := (y_1 \cdots y_n)\pi = M_{\sigma\pi} = y_{\pi(1)} \cdots y_{\pi(n)}.$

Thus, the effect of the right action of  $\pi$  on a monomial is to permute the places of the indeterminates according to  $\pi$ .

Extending by linearity, we obtain for any  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in V_n$  that

- (i)  $\sigma p(x_1, \dots, x_n) = p(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)});$
- (ii)  $p(x_1, \dots, x_n)\pi = q(y_1, \dots, y_n)$ , where  $q(y_1, \dots, y_n)$  is obtained from  $p(x_1, \dots, x_n)$  by place-permuting all the monomials of  $p$  according to the permutation  $\pi$ .

For any finite group  $G$  and field  $F$ , there is a well-known correspondence between the  $F[G]$ -modules and the representations of  $G$ . The simple modules correspond to the irreducible representations.

REMARK 3.4. If  $p \in \text{Id}(A)$ , then  $\sigma p \in \text{Id}(A)$  since the left action is just a change of variables.

Hence, for any PI-algebra  $A$ , the spaces

$$\text{Id}(A) \cap V_n \subseteq V_n$$

are in fact left ideals of  $F[S_n]$  (thereby affording certain  $S_n$  representations), but need not be two-sided ideals. However, we prove below the existence of a nonzero two-sided ideal in  $\text{Id}(A) \cap V_n$ , a fact which is of crucial importance in what follows.

REMARK 3.5. Let  $\lambda$  be a partition. As explained in [7, p. 147], any tableau  $T$  of  $\lambda$  gives rise to an element

$$a_T = \sum_{q \in \mathcal{C}_{T_\lambda}, p \in \mathcal{R}_{T_\lambda}} \text{sgn}(q)qp \in C[S_n],$$

where  $\mathcal{C}_{T_\lambda}$  (resp.  $\mathcal{R}_{T_\lambda}$ ) denotes the set of column (resp. row) permutations of the tableau  $T_\lambda$ .  $a_T^2 = \alpha_T a_T$  for some  $\alpha_T$  in the base field  $F$ . When  $\alpha_T \neq 0$ , which by [29, Lemma 19.59(i)] is always the case when  $\text{char}(F)$  does not divide  $n$ , in particular, when  $\text{char}(F) = 0$ , we will call the idempotent  $e_T := \alpha_T^{-1} a_T$  the **Young symmetrizer** of the tableau  $T$ .

Furthermore, by [29, Lemma 19.59(i)], if  $a_T \neq 0$  and then  $F[S_n]a_T = Fa_T$ , implying  $F[S_n]a_T$  (if nonzero) is a minimal left ideal, which we call  $J_\lambda$ . Thus, if  $J_\lambda$  contains an element corresponding to a nontrivial PI of  $A$ ,  $a_T$  itself must correspond to a PI of  $A$ .

$s^\lambda := \dim J_\lambda$  is given by the “hook” formula, see for example [30] or [14], where we recall that each “hook” number  $h_x$  for a box  $x$  is the number of boxes in “hook” formed by taking all boxes to the right of  $x$  and beneath  $x$ . (In the literature, one writes  $f^\lambda$  instead of  $s^\lambda$ , but here we have used  $f$  throughout for polynomials.)

LEMMA 3.6. Suppose  $L$  is a minimal left ideal of a ring  $R$ . Then the minimal two-sided ideal of  $R$  containing  $L$  is a sum of minimal left ideals of  $R$  isomorphic to  $L$  as modules.

We let  $I_\lambda$  denote the minimal two-sided ideal of  $F[S_n]$  containing  $J_\lambda$ .

We define the **codimension**  $c_n(A) = \dim \left( \frac{V_n}{\text{Id}(A) \cap V_n} \right)$ . The characteristic 0 version of the next result is in [24].

LEMMA 3.7. Let  $A$  be an  $F$ -algebra, and let  $\lambda$  be a partition of  $n$ . If  $\dim J_\lambda > c_n(A)$ , then  $I_\lambda \subseteq \text{Id}(A) \cap V_n$ .

PROOF. By Lemma 3.6,  $J_\lambda$  is a sum of minimal left ideals, with each such minimal left ideal  $J$  isomorphic to  $J_\lambda$ . Thus,  $\dim J = \dim J_\lambda > c_n(A)$ . Since  $J$  is minimal, either  $J \subseteq \text{Id}(A) \cap V_n$  or  $J \cap (\text{Id}(A) \cap V_n) = 0$ . If  $J \cap (\text{Id}(A) \cap V_n) = 0$  then it follows that

$$c_n(A) = \dim V_n / (\text{Id}(A) \cap V_n) \geq \dim J > c_n(A),$$

a contradiction. Therefore each  $J \subseteq \text{Id}(A) \cap V_n$ .  $I_\lambda \subseteq \text{Id}(A) \cap V_n$  since  $I_\lambda$  equals the sum of these minimal left ideals.  $\square$

### 3.3. The characteristic 0 case [15]

The characteristic 0 case is treated separately here, since it can be handled via the classical representation theory of the symmetric group. By Maschke's Theorem, the group algebra  $FS_n$  now is a finite direct product of matrix algebras over  $F$ . We have the decomposition  $FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda$ .

Thus, Lemma 3.7 yields at once:

LEMMA 3.8. [24] Let  $\text{char}(F) = 0$ , let  $A$  be an  $F$  algebra, and let  $\lambda$  be a partition of  $n$ . If  $s^\lambda > c_n(A)$ , then  $I_\lambda \subseteq \text{Id}(A) \cap V_n$ .

(Here  $I_\lambda$  is the sum of those  $F[S_n]e_T$  for which  $T$  is a standard tableau with partition  $\lambda$ . These  $I_\lambda$  are minimal two sided ideals, each a sum of  $s^\lambda$  minimal left ideals isomorphic to  $J_\lambda$ .)

EXAMPLE 3. Consider the “rectangle” of  $u$  rows and  $v$  columns. By [20, page 11], the hook numbers of the partition  $\mu = (u^v)$  satisfy

$$\sum_{x \in \mu} h_x = uv(u+v)/2 = n \frac{u+v}{2}.$$

Let us review the proof, for further reference. For any box  $x$  in the  $(1, j)$  position, the hook has length  $u + v - j$ , so the sum of all hook numbers in the first row is

$$\sum_{j=1}^v (u + v - j) = uv + \frac{v(v-1)}{2} = v \left( u + \frac{v-1}{2} \right).$$

Summing this over all rows yields

$$v \frac{u(u+1)}{2} + uv \frac{v-1}{2} = uv \left( \frac{u+1}{2} + \frac{v-1}{2} \right) = uv \frac{u+v}{2},$$

as desired.

#### 3.3.1. Strong identities

DEFINITION 3.9. Let  $A$  be a PI algebra. The multilinear polynomial  $g \in V_n$  is a *strong* identity of  $A$  if for every  $m \geq n$  we have  $FS_m \cdot g \cdot FS_m \subseteq \text{Id}(A)$ .

Note that every strong identity is sparse. To obtain strong identities, we utilize the following construction, due to Amitsur.

The natural embedding  $S_n \subset S_{n+1}$  (via  $\sigma(n+1) = n+1$  for  $\sigma \in S_n$ ) induces the embedding  $V_n \subset V_{n+1}$ :  $f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(x_1, \dots, x_n) \cdot x_{n+1}$ . More generally, for any  $n < m$  we have the inclusion  $V_n \subset V_m$  via  $f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(x_1, \dots, x_n) \cdot x_{n+1} \cdots x_m$ .

For  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \in V_n$ , we define

$$\begin{aligned} f^*(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n-1}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{n+1} x_{\sigma(2)} x_{n+2} \cdots x_{\sigma(n-1)} x_{2n-1} x_{\sigma(n)} \\ &= (f(x_1, \dots, x_n) x_{n+1} \cdots x_{2n-1}) \eta, \end{aligned} \quad (26)$$

where  $\eta \in S_{2n-1}$  is the permutation

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n-1 \\ 1 & n+1 & 2 & n+2 & \cdots & n \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Let  $L \subseteq \{x_{n+1}, \dots, x_{2n-1}\}$  and denote by  $f_L^*$  the polynomial obtained from  $f^*$  by substituting  $x_j \rightarrow 1$  for all  $x_j \in L$ . Rename the indeterminates in  $\{x_{n+1}, \dots, x_{2n-1}\} \setminus L$  as  $\{x_{n+1}, \dots, x_{n+q}\}$  (where  $q = n-1-|L|$ ) and denote the resulting polynomial as  $f_L^*$ . Then similarly to (26), there exists a permutation  $\rho \in S_{n+q}$  such that  $f_L^* = (f x_{n+1} \cdots x_{n+q}) \rho$ .

Note that if  $1 \in A$  and  $f^* \in \text{Id}(A)$ , then also  $f_L^* \in \text{Id}(A)$  for any such  $L$ , and in particular  $f \in \text{Id}(A)$ . The converse is not true: it is possible that  $f \in \text{Id}(A)$  but  $f^* \notin \text{Id}(A)$ .

LEMMA 3.10. Let  $A$  be a PI algebra, let  $I \subseteq V_n$  be a two-sided ideal in  $V_n$ , and assume for any  $f \in I$  that  $f^* \in \text{Id}(A)$  (and thus  $f \in \text{Id}(A)$ ). Then for any  $m \geq n$ ,

$$(FS_m)I(FS_m) \subseteq \text{Id}(A).$$

PROOF. Since  $(FS_m)I \subseteq \text{Id}(A)$ , it suffices to prove:

CLAIM: If  $f \in I$  and  $\pi \in S_m$ , then  $f_L^* \pi = (f(x_1, \dots, x_n) x_{n+1} \cdots x_m) \pi \in \text{Id}(A)$ .

If  $f = \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma(x_1 \cdots x_n \cdots x_m)$ , then  $f_L^* \pi = \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma(\pi(x_1 \cdots x_n \cdots x_m))$ .

Consider the positions of  $x_1, \dots, x_n$  in the monomial  $\pi(x_1 \cdots x_m)$ : There exists  $\tau \in S_n$  such that

$$\pi(x_1 \cdots x_n \cdots x_m) = g_0 x_{\tau(1)} g_1 x_{\tau(2)} g_2 \cdots g_{n-1} x_{\tau(n)} g_n = \tau(g_0 x_1 g_1 x_2 g_2 \cdots g_{n-1} x_n g_n),$$

where each  $g_j$  is  $= 1$  or is a monomial in some of the indeterminates  $x_{n+1}, \dots, x_m$ . It follows that  $f_L^* \pi = (f\tau)(g_0 x_1 g_1 x_2 g_2 \cdots g_{n-1} x_n g_n)$ . Since  $f \in V_n$  and  $\tau \in S_n$ ,  $f\tau$  only permutes the indeterminates  $x_1, \dots, x_n$ , and hence (see (26))

$$f_L^* \pi = (f\tau)(g_0 x_1 g_1 x_2 g_2 \cdots g_{n-1} x_n g_n) = g_0 ((f\tau)^*[x_1, \dots, x_n; g_1, \dots, g_{n-1}]) g_n.$$

Since  $I$  is two-sided,  $f\tau \in I$ , hence by assumption  $(f\tau)^* \in \text{Id}(A)$ , which by the last equality implies that  $f\pi \in \text{Id}(A)$ .  $\square$

### 3.3.2. Existence of nonzero two-sided ideals $I_\lambda \subseteq FS_n$ of identities

Let  $c_n(A) \leq \alpha^n$  for all  $n$ . The next lemma yields rectangles  $\mu = (u^v) \vdash n$  such that  $\alpha^n < s^\mu$ .

LEMMA 3.11. Let  $0 < u, v$  be integers and let  $\mu$  be the  $u \times v$  rectangle  $\mu = (u^v) \vdash u \cdot v$ . Let  $n = uv$ . Then

$$\left(\frac{n}{u+v}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^n < s^\mu \quad (\text{where } e = 2.718281828\dots).$$

In particular, if  $\alpha \leq \frac{n}{u+v} \cdot \frac{2}{e}$  then  $\alpha^n \leq s^\mu$ .

PROOF.

Since the geometric mean is bounded by the arithmetic mean,

$$\left(\prod_{x \in \mu} h_x\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{x \in \mu} h_x = \frac{u+v}{2},$$

in view of Example 3, and hence

$$\left(\frac{2}{u+v}\right)^n \leq \frac{1}{\prod_{x \in \mu} h_x}.$$

Together with the classical inequality  $(n/e)^n < n!$ , this implies that

$$\left(\frac{uv}{u+v}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{u+v}\right)^n < \frac{n!}{\prod_{x \in \mu} h_x} = s^\mu.$$

□

REMARK 3.12. To apply this, we need Regev's estimate [23] of codimensions,

$$c_m(A) \leq (d-1)^{2m},$$

as explained in [7, Theorem 5.38].

PROPOSITION 3.13. [4] Let  $A$  be a PI algebra satisfying an identity of degree  $d$ . Choose natural numbers  $u$  and  $v$  such that

$$\frac{uv}{u+v} \cdot \frac{2}{e} \geq (d-1)^4. \quad \text{For example, choose } u = v \geq e \cdot (d-1)^4.$$

Let  $n = uv$  and let  $\mu = (u^v)$  be the  $u \times v$  rectangle. Let  $n \leq m \leq 2n$  and let  $\lambda \vdash m$  be any partition of  $m$  which contains  $\mu$ :  $(u^v) \subseteq \lambda$ . Then the elements of the corresponding two-sided ideal  $I_\lambda \subseteq FS_m$  are identities of  $A$ :  $I_\lambda \subseteq \text{Id}(A) \cap V_m$ .

PROOF. Since  $m \leq 2n$ ,  $(d-1)^{2m} \leq (d-1)^{4n}$ , and by assumption  $(d-1)^4 \leq \frac{n}{u+v} \cdot \frac{2}{e}$ . By Lemma 3.11,  $\left(\frac{n}{u+v} \cdot \frac{2}{e}\right)^n < s^\mu$  and since  $\mu \subseteq \lambda$ , we know that  $s^\mu \leq s^\lambda$ . Thus, by Remark 3.12,

$$c_m(A) \leq (d-1)^{2m} \leq (d-1)^{4n} \leq \left(\frac{uv}{u+v} \cdot \frac{2}{e}\right)^n < s^\mu \leq s^\lambda,$$

and the assertion now follows from Lemma 3.8. □

COROLLARY 3.14. Hypotheses as in Proposition 3.13, for  $n \leq m \leq 2n$ ,

$$\bigoplus_{\substack{\lambda \vdash m \\ \mu \subseteq \lambda}} I_\lambda \subseteq \text{Id}(A).$$

Consequently, if  $f \in I_\mu$  then  $f^* \in \text{Id}(A) \cap V_{2n-1}$  (see (26)). Also, for any subset  $L \subseteq \{n+1, \dots, 2n-1\}$ ,  $f_L^* \in \text{Id}(A)$ , and in particular  $f \in \text{Id}(A)$ .

PROOF. By “branching,” the two-sided ideal generated in  $V_m$  by  $I_\mu$  is

$$V_m I_\mu V_m = (FS_m) I_\mu (FS_m) = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash m \\ \mu \subseteq \lambda}} I_\lambda.$$

Hence,  $(FS_m) I_\mu (FS_m) \subseteq \text{Id}(A)$  for any  $n \leq m \leq 2n - 1$ , and in particular, if  $f \in I_\mu$  and  $\rho \in S_m$  then  $f\rho \in \text{Id}(A)$ . (26) concludes the proof.  $\square$

By Proposition 3.13 and Lemma 3.10 we have just proved

PROPOSITION 3.15. Every PI algebra in characteristic 0 satisfies non-trivial strong identities. Explicitly, let  $\text{char}(F) = 0$  and let  $A$  satisfy an identity of degree  $d$ . Let  $u, v$  be natural numbers such that  $\frac{uv}{u+v} \cdot \frac{2}{e} \geq (d-1)^4$ , and let  $\mu = (u^v)$  be the  $u \times v$  rectangle. Then every  $g \in I_\mu$  is a strong identity of  $A$ . The degree of such a strong identity  $g$  is  $uv$ . We can choose for example  $u = v = \lceil e \cdot (d-1)^4 \rceil$ , so  $\deg(g) = \lceil e \cdot (d-1)^4 \rceil^2 = e^2(d-1)^8$ .

We summarize:

THEOREM 3.16. Every affine PI algebra over a field of characteristic 0 satisfies some Capelli identity. Explicitly, we have the following:

(a) Suppose the  $F$ -algebra  $A$  satisfies an identity of degree  $d$ . Then  $A$  satisfies a strong identity of degree

$$d' = \lceil e(d-1)^4 \rceil^2 = e^2(d-1)^8.$$

(b) Suppose  $A = F\{a_1, \dots, a_r\}$ , and  $A$  satisfies an identity of degree  $d$  and take  $d'$  as in (a). Let  $n = r^{d'} + d' \approx r^{e^2(d-1)^8}$ . Then  $A$  satisfies the Capelli identity  $\text{Cap}_n$ .

PROOF. (a) is by Proposition 3.15, and then (b) follows from Theorem 3.3, since every strong identity is sparse.  $\square$

### 3.4. Actions of the group algebra on sparse identities

Although the method of §3.2 is the one customarily used in the literature, it does rely on branching and thus only is effective in characteristic 0. A slight modification enables us to avoid branching. The main idea is that any sparse identity follows from an identity of the form

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{n+1} \cdots x_{\sigma(n)} x_{2n},$$

since we could then specialize  $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$  to whatever we want. Thus, letting  $V'_n$  denote the subspace of  $V_{2n}$  generated by the words  $x_{\sigma(1)} x_{n+1} \cdots x_{\sigma(n)} x_{2n}$ , we can identify the sparse identities with  $F[S_n]$ -subbimodules of  $V'_n$  inside  $V_{2n}$ . But there is an  $F[S_n]$ -bimodule isomorphism  $\varphi : V_n \rightarrow V'_n$ , given by  $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \rightarrow x_{\sigma(1)} x_{n+1} \cdots x_{\sigma(n)} x_{2n}$ . In particular  $V'_n$  has the same simple  $F[S_n]$ -subbimodules structure as  $V_n$  and can be studied with the same Young representation theory, although now we only utilize the left action of permutations.

Thus, for any PI-algebra  $A$ , the spaces

$$\text{Id}(A) \cap V'_n \subseteq V'_n$$

are  $F[S_n]$ -subbimodules of  $V'_n$ .

REMARK 3.17. Again, any tableau  $T$  of  $2n$  boxes gives rise to an element

$$a_T = \varphi \left( \sum_{q \in \mathcal{C}_{T_\lambda}, p \in \mathcal{R}_{T_\lambda}} \text{sgn}(q)qp \right) \in F[S_{2n}],$$

where  $\mathcal{C}_{T_\lambda}$  (resp.  $\mathcal{R}_{T_\lambda}$ ) denotes the set of column (resp. row) permutations of the tableau  $T_\lambda$ .

Thus,  $F[S_n]a_T$  (if nonzero) is an  $F[S_n]$ -submodule, which we call  $J_\lambda$ . If  $J_\lambda$  contains an element corresponding to a nontrivial PI of  $A$ ,  $a_T$  itself must correspond to a PI of  $A$ .

We let  $I_\lambda$  denote the minimal  $F[S_n]$ -bisubmodule of  $F[S_{2n}]$  containing  $J_\lambda$ .

LEMMA 3.18. Let  $A$  be an  $F$ -algebra, and let  $\lambda$  be a partition of  $n$ . If  $\dim J_\lambda > c_{2n}(A)$  and  $J_\lambda$  is a simple  $F[S_n]$ -module, then  $I_\lambda \subseteq \text{Id}(A) \cap V'_n$ .

PROOF. Same as Lemma 3.7, noting that  $I_\lambda$  is a sum of  $F[S_n]$ -submodules  $J_\lambda a$  each isomorphic to  $J_\lambda$ . Thus, taking such  $J$ , one has

$$c_n(A) = \dim \left( \frac{V'_n}{\text{Id}(A) \cap V'_n} \right) \geq \dim J > c_{2n}(A),$$

a contradiction. Therefore each  $J \subseteq \text{Id}(A) \cap V'_n$ , implying  $I_\lambda \subseteq \text{Id}(A) \cap V'_n$ .  $\square$

Note that when  $\text{char}(F) = p > 0$ , the lemma might fail unless  $J_\lambda$  is simple. James and Mathas [13, Main Theorem] determined when  $J_\lambda$  is simple for  $p = 2$ .

One such example is when  $\lambda$  is the **staircase**, which we define to be the Young tableau  $T_u$  whose  $u$  rows have length  $u, u-1, \dots, 1$ . This gave rise to the James-Mathas conjecture [21] of conditions on  $\lambda$  characterizing when  $J_\lambda$  is simple in characteristic  $p > 2$ , which was solved by Fayers [9].

## 4. Kemer's Capelli Theorem for all characteristics

In this section we give a proof of Kemer's "Capelli Theorem" over a field of any characteristic. In fact in characteristic  $p$  Kemer proved a stronger result, even for non-affine algebras.

THEOREM 4.1. [17] Any PI algebra over a field  $F$  of characteristic  $p > 0$  satisfies a Capelli identity  $\text{Cap}_n$  for large enough  $n$ .

This fails in characteristic 0, since the Grassmann algebra does not satisfy a Capelli identity. The proof of Theorem 4.1 given in [17] is quite complicated; an elementary proof using the "identity of algebraicity" is given in [7, §2.5.1], but still requires some computations. In the spirit of providing a full exposition which is as direct as possible, we treat only the affine case via representation theory, in which case characteristic  $p > 0$  works analogously to characteristic 0. This produces a much better estimate of the degree of the sparse identity, which we obtain in Theorem 4.4.

In view of Theorem 3.3, it suffices to show that any affine PI algebra satisfies a sparse identity. Although we cannot achieve this through branching, the ideas of the previous section still apply, using [9].

### 4.1. Simple Specht modules in characteristic $p > 0$

In order to obtain a  $p$ -version of Proposition 3.13 in characteristic  $p > 2$ , first we need to find a class of partitions satisfying Fayer's criterion.

For a positive integer  $m$ , define  $v_p$  to be the  $p$ -adic valuation, i.e.,  $v_p(m)$  is the largest power of  $p$  dividing  $m$ . Also, temporarily write  $h_{(i,j)}$  for  $h_x$  where  $x$  is the box in the  $i, j$  position. The

James-Mathas conjecture for  $p \neq 2$ , proved in [9], is that  $J_\lambda$  is simple if and only if there do not exist  $i, j, i', j'$  for which  $v_p(h_{(i;j)}) > 0$  with  $v_p(h_{(i;j)}), v_p(h_{(i';j)}), v_p(h_{(i;j')})$  all distinct. Of course this is automatic when each hook number is prime to  $p$ , since then every  $v_p(h_{(i;j)}) = 0$ .

EXAMPLE 4. A **wide staircase** is a Young tableau  $T_u$  whose  $u$  rows have all have lengths different multiples of  $p-1$ , the first row of length  $(p-1)u$ , the second of length  $(p-1)(u-1)$ , and so forth until the last of length  $p-1$ . The number of boxes is

$$n = \sum_{j=1}^u (p-1)j = (p-1) \binom{u+1}{2}.$$

When  $p = 2$ , the wide staircase just becomes the staircase described earlier.

In analogy to Example 3, the dimension of the “wide staircase”  $T_u$  can be estimated as follows: We write  $j = (p-1)j' + j''$  for  $1 \leq j'' \leq p-1$ . The hook of a box in the  $(i, j)$  position has length  $(u+1-i)(p-1) + 1 - j$ , and depth  $u+1-j'-i$ , so the hook number is

$$(u+1-i)(p-1) + 1 - j + u - j' - i = (u+1-i)p - j - j' = (u+1+j'-i)p - j'',$$

which is prime to  $p$ . Thus each wide staircase satisfies a stronger condition than Fayer’s criterion.

The dimension can again be calculated by means of the hook formula. The first  $p-1$  boxes in the first row have hook numbers

$$pu-1, pu-2, \dots, pu-(p-1),$$

whose sum is  $(p-1)pu - \binom{p}{2} = \binom{p}{2}(2u-1)$ .

The next  $p-1$  boxes in the first row have hook numbers

$$p(u-1)-1, p(u-1)-2, \dots, p(u-1)-(p-1),$$

whose sum is  $(p-1)p(u-1) - \binom{p}{2} = \binom{p}{2}(2u-3)$ .

Thus the sum of the hook numbers in the first row is

$$\binom{p}{2}((2u-1) + (2u-3) + \dots + 1) = \binom{p}{2}u^2.$$

Summing over all rows yields

$$\sum h_x = \binom{p}{2} \sum_{k=1}^u k^2 = \binom{p}{2} \frac{u(u+1)(2u+1)}{6} = \binom{p}{2} \frac{(2u+1)n}{3}.$$

LEMMA 4.2. For any integer  $u$ , let  $\mu$  be the wide staircase  $T_u$  of  $u$  rows. Let  $n = (p-1)\binom{u}{2}$ . Then

$$\left( \frac{6n}{p(p-1)(2u+1)} \right)^n \cdot \left( \frac{1}{e} \right)^n < f^\mu \quad (\text{where } e = 2.718281828\dots).$$

In particular, if  $\alpha \leq \frac{3n}{(2u+1)e}$ , then  $\alpha^n \leq f^\mu$ .

PROOF. We imitate the proof of Lemma 3.11. Since the geometric mean is bounded by the arithmetic mean,

$$\left( \prod_{x \in \mu} h_x \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{x \in \mu} h_x \leq \binom{p}{2} \frac{(2u+1)n}{3} = \frac{p(p-1)(2u+1)n}{6},$$

in view of Example 4, together with  $(n/e)^n < n!$ , implies that

$$\left( \frac{6n}{p(p-1)(2u+1)} \right)^n \cdot \left( \frac{1}{e} \right)^n = \left( \frac{n}{e} \right)^n \cdot \left( \frac{6}{p(p-1)(2u+1)} \right)^n < \frac{n!}{\prod_{x \in \mu} h_x} = f^\mu.$$

□

LEMMA 4.3. Let  $A$  be a PI algebra over a field of characteristic  $p$ , that satisfies an identity of degree  $d$ . Choose a natural number  $u$  such that, for  $n = (p-1)\binom{u+1}{2}$ ,

$$\frac{6n}{p(p-1)(2u+1)} \cdot \frac{1}{e} \geq (d-1)^2.$$

Let  $\lambda \vdash n$  be any partition of  $n$  corresponding to the “wide staircase”  $T_u$ . Then the elements of the corresponding  $F[S_n]$ -bimodule  $I_\lambda \subseteq V'_n$  are sparse identities of  $A$ .

PROOF. By Remark 3.12,

$$c_{2n}(A) \leq (d-1)^{4n} \leq \left( \frac{6n}{p(p-1)(2u+1)} \cdot \frac{1}{e} \right)^n < s^\lambda,$$

and we conclude from Lemma 3.18.  $\square$

#### 4.1.1. Existence of Capelli identities

We are ready for a version of Proposition 3.15.

THEOREM 4.4. [17] Any PI- algebra  $A$  over a field  $F$  of characteristic  $p > 0$  satisfies a Capelli identity. Explicitly:

(a) Suppose the  $F$ -algebra  $A$  satisfies an identity of degree  $d$ . Then  $A$  satisfies a sparse identity of degree  $d' = (p-1)p\binom{u+1}{2}$ , where  $\frac{3u(u+1)}{p(2u+1)} \geq (d-1)^2e$ .

(b) Suppose  $A = F\{a_1, \dots, a_r\}$ , and  $A$  satisfies an identity of degree  $d$  and take  $d'$  as in (a). Let  $n = r^{d'} + d' \approx r^{4e^2(d-1)^4}$ . Then  $A$  satisfies the Capelli identity  $\text{Cap}_n$ .

PROOF. (a) is by Lemma 4.3. Then (b) follows from Theorem 3.3.  $\square$

For example, since  $\frac{u+1}{2u+1} \geq \frac{1}{2}$ , we could take  $u \geq \frac{2pe(d-1)^2}{3}$ .

This concludes the proof of Theorem 4.1 in the affine case.

## 5. Results and proofs over Noetherian base rings

We turn to the case where  $C$  is a commutative Noetherian ring. In general, we say a  $C$ -algebra is PI if it satisfies a polynomial identity having at least one coefficient equal to 1. Let us indicate the modifications that need to be made in order to obtain proofs of Theorems 1.6 and 1.7.

The method of proof of Theorem 1(2) (for the case in which the base ring  $C$  is a field) was to verify the “weak Nullstellensatz”, and a similar proof works for  $A$  commutative when  $C$  is Jacobson, cf. [26, Proposition 4.4.1]. Thus we have Theorems 1.6 and 1.7 in the commutative case, which provide the base for our induction to prove Theorem 1.3. The argument is carried out using Zubrilin’s methods (which were given over an arbitrary commutative base ring.)

It remains to find a way of proving Kemer’s Capelli Theorem over arbitrary Noetherian base rings. One could do this directly using Young diagrams, but there also is a ring-theoretic reduction. The following observations about Capelli identities are useful.

LEMMA 5.1. (i) Suppose  $n = n_1 n_2 \cdots n_t$ . If  $A$  satisfies the identity  $\text{Cap}_{n_1} \times \cdots \times \text{Cap}_{n_t}$ , then  $A$  satisfies the Capelli identity  $\text{Cap}_n$ .

(ii) If  $I \triangleleft A$  and  $A/I$  satisfies  $\text{Cap}_m$  for  $m$  odd, with  $I^k = 0$ , then  $A$  satisfies  $\text{Cap}_{km}$ .

(iii) If  $I \triangleleft A$  and  $A/I$  satisfies  $\text{Cap}_m$  with  $I^k = 0$ , then  $A$  satisfies  $\text{Cap}_{k(m+1)}$ .

PROOF. (i) Viewing the symmetric group  $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_m} \hookrightarrow S_n$ , we partition  $S_n$  into orbits under the subgroup  $S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_m}$  and match the permutations in  $\text{Cap}_n$ .

(ii) This time we note that any interchange of two odd-order sets of letters has negative sign, so we partition  $S_{km}$  into  $k$  parts each with  $m$  letters.

(iii) Any algebra satisfying  $\text{Cap}_m$  for  $m$  even, also satisfies  $\text{Cap}_{m+1}$ , and  $m+1$  is odd.  $\square$

Thus, it suffices to prove that  $A$  satisfies a product of Capelli identities.

THEOREM 5.2. Any affine PI algebra over a commutative Noetherian base ring  $C$  satisfies some Capelli identity.

PROOF. By Noetherian induction, we may assume that the theorem holds for every affine PI-algebra over a proper homomorphic image of  $C$ .

First we do the case where  $C$  is an integral domain, and  $A = C\{a_1, \dots, a_\ell\}$  satisfies some multilinear PI  $f$ . It is enough to assume that  $A$  is the relatively free algebra  $C\{x_1, \dots, x_n\}/I$  (where  $I$  is the T-ideal generated by  $f$ ). Let  $F$  be the field of fractions of  $C$ . Then  $A_F := A \otimes_C F$  is also a PI-algebra, and thus, by Theorem 4.1 satisfies some Capelli identity  $f_1 = \text{Cap}_n$ . Thus the image  $\bar{f}_1$  of  $f_1$  in  $A$  becomes 0 when we tensor by  $F$ , which means that there is some  $s \in C$  for which  $sf_1 = 0$ . Letting  $I'$  denote the T-ideal of  $A$  generated by the image of  $f_1$ , we see that  $sI' = 0$ . If  $s = 1$  then we are done, so we may assume that  $s \in C$  is not invertible. Then  $A/sA$  is an affine PI-algebra over the proper homomorphic image  $C/sC$  of  $C$ , and by Noetherian induction, satisfies some Capelli identity  $\text{Cap}_m$ , so  $A/(sA \cap I')$  satisfies  $\text{Cap}_{\max\{m, n\}}$ . But  $sA \cap I'$  is nilpotent modulo  $sAI' = AsI' = 0$ , implying by Lemma 5.1 that  $A$  satisfies some Capelli identity.

For the general case, the nilpotent radical  $N$  of  $C$  is a finite intersection  $P_1 \cap \cdots \cap P_t$  of prime ideals. By the previous paragraph,  $A/P_j A$ , being an affine PI-algebra over the integral domain  $C/P_j$ , satisfies a suitable Capelli identity  $\text{Cap}_{n_j}$ , for  $1 \leq j \leq t$ , so  $A/\cap (P_j A)$  satisfies  $\text{Cap}_n$ , where  $n = \max\{n_1, \dots, n_t\}$ . But  $\cap (P_j A)$  is nilpotent modulo  $NA$ , so, by Lemma 5.1,  $A/NA$  satisfies a suitable Capelli identity  $\text{Cap}_n$ . Furthermore,  $N^m = 0$  for some  $m$ , implying again by Lemma 5.1 that  $A$  satisfies  $C^{mn}$ .  $\square$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. S.A. Amitsur, A generalization of Hilbert Nullstellensatz, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957) 649-656.
2. S.A. Amitsur, A note on P.I. rings, Israel J. Math. **10** (1971) 210-211.
3. S.A. Amitsur and C. Procesi, Jacobson rings and Hilbert algebras with polynomial identities, Ann. Mat. Pura Appl. **71** (1966) 67-72.
4. S.A. Amitsur and A. Regev: P.I. algebras and their cocharacters, J. of Algebra **78** (1982) 248-254.
5. S.A. Amitsur and L. Small, *Affine algebras with polynomial identities*, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **31** (1993).
6. A. Belov, L. Bokut, L.H. Rowen, and J.T. Yu, *The Jacobian Conjecture, together with Specht and Burnside-type problems*, Proc. Groups of Automorphisms in Birational and Affine Geometry, Springer, editors M. Zaidenberg, M. Rich, and M. Reizakis, to appear.
7. A.K. Belov and L.H. Rowen, *Computational aspects of Polynomial Identities*, A. K. Peters (2005).

8. A. Braun, The nilpotency of the radical in a finitely generated PI-ring, J. Algebra **89** (1984), 375–396.
9. M. Fayers, Irreducible Specht modules for Hecke algebras of type A, Advances in Math. **193** (2005), 438–452.
10. M. Fayers, S. Lyle, S. Martin, p-restriction of partitions and homomorphisms between Specht modules, J. Algebra **306** (2006), 175–190.
11. N. Jacobson, *Basic Algebra II*, second edition, Freeman and company (1989).
12. G. D. James, *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, Lecture Notes in Math, Vol. 682, Springer–Verlag, New York, NY, (1978).
13. G. James and A. Mathas, *The irreducible Specht modules in characteristic 2*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 457–62.
14. G. D. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 16, Addison–Wesley, Reading, MA, (1981).
15. A.R. Kemer, Capelli identities and nilpotence of the radical of a finitely generated PI-algebra, Dokl. Akad. Nauk SSSR **255** (1980), 793–797 (Russian). English translation: Soviet Math. Dokl. **22** (1980), 750–753.
16. A.R. Kemer, Ideals of identities of associative algebras, Amer. Math. Soc. Translations of monographs **87** (1991).
17. A.R. Kemer, Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic  $p$ , Internat. J. Algebra Comput. **5** no. 2, (1995), 189–197.
18. J. Lewin, A matrix representation for associative algebras I and II, Trans. Amer. Math. Soc. **188**(2), 293–317 (1974).
19. L’vov, Unpublished (Russian).
20. I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford, (1995).
21. A. Mathas, *Iwahori–Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group*, University Lecture Series 15, American Mathematical Society, Providence, RI (1999).
22. Yu.P. Razmyslov, The Jacobson radical in PI-algebras (Russian), Algebra i Logika **13** (1974), 337–360. English translation: Algebra and Logika **13** (1974), 192–204.
23. A. Regev, Existence of identities in  $A \otimes B$ , Israel J. Math. **11** (1972), 131–152.
24. A. Regev, The representations of  $S_n$  and explicit identities for P.I. algebras, J. Algebra **51** (1978), 25–40.
25. Richard Resco, Lance W. Small and J. T. Stafford, Krull and Global Dimensions of Semiprime Noetherian PI-Rings Transactions of the American Mathematical Society **274**, No. 1 (1982), 285–295
26. L.H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Pure and Applied Mathematics, 84. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, (1980).

27. L.H. Rowen, *Ring Theory*, Vol. II. Pure and Applied Mathematics, 128. Academic Press, Inc., Boston, MA, (1988).
28. L.H. Rowen, *Graduate algebra: Commutative View*, AMS Graduate Studies in Mathematics **73**, 2006.
29. L.H. Rowen, *Graduate algebra: Noncommutative View*, AMS Graduate Studies in Mathematics **91**, 2008.
30. B.E. Sagan, *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics 203, Springer-Verlag (2000).
31. A.I. Shirshov, On certain non associative nil rings and algebraic algebras (Russian), Mat. Sb. **41** (1957), 381-394.
32. A.I. Shirshov, On rings with identity relations (Russian), Mat. Sb. **43** (1957), 277-283.
33. Small, L.W., *An example in PI rings*, J. Algebra **17** (1971), 434-436.
34. K.A. Zubrilin, Algebras satisfying Capelli identities, Sbornic Math. **186** no. 3 (1995) 359-370.

## REFERENCES

1. S.A. Amitsur, A generalization of Hilbert Nullstellensatz, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957) 649-656.
2. S.A. Amitsur, A note on P.I. rings, Israel J. Math. **10** (1971) 210-211.
3. S.A. Amitsur and C. Procesi, Jacobson rings and Hilbert algebras with polynomial identities, Ann. Mat. Pura Appl. **71** (1966) 67-72.
4. S.A. Amitsur and A. Regev: P.I. algebras and their cocharacters, J. of Algebra **78** (1982) 248-254.
5. S.A. Amitsur and L. Small, *Affine algebras with polynomial identities*, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **31** (1993).
6. A. Belov, L. Bokut, L.H. Rowen, and J.T. Yu, *The Jacobian Conjecture, together with Specht and Burnside-type problems*, Proc. Groups of Automorphisms in Birational and Affine Geometry, Springer, editors M.Zaidenberg, M. Rich, and M. Reizakis, to appear.
7. A.K. Belov and L.H. Rowen, *Computational aspects of Polynomial Identities*, A. K. Peters (2005).
8. A. Braun, The nilpotency of the radical in a finitely generated PI-ring, J. Algebra **89** (1984), 375-396.
9. M. Fayers, Irreducible Specht modules for Hecke algebras of type A, Advances in Math. **193** (2005), 438-452.
10. M. Fayers, S. Lyle, S. Martin, p-restriction of partitions and homomorphisms between Specht modules, J. Algebra **306** (2006), 175-190.
11. N. Jacobson, *Basic Algebra II*, second edition, Freeman and company (1989).

12. G. D. James, *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, Lecture Notes in Math, Vol. 682, Springer-Verlag, New York, NY, (1978).
13. G. James and A. Mathas, *The irreducible Specht modules in characteristic 2*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 457–62.
14. G. D. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 16, Addison-Wesley, Reading, MA, (1981).
15. A.R. Kemer, Capelli identities and nilpotence of the radical of a finitely generated PI-algebra, Dokl. Akad. Nauk SSSR **255** (1980), 793–797 (Russian). English translation: Soviet Math. Dokl. **22** (1980), 750–753.
16. A.R. Kemer, Ideals of identities of associative algebras, Amer. Math. Soc. Translations of monographs **87** (1991).
17. A.R. Kemer, Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic  $p$ , Internat. J. Algebra Comput. **5** no. 2, (1995), 189–197.
18. J. Lewin, A matrix representation for associative algebras I and II, Trans. Amer. Math. Soc. **188**(2), 293–317 (1974).
19. L’vov, Unpublished (Russian).
20. I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford, (1995).
21. A. Mathas, *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group*, University Lecture Series 15, American Mathematical Society, Providence, RI (1999).
22. Yu.P. Razmyslov, The Jacobson radical in PI-algebras (Russian), Algebra i Logika **13** (1974), 337–360. English translation: Algebra and Logika **13** (1974), 192–204.
23. A. Regev, Existence of identities in  $A \otimes B$ , Israel J. Math. **11** (1972), 131–152.
24. A. Regev, The representations of  $S_n$  and explicit identities for P.I. algebras, J. Algebra **51** (1978), 25–40.
25. Richard Resco, Lance W. Small and J. T. Stafford, Krull and Global Dimensions of Semiprime Noetherian *PI*-Rings Transactions of the American Mathematical Society **274**, No. 1 (1982), 285–295.
26. L.H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Pure and Applied Mathematics, 84. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, (1980).
27. L.H. Rowen, *Ring Theory*, Vol. II. Pure and Applied Mathematics, 128. Academic Press, Inc., Boston, MA, (1988).
28. L.H. Rowen, *Graduate algebra: Commutative View*, AMS Graduate Studies in Mathematics **73**, 2006.
29. L.H. Rowen, *Graduate algebra: Noncommutative View*, AMS Graduate Studies in Mathematics **91**, 2008.
30. B.E. Sagan, *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics 203, Springer-Verlag (2000).

- 31. A.I. Shirshov, On certain non associative nil rings and algebraic algebras (Russian), Mat. Sb. **41** (1957), 381-394.
- 32. A.I. Shirshov, On rings with identity relations (Russian), Mat. Sb. **43** (1957), 277-283.
- 33. Small, L.W., *An example in PI rings*, J. Algebra **17** (1971), 434–436.
- 34. K.A. Zubrilin, Algebras satisfying Capelli identities, Sbornic Math. **186** no. 3 (1995) 359-370.

Получено 16.05.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

### Том 21. Выпуск 3.

УДК 519.217.1

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-129-141

### Математическая модель цифровой системы управления с контроллерами фон Неймановского типа сложными многоконтурными объектами<sup>1</sup>

Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов, Т. А. Акименко, И. Н. Лариошкин

**Евгений Васильевич Ларкин** — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: elarkin@mail.ru*

**Александр Николаевич Привалов** — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: privalov.61@mail.ru*

**Татьяна Алексеевна Акименко** — кандидат технических наук, доцент, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: tantan72@mail.ru*

**Иван Николаевич Лариошкин** — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: tantan72@mail.ru*

#### Аннотация

В работе построена математическая модель цифрового управления многоконтурными объектами, учитывающая реальные характеристики цифрового контроллера, как элемента системы управления. Сформулирована проблема, заключающаяся в том, что методы моделирования цифровых систем управления известны и широко применяются в практике инженерной деятельности, однако в подавляющем большинстве они предполагают формирование моделей, не учитывающих наличие временных интервалов между транзакциями в ЭВМ фон Неймановского типа.

Для решения задачи разработана типовая структурная схема сложных многоконтурных систем управления с цифровыми контроллерами фон Неймановского типа, которая учитывает случайный характер обрабатываемых данных и реальные временные задержки между транзакциями.

Предложено с учетом случайности временного интервала между транзакциями и стохастического характера переключения в сопряженные операторы считать адекватной моделью алгоритма функционирования цифровых систем управления считать полумарковский процесс.

На основе полумарковских процессов предложен метод оценки параметров временных интервалов между транзакциями в циклических алгоритмах управления, который позволяет оценить характеристики системы на этапе ее проектирования, а следовательно является ключом к рациональному проектированию цифровых систем управления многоконтурными объектами с алгоритмами управления практически любой сложности. Представлен пример математического моделирования двухконтурной системы с цифровым управлением.

**Ключевые слова:** полумарковский процесс, время блуждания, цифровая система управления, контроллер, алгоритм управления цифровой системой управления, транзакция.

**Библиография:** 21 название.

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ по проекту 19-47-710004\_p\_a.

**Для цитирования:**

Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов, Т. А. Акименко, И. Н. Лариошкин. Математическая модель цифровой системы управления с контроллерами фон Неймановского типа сложными многоконтурными объектами // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 129–141.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 519.217.1

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-129-141

# Mathematical model of a digital control system with background controllers of the Neuman type for complex multicirculated objects

E. V. Larkin, A. N. Privalov, T. A. Akimenko, I. N. Larioshkin

**Evgenii Vasil'evich Larkin** — Doctor of technical sciences, Professor, Tula State University (Tula).

*e-mail: elarkin@mail.ru*

**Alexander Nikolaevich Privalov** — Doctor of technical sciences, Professor, Tula State Pedagogical University (Tula).

*e-mail: privalov.61@mail.ru*

**Tatyana Alekseevna Akimenko** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Tula State University (Tula).

*e-mail: tantan72@mail.ru*

**Ivan Nikolaevich Larioshkin** — postgraduate student, Tula State University (Tula).

*e-mail: tantan72@mail.ru*

**Abstract**

In the work, a mathematical model of digital control of multi-circuit objects is built, taking into account the real characteristics of a digital controller as an element of a control system. The problem is formulated that the methods of modeling digital control systems are known and are widely used in engineering practice, however, in the overwhelming majority, they involve the formation of models that do not take into account the presence of time intervals between transactions in a Von Neumann type computer.

To solve the problem, a typical block diagram of complex multi-loop control systems with digital controllers of the Von Neumann type has been developed, which takes into account the random nature of the processed data and real time delays between transactions.

It is proposed, taking into account the randomness of the time interval between transactions and the stochastic nature of switching to conjugate operators, to consider a semi-Markov process as an adequate model of the algorithm for the functioning of digital control systems.

On the basis of semi-Markov processes, a method is proposed for estimating the parameters of time intervals between transactions in cyclic control algorithms, which makes it possible to evaluate the characteristics of the system at the design stage, and therefore is the key to the rational design of digital control systems for multi-circuit objects with control algorithms of almost any complexity. An example of mathematical modeling of a two-circuit system with digital control is presented.

**Keywords:** semi-Markov process, wandering time, digital control system, controller, digital control system control algorithm, transaction.

**Bibliography:** 21 titles.

**For citation:**

E. V. Larkin, A. N. Privalov, T. A. Akimenko, I. N. Larioshkin, 2020, "Mathematical model of a digital control system with background controllers of the Neuman type for complex multicirculated objects", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 129–141.

## 1. Введение

Основной тенденцией развития современной промышленности является усложнение технологических процессов и связанное с этим широкое внедрение цифровой управляющей техники систем управления для обеспечения требуемых показателей качества производимой продукции [1, 2]. Переход при управлении объектами на цифровые системы связан с включением в их структуру контроллеров фон Неймановского типа, т.е. приборов, которые обладают новыми, по сравнению с аналоговыми контроллерами, свойствами [3, 4, 5]. Свойства обусловлены последовательной интерпретацией операторов алгоритма управления, развивающейся в реальном физическом времени, за счет чего управляющая ЭВМ, кроме того, что алгоритмически реализует заданный закон управления, вносит временные задержки в процесс управления, в связи с чем, временной фактор напрямую влияет на качественные характеристики системы в целом. Алгоритм обрабатывает случайные данные, формируемые на выходах сенсоров, и содержит операторы принятия решения в местах ветвления, поэтому в результате его интерпретации генерируются случайные временные интервалы между транзакциями, как при вводе-выводе данных (перекос данных), так и при расчете управляющего воздействия (чистое запаздывание) [5, 6, 7]. В то же время промышленные, военные и иные системы при переходе на цифровые технологии должны обеспечивать требуемую точность функционирования в широких диапазонах изменений параметров объекта управления, независимо от случайных временных задержек в контурах управления [8, 9, 10]. Поэтому возникает научная проблема создания моделей управления сложными объектами, учитывающих реальные физические характеристики управляющих ЭВМ, которые могли бы быть положены в основу методологии синтеза цифровых регуляторов.

Методы моделирования цифровых систем управления известны [11, 12, 13] и широко применяются в практике инженерной деятельности, однако в подавляющем большинстве они предполагают формирование моделей, не учитывающих наличие временных интервалов между транзакциями в ЭВМ фон Неймановского типа. Это, в свою очередь, неоправданно увеличивает сроки и объемы экспериментальных исследований при отработке систем управления и, в частности, приводит к необходимости дополнительных экспериментальных исследований систем при переводе отработанных алгоритмов управления на другую элементную базу, например на контроллеры с другим быстродействием, или контроллеры с другой системой команд.

Учет временного фактора при проектировании цифровых систем управления развит недостаточно, что обуславливает необходимость и актуальность исследований в данной области.

## 2. Структура цифровой системы

Структурная схема цифровой системы управления приведена на рис. 1. Блоки структурной схемы  $\Phi_{11}(s), \dots, \Phi_{kl}(s), \dots, \Phi_{KK}(s)$  описывают динамические процессы, протекающие в объекте управления, через передаточные функции. Перекрестные межблочные связи, когда  $k \neq l$ , отражают реальное взаимовлияние контуров в объекте. Блоки  $\Phi_{01}(s), \dots, \Phi_{0k}(s), \dots, \Phi_{0K}(s)$  описывают динамику сенсоров системы.

Система функционирует следующим образом. В цифровой контроллер (Digital controller) вводится вектор сигналов  $F(s) = [F_1(s), \dots, F_k(s), \dots, F_K(s)]$ , формирующих цель управления. Указанные сигналы могут также генерироваться самим контроллером, что показано на рис. 1 жирной штриховой линией. На выходах контроллера программно генерируются последовательности кодов  $\varepsilon(s) = [\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_k(s), \dots, \varepsilon_K(s)]$ , подаваемые на входы объекта управления, который на физическом уровне преобразует сигналы вектора  $\varepsilon(s)$  в вектор параметров  $X(s) = [X_1(s), \dots, X_k(s), \dots, X_K(s)]$ , описывающих состояние объ-

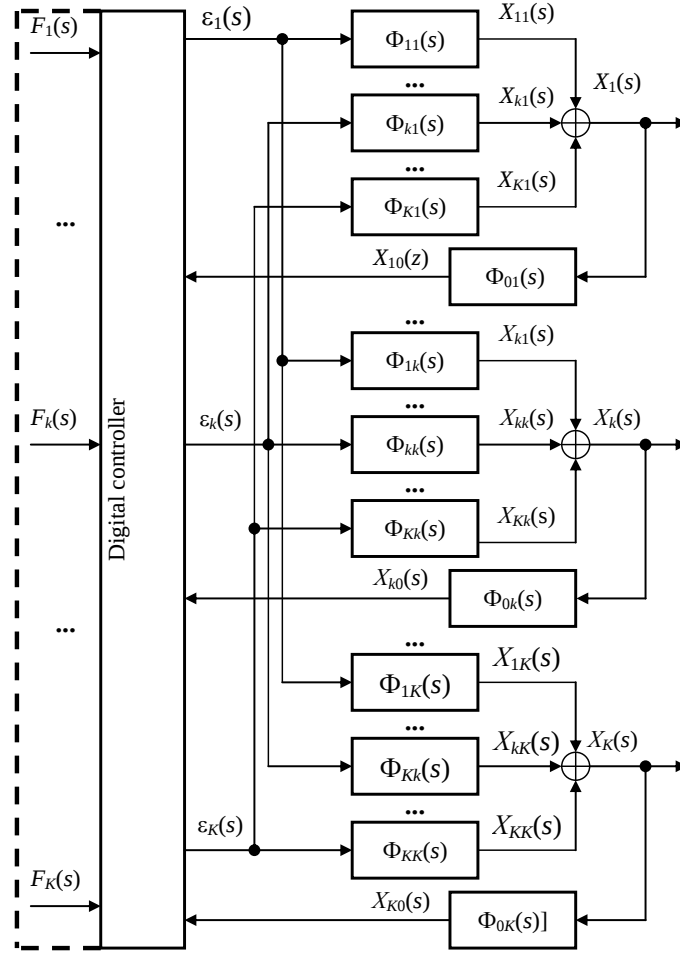


Рис. 1: Структурная схема цифровой системы управления.

екта. Параметры измеряются сенсорами, и результаты измерения в виде цифровых кодов  $X_0(s) = [X_{01}(s), \dots, X_{0k}(s), \dots, X_{0K}(s)]$  вводятся в контроллер. Во всех вышеприведенных векторах  $s$  — оператор дифференцирования преобразования Лапласа [8, 14].

Выходная последовательность кодов генерируется в соответствии с законом управления и циклограммой, заложенной в алгоритмическое и программное обеспечение контроллера. В дальнейшем будем считать, что временные интервалы в циклограмме отсчитываются от момента ввода первого элемента вектора  $F(s)$ ,  $F_1(s)$ . Остальные элементы вводятся/выводятся с задержками по времени обозначенными следующим образом:

элемент  $F_k(s)$  вводится с задержкой  $\tau_{fk}$ ,  $\tau_{f0} = 0$ ,  $1 \leq k \leq K$ ;

элемент  $X_{0k}(s)$  вводится с задержкой  $\tau_{0k}$ ,  $1 \leq k \leq K$ ;

элемент  $\varepsilon_k(s)$  выводится с задержкой  $\tau_{\varepsilon k}$ ,  $1 \leq k \leq K$ .

В соответствии с теоремой о смещении во временной области [14]

$$L[\varphi(t - \tau)] = \exp(-\tau s) \Phi(s), \quad \tau > 0, \quad (1)$$

где  $\tau$  — величина смещения;  $t$  — время;  $\varphi$  — импульсный отклик;  $L[\dots]$  — прямое преобразование Лапласа.

Из (1) следует, что

$$F_{sh}(s) = F(s) \cdot N_f(s); \quad (2)$$

$$X_{sh}(s) = X_0(s) \cdot N_0(s); \quad (3)$$

$$\varepsilon_{sh}(s) = \varepsilon(s) \cdot N_\varepsilon(s), \quad (4)$$

где  $N_f(s)$ ,  $N_0(s)$ ,  $N_\varepsilon(s)$  — матрицы смещений, равные

$$N_f(s) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp(-\tau_{fk}s) & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \exp(-\tau_{fK}s) \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$$N_0(s) = \begin{pmatrix} \exp(-\tau_{01}s) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp(-\tau_{0k}s) & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \exp(-\tau_{0K}s) \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$N_\varepsilon(s) = \begin{pmatrix} \exp(-\tau_{\varepsilon 1}s) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp(-\tau_{\varepsilon k}s) & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \exp(-\tau_{\varepsilon K}s) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В том случае, если цифровой контроллер реализует линейный закон управления  $\Phi_c(s)$ , на исполнительные приводы поступает сигнал

$$\varepsilon(s) = [F(s) \cdot N_f(s) - X(s) \cdot \Phi_0(s) \cdot N_0(s)] \cdot \Phi_c(s) \cdot N_\varepsilon(s), \quad (8)$$

где  $\Phi_c(s) = [\Phi_{ckl}(s)]$ ,  $1 \leq k, l \leq K$  — матрица линейных передаточных функций, реализуемых в цифровом контроллере.

Вектор  $X(s)$  определяется как

$$X(s) = \varepsilon(s) \cdot \Phi(s) = [F(s) \cdot N_f(s) - X(s) \cdot \Phi_0(s) \cdot N_0(s)] \cdot \Phi_c(s) \cdot N_\varepsilon(s) \cdot \Phi(s), \quad (9)$$

где  $\Phi(s) = [\Phi_{kl}(s)]$ ,  $1 \leq k, l \leq K$  — матрица линейных передаточных функций, реализуемых в объекте управления.

Разрешение (9) относительно  $X(s)$  дает

$$X(s) = [E - \Phi_0(s) \cdot \Phi_c(s) \cdot N_{0\varepsilon}(s)]^{-1} F(s) \cdot \Phi_c(s) \cdot N_{f\varepsilon}(s) \cdot \Phi(s) \quad (10)$$

где  $E$  — единичная диагональная матрица;

$$\begin{aligned} N_{f\varepsilon}(s) &= N_f(s) \cdot N_\varepsilon(s) = \\ &= \begin{pmatrix} \exp(-\tau_{\varepsilon 1}s) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp[-(\tau_{fk} + \tau_{\varepsilon k})s] & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \exp[-(\tau_{fL} + \tau_{\varepsilon K})s] \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} N_{0\varepsilon}(s) &= N_0(s) \cdot N_\varepsilon(s) = \\ &= \begin{pmatrix} \exp[-(\tau_{01} + \tau_{\varepsilon 1})s] & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp[-(\tau_{0k} + \tau_{\varepsilon k})s] & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \exp[-(\tau_{0K} + \tau_{\varepsilon K})s] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Члены, характеризующие чистое запаздывание, появляются как в числителе,  $N_{f\varepsilon}(s)$ , так и в знаменателе,  $N_{0\varepsilon}(s)$ , (10). Запаздывание в числителе определяет т.н. «перекося данных» (data screw) и общее запаздывание выполнения объектом внешних команд. Запаздывание в знаменателе изменяет значения полюсов характеристического многочлена, а следовательно меняет качественно характеристики переходных процессов.

### 3. Оценка временных интервалов

Для оценки временных интервалов задержки должны быть построена модель интерпретации алгоритма управления контроллером фон Неймановского типа. Для простоты, без нарушения общности, модель может быть построена только из операторов транзакций. Поскольку управление сводится к периодическому опросу элементов векторов  $F(s) = [F_1(s), \dots, F_k(s), \dots, F_K(s)]$ ,  $X_0(s) = [X_{01}(s), \dots, X_{0k}(s), \dots, X_{0K}(s)]$ , и  $\varepsilon(s) = [\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_k(s), \dots, \varepsilon_K(s)]$ , алгоритм является циклическим, но в нем отсутствует эффект заикливания. Кроме того, поскольку для расчета управляющего воздействия  $\varepsilon(s)$  все элементы векторов  $F(s)$  и  $X_0(s)$  должны быть использованы, на структуру алгоритма накладываются условия сильной связности [15]. Подобными свойствами в самом общем случае обладает структура, представленная полным графом с петлями (рис. 2).

С учетом случайности временного интервала между транзакциями и стохастического характера переключения в сопряженные операторы, адекватной моделью алгоритма является полумарковский процесс [16, 17, 18, 19], представленный полумарковской матрицей

$$h(t) = [h_{k,l}(t)] = [g_{k,l}(t)] \otimes [p_{k,l}(t)], \quad (13)$$

где  $p_{k,l}(t)$  — вероятности прямого переключения из  $k$ -го оператора транзакции в  $l$ -й;  $g_{k,l}(t)$  — плотность распределения времени прямого переключения из  $k$ -го оператора транзакции в  $l$ -й;  $\otimes$  — знак прямого произведения матриц;  $t$  — физическое время.

В силу названных свойств моделируемого алгоритма, полумарковский процесс (13) является эргодическим, и в нем нет поглощающих и частично поглощающих состояний.

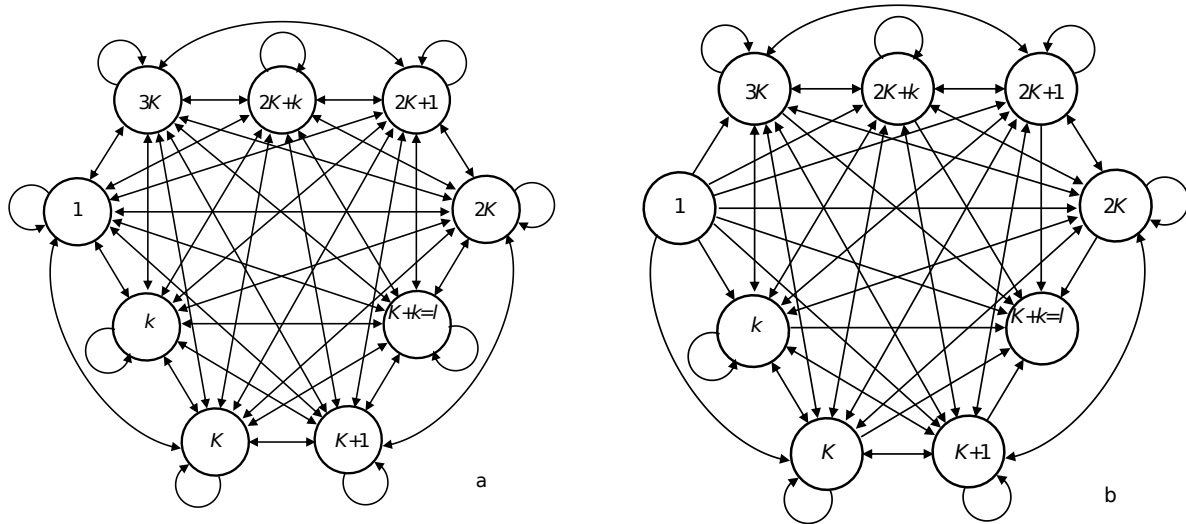


Рис. 2: Общая структура полумарковского процесса.

В силу эргодичности полумарковского процесса на плотности распределения  $g_{k,l}(t)$  и вероятности  $p_{k,l}(t)$  накладываются следующие ограничения:

$$0 < T_{k,l}^{\min} \leq \arg [g_{k,l}(t)] \leq T_{k,l}^{\max} < \infty, 1 \leq k, l \leq 3K; \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^{3K} p_{k,l} = 1; \quad (15)$$

$$\int_{T_{k,l}^{\min}}^{T_{k,l}^{\max}} g_{k,l}(t) dt = 1, \quad (16)$$

где  $3K$  — общее количество операторов транзакций;  $T_{k,l}^{\min}$  и  $T_{k,l}^{\max}$  — нижняя и верхняя границы области определения плотности распределения  $g_{k,l}(t)$ .

При оценке временных интервалов между транзакциями в алгоритме не имеет значения, каким образом полумарковский процесс (13) попал из  $k$ -го состояния в  $l$ -е. Определяющим в данном случае является то, что это попадание является первым, а не вторым, третьим и т.п. Для оценки исходный полумарковский процесс (13) должен быть преобразован в процесс со структурой, приведенной на рис. 2 б, в котором  $k$ -е состояние является стартовым, а  $l$ -е состояние — поглощающим. Для этого:

$l$ -я строка и  $k$ -й столбец матрицы  $h(t)$  обнуляются;

вероятности  $p_{k,l}(t)$  во всех строках, исключая  $l$ -ю, и во всех столбцах, исключая  $k$ -й, пересчитываются по зависимости:

$$p'_{m,n} = \frac{p_{m,n}}{\sum_{\substack{n=1, \\ n \neq l}}^{3K} p_{m,n}}, \quad 1 \leq m, n \leq 3K, \quad m \neq k, \quad n \neq l. \quad (17)$$

Таким образом

$$h(t) \rightarrow h'(t) = [g_{k,l}(t) \cdot p'_{k,l}]. \quad (18)$$

После пересчета вероятностей по зависимости (17) частично поглощающие состояния, т.е. состояния, для которых не выполняется свойство (15), уничтожаются, и события достижения  $l$ -го состояния из  $k$ -е по одной из возможных траекторий блуждания начинают составлять полную группу несовместных событий [20]. Таким образом, плотность распределения времени достижения  $l$ -го состояния из  $k$ -го определяется как

$$g_{k,l}^{\Sigma}(t) = I_k^r \cdot L^{-1} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} L [h'(t)]^j \right] \cdot I_l^c, \quad (19)$$

где  $L[...]$  и  $L^{-1}[...]$  — соответственно прямое и обратное преобразование Лапласа;  $I_k^r$  — вектор-строка,  $k$ -й элемент которого равен единице, а остальные элементы равны нулю; знак транспонирования;  $I_l^c$  — вектор-столбец,  $l$ -й элемент которого равен единице, а остальные элементы равны нулю [21].

Для плотности распределения (19) могут быть рассчитаны математическое ожидание и дисперсия по зависимостям [20]:

$$T_{k,l}^{\Sigma} = \int_0^{\infty} t \cdot g_{k,l}^{\Sigma}(t) dt; \quad (20)$$

$$D_{k,l}^{\Sigma} = \int_0^{\infty} (t - T_{k,l}^{\Sigma})^2 \cdot g_{k,l}^{\Sigma}(t) dt. \quad (21)$$

Состояния полумарковского процесса (13) могут быть распределены между транзакциями, осуществляемые в соответствии со схемой, приведенной на рис. 1, следующим образом:

состояния с первого по  $K$ -е являются математическими аналогами операторов ввода элементов вектора  $F(s)$ ;

состояния с  $(K+1)$ -го по  $(2K)$ -е моделируют ввод элементов вектора  $X_0(s)$ ;

состояния с  $(2K+1)$ -го по  $(3K)$ -е моделируют вывод элементов вектора  $\varepsilon(s)$ .

Оценка временного интервала может быть оценена либо по математическому ожиданию (20), либо по максимальному значению [20] с использованием соотношения

$$\tau = T_{k,l}^{\Sigma} + 3\sqrt{D_{k,l}^{\Sigma}}. \quad (22)$$

Соответственно, для матриц (5), (6), (7) временные задержки будут определяться, как это показано в таблице 1:

| Вид тран-<br>закции    | Номер вводимого<br>элемента | Среднее значение<br>времени                  | Максимальное значение вре-<br>мени                                         |
|------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Ввод $F(s)$            | 1                           | $\tau_{f1} = 0$                              | $\tau_{f1} = 0$                                                            |
|                        | $2 \leq k \leq K$           | $\tau_{fk} = T_{1,k}^{\Sigma}$               | $\tau_{fk} = T_{1,k}^{\Sigma} + 3\sqrt{D_{1,k}^{\Sigma}}$                  |
| Ввод $X_0(s)$          | $1 \leq k \leq K$           | $\tau_{0k} = T_{1,K+k}^{\Sigma}$             | $\tau_{0k} = T_{1,K+k}^{\Sigma} + 3\sqrt{D_{1,K+k}^{\Sigma}}$              |
| Вывод $\varepsilon(s)$ | $1 \leq k \leq K$           | $\tau_{\varepsilon k} = T_{1,2K+k}^{\Sigma}$ | $\tau_{\varepsilon k} = T_{1,2K+k}^{\Sigma} + 3\sqrt{D_{1,2K+k}^{\Sigma}}$ |

Таблица 1: Оценки временных интервалов.

При учете временных задержек, приведенных в третьей колонке таблицы 1, оцениваются показатели качества управления в среднем. При учете временных задержек, приведенных в четвертой колонке, оцениваются предельные показатели качества управления.

#### 4. Пример анализа системы управления

В качестве примера исследована простейшая двухконтурная система. В системе реализована единичная обратная связь по обоим контурам, а в цифровом контроллере реализован П-закон управления.

Передаточные функции, определяющие динамику объекта управления, равны:

$$\Phi_{11}(s) = \frac{10}{s+5}; \Phi_{22}(s) = \frac{12}{s+3}; \Phi_{12}(s) = \Phi_{21}(s) = \frac{1}{s+4}. \quad (23)$$

Между транзакциями обеспечиваются следующие временные задержки:

$$\tau_{f1} = 0; \tau_{f2} = 0,05; \tau_{01} = 0,1; \tau_{02} = 0,15; \tau_{\varepsilon 1} = 0,2; \tau_{\varepsilon 2} = 0,25. \quad (24)$$

Характеристическое уравнение, определяющее характер переходных процессов, без учета погрешностей, вносимых цифровым контроллером, имеет вид:

$$s^4 + 38s^3 + 480s^2 + 2272s + 3885 = 0. \quad (25)$$

Характеристическое уравнение, определяющее характер переходных процессов, с учетом погрешностей, вносимых цифровым контроллером, имеет вид:

$$[s+5+10\exp(-0,3s)] \cdot [s+3+12\exp(-0,4s)] \cdot (s^2+8s+16) - \exp(-0,7s) \cdot (s^2+8s+15) = 0. \quad (26)$$

Структура простейшей двухконтурной системы приведена на рис. 3 а, с цифровым контроллером, в котором реализован алгоритм со структурой, показанной на рис. 3 б и ее графическое решение 3с.

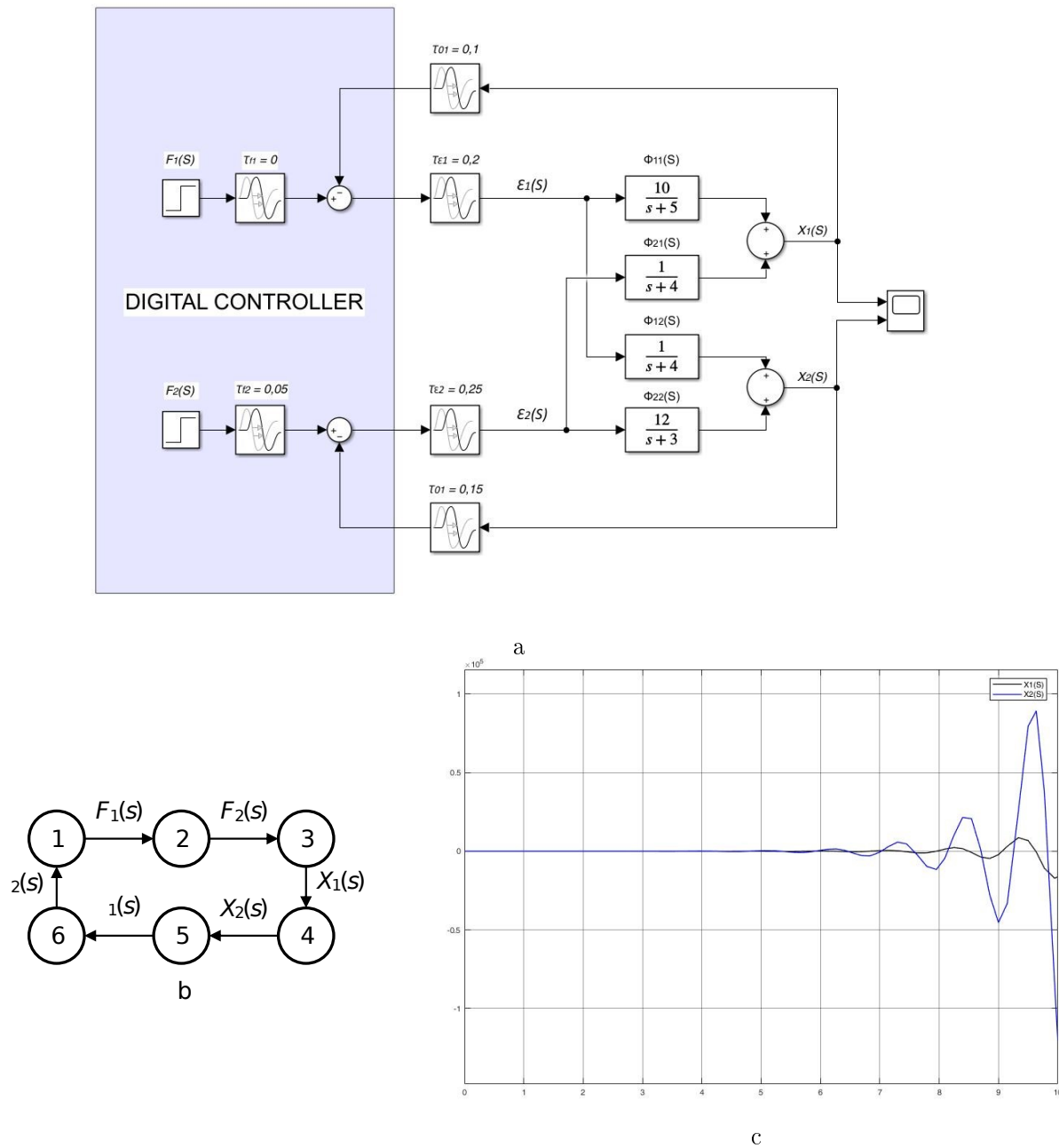


Рис. 3: Двухконтурная система (а); циклограмма управления (b); графическое представление (с).

Решение характеристических уравнений (25) и (26) дает следующие значения полюсов:

— без учета погрешностей

$$s_1 = -14; s_2 = -16; s_3 = -4 + 0,091i; s_4 = -4 - 0,091i, \text{ где } i \text{ — мнимая единица.}$$

— с учетом погрешностей

$$s_1 = 23,5; s_2 = -21,7; s_3 = 0,79 + 21,5i; s_4 = 0,79 - 21,5i, \text{ где } i \text{ — мнимая единица.}$$

Наличие пары комплексно-сопряженных корней:

— с положительной действительной частью указывает на то, что в замкнутой системе возникает расходящийся периодический переходный процесс; наличие действительного положительного корня, в дополнение к расходящемуся периодическому процессу свидетельствует о неустойчивости замкнутой системы;

— с отрицательной действительной частью указывает на то, что в замкнутой системе возникает затухающий периодический переходный процесс, который обусловлен исключительно наличием перекрестных связей. При отсутствии перекрестных связей в объекте управления система распадается на два независимых контура управления объектами, которые описываются звеньями первого порядка, т.е. затухающая периодическая составляющая в них отсутствует.

Таким образом, замыкание обратных связей устойчивой аналоговой системы через цифровой контроллер при той же логике работы приводит к качественным изменениям характера переходных процессов, что необходимо учитывать при проектировании цифровых систем управления.

## 5. Заключение

В результате построена математическая модель цифрового управления многоконтурными объектами, учитывающая реальные характеристики цифрового контроллера, как элемента системы управления. Показано, что контроллеры фон Неймановского типа с последовательной интерпретацией команд алгоритма управления являются источником временных задержек, которые приводят таким явлениям, как перекося данных и чистое запаздывание в контуре управления. В свою очередь, и перекося данных и чистое запаздывание приводят к ухудшению таких качественных параметров управления, как время переходного процесса, перерегулирование и колебательность. Предложенный метод расчета временных интервалов позволяет оценить характеристики системы на этапе ее проектирования, а следовательно является ключом к рациональному проектированию цифровых систем управления многоконтурными объектами с алгоритмами управления практически любой сложности.

Дальнейшие исследования в этой области могут быть направлены на разработку алгоритмов цифрового управления, оптимальных по соотношению показателей сложность/качество, и обеспечивающих требуемые характеристики функционирования цифровых систем.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Malin Löfving M., Säfsen K.; Winroth M. Manufacturing strategy formulation, leadership style and organizational culture in small and medium-sized enterprises // IJMTM. 2016. Vol. 30. no. 5, pp. 306-325.
2. Zhou M.C. Modeling, Simulation, and Control of Flexible Manufacturing Systems: A Petri Net Approach // Wspc. 1999, 428 p.
3. Landau I.D., Zito G., Digital Control Systems, Design, Identification and Implementation // Springer. 2006, 484 p.
4. Åström J., Wittenmark B., Computer Controlled Systems: Theory and Design // Tsinghua University Press. Prentice Hall. 2002, 557 p.
5. Larkin E., Bogomolov A., Privalov A., Estimation of Events Flow Generated with Ergodic Semi-Markov Processes // 2nd International Ural Conference on Measurements (URALCON), South Ural State University, Chelyabinsk, Russia, 2017, pp. 124-129.
6. Fadali M.S., Visioli A., Digital control engineering: Analysis and design // Elsevier Inc. 2013, pp. 239 - 272.
7. Auslander D.M., Ridgely J.R. Jones J.C., Real-time software for implementation of feedback control // The control handbook. Control system fundamentals. Ed. by W.S. Levine. CRC Press. Taylor and Francis Group, US. 2017, pp.16-32.

8. Karnopp D.C., Margolis D.L., Rosenberg R.C., System dynamics: Modeling, simulation and control of mechatronic systems // John Wiley & Sons. New Jersey. 2012, 636 p.
9. Tzafestas S.G. Introduction to Mobile Robot Control. Elsevier, 2014. 750 p.
10. Babishin V., Taghipour S. Optimal maintenance policy for multicomponent systems with periodic and opportunistic inspections and preventive replacements // Applied Mathematical Modelling 2016, V. 40. no. 23, pp. 10480-10505.
11. Arnold K. A. "Timing analysis in embedded systems", In embedded hardware by J. Ganssler, K. Arnold et al, USA, Elsevier Inc. 2008. pp. 239 - 272.
12. Balsamo S., Harrison P.G., Marin A., "Methodological construction of product-form stochastic Petri nets for performance evaluation" // In Journal of Systems and Software. Elsevier Inc., 2012, Vol. 85, no. 7. pp. 1520–1539.
13. Hamann A., Racu, R., Ernst R., "Multi-dimensional robustness optimization in heterogeneous distributed embedded systems" // In Proceedings of the 13th IEEE Real Time and Embedded Technology and Applications Symposium, RTAS '07, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA. 2007, pp. 269–280.
14. Schiff J.L., The Laplace transform: Theory and applications, USA, NY Springer Verlag, 199, 233 p.
15. Larkin E.V., Bogomolov A.V., Privalov A.N., "A Method for Estimating the Time Intervals between Transactions in Speech-Compression Algorithms", In: Automatic Documentation and Mathematical Linguistics. 2017, Vol. 51. Iss. 5. pp. 214-219.
16. Bielecki T.R., Jakubowski J., Niewęglowski M., "Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence", In Stochastic Processes and their Applications. 2017, V. 127, no. 4. pp. 1125–1170.
17. Ching W.K., Huang X., Ng M.K., Siu T.K., "Markov Chains: Models, Algorithms and Applications", In International Series in Operations Research & Management Science, V. 189. Springer Science + Business Media NY, 2013, 241 p.
18. Howard R.A., Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1: Markov Models. Vol. II: Semi-Markov and Decision Processes // Courier Corporation. 2012, 205p.
19. Janssen J., Manca R., Applied Semi-Markov processes. Springer US. 2006, 310 p.
20. Kobayashi H., Marl B.L., Turin W., Probability, Random Processes and Statistical Analysis: Cambridge University Press. 2012, 812 p.
21. Petersen P., Linear algebra. Springer-Verlag. NY. 2012, 427 p.

## REFERENCES

1. Malin Löfving M., Säfsten K.; Winroth M., 2016, Manufacturing strategy formulation, leadership style and organizational culture in small and medium-sized enterprises, IJMTM. Vol. 30. no. 5, pp. 306 - 325.
2. Zhou M.C., 1999, Modeling, Simulation, and Control of Flexible Manufacturing Systems: A Petri Net Approach. Wspc, 428 p.

3. Landau I.D., Zito G., 2006, Digital Control Systems, Design, Identification and Implementation. Springer, 484 p.
4. Åström J., Wittenmark B., 2002, Computer Controlled Systems: Theory and Design. Tsinghua University Press. Prentice Hall, 557 p.
5. Larkin E., Bogomolov A., Privalov A., 2017, Estimation of Events Flow Generated with Ergodic Semi-Markov Processes // 2nd International Ural Conference on Measurements (URALCON), South Ural State University, Chelyabinsk, Russia, pp. 124-129.
6. Fadali M.S., Visioli A., 2013, Digital control engineering: Analysis and design. Elsevier Inc., pp. 239 - 272.
7. Auslander D.M., Ridgely J.R. Jones J.C., 2017, Real-time software for implementation of feedback control // The control handbook. Control system fundamentals. Ed. by W.S. Levine. CRC Press. Taylor and Francis Group, US. pp.16–32.
8. Karnopp D.C., Margolis D.L., Rosenberg R.C., 2012, System dynamics: Modeling, simulation and control of mechatronic systems. John Willey & Sons. New Jersey, 636 p.
9. Tzafestas S.G. Introduction to Mobile Robot Control. Elsevier, 2014. 750 p.
10. Babishin V., Taghipour S.. 2016, Optimal maintenance policy for multicomponent systems with periodic and opportunistic inspections and preventive replacements // Applied Mathematical Modelling, V. 40. no. 23, pp. 10480 -10505.
11. Arnold K. A. “Timing analysis in embedded systems”, In embedded hardware by J. Ganssler, K. Arnold et al, USA, Elsevier Inc. 2008. pp. 239 - 272.
12. Balsamo S., Harrison P.G., Marin A., 2012, “Methodological construction of product-form stochastic Petri nets for performance evaluation”, In Journal of Systems and Software. Elsevier Inc., Vol. 85, no. 7. pp. 1520–1539.
13. Hamann A., Racu, R., Ernst R., 2007, “Multi-dimensional robustness optimization in heterogeneous distributed embedded systems”, In Proceedings of the 13th IEEE Real Time and Embedded Technology and Applications Symposium, RTAS '07, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA. pp. 269–280.
14. Schiff J.L., 199, The Laplace transform: Theory and applications, USA, NY Springer Verlag, 233 p.
15. Larkin E.V., Bogomolov A.V., Privalov A.N., 2017, “A Method for Estimating the Time Intervals between Transactions in Speech-Compression Algorithms”, In: Automatic Documentation and Mathematical Linguistics, Vol. 51. Iss. 5. pp. 214-219.
16. Bielecki T.R., Jakubowski J., Niewęglowski M., 2017, “Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence”, In Stochastic Processes and their Applications, V. 127, no. 4. pp. 1125–1170.
17. Ching W.K., Huang X., Ng M.K., Siu T.K., 2013, “Markov Chains: Models, Algorithms and Applications”, In International Series in Operations Research & Management Science, V. 189. Springer Science + Business Media NY,. 241 p.
18. Howard R.A., 2012, Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1: Markov Models. Vol. II: Semi-Markov and Decision Processes, Courier Corporation, 205p.

- 
19. Janssen J., Manca R., 2006, Applied Semi-Markov processes. Springer US, 310 p.
  20. Kobayashi H., Marl B.L., Turin W., 2012, Probability, Random Processes and Statistical Analysis: Cambridge University Press.. 812 p.
  21. Petersen P., 2012, Linear algebra. Springer-Verlag. NY. 427 p.

Получено 12.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-142-164

Оценки снизу многочленов и линейных форм  
от значений  $F$ -рядов

А. Х. Муньос Васкес

**Анхель Хорхеевич Муньос Васкес** — аспирант кафедры теории чисел, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

*e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru*

## Аннотация

Цель настоящей работы — применить обобщенный метод Зигеля — Шидловского для рассмотрения значения  $F$  — рядов в достаточно малых  $p$  — адических точках для конкретного значения  $p$ . Обобщенный метод Зигеля — Шидловского получил значительное развитие в работах Чирского В. Г., Бертрана Д., Йеббоу Й., Матала-Ахо Т., Зудилин В. В., Матвеева В. Ю., Андре И., однако эти работы относились к так называемым глобальным соотношениям и тесно связанными с ними понятиями бесконечной линейной и алгебраической независимости. В этой работе рассматриваются значения этих рядов в конкретном поле  $Q_p$ . Понятие бесконечной алгебраической независимости относится к прямому произведению бесконечного числа полей  $Q_p$ , оно означает что если  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — элементы этого прямого произведения координаты которых в поле  $Q_p$  обозначаются  $\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_n^{(p)}$ , то для любого многочлена с целыми коэффициентами, отличными от нуля, существует бесконечное множество простых чисел  $p$ , таких что в поле  $Q_p$  выполнено неравенство  $P(\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_n^{(p)}) \neq 0$ . Однако эти результаты не дают соответствующего утверждения для каждого конкретного числа  $p$ . В этой работе мы доказываем отличие от нуля линейной формы и многочлена от значений этих рядов в достаточно малой  $p$  — адической точке, малость которой зависит от высоты  $H$  этой формы или многочлена и от степени многочлена. В дальнейшем результаты этой работы будут применены к гипергеометрическим рядам с рациональными параметрами входящими в класс  $F$  — рядов.

*Ключевые слова:*  $F$  — ряды, оценки линейных форм и многочленов,  $p$  — адические числа.

*Библиография:* 23 названия.

## Для цитирования:

А. Х. Муньос Васкес. Оценки снизу многочленов и линейных форм от значений  $F$ -рядов // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 142–164.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK  
Vol. 21. No. 3.

---

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-142-164

**Lower estimates of polynomials and linear forms  
in the values of  $F$ -series**

A. Kh. Munos Vaskes

**Ankhel Khorkheevich Munos Vaskes** — post-graduate student, department of number theory, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

*e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru*

**Abstract**

The paper applies a modification of the generalized Sigel – Shidlovskii's method to values of  $F$  – series at sufficiently small  $p$  – adic points for a given  $p$ . The generalized Siegel – Shidlovskii's method is considerably developed in works by Chirskii V. G., Bertrand D., Yebbou Y, Matala-Aho T., Zudilin V. V., Matveev V. Yu., Andre Y. et al. But these papers dealt with the so called global relations and related notions such as infinite linear and algebraic independence. Here we consider values at points from a given field  $\mathbb{Q}_p$ . The notion of the infinite algebraic independence is related to a direct product of infinite set of fields  $\mathbb{Q}_p$ , it means that if  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  – are elements of this direct product with coordinates  $\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_n^{(p)}$  in the field  $\mathbb{Q}_p$ , then for any non-zero polynomial with integer coefficients there exist infinitely many primes  $p$  such that in  $\mathbb{Q}_p$  one has  $P(\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_n^{(p)}) \neq 0$ . But these results give no information for a specific  $p$ . Here we prove that a non-zero linear form and a non-zero polynomial do not vanish at values of the considered series at  $p$  – adic points which are small enough, depending on the height of a linear form or a polynomial and depending on the degree of the polynomial. The results of these paper will be applied to the values of generalized hypergeometric  $F$  – series.

*Keywords:*  $F$  – series, estimates linear forms and polynomials,  $p$  – adic numbers.

*Bibliography:* 23 titles.

**For citation:**

A. Kh. Munos Vaskes, 2020, "Lower estimates of polynomials and linear forms in the values of  $F$ -series", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 142–164.

## 1. Введение

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** *Степенной ряд называется  $F$  – рядом, если он входит в некоторый класс  $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$ , где  $\mathbb{K}$  – алгебраическое числовое поле конечной степени над полем  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел,  $\kappa = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$*

Класс  $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$  определяется следующим образом. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n. \quad (1)$$

Пусть:

1.  $a_n \in \mathbb{K}, n = 0, 1, 2, \dots;$

2.  $|\overline{a_n}| = O(e^{c_1 n})$ ,  $n \rightarrow \infty$  (где для алгебраического числа  $\alpha$  символ  $|\overline{\alpha_n}|$  обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраически сопряжённых с  $\alpha$  чисел);
3. существует последовательность натуральных чисел  $d_n = q^n d_{0,n}$ , где  $q \in \mathbb{N}$ , такая, что  $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

При этом  $d_{0,n}$  делятся только на простые числа  $p$ , не большие  $c_2 n$ , причём

$$\text{ord}_p d_{0,n} \leq c_3 \left( \log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

При выполнении перечисленных условий будем говорить, что  $f(z)$  *входит в класс*  $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$ .

Мы сохраняем обозначения использованные в работах В. Г. Чирского.

$F$  – ряды естественным образом дополняют классы  $E$  – и  $G$  – функций Зигеля, представляющих собой степенные ряды вида  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  соответственно. Более того, сразу ясно, что если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$  является  $F$  – рядом, то  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  –  $G$  – функция, а  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$  –  $E$  – функция Зигеля.

Пусть  $\mathbb{K}$  – алгебраическое числовое поле конечной степени  $\kappa$  над  $\mathbb{Q}$ . Пусть  $V$  – множество всех нормирований на поле  $\mathbb{K}$ . Для любого  $v \in V$  соответствующие пополнения полей  $\mathbb{K}$  и  $\mathbb{Q}$  обозначаем  $\mathbb{K}_v$  и  $\mathbb{Q}_v$ . Поле  $\mathbb{K}_v$  является конечным расширением поля  $\mathbb{Q}_v$ ,  $[\mathbb{K}_v : \mathbb{Q}_v] = \kappa_v$ , причём для любого простого числа  $p$

$$\sum_v \kappa_v = \kappa. \quad (2)$$

где суммирование в левой части равенства производится по всем нормированиям  $v$ , продолжающим  $p$  – адическое нормирование поля  $\mathbb{Q}$ .

Удобно рассматривать нормализованные нормирования: если  $v$  продолжает  $p$  – адическое нормирование то положим

$$|p|_v = p^{-\frac{\kappa_v}{\kappa}} \quad (3)$$

Из формулы произведения по всем нормированиям  $v$  поля  $\mathbb{K}$

$$\prod_{v \in V} |x|_v = 1,$$

для любого  $x \in \mathbb{K}$ ,  $x \neq 0$  следует часто встречающееся в дальнейшем неравенство: *если  $A$  – целое число из поля  $\mathbb{K}$ ,  $A \neq 0$ , то для любого  $v \in V_0$  (множества всех неархимедовых нормирований поля  $\mathbb{K}$ ) имеет место неравенство:*

$$|A|_v \geq \frac{1}{|A|}. \quad (4)$$

Действительно, для любого  $\tilde{v} \in V_0$  выполняется неравенство  $|A|_{\tilde{v}} \leq 1$ , следовательно

$$\prod_{\tilde{v} \in V_0} |A|_{\tilde{v}} \leq |A|_v. \quad (5)$$

С другой стороны, по формуле произведения

$$\prod_{\tilde{v} \in V_0} |A|_{\tilde{v}} = \frac{1}{\prod_{\tilde{v} \in V_{\infty}} |A|_{\tilde{v}}} \quad (6)$$

Кроме того в виду равенства (2)

$$\prod_{v \in V_\infty} |A|_v = \prod_{i=1}^{\kappa} |A^{(i)}|^{\frac{\kappa_v}{\kappa}} \leq \prod_{i=1}^{\kappa} |\bar{A}|^{\frac{\kappa_v}{\kappa}} = |\bar{A}|, \quad (7)$$

где  $A^{(i)}$  – сопряжённые с  $A$  числа. Из (5) – (7) следует (4).

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n, b_n \in \mathbb{K}_v$  сходится в  $\mathbb{K}_v, v \in V_0$  тогда и только тогда, когда  $|b_n|_v \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  (См. [1]).

Известно следующее очевидное свойство нормирований  $v \in V_0$ : если  $\sum_{k=K}^{\infty} a_k$  – сходящийся в  $\mathbb{K}_v$  ряд, то

$$\left| \sum_{k=K}^{\infty} a_k \right|_v \leq \max_{k \geq K} |a_k|_v, a_k \in \mathbb{K}_v \quad (8)$$

Далее, извстно, что

$$\text{ord}_p n! = \frac{n - S_n}{p - 1}, \quad (9)$$

(См. [1]), где  $S_n$  обозначает сумму цифр в  $p$ -ичном разложении натурального числа  $n$ . Очевидно неравенства

$$1 \leq S_n \leq (p - 1) \log_p n. \quad (10)$$

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \quad (11)$$

и пусть для некоторого  $v \in V_0$  множество  $|A_n|_v, n = 0, 1, 2, \dots$  ограничено. Тогда мы обозначаем

$$\langle f \rangle_v = \sup \{|A_n|_v, n = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (12)$$

**ЛЕММА 1.** *Введённая выше величина (12) обладает следующими свойствами:*

1. Если для рядов  $f(z), g(z)$  вида (11) и некоторого  $v \in V_0$  определены величины  $\langle f \rangle_v, \langle g \rangle_v$  то для их произведения  $f(z)g(z)$  определена величина  $\langle fg \rangle_v$ , причём

$$\langle fg \rangle_v \leq \langle f \rangle_v \langle g \rangle_v \quad (13)$$

2. Если для ряда (11) и некоторого  $v \in V_0$  определена величина  $\langle f \rangle_v$ , то для формальной производной этого ряда  $f'(z)$  также определена величина  $\langle f' \rangle_v$  и

$$\langle f' \rangle_v \leq \langle f \rangle_v \quad (14)$$

3. Если для ряда (11) и некоторого  $v \in V_0$  определена величина  $\langle f \rangle_v, |\xi|_v \leq 1$  и ряд  $f(\xi)$  сходится в поле  $\mathbb{K}_v$ , то

$$|f(\xi)|_v \leq \langle f \rangle_v \quad (15)$$

**ЛЕММА 2.** 1. *Формальная производная*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n n! z^{n-1} \quad (16)$$

$F$  – ряда (1) является  $F$  – рядом.

## 2. Формальный интеграл

$$\int_0^z f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

$F$  – ряда (1) является  $F$  – рядом.

3. Если  $\lambda$  – алгебраическое число, то  $f(\lambda z)$  –  $F$  – ряд.

4. Сумма и произведение конечного числа  $F$  – рядов является  $F$  – рядом.

Лемма 2 означает, что  $F$  – ряды, также как и  $E$  – и  $G$  – функции (см. [18]) образуют кольцо степенных рядов, замкнутое относительно операций формального дифференцирования, формального интегрирования от 0 до  $z$  и замены переменной  $z$  на  $\lambda z$  где  $\lambda$  – алгебраическое число.

ЛЕММА 3. Пусть  $F$  – ряд  $f(z)$  принадлежит классу  $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$ . Тогда для любого простого числа  $p$  и любого нормирования  $v$ , продолжающего  $p$  – адическое, и любого числа  $\delta > 0$ , рассматриваемый ряд сходится в  $\mathbb{K}_v$  при

$$|z|_p < p^{\frac{\kappa_v}{\kappa} \left( \frac{1}{p-1} - \text{ord}_p q - \frac{c_3}{p^2} - \delta \right)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть  $\xi = \frac{a}{b}$ ,  $a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, b \in \mathbb{N}$ ,  $b$  выбрано наименьшим с такими условиями,  $p$  – простое число,  $p \geq c_3$ ,  $(p, q) = 1$ ,  $v$  продолжает  $p$  – адические нормирования. Тогда любой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! \xi^n$$

из класса  $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$  сходится в поле  $\mathbb{K}_v$ .

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого  $F$  – ряда  $f(z)(1)$  из класса  $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$  и  $v \in V_0$ , продолжающего  $p$  – адическое нормирование,  $p \geq c_3$ ,  $(p, q) = 1$ , определена величина  $\langle f \rangle_v$ , причём  $\langle f \rangle_v = \max_n |a_n n!|_v$ .

Напомним упомянутое выше определение глобального соотношения.

Если  $P(y_1, \dots, y_m)$  – многочлен с коэффициентами из поля  $\mathbb{K}$ , степенные ряды  $f_1(z), \dots, f_m(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ ,  $\xi \in \mathbb{K}$ , то соотношение

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0 \quad (17)$$

называется *глобальным*, если оно выполняется во всех полях  $\mathbb{K}_v$ , где сходятся все ряды  $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ .

Отсутствие глобальных соотношений означает, что для любого многочлена  $P(y_1, \dots, y_m)$  с коэффициентами из поля  $\mathbb{K}$  существует простое число  $p$  и существует нормирование  $v$  поля  $\mathbb{K}$ , продолжающее  $p$  – адическое такие, что в поле  $\mathbb{K}_v$  выполняется неравенство

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0$$

Говоря об отсутствии глобальных соотношений, имеет смысл определить границу сверху для вышеупомянутого числа  $p$ , и дать оценку снизу для величины  $|P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))|_v$  в виде выражений, зависящих от  $\xi$ , от степени и размера многочлена  $P(y_1, \dots, y_m)$ , от числа  $m$  и от параметров класса, которому принадлежат рассматриваемые ряды. В формулируемых теоремах положительные постоянные  $c_i$ ,  $i = 4, 5, \dots$  зависят от  $\xi$ , числа  $m$  и от параметров класса, которому принадлежат  $F$  – ряды, но не зависят от степени и размера рассматриваемого многочлена  $P(y_1, \dots, y_m)$ .

В работах [3]–[6], [8]–[12], [19]–[23] исследован вопрос о глобальных соотношениях для  $F$  – рядов.

Везде далее считаем  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}$  и рассматриваем  $|\cdot|_p$  для выбранного  $p$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $F$  – ряды  $1 = f_1(z), \dots, f_m(z)$  принадлежат классу  $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$  и удовлетворяют системе линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y'_i = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{i,j} y_j, i = 1, \dots, m, \quad (18)$$

где  $Q_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ . Пусть  $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$  и  $T(z)Q_{i,j} \in \mathbb{Z}(z)$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ . Пусть эти ряды линейно независимы над  $\mathbb{C}(z)$ . Пусть

$$L(y_1, \dots, y_m) = h_1 y_1 + \dots + h_m y_m \quad (19)$$

произвольная линейная форма, коэффициенты которой являются целыми числами из поля  $\mathbb{Q}$ , причём среди них есть отличные от нуля. Пусть, кроме того,  $\max_{i=1, \dots, m} |\overline{h_i}| = H$ ,  $H \geq H_0$ .

Пусть  $p$  – простое число,  $(p, q) = 1$ , выполняются условия

$$p \left( \frac{\ln p - 1}{\ln p} \right) > 2c_3, \quad (20)$$

а также  $\xi = p^{\gamma(H)}$ ,  $T(\xi) \neq 0$  и пусть  $\gamma(H) > \frac{m \ln \ln H}{\ln p}$ .

Тогда в поле  $\mathbb{Q}_p$  выполняется

$$L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0. \quad (21)$$

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $F$  – ряды  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  принадлежат классу  $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$  и удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = Q_{i,0} + \sum_{j=1}^{\infty} Q_{i,j} y_j, i = 1, \dots, m, \quad (22)$$

где  $Q_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ . Пусть  $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$  и  $T(z)Q_{i,j} \in \mathbb{Z}(z)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ . Пусть эти ряды алгебраически независимы над  $\mathbb{C}(z)$ . Пусть

$$P(y_1, \dots, y_m) \quad (23)$$

произвольный многочлен степени  $K$ , коэффициенты которого являются целыми числами из поля  $\mathbb{Q}$ , причём среди них есть отличные от нуля. Пусть, кроме того, наибольшая из абсолютных величин этих коэффициентов, а также сопряжённых с ними чисел, равна  $H$ ,  $H \geq H_0$ .

Пусть  $p$  – простое число,  $(p, q) = 1$ , выполняются условия

$$p \left( \frac{\ln p - 1}{\ln p} \right) > 2(c_3 + 1)K, \quad (24)$$

а также  $\xi = p^{\gamma(H)}$ ,  $T(\xi) \neq 0$  и пусть  $\gamma(H) \geq \binom{m+K}{m} \frac{\ln \ln H}{\ln p}$ .

Тогда в поле  $\mathbb{Q}_p$  выполняется

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0. \quad (25)$$

## 2. Доказательство теорем 1 и 2

Используется модификация обобщающая метод Зигеля – Шидловского. Используемые леммы и сам метод сформулированы следуя монографии [18].

## 2.1. Формулировка основных лемм метода Зигеля – Шидловского

Пусть

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n} z^n, k = 1, \dots, m, m \geq 2, b_{k,n} \in \mathbb{Q} \quad (26)$$

формальные степенные ряды. Пусть  $N$  – натуральное число,

$$P_k \in \mathbb{Q}[z], \deg P_k \leq N. \quad (27)$$

Рассмотрим линейную форму

$$R(z) = \sum_{k=1}^m P_k f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n \quad (28)$$

Если считать  $P_k \in \mathbb{Q}[z]$  многочленами с неопределёнными коэффициентами и потребовать, чтобы  $r_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots, m(N+1) - 2$ , то получится система из  $m(N+1) - 1$  линейных однородных уравнений относительно  $m(N+1)$  неизвестных коэффициентов. Эта система всегда имеет нетривиальное решение. Следовательно,  $P_k \in \mathbb{Q}[z]$  можно выбрать так, чтобы  $\text{ord}_{z=0} R(z) \geq m(N+1) - 1$ .

Тем не менее, если ряды (26) не все тождественно равны нулю, а степени многочленов  $P_k \in \mathbb{Q}[z]$  ограничены сверху, то при изменении коэффициентов этих многочленов невозможно получить отличную от тождественного нуля форму со сколь угодно высоким порядком нуля при  $z = 0$ .

**ЛЕММА 4** (Лемма 4, [18]). Пусть  $N$  – натуральное число, (26) – формальные степенные ряды. Тогда существует натуральное число  $\Theta$ , зависящее от (26) и числа  $N$  такое, что при любом выборе многочленов (27) линейная форма (28) либо тождественно равна нулю, либо выполняется неравенство  $\text{ord}_{z=0} R(z) \leq \Theta$ .

**ЛЕММА 5** (Лемма 5, [18]). Пусть

$$\phi_1(z), \dots, \phi_s(z); \psi_1(z), \dots, \psi_m(z) \quad (29)$$

совокупность формальных степенных рядов, причём хотя бы при одном значении  $i$  ряд  $\psi_i(z)$  отличен от тождественного нуля.

Тогда существует натуральное число  $\underline{\Theta}_0$ , зависящее только от рядов (29), обладающее следующим свойством. Пусть

$$\alpha_1, \dots, \alpha_s; \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{Q} \quad (30)$$

произвольный набор чисел, для которого формальный степенной ряд  $\sum_{i=1}^m \beta_i \psi_i(z)$  не равен нулю тождественно. Пусть

$$\omega = \frac{\sum_{i=1}^s \alpha_i \phi_i(z)}{\sum_{i=1}^m \beta_i \psi_i(z)} \quad (31)$$

формальный степенной ряд. Тогда ни при каком наборе (30) ряд (31) не может быть рациональной функцией от  $z$  степени большей, чем  $\Theta_0$ .

Рассмотрим линейные формы от переменных  $y_1, \dots, y_m, m \geq 2$  вида

$$R = \sum_{i=1}^m P_i y_i, P_i \in \mathbb{Q}[z], i = 1, \dots, m. \quad (32)$$

Линейные формы (32) образуют модуль над кольцом  $\mathbb{Q}[z]$ .

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка (18), где  $Q_{k,i} = Q_{k,i}(z) \in \mathbb{Q}[z], i, k = 1, \dots, m$ . Многочлен  $T = T(z)$  представляет собой наименьший общий знаменатель коэффициентов системы (18). На рассматриваемом модуле линейных форм (32) определим соответствующий системе (18) линейный дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^m Q_{k,i} y_i \right) \frac{\partial}{\partial y_k}. \quad (33)$$

Пусть  $y_1, \dots, y_m, m \geq 2$  представляют собой формальные степенные ряды по степеням  $z$ , составляющие формальное решение системы (18). Подставляя их в форму (32) вместо переменных, получаем формальный степенной ряд  $R(z)$  по степеням  $z$ . Формальная производная ряда  $R(z)$  по  $z$  является линейной формой от рядов  $y_1, \dots, y_m$  и их формальных производных. После замены  $y'_1, \dots, y'_m$  на правые части соответствующих дифференциальных уравнений (18) и умножения на многочлен  $T = T(z)$  получим линейную форму от  $y_1, \dots, y_m$  с коэффициентами из  $\mathbb{Q}[z]$ . Таким образом, применение оператора  $D(33)$  к форме  $R$  означает вычисление формальной производной  $R(z)$  по  $z$  с последующей заменой  $y'_1, \dots, y'_m$  на правые части соответствующих дифференциальных уравнений (18), т.е. для решений этой системы имеем

$$TDR = TR'.$$

Рассмотрим произвольную линейную форму (32) от  $y_1, \dots, y_m$  с коэффициентами из  $\mathbb{Q}[z]$  и обозначим её

$$R_1 = \sum_{i=1}^m P_{1,i} y_i, P_{1,i} \in \mathbb{Q}[z], i = 1, \dots, m. \quad (34)$$

Положим

$$R_k = TDR_{k-1}, k = 2, 3, \dots \quad (35)$$

Иными словами, ввиду (35), при подстановке в  $R_1(34)$  некоторого нетривиального формального решения системы (18) вместо переменных  $y_1, \dots, y_m$ , имеют место равенства

$$R_k = TR'_{k-1}, k = 2, 3, \dots \quad (36)$$

Согласно сказанному выше,  $R_k$  представляет собой линейную форму от  $y_1, \dots, y_m$  с коэффициентами из  $\mathbb{Q}[z]$ . Следовательно, выполняются равенства

$$R_k = \sum_{i=1}^m P_{k,i} y_i, P_{k,i} \in \mathbb{Q}[z], i = 1, \dots, m, k = 2, 3, \dots \quad (37)$$

Из (36) и (37) следует, что

$$P_{k,i} = T \left( P'_{k-1,i} + \sum_{j=1}^m P_{k-1,j} Q_{j,i} \right), i = 1, \dots, m, k = 2, 3, \dots \quad (38)$$

*Рангом совокупности линейных форм* с коэффициентами из кольца или поля  $W$  называется максимальное число линейно независимых над  $W$  форм в этой совокупности.

ЛЕММА 6 (Лемма 6,[18]). Ранг совокупности линейных форм  $R_1, R_2, \dots$  над  $\mathbb{Q}[z]$  равен  $l$  тогда и только тогда, когда формы  $R_1, \dots, R_l$  линейно независимы над  $\mathbb{Q}[z]$ , но формы  $R_1, \dots, R_{l+1}$  уже линейно зависимы над  $\mathbb{Q}[z]$

ЛЕММА 7 (Лемма 7,[18]). Пусть ранг системы линейных форм  $R_1, \dots, R_m$  равен  $l$ ,  $1 \leq l < m$ . Тогда можно выбрать  $m - l$  линейно независимых над  $\mathbb{Q}(z)$  формальных решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений (18)

$$y_{1,s}, \dots, y_{m,s}, s = 1, \dots, m - l$$

таких, что формы  $R_1, R_2, \dots$  обращаются в нуль при подстановке в них вместо переменных  $y_1, \dots, y_m$  любого из этих решений.

Сформулируем вариант основной леммы Шидловского А.Б. о порядке нуля линейной формы.

ЛЕММА 8 (Лемма 8,[18]). Пусть совокупность формальных степенных рядов  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  составляет формальное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (18) и линейно независима над  $\mathbb{Q}(z)$ ,

$$\rho = \min_{1 \leq i \leq m} \text{ord}_{z=0} f_i(z), \quad (39)$$

$$\sigma = \max(\deg T, \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq m}} \deg TQ_{k,i}). \quad (40)$$

Пусть  $N$  – натуральное число,

$$R_1 = \sum_{i=1}^m P_{1,i} y_i, \deg P_{1,i} \leq N, P_{1,i} \in \mathbb{Q}(z), i = 1, 2, \dots, m,$$

$R_1$  – отличная от тождественного нуля линейная форма и ранг линейных форм  $R_1, R_2, \dots$ , полученных с помощью равенств (36) равен  $l$ .

Тогда существует постоянная  $r_0$ , зависящая только от совокупности рядов  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  такая, что при  $y_i = f_i(z), i = 1, \dots, m$  выполняется неравенство

$$\text{ord}_{z=0} R_1(z) = \text{ord}_{z=0} \sum_{i=1}^m P_{1,i} f_i(z) \leq lN + r_0. \quad (41)$$

При  $l = m$  в неравенстве (41) можно заменить число  $r_0$  на число  $r_1$ ,

$$r_1 = \sigma \frac{(m-1)m}{2} + m + \rho - 1. \quad (42)$$

Положим

$$N_0 = 2(r_0 - m + 1), \quad (43)$$

$$s \in \mathbb{N}, 0 \leq s \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \quad (44)$$

$$t = \sigma \frac{(m-1)m}{2} + s + \rho \quad (45)$$

где  $N$  – натуральное число, а  $r_0$  определено в лемме 8 (или равенством (42) при  $l = m$ ).

ЛЕММА 9 (Лемма 9,[18]). Пусть выполнены условия леммы 8 и линейная форма  $R_1$  при  $y_i = f_i(z)$  удовлетворяют условию

$$\text{ord}_{z=0} R_1(z) \geq m(N+1) - s - 1 \quad (46)$$

Тогда при  $N \geq N_0$  линейные формы  $R_1, \dots, R_m$ , получающиеся из формы  $R_1$  с помощью равенств (36), линейно независимы и определитель

$$\Delta(z) = |P_{k,i}|_{k,i=1,\dots,m}, \quad (47)$$

составленный из коэффициентов этих форм, имеет вид

$$\Delta(z) = z^{mN-s-\rho} \Delta_1(z) \quad (48)$$

где  $\Delta_1(z)$  отличный от тождественного нуля многочлен из  $\mathbb{Q}[z]$ ,  $\deg \Delta_1(z) = \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq t$

ЛЕММА 10 (Лемма 10,[18]). Пусть совокупность формальных степенных рядов  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  составляет формальное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (18) и линейно независима над  $\mathbb{Q}(z)$ , числа  $\rho, \sigma$  определены равенствами (39), (40), а числа  $N_0, s, t$  равенствами (43) – (45). Пусть линейная форма  $R_1$  такова, что  $N \geq N_0$  и при  $y_i = f_i(z)$ ,  $i = 1, \dots, m$  выполняется условие (46),  $R_{k+1} = TDR_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\xi$  – целое число из  $\mathbb{Q}$ ,  $T(\xi) \neq 0$ .

Тогда матрица

$$\|P_{k,i}(\xi)\|_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,m+t}} \quad (49)$$

имеет ранг  $m$ .

## 2.2. Построение первой приближающей формы

ЛЕММА 11. Пусть ряды

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n} n! z^n, i = 1, \dots, m$$

принадлежат классу  $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$ . Тогда для любого натурального числа  $N$  существуют многочлены

$$P_i(z) = \sum_{n=0}^N B_{i,n} n! z^n, i = 1, \dots, m \quad (50)$$

такие, что их коэффициенты  $B_{i,n}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $n = 0, \dots, N$  – целые числа из поля  $\mathbb{Q}$ , удовлетворяющие неравенству

$$|\overline{B_{i,n}}| \leq e^{c_{10} N \sqrt{\ln N}}. \quad (51)$$

При этом линейная форма

$$R(z) = \sum_{i=1}^m P_i(z) f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n n! z^n \quad (52)$$

имеет порядок нуля  $\text{ord}_{z=0} R(z)$  не меньше, чем  $k(N) + 1$ , где

$$k(N) = m(N+1) - \left\lceil \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rceil \quad (53)$$

и для любого простого числа  $p$ , не превосходящего величины  $k(N)$  такого, что

$$p \geq c_3, p \left( \frac{\ln p - 1}{\ln p} \right) > 2c_3, (p, q) = 1 \quad (54)$$

справедливы неравенства

$$\langle R \rangle_p \leq \left| (m(N+1) - \lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \rfloor)! \right|_p e^{c_{11} \log_p N + c_3 \frac{N}{p^2}} \quad (55)$$

$$|R(\xi)|_p \leq |(m(N+1) - \lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \rfloor)!|_p \cdot e^{c_{11} \log_p N + c_3 \frac{N}{p^2}} \cdot p^{-\gamma(H)(m(N+1) - \lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \rfloor)} \quad (56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим

$$P_i(z) f_i(z) = \sum_{k=0}^N B_{i,k} k! z^k \sum_{l=0}^{\infty} a_{i,l} l! z^l = \sum_{n=0}^{\infty} b_{i,n} n! z^n, i = 1, \dots, m, \quad (57)$$

где при любом натуральном  $n$

$$b_{i,n} = \frac{1}{n!} \sum B_{i,k} k! a_{i,l} l!,$$

а суммирование производится по всем неотрицательным целым  $k, l$  таким, что  $k + l = n$ .

Условие (53) означает, что

$$\sum_{i=1}^m b_{i,n} = 0, n = 0, 1, \dots, m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor,$$

или ввиду (57),

$$\sum_{i=1}^m \sum \frac{k! l!}{(k+l)!} B_{i,k} a_{i,l} = 0, n = 0, 1, \dots, m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor, \quad (58)$$

где внутреннее суммирование производится по всем неотрицательным целым  $k, l$  таким, что  $k + l = n$ .

Оценим величину  $d_{0,n}$ , фигурирующую в определении класса  $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$ . Заметим, что ряд  $\sum_p \frac{c_3}{p^2}$  сходится, поэтому из третьего условия этого определения и из неравенства

$$\pi(n) \leq c_5 \frac{n}{\ln n} \quad (59)$$

(здесь мы использовали оценку Чебышёва П. Л. для нахождения количества простых чисел  $p$  не превосходящих  $n$ , справедливую для всех  $n \geq 2$ , [2]) следует неравенство:

$$d_{0,n} = \prod_{p \leq c_2 n} p^{\text{ord}_p d_{0,n}} \leq \prod_{p \leq c_2 n} p^{c_3 (\log_p n + \frac{n}{p^2})} \leq e^{c_3 \ln n \cdot c_3 \frac{c_2 n}{\ln(c_2 n)}} e^{n \sum_p \frac{c_3}{p^2}} \leq e^{c_{12} n}. \quad (60)$$

Умножим обе части каждого из уравнений (58) на  $\beta_N d_{0,N}$ , где величина  $\beta_N$  наименьшее общее кратное чисел  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $k = 0, \dots, n$  про которую известна оценка  $\beta_n \leq e^{c_4 n}$ . При этом получится система линейных уравнений относительно  $B_{i,n}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $n = 0, \dots, N$ . Коэффициенты этой системы являются целыми числами поля  $\mathbb{Q}$ . Архимедовы абсолютные величины этих коэффициентов, а также сопряжённых с ними чисел, ввиду определения класса  $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$ , оценки для  $\beta_N$  и неравенства (60) не превосходят величины:

$$e^{c_6 n} q^n e^{c_{12} n} e^{c_7 n} = e^{c_{13} n} \leq e^{c_{13} (m(N+1) - \lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \rfloor)}. \quad (61)$$

Применем к нашей системе уравнений известную лемму Зигеля.

ЛЕММА 12 (см.[18]). Пусть

$$a_{i,j} \in \mathbb{Z}, |\overline{a_{i,j}}| \leq A, i = 1, \dots, P, j = 1, \dots, Q, A > 0.$$

Пусть  $P < Q$ . Тогда существует нетривиальное решение  $(x_1, \dots, x_Q)$  системы уравнений

$$\sum_{j=1}^Q a_{i,j} x_j = 0, i = 1, \dots, P$$

такое, что  $x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, Q$ . Кроме того, с некоторой, зависящей только от поля  $\mathbb{Q}$ , постоянной  $c_{14}$  выполняются неравенства

$$|\overline{x_i}| < c_{14}(c_{14}QA)^{\frac{P}{Q-P}}, i = 1, \dots, Q.$$

В рассматриваемой системе (58) число неизвестных  $Q$  равно  $m(N+1)$ , число уравнений  $P$  равно  $m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor + 1$ . Следовательно,  $Q - P = \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor - 1$ ,

$$\frac{P}{Q-P} = \frac{m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor + 1}{\left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor - 1} \leq \frac{m(N+1) - \frac{N}{\sqrt{\ln N}} + 2}{\frac{N}{\sqrt{\ln N}} - 2} \leq c_{15} \sqrt{\ln N} \quad (62)$$

Следовательно,

$$|\overline{B_{i,n}}| \leq c_{14}(c_{14}m(N+1)e^{c_{13}(m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor)})^{c_{15}\sqrt{\ln N}} \leq e^{c_{16}N\sqrt{\ln N}}, i = 1, \dots, m, n = 0, \dots, N.$$

Неравенство (51) доказано.

Рассмотрим

$$r_n = \sum_{i=1}^m b_{i,n} = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^m \sum B_{i,n-k} a_{i,k} (n-k)! k! = \sum_{i=1}^m \sum B_{i,n-k} a_{i,k} \frac{(n-k)! k!}{n!},$$

где внутреннее суммирование производится по всем неотрицательным целым  $k$ , не превосходящим  $n$ . Для произвольного простого числа  $p, p \geq c_3$ , не превосходящего величины  $k(N)$  такого, что  $(p, q) = 1$ , имеет место неравенство

$$|r_n|_p \leq \max |B_{i,n-k}|_p |a_{i,k}|_p \frac{(n-k)! k!}{n!}_p,$$

где максимум взят по всем  $i = 1, \dots, m$  и всем неотрицательным целым  $k$ , не превосходящим  $n$ . По определению класса  $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$  для  $p$ -адического нормирования  $(p, q) = 1$ , при  $p > c_2 n, p \geq c_3$  выполняется неравенство  $|a_{i,k}| \leq 1$ , а при  $c_3 \leq p \leq c_2 n$  выполняется неравенство

$$|a_{i,k}|_p \leq e^{c_3(\log_p n + \frac{n}{p^2})}.$$

Имеем при  $p > n$  выполняется  $\left| \frac{(n-k)! k!}{n!} \right|_p = 1$ , а при  $p \leq n$  имеем

$$\left| \frac{(n-k)! k!}{n!} \right|_p = e^{\frac{S_{n-k} + S_k - S_n}{p-1}} \leq e^{c_{17} \log_p n}.$$

Следовательно, для  $p$ -адического нормирования при  $p \leq c_2 n$  выполняется неравенство

$$|r_n|_p \leq e^{c_{18} \log_p n + c_8 \frac{n}{p^2}}, \quad (63)$$

а при  $p > c_2 n$  выполняется неравенство  $|r_n|_p \leq 1$ .

Для произвольного простого числа  $p$ , не превосходящего величины  $k(N)$ , такого, что  $p \geq c_3$ ,  $(p, q) = 1$ , оценим сверху

$$\langle R \rangle_p \leq \max_{n \geq k(N)+1} (|r_n|_p |n!|_p).$$

Поскольку для  $|r_n|_p$  выполняется оценка (63),

$$\langle R \rangle_p \leq \max_{n \geq k(N)+1} e^{c_{18} \log_p n + c_3 \frac{n}{p^2}} \cdot e^{-\frac{n - S_n}{p-1} \times \ln p} \leq \max_{n \geq k(N)+1} e^{c_{19} \log_p n + c_3 \frac{n}{p^2} - \frac{n}{p-1}}. \quad (64)$$

Функция  $c_{19} \log_p n + c_3 \frac{n}{p^2} - \frac{n}{p-1}$  убывает при

$$n > \frac{c_{19} p^2 (p-1)}{(p^2 - c_3 (p-1)) \ln p},$$

поэтому если

$$k(N) > \frac{c_{19} p^2 (p-1)}{(p^2 - c_3 (p-1)) \ln p}, \quad (65)$$

то максимум в правой части неравенства (64) будет достигнут при  $n = k(N)$ . Правая часть неравенства (65) представляет собой возрастающую функцию от  $p$  при условии, что выполняется неравенство

$$p \left( \frac{\ln p - 1}{\ln p} \right) > 2c_3, \quad (66)$$

поскольку её производная по  $p$  равна

$$\frac{c_{19}}{((p^2 - c_3 (p-1)) \ln p)^2} \times (p^4 (\ln p - 1) - 2c_3 p^3 \ln p + (c_3 + 1)p^3 + 4c_3 p^2 \ln p - 2c_3 p^2 - 2c_3 p \ln p + pc_3)$$

и эта величина положительна при условии (66). Так как рассматриваются лишь простые числа  $p \leq k(N)$ , неравенство (65) выполняется при всех таких  $p$ , удовлетворяющих неравенству (66), если

$$k(N) > \frac{c_{19} (k(N))^2 (k(N) - 1)}{((k(N))^2 - c_3 (k(N) - 1)) \ln k(N)}, \quad (67)$$

а неравенство (67), выполняется при  $N > c_{20}$ . Итак, мы доказали, что

$$\langle R \rangle_p \leq e^{-\frac{m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor + 1}{p-1} + c_9 \frac{N}{p^2} + c_{21} \log_p N}.$$

**ЛЕММА 13.** Если  $\text{ord}_{z=0} R(z) \geq m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor$ ,  $|\xi|_p \leq 1$ , то  $|R(\xi)|_p \leq \langle R \rangle_p |\xi|_p^{m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor}$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

$$R(\xi) = \sum_{n=m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor}^{\infty} r_n \xi^n \leq \max |r_n \xi^n|_p \leq \langle R \rangle_p |\xi|_p^{m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor}$$

□

Лемма 11 полностью доказана. □

### 3. Оценки для приближающих форм

ЛЕММА 14. Пусть  $N \geq N_0$ , совокупность степенных рядов  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  из класса  $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$  составляет формальное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (18) и линейно независима над  $\mathbb{C}(z)$ , форма  $R_1 = R$  (52) и её коэффициенты  $P_{1,i}$  (50) сконструированы по лемме 11,  $\xi = p^{\gamma(H)}, T(\xi) \neq 0$ .

Пусть линейные формы  $R_k$  и их коэффициенты  $P_{k,i}$  определены равенствами (37) и (38). Тогда

$$|\overline{P_{k,i}(\xi)}| \leq \prod_{n=0}^{k-1} (n\sigma + m + N) e^{N \ln N + c_{10} N \sqrt{\ln N} + c_{22} k + c_{23} N} \cdot p^{\gamma(H)(N + c_{24} \lfloor \frac{N}{\ln N} \rfloor)}, i = 1, \dots, m, k = 0, 1, \dots \quad (68)$$

для размера  $|\overline{P}|$  (т.е. для максимума модулей коэффициентов многочлена и всех их алгебраически сопряжённых) также выполняется (68), и для любого простого числа  $p$ , не превосходящего величины  $k(N)$  (53) и удовлетворяющего условиям (54) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \langle R_k \rangle_p &\leq \left| (m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor)! \right|_p e^{c_{11} \log_p N + c_3 \frac{N}{p^2}} \\ |R_k(\xi)|_p &\leq \left| (m(p+1) - \left\lfloor \frac{p}{\sqrt{\ln p}} \right\rfloor)! \right|_p e^{c_{11} + \frac{c_3}{p}} \cdot p^{-\gamma(H)(mN - c_{25} \lfloor \frac{N}{\ln N} \rfloor)} \end{aligned} \quad (69)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  и выполняются неравенства  $|a_n| \leq b_n, n = 0, 1, 2, \dots$ , то это принято обозначать так:  $\phi(z) \ll \psi(z)$  ([18]). Пусть, как и раньше,

$$\max_{k,i=1,\dots,m} (\deg T(z), \deg T(z)Q_{k,i}(z)) = \sigma. \quad (70)$$

Кроме того, пусть  $C$  обозначает наибольшую из абсолютных величин всех сопряжённых в поле  $\mathbb{Q}$  с коэффициентами многочленов  $T(z), T(z)Q_{k,i}(z)$  чисел. Тогда, ввиду (70), для всех  $k, i = 1, \dots, m$

$$T(z) \ll C(1+z)^\sigma, T(z)Q_{k,i}(z) \ll C(1+z)^\sigma \quad (71)$$

Докажем по индукции следующее утверждение:

$$P_{k+1,i}(z) \ll C^k (1+z)^{k\sigma+N} \prod_{n=0}^{k-1} (n\sigma + m + N) e^{N \ln N + c_{26} N \sqrt{\ln N}}, i = 1, \dots, m, k = 0, 1, 2, \dots \quad (72)$$

Если верхний предел в произведении меньше, или равен 0, то мы полагаем всё это произведение равным 1.

Из неравенства (51) леммы 11 следует неравенство

$$P_{1,i}(z) \ll (1+z)^N e^{N \ln N + c_{27} N \sqrt{\ln N}}, i = 1, \dots, m, \quad (73)$$

так что доказываемое утверждение выполняется при  $k = 0$ .

Согласно (38),

$$P_{k+1,i}(z) = T(z) \left( P'_{k,i}(z) + \sum_{j=1}^m P_{k,j}(z) Q_{j,i}(z) \right), i = 1, \dots, m, k = 1, 2, \dots \quad (74)$$

Из (50), (71) и (74) при  $k \leq m + t$  следует неравенство

$$\deg P_{k,i}(z) \leq N + c_{28} N \sqrt{\ln N} \quad (75)$$

Ввиду неравенства (71) и индуктивного предположения

$$P'_{k,i}(z) << ((k-1)\sigma + N)C^{k-1}(1+z)^{(k-1)\sigma+N} \prod_{n=0}^{k-2} (n\sigma + m + N) e^{N \ln N + c_{28} N \sqrt{\ln N}}, \quad (76)$$

$$i = 1, \dots, m, k = 1, 2, \dots$$

Кроме того, по индуктивному предположению и ввиду (71),

$$T(z) \sum_{j=1}^m P_{k,j} Q_{j,i} << C(1+z)^\sigma C^{k-1}(1+z)^{(k-1)\sigma+N} \prod_{n=0}^{k-2} (n\sigma + m + N) e^{N \ln N + c_{29} N \sqrt{\ln N}} \quad (77)$$

Из (73), (74), (76), (77) получаем доказываемое соотношение (72).

Из (77) и (75) получаем неравенство (68).

Перейдём к оценке  $|R_k(\xi)|_p$ . Докажем, что  $\langle R_k \rangle_p |\xi|_p \leq \langle R_1 \rangle_p$ . Действительно, по построению (37)

$$R_k = T R'_{k-1}, k = 2, 3, \dots$$

По лемме 1, учитывая, что многочлен  $T(z)$  имеет целые коэффициенты из поля  $\mathbb{Q}$ ,

$$\langle R_k \rangle_p \leq \langle T \rangle_p \langle R'_{k-1} \rangle_p \leq \langle R'_{k-1} \rangle_p \leq \langle R_{k-1} \rangle_p, k = 2, 3, \dots \quad (78)$$

Из (78) сразу следует, что

$$\langle R_k \rangle_p \leq \langle R_1 \rangle_p, k = 2, 3, \dots \quad (79)$$

Согласно (55) леммы 11, из (79) следует:

$$\langle R_k \rangle_p \leq \left| (m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor)! \right|_p e^{c_{30} \log_p N + c_{31} \frac{N}{p^2}}$$

Снова по лемме 11, из неравенства (56) получаем по лемме 13 искомое неравенство (69).  $\square$

Из лемм 10 и 14 непосредственно следует такая лемма.

**ЛЕММА 15.** Пусть  $N \geq N_0$ , совокупность степенных рядов  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  из класса  $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$  составляет формальное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (18) и линейно независима над  $\mathbb{C}(z)$ ,  $\xi = p^{\gamma(H)}$ ,  $T(\xi) \neq 0$ .

Тогда при любом  $N \geq N_0$ , где  $N_0$  определено равенством (43), существует совокупность  $m$  линейно независимых линейных форм вида

$$L_k(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m h_{k,i} y_i, k = 1, \dots, m, \quad (80)$$

где  $h_{k,i} \in \mathbb{Z}$ ,  $i, k = 1, \dots, m$ , причём

$$|\overline{h_{k,i}}| \leq e^{N \ln N + c_{32} N \sqrt{\ln N}} \cdot p^{\gamma(H)(N + c_{33} \lfloor \frac{N}{\ln N} \rfloor)} \quad (81)$$

и для любого простого числа  $p$ , не превосходящего величины  $k(N)$  (53) такого, что выполнены условия (54) справедливы неравенства

$$|L_k(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))|_p \leq \left| (m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor)! \right|_p \cdot e^{c_{34} \log_p N + c_{35} \frac{N}{p^2}} \cdot p^{-\gamma(H)(m(N+1) - \lfloor \frac{N}{\ln N} \rfloor)} \quad (82)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $N$  – любое число, удовлетворяющее условиям леммы, а форма  $R_1(z)$  (52) сконструированна по лемме 11. Рассмотрим формы  $R_k(z)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . По лемме 10 матрица (49) имеет ранг  $m$  над полем  $\mathbb{Q}$ . Значит, среди её строк с номерами  $1, 2, \dots, m + t$  есть  $m$  линейно независимых над  $\mathbb{Q}$ . Пусть эти строки имеют номера  $w_1, \dots, w_m$ . Рассмотрим линейные формы

$$R_{w_j} = \sum_{i=1}^m P_{w_j,i}(\xi) y_i, j = 1, \dots, m. \quad (83)$$

Степени многочленов  $P_{w_j,i}(z)$  ввиду (75), не превосходят величины  $N + \sigma(m + t - 1)$ . Поэтому число  $P_{w_j,i}(\xi) \in \mathbb{Z}$ . Обозначим, учитывая (80) и (83),

$$L_k(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m a_{k,i} y_i = R_{w_k} = \sum_{i=1}^m P_{w_k}(\xi) y_i, k = 1, \dots, m.$$

Тогда по лемме 14,

$$|\overline{h_{k,i}}| \leq \prod_{n=0}^{m+t-1} (n\sigma + m + N) e^{N \ln N + c_{36} N \sqrt{\ln N} + c_{37} k + c_{38} N} \cdot p^{\gamma(H)(N + c_{39} \lfloor \frac{N}{\ln N} \rfloor)}, i, k = 1, \dots, m. \quad (84)$$

Так как  $t = \left\lceil \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rceil$ ,

$$\prod_{n=0}^{m+t-1} (n\sigma + m + N) \leq ((m + t - 1)\sigma + m + N)^{m+t-1} \leq e^{c_{40} N \sqrt{\ln N}}. \quad (85)$$

Из (84) и (85) следует доказываемое неравенство (81). Далее

$$\begin{aligned} |L_k(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))|_p &= |R_{w_k}(\xi)|_p \leq \\ &\leq |(m(N + 1) - \lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \rfloor)|_p \cdot e^{c_{41} \log_p N + c_{42} \frac{N}{p^2}} \cdot p^{-\gamma(H)(m(N+1) - \lfloor \frac{N}{\ln N} \rfloor)} \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (82), а с ним и лемма 15, доказаны.  $\square$

Рассмотрим линейную форму

$$L(y_1, \dots, y_m) = h_1 y_1 + \dots + h_m y_m, h_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m,$$

где не все  $h_i = 0$ ,  $|\overline{h_i}| \leq H$ .

По лемме 15 существует совокупность линейно независимых над полем  $\mathbb{Q}$  форм

$$L_1(y_1, \dots, y_m), \dots, L_m(y_1, \dots, y_m).$$

Среди этих форм имеется  $m - 1$  форм, линейно независимых с формой  $L(y_1, \dots, y_m)$ . Без потери общности будем считать что линейно независимы формы

$$L(y_1, \dots, y_m), L_2(y_1, \dots, y_m), \dots, L_m(y_1, \dots, y_m).$$

Это означает, что определитель

$$\begin{vmatrix} h_1 & \dots & h_m \\ h_{2,1} & \dots & h_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m,1} & \dots & h_{m,m} \end{vmatrix} \quad (86)$$

отличен от 0. Определитель (86) представляет собой целое число из поля  $\mathbb{Q}$ . В каждом поле  $\mathbb{Q}_p$ , где  $p$  – простое число, удовлетворяющее условию (54) и неравенству

$$p \leq m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor = k(N), \quad (87)$$

умножим первый столбец определителя (86) на 1, второй столбец на  $f_2(\xi)$ , и так далее, столбец с номером  $m$  на  $f_m(\xi)$  и прибавим к первому столбцу полученные остальные. Поскольку первый столбец умножили на 1, определитель не изменился.

Обозначим

$$L(\xi) = L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)), \quad L_k(\xi) = L_k(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)), \quad k = 2, \dots, m.$$

Тогда в первом столбце преобразованного определителя как раз и стоят, соответственно,  $L(\xi), L_2(\xi), \dots, L_m(\xi)$ , представляющие собой элементы рассматриваемого поля  $\mathbb{Q}_p$ . Иными словами, в каждом поле  $\mathbb{Q}_p$ ,  $p$  – простое число, удовлетворяющее (54) и (87), имеет место равенство

$$\Delta = \begin{vmatrix} L(\xi) & h_2 & \cdots & h_m \\ L_2(\xi) & h_{2,2} & \cdots & h_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_m(\xi) & h_{m,2} & \cdots & h_{m,m} \end{vmatrix} \quad (88)$$

Обозначим  $\Delta_i, i = 1, 2, \dots, m$  алгебраические дополнения элементов первого столбца определителя  $\Delta$ . Тогда равенство (88) можно записать в виде

$$\Delta = L(\xi)\Delta_1 + \sum_{i=2}^m L_i(\xi)\Delta_i. \quad (89)$$

Если  $L(\xi) = 0$  в рассматриваемом поле  $\mathbb{Q}_p$ , то

$$\Delta = \sum_{i=2}^m L_i(\xi)\Delta_i.$$

По доказанному выше,  $\Delta$  – отличное от 0 целое число. Поэтому  $|\Delta|_p \geq \frac{1}{|\Delta|}$  так как

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} h_1 & \cdots & h_m \\ h_{2,1} & \cdots & h_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{m,1} & \cdots & h_{m,m} \end{vmatrix} \leq m!H(\max R_{i,j})^{m-1} \leq \\ &\leq m!H(e^{N \ln N + c_{43}N\sqrt{\ln N}} \cdot p^{\gamma(H)(N + c_{44}\frac{N}{\sqrt{\ln N}})})^{m-1} \end{aligned}$$

поэтому

$$|\Delta|_p \geq e^{-\ln H - (m-1)(N \ln N + c_{45}N\sqrt{\ln N}) - \gamma(H) \ln p(m-1)(N + c_{46}\frac{N}{\sqrt{\ln N}})} \quad (90)$$

С другой стороны,

$$\left| \sum_{j=2}^m L_j(\xi)\Delta_j \right|_p \leq p^{-\gamma(H)(mN - c_{47}\frac{N}{\sqrt{\ln N}})} = e^{-\gamma(H) \ln p(mN - c_{48}\frac{N}{\sqrt{\ln N}})} \quad (91)$$

Для того, чтобы (90) и (91) давали противоречие с предположением о том, что  $L(\xi) = 0$  в  $\mathbb{Q}_p$  требуется, чтобы

$$\begin{aligned} -\gamma(H) \ln p(mN - c_{49} \frac{N}{\sqrt{\ln N}}) < \\ < -\gamma(H) \ln p((m-1)N + c_{50} \frac{N}{\sqrt{\ln N}}) - \ln H - (m-1)N \ln N - c_{51}N\sqrt{\ln N} \end{aligned}$$

или

$$\gamma(H) \ln p(N - c_{52} \frac{N}{\sqrt{\ln N}}) > \ln H + (m-1)N \ln N + c_{53}N\sqrt{\ln N}$$

или

$$N \ln N \left( \frac{\gamma(H) \ln p}{\ln N} - (m-1) - c_{54} \frac{\gamma(H) \ln p}{(\ln N)^{3/2}} - \frac{c_{55}}{\sqrt{\ln N}} \right) > \ln H \quad (92)$$

Пусть  $N$  и  $\gamma(H)$  таковы, что  $N \geq N_1$  и  $\frac{\gamma(H) \ln p}{\ln N} \geq m$  тогда из неравенств (92) следует, что  $N \ln N > \ln H$ .

Пусть  $H \geq H_0$ , и пусть  $N$  выбрано так, что

$$N \ln N \geq \ln H \geq (N-1) \ln(N-1).$$

Тогда  $\ln N \sim \ln \ln H$ ,  $H \rightarrow +\infty$  поэтому при достаточно большом значении  $H$ ,  $H \geq H_0$  если  $\gamma(H) > \frac{m \ln \ln H}{\ln p}$ , то (90) и (91) противоречивы.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Рассмотрим произвольный отличный от тождественного нуля многочлен  $P(y_1, \dots, y_m)$  степени  $K$  по совокупности переменных  $y_1, \dots, y_m$ . Предположим, что коэффициенты этого многочлена – целые алгебраические числа из поля  $\mathbb{Q}$ , причём наибольшая из абсолютных величин этих коэффициентов, а также их алгебраических сопряжённых не превосходит  $H$ .

**ЛЕММА 16.** Если ряды  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  удовлетворяют системе линейных (вообще говоря, неоднородных) дифференциальных уравнений

$$y'_i = Q_{i,0} + \sum_{j=0}^m Q_{i,j} y_j, \quad (93)$$

где  $Q_{i,0}, Q_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$ ,  $T = T(z) \in \mathbb{Z}[z]$ ,  $TQ_{i,j} \in \mathbb{Z}[z]$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, m$ , то ряды

$$\phi_{k_1, \dots, k_m} = f_1^{k_1}(z) \dots f_m^{k_m}(z), k_i \geq 0, i = 1, \dots, m, k_1 + \dots + k_m \leq K,$$

удовлетворяют системе из  $\binom{m+K}{m}$  линейных однородных дифференциальных уравнений вида

$$\phi'_{k_1, \dots, k_m} = \sum Q_{l_1, \dots, l_m}^* \phi_{l_1, \dots, l_m}, \quad (94)$$

где суммирование производится по всевозможным наборам неотрицательных целых чисел  $l_1, \dots, l_m$  таким, что  $l_1 + \dots + l_m \leq K$ , а  $Q_{l_1, \dots, l_m}^* \in \mathbb{Q}(z)$ , причём  $Q_{l_1, \dots, l_m}^*$  являются линейными комбинациями с коэффициентами из  $\mathbb{Z}$  коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений и, следовательно,  $TQ_{l_1, \dots, l_m}^* \in \mathbb{Z}[z]$  для любого набора неотрицательных целых чисел  $l_1, \dots, l_m$  такого, что  $l_1 + \dots + l_m \leq K$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим формальную производную от ряда  $f_1^{k_1}(z), \dots, f_m^{k_m}(z)$ :

$$(f_1^{k_1}, \dots, f_m^{k_m})' = \sum_{i=1}^m k_i f_1^{k_1} \dots f_{i-1}^{k_{i-1}} f_i^{k_i-1} f_{i+1}^{k_{i+1}} \dots f_m^{k_m} f_i' \quad (95)$$

Система (94) получается, если в правой части каждого уравнения (95) заменить  $f_i'$ ,  $i = 1, \dots, m$  правой частью соответствующего уравнения (93), в которое вместо  $y_i$  подставлено  $f_i(z)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .  $\square$

ЛЕММА 17. Пусть  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  – ряды из класса  $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$ . Тогда произведения степеней этих рядов вида

$$f_1^{k_1}(z), \dots, f_m^{k_m}(z), \quad k_1 + \dots + k_m \leq K \quad (96)$$

принадлежат классу  $F(\mathbb{Q}, c_1^*, c_2^*, c_3^*, q^*)$  где

$$c_1^* \leq c_1 + \ln 2, \quad c_2^* \leq \max(c_2, 1), \quad c_3^* \leq (c_3 + 1)K, \quad q^* = q^{1 + [\ln K]}. \quad (97)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим ряды (96) в виде

$$f_1^{k_1}(z), \dots, f_m^{k_m}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n.$$

Произведение в левой части этого равенства рассматриваем, как произведение  $s \leq K$  сомножителей, среди которых могут быть и равные. Коэффициент при  $z^n$  сомножителя с номером  $i$  будем обозначать  $a_{i,n}n!$ . Тогда

$$a_n = \sum \frac{n_1! \dots n_s!}{n!} a_{1,n_1} \dots a_{s,n_s}, \quad (98)$$

где суммирование в правой части равенства (98) производится по всем наборам  $n_1, \dots, n_s$  неотрицательных целых чисел таким, что  $n_1 + \dots + n_s = n$ . Имеет место оценка

$$|\overline{a_{1,n_1}}, \dots, a_{s,n_s}| = O(e^{c_{56}(n_1 + \dots + n_s)}) = O(e^{c_{57}n}), \quad n_1 + \dots + n_s = n \rightarrow \infty.$$

Величина  $\sum \frac{n_1! \dots n_s!}{n!}$  допускает оценку

$$\sum \frac{n_1! \dots n_s!}{n!} \leq \sum 1 = \frac{(n + s - 1)!}{n!(s - 1)!} \leq 2^{n+s-1} \leq 2^{n+K},$$

где суммирования производятся по всем наборам  $n_1, \dots, n_s$  неотрицательных целых чисел таким, что  $n_1 + \dots + n_s = n$ . Использована также формула  $\frac{(n+s-1)!}{n!(s-1)!}$  для числа решений уравнения  $n_1 + \dots + n_s = n$  в неотрицательных целых числах и известная оценка сверху для биномиального коэффициента. Таким образом,

$$|\overline{a_n}| = 2^{n+K} O(e^{c_{58}n}) = O(e^{(c_{59} + \ln 2)n}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (99)$$

Расположим при каждом  $n$  и каждом наборе  $n_1, \dots, n_s$  неотрицательных целых чисел таких, что  $n_1 + \dots + n_s = n$  эти числа в порядке не возрастания, и обозначим получившиеся номера  $l_1, \dots, l_s$ , т.е.  $n_{l_1} \geq n_{l_2} \geq \dots \geq n_{l_s}$ . Тогда верны неравенства

$$n_{l_1} \leq n, n_{l_2} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \dots, n_{l_s} \leq \left\lfloor \frac{n}{s} \right\rfloor.$$

Рассмотрим  $\Xi_n$  – наименьший общий знаменатель чисел  $\frac{n_1! \dots n_s!}{n^*!}$ ,  $n_1 + \dots + n_s = n^*$ ,  $n^* \leq n$ . Он делится только на простые числа  $p$ , не превосходящие  $n$ . Кроме того, для любого такого простого числа  $p$ , согласно (9) и (10),

$$\text{ord}_p\left(\frac{n_1! \dots n_s!}{n^*!}\right) = \frac{n_1 - S_{n_1} + \dots + n_s - S_{n_s} - n^* + S_{n^*}}{p - 1} = \frac{S_{n^*} - S_{n_1} \dots - S_{n_s}}{p - 1} \geq -s \log_p n.$$

Значит,

$$\text{ord}_p \Xi_n \leq s \log_p n \leq K \log_p n.$$

Из приведённых выше рассуждений следует, что

$$q^{n+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{s} \rfloor} d_{0,n} d_{0,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dots d_{0,\lfloor \frac{n}{s} \rfloor} \Xi_n a_n \in \mathbb{Z}, \quad (100)$$

причём число  $d_{0,n} d_{0,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dots d_{0,\lfloor \frac{n}{s} \rfloor} \Xi_n$  делится только на простые числа  $p$ , не превосходящие

$$\max(c_2, 1)n \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \text{ord}_p d_{0,n} d_{0,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dots d_{0,\lfloor \frac{n}{s} \rfloor} \Xi_n &\leq \\ &\leq c_{60} (\log_p n + \log_p \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \log_p \lfloor \frac{n}{s} \rfloor) + \frac{n}{p^2} + \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{p^2} + \dots + \frac{\lfloor \frac{n}{s} \rfloor}{p^2} + K \log_p n \leq \\ &\leq K(c_{61} + 1) (\log_p n + \frac{n}{p^2}). \end{aligned} \quad (102)$$

Если положить

$$q^* = q^{1+\lfloor \ln K \rfloor}, \quad (103)$$

то ввиду очевидного неравенства  $n(1 + \lfloor \ln K \rfloor) \geq n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{K} \rfloor \geq n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{s} \rfloor$  число  $q^{n+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{s} \rfloor}$  делит число  $(q^*)^n$ .

Из (99) – (103) следует, что ряды (97) входят в класс  $F(\mathbb{Q}, c_1^*, c_2^*, c_3^*, q^*)$ , параметры которого удовлетворяют условиям (97).  $\square$

Леммы 16 и 17 показывают, что рассматриваемые ряды

$$f_1^{k_1}(z) \dots f_m^{k_m}(z), \quad k_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad k_1 + \dots + k_m \leq K,$$

удовлетворяют всем условиям теоремы 1 при любом натуральном  $K$ . Применяя эту теорему, получаем утверждение теоремы 2.

## 4. Заключение

Полученные результаты будут применяться к обобщенным гипергеометрическим  $F$  – рядам.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коблиц Н.  $p$ -адические числа,  $p$ -адический анализ и дзета-функции // М. Мир. 1982.
2. Чебышев П. Л. Избранные математические труды // ГИТТИ. 1946.
3. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических  $F$  – рядов // Доклады Академии наук. Наука (М.). 2018. т. 483, №3, с.257-259.
4. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук, математика. Наука (М). 2014. т. 439, №6. с. 677-679.
5. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая. 2017. т. 81, выпуск 2. с. 215-232.
6. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2015. т. 16, №1. с. 254-264.
7. Чирский В. Г. Линейная независимость  $p$  – адических значений некоторых  $q$  – базисных гипергеометрических рядов // Фунд. и прикл. матем. 1999. т. 5, №2. с. 619–625.

8. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Мат. заметки. 1990. т. 48, №2. с. 123-127.
9. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей // Чебышевский сборник. 2016. т. 17, №3. с. 180-185.
10. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая. 2014. т. 78, №6. с. 193-210.
11. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика. Изд-во Моск. университета (М). 2015. №1. с. 59-61.
12. Чирский В. Г. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2011. т. 12, № 4. с. 129-133.
13. Чирский В. Г. Периодические и непериодические конечные последовательности // Чебышевский сборник, 18:2, 2017. с. 275–278.
14. Чирский В. Г. Приближения Эрмита – Паде для некоторых  $q$  – базисных гипергеометрических рядов // Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика. 2000. №2. с. 7–11.
15. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О некоторых свойствах полиадических разложений // Чебышевский сборник. 2013. т. 14, вып. 2. с. 164-172.
16. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлении натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2013. т. 14, вып. 1. с. 92-101.
17. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлении натуральных чисел // Вестник МГУ. Серия 1 Математика. Механика. 2013. №6. с. 57-59.
18. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа // М. Наука. 1987.
19. André Y. Séries Gevrey de type arithmétique. // Inst. Math., Jussieu.
20. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. Vol. XIII, №2. pp. 241-260.
21. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175-184.
22. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2019. Vol. 26, №3, pp. 286-305.
23. Matala-Aho T., Zudilin W. Euler factorial series and global relations. // J. Number Theory. 2018. 186, pp.202–210.

## REFERENCES

1. André, Y. “Séries Gevrey de type arithmétique“, Inst. Math., Jussieu.
2. Bertrand, D., Chirskii, V. G. & Yebbou, Y. 2004. “Effective estimates for global relations on Euler-type series“, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Vol. XIII, №2. pp. 241-260.
3. Cheby’shev, P. L. 1946, “Izbranny’e matematicheskie trudy“[Selected Mathematical Works], GITTI.
4. Chirskii, V. G. 2020, “Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series“, *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), Vol 27, №2, pp. 175-184.
5. Chirskii, V. G. 2019, “Product formula, global relations and polyadic integers“, *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), Vol. 26, №3, pp. 286-305.
6. Chirskii, V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric  $F$ -series“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). Vol. 98, №3. pp.589-591.
7. Chirskii, V.,G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), Vol. 81,№2. pp. 444-461.
8. Chirskii,V. G. 2017, “Periodicity and non-periodicity of finite sequences“, *Chebyshevskii Sb.*, 18:2, pp.275–278.
9. Chirskii, V. G. 2016, “On transformations of periodic sequences“, *Chebyshevskii Sb.*, 17:3, pp.191–196.
10. Chirskii, V.,G. 2015, “Arithmetic properties of Euler series“, *Moscow University Mathematics Bulletin*, Allerton Press Inc.(United States), Vol. 70, №1, pp.41-43.
11. Chirskii, V. G. 2015, “Arithmetic properties of polyadic integers“, *Chebyshevskii Sb.*, 16:1, pp.254–264.
12. Chirskii, V. G. 2014, “On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States). Vol. 78, №6. pp. 1244-1260.
13. Chirskii, V. G. 2014, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), Vol. 90, №3, pp. 766-768.
14. Chirskii, V. G. 2011, “Estimates of linear forms and polynomials in polyadic numbers“, *Chebyshevskii Sb.*, 12:4, pp.129–133.
15. Chirskii,V. G. 2000, “Hermite–Padè approximants for some  $q$ -basic hypergeometric series“, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2000, no. 2, pp.7–11.
16. Chirskii, V. G. 1999, “Linear independence of the  $p$  – adic values of certain  $q$  – basic hypergeometric series“, *Fundam. Prikl. Mat.*, 5:2 , pp.619–625.

17. Chirskii, V. G. 1990, “Global relations”, *Mat. Zametki*, 48:2, 123–127; *Math. Notes*, 48:2 (1990), pp.795–798.
18. Chirskii, V. G. & Matveev, V. G. 2013, “On certain properties of polyadic expansions”, *Chebyshevskii Sb.* 14:2, pp.164–172. (Russian)
19. Chirskii, V. G. & Matveev, V. Y. 2013, “On representations of positive integers”, *Chebyshevskii Sb.* 14:1, pp.75–85. (Russian)
20. Chirskii, V. G. & Matveev, V. Yu. 2013, “Representations of positive integers”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 68:6, pp.307–308
21. Koblitz, N. 1977. “ $p$ -adic numbers,  $p$ -adic analysis and zeta-functions“ Grad.texts Math.58.– Berlin: Springer.
22. Matala-Aho T. & Zudilin W. 2018, “Euler factorial series and global relations“, *J. Number Theory*, 186, pp.202-210.
23. Shidlovskii, A. B. 1989, “Transcendental numbers“ [Transtsendentnye chisla] / Andrei Borisovich Shidlovskii; translated from the Russian by Neal Koblitz.

Получено 29.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2020–21-3-165-185

Гладкое многообразие одномерных решёток<sup>1</sup>

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва,  
Н. М. Добровольский

**Елена Николаевна Смирнова** — старший преподаватель кафедры алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

*e-mail: helenash@mail.ru*

**Ольга Александровна Пихтилькова** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики-2, МИРЭА-Российский технологический университет (г. Москва).

*e-mail: opikhhtilkova@mail.ru*

**Николай Николаевич Добровольский** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры общей и теоретической физики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Ирина Юрьевна Реброва** — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, физики и информатики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: i\_rebrova@mail.ru*

**Николай Михайлович Добровольский** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: dobrovol@tsput.ru*

## Аннотация

В работе заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток.

Рассмотрен простейший случай одномерных решёток. В последующих статьях будет рассмотрен сначала случай одномерных сдвинутых решёток, потом общий случай многомерных решёток, и, наконец, случай многомерных сдвинутых решёток.

В работе определено гомеоморфное отображение пространства одномерных решёток на множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$ . Тем самым установлено, что пространство одномерных решёток  $PR_1$  локально евклидово пространство размерности 1.

Так как метрика на этих пространствах не является евклидовой, а относится к числу "логарифмических", то получаются в одномерном случае неожиданные результаты о производных от основных функций, таких как детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, норменный минимум, дзета-функция решётки и гиперболическая дзета-функция решётки.

В работе рассмотрена связь указанных функций с вопросами изучения погрешности приближенного интегрирования по параллелепипедальным сеткам.

**Ключевые слова:** решётки, метрическое пространство решёток, гладкое многообразие решёток.

**Библиография:** 40 названий.

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004\_p\_a.

**Для цитирования:**

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных решёток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 165–185.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-165-185

**Smooth manifold of one-dimensional lattices**

Е. Н. Smirnova, О. А. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

**Elena Nikolaevna Smirnova** — senior lecturer of the Department of algebra and discrete mathematics, Orenburg State University (Orenburg).

*e-mail: helenash@mail.ru*

**Olga Alexandrovna Pikhtilkova** — Candidate of Physics and Mathematics Sciences, docent, associate professor of the department of higher mathematics-2, MIREA - Russian Technological University (Moscow).

*e-mail: opikhtilkova@mail.ru*

**Nikolai Nikolaevich Dobrovol'skii** — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of general and theoretical physics, Tula State University; associate Professor of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Nikolai Mihailovich Dobrovol'skii** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: dobrovol@tspu.ru*

**Abstract**

In this paper, the foundations of the theory of smooth varieties of number-theoretic lattices are laid.

The simplest case of one - dimensional lattices is considered. In subsequent articles, we will first consider the case of one-dimensional shifted lattices, then the General case of multidimensional lattices, and finally the case of multidimensional shifted lattices.

In this paper, we define a homeomorphic mapping of the space of one-dimensional lattices to the set of all real numbers  $\mathbb{R}$ . Thus, it is established that the space of one-dimensional lattices  $PR_1$  is locally Euclidean space of dimension 1.

Since the metric on these spaces is not Euclidean, but is "logarithmic", unexpected results are obtained in the one-dimensional case about derivatives of the main functions, such as the lattice determinant, the hyperbolic lattice parameter, the norm minimum, the lattice Zeta function, and the hyperbolic lattice Zeta function.

The paper considers the relationship of these functions with the issues of studying the error of approximate integration over parallelepipedal grids.

**Keywords:** lattices, metric space of lattices, smooth variety of lattices.

**Bibliography:** 40 titles.

**For citation:**

Е. Н. Smirnova, О. А. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2020, "Smooth manifold of one-dimensional lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 165–185.

## 1. Введение

В работе [31] изучалось полное метрическое пространство  $s$ -мерных решёток и была доказана теорема, что множество алгебраических решёток всюду плотно в пространстве решёток. В теоретико-числовом методе в приближенном анализе значительную роль играют гиперболическая дзета-функция решёток, обобщённая гиперболическая дзета-функция решёток и гиперболическая дзета-функция сеток, так как они связаны с оценкой нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования на классе  $E_s^\alpha$  (см. [9, 10, 13, 16, 22, 33, 34]).

С одной стороны, эти функции являются рядами Дирихле на спектре соответствующих решёток и для них возникают естественные задачи об изучении их свойств как функций комплексного переменного  $\alpha = \sigma + it$ , где  $\sigma, t \in \mathbb{R}$ .

С другой стороны, они являются функциями на пространстве решёток или на пространстве сдвинутых решёток. Непрерывность этих объектов на соответствующих пространствах была установлена в работах [13, 25].

Естественно возникает вопрос об их дифференциальных свойствах на этих пространствах, но для этого надо рассмотреть эти пространства как гладкие многообразия. Это потребует определенных усилий, так как метрика на этих пространствах не является евклидовой, а относится к числу "логарифмических", как это будет видно из дальнейшего.

Целью данной работы является рассмотрение простейшего случая гладкого многообразия одномерных решёток и сдвинутых решёток.

На протяжении всей работы через  $I = I_s$  будем обозначать единичную квадратную матрицу порядка  $s \geq 1$ . Значение порядка  $s$  каждый раз будет видно из контекста.

## 2. Метрическое пространство решёток и гладкое многообразие одномерных решёток

Важность рассмотрения множества всех решёток как метрического пространства видна из работ [1, 22], [26] — [30].

Рассмотрим пространство  $PR_1$  всех одномерных решёток. Нетрудно видеть, что

$$PR_1 = \{\lambda\mathbb{Z} | \lambda > 0\},$$

где  $\mathbb{Z}$  — фундаментальная одномерная решётка, являющаяся, кроме этого, кольцом целых рациональных чисел. Очевидно, что справедливо равенство  $\lambda\mathbb{Z} = -\lambda\mathbb{Z}$  для любого  $\lambda \neq 0$ .

Пусть  $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$  множество всех вещественных квадратных матриц порядка 1, а  $\mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$  — подмножество невырожденных матриц. Таким образом,

$$\mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) = \{A = (a_{11}) | a_{11} \in \mathbb{R}\}, \quad \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R}) = \{A = (a_{11}) | a_{11} \in \mathbb{R}, a_{11} \neq 0\}.$$

Если нам дана решётка  $M = M(\lambda)$  с базисом  $(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , то действие линейного преобразования с матрицей  $A = (a_{11}) \in \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$  задаётся равенством  $A \cdot M = M(|a_{11}|\lambda)$ . Для любой одномерной решётки  $M$  её группа автоморфизмов конечна  $\text{Aut}(M) = \{(1), (-1)\}$ . Этим фактом объясняются многие упрощения теории в одномерном случае в сравнении с общим случаем, когда группа автоморфизмов бесконечна.

Нетрудно видеть, что можно задать взаимно-однозначное отображение  $PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R}^+$ , где  $\mathbb{R}^+$  — мультипликативная группа положительных вещественных чисел.

На пространстве  $PR_1$  всех одномерных решёток, следуя за Касселсом (см. [19] стр. 165), зададим структуру топологического пространства, определив систему открытых окрестностей.

Говорят, что для произвольного  $\mu > 0$  множество  $\mathbb{L}_\mu(M)$  решёток  $\Lambda$  является *открытой  $\mu$ -окрестностью* решётки  $M$ , если оно состоит из всех решёток

$$\Lambda = A \cdot M, \tag{1}$$

для которых невырожденная матрица  $A$  удовлетворяет соотношению

$$\|A - I\| < \mu. \quad (2)$$

Заметим, что в одномерном случае  $I = (1)$  — единичная матрица и матричная норма задана равенством  $\|A\| = |a_{11}|$ .<sup>2</sup>

Мы будем рассматривать только окрестности при  $0 < \mu < 1$ , так как для таких  $\mu$  все матрицы  $A = (a_{11})$  с  $\|A - I\| < \mu$  удовлетворяют соотношению  $0 < 1 - \mu < a_{11} < 1 + \mu$  и являются невырожденными.

Нетрудно записать окрестность  $\mathbb{L}_\mu(M)$  для произвольной решётки  $M = M(\lambda) = \lambda\mathbb{Z}$  с базисом  $(\lambda)$ .

$$\mathbb{L}_\mu(M) = \{\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} \mid (1 - \mu)\lambda < \lambda_1 < (1 + \mu)\lambda\}.$$

Естественно, что прежде всего надо установить, что пересечение двух окрестностей  $\mathbb{L}_\mu(M)$  снова является открытой окрестностью.

**ЛЕММА 1.** *Пересечение двух открытых окрестностей  $\mathbb{L}_\mu(M)$  и  $\mathbb{L}_\nu(N)$  либо пусто, либо является открытой окрестностью  $\mathbb{L}_\kappa(K)$ , где  $K = M$  и  $\kappa = \min(\mu, \nu)$ , если  $M = N$ , и  $\kappa = \frac{\lambda(1+\mu) - \lambda_1(1-\nu)}{\lambda(1+\mu) + \lambda_1(1-\nu)}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\lambda(1+\mu) + \lambda_1(1-\nu)}{2}$ ,  $K = K(\lambda_2)$ , если  $\lambda(1 + \mu) > \lambda_1(1 - \nu)$ ,  $M = M(\lambda)$ ,  $N = N(\lambda_1)$  и  $\lambda < \lambda_1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Без ограничения общности будем считать, что  $M = M(\lambda)$ ,  $N = N(\lambda_1)$  и  $\lambda < \lambda_1$ .

Если  $\lambda(1 + \mu) \leq \lambda_1(1 - \nu)$ , то пересечение окрестностей пусто.

Если  $M = N$ , то  $K = M$  и  $\kappa = \min(\mu, \nu)$ ,  $\mathbb{L}_\mu(M) \cap \mathbb{L}_\nu(N) = \mathbb{L}_\kappa(K)$ .

Если  $\lambda(1 + \mu) > \lambda_1(1 - \nu)$ , то полагаем  $\lambda_2 = \frac{\lambda(1+\mu) + \lambda_1(1-\nu)}{2}$ ,  $\kappa = \frac{\lambda(1+\mu) - \lambda_1(1-\nu)}{\lambda(1+\mu) + \lambda_1(1-\nu)}$ ,  $\theta = \frac{\lambda_1(1-\nu)}{\lambda(1+\mu)}$ . Тогда  $0 < \theta < 1$ ,  $0 < \kappa = \frac{1-\theta}{1+\theta} < 1$ ,  $K = K(\lambda_2)$ ,  $\mathbb{L}_\mu(M) \cap \mathbb{L}_\nu(N) = \mathbb{L}_\kappa(K)$ .

Лемма полностью доказана.  $\square$

**ЛЕММА 2.** *Любой интервал решёток  $(\Lambda(\lambda_1); \Lambda(\lambda_2)) = \{\Lambda(\lambda) \mid \lambda_1 < \lambda < \lambda_2\}$  является открытой  $\mu$ -окрестностью решётки  $M$  при  $M = M\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)$ ,  $\mu = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Действительно,  $0 < \mu < 1$  и

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \left(1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) = \lambda_1, \quad \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \left(1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) = \lambda_2,$$

что и доказывает утверждение леммы.  $\square$

Легко видеть, что имеется следующее гомеоморфное отображение

$$\varphi : \mathbb{L}_\mu(M) \leftrightarrow (\ln((1 - \mu)\lambda); \ln((1 + \mu)\lambda))$$

при котором решётке  $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z}$  ставится в соответствие точка

$$\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1) \in (\ln((1 - \mu)\lambda); \ln((1 + \mu)\lambda)),$$

а числу  $\theta \in (\ln((1 - \mu)\lambda); \ln((1 + \mu)\lambda))$  ставится в соответствие решётка

$$\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in \mathbb{L}_\mu(M).$$

<sup>2</sup>Для так определенной матричной нормы справедливы соотношения  $\| - A \| = \| A \|$ ,  $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$ ,  $\| A \cdot B \| = \| A \| \cdot \| B \|$ .

Произвольным *открытым множеством*  $\mathbb{L}$  называется множество, представимое в виде объединения произвольного множества  $X$  открытых  $\mu$  окрестностей

$$\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x). \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что таким образом на  $PR_1$  задана структура топологического пространства  $T_1 = (PR_1, \tau_1)$ , где  $\tau_1$  — множество всех открытых множеств  $\mathbb{L}$ . Топологическое пространство  $T_1 = (PR_1, \tau_1)$  имеет счетную базу  $\mathbb{B}$ , состоящую из всех  $\mu$ -окрестностей рациональных решёток  $M$  с рациональными  $\mu$ , и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество  $PQ_1$  всех рациональных решёток, т.е. решёток  $M = M(\lambda)$  с  $\lambda \in \mathbb{Q}$ ,  $\lambda > 0$ .

**ЛЕММА 3.** *Топология  $\tau_1$  инвариантна относительно любого линейного невырожденного преобразования  $A$  пространства  $\mathbb{R}$ . Счетная база  $\mathbb{B}$  инвариантна только относительно диагональных рациональных преобразований  $D(d) = (d)$ ,  $d \in \mathbb{Q}$ ,  $d \neq 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как под действием линейного невырожденного преобразования  $A$  пространства  $\mathbb{R}$  произвольная решётка  $\Lambda$  переходит в решётку  $A \cdot \Lambda$ , то из равенства

$$A \cdot \mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)$$

следует, для инвариантности топологии достаточно доказать, что  $A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)$  — открытое множество для любого  $x \in X$ .

Действительно,

$$A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x) = \{ \Lambda = A \cdot B \cdot M_x \mid \|B - I\| < \mu_x \}.$$

Пусть

$$\|B - I\| < \mu_x, \quad \delta = \frac{\mu_x - \|B - I\|}{\|B\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|A\|} = \frac{\mu_x - \|B - I\|}{\|B\|},$$

$$\Lambda = A \cdot B \cdot M_x, \quad \Lambda_1 = C \cdot A \cdot B \cdot M_x \in \mathbb{L}_\delta(\Lambda).$$

Таким образом,  $\|C - I\| < \delta$  и  $\delta < 1$  так как  $\mu_x < 1 < \|I - B\| + \|B\|$ .

Тогда

$$\Lambda_1 = C \cdot A \cdot B \cdot M_x = A \cdot B_1 \cdot M_x, \quad B_1 = C \cdot B$$

и справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|B_1 - I\| &= \|C \cdot B - I\| \leq \|C \cdot B - B\| + \|B - I\| \leq \\ &\leq \|B\| \cdot \|C - I\| + \|B - I\| \leq \|B\| \cdot \delta + \|B - I\| < \mu_x. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\mathbb{L}_\delta(\Lambda) \subset A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x), \quad A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x) = \bigcup_{\Lambda \in A \cdot \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)} \mathbb{L}_\delta(\Lambda)$$

и инвариантность топологии  $\tau_1$  относительно невырожденных линейных преобразований доказана.

Инвариантность счётной базы  $\mathbb{B}$  очевидна.  $\square$

Как известно (см. [19], стр. 165), множество всех  $s$ -мерных решёток  $PR_s$  является полным метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)), \quad (4)$$

где

$$\mu = \inf_{\Gamma=A \cdot \Lambda} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{\Lambda=B \cdot \Gamma} \|B - I\|,$$

Применительно к  $PR_1$  имеем, если  $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ ,  $\Gamma = \gamma\mathbb{Z}$ , то  $\Gamma = A \cdot \Lambda$ ,  $A = (\gamma\lambda^{-1})$ ,  $\Lambda = B \cdot \Gamma$ ,  $B = (\gamma^{-1}\lambda)$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\lambda > \gamma$ , тогда  $\mu = 1 - \gamma\lambda^{-1}$ ,  $\nu = \gamma^{-1}\lambda - 1$  и  $\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(2 - \gamma\lambda^{-1}), \ln(\gamma^{-1}\lambda))$ . Положим  $\theta = \gamma\lambda^{-1}$ , тогда  $0 < \theta < 1$  и  $2 - \theta < \theta^{-1}$ , поэтому  $\rho(\Lambda, \Gamma) = \ln(\gamma^{-1}\lambda)$ .

Теперь можно записать как выглядит "симметричный отрезок" решёток длиной  $2\rho$  с центром в  $\Lambda(\lambda)$ :  $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda); \Lambda(e^{\rho}\lambda)]$ . Ясно, что когда  $h$  пробегает числовой отрезок  $[-\rho; \rho]$ , то  $\Lambda(e^h\lambda)$  пробегает отрезок решёток  $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda); \Lambda(e^{\rho}\lambda)]$ .

Как известно, для любой решётки  $\Lambda$  её взаимная решётка  $\Lambda^*$  определяется из условия

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \quad (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}.$$

Отсюда следует, что для любой решётки  $\Lambda(\lambda) \in PR_1$  справедливо равенство  $\Lambda^* = \Lambda(\lambda^{-1})$ .

**ЛЕММА 4.** *Для любой решётки  $\Lambda(\lambda) \in PR_1$  справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda, \mathbb{Z}) = \rho(\Lambda^*, \mathbb{Z}). \quad (5)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как  $\Lambda^* = \Lambda(\lambda^{-1})$  и  $(\Lambda^*)^* = \Lambda$ , то без ограничения общности можно считать, что  $\lambda > 1$ . Случай  $\lambda = 1$  тривиальный, так как тогда  $\Lambda = \mathbb{Z} = \Lambda^*$ .

Далее имеем:  $\rho(\Lambda, \mathbb{Z}) = \ln \lambda$ ,  $\rho(\Lambda^*, \mathbb{Z}) = \ln \lambda$ , что и доказывает утверждение леммы.  $\square$

Заметим, что доказанная лемма является частным случаем теоремы А. Н. Кормачёвой (см. [20]).

Топологическое пространство  $PR_1$  является хаусдорфовым, так как для любых двух решёток  $\Lambda(\lambda_1)$ ,  $\Lambda(\lambda_2)$  при  $\lambda_1 < \lambda_2$  и  $\mu = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$  открытые  $\mu$ -окрестности  $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_1))$  и  $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_2))$  не пересекаются.

Всё пространство одномерных решёток  $PR_1$  гомеоморфно  $\mathbb{R}$ . Действительно, таким гомеоморфизмом является

$$\varphi : PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R},$$

при котором решётке  $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$  ставится в соответствие точка

$$\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in \mathbb{R},$$

а числу  $\theta \in \mathbb{R}$  ставится в соответствие решётка

$$\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^{\theta}\mathbb{Z} \in PR_1.$$

Отсюда следует, что пространство одномерных решёток  $PR_1$  локально евклидово пространство размерности 1.

Согласно Уорнеру (см. [32], стр. 13), пара  $(U, \varphi)$ , где  $U = \mathbb{L}_\mu(M)$  — открытая  $\mu$ -окрестность, решётка  $M = M(\lambda)$ , а  $\varphi$  — гомеоморфное отображение  $U$  на интервал  $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$  называется системой координат,  $\varphi$  — координатным отображением. Так как  $\varphi(M) = 0$ , то решётка  $M$  является началом данной системы координат.

Согласно Арнольду (см. [2], стр. 205) интервал  $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$  является картой открытой  $\mu$ -окрестности  $U = \mathbb{L}_\mu(M)$  и  $\varphi(\Lambda)$  изображением решётки  $\Lambda \in \mathbb{L}_\mu(M)$  на карте  $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ .

**ЛЕММА 5.** *Для любых двух открытых пересекающихся  $\mu$ -окрестностей  $U_\nu = \mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu)$  решёток  $M_\nu = M_\nu(\lambda_\nu)$  ( $\nu = 1, 2$ ) гомеоморфные отображения  $\varphi_\nu$  окрестностей  $U_\nu$  на интервалы  $(\ln((1-\mu_\nu)\lambda_\nu); \ln((1+\mu_\nu)\lambda_\nu))$  связаны соотношениями  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\theta) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta) = \theta$  для любого  $\theta$  из пересечения интервалов  $(\lambda_1(1-\mu_1); \lambda_1(1+\mu_1)) \cap (\lambda_2(1-\mu_2); \lambda_2(1+\mu_2))$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть  $M_\nu = M_\nu(\lambda_\nu)$  ( $\nu = 1, 2$ ) и, без ограничения общности,  $\lambda_1 < \lambda_2$ , тогда окрестности пересекаются, если  $\lambda_1(1 + \mu_1) > \lambda_2(1 - \mu_2)$ . Рассмотрим окрестность  $U = U_1 \cap U_2$  и интервал

$$(\lambda_2(1 - \mu_2); \lambda_1(1 + \mu_1)) = (\lambda_1(1 - \mu_1); \lambda_1(1 + \mu_1)) \cap (\lambda_2(1 - \mu_2); \lambda_2(1 + \mu_2)).$$

Гомеоморфное отображение  $\varphi_\nu$ , переводящее  $U_\nu$  на интервал  $(\ln((1 - \mu_\nu)\lambda_\nu); \ln((1 + \mu_\nu)\lambda_\nu))$ , ставит решётке  $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$  в соответствие число  $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in (\ln((1 - \mu_\nu)\lambda_\nu); \ln((1 + \mu_\nu)\lambda_\nu))$ , а числу  $\theta \in (\ln((1 - \mu_\nu)\lambda_\nu); \ln((1 + \mu_\nu)\lambda_\nu))$  ставится в соответствие решётка  $\Lambda = \varphi_\nu^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in \mathbb{U}_\nu$ . Поэтому для любого  $\theta \in (\ln((1 - \mu_2)\lambda_2); \ln((1 + \mu_1)\lambda_1))$  имеем

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\theta) = \varphi_1(e^\theta\mathbb{Z}) = \theta = \varphi_2(e^\theta\mathbb{Z}) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta),$$

что и доказывает утверждение леммы.  $\square$

ЛЕММА 6. *Гомеоморфное отображение*

$$\varphi : PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R},$$

*при котором решётке  $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$  ставится в соответствие точка*

$$\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in \mathbb{R},$$

*а числу  $\theta \in \mathbb{R}$  ставится в соответствие решётка*

$$\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in PR_1,$$

*переводит произвольное открытое множество  $\mathbb{L} = \bigcup_{x \in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)$  в открытое множество*

$$\varphi(\mathbb{L}) = \bigcup_{x \in X} (\ln((1 - \mu_x)\lambda_x); \ln((1 + \mu_x)\lambda_x)). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,  $\varphi(\mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)) = (\ln((1 - \mu_x)\lambda_x); \ln((1 + \mu_x)\lambda_x))$ , что и доказывает утверждение леммы.  $\square$

Пользуясь указанным соответствием, можно определить понятие производной функции  $f(\Lambda)$  на гладком многообразии  $\mathcal{M} = PR_1$  следующим образом.

Пусть  $M = M(\lambda) \in PR_1$ ,  $U = \mathbb{L}_\mu(M)$  — открытая  $\mu$ -окрестность, координатная функция  $\varphi$  для произвольной решетки  $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} \in U$  задается равенством  $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1\lambda^{-1})$ . Так как  $\varphi(M) = 0$ , то решётка  $M$  является началом данной системы координат. Для любого  $\theta \in (\ln(1 - \mu); \ln(1 + \mu))$  имеем:  $\varphi^{-1}(\theta) = e^\theta \cdot M$ . Касательное пространство многообразия  $\mathcal{M}$  в точке  $M$  будем обозначать через  $\mathcal{M}_M$ , оно имеет размерность один.

Касательный вектор  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_M \in \mathcal{M}_M$  зададим равенством

$$\left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_M \right) (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi(M)} \quad (7)$$

для каждой функции  $f$  класса  $C^\infty$  в окрестности решётки  $M \in \mathcal{M}$ . Также будет использоваться обозначение

$$\frac{df}{d\varphi} \Big|_M = \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_M \right) (f). \quad (8)$$

### 3. Функции на пространстве решёток и ряды Дирихле

В теоретико-числовом методе в приближенном анализе следующие функции на пространстве решёток представляют особый интерес, это — детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, норменный минимум, дзета-функция решётки и гиперболическая дзета-функция решётки. Рассмотрим эти понятия последовательно в случае пространства  $PR_1$  одномерных решёток.

Детерминант решётки  $\Lambda = \Lambda(\lambda)$  задается равенством  $\det \Lambda = \lambda$ . Ясно, что  $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$ ,  $\det \mathbb{Z} = 1$ . Для вычисления  $\left. \frac{\partial \det \Lambda}{\partial \varphi} \right|_M$  заметим следующее: для решётки  $M = M(\lambda)$  координатная функция  $\varphi(\Lambda)$  задается равенством  $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1 \lambda^{-1}) = \theta$ , где  $\Lambda = \Lambda(\lambda_1)$ . Далее имеем  $\varphi^{-1}(\theta) = e^\theta \cdot M$  и  $\det \Lambda \circ \varphi^{-1} = \det(e^\theta \cdot M) = e^\theta \lambda$ . Отсюда следует, что

$$\left. \frac{\partial \det \Lambda}{\partial \varphi} \right|_M = \left. \frac{\partial e^\theta \lambda}{\partial \theta} \right|_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h \lambda - \lambda}{h} = \lambda = \det M.$$

В одномерном случае все три величины — детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, норменный минимум — совпадают. Начиная с размерности  $s = 2$  справедливы неравенства  $N(\Lambda) \leq q(\Lambda) \leq \det \Lambda$ , где

$$N(\Lambda) = \inf_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} |x_1 \cdot \dots \cdot x_s| - \text{норменный минимум,}$$

$$q(\Lambda) = \inf_{\vec{x} \in \Lambda, \vec{x} \neq \vec{0}} \overline{x_1} \cdot \dots \cdot \overline{x_s} - \text{гиперболический параметр решетки.}$$

Дзета-функция решётки в одномерном случае всегда определена и мы для решётки  $\Lambda = \Lambda(\lambda)$  при  $\lambda > 0$  имеем:

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum'_{x \in \Lambda} |x|^{-\alpha} = \frac{2\zeta(\alpha)}{\lambda^\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \frac{2\zeta(\alpha)}{(e^\theta \lambda)^\alpha}, \quad \left. \frac{\partial \zeta(\Lambda|\alpha)}{\partial \varphi} \right|_M = \left. \frac{\partial \frac{2\zeta(\alpha)}{(e^\theta \lambda)^\alpha}}{\partial \theta} \right|_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2\zeta(\alpha)}{(e^h \lambda)^\alpha} - \frac{2\zeta(\alpha)}{(\lambda)^\alpha}}{h} = -\alpha \zeta(M|\alpha).$$

Относительно дзета-функции решётки и гиперболической дзета-функции решётки необходимо сказать следующее в случае размерности  $s \geq 2$ . Дзета-функция решётки определена для произвольной декартовой решётки, но неопределена для произвольной алгебраической решётки. Поэтому её как функцию на всём пространстве многомерных решёток рассматривать нельзя, так как множество алгебраических решёток всюду плотно в пространстве всех решёток (см. [31]).

Гиперболической дзета-функции решёток посвящены следующие два раздела.

#### 3.1. Гиперболическая дзета-функция решёток

Так как в данной работе нас интересует только одномерный случай, то все необходимые определения и результаты будем формулировать для размерности  $s = 1$ , хотя они справедливы и для любой размерности  $s \geq 1$ .

Рассмотрим класс  $\mathfrak{A}_1$  всех периодических функций  $f(x)$  с периодом 1, у которых их ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} C(m) e^{2\pi i m \cdot x}, \quad C(m) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i m \cdot x} dx$$

абсолютно сходится. Пространство  $\mathfrak{A}_1$  относительно нормы

$$\|f(x)\|_{l_1} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |C(m)| < \infty$$

является сепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству  $l_1$  — всех абсолютно суммируемых комплекснозначных последовательностей (см. [11]).

Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций  $E_s^\alpha(C)$  ( $\alpha > 1$ ) с быстро убывающими коэффициентами Фурье. Через  $E_s^\alpha(C)$  обозначается множество функций из  $E_s^\alpha$  с нормой, не превосходящей  $C$ , то есть шар в банаховом пространстве  $E_s^\alpha$  радиуса  $C$  с центром в нуле.

Банахово пространство периодических функций  $E_1^\alpha \subset \mathfrak{A}_1$  состоит из функций  $f(x)$ , у которых для коэффициентов Фурье выполняется оценка<sup>3</sup>

$$C(m) = O\left(\frac{1}{\bar{m}^\alpha}\right).$$

Таким образом, эти функции удовлетворяют условиям

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} |C(m)| \bar{m}^\alpha = \|f(x)\|_{E_1^\alpha} < \infty. \quad (9)$$

Ясно, что для этих функций ряды Фурье сходятся абсолютно, так как

$$\|f(x)\|_{l_1} \leq \|f(x)\|_{E_1^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha)),$$

а поэтому для любого  $\alpha > 1$  они представляют непрерывные функции. Здесь и далее, как обычно,  $\zeta(\alpha)$  — дзета-функция Римана.

О свойствах класса  $E_s^\alpha(C)$  подробно можно узнать в [21] и [22] (так же см. [11]).

Для дальнейшего мы будем рассматривать класс  $E_1 = \bigcup_{\alpha > 1} E_1^\alpha$ . Очевидно,  $E_1 \subset \mathfrak{A}_1$ . Ясно, что класс  $E_1$  незамкнут в пространстве  $\mathfrak{A}_1$  относительно нормы  $\|f(x)\|_{l_1}$ , но является всюду плотным множеством.

Пространства  $E_1^\alpha$  ( $\alpha > 1$ ) — несепарабельные банаховы пространства, изоморфные пространству  $l_{1,\infty}$  — ограниченных комплекснозначных функций на фундаментальной решётке  $\mathbb{Z}$ , которое в силу счётности  $\mathbb{Z}$  изоморфно пространству  $l_\infty$  — ограниченных последовательностей комплексных чисел.

Действительно, этот изоморфизм  $\varphi_\alpha$  нормированных пространств  $E_1^\alpha$  и  $l_{1,\infty}$  задается равенствами для коэффициентов Фурье

$$C(m) = \frac{c(m)}{\bar{m}^\alpha}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \|c(m)\|_\infty = \sup_{m \in \mathbb{Z}} |c(m)| < \infty.$$

Таким образом, если  $x \in \mathbb{R}$  — произвольная точка, а  $c(m) \in l_{1,\infty}$ , то значение функции  $\varphi_\alpha(c(m))$  в точке  $x$  задается с помощью ряда Дирихле

$$\varphi_\alpha(c(m))(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{c(m) e^{2\pi i x \cdot m}}{\bar{m}^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(x, n)}{n^\alpha},$$

где

$$a(x, n) = \sum_{\bar{m}=n} c(m) e^{2\pi i x \cdot m}.$$

<sup>3</sup>Здесь и далее для вещественных  $m$  полагаем  $\bar{m} = \max(1, |m|)$ .

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k f[\xi(k)] - R_N[f]. \quad (10)$$

Здесь через  $R_N[f]$  обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int_0^1 f(x)dx$$

средним взвешенным значением функции  $f(x)$ , вычисленным в точках

$$M_k = (\xi(k)) \quad (k = 1, \dots, N).$$

Совокупность  $M$  точек  $M_k$  называется *сеткой  $M$* , а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины  $\rho_k = \rho(M_k)$  называются весами квадратурной формулы. Будем использовать равноправные обозначения  $|M| = N$ . В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** *Тригонометрической суммой сетки с весами  $(M, \rho)$  для произвольного целочисленного  $m$  называется выражение*

$$S(m, (M, \rho)) = \sum_{x \in M} \rho(x) e^{2\pi i m \cdot x}, \quad (11)$$

*а нормированной тригонометрической суммой сетки с весами —*

$$S^*(m, (M, \rho)) = \frac{1}{|M|} S(m, (M, \rho)).$$

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [6]).<sup>4</sup>

**ТЕОРЕМА 1.** *Пусть ряд Фурье функции  $f(\vec{x})$  сходится абсолютно,  $C(\vec{m})$  — ее коэффициенты Фурье и  $S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})$  — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$\begin{aligned} R_N[f] &= C(\vec{0}) \left( \frac{1}{N} S_{M, \vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right) + \frac{1}{N} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m}) = \\ &= C(\vec{0}) \left( S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right) + \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m}) \end{aligned} \quad (12)$$

*и при  $N \rightarrow \infty$  погрешность  $R_N[f]$  будет стремиться к нулю тогда, и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном  $s$ -мерном кубе.*

В работе [12] дано следующее определение дзета-функции сетки  $M$  с весами  $\vec{\rho}$ .

<sup>4</sup>Здесь и далее  $\sum'$  означает суммирование по системам  $(m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дзета-функцией сетки  $M$  с весами  $\vec{\rho}$  называется функция  $\zeta(\alpha|M, \vec{\rho})$ , заданная в правой полуплоскости  $\alpha = \sigma + it$  ( $\sigma > 1$ ) рядом Дирихле

$$\zeta(\alpha|M, \vec{\rho}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty'} \frac{|S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m})|}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(M, \vec{\rho}, n)}{n^\alpha}, \quad (13)$$

где

$$S^*(M, \vec{\rho}, n) = \sum_{\vec{m} \in N(n)} |S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m})| \quad (14)$$

и  $N(n)$  — усечённая норменная поверхность, заданная равенством

$$N(n) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s | \bar{m}_1 \dots \bar{m}_s = n\}.$$

Справедливы две обобщенные теоремы Коробова о погрешности квадратурных формул — это теорема 1 и следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2. Если  $f(x_1, \dots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$ , то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка

$$|R_N[f]| \leq C \left| \frac{1}{N} S_{M, \vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \frac{C}{N} \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty'} \frac{|S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = C \left| S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + C \cdot \zeta(\alpha|M, \vec{\rho}), \quad (15)$$

где сумма  $S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})$  определена равенством (11). На классе  $E_s^\alpha(C)$  эту оценку нельзя улучшить.

Другими словами теорему 2 можно сформулировать так:

Для нормы  $\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha}$  линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле (10) справедливо равенство

$$\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha} = \left| \frac{1}{N} S_{M, \vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \frac{1}{N} \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty'} \frac{|S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \left| S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + \zeta(\alpha|M, \vec{\rho}). \quad (16)$$

Следуя К. И. Бабенко [3] и О. В. Локуциевскому [23], в работе [6] дано следующее определение ненасыщаемого алгоритма приближенного интегрирования на классе  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Говорят, что периодическая функция  $f(\vec{x})$  из класса  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$  принадлежит конечному показателю  $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$ , если  $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$  и  $f(\vec{x}) \notin E_s^\beta$  для любого  $\beta > \alpha$ . В противном случае говорят, что периодическая функция из класса  $E_s$  принадлежит бесконечному показателю.

Ясно, что бесконечному показателю принадлежит любой конечный тригонометрический полином. Если периодическая функция  $f(\vec{x}) \in E_s$  не является конечным тригонометрическим полиномом и принадлежит бесконечному показателю, то она будет бесконечно дифференцируемой функцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Говорят, что алгоритм приближенного интегрирования

$$\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

периодических функций из класса  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$  ненасыщаемый типа  $(\gamma, \lambda)$ , если для любой периодической функции  $f(\vec{x})$  конечного показателя  $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$  и погрешности приближенного интегрирования выполняется равенство

$$R_{N_j}[f(\vec{x})] = O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda \cdot \alpha}}\right). \quad (17)$$

Как известно (см. [22]), методом оптимальных коэффициентов Коробова можно построить ненасыщаемые алгоритмы типа  $((s-1)\alpha, 1)$ , а модифицированным методом Фролова —  $((s-1), 1)$ . Для случая равномерных сеток имеем тип  $(0, \frac{1}{s})$ .

Из теоремы 2 сразу следует, что если алгоритм приближенного интегрирования

$$\langle M(j), \vec{\rho}(j), \Delta \rangle \quad (j = 1, 2, \dots)$$

периодических функций из класса  $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$  ненасыщаемый типа  $(\gamma, \lambda)$ , то

$$S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) = 1, \quad \zeta(\alpha | M(j), \vec{\rho}(j)) = O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda \cdot \alpha}}\right) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Из предыдущего видно, что ряды Дирихле, порождённые решетками, естественно возникают в теоретико-числовом методе в приближенном анализе и играют в его развитии существенную роль.

Теперь мы рассмотрим общий случай одномерной обобщенной параллелепипедальной сетки. Пусть  $\Lambda = \Lambda(\lambda)$  — произвольная одномерная решётка с детерминантом  $\det \Lambda = \lambda > 1$  и  $\Lambda^*$  — её сопряженная решётка с  $\det \Lambda^* = \lambda^{-1} < 1$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** Для произвольной решетки  $\Lambda$  обобщенной параллелепипедальной сеткой  $M(\Lambda)$  называется множество  $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap [0; 1)$ .

Сетка  $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1)$ .

Обобщенной параллелепипедальной сеткой  $\Pi$  рода  $M'(\Lambda)$  называется множество

$$M'(\Lambda) = \{x \mid x = \{y\}, y \in M_1(\Lambda)\}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.** Весовой функцией порядка  $r$  с константой  $B_r$  называется гладкая функция  $\rho(x)$ , удовлетворяющая условиям

$$\rho(x) + \rho(x-1) = 1 \quad \text{при } x \in [0; 1), \quad (18)$$

$$\rho(x) = 0 \quad \text{при } x \notin (-1; 1), \quad (19)$$

$$\left| \int_{-1}^1 \rho(x) e^{2\pi i \sigma \cdot x} dx \right| \leq B_r \cdot (\bar{\sigma})^{-r} \quad \text{для любого } \sigma \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

Если выполнены условия (18) и (19), то говорим просто о весовой функции  $\rho(x)$ .

Примером весовой функции порядка  $r \geq 2$  служит функция из работы [8]

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > 1, \\ 1 - (2r-3)C_{2r-4}^{r-2} \int_0^{|x|} t^{r-2}(1-t)^{r-2} dt & \text{при } |x| \leq 1. \end{cases}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.** Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой  $\Pi$  типа и весовой функцией  $\rho(x)$  называется формула вида

$$\int_0^1 f(x) dx = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{x \in M'(\Lambda)} \rho_x f(x) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\text{где } \rho_x = \sum_{y \in M_1(\Lambda), \{y\}=x} \rho(y), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$  — погрешность квадратурной формулы.

Рассмотрим два принципиально разных случая. Пусть  $\lambda = N$  — натуральное число, тогда

$$\Lambda^* = \left\{ \frac{k}{N} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

и для сетки  $M'(\Lambda)$  справедливо равенство

$$M'(\Lambda) = \left\{ \frac{k}{N} \mid k = 0, 1, \dots, N-1 \right\}, \quad \rho_x = 1, \quad N'(\Lambda) = N.$$

В этом случае мы получаем обычную формулу левых прямоугольников:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right) - R_N[f].$$

Пусть теперь  $\lambda$  — нецелое число больше 1, тогда для любых целых  $k$  и  $m$  имеем  $1 - \frac{k}{\lambda} \neq \frac{m}{\lambda}$ , поэтому

$$\begin{aligned} M_1(\Lambda) &= \left\{ \frac{k}{\lambda} \mid -N \leq k \leq N \right\}, \quad N = [\lambda], \\ M'(\Lambda) &= \left\{ 0 < 1 - \frac{N}{\lambda} < \frac{1}{\lambda} < \dots < 1 - \frac{1}{\lambda} < \frac{N}{\lambda} \right\}, \quad N'(\Lambda) = 2N + 1, \\ \rho_x &= \begin{cases} \rho(x) & \text{при } x = \frac{k}{\lambda}, k = 0, \dots, N, \\ 1 - \rho(x) & \text{при } x = 1 - \frac{k}{\lambda}, k = 1, \dots, N. \end{cases} \end{aligned}$$

В этом случае квадратурная формула будет с весами и примет вид:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{\lambda} \left( \sum_{k=0}^N \rho\left(\frac{k}{\lambda}\right) f\left(\frac{k}{\lambda}\right) + \sum_{k=1}^N \left(1 - \rho\left(1 - \frac{k}{\lambda}\right)\right) f\left(1 - \frac{k}{\lambda}\right) \right) - R_{2N+1}[f].$$

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе  $E_1^\alpha$  справедлива оценка (см. [8], [22])

$$R_{N'(\Lambda)}[E_1^\alpha(C)] = \sup_{f \in E_1^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leq CB \cdot c_1(\alpha) \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где } c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1} \left( 3 + \frac{2}{\alpha-1} \right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum'_{x \in \Lambda} (\bar{x})^{-\alpha}.$$

Отметим важное обстоятельство — квадратурные формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией  $\rho(\vec{x})$ , вообще говоря, задают насыщаемый алгоритм численного интегрирования, если весовая функция конечного порядка и решетка не является целочисленной.

Этот алгоритм будет ненасыщаемый для целочисленных решеток, то есть для параллелепипедальных сеток, или для весовых функций бесконечного порядка. Определение ненасыщаемых алгоритмов дано в монографиях [3], [23].

Сформулируем без доказательства частный случай одной леммы из работы [7].

**ЛЕММА 7.** Пусть гладкая функция  $f(x)$  обращается в ноль вместе со своей производной  $f'(x)$  на границе отрезка  $[-1; 1]$  и обращается тождественно в ноль вне его.

Тогда для погрешности приближенного интегрирования квадратурной формулы

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{\det \Lambda} \sum_{x \in \Lambda^*} f(x) - R[f]$$

справедливо равенство

$$R[f] = \sum'_{x \in \Lambda} \int_{-1}^1 f(y) e^{-2\pi i y \cdot x} dy.$$

Оценка погрешности интегрирования получается сразу из леммы 7 и определения весовой функции, если вместо  $f(x)$  взять гладкую функцию  $f(x)\rho(x)$  и воспользоваться равенством

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x)\rho(x) dx.$$

Действительно, если  $\rho(x)$  — весовая функция порядка  $r \geq \alpha > 1$  и  $f(x) \in E_1^\alpha$ , то

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{c(m)}{m^\alpha} e^{2\pi i m x}, \quad |c(m)| \leq \|f(x)\|_{E_1^\alpha}$$

и

$$R[f] = \sum'_{x \in \Lambda} \int_{-1}^1 f(y)\rho(y) e^{-2\pi i y \cdot x} dy = \sum'_{x \in \Lambda} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{c(m)}{m^\alpha} \int_{-1}^1 \rho(y) e^{2\pi i y(m-x)} dy.$$

Отсюда следует, что

$$|R[f]| \leq B_r \|f(x)\|_{E_1^\alpha} \sum'_{x \in \Lambda} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{m^\alpha m - x^r}.$$

Пользуясь оценкой (2.10) из монографии [22] стр. 53, получим

$$|R[f]| \leq B_r \|f(x)\|_{E_1^\alpha} \sum'_{x \in \Lambda} \frac{A(\alpha)}{x^\alpha} = B_r \|f(x)\|_{E_1^\alpha} A(\alpha) \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

где  $A(\alpha) = 2^{\alpha+1}(1 + 2\zeta(\alpha))$ .

Теперь приведём пример из работы [8] весовой функции бесконечного порядка. Пусть

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \geq 1, \\ 1 & \text{при } x = 0, \\ \exp\left(\frac{1}{x-1} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right) & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 - \rho(x+1) & \text{при } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Функция  $\rho(x)$  на отрезке  $[0; 1]$  монотонно убывает от 1 до 0, так как при  $0 < x < 1$

$$\rho'(x) = \exp\left(\frac{1}{x-1} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \frac{-x^2 + x - 1}{x^2(x-1)^2} < 0.$$

### 3.2. Производная от гиперболической дзета-функции

Прежде всего введём следующие обозначения  $K(\lambda) = \lceil \frac{1}{\lambda} \rceil$ , где для  $x > 0$   $\lceil x \rceil = k$  при  $k - 1 < x \leq k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Положим при  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 1$

$$\zeta(k, \alpha) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

При  $k = 1$  имеем  $\zeta(k, \alpha) = \zeta(\alpha)$ .

Используя сделанные обозначения, можно записать следующее простое выражение для гиперболической дзета-функции решётки  $\Lambda = \Lambda(\lambda)$

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \begin{cases} \frac{2\zeta(\alpha)}{\lambda^{\alpha}} & \text{при } \lambda \geq 1, \\ 2(K(\lambda) - 1) + \frac{2\zeta(K(\lambda), \alpha)}{\lambda^{\alpha}}, & \text{при } 0 < \lambda < 1. \end{cases}$$

Если положить  $\zeta_H^*(\Lambda|\alpha) = \frac{2\zeta(K(\lambda), \alpha)}{\lambda^{\alpha}}$ , то для любого  $\lambda > 0$  справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = 2(K(\lambda) - 1) + \zeta_H^*(\Lambda|\alpha).$$

Непрерывность гиперболической дзета-функции решётки  $\Lambda = \Lambda(\lambda)$  очевидна для всех  $\lambda \neq \frac{1}{k}$ , где  $k$  — любое натуральное число. Непрерывность слева в точке  $\lambda = \frac{1}{k}$  также очевидна.

Рассмотрим  $\lim_{\lambda \rightarrow (\frac{1}{k-1})^-} \zeta_H(\Lambda|\alpha)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow (\frac{1}{k-1})^-} \zeta_H(\Lambda|\alpha) &= 2(k-1) + 2(k-1)^{\alpha} \zeta(k, \alpha) = 2((k-1) - 1) + 2(k-1)^{\alpha} \zeta(k-1, \alpha) = \\ &= \zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{1}{k-1}\right) \middle| \alpha\right) \end{aligned}$$

и непрерывность справа также установлена.

Таким образом, установлена непрерывность гиперболической дзета-функции на пространстве  $PR_1$ , что согласуется с общей теоремой из работы [13].

Так как при  $\lambda \geq 1$  имеем равенство дзета-функции решётки и гиперболической дзета-функции решётки, то при  $\lambda \geq 1$  справедливо равенство

$$\left. \frac{\partial \zeta_H(\Lambda|\alpha)}{\partial \varphi} \right|_M = -\alpha \zeta_H(M|\alpha).$$

Нетрудно видеть, что при  $\lambda \in \left(\frac{1}{k}; \frac{1}{k-1}\right)$  для любого натурального  $k \geq 2$  справедливо равенство

$$\left. \frac{\partial \zeta_H(\Lambda|\alpha)}{\partial \varphi} \right|_M = -\alpha \zeta_H^*(M|\alpha).$$

Таким образом, мы видим, что при  $0 < \lambda < 1$  гиперболическая дзета-функция решётки кусочно дифференцируемая функция, у которой отсутствуют производные в точках  $M = M\left(\frac{1}{k}\right)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ .

### 3.3. Ряды Дирихле для решёток

Пусть  $a(n)$  — произвольная числовая функция на  $\mathbb{Z}'$ , где  $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , тогда рядом Дирихле на решётке  $\Lambda = \Lambda(\lambda)$  назовём функцию

$$f(\Lambda, a(n)|\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}'} \frac{a(n)}{(\lambda n)^\alpha},$$

а гиперболическим рядом Дирихле — функцию

$$f_H(\Lambda, a(n)|\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}'} \frac{a(n)}{\overline{\lambda n}^\alpha}.$$

Положим

$$A(\lambda, a(n)) = \sum_{|n| < K(\lambda)} a(n), \quad f(\lambda, a(n)|\alpha) = \sum_{|n| \geq K(\lambda)} \frac{a(n)}{|n|^\alpha},$$

тогда

$$f(\Lambda, a(n)|\alpha) = \frac{f(\mathbb{Z}, a(n)|\alpha)}{|\lambda|^\alpha}, \quad f_H(\Lambda, a(n)|\alpha) = A(\lambda, a(n)) + f_H^*(\Lambda, a(n)|\alpha),$$

где

$$f_H^*(\Lambda, a(n)|\alpha) = \frac{f(\lambda, a(n)|\alpha)}{|\lambda|^\alpha}.$$

По аналогии с предыдущим разделом получим:

$$\left. \frac{\partial f(\Lambda, a(n)|\alpha)}{\partial \varphi} \right|_M = -\alpha f(M, a(n)|\alpha).$$

При  $\lambda \geq 1$  справедливо равенство

$$\left. \frac{\partial f_H(\Lambda, a(n)|\alpha)}{\partial \varphi} \right|_M = -\alpha f_H(M, a(n)|\alpha);$$

при  $\lambda \in \left(\frac{1}{k}; \frac{1}{k-1}\right)$  для любого натурального  $k \geq 2$  справедливо равенство

$$\left. \frac{\partial f_H(\Lambda, a(n)|\alpha)}{\partial \varphi} \right|_M = -\alpha f_H^*(M, a(n)|\alpha).$$

Таким образом, мы видим, что при  $\lambda \geq 1$  ряд Дирихле  $f(\Lambda, a(n)|\alpha)$  — бесконечно дифференцируемая функция на дифференцируемом многообразии  $PR_1$ , а при  $0 < \lambda < 1$  гиперболический ряд Дирихле на решётке кусочно дифференцируемая функция, у которой отсутствуют производные в точках  $M = M\left(\frac{1}{k}\right)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ .

## 4. Заключение

Построенные основы теории гладких многообразий касаются только простейшего случая пространства одномерных теоретико-числовых решёток. Он более простой, так как любая одномерная решётка имеет только два базиса, отличающихся знаком.

Уже рассмотрение сдвинутых решёток осложнено тем, что для задания метрики на пространстве таких решёток необходимо рассмотреть их погружение в пространство решёток большой размерности. А как известно, уже для любой двумерной решётки количество базисов решётки счётно. Поэтому возникают определенные трудности для построения теории гладких многообразий многомерных теоретико-числовых решёток и сдвинутых решёток.

Решению этих проблем будут посвящены следующие статьи по этой тематике.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акрамов У. А. Теорема изоляции для форм, отвечающих чисто вещественным алгебраическим полям, // Аналитическая теория чисел и теория функций: 10. Зап. науч. семинара. ЛОМИ. 1990. N 185. С. 5–12.
2. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука. 1975. — 240 с.
3. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
4. Вейль Г. Алгебраическая теория чисел — М.: И\*Л, 1947
5. Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К. Теория иррациональностей третьей степени // Научн. тр. / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. 1940. Т.11.
6. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008. Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185–223.
7. Н. М. Добровольский Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6089–84.
8. Н. М. Добровольский О квадратурных формулах на классах  $E_s^\alpha(c)$  и  $H_s^\alpha(c)$ . Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6091–84.
9. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
10. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения к приближенному анализу // Сб. IV Международная конференция „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“, посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова. Тула, 10–15 сентября, 2001 Актуальные проблемы Ч. I. М. МГУ, 2002. С. 54–80.
11. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.
12. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.
13. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 4. 1998. С. 522–526.
14. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб.тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.
15. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции рациональных решёток // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 49.
16. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 1996. С. 77 — 87.

17. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.
18. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.
19. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. — 420 с.
20. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 3, с. 215–222.
21. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
22. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
23. О. В. Локуциевский, М. Б. Гавриков Начала численного анализа / М.: ТОО "Янус" 1995.
24. Н. В. Максименко. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток и алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 1, С. 233–246.
25. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.
26. Скубенко Б. Ф. О произведении  $n$  линейных форм от  $n$  переменных // Труды МИАН СССР. № 158. 1981. С. 175 — 179.
27. Скубенко Б. Ф. Теорема изоляции для разложимых форм чисто вещественных алгебраических полей степени  $n \geq 3$  // Аналитическая теория чисел и теория функций. 4. Зап. науч. семинара ЛОМИ. № 112. 1981. С. 167–171.
28. Скубенко Б. Ф. Циклические множества чисел и решёток // Аналитическая теория чисел и теория функций. 8. Зап. науч. семинара ЛОМИ. № 160. 1987. С. 151–158.
29. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных // Аналитическая теория чисел и теория функций. 9. Зап. науч. семинара ЛОМИ. № 168. 1988. С. 125–139.
30. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимых форм степени  $n$  от  $n$  переменных при  $n \geq 3$  // Модулярные функции и квадратичные формы. 1. Зап. науч. семинара ЛОМИ. № 183. 1990. С. 142–154.
31. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 326–338.
32. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и группы Ли. — М.: Мир, 1987. — 304 с.
33. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818–821.
34. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1971.

## REFERENCES

1. Akramov, U. A. 1990, “The isolation theorem for forms corresponding to purely real algebraic fields“, *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 10 Zap. nauchn. sem. LOMI*, no. 185, pp. 5–12.  
bibitem engAr Arnold V. I., 1975, “Ordinary differential equations”, M.: Science, 240 p.
2. Babenko, K.I. 1986, *Osnovy chislennogo analiza [Fundamentals of numerical analysis]*, Nauka, Moscow, Russia.
3. Vejl', G. 1947, *Algebraicheskaya teoriya chisel [Algebraic number theory]*, Gosudarstvennoe izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moscow, Russia.
4. Delone, B. N. & Faddeev, D. K. 1940, “Theory of irrationalities of the third degree“, *Trudy matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova* (Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics), vol. 11, pp. 3–340.
5. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, “On the error of approximate integration over modified grids“, *Chebyshevskij sbornik*, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.
6. Dobrovol'skii, N. M. 1984, “Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids“, *Dep. v VINITI*, no. 6089–84.
7. Dobrovol'skii, N. M. 1984, “On quadrature formulas in classes  $E_s^\alpha(c)$  and  $H_s^\alpha(c)$ “, *Dep. v VINITI*, no. 6091–84.  
bibitemengKd36 Dobrovolskiy N. M. Hyperbolic zeta function of lattices. Dep. in VINITI 08.24.84, no. 6090-84.  
bibitemengDaK Dobrovolsky N. M. “Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications to approximate analysis“, *Sb. IV International conference glqq Modern problems of number theory and its applications grqq dedicated to the 180th anniversary of P. L. Chebyshev and 110th anniversary of I. M. Vinogradov. Tula, 10 — 15 September, 2001 Actual problems Ch. I. M. MGU, 2002. p. 54 — 80.*
8. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, “Banach spaces of periodic functions“, *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.
9. Dobrovol'skii N.M., Manokhin E.V., Rebrova I. Yu., Roshchenya A.L., 2001, “On the continuity of the zeta function of a grid with weights“, *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 7, no. 1, pp. 82–86.
10. Dobrovol'skij, N.M., Rebrova, I.YU. & Roshhenya, A.L. 1998, “Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices“, *Matematicheskie zametki* (Mathematical Notes), vol. 63, no. 4, pp. 522–526.
11. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, “Number of lattice points in the hyperbolic cross“, *Math. Notes*, 63:3 (1998), 319–324.
12. Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., 1995, “On the number of points of a lattice in a hyperbolic cross“, *Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Collected tez. report II Int. conf. Voronezh*, p. 53.
13. Dobrovolskii N. M., Roshchenya A. L., 1996, “On the analytic continuation of the hyperbolic zeta-function of rational lattices“, *Modern problems of number theory and its applications: Collection of articles. thesis. report III Int. conf. Tula*, p. 49.

14. Dobrovol'skii N. M., Roshchenya A. L., 1996, "On the continuity of the hyperbolic zeta-function of lattices", *Izv. Toole. state un-that. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science*. T. 2. Issue 1. Tula: Publishing house of Tula State University, p. 77 — 87.
15. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.
16. A. N. Kormacheva, 2019, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices — II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 215–222.
17. Korobov, N.M. 1963, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhenom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.
18. Korobov, N.M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhenom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.
19. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, *Nachala chislennogo analiza* [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.
20. N. V. Maksimenko, 2020, "The space of Dirichlet series to multivariate lattices and the algebra of Dirichlet series of grids, repetitive multiplication", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 233–246.
21. Rebrova, I. YU. 1998, "The continuity of the generalized hyperbolic zeta lattice function and its analytic continuation", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 99–108.
22. Skubenko, B. F. 1981, "The isolation theorem for decomposable forms of purely real algebraic fields of degree  $n > 3$ ", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij*. 4 *Zap. nauchn. sem. LOMI*, no.112, pp. 167–171.
23. Skubenko, B. F. 1981, "On the product of  $n$  linear forms of  $n$  variables", *Trudy MIAN SSSR*, no.158, pp. 175–179.
24. Skubenko, B. F. 1982, "To joint approximations of algebraic irrationalities", *Tselochislennyye reshetki i konechnyye linejnyye gruppy*, *Zap. nauchn. sem. LOMI*, pp. 142–154.
25. Skubenko, B. F. 1987, "Cyclic sets of points and lattices", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij*. 8 *Zap. nauchn. sem. LOMI*, pp. 151–158.
26. Skubenko, B. F. 1988, "The minima of a decomposable cubic form in three variables", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij*. 9 *Zap. nauchn. sem. LOMI*, no.168, pp. 151–158.
27. Skubenko, B. F. 1990, "Minima of decomposable forms of degree  $n$  of  $n$  variables for  $n > 3$ ", *Modulyarnyye funktsii i kvadratische formy*. 1 *Zap. nauchn. sem. LOMI*, no.183, pp. 142–154.  
 bibitem engSPDD E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky., 2017, "Algebraic lattices in the metric space of lattices", *Chebyshev sb.*, vol. 18, no. 4, p. 326–338.  
 bibitem engWar Warner F. Foundations of the theory of smooth manifolds and Lie groups. — M.: Mir, 1987. — 304 p.
28. Frolov, K. K. 1976, "Estimates from above of the error of quadrature formulas on function classes", *DAN SSSR*, no.4, pp. 818–821.

- 
29. Frolov, K. K. 1979, “Quadrature formulas on function classes“, Ph.D. Thesis, Computing Center of the Russian Academy of Sciences of the USSR, Moscow, Russia.

Получено 21.04.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

---

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-186-195

**Об асимптотическом поведении некоторых сумм, содержащих функцию количества простых делителей**

М. Е. Чанга

**Марис Евгеньевич Чанга** — доцент кафедры высшей математики, Московский государственный университет геодезии и картографии (г. Москва).

*e-mail: maris\_changa@mail.ru*

**Аннотация**

В статье рассматриваются суммы значений композиции вещественной периодической арифметической функции и функции количества простых делителей по натуральным числам, не превосходящим заданного. При этом подсчет простых делителей может производиться как с учетом кратности, так и без ее учета, а на сами делители может быть наложено дополнительное требование принадлежности некоторому специальному множеству. Упомянутое специальное множество может быть, например, объединением нескольких арифметических прогрессий с заданной разностью, или же допускать аналог асимптотического закона распределения простых чисел со степенным понижением в остатке. Более того, вместо функции количества простых делителей можно рассмотреть любую вещественную аддитивную функцию, равную единице на простых числах. В качестве примера периодической арифметической функции можно рассмотреть символ Лежандра. Доказаны асимптотические формулы для указанных сумм и изучено их поведение.

Доказательство использует разложение периодической арифметической функции по характерам аддитивной группы вычетов, что сводит задачу к рассмотрению специальной тригонометрической суммы с функцией количества простых делителей в показателе. Для нахождения асимптотик этих сумм мы записываем соответствующий производящий ряд Дирихле, аналитически продолжаем его и применяем формулу Перрона и метод комплексного интегрирования в специально адаптированном варианте.

*Ключевые слова:* ограничения на простые делители, количество простых делителей, тригонометрическая сумма, метод комплексного интегрирования.

*Библиография:* 17 названий.

**Для цитирования:**

М. Е. Чанга Об асимптотическом поведении некоторых сумм, содержащих функцию количества простых делителей // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 186–195.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-186-195

**On the asymptotic behavior of some sums involving  
the number of prime divisors function**

M. E. Changa

**Maris Evgenievich Changa** — Docent, Department of Higher Mathematics, Moscow State University of Geodesy and Cartography (Moscow).

*e-mail: maris\_changa@mail.ru*

**Abstract**

We consider sums of values of the composition of a real periodic arithmetic function and the number of prime divisors function over integers not exceeding a given bound. The prime divisors may be counted as with their multiplicity or without it, and we can restrict these divisors to the additional condition of belonging to some special set. This special set may be, for example, a sum of several arithmetic progressions with a given difference or imply an analog of prime number theorem with a power decrement in the remainder term. Moreover, instead of the number of prime divisors function we can consider an arbitrary real additive function that equals to one on primes. As an example of the periodic arithmetic function we can consider the Legendre symbol. In the paper we prove asymptotic formulae for such sums and investigate their behavior.

The proof uses the decomposition of the periodic arithmetic function into additive characters of the residue group, so the problem reduces to special trigonometric sums with the number of prime divisors function in the exponent. In order to establish asymptotic formulae for such sums we consider the corresponding Dirichlet series, accomplish its analytic continuation and make use of the Perron formula and complex integration method in specially adapted form.

*Keywords:* restrictions on prime divisors, number of prime divisors, trigonometric sum, complex integration method.

*Bibliography:* 17 titles.

**For citation:**

M. E. Changa, 2020, "On the asymptotic behavior of some sums involving the number of prime divisors function", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 186–195.

**1. Введение**

Пусть  $E$  — некоторое бесконечное множество натуральных чисел. Через  $M$  будем обозначать множество натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат  $E$ . Количество чисел множества  $M$ , не превосходящих  $x$ , обозначим через  $n(x)$ , то есть

$$n(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} 1.$$

В тривиальном случае  $E = \mathbb{N}$  имеем, очевидно,  $M = \mathbb{N}$  и  $n(x) = [x]$ . Пусть теперь  $f(n)$  — вещественная арифметическая функция, периодическая с периодом  $k$ , не меньшим двух, а

$\gamma(n)$  — вещественная аддитивная арифметическая функция с условием  $\gamma(p) = 1$  для любого простого  $p$ . Введем обозначение

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} f(\gamma(n)).$$

Простейшим примером периодической арифметической функции является функция  $f(n) = (-1)^n$ , периодическая с периодом 2.

Рассмотрим один из вариантов выбора функции  $\gamma(n)$ . Пусть  $\Omega(n)$  обозначает число простых делителей  $n$  с учетом их кратности. Таким образом, при  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$  имеем  $\Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$ . Очевидно, что  $\Omega(n)$  удовлетворяет требованиям, предъявляемым к функции  $\gamma(n)$ , а функция  $a^{\Omega(n)}$  вполне мультипликативна при любом ненулевом комплексном  $a$ . При  $a = -1$  эта функция называется функцией Лиувилля и обозначается  $\lambda(n)$ . Таким образом,  $\lambda(n) = f(\gamma(n))$  при  $f(n) = (-1)^n$  и  $\gamma(n) = \Omega(n)$ . Отсюда, пользуясь классическим результатом [1, теорема 5.2, с.86], в случае  $E = \mathbb{N}$  получаем

$$S(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n) \ll x e^{-c\sqrt{\ln x}}.$$

Пусть теперь заданы натуральные числа  $m \geq 3$  и  $r < \varphi(m)$ . Пусть  $l_1, \dots, l_r$  — различные натуральные числа, не превосходящие  $m$  и взаимно простые с ним. Возьмем в качестве  $E$  множество всех натуральных чисел, сравнимых с одним из чисел  $l_1, \dots, l_r$  по модулю  $m$ . Иначе говоря, множество  $E$  есть объединение  $r$  арифметических прогрессий с первыми членами  $l_1, \dots, l_r$  и разностью  $m$ . В этом случае асимптотическая формула для  $n(x)$  была найдена Э. Ландау [2, §183] и имеет вид

$$n(x) = \frac{C_1 x}{\ln^{-\frac{r}{\varphi(m)}+1} x} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right).$$

При исследовании распределения чисел множества  $M$  в зависимости от четности  $\Omega(n)$  А. А. Карацубой [3], [4] было обнаружено, что

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \lambda(n) = \frac{An(x)}{\ln^{\frac{2r}{\varphi(m)}} x} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right), \quad (1)$$

где  $A$  — положительная постоянная. Этот результат имеет неожиданный арифметический смысл, так как может быть интерпретирован как некоторое преобладание среди чисел множества  $M$  чисел с нечетным количеством простых делителей.

Пусть теперь  $E$  таково, что

$$\pi(x, E) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} 1 = c_E \pi(x) + O(x^{1-\Delta}), \quad (2)$$

где  $\Delta > 0$ ,  $0 < c_E < 1$ . В качестве такого  $E$  можно взять все натуральные числа, принадлежащие множеству

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} [(Dn + j - 1)^{1/a}, (Dn + j)^{1/a}),$$

где  $a$  — нецелое положительное число,  $D$  и  $j$  — натуральные числа, причем  $D \geq 2$ ,  $j \leq D$ . Соответствующая формула для величины  $\pi(x, E)$  в случае  $0 < a < 1$  доказана в работе [5], а для нецелых  $a$ , больших единицы, например, в работе [6]. Эта задача изучалась также в работах [7, 8]. Можно также рассматривать в качестве  $E$  множество простых чисел, содержащих четное число единиц в своей двоичной записи. Справедливость соответствующей

асимптотической формулы для  $\pi(x, E)$  установлена в работе [9]. Для такого выбора множества  $E$  А. А. Карацубой [3], [4] получены аналогичные случаю арифметических прогрессий результаты

$$\begin{aligned} n(x) &= \frac{C_2 x}{\ln^{-c_E+1} x} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right), \\ S(x) &= \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \lambda(n) = \frac{B n(x)}{\ln^{2c_E} x} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $B$  — положительная постоянная. Таким образом, при таком выборе множества  $E$  обнаруживается тот же эффект преобладания чисел с нечетным количеством простых делителей.

Рассмотрим другой вариант выбора функции  $\gamma(n)$ . Обозначим через  $\nu(n)$  количество различных простых делителей числа  $n$ . Таким образом, при  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$  имеем  $\nu(n) = r$ . Эта функция также удовлетворяет требованиям, предъявляемым к  $\gamma(n)$ , а функция  $a^{\nu(n)}$  мультипликативна при любом ненулевом комплексном  $a$ . Хорошо известно, что при  $E = \mathbb{N}$  имеет место равенство

$$S(x) = \sum_{n \leq x} (-1)^{\nu(n)} \ll x e^{-c\sqrt{\ln x}}.$$

Рассматривая распределение чисел из множества  $M$  в зависимости от четности  $\nu(n)$ , автор в работах [10, 11] для случая  $E$ , допускающего равенство (2), и в работе [12] для случая  $E$ , составленного из арифметических прогрессий, получил формулы, отличающиеся от (1) и (3) лишь значениями констант  $A$  и  $B$ .

Пусть теперь  $k$  — фиксированное натуральное число, не меньшее трех, а  $l$  — некоторое натуральное число, не превосходящее  $k$ . Положим  $f(n) = 1$  при  $n \equiv l \pmod{k}$ , и  $f(n) = 0$  в противном случае. Такая арифметическая функция периодична с периодом  $k$  и является характеристической функцией множества чисел, сравнимых с  $l$  по модулю  $k$ . В этом случае сумма  $S(x)$  имеет смысл количества чисел множества  $M$ , не превосходящих  $x$  и таких, что  $\gamma(n) \equiv l \pmod{k}$ . В работе [13] автор получил в случае  $E = \mathbb{N}$  асимптотическую формулу

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ \gamma(n) \equiv l \pmod{k}}} 1 = \frac{1}{k} n(x) \left( 1 + \frac{A_0 \cos\left(\sin \frac{2\pi}{k} \cdot \ln \ln x + \varphi_0 - \frac{2\pi l}{k}\right)}{\ln^{2 \sin^2 \frac{\pi}{k}} x} + O\left(\ln^{-\delta_k} x\right) \right), \quad (4)$$

где  $A_0 \neq 0$  и  $\varphi_0$  — некоторые вещественные постоянные, а  $\delta_k = 2 \sin^2 \frac{\pi}{k} + 1$  при  $k \leq 6$ , и  $\delta_k = 2 \sin^2 \frac{2\pi}{k}$  при  $k \geq 7$ . Эта формула справедлива для любой аддитивной функции  $\gamma(n)$  с условием  $\gamma(p) = 1$ , в частности, для функций  $\Omega(n)$  и  $\nu(n)$ . Аналогичные формулы, отличающиеся от (4) лишь некоторыми коэффициентами, были получены в той же работе [13] и для случая множества  $E$ , допускающего равенство (2), и для случая множества  $E$ , составленного из арифметических прогрессий. Интересным эффектом, возникшим при переходе к случаю  $k \geq 3$ , является исчезновение качественного отличия случая  $E = \mathbb{N}$  от остальных вариантов выбора множества  $E$ .

В работах [14, 15] автор рассмотрел сумму символов Лежандра с функцией  $\nu(n)$ , что отвечает случаю  $f(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$ . В этом случае функция  $f(n)$  периодична с периодом  $p$ , где  $p$  — фиксированное нечетное простое число. При этом для суммы  $S(x)$  получается асимптотическая формула, подобная (4), но без первого слагаемого, так как полная сумма символов Лежандра равна нулю. А именно, при  $E = \mathbb{N}$  имеет место равенство

$$S(x) = \sum_{n \leq x} \left( \frac{\nu(n)}{p} \right) = \frac{A_p x}{\ln^{2 \sin^2 \frac{\pi}{p}} x} \cos\left(\sin \frac{2\pi}{p} \cdot \ln \ln x + \varphi_p\right) + O\left(x \ln^{-\delta_p} x\right),$$

где  $\delta_p = 2 \sin^2 \frac{\pi}{p} + 1$  при  $p = 3, 5$ , и  $\delta_p = 2 \sin^2 \frac{2\pi}{p}$  при  $p \geq 7$ , а  $A_p \neq 0$  и  $\varphi_p$  — некоторые вещественные постоянные.

Естественным обобщением всех упомянутых задач является задача исследования поведения суммы  $S(x)$  при произвольной периодической  $f(n)$  и произвольной аддитивной  $\gamma(n)$  с условием  $\gamma(p) = 1$ , которая и является предметом исследования настоящей статьи. При этом период  $k$  функции  $f(n)$  имеет смысл положить не меньшим трех, поскольку при  $k = 2$  существуют только две независимые функции  $f(n)$ , а именно  $(-1)^n$  и постоянная, случай которых всесторонне исследован в работах [3, 4, 10, 11, 12].

## 2. Основная часть

Сформулируем основные результаты настоящей работы. Пусть  $k$  — фиксированное натуральное число, не меньшее трех, и  $f(n)$  — произвольная вещественная арифметическая функция, периодическая с периодом  $k$ . Обозначим через  $f_0$  среднее значение функции  $f(n)$ , то есть

$$f_0 = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k f(n).$$

Пусть  $\gamma(n)$  — произвольная вещественная аддитивная арифметическая функция с условием  $\gamma(p) = 1$  для любого простого  $p$ . Пусть  $M$  — множество натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат множеству  $E$ . Количество чисел множества  $M$ , не превосходящих  $x$ , обозначим через  $n(x)$ . Тогда имеют место утверждения

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $E = \mathbb{N}$ . Тогда существуют такие вещественные постоянные  $A$  и  $\varphi$ , что имеет место асимптотическая формула

$$S(x) = \sum_{n \leq x} f(\gamma(n)) = x \left( f_0 + \frac{A \cos \left( \sin \frac{2\pi}{k} \cdot \ln \ln x + \varphi \right)}{\ln^{2 \sin^2 \frac{\pi}{k}} x} + O \left( \ln^{-\delta_k} x \right) \right),$$

где  $\delta_k = 2 \sin^2 \frac{\pi}{k} + 1$  при  $k \leq 6$ , и  $\delta_k = 2 \sin^2 \frac{2\pi}{k}$  при  $k \geq 7$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $m \geq 3$  и  $r < \varphi(m)$ . Пусть  $l_1, \dots, l_r$  — различные натуральные числа, не превосходящие  $m$  и взаимно простые с ним. Пусть  $E$  — множество всех натуральных чисел, сравнимых с одним из чисел  $l_1, \dots, l_r$  по модулю  $m$ . Тогда существуют такие вещественные постоянные  $B$  и  $\psi$ , что имеет место асимптотическая формула

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} f(\gamma(n)) = n(x) \left( f_0 + \frac{B \cos \left( \varkappa \sin \frac{2\pi}{k} \cdot \ln \ln x + \psi \right)}{\ln^{2 \varkappa \sin^2 \frac{\pi}{k}} x} + O \left( \ln^{-\delta_k} x \right) \right),$$

где  $\delta_k = 2 \varkappa \sin^2 \frac{2\pi}{k}$  при  $k = 4$  или  $k \geq 6$ ,  $\delta_5 = \min(2 \varkappa \sin^2 \frac{2\pi}{5}, 2 \varkappa \sin^2 \frac{\pi}{5} + 1)$ ,  $\delta_3 = \frac{3}{2} \varkappa + 1$ , а  $\varkappa = \frac{r}{\varphi(m)}$ .

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть множество  $E$  допускает равенство (2). Тогда существуют такие вещественные постоянные  $B'$  и  $\psi'$ , что имеет место асимптотическая формула

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} f(\gamma(n)) = n(x) \left( f_0 + \frac{B' \cos \left( c_E \sin \frac{2\pi}{k} \cdot \ln \ln x + \psi' \right)}{\ln^{2 c_E \sin^2 \frac{\pi}{k}} x} + O \left( \ln^{-\delta_k} x \right) \right),$$

где  $\delta_k = 2 c_E \sin^2 \frac{2\pi}{k}$  при  $k = 4$  или  $k \geq 6$ ,  $\delta_5 = \min(2 c_E \sin^2 \frac{2\pi}{5}, 2 c_E \sin^2 \frac{\pi}{5} + 1)$ ,  $\delta_3 = \frac{3}{2} c_E + 1$ .

Нам понадобятся вспомогательные утверждения, доказанные в работе [13], которые адаптируют метод комплексного интегрирования к поставленной задаче.

**ЛЕММА 1.** Пусть  $k$  — натуральное число, не меньшее трех,  $y \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma(n)$  — аддитивная арифметическая функция с условием  $\gamma(p) = 1$  для любого простого  $p$ . Пусть  $E$  — бесконечное подмножество  $\mathbb{N}$ , а  $M$  — множество натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат  $E$ . Тогда при  $\text{Res} > 1$  имеет место равенство

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \in M}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \frac{y\gamma(n)}{k}}}{n^s} = \prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-e^{2\pi i \frac{y}{k}}} \cdot F_y(s),$$

где функция  $F_y(s)$  аналитична и ограничена в полуплоскости  $\text{Res} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$  при любом положительном  $\varepsilon$ , причем  $F_y(1) \neq 0$  при  $|y| < \frac{k}{2}$ .

**ЛЕММА 2.** Пусть  $g(n)$  — комплекснозначная арифметическая функция с условием  $|g(n)| \leq 1$ , и при  $\text{Res} > 1$  имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = (\zeta(s))^{\alpha} H(s),$$

где  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| \leq 1$ , а функция  $H(s)$  при любом достаточно большом  $T$  аналитична в области  $\sigma \geq 1 - c_1/\ln T$ ,  $|t| \leq T$ , причем в этой области справедлива оценка  $H(s) \ll \ln^c T$ . Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq x} g(n) = \frac{H(1)}{\Gamma(\alpha)} x \ln^{\alpha-1} x + O(x \ln^{\text{Re}\alpha-2} x).$$

Теперь мы готовы к доказательству основного результата настоящей работы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** [Доказательство теоремы 1] Раскладывая периодическую с периодом  $k$  функцию  $f(n)$  по характерам аддитивной группы вычетов по модулю  $k$ , получим

$$f(\gamma(n)) = \sum_{j \bmod k} e^{2\pi i \frac{j\gamma(n)}{k}} \frac{1}{k} \sum_{m \bmod k} f(m) e^{-2\pi i \frac{j m}{k}},$$

где  $j$  и  $m$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $k$  (для простоты и определенности — наименьшие по абсолютной величине вычеты). Обозначая

$$f_j = \frac{1}{k} \sum_{m \bmod k} f(m) e^{-2\pi i \frac{j m}{k}} \quad (5)$$

и суммируя по  $n$ , не превосходящим  $x$ , найдем

$$S(x) = \sum_{n \leq x} f(\gamma(n)) = \sum_{j \bmod k} f_j \sum_{n \leq x} e^{2\pi i \frac{j\gamma(n)}{k}} = \sum_{j \bmod k} f_j S_j(x), \quad (6)$$

где мы ввели также обозначение

$$S_j(x) = \sum_{n \leq x} e^{2\pi i \frac{j\gamma(n)}{k}}.$$

Очевидно,  $S_0(x) = [x]$ , асимптотики же остальных сумм  $S_j(x)$  получим методом комплексного интегрирования. Применяя лемму 1, для соответствующего производящего ряда Дирихле при  $\text{Res} > 1$  получаем выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \frac{j\gamma(n)}{k}}}{n^s} = (\zeta(s))^{e^{2\pi i \frac{j}{k}}} F_j(s), \quad (7)$$

где функция  $F_j(s)$  аналитична и ограничена в полуплоскости  $\text{Res} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$ . Применяя затем лемму 2, для искомой сумматорной функции получаем следующее соотношение

$$S_j(x) = \frac{F_j(1)}{\Gamma(e^{2\pi i \frac{j}{k}})} x \ln^{e^{2\pi i \frac{j}{k}} - 1} x + O(x \ln^{\cos \frac{2\pi j}{k} - 2} x). \quad (8)$$

Так как функция  $f(n)$  вещественна, из равенства (5) имеем  $f_{-j} = \overline{f_j}$ . Далее, поскольку гамма-функция вещественна при вещественных значениях аргумента, то

$$\Gamma(e^{-2\pi i \frac{j}{k}}) = \overline{\Gamma(e^{2\pi i \frac{j}{k}})}.$$

Наконец, из соотношения (7) при вещественной  $\gamma(n)$  нетрудно получить, что  $F_{-j}(s) = \overline{F_j(\overline{s})}$ , а значит  $F_{-j}(1) = \overline{F_j(1)}$ . Таким образом, слагаемые суммы (6), отвечающие  $j = 1$  и  $j = -1$  комплексно сопряжены. Обозначая

$$\frac{f_1 F_1(1)}{\Gamma(e^{\frac{2\pi i}{k}})} = \frac{1}{2} A e^{i\varphi} \quad (9)$$

с некоторыми вещественными  $A$  и  $\varphi$ , имеем

$$f_1 S_1(x) + f_{-1} S_{-1}(x) = \frac{Ax \cos\left(\sin \frac{2\pi}{k} \cdot \ln \ln x + \varphi\right)}{\ln^{2 \sin^2 \frac{\pi}{k}} x} + O\left(x \ln^{-2 \sin^2 \frac{\pi}{k} - 1} x\right). \quad (10)$$

С другой стороны, при  $2 \leq |j| \leq \frac{k}{2}$  из соотношения (8) следует, что  $S_j(x) \ll x \ln^{-2 \sin^2 \frac{2\pi}{k}} x$ . Подставляя эту оценку, наряду с равенством (10), в сумму (6), получим утверждение теоремы.  $\square$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** [Доказательства теорем 2 и 3] Проводятся в целом аналогично доказательству теоремы 1. Суммирование в сумме  $S_j(x)$  в этом случае идет только по числам множества  $M$ , поэтому при применении леммы 1 в равенстве (7) вместо  $\zeta(s)$  будет фигурировать функция

$$\prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Ее аналитическое продолжение, выражение через дзета-функцию Римана, а также оценки ее модуля вблизи единичной прямой даны в [16, лемма 1] для случая множества  $E$ , являющегося объединением арифметических прогрессий, и в [17, лемма 1] для случая множества  $E$ , допускающего равенство (2). В конечном итоге в показателе степени  $\zeta(s)$  в соотношении (7) добавляется множитель  $\varkappa$  или  $c_E$ , который затем модифицирует формулы (8) и (10). Кроме того, при записи окончательного результата следует учесть, что из равенства (8) следует, что

$$S_0(x) = n(x) \asymp x \ln^{\varkappa - 1} x$$

в случае теоремы 2, а в случае теоремы 3 параметр  $\varkappa$  заменяется на  $c_E$ .  $\square$

Мы видим, что если среднее значение функции  $f(n)$  отлично от нуля, то сумма  $S(x)$  асимптотически равна  $f_0 \cdot n(x)$ . В случае же среднего значения равного нулю, что имеет место, например, при  $f(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$ , на первый план выходит второе, осциллирующее слагаемое асимптотики.

При этом указанное слагаемое не обращается в нуль тождественно, если только величина  $f_1$  отлична от нуля, что легко видеть из равенства (9) и леммы 1.

Отметим также, что условие  $\gamma(p) = 1$  при любом простом  $p$  продиктовано скорее историческими причинами: ему удовлетворяют широко известные аддитивные функции  $\nu(n)$  и  $\Omega(n)$ . Доказательство без труда модифицируется на случаи, когда  $\gamma(p) = 1$  для всех простых  $p$  за исключением конечного числа, и когда  $\gamma(p)$  при любом простом  $p$  принимает одно и то же значение, не обязательно равное единице. Конечно, в последнем случае второй член асимптотики уже существенно поменяется.

### 3. Заключение

В статье доказаны асимптотические формулы для суммы значений композиции вещественной периодической арифметической функции с периодом не меньшим трех и вещественной аддитивной арифметической функции, равной единице на простых числах, по числам, не превосходящим заданного и таким, что все их простые делители принадлежат специальному множеству. Рассмотрено три варианта выбора специального множества: множество всех натуральных чисел, объединение арифметических прогрессий с заданной разностью и множество, допускающее аналог асимптотического закона распределения простых чисел со степенным понижением в остатке. Из полученных результатов следует, что нетривиальный, осциллирующий характер поведения изучаемых сумм проявляется в том случае, когда среднее значение рассматриваемой периодической функции равно нулю.

### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
2. Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig: Teubner, 1909.
3. Карацуба А.А. Об одном свойстве множества простых чисел // Успехи матем. наук, 2011, т. 66, вып. 2, с. 3-14.
4. Карацуба А.А. Об одном свойстве множества простых чисел как мультипликативного базиса натурального ряда // Доклады РАН, 2011, т. 439, вып. 2, с. 159-162.
5. Виноградов И.М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Матем. сб., 1940, т. 7(49), вып. 2, с. 365–372.
6. Чанга М.Е. Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами // Матем. заметки, 2003, т. 73, вып. 3, с. 423–436.
7. Гриценко С.А. Об одной задаче И.М. Виноградова // Матем. заметки, 1986, т. 39, вып. 5, с. 269–285.
8. Ren X.M. Vinogradov's exponential sum over primes // Acta Arith., 2006, vol. 124, no. 3, p. 269-285.
9. Mauduit C., Rivat J. Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers // Annals of Mathematics. Second Series, 2010, v. 171, no. 3, p. 1591–1646.
10. Чанга М.Е. О количестве чисел специального вида в зависимости от четности числа их различных простых делителей // Матем. заметки, 2015, т. 97, вып. 6, с. 930–935.

11. Чанга М.Е. О соотношении количеств чисел с четным и нечетным числом различных простых делителей при условии некоторых ограничений на последние // Мат. методы и приложения. Труды XX мат. чтений РГСУ. М.: АППиППРО, 2011, с. 121-125.
12. Чанга М.Е. Об одной задаче с числами, все простые делители которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям // Успехи матем. наук, 2016, т. 71, вып. 4, с. 191–192.
13. Чанга М.Е. О числах, количество простых делителей которых принадлежит заданному классу вычетов // Известия РАН, сер. матем., 2019, т. 83, вып. 1, с. 192–202.
14. Чанга М.Е. Об одной сумме символов Лежандра // Успехи матем. наук, 2018, т. 73, вып. 5, с. 183–184.
15. Чанга М.Е. О распределении чисел с условиями на количество их простых делителей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции. Тула: ТГПУ, 2018, с. 242-243.
16. Чанга М.Е. О суммах мультипликативных функций по числам, все простые делители которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям // Известия РАН. Сер. матем., 2005, т. 69, вып. 2, с. 205–220.
17. Чанга М.Е. О числах, все простые делители которых лежат в специальных промежутках // Известия РАН. Сер. матем., 2003, т. 67, вып. 4, с. 213–224.

## REFERENCES

1. Prachar K. Primzahlverteilung. Berlin : Springer-Verlag, 1957.
2. Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig: Teubner, 1909.
3. Karatsuba A.A. 2011, "A property of the set of prime numbers" , *Russian Mathematical Surveys*, vol. 66, no. 2, pp. 209-220.
4. Karatsuba A.A. 2011, "On a property of the set of prime numbers as a multiplicative basis of integers" , *Doklady RAS*, vol. 439, no. 2, pp. 159-162.
5. Vinogradov I.M. 1940, "Some common property of the prime number distribution" , *Math. Sbornik*, vol. 7(49), no. 2, pp. 365-372.
6. Changa M.E. 2003, "Primes in special intervals and additive problems with such numbers" , *Mathematical Notes*, vol. 73, no. 3, pp. 389-401.
7. Gritsenko S.A. 1986, "A problem of I.M. Vinogradov" , *Mathematical Notes*, vol. 39, no. 5, pp. 341-350.
8. Ren X.M. 2006, "Vinogradov's exponential sum over primes" , *Acta Arith.*, vol. 124, no. 3, pp. 269-285.
9. Mauduit C., Rivat J. 2010, "Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers" , *Annals of Mathematics. Second Series*, vol. 171, no. 3, pp. 1591–1646.
10. Changa M.E. 2015, "On the quantity of numbers of special form depending on the parity of the number of their different prime divisors" , *Mathematical Notes*, vol. 97, no. 6, pp. 941-945.

11. Changa M.E. 2011, "On the relation between quantities of integers with even and odd number of distinct prime divisors with some restrictions on them", *Mat. Metody i Prilozheniya. Trudy XX Mat. Chteniy RGSU* Moscow : APPiPPRO, pp. 121-125.
12. Changa M.E. 2016, "A problem involving integers all of whose prime divisors belong to given arithmetic progression", *Russian Mathematical Surveys*, vol. 71, no. 4, pp. 790-792.
13. Changa M.E. 2019, "On integers whose number of prime divisors belongs to a given residue class", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 83, no. 1, pp. 173-183.
14. Changa M.E. 2018, "On a sum of Legendre symbols", *Russian Mathematical Surveys*, vol. 73, no. 5, pp. 919-921.
15. Changa M.E. 2018, "On the distribution of integers with restrictions on the quantity of their prime divisors", *Algebra, Teoriya chisel i diskretnaya Geometriya: sovremennye problemy i prilozheniya. Materialy XV mezhdunarodnoy konferentsii* Tula : TGPU, pp. 242-243.
16. Changa M.E. 2005, "On sums of multiplicative functions over numbers all of whose prime divisors belong to given arithmetic progressions", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 69, no. 2, pp. 423-438.
17. Changa M.E. 2003, "Numbers whose prime divisors lie in special intervals", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 67, no. 4, pp. 837-848.

Получено 10.07.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.321

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-196-214

**О среднем значении функций, родственных функции делителей, в кольце многочленов над конечным полем**

В. В. Юделеви́ч

**Виталий Викторович Юделеви́ч** — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
*e-mail: vitaliiyudelevich@mail.ru*

**Аннотация**

Пусть  $\mathbb{F}_q[T]$  — кольцо многочленов над конечным полем  $\mathbb{F}_q$ . Далее, пусть  $g: \mathbb{F}_q[T] \rightarrow \mathbb{R}$  — мультипликативная функция, значения которой на степенях неприводимого многочлена зависят лишь от показателя степени, то есть  $g(P^k) = d_k$  для любого неприводимого многочлена  $P$  и некоторой фиксированной последовательности вещественных чисел  $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ . В работе исследуется сумма

$$T(N) = T(N; g) = \sum_{\deg F=N} g(F),$$

где  $F$  пробегает многочлены степени  $N$  со старшим коэффициентом, равным 1 (унитарные многочлены). Для суммы  $T(N)$  находится точная формула, а также вычисляется асимптотика при  $q \rightarrow \infty$  и  $N$  фиксированном; при  $N \rightarrow \infty$  и  $q \rightarrow \infty$ ; при  $q^N \rightarrow \infty$ . В частности, доказаны следующие асимптотические формулы:

$$\sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ унитарен}}} \tau(F^k) = \binom{k+N}{N} q^N + O_{N,k}(q^{N-1}), \quad N \geq 1, \quad q \rightarrow \infty;$$

$$\sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ унитарен}}} \frac{1}{\tau(F)} = \frac{q^N}{4^N} \left( \binom{2N}{N} - \frac{2}{3} \binom{2N-4}{N-2} q^{-1} + O\left(\frac{4^N}{\sqrt{N}} q^{-2}\right) \right), \quad N \rightarrow \infty, \quad q \rightarrow \infty;$$

$$\sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ унитарен}}} \frac{1}{\tau(F)} = C_1 \cdot \frac{\binom{2N}{N}}{4^N} q^N + O\left(\frac{q^{N-0.5}}{N^{1.5}}\right), \quad C_1 = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( \sqrt{q^{2l}-q^l} \ln \frac{q^l}{q^l-1} \right)^{\pi_q(l)}, \quad q^N \rightarrow \infty;$$

где  $\tau(F)$  — число унитарных многочленов, делящих  $F$ , и  $\pi_q(l)$  — число неприводимых унитарных многочленов степени  $l$ . Последние две формулы представляют собой аналог для многочленов над конечным полем одного результата Рамануджана

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{d(n)} = \frac{x}{\sqrt{\ln x}} \left( a_0 + \frac{a_1}{\ln x} + \dots + \frac{a_N}{(\ln x)^N} + O_N\left(\frac{1}{(\ln x)^{N+1}}\right) \right),$$

где  $d(n)$  — классическая функция делителей,  $a_i$  — константы, в частности

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \ln \frac{p}{p-1} \sqrt{p(p-1)}.$$

**Ключевые слова:** кольцо многочленов над конечным полем, функция делителей.

**Библиография:** 7 названий.

**Для цитирования:**

В. В. Юдеlevич. О среднем значении функций, родственных функции делителей, в кольце многочленов над конечным полем // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 196–214.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511.321

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-196-214

# On the mean value of functions related to the divisors function in the ring of polynomials over a finite field

V. V. Iudelevich

**Vitaly Viktorovich Iudelevich** — graduate student, Lomonosov Moscow State University.  
e-mail: *vitaliiyudelevich@mail.ru*

**Abstract**

Let  $g : \mathbb{F}_q[T] \rightarrow \mathbb{R}$  be a multiplicative function which values at the degrees of the irreducible polynomial, depends only on the exponent, such that  $g(P^k) = d_k$  polynomial  $P$  and for some arbitrary sequence of reals  $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ . This paper regards the sum

$$T(N) = \sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ is monic}}} g(F),$$

where  $F$  ranges over polynomials of degree  $N$  with leading coefficient equal to 1 (unitary polynomials). For the sum  $T(N)$ , an exact formula is found, and various asymptotics are calculated in cases of

$q \rightarrow \infty$ ;  $q \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ ;  $q^N \rightarrow \infty$ . In particular, the following asymptotic formulas are obtained

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ is monic}}} \tau(F^k) &= \binom{k+N}{N} q^N + O_{N,k}(q^{N-1}), \quad N \geq 1, \quad q \rightarrow \infty; \\ \sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ is monic}}} \frac{1}{\tau(F)} &= \frac{q^N}{4^N} \left( \binom{2N}{N} - \frac{2}{3} \binom{2N-4}{N-2} q^{-1} + O\left(\frac{4^N}{\sqrt{N}} q^{-2}\right) \right), \quad N \rightarrow \infty, \quad q \rightarrow \infty; \\ \sum_{\substack{\deg F=N \\ F \text{ is monic}}} \frac{1}{\tau(F)} &= C_1 \cdot \frac{\binom{2N}{N}}{4^N} q^N + O\left(\frac{q^{N-0.5}}{N^{1.5}}\right), \quad C_1 = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( \sqrt{q^{2l}-q^l} \ln \frac{q^l}{q^l-1} \right)^{\pi_q(l)}, \quad q^N \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

where  $\tau(F)$  is a number of monic divisors of  $F$ , and  $\pi_q(l)$  is a number of monic irreducible polynomials of degree  $l$ . The second and third equalities are analogous for polynomials over a finite field of one of Ramanujan's results

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{d(n)} = \frac{x}{\sqrt{\ln x}} \left( a_0 + \frac{a_1}{\ln x} + \dots + \frac{a_N}{(\ln x)^N} + O_N\left(\frac{1}{(\ln x)^{N+1}}\right) \right),$$

where  $d(n)$  is a classical divisor function, and  $a_i$  are some constants. In particular,

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \ln \frac{p}{p-1} \sqrt{p(p-1)}.$$

**Keywords:** the ring of polynomials over a finite field, divisor function.

**Bibliography:** 7 titles.

**For citation:**

V. V. Iudelevich, 2020, "On the mean value of functions related to the divisors function in the ring of polynomials over a finite field", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 196–214.

**1. Введение**

Пусть  $q$  — степень простого числа,  $\mathbb{F}_q$  — конечное поле порядка  $q$ ,  $\mathbb{F}_q[T]$  — кольцо многочленов над полем  $\mathbb{F}_q$ . Как известно,  $\mathbb{F}_q[T]$  является евклидовым кольцом. Как следствие, в нём справедлива теорема об однозначном разложении на множители. Именно, каждый многочлен  $F$ , отличный от постоянной, представляется в виде

$$F = a \cdot P_1^{e_1} P_2^{e_2} \dots P_k^{e_k}, \quad (1)$$

где  $a \in \mathbb{F}_q^*$ ,  $P_1, P_2, \dots, P_k$  — различные неприводимые над полем  $\mathbb{F}_q$  многочлены с единичными старшими коэффициентами (унитарные многочлены), а  $e_1, e_2, \dots, e_k$  — положительные целые числа. Такое разложение единственно с точностью до порядка следования множителей.

Приведённая теорема позволяет рассматривать в кольце  $\mathbb{F}_q[T]$  аналоги известных из элементарной теории чисел мультипликативных функций.

Напомним, что для унитарного многочлена  $F$  функция делителей  $\tau(F)$  определяется равенством

$$\tau(F) = \sum_{D|F} 1,$$

где суммирование ведётся по всем унитарным многочленам, делящим  $F$ . Другими словами,  $\tau(F)$  есть число решений в унитарных многочленах уравнения  $F_1 F_2 = F$ . Обобщённая функция делителей  $\tau_m(F)$ ,  $m \geq 2$ , определяется аналогично — как число решений уравнения  $F_1 F_2 \dots F_m = F$ .

Символом  $\omega(F)$  будем обозначать число неприводимых сомножителей в разложении  $F$  без учёта кратности. Так, если (1) есть разложение многочлена  $F$  на неприводимые, то  $\omega(F) = k$ .

Для многочлена  $F$  степени  $n$  его норма  $N(F)$  определяется равенством  $N(F) = q^n$ . Ясно, что для любых многочленов  $F$  и  $G$  справедливо

$$N(FG) = N(F)N(G).$$

Арифметику кольца  $\mathbb{F}_q[T]$  описывает дзета-функция  $\zeta_q(s)$  этого кольца.

Если  $s = \sigma + it$ ,  $\sigma > 1$ , то  $\zeta_q(s)$  задаётся равенством

$$\zeta_q(s) = \sum_{\substack{F \in \mathbb{F}_q[T] \\ F \text{ унитарный}}} \frac{1}{N^s(F)}. \quad (2)$$

Собирая многочлены одинаковой степени в сумме (2), получим

$$\zeta_q(s) = \sum_{\substack{F \in \mathbb{F}_q[T] \\ F \text{ унитарный}}} \frac{1}{N^s(F)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{q^{ns}} = \frac{1}{1 - q^{1-s}}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что функция  $(1 - q^{1-s})^{-1}$  является аналитическим продолжением  $\zeta_q(s)$  на всю комплексную плоскость за исключением точек вида

$$s_k = 1 + \frac{2\pi k}{\ln q} i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

в каждой из которых  $\zeta_q(s)$  имеет простой полюс с вычетом равным  $(\ln q)^{-1}$ .

Из теоремы о единственности разложения следует, что  $\zeta_q(s)$  обладает эйлеровским произведением, то есть в области  $\operatorname{Re} s > 1$  справедливо равенство

$$\zeta_q(s) = \prod_{P \in \mathbb{F}_q[T]} (1 - N^{-s}(P))^{-1}, \quad (4)$$

в котором произведение распространено на все неприводимые унитарные многочлены.

Представляет интерес исследование средних значений мультипликативных функций над кольцом  $\mathbb{F}_q[T]$ . Впервые подобные задачи были рассмотрены Л. Карлитцем. В работе [1] им были получены точные формулы для средних значений некоторых мультипликативных функций.

Возможность получения точных (а не асимптотических) формул в задачах такого рода объясняется тем, что аналог дзета-функции для кольца  $\mathbb{F}_q[T]$  имеет очень простой вид, указанный в (3), и тем обстоятельством, что соответствующий производящий ряд Дирихле  $\Phi(s)$  представляется в виде

$$\Phi(s) = (\zeta_q(n_1 s))^{m_1} \dots (\zeta_q(n_k s))^{m_k},$$

где  $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \geq 1$  — целые числа. Так, задача нахождения величины

$$\sum_{\deg F=n} \tau_m(F) \quad (5)$$

сводится к подсчёту коэффициента при  $q^{-ns}$  ряда

$$\zeta_q^m(s) = \frac{1}{(1 - q^{1-s})^m}.$$

Величина (5) является аналогом суммы

$$\sum_{n \leq x} d_m(n), \quad (6)$$

исследование которой составляет предмет обобщённой проблемы делителей Дирихле (здесь  $d_m(n)$  — классическая функция делителей, равная числу решений уравнения  $x_1 x_2 \dots x_m = n$  в натуральных числах  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ). Наряду с (6) исследуются и суммы

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{d_m(n)}, \quad (7)$$

(см.: Рамануджан [2]), для которых получаются асимптотические выражения вида

$$\frac{x}{(\ln x)^{1-\frac{1}{m}}} \left( a_0 + \frac{a_1}{\ln x} + \dots + \frac{a_N}{(\ln x)^N} + O_N \left( \frac{1}{(\ln x)^{N+1}} \right) \right),$$

где  $x \rightarrow +\infty$ ,  $N \geq 0$  — произвольное фиксированное число,  $a_0, a_1, \dots, a_N, \dots$  — некоторые постоянные.

Пусть  $g : \mathbb{F}_q[T] \rightarrow \mathbb{R}$  — мультипликативная функция, значения которой на степенях неприводимых многочленов зависят лишь от показателей степеней, то есть

$$d_k = g(P^k) \quad (8)$$

для некоторой фиксированной последовательности  $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ . Будем предполагать также, что ряд

$$f(t) = f_g(t) = 1 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots + d_k t^k + \dots \quad (9)$$

сходится в некотором круге с центром в нуле. Пусть далее,

$$\ln f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k, \quad (10)$$

а последовательность  $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$  определена по правилу

$$f(t)(1-t)^{h_1}(1-t^2)^{h_2} \dots (1-t^k)^{h_k} = 1 + h_{k+1}t^{k+1} + \dots \quad (11)$$

Легко видеть, что  $h_1 = d_1$ . Положим, наконец,

$$T(N) = T(N; g) = \sum_{\deg F=N} g(F),$$

где  $F$  пробегает унитарные многочлены степени  $N$ . Основными результатами работы являются следующие утверждения.

**ТЕОРЕМА 1.** *Имеет место равенство*

$$T(N) = A_0(N)q^N + A_1(N)q^{N-1} + \dots + A_{N-1}(N)q,$$

где

$$A_l(N) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+(l+1)k_{l+1}=N \\ k_2+2k_3+\dots+l k_{l+1}=l}} \binom{-h_1}{k_1} \binom{-h_2}{k_2} \dots \binom{-h_{l+1}}{k_{l+1}} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_{l+1}}, \quad (12)$$

а величины  $h_i$  определены в (11).

В частности, при любом фиксированном  $N$ , любом  $n$ ,  $1 \leq n \leq N$ , и  $q \rightarrow \infty$

$$T(N) = A_0(N)q^N + A_1(N)q^{N-1} + \dots + A_{n-1}(N)q^{N-n+1} + O_N(q^{N-n}).$$

**ТЕОРЕМА 2.** *Пусть  $N \geq 190$ ,  $0 < d_1 < 1$  и при всех  $k \geq 1$*

$$k|a_k| \leq 1, \quad (13)$$

где числа  $d_k$  и  $a_k$  определены в (8) и (10) соответственно.

Тогда при  $h \in [1, \frac{N}{36 \ln N}]$  и  $q \geq (17h)^{12h+9}$  имеет место равенство

$$T(N) = A_0(N)q^N + A_1(N)q^{N-1} + \dots + A_{h-1}(N)q^{N-h+1} + O\left(d_1 p(h) \frac{q^{N-h}}{N^{1-d_1}}\right), \quad (14)$$

где величины  $A_l(N)$ ,  $0 \leq l \leq h-1$  определены в (12), причём

$$|A_l(N)| \leq \frac{3d_1 p(l)}{N^{1-d_1}},$$

$p(l)$  — число разбиений  $l$ , и константа под знаком  $O$  не превосходит 3.1.

В частности, равенство (14) справедливо при  $q \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$  и  $h$  фиксированном, а также при  $q \rightarrow \infty$ ,  $N \geq 190$  фиксированном и  $h \in [1, \frac{N}{36 \ln N}]$ .

После доказательства этих утверждений мы приводим один технический результат из работы [4] Городецкого, откуда получается асимптотическое разложение  $T(N)$  при  $q^N \rightarrow \infty$ . Мы доказываем, что функции  $g$ , для которых  $d_1 \in (0, 1)$  и выполнено неравенство (13), удовлетворяют также и этому техническому утверждению. Как следствие, соответствующая сумма  $T(N)$  будет иметь асимптотическое разложение при  $q^N \rightarrow \infty$ . Работу мы завершаем приведением примеров функций  $g$  и разложений соответствующих им сумм  $T(N)$ .

Автор благодарит своего научного руководителя — д.ф.м.н. Максима Александровича Королёва, за постановку задачи и ценные обсуждения.

## 2. Доказательство теоремы 1

Положим

$$\Phi(s) = \sum_{\substack{F \in \mathbb{F}_q[T] \\ F \text{ унитарен}}} \frac{g(F)}{N(F)^s} = \sum_{N=0}^{+\infty} T(N) q^{-Ns}.$$

В силу мультипликативности  $g$  имеем

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \prod_{\substack{P \text{ неприводим} \\ \text{и унитарен}}} \left( 1 + \frac{g(P)}{N(P)^s} + \frac{g(P^2)}{N(P^2)^s} + \dots \right) = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{d_1}{q^{ls}} + \frac{d_2}{q^{2ls}} + \dots \right)^{\pi_q(l)} = \\ &= \prod_{l=1}^{+\infty} (f(q^{-ls}))^{\pi_q(l)}, \end{aligned}$$

где  $\pi_q(l)$  — число неприводимых над полем  $\mathbb{F}_q$  унитарных многочленов степени  $l$ . Положим также

$$f_{k+1}(t) = f(t)(1-t)^{h_1}(1-t^2)^{h_2} \dots (1-t^k)^{h_k}. \quad (15)$$

Тогда при  $k = n$  и  $t = q^{-ls}$  будем иметь

$$f(q^{-ls}) = f_{n+1}(q^{-ls})(1-q^{-ls})^{-h_1} \dots (1-q^{-nls})^{-h_n}.$$

Отсюда

$$\Phi(s) = (\zeta_q(s))^{h_1} (\zeta_q(2s))^{h_2} \dots (\zeta_q(ns))^{h_n} \prod_{l=1}^{+\infty} (f_{n+1}(q^{-ls}))^{\pi_q(l)}.$$

Положим теперь  $z = q^{1-s}$ ,  $T_0(N) = q^{-N} T(N)$ . Тогда для  $\xi(z)$ , определённой равенством

$$\xi(z) = \sum_{N=0}^{+\infty} T_0(N) z^N,$$

будем иметь

$$\xi(z) = (1-z)^{-h_1} \left( 1 - \frac{z^2}{q} \right)^{-h_2} \dots \left( 1 - \frac{z^n}{q^{n-1}} \right)^{-h_n} \prod_{l=1}^{+\infty} \left( f_{n+1} \left( \frac{z^l}{q^l} \right) \right)^{\pi_q(l)}. \quad (16)$$

Положим

$$\Pi(z) = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( f_{n+1} \left( \frac{z^l}{q^l} \right) \right)^{\pi_q(l)} = \exp \left\{ \sum_{l=1}^{+\infty} \pi_q(l) \ln f_{n+1} \left( \frac{z^l}{q^l} \right) \right\}.$$

Определим коэффициенты  $c_\nu$  из разложения

$$\ln f_{n+1}(t) = \sum_{\nu=n+1}^{+\infty} c_\nu t^\nu, \quad (17)$$

тогда из равенства

$$\ln f_{n+1}(t) = \ln f(t) + h_1 \ln(1-t) + \dots + h_n \ln(1-t^n)$$

сравнением коэффициентов при  $t^\nu$ ,  $\nu \geq n+1$  получим

$$c_\nu = a_\nu - \sum_{\substack{d|\nu \\ d \leq n}} \frac{dh_d}{\nu}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \ln \Pi(z) &= \sum_{l=1}^{+\infty} \pi_q(l) \ln f_{n+1} \left( \frac{z^l}{q^l} \right) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{l} \sum_{d|l} \mu(d) q^{\frac{l}{d}} \sum_{\nu \geq n+1} c_\nu \frac{z^{\nu l}}{q^{\nu l}} = \\ &= \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\delta=1}^{+\infty} \frac{q^\delta}{\delta} \sum_{\nu \geq n+1} c_\nu \frac{z^{\nu d \delta}}{q^{\nu d \delta}} = \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{q^k} \left\{ \sum_{\substack{\nu d \delta = k \\ \nu \geq n+1}} \frac{\mu(d) q^\delta c_\nu}{d \delta} \right\} z^k = \sum_{k \geq n+1} A_k z^k, \end{aligned}$$

где

$$A_k = \frac{1}{q^k} \left\{ \sum_{\substack{\nu d \delta = k \\ \nu \geq n+1}} \frac{\mu(d) q^\delta c_\nu}{d \delta} \right\}. \quad (18)$$

Определим коэффициенты  $B_k$  равенством

$$\prod_{l=1}^{+\infty} \left( f_{n+1} \left( \frac{z^l}{q^l} \right) \right)^{\pi_q(l)} = \exp \left\{ \sum_{k \geq n+1} A_k z^k \right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k z^k. \quad (19)$$

Легко видеть, что  $B_0 = 1$  и  $B_1 = B_2 = \dots = B_n = 0$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \xi(z) &= (1-z)^{-h_1} \left( 1 - \frac{z^2}{q} \right)^{-h_2} \dots \left( 1 - \frac{z^n}{q^{n-1}} \right)^{-h_n} \sum_{k=0}^{+\infty} B_k z^k = \\ &= \left( \sum_{k_1=0}^{+\infty} (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} z^{k_1} \right) \left( \sum_{k_2=0}^{+\infty} (-1)^{k_2} \binom{-h_2}{k_2} \frac{z^{2k_2}}{q^{k_2}} \right) \dots \\ &\quad \dots \left( \sum_{k_n=0}^{+\infty} (-1)^{k_n} \binom{-h_n}{k_n} \frac{z^{nk_n}}{q^{(n-1)k_n}} \right) \sum_{k=0}^{+\infty} B_k z^k. \end{aligned}$$

Сравнением коэффициентов при  $z^N$  получим

$$T_0(N) = \sum_{\substack{k+k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k, k_i \geq 0}} \binom{-h_1}{k_1} \dots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_n} B_k}{q^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n}}.$$

Разобьём эту сумму на 3 части:

$$T_0(N) = S_1 + S_2 + S_3. \quad (20)$$

В  $S_1$  войдут те слагаемые, для которых  $k = 0$  и

$$k_2 + 2k_3 + \dots + (n-1)k_n \leq n-1.$$

В  $S_2$  войдут слагаемые, для которых  $k = 0$  и

$$k_2 + 2k_3 + \dots + (n-1)k_n \geq n.$$

Наконец, в  $S_3$  войдут остальные слагаемые из  $T_0(N)$ , а именно те, для которых  $k$  отлично от нуля. Поскольку  $B_k = 0$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ , то в  $S_3$  войдут в точности те слагаемые, для

которых  $k \geq n + 1$ . Замечаем теперь, что

$$S_1 = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n \leq n-1}} \binom{-h_1}{k_1} \cdots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_n}}{q^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n}} =$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} q^{-l} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+(l+1)k_{l+1}=N \\ k_2+2k_3+\dots+l k_{l+1}=l}} \binom{-h_1}{k_1} \cdots \binom{-h_{l+1}}{k_{l+1}} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_{l+1}} = \sum_{l=0}^{n-1} A_l(N) q^{-l}.$$

Положив теперь  $n = N$  получим, что суммы  $S_2$  и  $S_3$  окажутся пустыми. Отсюда

$$T_0(N) = S_1 = \sum_{l=0}^{N-1} A_l(N) q^{-l},$$

и доказательство завершается домножением полученного равенства на  $q^N$ .

### 3. Доказательство теоремы 2

Логарифмируя равенство (15) и сравнивая коэффициенты при  $t^k$ , получим

$$a_k = \sum_{d|k} \frac{dh_d}{k},$$

откуда в силу формулы обращения Мёбиуса

$$h_k = \sum_{d|k} \frac{\mu(d)a_{k/d}}{d}.$$

В силу неравенства (13) при всех  $k \geq 1$  имеем

$$|h_k| = \left| \sum_{d|k} \frac{\mu(d)a_{k/d}}{d} \right| \leq \frac{\tau(k)}{k} \leq 1.$$

Далее, в силу только что доказанной оценки и неравенства (13) для величины  $c_\nu$ , определённой в (17), имеем следующую оценку

$$|c_\nu| = \left| a_\nu - \sum_{\substack{d|\nu \\ d \leq n}} \frac{dh_d}{\nu} \right| \leq \frac{1}{\nu} \left( 1 + \sum_{d \leq n} \tau(d) \right) \leq \frac{n \ln n + n + 1}{\nu} = \frac{b_1(n)}{\nu}.$$

Оценим теперь величины  $A_k$ , определённые в (18):

$$|A_k| = \frac{1}{q^k} \left| \sum_{\substack{d\delta\nu=k \\ \nu \geq n+1}} \frac{q^\delta \mu(d)c_\nu}{d\delta} \right| \leq \frac{b_1(n)}{kq^k} \sum_{\substack{\nu|k \\ \nu \geq n+1}} \sum_{\substack{d|k \\ d|\frac{k}{\nu}}} q^{\frac{k}{\nu d}} \leq \frac{4b_1(n)}{kq^{\frac{n}{n+1}k}}, \quad k \geq n+1. \quad (21)$$

Перейдём к оценке величин  $B_k$ , определённых в (19). При  $k \geq n+1$  имеем

$$B_k = \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \geq n+1 \\ i_1 + \dots + i_r = k}} A_{i_1} \dots A_{i_r}.$$

Пусть

$$I(k, r) = \#\{(i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{Z}^r : i_m \geq n+1, i_1 + \dots + i_r = k\},$$

тогда

$$I(k, r) = \binom{k - nr - 1}{r - 1} < \frac{k^r}{(r - 1)!}, \quad 1 \leq r \leq \frac{k}{n+1}.$$

Далее, при условиях  $i_m \geq n+1$  и  $i_1 + \dots + i_r = k$  выполнено неравенство

$$|A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}| \leq \left( \frac{4b_1(n)}{n+1} \right)^r \frac{1}{q^{\frac{n}{n+1}k}} = \frac{(b(n))^r}{q^{\frac{n}{n+1}k}},$$

где

$$b(n) = \frac{4(n \ln n + n + 1)}{n + 1} < 4(\ln n + 1).$$

Отсюда

$$|B_k| \leq \sum_{1 \leq r \leq \frac{k}{n+1}} \frac{I(k, r)}{r!} \max_{\substack{i_m \geq n+1 \\ i_1 + \dots + i_r = k}} |A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}| \leq \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{(kb(n))^r}{r!(r-1)!} \frac{1}{q^{\frac{n}{n+1}k}} < \frac{e^{kb(n)}}{q^{\frac{n}{n+1}k}}. \quad (22)$$

Таким образом,

$$|B_k| \leq \frac{e^{kb(n)}}{q^{\frac{n}{n+1}k}} \quad (23)$$

Напомним, что

$$T_0(N) = \sum_{\substack{k+k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k, k_i \geq 0}} \binom{-h_1}{k_1} \dots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_n} B_k}{q^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n}}$$

и

$$T_0(N) = S_1 + S_2 + S_3,$$

где величины  $S_i$  были определены ранее (см. стр. 202). В нашем случае сумма  $S_1$  даст вклад в главный член, а суммы  $S_2$  и  $S_3$  войдут в остаток.

Возьмём параметры  $q \geq (en)^{2n+9}$ ,  $6 \leq n \leq \frac{N}{6 \ln N}$ ,  $n = 6h$ ,  $h \geq 1$ . Рассмотрим сначала сумму  $S_1$ :

$$S_1 = \sum_{l=0}^{n-1} A_l(N) q^{-l},$$

где

$$A_l(N) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+(l+1)k_{l+1}=N \\ k_2+2k_3+\dots+l k_{l+1}=l}} \binom{-h_1}{k_1} \binom{-h_2}{k_2} \dots \binom{-h_{l+1}}{k_{l+1}} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_{l+1}}.$$

Для любого  $m \geq 1$

$$0 < (-1)^m \binom{-h_1}{m} = (-1)^m \binom{-d_1}{m} = \frac{d_1}{m} \prod_{r=1}^{m-1} \left( 1 + \frac{d_1}{r} \right) \leq \frac{d_1}{m} \exp \left\{ d_1 \sum_{r=1}^{m-1} \frac{1}{r} \right\} \leq \frac{d_1 e^{d_1}}{m^{1-d_1}}.$$

С другой стороны, в силу условия  $d_1 \in (0, 1)$  справедлива оценка

$$(-1)^m \binom{-h_1}{m} \leq d_1. \quad (24)$$

Далее, в силу неравенства  $|h_i| \leq 1$  для каждого  $i$  имеет место следующая оценка

$$\left| \binom{-h_i}{k_i} \right| \leq 1.$$

Перейдём к оценке величины  $A_l(N)$ . Пусть  $l \geq 1$ , тогда определяя величину  $\theta$  из равенства

$$2k_2 + 3k_3 + \dots + (l+1)k_{l+1} = \theta l,$$

будем иметь  $1 \leq \theta \leq 2$ . Отсюда

$$k_1 = N - 2k_2 - \dots - (l+1)k_{l+1} = N - \theta l > N - 2n.$$

Поскольку  $n \leq \frac{N}{6 \ln N}$  и  $N \geq 190$ , то

$$\begin{aligned} 0 < (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} &\leq \frac{d_1 e^{d_1}}{(N-2n)^{1-d_1}} = \frac{d_1 e^{d_1}}{N^{1-d_1}} \frac{1}{(1 - \frac{2n}{N})^{1-d_1}} < \\ &\frac{d_1 e^{d_1}}{N^{1-d_1}} \frac{1}{(1 - \frac{1}{3 \ln N})^{1-d_1}} \leq \frac{d_1 e^{d_1}}{N^{1-d_1}} \frac{1}{(1 - \frac{1}{3 \ln 190})^{1-d_1}} < \frac{3d_1}{N^{1-d_1}}. \end{aligned}$$

Так как в сумме  $A_l(N)$  количество слагаемых равно  $p(l)$  — числу разбиений  $l$ , то получаем

$$|A_l(N)| \leq \frac{3d_1 p(l)}{N^{1-d_1}}.$$

Для  $l = 0$  эта оценка также выполнена, поскольку

$$A_0(N) = (-1)^N \binom{-h_1}{N} \leq \frac{d_1 e^{d_1}}{N^{1-d_1}} < \frac{3d_1 p(0)}{N^{1-d_1}}.$$

Оценим теперь сумму  $S_2$ :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n \geq n}} \binom{-h_1}{k_1} \dots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_n}}{q^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n}} = \\ &\sum_{n \leq l \leq N} q^{-l} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n=l}} \binom{-h_1}{k_1} \dots \binom{-h_n}{k_n} (-1)^{k_1+\dots+k_n} = \\ &\left( \sum_{n \leq l \leq \frac{N}{3}} + \sum_{\frac{N}{3} < l \leq N} \right) q^{-l} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n=l}} \binom{-h_1}{k_1} \dots \binom{-h_n}{k_n} (-1)^{k_1+\dots+k_n} = W_1 + W_2. \end{aligned}$$

Определяя в сумме  $W_1$  величину  $\theta_1$  из равенства

$$2k_2 + \dots + nk_n = \theta_1 l,$$

будем иметь  $1 \leq \theta_1 \leq 2$  и  $k_1 = N - \theta_1 l \geq N/3$ . Отсюда

$$0 < (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} \leq \frac{d_1 e^{d_1} 3^{1-d_1}}{N^{1-d_1}} \leq \frac{3d_1}{N^{1-d_1}}.$$

Остальные множители  $|\binom{-h_i}{k_i}|$  в сумме  $W_1$  оценим единицей. Поскольку число решений уравнения  $k_2 + 2k_3 + \dots + (n-1)k_n = l$  с неизвестными  $k_i$  не превосходит  $\frac{l^{n-1}}{(n-1)!}$ , то будем иметь

$$|W_1| \leq \frac{3d_1}{N^{1-d_1}} \sum_{n \leq l \leq \frac{N}{3}} \frac{l^{n-1}}{(n-1)!q^l} = \frac{3d_1}{N^{1-d_1}(n-1)!q^n} \sum_{l=0}^{\frac{N}{3}-n} \frac{(l+n)^{n-1}}{q^l}.$$

Так как неравенство  $(l+n)^{n-1} \leq q^{l/2}$  выполнено при  $q \geq (n+1)^{2n-2}$ , то

$$|W_1| \leq \frac{3d_1}{N^{1-d_1}(n-1)!q^n} \left( n^{n-1} + \sum_{l=1}^{+\infty} q^{-l/2} \right) = \frac{3d_1}{N^{1-d_1}(n-1)!q^n} \left( n^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{q}-1} \right) < \frac{3.1d_1n^n}{N^{1-d_1}q^{N/3}}. \quad (25)$$

В сумме  $W_2$  множители  $|\binom{-h_i}{k_i}|, i \neq 1$  оценим единицей, а для величины  $(-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1}$  воспользуемся оценкой (24). Тогда

$$|W_2| \leq \frac{d_1}{q^{N/3}} \sum_{N/3 < l \leq N} \frac{l^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{d_1N^n}{(n-1)!q^{N/3}}.$$

Докажем вспомогательное неравенство

$$\frac{3.1d_1n^n}{n!N^{1-d_1}q^n} > \frac{3 \cdot 6^5 d_1 N^n}{(n-1)!q^{N/3}}.$$

Для этой цели достаточно показать, что  $n < \frac{\frac{N \ln q}{3 \ln N} - 1}{1 + \frac{\ln q}{\ln N}}$ . При  $N \geq 190$  имеем

$$\frac{\frac{N \ln q}{3 \ln N} - 1}{1 + \frac{\ln q}{\ln N}} \geq \frac{\frac{N \ln 2}{3 \ln N} - 1}{1 + \frac{\ln 2}{\ln N}} \geq \left( 1 + \frac{\ln 2}{\ln 190} \right)^{-1} \frac{\ln 2}{3} \frac{N}{\ln N} - \left( 1 + \frac{\ln 2}{\ln 190} \right)^{-1} > \frac{N}{6 \ln N} \geq n.$$

Отсюда получаем

$$|S_2| \leq |W_1| + |W_2| \leq \frac{3.1d_1(1 + \frac{1}{3 \cdot 6^5})n^n}{n!N^{1-d_1}q^n} < \frac{3.2d_1n^n}{n!N^{1-d_1}q^n}.$$

Переходим к оценке суммы  $S_3$ .

$$|S_3| = \left| \sum_{\substack{k+k_1+2k_2+\dots+nk_n=N \\ k \geq n+1}} \binom{-h_1}{k_1} \cdots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_n} B_k}{q^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n}} \right| \leq \sum_{k_1=0}^{N-n-1} (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} \sum_{\substack{k+2k_2+\dots+nk_n=N-k_1 \\ k \geq n+1}} \frac{|B_k|}{q^{k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n}}.$$

Заметим теперь, что

$$k_2 + 2k_3 + \dots + (n-1)k_n \geq \frac{N - k - k_1}{2}.$$

Отсюда с учётом оценки (23) будем иметь

$$|S_3| \leq \sum_{k_1=0}^{N-7} (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} \sum_{\substack{k+2k_2+\dots+nk_n=N-k_1 \\ k \geq n+1}} \frac{1}{q^{\frac{N-k_1}{2}+k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{b(n)}{\ln q}\right)}}.$$

Так как

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{b(n)}{\ln q} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{4(\ln n + 1)}{(2n+9)\ln(en)} > \frac{1}{2} - \frac{1}{7} - \frac{4}{21} = \frac{1}{6},$$

то вспоминая, что  $n = 6h$ , будем иметь

$$k \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{b(n)}{\ln q} \right) > \frac{n+1}{6} > h.$$

Поскольку число решений уравнения  $k + 2k_2 + \dots + nk_n = N - k_1$  с неизвестными  $k, k_2, \dots, k_n$  не превосходит  $\frac{(N-k_1)^n}{n!}$ , то

$$|S_3| \leq \left( \sum_{0 \leq k_1 \leq N/2} + \sum_{N/2 < k_1 \leq N-7} \right) (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} \frac{(N-k_1)^n}{n! q^{\frac{N-k_1}{2}+h}} = W_3 + W_4.$$

Из оценки (24) получаем

$$|W_3| \leq \frac{d_1 N^{n+1}}{n! q^{\frac{N}{4}+h}}.$$

В сумме  $W_4$

$$0 < (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} \leq \frac{d_1 e^{d_1} 2^{1-d_1}}{N^{1-d_1}} \leq \frac{d_1 e}{N^{1-d_1}}.$$

Отсюда

$$|W_4| \leq \frac{d_1 e}{N^{1-d_1} n! q^h} \sum_{N/2 < k_1 \leq N-7} \frac{(N-k_1)^n}{q^{\frac{N-k_1}{2}}} = \frac{d_1 e}{N^{1-d_1} n! q^h} \sum_{7 \leq l \leq N/2} \frac{l^n}{q^{l/2}}.$$

Так как  $q \geq (en)^{2n+9} > e^{\frac{4n \ln 7}{7}}$  при  $n \geq 6$ , то при  $l \geq 7$  выполнено неравенство  $l^n \leq q^{l/4}$ , отсюда

$$|W_4| \leq \frac{d_1 e}{N^{1-d_1} n! q^h} \sum_{l=7}^{+\infty} \frac{1}{q^{l/4}} = \frac{d_1 e}{N^{1-d_1} n! q^h (q^{7/4} - q^{3/2})}.$$

При  $q \geq (en)^{2n+9}$  и  $N \geq 190$  выполнено неравенство

$$\frac{N^{n+1}}{q^{N/4}} < \frac{e}{N^{1-d_1} (q^{7/4} - q^{3/2})},$$

тогда

$$|S_3| \leq |W_3| + |W_4| \leq \frac{2ed_1}{N^{1-d_1} n! q^h (q^{7/4} - q^{3/2})}.$$

Отсюда с учётом доказанных оценок

$$|S_2| + |S_3| \leq \frac{3.2d_1 n^n}{n! N^{1-d_1} q^n} + \frac{2ed_1}{n! N^{1-d_1} q^h (q^{7/4} - q^{3/2})} < \frac{4ed_1}{n! N^{1-d_1} (q^{7/4} - q^{3/2}) q^h}.$$

Итак, при  $q \geq (en)^{2n+9}$ ,  $6 \leq n \leq \frac{N}{6 \ln N}$ ,  $n = 6h$ ,  $h \geq 1$  имеем:

$$T_0(N) = A_0(N) + A_1(N)q^{-1} + \dots + A_{n-1}(N)q^{-n+1} + \Theta_1(h) \frac{1}{N^{1-d_1} q^h},$$

где

$$|\Theta_1(h)| \leq \frac{4ed_1}{(6h)!(q^{7/4} - q^{3/2})}.$$

Теперь

$$\left| A_h(N)q^{-h} + A_{h+1}(N)q^{-h-1} + \dots + A_{6h-1}(N)q^{-6h+1} + \frac{\Theta_1(h)}{N^{1-d_1}q^h} \right| \leq \frac{d_1q^{-h}}{N^{1-d_1}} \left( 3p(h) + 3p(n) \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{q^l} + \frac{12}{6!(q^{7/4} - q^{3/2})} \right) \leq \frac{3.1d_1p(h)}{q^h N^{1-d_1}}$$

при  $q \geq (en)^{2n+9}$ . Таким образом, равенство

$$T_0(N) = A_0(N) + A_1(N)q^{-1} + \dots + A_{h-1}(N)q^{-h+1} + \frac{\Theta(h)}{N^{1-d_1}q^h}, \quad |\Theta(h)| \leq 3.1d_1p(h),$$

выполняется при  $q \geq (6eh)^{12h+9}$  и  $1 \leq h \leq \frac{N}{36 \ln N}$ . Доказательство завершается домножением обеих частей полученного равенства на  $q^N$ .

#### 4. Следствие из теоремы Городецкого

В работе [4] Городецкий доказывает следующее утверждение

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$a(x) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_k}{k} x^k \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

$$b(x) = \left( 1 - \frac{x}{\beta} \right)^{-c_1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad c_1 \in (0, 1)$$

степенные ряды с радиусами сходимости не меньше  $\alpha$  и ровно  $\beta$  соответственно. Пусть при этом  $\alpha > \beta > 0$  и  $r = \frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , и для некоторого положительного  $c_2$  имеет место неравенство  $|\tilde{a}_k| \leq c_2 \alpha^{-k}$ . Тогда при любом фиксированном  $n \geq 0$  и  $N > n$  для коэффициента при  $x^N$  в произведении  $a(x)b(x)$  имеет место равенство

$$[x^N]a(x)b(x) = b_N \left( a(\beta) + \sum_{k=1}^n \frac{\binom{k-c_1}{k}}{\binom{N+c_1-1}{k}} \frac{\beta^k}{k!} a^{(k)}(\beta) + E \right),$$

где  $E \ll_{n,c_1,c_2} \left( \frac{r}{N} \right)^{n+1}$ .

Применим эту теорему к функции  $g(F)$ , для которой выполнено неравенство (13). В формуле (16) положим  $x = zq^{-1} = q^{-s}$ ,  $n = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{\infty} T(N)x^N &= \left( 1 - \frac{x}{q^{-1}} \right)^{-d_1} \exp \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \pi_q(l) \ln f_2(x^l) \right\} = \\ &= \left( 1 - \frac{x}{q^{-1}} \right)^{-d_1} \exp \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} A_k q^k x^k \right\} = \left( 1 - \frac{x}{q^{-1}} \right)^{-d_1} a(x). \end{aligned}$$

Положим  $\beta = q^{-1}$ ,  $c_1 = d_1$ . Пусть  $R$  — радиус сходимости ряда  $\sum_{k=2}^{\infty} A_k q^k x^k$ , тогда в силу оценки (18) будем иметь

$$R^{-1} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|A_k|q^k} \leq \sqrt{q},$$

отсюда  $R \geq \frac{1}{\sqrt{q}}$ . Положим  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{q}}$ , тогда  $\alpha > \beta > 0$  и

$$r = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{q}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Далее, пусть  $\tilde{a}_k = kA_k q^k$ , тогда в силу оценки (21) имеем

$$|\tilde{a}_k| \leq c_2(\sqrt{q})^k, \quad c_2 = 4b_1(1) = 8.$$

Таким образом, все условия теоремы 3 выполнены, и мы имеем доказанным следующее

**СЛЕДСТВИЕ.** Пусть  $g$  — мультипликативная функция, такая что для любого неприводимого многочлена  $P$  и любого целого  $k \geq 1$  выполнено равенство  $d_k = g(P^k)$ , где  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$  — фиксированная последовательность вещественных чисел. Положим

$$f(x) = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots$$

Далее, пусть  $0 < d_1 < 1$  и при  $k \geq 1$  выполнено неравенство  $k|a_k| \leq 1$ , где числа  $a_k$  были определены в (10). Тогда при  $N \geq n + 1$  имеет место равенство

$$T(N) = (-1)^N \binom{-d_1}{N} q^N \left( a(q^{-1}) + \sum_{k=1}^n \frac{\binom{k-d_1}{k}}{\binom{N+d_1-1}{k}} \frac{q^{-k}}{k!} a^{(k)}(q^{-1}) \right) + R_n, \quad (26)$$

где  $R_n \ll_n \frac{q^N}{N^{1-d_1}} \left( \frac{1}{\sqrt{q}N} \right)^{n+1}$ , и  $a(x)$  определяется бесконечным произведением

$$a(x) = \prod_{l=1}^{+\infty} \left\{ f(x^l)(1-x^l)^{d_1} \right\}^{\pi_q(l)},$$

сходящемся в круге с центром в нуле и радиусом  $r = \frac{1}{\sqrt{q}}$ .

Соответствующий остаток, который получается из теоремы 2, имеет вид

$$R'_n \ll_n \frac{q^N}{N^{1-d_1}} \frac{1}{q^{n+1}}.$$

При выполнении условий теоремы 2 имеем  $R'_n = o(R_n)$  при  $q \rightarrow \infty$  и  $N \geq 190$  фиксированном. Далее, в случае если  $q \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$  имеем

$$R'_n \ll_n R_n \quad \text{при } N^2 \ll q, \quad R_n \ll_n R'_n \quad \text{при } q \ll N^2.$$

Заметим, что

$$a(q^{-1}) = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( f_2(q^{-l}) \right)^{\pi_q(l)} = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} B_k = 1 + O\left(\frac{1}{q}\right).$$

Отсюда следует, что формула (26) даёт асимптотическое разложение  $T(N)$  при условии  $q^N \rightarrow \infty$  в отличие от формулы (14), в которой требуется, чтобы  $q \rightarrow \infty$ . В частности, формула (26) даёт разложение  $T(N)$  при фиксированном  $q$  и  $N \rightarrow \infty$ .

## 5. Примеры

Вычисления показывают, что

- $h_1 = d_1$ ;
- $h_2 = d_2 - \frac{d_1(d_1 + 1)}{2}$ ;
- $h_3 = d_3 - d_1d_2 + \frac{d_1(d_1^2 - 1)}{3}$ ;

Указанные величины  $h_k$  позволяют выписать первые три значения  $A_l(N)$ .

- $A_0(N) = \binom{d_1+N-1}{N}$ ;
- $A_1(N) = \binom{d_1+N-3}{N-2} \left( d_2 - \frac{d_1(d_1 + 1)}{2} \right)$ ;
- $A_2(N) = \binom{d_1+N-4}{N-3} \left( d_3 - d_1d_2 + \frac{d_1(d_1^2 - 1)}{3} \right) + \binom{d_1+N-5}{N-4} \left( 1 + d_2 - \frac{d_1(d_1 + 1)}{2} \right)$ ;

В свою очередь, указанные величины  $A_l(N)$ , позволяют выписать первые три слагаемых в главном члене асимптотики, получающейся из теорем 1 и 2. Именно, имеет место формула

$$T(N) = \binom{d_1 + N - 1}{N} q^N \left( 1 + \frac{\binom{N}{2}}{\binom{d_1 + N - 1}{2}} \left( d_2 - \frac{d_1(d_1 + 1)}{2} \right) q^{-1} + \left\{ \frac{\binom{N}{3}}{\binom{d_1 + N - 1}{3}} \left( d_3 - d_1d_2 + \frac{d_1(d_1^2 - 1)}{3} \right) + \frac{\binom{N}{4}}{\binom{d_1 + N - 1}{4}} \left( 1 + d_2 - \frac{d_1(d_1 + 1)}{2} \right) \right\} q^{-2} \right) + R,$$

где  $R \ll_N q^{N-3}$  при выполнении условий теоремы 1 и  $|R| \leq 9.3 \cdot d_1 \frac{q^{N-3}}{N^{1-d_1}}$  при выполнении условий теоремы 2.

Нашей ближайшей целью будет установление легко проверяемых достаточных условий выполнения неравенства (13) теоремы 2. Для этого нам понадобится рекуррентное соотношение для последовательности  $a_k$ , определённой в (10). Для функции  $f$ , определённой в (9), имеем равенство

$$\frac{d \ln f(t)}{dt} f(t) = \frac{df(t)}{dt}.$$

Раскладывая обе части равенства в ряд по степеням  $t$  и сравнивая коэффициенты при  $t^n$ , после несложных преобразований получим

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left( (n+1)d_{n+1} - \sum_{k=1}^n k a_k d_{n+1-k} \right), \quad n \geq 0,$$

в частности  $a_1 = d_1$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.** Пусть  $g$  — мультипликативная функция, такая что для любого неприводимого многочлена  $P$  и любого целого  $k \geq 1$  выполнено равенство  $d_k = g(P^k)$ , где  $\{d_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  — фиксированная последовательность. Пусть при этом

- $d_1 \in (0, 1)$ ;
- $d_{k+1} \leq d_k$  при  $k \geq 1$ ;

- $kd_k \leq (k+1)d_{k+1}$  при  $k \geq 1$ .

Тогда для суммы  $T(N)$  имеют место разложения (14) и (26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что при  $k \geq 1$

$$0 < a_k < \frac{1}{k}. \quad (27)$$

Доказательство проведём индукцией по величине  $k$ . При  $k = 1$  имеем

$$a_1 = d_1 \in (0, 1).$$

Пусть теперь неравенство (27) выполнено при  $k = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 1$ . Докажем, что неравенство выполнено и при  $k = n+1$ . В силу условий предложения и предположения индукции имеем

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \left( (n+1)d_{n+1} - \sum_{k=1}^n ka_k d_{n+1-k} \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left( (n+1)d_{n+1} - nd_n + nd_n - \sum_{k=1}^{n-1} ka_k d_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} ka_k (d_{n-k} - d_{n+1-k}) - na_n d_1 \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left( (n+1)d_{n+1} - nd_n + (1-d_1)na_n + \sum_{k=1}^{n-1} ka_k (d_{n-k} - d_{n+1-k}) \right) > 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу предположения индукции

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \left( (n+1)d_{n+1} - nd_n + (1-d_1)na_n + \sum_{k=1}^{n-1} ka_k (d_{n-k} - d_{n+1-k}) \right) < \\ &= \frac{1}{n+1} \left( n(d_{n+1} - d_n) + d_{n+1} + (1-d_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (d_{n-k} - d_{n+1-k}) \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} ((n+1)(d_{n+1} - d_n) + 1) \leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ В. Пусть  $g$  — мультипликативная функция, такая что для любого неприводимого многочлена  $P$  и любого целого  $k \geq 1$  выполнено равенство  $d_k = g(P^k)$ , где  $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  — фиксированная последовательность. Тогда, если  $d_1 \in (0, 1)$  и для любого  $n \geq 1$  имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n |d_k| + (n+1)|d_{n+1}| \leq 1, \quad (28)$$

то для суммы  $T(N)$  имеют место разложения (14) и (26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что неравенство (28) влечёт неравенство (13). Доказательство проведём индукцией по величине  $n$ . При  $n = 1$  имеем  $a_1 = d_1 \in (0, 1)$ . Отсюда  $|a_1| \leq 1$ .

Пусть теперь доказано, что  $|a_k| \leq \frac{1}{k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $n \geq 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leq \frac{1}{n+1} \left( |d_{n+1}|(n+1) + \sum_{k=1}^n |ka_k d_{n+1-k}| \right) \leq \\ &= \frac{1}{n+1} \left( |d_{n+1}|(n+1) + \sum_{k=1}^n |d_{n+1-k}| \right) \leq \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Приведём примеры функций  $g$ , удовлетворяющих условиям предложения А:

- $g_1(F) = (\tau(F))^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .
- $g_2(F) = c^{\omega(F)}$ ,  $0 < c < 1$ .
- $g_3(F) = \frac{\tau_m(F)}{\tau_{m+1}(F)}$ ,  $m \geq 2$ .
- $g_4(F) = \frac{1}{\tau(F^r)}$ ,  $r \geq 1$ .

Приведём также примеры функций  $g$ , для которых выполнено предложение В:

- $g_5(F) = (\tau(F))^{-\alpha}$ ,  $\alpha \geq 2$ .
- $g_6(F) = \frac{1}{\tau_m(F)}$ ,  $m \geq 3$ .
- $g_7(F) = \frac{1}{(\tau_{m_1}(F))^{\gamma_1} \dots (\tau_{m_k}(F))^{\gamma_k}}$ ,  $k \geq 2$ ,  $\gamma_i \geq 1$ .
- $g_8(F) = \frac{1}{\tau_m(F^r)}$ ,  $r \geq 1$ ,  $m \geq 3$ .

Для функции  $g_1$  условие  $kd_k \leq (k+1)d_{k+1}$  равносильно неравенству

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^\alpha \leq 1 + \frac{1}{k}.$$

Остальные условия для  $g_1$  очевидно выполнены. Для функций  $g_k$ ,  $k \in \{2, 3, 4\}$  условия предложения А легко проверяются.

Для функции  $g_5$  имеем  $d_k = g_5(P^k) = \frac{1}{(k+1)^\alpha}$ . Отсюда при  $\alpha \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^\alpha} + \frac{n+1}{(n+2)^\alpha} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{n+1}{(n+2)^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{6} - 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^2} + \frac{n+1}{(n+2)^2} \leq \frac{\pi^2}{6} - 1 - \int_{n+2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} + \frac{n+1}{(n+2)^2} \leq \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1. \end{aligned}$$

Для функции  $g_6$  получаем

$$d_k = g_6(P^k) = \frac{1}{\binom{m+k-1}{m-1}} \leq \frac{2}{(k+1)(k+2)}, \quad m \geq 3.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+1)(k+2)} + \frac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)} = 1 - \frac{4}{(n+2)(n+3)} < 1.$$

Для функций  $g_7$  и  $g_8$  предложение В выполнено в силу очевидных неравенств

$$g_7(P^k) \leq g_5(P^k) \text{ при } \alpha = 2, \quad g_8(P^k) \leq g_6(P^k).$$

Перейдём к конкретным примерам. Всюду ниже  $F$  пробегает унитарные многочлены степени  $N$ . Следующие два примера относятся к теореме 2. При  $q \rightarrow \infty$  и  $N \geq 710$  фиксированном и при  $q \rightarrow \infty$  и  $N \rightarrow \infty$  имеем

$$\sum_{\deg F=N} \frac{1}{2^{\omega(F)}} = \frac{q^N}{4^N} \left( \binom{2N}{N} + 2 \binom{2N-4}{N-2} q^{-1} + \left( 8 \binom{2N-6}{N-3} + 18 \binom{2N-8}{N-4} \right) q^{-2} \right) + R_1;$$

$$\sum_{\deg F=N} \frac{1}{\tau(F)} = \frac{q^N}{4^N} \left( \binom{2N}{N} - \frac{2}{3} \binom{2N-4}{N-2} q^{-1} - \left( \frac{8}{3} \binom{2N-6}{N-3} + \frac{46}{9} \binom{2N-8}{N-4} \right) q^{-2} \right) + R_2;$$

где  $R_1, R_2 \ll \frac{q^{N-3}}{\sqrt{N}}$  и константа под знаком  $\ll$  не превосходит 5.

Следующие два примера относятся к следствию из теоремы 3. При  $q^N \rightarrow \infty$  имеем

$$\sum_{\deg F=N} \frac{1}{2^{\omega(F)}} = C_0 \cdot \frac{\binom{2N}{N}}{4^N} q^N + O\left(\frac{q^{N-0.5}}{N^{1.5}}\right), \quad C_0 = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( \frac{2q^l - 1}{2\sqrt{q^{2l} - q^l}} \right)^{\pi_q(l)};$$

$$\sum_{\deg F=N} \frac{1}{\tau(F)} = C_1 \cdot \frac{\binom{2N}{N}}{4^N} q^N + O\left(\frac{q^{N-0.5}}{N^{1.5}}\right), \quad C_1 = \prod_{l=1}^{+\infty} \left( \sqrt{q^{2l} - q^l} \ln \frac{q^l}{q^l - 1} \right)^{\pi_q(l)}.$$

Следующие четыре примера относятся к теореме 1.

$$\sum_{\deg F=N} \tau_k(F^r) = \binom{\binom{k+r-1}{k-1} + N - 1}{N} q^N + O_{N,k,r}(q^{N-1}), \quad N \geq 1, \quad q \rightarrow \infty;$$

$$\sum_{\deg F=3} \tau_3(F^2) = 56q^3 - 36q^2 + 8q;$$

$$\sum_{\deg F=3} \frac{1}{2^{\omega(F)}} = \frac{5q^3 + q^2 + 2q}{16};$$

$$\sum_{\deg F=3} \frac{1}{\tau(F)} = \frac{15q^3 - q^2 - 2q}{48};$$

## 6. Заключение

Отметим в качестве заключения, что представляет интерес решение рассмотренных нами задач в кольце многочленов многих переменных над конечным полем  $\mathbb{F}_q$ .

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Carlitz, The arithmetic of polynomials in a Galois field. // *Amer. J. Math.* **54(1)** (1932), pp. 39-50.
2. S. Ramanujan, Some formulae in the analytic theory of numbers. // *The Messenger of Math.* **45** (1916), pp. 81-84.
3. M. Rosen 2002, Number Theory in Function Fields, New York: Springer.

4. O. Gorodetsky 2016, «A Polynomial Analogue of Landau's Theorem and Related Problems», [arXiv:1603.02890v1](#) [math.NT].
5. L. Bary-Soroker, Y. Smilansky, A. Wolf. 2016, «On the function field analogue of Landau's theorem on sums of squares», [arXiv:1504.06809v2](#) [math.NT].
6. Р. Лидл, Г. Нидеррайтер «Конечные поля» 1988: в 2-х т. Т.1. Пер. с англ. — Москва: Изд-во «Мир». — 430 с.
7. Карацуба А. А. 1975, «Основы аналитической теории чисел». — Москва: Изд-во «Наука». — 184 с.

## REFERENCES

1. L. Carlitz, The arithmetic of polynomials in a Galois field. // *Amer. J. Math.* **54**(1), (1932), pp. 39-50.
2. S. Ramanujan, Some formulae in the analytic theory of numbers. // *The Messenger of Math.* **45** (1916), pp. 81-84.
3. M. Rosen 2002, «Number Theory in Function Fields», New York: Springer.
4. O. Gorodetsky 2016, «A Polynomial Analogue of Landau's Theorem and Related Problems», [arXiv:1603.02890v1](#) [math.NT].
5. L. Bary-Soroker, Y. Smilansky, A. Wolf. 2016, «On the function field analogue of Landau's theorem on sums of squares», [arXiv:1504.06809v2](#) [math.NT].
6. R. Lidl, H. Niederreiter 1996, «Finite fields», Cambridge University Press.
7. Karatsuba A.A. 1993, «Basic Analytic Number Theory», Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Получено 03.02.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

---

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-215-222

### Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II<sup>1</sup>

А. Н. Кормачева (г. Тула)

**Антонина Николаевна Кормачева** — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail:* [juska789@mail.ru](mailto:juska789@mail.ru)

#### Аннотация

Данная работа посвящена вопросам приближения квадратичной алгебраической решётки целочисленной решёткой. В ней вычисляются расстояния между квадратичной алгебраической решёткой и целочисленной решёткой, когда они заданы числителем и знаменателем подходящей дроби к корню квадратному из дискриминанта  $d$  — свободного от квадратов натурального числа.

Результаты данной работы позволяют изучать вопросы о наилучших приближениях квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками.

*Ключевые слова:* квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

*Библиография:* 9 названий.

#### Для цитирования:

А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 215–222.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

---

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-215-222

### Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices<sup>2</sup>

A. N. Kormacheva (Tula)

**Antonina Nikolaevna Kormacheva** — Postgraduate Student, Department of Algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail:* [juska789@mail.ru](mailto:juska789@mail.ru)

#### Abstract

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004\_r\_a.

<sup>2</sup>Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004\_r\_a.

This paper is devoted to the approximation of a quadratic algebraic lattice by an integer lattice. It calculates the distances between a quadratic algebraic lattice and an integer lattice when they are given by the numerator and denominator of a suitable fraction to the square root of the discriminant  $d$  — of a square-free natural number.

The results of this work allow us to study questions about the best approximations of quadratic algebraic lattices by integer lattices.

*Keywords:* quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

*Bibliography:* 9 titles.

### For citation:

A. N. Kormacheva, 2020, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices — II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 215–222.

*Посвящается Николаю Михайловичу Добровольскому  
по случаю его семидесятилетия*

## 1. Введение

В работе [6] рассматривалось квадратичное поле  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ , где  $p$  — простое число и  $p = 2$  или  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Для него кольцо целых алгебраических чисел  $\mathbb{Z}_F$  имеет вид:  $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$ .

В случае произвольного радикала  $d > 1$ , т. е. числа свободного от квадрата, для кольца целых алгебраических чисел  $\mathbb{Z}_F$  квадратичного поля  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  имеется два различных случая (см. [10], гл. 4, стр. 309):

первый случай, когда дискриминант  $d = 2$  или  $d \equiv 3 \pmod{4}$ , в этом случае

$$\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{d} | n, k \in \mathbb{Z}\};$$

второй случай, когда дискриминант  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , в этом случае

$$\mathbb{Z}_F = \{n + k\omega | n, k \in \mathbb{Z}\},$$

где целое алгебраическое число  $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ .

Через  $\Lambda(F)$  обозначается алгебраическая решётка поля  $F$ :

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и  $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$  — целые алгебраически сопряжённые числа.

В работе [5] рассматривался вопрос о вычислении расстояния между решётками: алгебраической  $\Lambda_m(F)$  и целочисленной  $\Lambda_m(p)$  для случая простого  $p$  вида  $p = 2$  и  $p = 4k + 3$ .

В работах [1], [4]–[7] двумерные решётки изучались с точки зрения построения двумерных параллелепипедальных сеток для квадратурных формул. В данной работе нас будет интересоваться вопрос о приближении квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками в метрическом пространстве решёток. Целью данной работы будет рассмотрение случая произвольного квадратичного поля  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , где  $d > 0$  — радикал, то есть произвольное натуральное число свободное от квадратов.

Кроме этого в работе будут установлены два общих свойства метрики на пространстве решёток, согласно которым расстояние между решётками не меняется, если их умножить на одно и то же ненулевое число и расстояние от решётки до фундаментальной решётки равно расстоянию взаимной решётки до фундаментальной решётки.

Необходимо сразу отметить, что придётся разбирать два случая дискриминанта  $d$ :

первый случай дискриминанта  $d = 2$  или  $d = 4k + 3$ ;

второй случай дискриминанта  $d = 4k + 1$ . Этот второй случай дискриминанта будет разбиваться на два подслучая:

первый подслучай, когда числитель и знаменатель  $P_m$  и  $Q_m$  подходящей дроби к квадратичной иррациональности  $\sqrt{d}$  имеют разную четность;

второй подслучай, когда числитель и знаменатель оба нечетные натуральные числа.

На протяжении всей работы будут сохраняться обозначения и использоваться сведения из работы [5].

Таким образом, в первом случае  $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{d}$ ,  $\Theta^{(2)} = n - k\sqrt{d}$   $n, k \in \mathbb{Z}$  и  $\Theta^{(1)}$ ,  $\Theta^{(2)}$  — корни уравнения  $x^2 - 2nx + n^2 - dk^2 = 0$ . Базис решётки  $\Lambda(F)$  имеет вид:  $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{d}, -\sqrt{d})$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{d}$ .

Рассмотрим разложение  $\sqrt{d}$  в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{d} = q_0 + [(q_1, \dots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

с периодом  $(q_1, \dots, q_n, 2q_0)$ . Через  $\frac{P_m}{Q_m}$  обозначается  $m$ -ая подходящая дробь к  $\sqrt{d}$ . Таким образом,

$$\sqrt{d} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad Q_m \sqrt{d} = P_m + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Через  $\Lambda_m(F)$  обозначается алгебраическая решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \left\{ (Q_m(n + k\sqrt{d}), Q_m(n - k\sqrt{d})) | n, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

а через  $\Lambda_m(d)$  — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \{ (Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z} \}.$$

Базис решётки  $\Lambda_m(F)$  имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$ ,  $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m \sqrt{d}, -Q_m \sqrt{d})$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(F) = 2Q_m^2 \sqrt{d}$ .

Для целочисленной решётки  $\Lambda_m(d)$  базис имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$ ,  $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(p) = 2Q_m P_m$ .

Во втором случае, когда  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , мы имеем  $\Theta^{(1)} = n + k\omega$ ,  $\Theta^{(2)} = n + k(1 - \omega)$   $n, k \in \mathbb{Z}$  и  $\Theta^{(1)}$ ,  $\Theta^{(2)}$  — корни уравнения  $x^2 - (2n - k)x + n^2 + nk + \frac{1-d}{4}k^2 = 0$ . Базис решётки  $\Lambda(F)$  имеет вид:  $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{\lambda}_2 = (\omega, 1 - \omega)$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda(F) = \sqrt{d}$ .

Через  $\Lambda_m(F)$  обозначается алгебраическая решётка заданная равенствами в зависимости от двух случаев:

если  $P_m$  и  $Q_m$  — разной четности, то

$$\Lambda_m(F) = \left\{ (Q_m(2n + k(1 + \sqrt{d})), Q_m(2n + k(1 - \sqrt{d}))) | n, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

а через  $\Lambda_m(d)$  — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \{ (2Q_m n + k(P_m + Q_m), 2Q_m n + k(P_m - Q_m)) | n, k \in \mathbb{Z} \}.$$

Базис решётки  $\Lambda_m(F)$  имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1} = (2Q_m, 2Q_m)$ ,  $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m(1 + \sqrt{d}), Q_m(1 - \sqrt{d}))$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(F) = 4Q_m^2 \sqrt{d}$ .

Для целочисленной решётки  $\Lambda_m(d)$  базис имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (2Q_m, 2Q_m)$ ,  $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m + Q_m, Q_m - P_m)$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(p) = 4Q_m P_m$ ;

если  $P_m$  и  $Q_m$  — оба нечетные числа, то

$$\Lambda_m(F) = \left\{ \left( Q_m \left( n + k \frac{1 + \sqrt{d}}{2} \right), Q_m \left( n + k \frac{1 - \sqrt{d}}{2} \right) \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

а через  $\Lambda_m(d)$  — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \left\{ \left( Q_m n + k \frac{P_m + Q_m}{2}, Q_m n + k \frac{P_m - Q_m}{2} \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Базис решётки  $\Lambda_m(F)$  имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$ ,  $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m \frac{1 + \sqrt{d}}{2}, Q_m \frac{1 - \sqrt{d}}{2})$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(F) = Q_m^2 \sqrt{d}$ .

Для целочисленной решётки  $\Lambda_m(d)$  базис имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$ ,  $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = \left( \frac{P_m + Q_m}{2}, \frac{Q_m - P_m}{2} \right)$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(p) = Q_m P_m$ .

## 2. Два общих свойства метрики на пространстве решёток

Как известно (см. [3], стр.165) множество всех  $s$ -мерных решёток образуют полное метрическое пространство относительно метрики  $\rho(\Lambda, \Gamma)$ , которая задана равенствами

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)), \quad \mu = \inf_{\Lambda = A \cdot \Gamma} \|A - E_s\|, \quad \nu = \inf_{B \cdot \Lambda = \Gamma} \|B - E_s\|,$$

$$E_s = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq s}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad \|A\| = s \cdot \max_{1 \leq i, j \leq s} |a_{ij}|.$$

Для произвольной решётки  $\Lambda$  рассмотрим её взаимную решётку  $\Lambda^* = \{\vec{x} \mid (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}, \forall \vec{y} \in \Lambda\}$ .

Если  $A$  — её базисная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1} & \dots & a_{s,s} \end{pmatrix}, \quad \vec{\lambda}_j = (a_{1,j}, \dots, a_{s,j}) \quad (j = 1, \dots, s) \text{ — базисные вектора,}$$

то для базисной матрицы  $A^*$  имеем равенство  $A^* = (A^{-1})^\top$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Для любой решётки  $\Lambda$  справедливо равенство  $\rho(\Lambda, \mathbb{Z}^s) = \rho(\Lambda^*, \mathbb{Z}^s)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как для любой решётки  $\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^s$ ,  $\mathbb{Z}^s = A^{-1} \cdot \Lambda$ , то  $\Lambda^* = (A^{-1})^\top \cdot \mathbb{Z}^s$ ,  $\mathbb{Z}^s = A^\top \cdot \Lambda^*$ . Поэтому

$$\rho(\Lambda, \mathbb{Z}^s) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)), \quad \mu = \inf_{\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^s} \|A - E_s\|, \quad \nu = \inf_{A^{-1} \cdot \Lambda = \mathbb{Z}^s} \|A^{-1} - E_s\|,$$

$$\rho(\Lambda^*, \mathbb{Z}^s) = \max(\ln(1 + \mu^*), \ln(1 + \nu^*)),$$

$$\mu^* = \inf_{\Lambda^* = (A^{-1})^\top \cdot \mathbb{Z}^s} \|(A^{-1})^\top - E_s\|, \quad \nu^* = \inf_{A^\top \cdot \Lambda^* = \mathbb{Z}^s} \|A^\top - E_s\|.$$

Отсюда следует, что  $\mu = \nu^*$ ,  $\nu = \mu^*$ , что доказывает утверждение теоремы.  $\square$

**ТЕОРЕМА 2.** Для любого  $t > 0$  и любых решёток  $\Lambda$  и  $\Gamma$  справедливы равенства  $\rho(t\Lambda, t\Gamma) = \rho(\Lambda, \Gamma)$ ,  $\rho((t\Lambda)^*, (t\Gamma)^*) = \rho(\Lambda^*, \Gamma^*)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Действительно, если  $\Lambda = A \cdot \Gamma$ ,  $\Gamma = B \cdot \Lambda$ , то  $t\Lambda = A \cdot t\Gamma$ ,  $t\Gamma = B \cdot t\Lambda$ , что и доказывает утверждение теоремы.  $\square$

### 3. Вычисление расстояния для первого случая дискриминанта поля

Обозначим через  $A_m$  базисную матрицу решётки  $\Lambda_m(F)$ :

$$A_m = \begin{pmatrix} Q_m & Q_m\sqrt{d} \\ Q_m & -Q_m\sqrt{d} \end{pmatrix}, \quad A_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q_m} & \frac{1}{2Q_m} \\ \frac{1}{2Q_m\sqrt{d}} & -\frac{1}{2Q_m\sqrt{d}} \end{pmatrix},$$

а через  $B_m$  — базисную матрицу решётки  $\Lambda_m(d)$ :

$$B_m = \begin{pmatrix} Q_m & P_m \\ Q_m & -P_m \end{pmatrix}, \quad B_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q_m} & \frac{1}{2Q_m} \\ \frac{1}{2P_m} & -\frac{1}{2P_m} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $C_m = B_m A_m^{-1}$ ,  $D_m = C_m^{-1} = A_m B_m^{-1}$ ,  $I_m = \text{Iso}(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$  и  $J_m = \text{Iso}(\Lambda_m(p), \Lambda_m(F))$ . Тогда  $C_m \in I_m$ ,  $D_m \in J_m$ . Положим  $\nu_m = \|C_m - E_2\|$ ,  $\mu_m = \|D_m - E_2\|$ .

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства*

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \quad \mu_m = \frac{\theta_m}{P_m Q_m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дословно повторяются рассуждения из доказательства леммы 1 работы [5] с заменой  $\sqrt{p}$  на  $\sqrt{d}$ .  $\square$

ЛЕММА 2. *Если решётки  $\Lambda = A\mathbb{Z}^2$  и  $\Gamma = B\mathbb{Z}^2$  с базисными матрицами  $A$  и  $B$ , соответственно:*

$$A = \begin{pmatrix} Q & P + \frac{\theta}{Q} \\ Q & -P - \frac{\theta}{Q} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q} & \frac{1}{2Q} \\ \frac{1}{2(P + \frac{\theta}{Q})} & -\frac{1}{2(P + \frac{\theta}{Q})} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} Q & P \\ Q & -P \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q} & \frac{1}{2Q} \\ \frac{1}{2P} & -\frac{1}{2P} \end{pmatrix}, \quad 0 < |\theta| < 1, \quad P, Q \in \mathbb{N}, \quad PQ > 1$$

связаны соотношениями

$$\Lambda = B^* \Gamma, \quad B^* = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\theta}{2PQ} & -\frac{\theta}{2PQ} \\ -\frac{\theta}{2PQ} & 1 + \frac{\theta}{2PQ} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = A^* \Lambda, \quad A^* = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta}{2(\theta + PQ)} & \frac{\theta}{2(\theta + PQ)} \\ \frac{\theta}{2(\theta + PQ)} & 1 - \frac{\theta}{2(\theta + PQ)} \end{pmatrix},$$

$$\nu_0 = \|A^* - E_2\| = \frac{|\theta|}{\theta + PQ}, \quad \mu_0 = \|B^* - E_2\| = \frac{|\theta|}{PQ}, \quad \varepsilon_0 = \max(\nu_0, \mu_0) < 1,$$

то для расстояния между этими решётками справедливо равенство

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \ln(1 + \varepsilon_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [5].  $\square$

ТЕОРЕМА 3. *При  $P_m \geq 2$ ,  $Q_m \geq 2$  справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(d)) = \ln \left( 1 + \max \left( \frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \frac{\theta_m}{P_m Q_m} \right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в лемме 2  $\Lambda = \Lambda_m(F)$ ,  $\Gamma = \Lambda_m(d)$ ,  $A = A_m$ ,  $B = B_m$ , тогда получим утверждение теоремы.  $\square$

#### 4. Вычисление расстояния для второго случая дискриминанта поля, первый подслучай

Пусть теперь  $d \equiv 1 \pmod{4}$  и числитель и знаменатель  $P_m$  и  $Q_m$  подходящей дроби к квадратичной иррациональности  $\sqrt{d}$  имеют разную четность.

Обозначим в этом случае через  $A_m$  базисную матрицу решётки  $\Lambda_m(F)$ :

$$A_m = \begin{pmatrix} 2Q_m & Q_m(1 + \sqrt{d}) \\ 2Q_m & Q_m(1 - \sqrt{d}) \end{pmatrix}, \quad A_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{d}-1}{4Q_m\sqrt{d}} & \frac{\sqrt{d}+1}{4Q_m\sqrt{d}} \\ \frac{1}{2Q_m\sqrt{d}} & -\frac{1}{2Q_m\sqrt{d}} \end{pmatrix},$$

а через  $B_m$  — базисную матрицу решётки  $\Lambda_m(d)$ :

$$B_m = \begin{pmatrix} 2Q_m & Q_m + P_m \\ 2Q_m & Q_m - P_m \end{pmatrix}, \quad B_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{P_m - Q_m}{4P_mQ_m} & \frac{P_m + Q_m}{4P_mQ_m} \\ \frac{1}{2P_m} & -\frac{1}{2P_m} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $C_m = B_m A_m^{-1}$ ,  $D_m = C_m^{-1} = A_m B_m^{-1}$ ,  $I_m = \text{Iso}(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$  и  $J_m = \text{Iso}(\Lambda_m(p), \Lambda_m(F))$ . Тогда  $C_m \in I_m$ ,  $D_m \in J_m$ . Положим  $\nu_m = \|C_m - E_2\|$ ,  $\mu_m = \|D_m - E_2\|$ .

ЛЕММА 3. *Справедливы равенства*

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \quad \mu_m = \frac{\theta_m}{P_m Q_m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственные вычисления дают для  $\nu_m$  и  $\mu_m$  те же значения и что и в лемме 1.  $\square$

ТЕОРЕМА 4. *Для  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , если числитель и знаменатель  $P_m$  и  $Q_m$  подходящей дроби к квадратичной иррациональности  $\sqrt{d}$  имеют разную четность, то при  $P_m \geq 2$ ,  $Q_m \geq 2$  справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(d)) = \ln \left( 1 + \max \left( \frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \frac{\theta_m}{P_m Q_m} \right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 применима лемма 2. Поэтому, положив  $\Lambda = \Lambda_m(F)$ ,  $\Gamma = \Lambda_m(d)$ ,  $A = A_m$ ,  $B = B_m$ , получим утверждение теоремы.  $\square$

#### 5. Вычисление расстояния для второго случая дискриминанта поля, второй подслучай

Пусть теперь  $d \equiv 1 \pmod{4}$  и числитель и знаменатель  $P_m$  и  $Q_m$  подходящей дроби к квадратичной иррациональности  $\sqrt{d}$  оба нечетные.

Обозначим в этом случае через  $A_m$  базисную матрицу решётки  $\Lambda_m(F)$ :

$$A_m = \begin{pmatrix} Q_m & Q_m \frac{1+\sqrt{d}}{2} \\ Q_m & Q_m \frac{1-\sqrt{d}}{2} \end{pmatrix}, \quad A_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{d}-1}{2Q_m\sqrt{d}} & \frac{\sqrt{d}+1}{2Q_m\sqrt{d}} \\ \frac{1}{Q_m\sqrt{d}} & -\frac{1}{Q_m\sqrt{d}} \end{pmatrix},$$

а через  $B_m$  — базисную матрицу решётки  $\Lambda_m(d)$ :

$$B_m = \begin{pmatrix} Q_m & \frac{Q_m + P_m}{2} \\ Q_m & \frac{Q_m - P_m}{2} \end{pmatrix}, \quad B_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{P_m - Q_m}{2P_mQ_m} & \frac{P_m + Q_m}{2P_mQ_m} \\ \frac{1}{P_m} & -\frac{1}{P_m} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $C_m = B_m A_m^{-1}$ ,  $D_m = C_m^{-1} = A_m B_m^{-1}$ ,  $I_m = \text{Iso}(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$  и  $J_m = \text{Iso}(\Lambda_m(p), \Lambda_m(F))$ . Тогда  $C_m \in I_m$ ,  $D_m \in J_m$ . Положим  $\nu_m = \|C_m - E_2\|$ ,  $\mu_m = \|D_m - E_2\|$ .

ЛЕММА 4. *Справедливы равенства*

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \quad \mu_m = \frac{\theta_m}{P_m Q_m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственные вычисления дают для  $\nu_m$  и  $\mu_m$  те же значения и что и в леммах 1 и 3.  $\square$

ТЕОРЕМА 5. *Для  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , если числитель и знаменатель  $P_m$  и  $Q_m$  подходящей дроби к квадратичной иррациональности  $\sqrt{d}$  оба нечетные, то при  $P_m \geq 2$ ,  $Q_m \geq 2$  справедливо равенство*

$$\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(d)) = \ln \left( 1 + \max \left( \frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \frac{\theta_m}{P_m Q_m} \right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 применима лемма 2. Поэтому, положив  $\Lambda = \Lambda_m(F)$ ,  $\Gamma = \Lambda_m(d)$ ,  $A = A_m$ ,  $B = B_m$ , получим утверждение теоремы.  $\square$

## 6. Заключение

Из теорем 3, 4, 5 следует, что построенные целочисленные приближения алгебраических решёток  $\Lambda_m(F)$  с растущим детерминантом приближаются целочисленными решётками со скоростью  $O(\det^{-1} \Lambda_m(d))$ .

Теорема 2 позволяет утверждать, что с такой-же скоростью квадратичная решётка  $\Lambda(F)$  приближается рациональной решёткой со знаменателем  $Q = O(\sqrt{\det \Lambda_m(d)})$ .

В работах А. В. Михляевой [7]–[8] изучаются эти приближения с точки зрения построения квадратурных формул. Качество соответствующих сеток можно рассчитать с помощью быстрого алгоритма из работы [1].

В работе А. В. Родионова [9] показано, что для данных целочисленных приближений алгебраических квадратичных решёток можно построить эффективные алгоритмы вычисления гиперболического параметра решётки и явно описать минимальное множество Быковского.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.
2. Г. Дэвенпорт. Высшая арифметика. — М.: Наука. 1965 г. — 176 с.
3. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.
4. А. Н. Кормачева. О неполных частных одной цепной дроби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 293–301.
5. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 366–373.
6. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

7. А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 302–307.
8. А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток — II // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 3, с. 223–231.
9. А. А. Родионов. Гиперболический параметр приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3. С. 241–249.
10. Г. Хассе. Лекции по теории чисел. — М. И\*Л. 1953 г. — 528 с.

## REFERENCES

1. Vronskaya, G. T., Dobrovol'skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids. monograph", edited by N. M. Dobrovol'skii. Tula.
2. H. Davenport, 1965, "The higher arithmetic", *Moscow, Nauka* — pp. 176.
3. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.
4. A. N. Kormacheva, 2019, "About the partial quotients of one of the continued fractions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 293–301.
5. A. N. Kormacheva, 2019, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 366–373.
6. A. V. Mikhlyaeva, 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.
7. A. V. Mikhlyaeva, 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 302–307.
8. A. V. Mikhlyaeva, 2020, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets — II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 223–231.
9. A. V. Rodionov, 2020, "Hyperbolic parameter of approximation of quadratic algebraic lattices by integers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 241–249.
10. H. Hasse, 1953, "Lectures on number theory", *Moscow, Foreign literature* — pp. 528.

Получено 21.05.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-223-231

Функция качества для приближения квадратичных  
алгебраических сеток — II<sup>1</sup>

А. В. Михляева

**Анна Владимировна Михляева** — аспирант кафедры алгебры и дискретной математики,  
Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

*e-mail: white.background.invisible@mail.ru*

## Аннотация

Данная работа посвящена вопросам построения быстрых алгоритмов вычисления функции качества рациональных сеток, приближающих квадратичные алгебраические сетки в общем случае максимальной решётки целых алгебраических чисел.

Показано, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая квадратичную алгебраическую сетку, является параллелепипедальной. Как следствие построен алгоритм вычисления функции качества за  $O(\ln N)$  арифметических операций.

*Ключевые слова:* квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

*Библиография:* 3 названия.

## Для цитирования:

А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток — II // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 223–231.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-223-231

Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets<sup>2</sup>

A. V. Mikhlyaeva

**Anna Vladimirovna Mikhlyaeva** — Postgraduate Student, Department of Algebra and discrete mathematics, Orenburg state University (Orenburg).

*e-mail: white.background.invisible@mail.ru*

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004\_r\_a.

<sup>2</sup>Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004\_r\_a.

### Abstract

This paper is devoted to the construction of fast algorithms for calculating the quality function of rational grids that approximate quadratic algebraic grids in the General case of the maximum lattice of integer algebraic numbers.

It is shown that the generalized parallelepipedal net approximating the quadratic algebraic net is parallelepiped. As a consequence, an algorithm for calculating the quality function for  $O(\ln N)$  arithmetic operations is constructed.

**Keywords:** quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

**Bibliography:** 3 titles.

### For citation:

A. V. Mikhlyeva, 2020, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets — II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 223–231.

*Посвящается Николаю Михайловичу Добровольскому  
по случаю его семидесятилетия*

## 1. Введение

В работе [2] рассматривалось квадратичное поле  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ , где  $p$  — простое число и  $p = 2$  или  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Для него кольцо целых алгебраических чисел  $\mathbb{Z}_F$  имеет вид:  $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$ . В работе [3] эти исследования были продолжены и была найдена форма функции качества  $H(M(\Lambda_m(p)))$ , которая позволяет её вычислять за  $O(\ln N(P_m, Q_m))$  арифметических операций. В данной работе будет рассмотрен общий случай квадратичного поля  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , где дискриминант поля  $d$  — произвольное бесквадратное натуральное число больше 1, или как иногда говорят  $d$  — радикал.

Через  $\Lambda(F)$  обозначается алгебраическая решётка поля  $F$ :

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и  $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$  — целые алгебраически сопряжённые числа. Теория показывает, что здесь имеются два принципиально различных случая:

$d = 2$  или  $d \equiv 3 \pmod{4}$

и другой случай, когда  $d \equiv 1 \pmod{4}$ .

## 2. Основная лемма о целочисленных двумерных решётках

Рассмотрим произвольную двумерную целочисленную решётку  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ . Пусть она имеет базис  $\vec{\lambda}_1 = (a, b)$  и  $\vec{\lambda}_2 = (c, d)$  с детерминантом  $N = \det \Lambda = |ad - bc| > 1$ . Следующая лемма отвечает на вопрос, когда решётка  $\Lambda$  будет решёткой решений линейного сравнения  $\Lambda(n, N) = \{(y, x) | x + ny \equiv 0 \pmod{N}\}$ .

**ЛЕММА 1.** Пусть  $a > c > 0$ ,  $(a, c) = 1$  и  $N = ad - bc > 1$ , тогда  $\Lambda = \Lambda(n, N)$ , где  $n = (-1)^l(Q_{l-1}b - P_{l-1}d)$  и  $P_{l-1}$  — числитель,  $Q_{l-1}$  — знаменатель  $l-1$ -ой подходящей дроби для разложения дроби  $\frac{a}{c}$  в цепную дробь:

$$\frac{a}{c} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_l}}} = \frac{P_l}{Q_l}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим базисную матрицу  $A$  решётки  $\Lambda$ :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

и унимодулярную матрицу  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} (-1)^{l-1}Q_{l-1} & (-1)^l P_{l-1} \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$|B| = (-1)^{l-1}Q_{l-1}a + (-1)^l P_{l-1}c = (-1)^{l-1}(P_l Q_{l-1} - Q_l P_{l-1}) = 1.$$

Для базисной матрицы  $C = B \cdot A$  имеем:

$$C = \begin{pmatrix} (-1)^{l-1}Q_{l-1} & (-1)^l P_{l-1} \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{l-1}(Q_{l-1}b - P_{l-1}d) \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решётка  $\Lambda = \{(x, -nx + Ny) | x, y \in \mathbb{Z}\} = \{(x, y) | y + nx \equiv 0 \pmod{N}\}$ , что и доказывает утверждение леммы.  $\square$

### 3. Первый случай для дискриминанта

Рассмотрим первый случай, тогда  $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{d}$ ,  $\Theta^{(2)} = n - k\sqrt{d}$   $n, k \in \mathbb{Z}$  и целые алгебраические числа  $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$  — корни уравнения  $x^2 - 2nx + n^2 - dk^2 = 0$ .

Базис решётки  $\Lambda(F)$  имеет вид:  $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{d}, -\sqrt{d})$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{d}$ .

Базис взаимной решётки  $\Lambda^*(F)$  имеет вид:  $\vec{\lambda}_1^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $\vec{\lambda}_2^* = (\frac{\sqrt{d}}{2d}, -\frac{\sqrt{d}}{2d})$  и детерминант взаимной решётки  $\det \Lambda^*(F) = \frac{\sqrt{d}}{2d}$ .

Рассмотрим разложение  $\sqrt{d}$  в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{d} = q_0 + [(q_1, \dots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

с периодом  $(q_1, \dots, q_n, 2q_0)$ . Через  $\frac{P_m}{Q_m}$  обозначается  $m$ -ая подходящая дробь к  $\sqrt{d}$ . Таким образом,

$$\sqrt{d} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Через  $\Lambda_m(F)$  обозначается алгебраическая решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \{(Q_m(n + k\sqrt{d}), Q_m(n - k\sqrt{d})) | n, k \in \mathbb{Z}\},$$

а через  $\Lambda_m(d)$  — целочисленная решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки  $\Lambda_m(F)$  имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$ ,  $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m\sqrt{d}, -Q_m\sqrt{d})$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(F) = 2Q_m^2\sqrt{d}$ .

Базис взаимной решётки  $\Lambda_m^*(F)$  имеет вид:

$$\vec{\lambda}_{m,1}^* = \left( \frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m} \right), \quad \vec{\lambda}_{m,2}^* = \left( \frac{\sqrt{d}}{2dQ_m}, -\frac{\sqrt{d}}{2dQ_m} \right)$$

и детерминант взаимной решётки  $\det \Lambda_m^*(F) = \frac{\sqrt{d}}{2dQ_m^2}$ .

Для целочисленной решётки  $\Lambda_m(d)$  базис имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$ ,  $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(d) = 2Q_m P_m$ .

Базис взаимной решётки  $\Lambda_m^*(d)$  имеет вид:

$$\vec{\lambda}_{m,1,Z}^* = \left( \frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m} \right), \quad \vec{\lambda}_{m,2,Z}^* = \left( \frac{1}{2P_m}, -\frac{1}{2P_m} \right)$$

и детерминант взаимной решётки  $\det \Lambda_m^*(d) = \frac{1}{2P_m Q_m}$ .

Рассматриваются следующие две сетки:

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \Lambda_m^*(F) \cap [-1; 1]^2, \quad M(\Lambda_m(d)) = \Lambda_m^*(d) \cap [0; 1]^2.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} M_1(\Lambda_m(F)) &= \left\{ \left( \frac{n}{2Q_m} + \frac{\sqrt{d}k}{2dQ_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{\sqrt{d}k}{2dQ_m} \right) \middle| k \in A(n), |n| \leq 2Q_m - 1 \right\}, \\ A(n) &= \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} -2P_m < k < 2P_m, & \text{при } n = 0, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots, 2Q_m - 1, \\ -2P_m - \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = -1, \dots, -2Q_m + 1; \end{array} \right\}, \\ M(\Lambda_m(d)) &= \left\{ \left( \frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \middle| k \in B(n), 0 \leq n \leq 2Q_m - 1 \right\}, \\ B(n) &= \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_m n}{Q_m} \leq k \leq \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots, Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \dots, 2Q_m - 1; \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что граничной функцией класса  $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$  для параллелепипедальных сеток является функция  $h(x, y) = 9(1 - 2\{x\})^2(1 - 2\{y\})^2$ , поэтому для оценки качества сетки  $M(\Lambda_m(d))$ , также как в работе [2], можно использовать функцию

$$H(M(\Lambda_m(d))) = \frac{9}{2P_m Q_m} \sum_{n=0}^{2Q_m-1} \sum_{k \in B(n)} \left( 1 - 2 \left( \frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m} \right) \right)^2 \left( 1 - 2 \left( \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \right)^2,$$

которую, для краткости, будем называть функцией качества.

Положим  $N_m = 2P_m Q_m$  и целое  $a_m$  зададим равенством

$$a_m = \begin{cases} 2P_m Q_{m-1} - 1, & \text{при } m \text{ — нечётном} \\ 2P_m(Q_m - Q_{m-1}) - 1, & \text{при } m \text{ — чётном.} \end{cases}$$

**ТЕОРЕМА 1.** *Справедливо равенство  $M(\Lambda_m(d)) = M(a_m, N_m)$ , где параллелепипедальная сетка  $M(a_m, N_m)$  задаётся равенством*

$$M(a_m, N_m) = \left\{ \left( \frac{n}{N_m}, \left\{ \frac{a_m n}{N_m} \right\} \right) \middle| n = 0, \dots, N_m - 1 \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дословно повторяя рассуждения из работы [3], получаем утверждение теоремы.  $\square$

Рассмотрим разложение  $\frac{a_m}{N_m}$  в цепную дробь:

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{1}{q_{1,m} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{l-1,m} + \frac{1}{q_{l,m}}}}}$$

длины  $l = l(m)$ .

Для дальнейшего нам потребуются скобки Эйлера  $[b_1, \dots, b_n]_{(n)}$ , которые определяются рекуррентно

$$[]_{(-1)} = 0, \quad []_{(0)} = 1, \quad [b_1, \dots, b_n]_{(n)} = b_n[b_1, \dots, b_{n-1}]_{(n-1)} + [b_1, \dots, b_{n-2}]_{(n-2)} \quad (n \geq 1).$$

В работе [1] для величин  $H_k$ , заданных равенствами

$$H_k = \frac{9}{Q_k} \sum_{n=0}^{Q_k-1} \left(1 - 2\frac{n}{Q_k}\right)^2 \left(1 - 2\left\{\frac{P_k n}{Q_k}\right\}\right)^2,$$

доказана теорема

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо равенство*

$$H_k = 1 + \frac{4}{5Q_k^2} \left(10 + 5k + \sum_{\lambda=1}^k q_{\lambda}^2 - \frac{3(P_k^2 + Q_{k-1}^2)}{Q_k^2} + \frac{1}{Q_k} \left(2 \sum_{\lambda=1}^k q_{\lambda} (Q_{\lambda} T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2} T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2} T_{k,\lambda-1}) - 10 \sum_{\lambda=1}^{k-1} Q_{\lambda-1} T_{k,\lambda+1}\right)\right).$$

Здесь через  $T_{k,\nu}$  обозначены величины  $T_{k,\nu} = [q_{\nu+1}, \dots, q_k]_{(k-\nu)}$ .

ТЕОРЕМА 3. *Для функции качества  $H(M(\Lambda_m(d)))$  справедливо равенство*

$$H(M(\Lambda_m(d))) = 1 + \frac{4}{5N_m^2} \left(10 + 5l + \sum_{\lambda=1}^l q_{\lambda,m}^2 - \frac{3(P_{l,m}^2 + Q_{l-1,m}^2)}{Q_{l,m}^2} + \frac{1}{Q_{l,m}} \left(2 \sum_{\lambda=1}^l q_{\lambda,m} (Q_{\lambda,m} T_{l,\lambda+1}^* + Q_{\lambda-2,m} T_{l,\lambda+1}^* + Q_{\lambda-2,m} T_{l,\lambda-1}^*) - 10 \sum_{\lambda=1}^{l-1} Q_{\lambda-1,l} T_{l,\lambda+1}^*\right)\right),$$

где  $\frac{P_{\lambda,m}}{Q_{\lambda,m}}$  —  $\lambda$ -ая подходящая дробь к числу  $\frac{a_m}{N_m}$  ( $\lambda = 0, 1, \dots, l$ ),  $T_{l,\nu}^* = [q_{\nu+1,m}, \dots, q_{l,m}]_{(l-\nu)}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дословно повторяя рассуждения из работы [3], получаем утверждение теоремы.  $\square$

## 4. Второй случай для дискриминанта

Рассмотрим второй случай, тогда число  $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$  является целым алгебраическим числом, так как числа  $\omega$  и  $1 - \omega$  — корни квадратного уравнения  $x^2 - x + \frac{1-d}{4} = 0$  с целыми коэффициентами в силу сравнения  $d \equiv 1 \pmod{4}$ . Решётка

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

имеет другой целый базис  $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{\lambda}_2 = (\omega, 1 - \omega)$  и является максимальной решёткой целых алгебраических чисел поля  $F$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda(F) = \sqrt{d}$ . Таким образом, решётка  $\Lambda_1(F)$  с базисом  $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{d}, -\sqrt{d})$  является её подрешёткой индекса 2.

Базис взаимной решётки  $\Lambda^*(F)$  имеет вид:  $\vec{\lambda}_1^* = \left(\frac{d-\sqrt{d}}{2d}, \frac{d+\sqrt{d}}{2d}\right)$ ,  $\vec{\lambda}_2^* = \left(\frac{\sqrt{d}}{d}, -\frac{\sqrt{d}}{d}\right)$  и детерминант взаимной решётки  $\det \Lambda^*(F) = \frac{\sqrt{d}}{d}$ .

Через  $\Lambda_m(F)$  во втором случае обозначается алгебраическая решётка, заданная равенствами двумя способами:

если  $P_m$  и  $Q_m$  — числа разной чётности, то

$$\Lambda_m(F) = \left\{ (Q_m(2n + k(1 + \sqrt{d})), Q_m(2n + k(1 - \sqrt{d}))) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

а через  $\Lambda_m(d)$  — целочисленная решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \{(2Q_m n + k(Q_m + P_m), 2Q_m n + k(Q_m - P_m)) \mid n, k \in \mathbb{Z}\};$$

если  $P_m$  и  $Q_m$  — оба нечётные числа, то

$$\Lambda_m(F) = \left\{ \left( Q_m \left( n + k \frac{1 + \sqrt{d}}{2} \right), Q_m \left( n + k \frac{1 - \sqrt{d}}{2} \right) \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

а через  $\Lambda_m(d)$  — целочисленная решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \left\{ \left( Q_m n + k \frac{Q_m + P_m}{2}, Q_m n + k \frac{Q_m - P_m}{2} \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Базис решётки  $\Lambda_m(F)$  имеет вид:

в первом случае  $\vec{\lambda}_{m,1} = (2Q_m, 2Q_m)$ ,  $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m(1 + \sqrt{d}), Q_m(1 - \sqrt{d}))$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(F) = 4Q_m^2 \sqrt{d}$ ;

а во втором случае  $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$ ,  $\vec{\lambda}_{m,2} = \left(Q_m \frac{1+\sqrt{d}}{2}, Q_m \frac{1-\sqrt{d}}{2}\right)$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(F) = Q_m^2 \sqrt{d}$ .

Базис взаимной решётки  $\Lambda_m^*(F)$  имеет вид:

в первом случае

$$\vec{\lambda}_{m,1}^* = \left( \frac{d - \sqrt{d}}{4dQ_m}, \frac{d + \sqrt{d}}{4dQ_m} \right), \quad \vec{\lambda}_{m,2}^* = \left( \frac{\sqrt{d}}{2dQ_m}, -\frac{\sqrt{d}}{2dQ_m} \right)$$

и детерминант взаимной решётки  $\det \Lambda_m^*(F) = \frac{\sqrt{d}}{4dQ_m^2}$ ;

а во втором случае

$$\vec{\lambda}_{m,1}^* = \left( \frac{d - \sqrt{d}}{2dQ_m}, \frac{d + \sqrt{d}}{2dQ_m} \right), \quad \vec{\lambda}_{m,2}^* = \left( \frac{\sqrt{d}}{dQ_m}, -\frac{\sqrt{d}}{dQ_m} \right)$$

и детерминант взаимной решётки  $\det \Lambda_m^*(F) = \frac{\sqrt{d}}{dQ_m^2}$ .

Отметим, что третий случай, когда числитель и знаменатель оба чётные числа, невозможен, так как они взаимно простые числа.

Для целочисленной решётки  $\Lambda_m(d)$  базис имеет вид:

в первом случае

$$\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (2Q_m, 2Q_m), \quad \vec{\lambda}_{m,2,Z} = (Q_m + P_m, Q_m - P_m),$$

а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(d) = 4Q_m P_m$ ;

а во втором случае

$$\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m), \quad \vec{\lambda}_{m,2,Z} = \left( \frac{Q_m + P_m}{2}, \frac{Q_m - P_m}{2} \right),$$

а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(d) = Q_m P_m$ .

ТЕОРЕМА 4. Пусть для разложения дроби  $\frac{P_m + Q_m}{2Q_m}$  в цепную дробь:

$$\frac{P_m + Q_m}{2Q_m} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_l}}} = \frac{P'_l}{Q'_l}.$$

Для второго случая дискриминанта для решётки  $\Lambda_m(d)$  справедливы следующие равенства

в первом случае, когда  $P_m$  и  $Q_m$  — числа разной четности,

$$N_m = 4Q_m P_m, \quad \Lambda_m(d) = \Lambda(n_m, N_m),$$

где  $n_m = (-1)^l (Q'_{l-1}(Q_m - P_m) - P'_{l-1} 2Q_m)$  и  $P'_{l-1}$  — числитель,  $Q'_{l-1}$  — знаменатель  $l-1$ -ой подходящей дроби;

а во втором случае, когда  $P_m$  и  $Q_m$  — оба нечетные числа,

$$N_m = Q_m P_m, \quad \Lambda_m(d) = \Lambda(n_m, N_m),$$

где  $n_m = (-1)^l (Q'_{l-1} \frac{Q_m - P_m}{2} - P'_{l-1} Q_m)$  и  $P'_{l-1}$  — числитель,  $Q'_{l-1}$  — знаменатель  $l-1$ -ой подходящей дроби.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первом случае положим в основной лемме  $a = P_m + Q_m$ ,  $b = Q_m - P_m$ ,  $c = d = 2Q_m$  получим первое утверждение теоремы.

Во втором случае положим в основной лемме  $a = \frac{P_m + Q_m}{2}$ ,  $b = \frac{Q_m - P_m}{2}$ ,  $c = d = Q_m$  получим второе утверждение теоремы.  $\square$

Базис взаимной решётки  $\Lambda_m^*(d)$  имеет вид:

в первом случае

$$\vec{\lambda}_{m,1,Z}^* = \left( \frac{P_m - Q_m}{4P_m Q_m}, \frac{P_m + Q_m}{4P_m Q_m} \right), \quad \vec{\lambda}_{m,2,Z}^* = \left( \frac{1}{2P_m}, -\frac{1}{2P_m} \right)$$

и детерминант взаимной решётки  $\det \Lambda_m^*(d) = \frac{1}{4P_m Q_m}$ ;

а во втором случае

$$\vec{\lambda}_{m,1,Z}^* = \left( \frac{P_m - Q_m}{2P_m Q_m}, \frac{P_m + Q_m}{2P_m Q_m} \right), \quad \vec{\lambda}_{m,2,Z}^* = \left( \frac{1}{P_m}, -\frac{1}{P_m} \right)$$

и детерминант взаимной решётки  $\det \Lambda_m^*(d) = \frac{1}{P_m Q_m}$ .

Нетрудно видеть, что

в первом случае

$$M(\Lambda_m(d)) = \left\{ \left( \frac{n(P_m - Q_m)}{4P_m Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n(P_m + Q_m)}{4P_m Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \mid k \in B(n), 0 \leq n \leq 4Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \mid \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{(P_m - Q_m)n}{2Q_m} \leq k \leq \frac{(P_m + Q_m)n}{2Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots, 2Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{(P_m + Q_m)n}{2Q_m} < k < 2P_m - \frac{(P_m - Q_m)n}{2Q_m}, & \text{при } n = 2Q_m, \dots, 4Q_m - 1 \end{array} \right\};$$

а во втором случае

$$M(\Lambda_m(d)) = \left\{ \left( \frac{n(P_m - Q_m)}{2P_m Q_m} + \frac{k}{P_m}, \frac{n(P_m + Q_m)}{2P_m Q_m} - \frac{k}{P_m} \right) \mid k \in B(n), 0 \leq n \leq 2Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \mid \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{(P_m - Q_m)n}{2Q_m} \leq k \leq \frac{(P_m + Q_m)n}{2Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots, Q_m - 1, \\ -P_m + \frac{(P_m + Q_m)n}{2Q_m} < k < P_m - \frac{(P_m - Q_m)n}{2Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \dots, 2Q_m - 1 \end{array} \right\}.$$

Для функции качества сетки  $M(\Lambda_m(d))$  имеем:

в первом случае

$$H(M(\Lambda_m(d))) =$$

$$= \frac{9}{4P_m Q_m} \sum_{n=0}^{4Q_m-1} \sum_{k \in B(n)} \left( 1 - 2 \left( \frac{n(P_m - Q_m)}{4P_m Q_m} + \frac{k}{2P_m} \right) \right)^2 \left( 1 - 2 \left( \frac{n(P_m + Q_m)}{4P_m Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \right)^2,$$

а во втором случае

$$H(M(\Lambda_m(d))) =$$

$$= \frac{9}{2P_m Q_m} \sum_{n=0}^{2Q_m-1} \sum_{k \in B(n)} \left( 1 - 2 \left( \frac{n(P_m - Q_m)}{2P_m Q_m} + \frac{k}{P_m} \right) \right)^2 \left( 1 - 2 \left( \frac{n(P_m + Q_m)}{2P_m Q_m} - \frac{k}{P_m} \right) \right)^2.$$

Доказанная теорема 4 позволяет как и в первом случае дискриминанта вычислять функцию качества для второго случая за  $O(N_m)$  арифметических операций.

## 5. Заключение

Доказанные теоремы 3 и 4 позволяют это сделать за

$$O(\ln N(P_m, Q_m))$$

арифметических операций.

Основным моментом в нашей работе было доказательство, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая алгебраическую квадратичную сетку, является параллелепипедальной сеткой.

На тот факт, что сетка  $M(\Lambda_m(d))$  является параллелепипедальной, и что во втором случае дискриминанта надо рассматривать два случая для числителя и знаменателя подходящей дроби обратил внимание А. В. Родионов, за что выражаю ему свою благодарность.

Также выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография под редакцией Н. М. Добровольского. — Тула, 2012, 193 с.
2. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.
3. А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 307–312.

## REFERENCES

1. Vronskaya, G. T., Dobrovol'skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids.", monograph edited by N. M. Dobrovol'skii. Tula, 193 p.
2. A. V. Mikhlyaeva, 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.
3. A. V. Mikhlyaeva, 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 307–312.

Получено 11.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-232-240

**Асимптотическая оценка для тригонометрических сумм алгебраических сеток<sup>1</sup>**

Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва

**Елена Михайловна Рарова** — старший преподаватель кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: rarova82@mail.ru*

**Николай Николаевич Добровольский** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры общей и теоретической физики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Ирина Юрьевна Реброва** — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, физики и информатики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: i\_rebrova@mail.ru*

**Аннотация**

В работе продолжены исследования авторов по оценке тригонометрических сумм алгебраической сетки с весами с произвольной весовой функцией  $r + 1$  порядка.

Для параметра  $\vec{m}$  тригонометрической суммы  $S_{M(t), \vec{\rho}}(\vec{m})$  выделены три случая.

Если  $\vec{m}$  принадлежит алгебраической решётке  $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ , то справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}}(t(m), \dots, m) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right).$$

Если  $\vec{m}$  не принадлежит алгебраической решётке  $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ , то определены два вектора  $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \dots, n_s)$  и  $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$  из условий  $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$ ,  $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$  и произведение  $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \cdot \dots \cdot \overline{n_s}$  минимально. Доказана асимптотическая оценка

$$|S_{M(t), \vec{\rho}}(\vec{m})| \leq B_r \left( \frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right) \right).$$

**Ключевые слова:** алгебраические решётки, алгебраические сетки, тригонометрические суммы алгебраических сеток с весами, весовые функции.

**Библиография:** 8 названий.

**Для цитирования:**

Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва. Асимптотическая оценка для тригонометрических сумм алгебраических сеток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 232–240.

<sup>1</sup>Работа подготовлена по гранту РФФИ №19-41-710004\_p\_a

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-232-240

Asymptotic estimation for trigonometric sums of algebraic grids<sup>2</sup>

E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova

**Elena Mikhailovna Rarova** — senior lecturer of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry of Tula state pedagogical University L. N. Tolstoy (Tula).

*e-mail: rarova82@mail.ru*

**Nikolai Nikolaevich Dobrovol'skii** — candidate of physical and mathematical sciences, associate Professor of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate professor of the department of general and theoretical physics, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Irina Yuryevna Rebrova** — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: i\_rebrova@mail.ru*

## Abstract

The paper continues the author's research on the evaluation of trigonometric sums of an algebraic net with weights with the arbitrary weight function of the  $r + 1$  order.

For the parameter  $\vec{m}$  of the trigonometric sum  $S_{M(t), \vec{\rho}}(\vec{m})$ , three cases are highlighted.

If  $\vec{m}$  belongs to the algebraic lattice  $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ , then the asymptotic formula is valid

$$S_{M(t), \vec{\rho}}(t(m, \dots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right).$$

If  $\vec{m}$  does not belong to the algebraic lattice  $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ , then two vectors are defined  $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \dots, n_s)$  and  $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$  from the conditions  $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$ ,  $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{K}_\Lambda(\vec{m})$  and the product  $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \bar{n}_1 \cdot \dots \cdot \bar{n}_s$  is minimal. Asymptotic estimation is proved

$$|S_{M(t), \vec{\rho}}(\vec{m})| \leq B_r \left( \frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right) \right).$$

**Keywords:** algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions.

**Bibliography:** 8 titles.

## For citation:

E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, 2020, "Asymptotic estimation for trigonometric sums of algebraic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 232–240.

*Посвящается Николаю Михайловичу Добровольскому  
по случаю его семидесятилетия*

<sup>2</sup>The work has been prepared by the RFBR grant №19-41-710004\_p\_a

## 1. Введение

В данной работе используются обозначения и определения из работ [2]–[6].

Рассматриваются единичные  $s$ -мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x} \mid 0 \leq x_\nu \leq 1, \nu = 1, 2, \dots, s\}, \quad G_s = \{\vec{x} \mid 0 \leq x_\nu < 1, \nu = 1, 2, \dots, s\}.$$

Для произвольного вектора  $\vec{x}$  его дробной частью называется вектор  $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$ . Отсюда следует, что всегда  $\{\vec{x}\} \in G_s$ .

Далее везде под произвольной решеткой  $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$  мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1 \vec{\lambda}_1 + \dots + m_s \vec{\lambda}_s = \vec{m} \cdot A \mid \vec{m} = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где  $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s1}, \dots, \lambda_{ss})$  — система линейно-независимых векторов в  $\mathbb{R}^s$ , а матрица решетки  $A$  задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка  $\Lambda^* = \{\vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$ . Непосредственно из определения следует равенство  $(q\Lambda)^* = \frac{1}{q}\Lambda^*$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Для произвольной решетки  $\Lambda$  обобщенной параллелепipedальной сеткой  $M(\Lambda)$  называется множество  $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$ . Сетка  $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1)^s$ .

Обобщенной параллелепipedальной сеткой  $\Pi$  рода  $M'(\Lambda)$  называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Весовой функцией порядка  $r$  с константой  $B$  называется гладкая функция  $\rho(\vec{x})$ , удовлетворяющая условиям

$$\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = -1}^0 \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)) = 1 \quad \text{при } \vec{x} \in G_s, \quad (1)$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при } \vec{x} \notin (-1; 1)^s, \quad (2)$$

$$\left| \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leq B(\bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого } \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \quad (3)$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции  $\rho(\vec{x})$ . Простейшим примером весовой функции является функция  $\rho_1(\vec{x}) = \rho_1(x_1) \dots \rho_1(x_s)$ , где

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Пусть  $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{s-1})$  — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \quad (4)$$

неприводим над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  и все корни  $\Theta_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, s$ ) многочлена (4) действительные.

Обозначим через  $T(\vec{a})$  матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел  $\Theta_1, \dots, \Theta_s$  — корней многочлена  $P_{\vec{a}}(x)$ :

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

а через  $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_s)$  — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена  $P_{\vec{a}}(x)$ .

Для любого  $t > 0$  решётка  $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$  называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left( t \sum_{\nu=1}^s \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \dots, t \sum_{\nu=1}^s \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \mid \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка  $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$  имеет базис  $\vec{\lambda}_\nu = t \cdot (\Theta_1^{\nu-1}, \dots, \Theta_s^{\nu-1})$  ( $\nu = 1, \dots, s$ ). Нетрудно видеть, что  $\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \cap \mathbb{Z}^s = \{t(m, \dots, m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$ .

Совокупность  $M \subset G_s$  точек  $M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k))$  ( $k = 1, \dots, N$ ) называется *сеткой*  $M$  из  $N$  узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины  $\rho_k = \rho(M_k)$  называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

**ЛЕММА 1.** Для любого действительного  $\sigma$  выполняется неравенство

$$\left| \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{2\pi i \sigma x} dx \right| \leq (\bar{\sigma})^{-2}, \quad (6)$$

где  $\bar{\sigma} = \max(1, |\sigma|)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См. [7].  $\square$

**ЛЕММА 2.** Пусть функция  $\rho_r(x)$  определена равенствами

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \geq 1, \\ 1 - (2r-1)C_{2r-2}^{r-1} \sum_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^\nu \frac{(-1)^\nu}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 1 - (-1)^r (2r-1)C_{2r-2}^{r-1} \sum_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^\nu \frac{1}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } -1 < x < 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Тогда для любого действительного числа  $\sigma$  и интеграла

$$I_r(\sigma) = \int_{-1}^1 \rho_r(x) e^{2\pi i \sigma x} dx$$

выполняется оценка

$$|I_r(\sigma)| \leq \frac{B(r)}{\bar{\sigma}^{r+1}} \quad (8)$$

и функция  $\rho_r(x)$  — весовая функция порядка  $r + 1$  с константой  $B(r)$ , где

$$B(r) = \frac{(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}}{\pi(2\pi)^r} \sup_{|\sigma|>1} \left| (P_{r-1}(1)e^{2\pi i\sigma} - P_{r-1}(0)) - \int_0^1 P_{r-1,r}(x)e^{2\pi i\sigma x} dx \right|,$$

и при  $0 \leq \nu \leq r-1$  имеем:

$$(((1-x)x)^{r-1})^{(\nu)} = ((1-x)x)^{r-1-\nu} P_\nu(x),$$

где

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_{\nu+1}(x) &= \nu(1-2x)P_\nu(x) + x(1-x)P'_\nu(x) \quad (\nu = 0, \dots, r-2), \\ P_{r-1}(x) &= \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu C_{r-1}^\nu \prod_{k=0}^{r-2} (r-1+\nu-k)x^\nu, \end{aligned}$$

и при  $r \leq \nu \leq 2r-2$  имеем:

$$\begin{aligned} (((1-x)x)^{r-1})^{(\nu)} &= P_{r-1,\nu}(x), \quad P_{r-1,r}(x) = P'_{r-1}(x), \\ P_{r-1,\nu}(x) &= \sum_{\mu=\nu+1-r}^{r-1} (-1)^\mu C_{r-1}^\mu \prod_{k=0}^{\nu-1} (r-1+\mu-k)x^{r-1+\mu-\nu} = \\ &= P'_{r-1,\nu-1}(x) = P_{r-1}^{(\nu-r+1)}(x), \\ P_{r-1,2r-2}(x) &= (-1)^{r-1}(2r-2)!. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7].  $\square$

Для произвольных целых  $m_1, \dots, m_s$  суммы  $S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s)$ , определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s) = \sum_{k=1}^N \rho_k e^{2\pi i[m_1 \xi_1(k) + \dots + m_s \xi_s(k)]}, \quad (9)$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами*.

Пусть матрица  $T = T(\vec{a})$  и  $t > 0$ . Рассмотрим алгебраическую сетку  $M(t) = M'(t \cdot \Lambda(T))$  из  $N'(t \cdot \Lambda(T))$  узлов  $\vec{x}_k$  ( $k = 1, \dots, N'(t \cdot \Lambda(T))$ ) с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x}_k, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x} \in M(t)} \left( \sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x}, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для алгебраической решётки  $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$  и произвольной весовой функции  $\rho(\vec{x})$  справедливо равенство<sup>3</sup>

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{m} - \vec{x})} d\vec{y}, \quad (10)$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0}, \vec{m} \in \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

<sup>3</sup>Здесь и далее символ  $\sum'$  означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [5].  $\square$

С помощью леммы 1 доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. При  $t \rightarrow \infty$  справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [5].  $\square$

ТЕОРЕМА 3. При  $t \rightarrow \infty$  для произвольного вектора  $\vec{m} \neq \vec{0}$  справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^2 \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [5].  $\square$

Цель данной работы — уточнить теорему 3.

## 2. Новые оценки тригонометрических сумм алгебраических сеток

Теорему 3 можно уточнить. Сначала мы это сделаем для векторов  $\vec{m}$  специального вида:  $\vec{m} = t(m, \dots, m)$ , где  $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ .

ТЕОРЕМА 4. Для любого целого  $m \neq 0$  и натурального  $t$  справедливо равенство

$$S_{M(t), \vec{\rho}_r}(t(m, \dots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если  $\vec{m} = t(m, \dots, m)$ , и  $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ , то по теореме 1 имеем:

$$S_{M(t), \vec{\rho}_r}(t(m, \dots, m)) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{t(m, \dots, m)\}} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho_r(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y},$$

где  $\{t(m, \dots, m)\}$  — одноэлементное множество, состоящее из вектора  $\vec{m} = t(m, \dots, m)$ . Так как при  $\vec{x} = \vec{0}$  имеем:

$$\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho_r(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y} = 1,$$

то

$$S_{M(t), \vec{\rho}_r}(t(m, \dots, m)) = 1 + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{t(m, \dots, m)\}} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho_r(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y}.$$

Поэтому по лемме 2 получим

$$|S_{M(t), \vec{\rho}_r}(t(m, \dots, m)) - 1| \leq B(r) \zeta_H(\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))) |r + 1| = O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right),$$

что и доказывает утверждение теоремы.  $\square$

Теперь рассмотрим случай, когда  $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$  и, следовательно,  $\vec{m} \neq t(m, \dots, m)$  для любого  $m \in \mathbb{Z}$ .

Для решётки  $\Lambda = \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$  определим два вектора  $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \dots, n_s)$  и  $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$  из условий  $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$ ,  $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$  и произведение  $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \dots \overline{n_s}$  минимально. Ясно, что существует константа  $C(\Lambda) \geq 1$  такая, что для любого вектора  $\vec{m}$  имеем  $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) \leq C(\Lambda)$ .

ЛЕММА 3. Для любого действительного  $x$  справедливы неравенства

$$\frac{1}{n-x} \leq \begin{cases} \frac{1}{2\bar{x}}, & \text{при } \overline{n-x} \geq 2\bar{x}, \\ \frac{1}{\bar{x}}, & \text{при } 2\bar{x} > \overline{n-x} \geq \bar{x}, \\ \frac{2}{\bar{x}}, & \text{при } \frac{\bar{x}}{2} \leq \overline{n-x} < \bar{x}, \\ \frac{2\bar{n}}{\bar{x}}, & \text{при } \overline{n-x} < \frac{\bar{x}}{2}. \end{cases} \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые три неравенства в (14) очевидны.

Перейдем к доказательству четвертого неравенства. Неравенство  $\frac{1}{n-x} \leq \frac{2\bar{n}}{\bar{x}}$  эквивалентно неравенству  $\bar{x} \leq 2\bar{n} \cdot \overline{n-x}$ . При  $|x| \leq 1$  это очевидно. Пусть  $|x| > 1$ , тогда  $\frac{|x|}{2} \leq |n| \leq \frac{3|x|}{2}$ . Отсюда следует, что  $2\bar{n} \geq |x|$  и лемма полностью доказана.  $\square$

ТЕОРЕМА 5. При  $t \rightarrow \infty$  для произвольного вектора  $\vec{m} \neq \vec{0}$  и  $\vec{m} \notin \Lambda$  справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_r}(\vec{m}) \leq B(r) \begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}, \\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно теореме 1 и лемме 2 имеем:

$$|S_{M(t), \vec{\rho}_r}(\vec{m})| \leq B(r) \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \dots \overline{m_s - x_s})^{r+1}}.$$

Если  $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}$ , то

$$\sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \dots \overline{m_s - x_s})^{r+1}} = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{n_1 - x_1} \dots \overline{n_s - x_s})^{r+1}}.$$

Если  $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}$ , то

$$\sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \dots \overline{m_s - x_s})^{r+1}} = \frac{1}{(\overline{n_1} \dots \overline{n_s})^{r+1}} + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{-\vec{k}_\Lambda(\vec{m})\}} \frac{1}{(\overline{n_1 - x_1} \dots \overline{n_s - x_s})^{r+1}}.$$

Для простоты изложения воспользуемся неравенством (14) в наиболее слабой форме  $\frac{1}{n-x} \leq \frac{2\bar{n}}{\bar{x}}$ , получим

$$\begin{aligned} |S_{M(t), \vec{\rho}_r}(\vec{m})| &\leq B(r) \left( \frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{2^{s(r+1)} (\overline{n_1} \dots \overline{n_s})^{r+1}}{(\overline{x_1} \dots \overline{x_s})^{r+1}} \right) = \\ &= B(r) \left( \frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + 2^{s(r+1)} (q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1} \zeta(\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) | r+1) \right). \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 11, получим доказываемое утверждение.  $\square$

### 3. Заключение

Лемма 3 содержит определенный потенциал, чтобы усилить теорему 5, но это потребует дополнительного исследования. Кроме этого возникает вопрос о возможности переноса методов работы [1] на получение усиленных асимптотических оценок рассматриваемых тригонометрических сумм алгебраических сеток.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Н. Добровольский. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2018. Т. 21, вып. 3, С. 109–134.
2. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.
3. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34–39.
4. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 356–359.
5. Рарова Е. М. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.
6. Е. М. Рарова. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 399–405.
7. Ребров Е. Д. Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 3(43). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 53–90.
8. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. — Ч. I. — 232 с.

## REFERENCES

1. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On two asymptotic formulas in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 109–134.
2. Rarova E. M., 2014, "Decomposition of the trigonometric sum of a grid with weights in a series by lattice points", *Proceedings of Tula state University. Natural science*, vol. 1, part 1, pp. 37–49.
3. Rarova E. M., 2014, "Trigonometric grid sums with weights for integer lattice", *Proceedings of Tula state University. Natural science*, № 3, pp. 34–39.
4. Rarova E. M., 2015, "Trigonometric sums of algebraic nets", *In the collection: Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications Proceedings of the XIII International conference dedicated to the eighty-fifth anniversary of the birth of Professor Sergei Sergeevich Ryshkov. Tula state pedagogical University. L. N. Tolstoy*, pp. 356–359.
5. Rarova E. M., 2018, "Weighted number of points of algebraic net", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 200–219.
6. E. M. Rarova, 2019, "Trigonometric sums of nets of algebraic lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 399–405.

7. Rebrov E. D. 2012, "Quadrature formulas with modified algebraic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 3(43), pp. 53 — 90.
8. Rebrova I. Yu., Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Balaba I. N., Yesayan A. R., Basalov Yu. A. numerical Theoretic method in approximate analysis and its implementation in POIVS "TMK": Monogr. In Under 2 hours. ed. — Tula: Publishing house of Tula. state PED. UN-TA im. L. N. Tolstoy, 2016. — Part I. — 232 p.

Получено 28.05.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-241-249

**Гиперболический параметр приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными**

А. В. Родионов

**Александр Валерьевич Родионов** — старший преподаватель кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: rodionovalexandr@mail.ru*

**Аннотация**

В статье рассматривается вариант приближения алгебраических решёток целочисленными в квадратичном случае, выписывается в явном виде множество их локальных минимумов, а также показывается, что для данных целочисленных приближений алгебраических квадратичных решёток можно построить эффективные алгоритмы вычисления гиперболического параметра.

*Ключевые слова:* решётки, гиперболический параметр, локальные минимумы решёток.

*Библиография:* 14 названий.

**Для цитирования:**

А. В. Родионов. Гиперболический параметр приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 241–249.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-241-249

**Hyperbolic parameter of approximation of quadratic algebraic lattices**

A. V. Rodionov

**Alexander Valer'evich Rodionov** — Senior Lecturer, Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State University. L. N. Tolstoy (Tula).

*e-mail: rodionovalexandr@mail.ru*

**Abstract**

The article considers a variant of the approximation of algebraic lattices by integer ones in the quadratic case, the set of their local minima is written out explicitly, and it is also shown that for these integer approximations of algebraic quadratic lattices it is possible to construct efficient algorithms for calculating the hyperbolic parameter.

*Keywords:* lattices, hyperbolic parameter, local minima of lattices.

*Bibliography:* 14 titles.

**For citation:**

A. V. Rodionov, 2020, “Hyperbolic parameter of approximation of quadratic algebraic lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 241–249.

*Посвящается Николаю Михайловичу Добровольскому  
по случаю его семидесятилетия*

**1. Введение**

В 1976 году в работах [11] и [12] К. К. Фроловым были предложены алгебраические решётки и соответствующие им алгебраические сетки, на которых достигается правильный порядок погрешности приближенного интегрирования на классах Коробова (см. [6], [14]) и правильный порядок гиперболической дзета-функции решёток (см. [3], [4]).

Применение квадратурных формул с алгебраическими сетками на практике затруднено, так как это квадратурные формулы с весами. При оценке погрешности приближенного интегрирования возникают большие величины констант, которые трудно оценить.

Таким образом возникает вопрос о приближении алгебраических сеток рациональными, и так как рациональные параллелепипедальные сетки дают квадратурные формулы с равными весами только в случае, если они образованы точками решётки взаимной к целочисленной решётке, то возникает проблема приближения алгебраической решётки целочисленной решёткой.

В данной статье рассматривается вариант приближения алгебраических решёток целочисленными в квадратичном случае, выписывается в явном виде множество их локальных минимумов, а также показывается, что для данных целочисленных приближений алгебраических квадратичных решёток можно построить эффективные алгоритмы вычисления гиперболического параметра.

**2. Локальные минимумы и гиперболический параметр решётки**

В конце девятнадцатого века Г. Ф. Вороной [1] и независимо Г. Минковский [7] среди узлов  $s$ -мерной решетки выделили специальное подмножество узлов  $\mathfrak{M}(\Lambda)$ . Оно состоит из всех ненулевых узлов  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ , для которых не существует ненулевого узла  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$  из  $\Lambda$  с  $|\eta_i| \leq |\gamma_i|$  при всех  $i = 1, \dots, s$  и  $|\eta_j| < |\gamma_j|$  хотя бы при одном  $i = j$ . Элементы множества  $\mathfrak{M}(\Lambda)$  называются *относительными минимумами решётки*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** *Гиперболическим параметром решётки  $\Lambda$  называется число*

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} q(\vec{x}),$$

где  $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s$  — *усечённая норма вектора  $\vec{x}$ ,  $\bar{x} = \max(|x|, 1)$ .*

Понятно, что для нахождения гиперболического параметра решётки достаточно вычислить только усечённые нормы её локальных минимумов.

**3. Решётка линейного сравнения**

Рассмотрим линейное сравнение

$$ax - y \equiv 0 \pmod{N}.$$

Решётка

$$\Lambda(a, N) = \{(m, ma - nN) | m, n \in \mathbb{Z}\} \quad (1)$$

является решёткой решений этого сравнения. Её базис имеет вид  $\vec{\lambda}_1 = (1, a)$ ,  $\vec{\lambda}_2 = (0, -N)$ .

Найдём сначала множество локальных минимумов для решётки линейного сравнения (1).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Рациональное число  $\frac{a}{b}$ , ( $b > 0$ ) называется наилучшим приближением второго рода числа  $\alpha$ , если из  $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$ ,  $0 < d \leq b$  следует, что

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|. \quad (2)$$

**ЛЕММА 1.** [13, стр. 35] Всякое наилучшее приближение второго рода есть подходящая дробь.

**ЛЕММА 2.** [13, стр. 36] Всякая подходящая дробь есть наилучшее приближение второго рода, за исключением  $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ ,  $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $0 < a < N$ ,  $\Lambda(a, N)$  — решётка, заданная равенством (1),  $q_{-1} = 0$ ,  $p_{-1} = 1$ , а для  $i = 0 \dots l$   $\frac{p_i}{q_i}$  —  $i$ -тая подходящая дробь к дроби  $\frac{a}{N}$  ( $\frac{p_l}{q_l} = \frac{a}{N}$ ). Тогда множество локальных минимумов

$$\mathfrak{M}(\Lambda(a, N)) = \{\pm(q_i, q_i a - p_i N) | i = -1, 0, \dots, l\}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Положим  $\alpha = \frac{a}{N}$ . Из леммы 2 следует, что для любых целых  $m, n$ , таких, что  $\frac{n}{m} \neq \frac{p_i}{q_i}$ ,  $0 < m \leq q_i$  выполняется неравенство  $|q_i \frac{a}{N} - p_i| < |m \frac{a}{N} - n|$ . Тогда  $|q_i a - p_i N| < |ma - nN|$ . Из чего следует утверждение теоремы.  $\square$

## 4. Приближение алгебраической решётки целочисленной

Пусть  $d$  — произвольное натуральное число, свободное от квадратов. Рассмотрим квадратичное поле  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ . Тогда кольцо целых алгебраических чисел  $\mathbb{Z}_F$  имеет вид:  $\mathbb{Z}_F = \{n + m\omega | n, m \in \mathbb{Z}\}$ , где  $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ , если  $d = 4t + 1$ , и  $\omega = \sqrt{d}$ , если  $d = 4t + 2$  или  $d = 4t + 3$ .

Через  $\Lambda(F)$  обозначим алгебраическую решётку поля  $F$ :  $\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$  и  $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$  — целые алгебраически сопряжённые числа. Если  $d = 4t + 2$  или  $d = 4t + 3$ , то базис решётки  $\Lambda(F)$  имеет вид  $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{\lambda}_2 = (\omega; -\omega)$ , детерминант решётки  $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{d}$ . В случае  $d = 4t + 1$  базис  $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{\lambda}_2 = (\omega; 1 - \omega)$ ,  $\det \Lambda(F) = \sqrt{d}$ .

Рассмотрим разложение  $\omega$  в цепную периодическую дробь:

$$\omega = (a_0; a_1, \dots, a_k, \dots) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Через  $\frac{P_k}{Q_k}$  будем обозначать  $k$ -ую подходящую дробь к  $\omega$ . Таким образом,

$$\omega = \frac{P_k}{Q_k} + \frac{(-1)^k \theta_k}{Q_k^2}, \quad 0 < \theta_k < 1 \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (3)$$

Через  $\Lambda_k(F)$  обозначается решётка, полученная из  $\Lambda(F)$  домножением на  $Q_k$ . Она имеет вид

$$\Lambda_k(F) = \{(Q_k(m + n\omega); Q_k(m - n\omega)) | m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 2 \text{ или } d = 4t + 3;$$

или

$$\Lambda_k(F) = \{(Q_k(m + n\omega); Q_k(m - n - n\omega)) | m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 1.$$

Через  $\Lambda_k(d)$  обозначим целочисленную решётку, заданную равенствами

$$\Lambda_k(d) = \{(Q_k m + P_k n; Q_k m - P_k n) | m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 2 \text{ или } d = 4t + 3; \quad (4)$$

или

$$\Lambda_k(d) = \{(Q_k m + P_k n; Q_k m - Q_k n - P_k n) | m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 1. \quad (5)$$

В первом случае базис решётки имеет вид  $\vec{\lambda}_{k,1} = (Q_k, Q_k)$ ,  $\vec{\lambda}_{k,2} = (P_k, -P_k)$ , а её детерминант  $\det(\Lambda_k(d)) = 2P_k Q_k$ . Во втором случае  $\vec{\lambda}_{k,1} = (Q_k, Q_k)$ ,  $\vec{\lambda}_{k,2} = (P_k, Q_k - P_k)$ ,  $\det(\Lambda_k(d)) = 2P_k Q_k - Q_k^2$ .

Следующая теорема показывает, что решётки (4) и (5) являются решётками решений линейного сравнения.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $\frac{P_k}{Q_k}$  —  $k$ -ая подходящая дробь к  $\omega$ . Числа  $a$  и  $N$  определяются следующими равенствами. При  $d = 4t + 2$  или  $d = 4t + 3$ :  $N = 2P_k Q_k$ ;  $a = (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k)$ . При  $d = 4t + 1$ :  $N = 2Q_k P_k - Q_k^2$ ;  $a = (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k - Q_{k-1} Q_k)$ . Тогда  $\Lambda_k(d) = \Lambda(a, N)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим унимодулярную матрицу

$$A = (-1)^k \begin{pmatrix} P_{k-1} & -Q_{k-1} \\ P_k & -Q_k \end{pmatrix}$$

и её действие на базисную матрицу решётки  $\Lambda_k(d)$  как матрицы перехода к новому базису.

Докажем утверждение теоремы сначала для случая  $d = 4t + 2$  или  $d = 4t + 3$ .

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} Q_k & Q_k \\ P_k & -P_k \end{pmatrix} &= (-1)^k \begin{pmatrix} P_{k-1} & -Q_{k-1} \\ P_k & -Q_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_k & Q_k \\ P_k & -P_k \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^k \begin{pmatrix} P_{k-1} Q_k - Q_{k-1} P_k & P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k \\ P_k Q_k - Q_k P_k & P_k Q_k + Q_k P_k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k) \\ 0 & (-1)^k 2P_k Q_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k) \\ 0 & 2P_k Q_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай  $d = 4t + 1$ .

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} Q_k & Q_k \\ P_k & Q_k - P_k \end{pmatrix} &= (-1)^k \begin{pmatrix} P_{k-1} & -Q_{k-1} \\ P_k & -Q_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_k & Q_k \\ P_k & Q_k - P_k \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^k \begin{pmatrix} P_{k-1} Q_k - Q_{k-1} P_k & P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k - Q_{k-1} Q_k \\ P_k Q_k - Q_k P_k & P_k Q_k + Q_k P_k - Q_k^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k - Q_{k-1} Q_k) \\ 0 & (-1)^k (2P_k Q_k - Q_k^2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k - Q_{k-1} Q_k) \\ 0 & 2P_k Q_k - Q_k^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Понятно, что не любая решётка линейного сравнения представима в виде (4) или (5).

Заметим, что решётка (4) задаётся с помощью чисел  $P_k$  и  $Q_k$  — числителя и знаменателя  $k$ -той подходящей дроби к числу  $\omega$ . При этом теорема 2 устанавливает, что эта решётка является решёткой линейного сравнения (1) с параметрами  $a$  и  $N$ . Следующая же теорема обнаруживает связь между разложениями в цепную дробь чисел  $\frac{P_k}{Q_k}$  и  $\frac{a}{N}$ . Для её доказательства

нам понадобятся *скобки Эйлера* (см., например, [10, стр. 35]). Они определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$[] = 1; \quad [a_0] = a_0; \quad [a_0, a_1] = a_0 a_1 + 1; \quad [a_0, \dots, a_{k+1}] = [a_0, \dots, a_k] a_{k+1} + [a_0, \dots, a_{k-1}] \quad (k \geq 0).$$

Полезны следующие свойства скобок Эйлера:

1.  $[a_0, \dots, a_k] = [a_k, \dots, a_0]$ .
2.  $[a_0, \dots, a_k] = [a_0, \dots, a_i][a_{i+1}, \dots, a_k] + [a_0, \dots, a_{i-1}][a_{i+2}, \dots, a_k]$ .
3.  $[a_0, \dots, a_k][a_1, \dots, a_{k-1}] - [a_0, \dots, a_{k-1}][a_1, \dots, a_k] = (-1)^{k-1}$ .

Пусть  $p_k$  и  $q_k$  — числитель и знаменатель  $k$ -той подходящей дроби к данному числу  $\alpha$ . Если  $\frac{p_k}{q_k}$  — подходящая дробь к разложению числа  $\alpha$  в цепную дробь и  $a_0, a_1, \dots$  её неполные частные, то  $p_k = [a_0, \dots, a_k]$ ,  $q_k = [a_1, \dots, a_k]$ .

В дальнейшем будем считать, что  $a > 0$ , поскольку случай отрицательного  $a$  аналогичен рассматриваемому.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$\frac{P_k}{Q_k} = (a_0; a_1, \dots, a_k), \quad P_k > Q_k, \quad \frac{a}{N} = \frac{P_{k-1}Q_k + Q_{k-1}P_k}{2P_kQ_k}.$$

Тогда

$$\frac{a}{N} = (0; a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_k). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся свойствами скобок Эйлера для преобразования правой части равенства 6:

$$\begin{aligned} (0; a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_k) &= \frac{[a_{k-1}, \dots, a_1, a_0 + \frac{P_k}{Q_k}]}{[a_k, \dots, a_1, a_0 + \frac{P_k}{Q_k}]} = \\ &= \frac{[a_{k-1}, \dots, a_1] \left(a_0 + \frac{P_k}{Q_k}\right) + [a_{k-1}, \dots, a_2]}{[a_k, \dots, a_1] \left(a_0 + \frac{P_k}{Q_k}\right) + [a_k, \dots, a_2]} = \\ &= \frac{([a_{k-1}, \dots, a_1]a_0 + [a_{k-1}, \dots, a_2])Q_k + [a_{k-1}, \dots, a_1]P_k}{([a_k, \dots, a_1]a_0 + [a_k, \dots, a_2])Q_k + [a_k, \dots, a_1]P_k} = \\ &= \frac{[a_{k-1}, \dots, a_0]Q_k + [a_{k-1}, \dots, a_1]P_k}{2P_kQ_k} = \frac{P_{k-1}Q_k + Q_{k-1}P_k}{2P_kQ_k}, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы.  $\square$

Как мы видим, для нахождения  $\mathfrak{M}(\Lambda(a, N))$  решётки линейного сравнения необходимо разложение числа  $\frac{a}{N}$  в цепную дробь. При этом если  $a = P_{k-1}Q_k + Q_{k-1}P_k$  и  $N = 2P_kQ_k$ , то  $l = 2k + 1$ .

Однако базис этой решётки ортогонален. Помимо этого для любой точки решётки  $(x, y)$  точка  $(y, x)$  также принадлежит этой решётке. Эти два свойства позволяют находить множество локальных минимумов этой решётки эффективнее.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для  $i = 0 \dots k$   $\frac{P_i}{Q_i}$  —  $i$ -тая подходящая дробь к дроби  $\frac{P_k}{Q_k}$ . Тогда множество локальных минимумов решётки (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\Lambda_k(d)) &= \{\pm(Q_k, Q_k), \pm(Q_kP_i + Q_iP_k, Q_kP_i - Q_iP_k), \\ &\quad \pm(Q_kP_i - Q_iP_k, Q_kP_i + Q_iP_k) | i = 0, \dots, k\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу симметрии решётки  $\Lambda_k(d)$  достаточно рассматривать только точки решётки вида  $(xQ_k + yP_k, xQ_k - yP_k)$ , где  $x$  и  $y$  — неотрицательные целые числа. Докажем, что точки решётки являются относительными минимумами, если  $x = P_i$ ,  $y = Q_i$ .

При  $i = 0$ , очевидно, точка  $(Q_k, Q_k)$  — относительный минимум (так как  $Q_k < P_k$ ).

Известно, что всякая подходящая дробь есть наилучшее приближение второго рода, и всякое наилучшее приближение второго рода является подходящей дробью. Значит

$$\left| Q_i \cdot \frac{P_k}{Q_k} - P_i \right| < \left| x \cdot \frac{P_k}{Q_k} - y \right|,$$

для всех  $x, y \in \mathbb{N}$ ,  $x \leq Q_i$ , из чего следует, что

$$|Q_i P_k - Q_k P_i| < |x P_k - y Q_k|.$$

Если же  $x > Q_i$  и  $|Q_i P_k - Q_k P_i| > |x P_k - y Q_k|$ , то  $|Q_i P_k + Q_k P_i| < |x P_k + y Q_k|$ .  $\square$

Установим соответствие между локальными минимумами, выписанными в теоремах 1 и 4 в случае, если  $a = P_{k-1}Q_k + Q_{k-1}P_k$  и  $N = 2P_kQ_k$ .

ЛЕММА 3. Пусть  $\frac{P_k}{Q_k} = (a_0; a_1, \dots, a_k)$ ,  $\beta = -1, 1, \dots, k-1$ ,  $P_{-1} = 1$ ,  $Q_{-1} = 0$ . Тогда

$$Q_k P_\beta - Q_i P_k = (-1)^{\beta+1} [a_k, \dots, a_{\beta+2}]. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для  $\beta = k-1$  и  $\beta = k-2$  утверждение леммы очевидно:

$$\begin{aligned} Q_k P_{k-1} - Q_{k-1} P_k &= (-1)^k = (-1)^k []; \\ Q_k P_{k-2} - Q_{k-2} P_k &= (-1)^{k-1} a_k = (-1)^{k-1} [a_k]. \end{aligned}$$

Обозначим  $\Delta_\beta = Q_k P_\beta - Q_i P_k$ . Тогда по индукции

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta-1} &= Q_k P_{\beta-1} - Q_{\beta-1} P_k = Q_k (P_{\beta+1} - a_{\beta+1} P_\beta) - P_k (Q_{\beta+1} - a_{\beta+1} Q_\beta) = \Delta_{\beta+1} - a_{\beta+1} \Delta_\beta = \\ &= (-1)^{\beta+2} [a_k, \dots, a_{\beta+3}] - (-1)^{\beta+1} a_{\beta+1} [a_k, \dots, a_{\beta+2}] = (-1)^\beta [a_k, \dots, a_{\beta+1}], \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.  $\square$

ЛЕММА 4. Пусть  $\frac{P_k}{Q_k} = (a_0; a_1, \dots, a_k)$ ,  $\beta = -1, 1, \dots, k$ ,  $P_{-1} = 1$ ,  $Q_{-1} = 0$ . Тогда

$$Q_k P_\beta + Q_\beta P_k = [a_k, \dots, a_1, 2a_0, a_1, a_\beta]. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для  $\beta = -1$  и  $\beta = 0$ :

$$\begin{aligned} Q_k P_{-1} + Q_{-1} P_k &= Q_k = [a_1, \dots, a_k]; \\ Q_k P_0 + Q_0 P_k &= a_0 [a_k, \dots, a_1] + [a_k, \dots, a_0] = 2a_0 [a_k, \dots, a_1] + [a_k, \dots, a_2] = [a_k, \dots, a_1, 2a_0]. \end{aligned}$$

Обозначим  $\Delta_\beta = Q_k P_\beta + Q_i P_k$ . Тогда по индукции

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta+1} &= Q_k P_{\beta+1} + Q_{\beta+1} P_k = Q_k (a_{\beta+1} P_\beta + P_{\beta-1}) + P_k (a_{\beta+1} Q_\beta + Q_{\beta-1}) = a_{\beta+1} \Delta_\beta + \Delta_{\beta-1} = \\ &= a_{\beta+1} [a_k, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_\beta] + [a_k, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_{\beta-1}] = [a_k, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_{\beta+1}], \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.  $\square$

ТЕОРЕМА 5. Пусть

$$\beta_i = \begin{cases} -1 + k - i, & \text{при } i = -1, 0, \dots, k-1, \\ -1 - k + i, & \text{при } i = k+1, k+2, \dots, 2k+1. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда

- $(q_i, q_i a - p_i N) = (-1)^{\beta_i+1} (Q_k P_{\beta_i} - Q_{\beta_i} P_k, Q_k P_{\beta_i} + Q_{\beta_i} P_k)$  при  $i = -1, 0, \dots, k-1$ ,
- $(q_i, q_i a - p_i N) = (Q_k, Q_k)$ , при  $i = k$ ,
- $(q_i, q_i a - p_i N) = (Q_k P_{\beta_i} + Q_{\beta_i} P_k, Q_k P_{\beta_i} - Q_{\beta_i} P_k)$  при  $i = k+1, k+2, \dots, 2k+1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать  $q_{-1} = 0$ . Тогда согласно теореме 3

$$q_i = \begin{cases} 0, & \text{при } i = -1, \\ [a_k, \dots, a_{k-i+1}], & \text{при } i = 0, 1, \dots, k-1, \\ Q_k, & \text{при } i = k, \\ [a_k, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_{i-k-1}] & \text{при } i = k+1, k+2, \dots, 2k+1. \end{cases}$$

Теперь непосредственная подстановка значений  $\beta_i$  из (9) в равенства (7) и (8) даёт утверждение теоремы.  $\square$

## 5. Заключение

В статье рассматривается вариант приближения алгебраических решёток целочисленными в квадратичном случае. Также мы видим, что приближения алгебраических решёток при  $d = 4t + 1$  и при  $d = 4t + 2$  или  $d = 4t + 3$  существенно отличаются.

При  $d = 4t + 2$  или  $d = 4t + 3$  решётка  $\Lambda_k(d)$  обладает свойством, что для любой точки решётки  $(x, y)$  точка  $(y, x)$  также принадлежит этой решётке. Это обстоятельство позволяет находить множество локальных минимумов эффективнее.

При  $d = 4t + 1$  решётка  $\Lambda_k(d)$  данным свойством уже не обладает. Этот случай требует отдельного рассмотрения.

Теорема 2 показывает, что решётка  $\Lambda_k(d)$  является решёткой линейного сравнения. Как показывают численные эксперименты данное свойство наблюдается не только в квадратичном случае. При больших размерностях приближения алгебраических решёток целочисленными часто оказываются решётками линейного сравнения.

Автор выражает свою благодарность профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вороной Г. Ф. Собрание сочинений в 3-х томах. Т. 1. Изд-во АН УССР, Киев, 1952.
2. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНТИ 24.08.84, N 6090-84.
3. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с.
4. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4-107.
5. Е. И. Климова, Н. Н. Добровольский Квадратичные поля и квадратурные формулы // Материалы XV Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 308-310.

6. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.
7. Minkowski H. Généralisation de la théorie des fractions continues // Ann. Sci.École Norm. Sup. (3) 13, 1896, pp. 41–60.
8. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 241-256.
9. А. В. Родионов О рациональных приближениях алгебраических сеток // Материалы XV Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 321–310.
10. Сушкевич А. К. Теория чисел. Элементарный курс. 1954. 205 с.
11. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.
12. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.
13. Хинчин А. Я. Цепные дроби. - Москва: ГИТТЛ, 1949.
14. Шарыгин И. Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 7. 1963. № 4. С. 784–802.

## REFERENCES

1. Korobov, N. M. 2004, "Numerical-theoretic methods in approximate analysis Moscow: mtsnmo. 288 p.
2. Dobrovolskii N. M. Hyperbolic zeta function of lattices. / Dep. in VINITI 24.08.84, N 6090-84.
3. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, 2012, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding optimal coefficients", Tula: Publishing house Tul. state ped. University named after L. N. Tolstoy, 283 p.
4. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolskii, N. M. Dobrovolskii, N. N. Dobrovolskii, 2012, "Hyperbolic zeta functions of grids and lattices and the calculation of optimal coefficients", Chebyshev Collection, vol. 13, iss. 4 (44), pp. 4-107.
5. E. I. Klimova, N. N. Dobrovolsky, 2018, "Quadratic fields and quadrature formulas", Proceedings of the XV International Conference Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications dedicated to the centenary of the birth of the doctor Mathematical Sciences, Professor of the Lomonosov Moscow State University Nikolai Mikhailovich Korobov. - Tula: Publishing house of Tul. state ped. un-ta them. L. N. Tolstoy, pp. 308–310.
6. Korobov N. M., "Number-theoretic methods in approximate analysis", M.: Fizmat-giz, 1963.
7. Minkowski H., 1896, "Généralisation de la théorie des fractions continues", Ann. Sci.École Norm. Sup. (3) 13, pp. 41–60.

8. A. V. Mikhlyeva, 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and grids by integer lattices and rational grids", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, issue 3, pp. 241-256.
9. A. V. Rodionov, 2018, "On rational approximations of algebraic grids", *Proceedings of the XV International Conference Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications dedicated to the centenary of the birth of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Moscow State University named after M.V. Lomonosov Nikolai Mikhailovich Korobov*. - Tula: Publishing house Tul. state ped. un-ta them. L. N. Tolstoy, pp. 321–310.
10. Sushkevich A. K. "Number theory. Elementary course", 1954, 205 p.
11. Frolov K. K., 1976, "Upper bounds for the error of quadrature formulas on classes of functions", *DAN SSSR*. vol. 231. No. 4. pp. 818-821.
12. KK Frolov, 1979, "Quadrature formulas on classes of functions", *Dis. ... Cand. physical-mat. sciences*. Moscow: Computing Center of the USSR Academy of Sciences.
13. A. Ya.Khinchin, "Continued Fractions", Moscow: GITTL, 1949.
14. Sharygin I. F., 1963, "Lower bounds for the error of quadrature formulas on classes of functions", *Journal. calculated mat. and mate. physics*. 7, no. 4. pp. 784–802.

Получено 19.05.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

## Том 21. Выпуск 3.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-250-261

### Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых

М. Ш. Шабозов, М. К. Абдукаримзода

**Мирганд Шабозович Шабозов** — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистан, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).

*e-mail: shabozov@mail.ru*

**Муслими Кароматулло Абдукаримзода** — аспирант кафедры математического анализа и теории функций, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).

*e-mail: m.abdukarimzoda@mail.ru*

#### Аннотация

Для приближённого вычисления криволинейного интеграла

$$J(f; \Gamma) := \int_{\Gamma} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dt$$

в случае, когда кривая  $\Gamma$  задаётся параметрическими уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), 0 \leq t \leq L,$$

вводится в рассмотрение квадратурная формула

$$J(f; \Gamma) \approx := \sum_{k=1}^N p_k f(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)),$$

где  $P = \{p_k\}_{k=1}^N$  и  $T := \{t_k : 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq L\}$  — произвольные векторы коэффициентов и узлов. Пусть  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, L]$  — множество кривых  $\Gamma$ , у которых координатные функции  $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$  ( $i = \overline{1, m}$ ), где  $\omega_i(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) — заданные модули непрерывности,  $\mathfrak{M}_\rho^{\omega, p}$  — класс функций  $f(M)$ , определённых в точках  $M \in \Gamma$ , таких, что для любых двух точек  $M' = M(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ ,  $M'' = M(x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ , принадлежащих кривой  $\Gamma \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, L]$ , они удовлетворяют условию

$$|f(M') - f(M'')| \leq \omega(\rho_p(M', M'')),$$

где

$$\rho_p(M', M'') = \left\{ \sum_{i=1}^m |x'_i - x''_i|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$\omega(t)$  — заданный модуль непрерывности. Доказано, что среди всех квадратурных формул указанного вида наилучшей для класса функций  $\mathfrak{M}_\rho^{\omega, p}$  и класса кривых  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, L]$  является формула средних прямоугольников.

Вычислена точная оценка погрешности наилучшей квадратурной формулы для всех рассматриваемых классов функций и кривых и дано обобщение для более общих классов функций.

**Ключевые слова:** криволинейный интеграл, квадратурная формула, погрешность, формула прямоугольников, формула трапеций, узлы.

**Библиография:** 8 названий.

**Для цитирования:**

М. Ш. Шабозов, М. К. Абдукаримзода. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 250–261.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-250-261

**Best quadrature formulas calculation of curvilinear integrals for some classes of functions and curves**

M. Sh. Shabozov, M. K. Abdugarimzoda

**Mirgand Shabozovich Shabozov** — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, Tajik national University (Dushanbe).

*e-mail: shabozov@mail.ru*

**Muslimi Karomatullo Abdugarimzoda** — Post-graduate student of the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Tajik National University (Dushanbe).

*e-mail: m.abdugarimzoda@mail.ru*

**Abstract**

For an approximate calculation of a curvilinear integral

$$J(f; \Gamma) := \int_{\Gamma} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dt$$

when the curve  $\Gamma$  is given by parametric equations

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), 0 \leq t \leq L$$

the quadrature formula is entered into consideration

$$J(f; \Gamma) \approx \sum_{k=1}^N p_k f(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)),$$

where  $P = \{p_k\}_{k=1}^N$  and  $T := \{t_k : 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq L\}$  are arbitrary vector coefficients and nodes. Let  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, L]$ — sets of curves  $\Gamma$ , whose coordinate functions  $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$  ( $i = \overline{1, m}$ ), where  $\omega_i(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ )— are given moduli of continuity  $\mathfrak{M}_p^{\omega, p}$ — functions class  $f(M)$ , defined in point  $M \in \Gamma$ , such for any two points  $M' = M(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ ,  $M'' = M(x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$  belonging to a curve  $\Gamma \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, L]$  satisfy the condition

$$|f(M') - f(M'')| \leq \omega(\rho_p(M', M'')),$$

where

$$\rho_p(M', M'') = \left\{ \sum_{i=1}^m |x'_i - x''_i|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$\omega(t)$ — given moduli of continuity. It is proved that among all quadrature formulas of the above from, the best for a class of functions  $\mathfrak{M}_p^{\omega, p}$  and a class of curves  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, 1]$ , is the formula of average rectangles.

The exact error estimate of the best quadrature formula is calculated for all the functional classes under consideration and the curves are given a generalization for more general classes of functions.

**Keywords:** curvilinear integral, quadrature formula, error, rectangle formula, functions class, nodes.

**Bibliography:** 8 titles.

### For citation:

M. Sh. Shabozov, M. K. Abdugarimzoda, 2020, "Best quadrature formulas calculation of curvilinear integrals for some classes of functions and curves", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 250–261.

## 1. Введение

Экстремальная задача отыскания наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы является одной из актуальных задач вычислительной математики. Наиболее важные результаты, полученные по экстремальным задачам теории квадратур до конца прошлого столетия, приведены в дополнении Н.П.Корнейчука к монографии С.М.Никольского [1], последнее издание которой вышло в 1988 году. В дополнении отмечается, что по экстремальным задачам теории квадратур получен ряд существенных окончательных результатов для различных классов функций, а также отмечается, что до настоящего времени немало задач для некоторых важных интегралов ещё не решено. Это замечание, в частности, относится к задаче отыскания оптимальных квадратурных формул для криволинейных интегралов. Для указанных интегралов задача отыскания наилучших квадратурных формул находится на начальной стадии. Некоторые результаты в этом направлении получены совсем недавно в [2]–[6]. В данной статье рассматривается задача о приближённом вычислении криволинейного интеграла первого рода для классов функций и классов пространственных кривых, задаваемых модулями непрерывности.

## 2. Постановка экстремальной задачи

Пусть функция  $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  определена и интегрируема вдоль кривой  $\Gamma \subset R^m$  и

$$J(f; \Gamma) := \int_{\Gamma} f(M) dt = \int_{\Gamma} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dt. \quad (1)$$

Предположим, что на кривой  $\Gamma$  установлено положительное направление так, что положение точки  $M = M(x_1, x_2, \dots, x_m)$  на кривой может быть определено длиной дуги  $t = \overline{AM}$ , отсчитываемой от начальной точки  $A$ . Тогда кривая  $\Gamma$  параметрически выразится уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \quad (0 \leq t \leq L), \quad (2)$$

а функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , заданная в точках кривой, сведётся к сложной функции  $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))$  от переменной  $t$ . Хорошо известно, что в этом случае интеграл (1) запишется в виде следующего определённого интеграла

$$J(f; \Gamma) = \int_0^L f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)) dt. \quad (3)$$

Всякая квадратурная формула

$$J(f; \Gamma) \approx \mathcal{L}_N(f; \Gamma; P, T) := \sum_{k=1}^N p_k f(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)) \quad (4)$$

для приближённого вычисления интеграла (3) задаётся векторами коэффициентов  $P = \{p_k\}_{k=1}^N$  и узлов

$$T = \{t_k : 0 \leq t_1 < \dots < t_N \leq L\},$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_N$  – произвольные действительные числа.

Погрешность квадратурной формулы (4) обозначим

$$|R_N(f; \Gamma)| := |R_N(f; \Gamma; P, T)| = |J(f; \Gamma) - \mathcal{L}_N(f; \Gamma; P, T)|.$$

Если  $\mathfrak{M}$  – некоторый класс функций  $\{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))\}$ , определённых в точках кривой  $\Gamma$  и интегрируемых как сложные функции параметра  $t$  на отрезке  $[0, L]$ , то за величину, характеризующую точную оценку погрешности, примем верхнюю грань

$$R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; P, T) = \sup \left\{ |R_N(f; \Gamma; P, T)| : f \in \mathfrak{M} \right\}.$$

Пусть  $\mathfrak{N}(L)$  – класс кривых  $\Gamma$ , заданных параметрическими уравнениями (2). Наибольшую погрешность квадратурной формулы (4) всего класса функций  $\mathfrak{M}$  на классе кривых  $\mathfrak{N}(L)$  обозначим

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}(L); P, T) = \sup \left\{ R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; P, T) : \Gamma \subset \mathfrak{N}(L) \right\}.$$

Для того чтобы получить оптимальную квадратурную формулу на классах функций  $\mathfrak{M}$  и кривых  $\mathfrak{N}(L)$ , потребуем, чтобы формула (4) была точна для функции  $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)) = \text{const}$ , то есть чтобы выполнялось условие

$$\int_0^L dt = \sum_{k=1}^N p_k = L.$$

Через  $\mathcal{A}$  обозначим множество векторов коэффициентов и узлов  $(P, T)$ , для которых квадратурная формула (4) имеет смысл. Нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(L)) = \inf_{(P, T)} \{R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}(L), P, T), (P, T) \in \mathcal{A}\}, \quad (5)$$

по аналогии с определением из монографии [1], будем называть оптимальной оценкой погрешности квадратурной формулы (4) на классах функций  $\mathfrak{M}$  и кривых  $\mathfrak{N}(L)$ . Если существует вектор  $(P^0, T^0) \in \mathcal{A}$ , для которого

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(L)) = R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}(L), P^0, T^0),$$

то указанный вектор определяет наилучшую квадратурную формулу вида (4) в смысле С.М.Никольского [1] на классах функций  $\mathfrak{M}$  и кривых  $\mathfrak{N}(L)$ .

Здесь исследуется квадратурная формула (4) с произвольными векторами коэффициентами  $P = \{p_k\}_{k=1}^N$  и узлами

$$T = \{t_k\}_{k=1}^N : 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq L.$$

### 3. Классы функций и кривых

Обозначим через  $H^\omega := H^\omega[0, L]$  – множество функций  $\varphi(t) \in C[0, L]$ , удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq \omega(|t' - t''|), \quad t', t'' \in [0, L],$$

где  $\omega(\delta)$  – заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная функция, удовлетворяющая соотношениям  $0 \leq \omega(t'') - \omega(t') \leq \omega(t'' - t'), 0 \leq t' \leq t'' \leq L, \omega(0) = 0$ .

Через  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, L]$  обозначим класс гладких кривых  $\Gamma \subset R^m$ , заданных параметрическими уравнениями (2), у которых координатные функции  $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L], i = \overline{1, m}$ .

В евклидовом пространстве  $R^m$  для любых двух точек  $M' = M(x'_1, x'_2, \dots, x'_m), M'' = M(x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$  введём в рассмотрение следующее  $l_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ )-расстояние

$$\rho_p(M', M'') = \left\{ \sum_{i=1}^m |x'_i - x''_i|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\rho_\infty(M', M'') = \max_{1 \leq i \leq m} |x'_i - x''_i|.$$

Через  $\mathfrak{M}_\rho^{\omega, p}$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) обозначим класс функций  $f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ , определённых на кривых  $\Gamma \subset H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$  и для любых двух точек  $M', M'' \in \Gamma$  удовлетворяющих условию

$$|f(M') - f(M'')| \leq \omega(\rho_p(M', M'')).$$

Таким образом, будем писать  $f(M) \in \mathfrak{M}_\rho^{\omega, p}$ , если для любых двух точек  $M', M'' \in \Gamma \subset H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$  и  $t', t'' \in [0, L]$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |f(M') - f(M'')| &\leq \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m |x'_i - x''_i|^p \right\}^{1/p} \right) = \\ &= \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m |\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')|^p \right\}^{1/p} \right) \leq \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(|t' - t''|) \right\}^{1/p} \right). \end{aligned}$$

### 4. Основной результат

Сформулируем основной результат работы.

**ТЕОРЕМА 1.** Среди всех квадратурных формул вида (4) с произвольными векторами-коэффициентами и узлами  $(P, T)$ ,  $P = \{p_k\}_{k=1}^N, T = \{t_k\}_{k=1}^N : 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq L$  наилучшей для класса функций  $\mathfrak{M}_\rho^{\omega, p}$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) и класса кривых  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$  является формула средних прямоугольников

$$\begin{aligned} &\int_0^L f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt = \\ &= \frac{L}{N} \sum_{k=1}^N f \left( \varphi_1 \left( \frac{2k-1}{2N} L \right), \dots, \varphi_m \left( \frac{2k-1}{2N} L \right) \right) + R_N(f; \Gamma). \end{aligned} \quad (6)$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (6) на классах функций  $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$  и кривых  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$  справедлива точная оценка

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}) = (2N) \int_0^{L/(2N)} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} \right) dt. \quad (7)$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие утверждения.

ЛЕММА А [7, с.177]. Пусть в области  $D \in R^m$  фиксирована произвольная система точек  $M_1, M_2, \dots, M_\nu$  и функция  $g(M)$  определена равенством

$$g(M) = \min_{1 \leq j \leq \nu} \varphi[\rho(M, M_j)], \quad M \in D,$$

где  $\varphi(t)$  – неубывающая и полуаддитивная, то есть удовлетворяющая соотношениям

$$0 \leq \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \leq \varphi(t_2 - t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \theta$$

( $\theta$  – диаметр области  $D$ ) функция, а  $\rho(M, M_j)$  – расстояние между точками  $M$  и  $M_j$ . Тогда для любых точек  $M'$  и  $M''$  из  $D$  имеет место неравенство

$$|g(M') - g(M'')| \leq \varphi[\rho(M', M'')].$$

Следующее утверждение является следствием леммы 8.2.9 из [7, с.369-370], доказательство которой несложно проводится по той же схеме.

ЛЕММА. Пусть  $\psi_i(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – неубывающие и неотрицательные для  $0 \leq t \leq L$  функции и при фиксированном  $N = 1, 2, \dots$  вектору

$$T = \{t_k : 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq L\}$$

сопоставлена функция

$$\Phi_{1,p}(T, t) = \min_{1 \leq k \leq N} \left\{ \sum_{i=1}^m \psi_i^p(|t - t_k|) \right\}^{1/p}, \quad 0 \leq t \leq L, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\int_0^L \Phi_{1,p}(T, t) dt \geq \int_0^L \Phi_{1,p}(T_0, t) dt, \quad (8)$$

где вектор  $T_0$  определяется координатами  $\tau_k = (2k - 1)L/(2N)$ , ( $k = \overline{1, N}$ ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Оценку снизу получим хорошо известным методом Н.П.Корнейчука [8]. Пусть  $(P, T)$  – произвольный вектор коэффициентов и узлов, для которых имеет смысл формула (4). Через  $\mathfrak{M}_{\rho, T}^{\omega,p}$  обозначим множество функций  $f(M) \in \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ , определённых вдоль кривой  $\Gamma \subset H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ , которые в узлах вектора  $T = \{t_k\}_{k=1}^N$  обращаются в нуль:  $f(\varphi_1(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)) = 0$ ,  $k = \overline{1, N}$ . В силу того, что  $\mathfrak{M}_{\rho, T}^{\omega,p} \subset \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ , имеем:

$$R_N(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; P, T) \geq R_N(\mathfrak{M}_{\rho, T}^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; P, T).$$

Полагая

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho, T}^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}) = \inf \left\{ R_N(\mathfrak{M}_{\rho, T}^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; P, T) : (P, T) \in \mathcal{A} \right\}$$

и учитывая, что для всех функций  $f(M) \in \mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}$  квадратурная сумма справа в (6) равна нулю, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}) &\geq \mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}) = \\ &= \inf_{(P,T) \in \mathcal{A}} \sup_{f \in \mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}} \sup_{\Gamma \subset H^{\omega_1, \dots, \omega_m}} \left| \int_0^L f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt \right|, \end{aligned} \quad (9)$$

причём правая часть неравенства (9) от коэффициентов  $\{p_k\}_{k=1}^N$  не зависит. Фиксируем произвольный вектор узлов

$$T = \{t_k\}_{k=1}^N \quad (0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq L)$$

и определим кривую  $\Gamma_0$  параметрическими уравнениями

$$x_i := \varphi_i(t) = \min_k \omega_i(|t - t_k|), \quad i = \overline{1, m}.$$

Легко проверить, что  $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$   $i = \overline{1, m}$ , а значит кривая  $\Gamma_0 \subset H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ . Если теперь функция  $f(M) \in \mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}$ , то в точках  $M^{(k)} = M(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)) \in \Gamma$  имеем  $f(M^{(k)}) \equiv 0$ ,  $k = \overline{1, N}$ , а потому

$$\begin{aligned} |f(M)| &= |f(M) - f(M^{(k)})| \leq \\ &\leq \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m |\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k)|^p \right\}^{1/p} \right) \leq \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(|t - t_k|) \right\}^{1/p} \right), \end{aligned}$$

и следовательно, в силу непрерывности  $\omega$ , имеем

$$\begin{aligned} f(M) &\leq \min_{t_k} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m |\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k)|^p \right\}^{1/p} \right) = \omega \left( \min_{t_k} \left\{ \sum_{i=1}^m |\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k)|^p \right\}^{1/p} \right) = \\ &= f_{p,T}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)) := f_{p,T}(M). \end{aligned} \quad (10)$$

Функцию  $f_{p,T}(M)$ , определённую в правой части неравенства (10), в силу расположения узлов  $t_k$  ( $t_k < t_{k+1}$ ),  $k = \overline{1, N-1}$ , а также монотонности  $\omega_i(\delta)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , можно записать в виде

$$f_{p,T}(M) = \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left( \min_k |t - t_k| \right) \right\}^{1/p} \right).$$

Докажем, что функция  $f_{p,T}(M) \in \mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}$ . Действительно, если  $t', t'' \in [0, L]$ , то для любых узлов  $t_k \in [0, L]$ , применяя лемму А, получаем

$$\begin{aligned} |f_{p,T}(M') - f_{p,T}(M'')| &= \rho(f_{p,T}(M'), f_{p,T}(M'')) = \\ &= \left| \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left( \min_k |t' - t_k| \right) \right\}^{1/p} \right) - \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left( \min_k |t'' - t_k| \right) \right\}^{1/p} \right) \right| \leq \\ &\leq \omega \left( \left| \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left( \min_k |t' - t_k| \right) \right\}^{1/p} - \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left( \min_k |t'' - t_k| \right) \right\}^{1/p} \right| \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \left| \omega_i \left( \min_k |t' - t_k| \right) - \omega_i \left( \min_k |t'' - t_k| \right) \right|^p \right\}^{1/p} \right) \leq \\ &\leq \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p (|t' - t''|) \right\}^{1/p} \right), \end{aligned}$$

и так как, кроме того  $f_{p,T}(M^{(k)}) = 0$ ,  $k = \overline{1, N}$ , то  $f_{p,T}(M) \in \mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}$ . Это с учётом (10) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} &\sup_{f \in \mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}} \sup_{\Gamma \subset H^{\omega_1, \dots, \omega_m}} |R_N(f; \Gamma; P, T)| = \\ &= \sup_{f \in \mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}} \sup_{\Gamma \subset H^{\omega_1, \dots, \omega_m}} \left| \int_0^L f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt \right| = \\ &= \int_0^L f_{p,T}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt := \int_0^L \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left( \min_k |t - t_k| \right) \right\}^{1/p} \right) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть  $T_0 = \{\tau_k^0 : \tau_k^0 = (2k-1)L/(2N), k = \overline{1, N}\}$ . Тогда из неравенства (8) и вышеприведённой леммы сразу следует, что при всех  $1 \leq p \leq \infty$

$$\begin{aligned} &\int_0^L \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left( \min_k |t - t_k| \right) \right\}^{1/p} \right) dt = \int_0^L f_{p,T}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt \geq \\ &\geq \int_0^L f_{p,T_0}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt = \int_0^L \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p (|t - \tau_k|) \right\}^{1/p} \right) dt = \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left( \left| t - \frac{(2k-1)L}{2N} \right| \right) \right\}^{1/p} \right) dt = \\ &= \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{(k-1)L/N}^{(2k-1)L/(2N)} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left( \frac{(2k-1)L}{2N} - t \right) \right\}^{1/p} \right) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{(2k-1)L/(2N)}^{kL/N} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left( t - \frac{(2k-1)L}{2N} \right) \right\}^{1/p} \right) dt \right\} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^N \int_0^{L/(2N)} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} \right) dt = 2N \int_0^{L/(2N)} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} \right) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, с учётом (11) и (12), имеем оценку снизу

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}) \geq \mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho,T}^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}) = \inf_{(P,T)} \int_0^L f_{p,T}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt =$$

$$= \int_0^L f_{p,T_1}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt = 2N \int_0^{L/(2N)} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} \right) dt. \quad (13)$$

Чтобы получить оценку сверху, равную правой части (13), зададим квадратурную формулу (4) векторами коэффициентов

$$P_0 = \{p_k : p_k = L/N\}_{k=1}^N \quad (14)$$

и узлов

$$T_0 = \{\tau_k^0 : \tau_k^0 = (2k-1)L/(2N), k = \overline{1, N}\}. \quad (15)$$

Тогда для произвольной функции  $f(M) \in \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$  и любой кривой  $\Gamma \subset H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$  будем иметь

$$\begin{aligned} & \left| R_N(f; \Gamma; P_1, T_1) \right| = \\ & = \left| \int_0^L f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt - \frac{L}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \dots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \left| f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) - f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \dots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) \right| dt \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left( \left| t - \frac{(2k-1)L}{2N} \right| \right) \right\}^{1/p} \right) dt = 2N \int_0^{L/(2N)} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} \right) dt. \quad (16) \end{aligned}$$

Сравнивая неравенства (13) и (16), получаем требуемое равенство (7), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Из доказанной теоремы 1 вытекает ряд следствий.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 при  $\omega(t) = t^\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) имеет место равенство

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_\rho^{\alpha,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}) = (2N) \int_0^{L/(2N)} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{\alpha/p} dt. \quad (17)$$

В частности, из (17) при  $\alpha = 1$ , вытекает результат из [6]. Если же в (17) полагать  $\omega_i(t) = \bar{\omega}(t)$ , ( $i = \overline{1, m}$ ), где  $\bar{\omega}(t)$ , заданный модуль непрерывности, то будем иметь

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_\rho^{\alpha,p}; H^{\bar{\omega}}) = (2N) \sqrt[p]{m}^\alpha \int_0^{L/(2N)} (\bar{\omega}(t))^\alpha dt.$$

При  $\alpha = 1$  и  $p = 2$ , отсюда вытекает результат [3].

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в условиях теоремы 1 полагать  $\omega_i(t) = t^{\alpha_i}$  ( $0 < \alpha_i \leq 1, i = \overline{1, m}$ ), то имеем:

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}; H^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}) = (2N) \int_0^{L/(2N)} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m t^{\alpha_i p} \right\}^{1/p} \right) dt. \quad (18)$$

В частности, полагая в (18)  $\omega(t) = t$ , получаем

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_\rho^{1,p}; H^{1,1, \dots, 1}) = \frac{L^2 \cdot \sqrt[p]{m}}{4N}.$$

Отметим, что утверждение теоремы 1 справедливо на более широких классах функций и кривых, чем классы  $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$  и  $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ . В самом деле, пусть  $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$  – класс функций  $f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ , определённых на кривых  $\Gamma \subset H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ , удовлетворяющих для точек  $t, t \pm \tau \in [0, L]$  условию

$$\left| f(\varphi_1(t+\tau), \varphi_2(t+\tau), \dots, \varphi_m(t+\tau)) + f(\varphi_1(t-\tau), \varphi_2(t-\tau), \dots, \varphi_m(t-\tau)) - \right. \\ \left. - 2f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)) \right| \leq 2\omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(|t|) \right\}^{1/p} \right), \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (19)$$

Для квадратурной формулы, заданной векторами коэффициентов (14) и узлов (15), погрешность формулы представима в виде

$$R_N(f; \Gamma; P_0, T_0) = J(f, \Gamma) - L_N(f; \Gamma; P_0, T_0) = \\ = \sum_{k=1}^N \int_0^{L/(2N)} [f(\varphi_1(\tau_k^0 \pm \tau), \dots, \varphi_m(\tau_k^0 \pm \tau)) - 2f(\varphi_1(\tau_k^0), \dots, \varphi_m(\tau_k^0))] d\tau. \quad (20)$$

Из соотношения (20) с учётом неравенства (19) следует оценка сверху

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}; H^{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m}) \leq R_N(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}; P^0, T^0) = 2N \int_0^{L/(2N)} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} \right) dt,$$

а учитывая включение  $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p} \supset \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ , справедливое для любой кривой  $\Gamma \subset H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ , приходим к неравенству

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}; H^{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m}) \geq R_N(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}; P^0, T^0) = 2N \int_0^{L/(2N)} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} \right) dt.$$

Из двух последних неравенств получаем

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}) = \mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}) = 2N \int_0^{L/(2N)} \omega \left( \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} \right) dt.$$

Таким образом доказана следующая

**ТЕОРЕМА 2.** Среди всех квадратурных формул вида (4) с произвольными векторами коэффициентов и узлов  $(P, T)$  наилучшей для классов  $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ ,  $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$  и кривых  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$  является формула средних прямоугольников (6). При этом для погрешности формулы (6) на указанных классах функций и кривых справедливо равенство

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}) = \mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}; H^{\omega_1, \dots, \omega_m}), \quad (21)$$

где значение правой части равенства (21) определено в правой части соотношения (7).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский С.М. *Квадратурные формулы* // Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, № 16, с. 181–196.
2. Вакарчук С.Б. *Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых* // Укр. матем. журнал, 1986, т.38, № 5, с.643-645.
3. Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. *Оптимизация приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых* // ДАН РТ, 2010, т.53, № 6, с.415-419.
4. Тухлиев К. *Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых* // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки, 2013, вып.2, ч.1, с.50-57.
5. Тухлиев К. *Оптимальные квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых* // Моделирование и анализ информационных систем, 2013, т.20, № 3, с.121-129.
6. Шабозов М.Ш. *О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых* // Матем. заметки, 2014, т.96, № 7, с.637-640.
7. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения* // М.: Наука, 1987, 424с.
8. Корнейчук Н.П. *Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных* // Матем. заметки, 1968, т.3, № 5, с. 565–576.

## REFERENCES

1. Nikol'skiy S.M. 1952, "Quadrature formulas", Izv. AN USSR. Series mat., № 16, p. 181-196 (in Russian).
2. Vakarchuk S.B. 1986, "Optimal formula for the numerical integration of curvilinear integral of the first kind for some classes of functions and curves", Ukr. mat. zhurnal, t.38, № 5, p. 643-645 (in Russian).
3. Shabozov M.Sh., Mirpochchoev F.M. 2010, "Optimizing approximate integration of curvilinear integral of the first type for some classes functions and curves", DAN RT, v.53, № 6, p.415-419. (in Russian).
4. Tukhliev K. 2013, "The best quadrature formulas for the approximate calculation of a curvilinear integral of the first kind for some classes of functions and curve", News of Tula State University. natural Sciences, issue. no 2, p.50-57 (in Russian).
5. Tukhliev K. 2013, "Optimal quadrature formulas for the approximate calculation of a curvilinear integral of the first kind for some classes of functions and curve", Simulation and analysis of information systems, t.20, №3, p.121-129 (in Russian).
6. Shabozov M.Sh. 2014, "About the best quadrature formulas for calculation of curvilinear integral in some classes functions and curves", Mat. Notes, v.96, № 7, pp.637-640 (in Russian).

7. Korneichuk N.P. 1987, *“Exact constant in theory approximations”*, M.: Nauka, 424 p. (in Russian).
8. Korneichuk N.P. 1968, *“Best cubature formulas for some classes of functions of many variables”*, Mat. Notes, vol. 3, № 5, pp. 565-576 (in Russian).

Получено 21.02.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

---

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-262-271

**Математическое моделирование свойств упругости  
в механике композиционных материалов**

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева

**Игорь Константинович Архипов** — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

**Влада Игоревна Абрамова** — кандидат технических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail:* abramova\_vi@mail.ru

**Александр Евгеньевич Гвоздев** — доктор технических наук, профессор, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail:* gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

**Ольга Владимировна Кузовлева** — кандидат технических наук, доцент, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

*e-mail:* kusovleva@yandex.ru

**Аннотация**

В работе представлен обзор математических моделей, позволяющих определить эффективные упругие характеристики различных типов композиционных материалов. Рассмотрены наиболее известные модели: вириальное разложение, метод самосогласования, корреляционное приближение, сингулярное приближение. Рассмотрены модели со сложной структурой и матричные системы с регулярной структурой.

*Ключевые слова:* композиты, математические модели, моделирование, пластичность, прочность, упругость.

*Библиография:* 11 названий.

**Для цитирования:**

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева. Математическое моделирование свойств упругости в механике композиционных материалов // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 262–271.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-262-271

**Mathematical modeling of elasticity properties  
in the mechanics of composite materials**

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva

**Igor Konstantinovich Arkhipov** — doctor of technical Sciences, Professor, Tula state pedagogical University L. N. Tolstoy (Tula).

**Vlada Igorevna Abramova** — candidate of technical Sciences, associate Professor, Tula state pedagogical University L. N. Tolstoy (Tula).

*e-mail:* abramova\_vi@mail.ru

**Alexandr Evgenievich Gvozdev** — doctor of engineering, Professor, Professor, Tula state pedagogical University L.N. Tolstoy (Tula).

*e-mail:* gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

**Olga Vladimirovna Kuzovleva** — candidate of technical Sciences, docent, docent, Russian State University of justice (Moscow).

*e-mail:* kusovleva@yandex.ru

**Abstract**

This paper presents an overview of mathematical models that allow us to determine the effective elastic characteristics of various types of composite materials. The most well-known models are considered: virial decomposition, self-matching method, correlation approximation, and singular approximation. Models with a layered structure and matrix systems with a regular structure are considered.

*Keywords:* composites, mathematical models, modeling, plasticity, strength, elasticity.

*Bibliography:* 11 titles.

**For citation:**

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, 2020, "Mathematical modeling of elasticity properties in the mechanics of composite materials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 262–271.

**1. Введение**

В данной работе произведен обзор математических моделей упругих характеристик широкого класса композиционных материалов. Рассматриваются наиболее известные математические модели: вириальное разложение, метод самосогласования, корреляционное приближение, сингулярное приближение, теории случайных функций. Применение этих моделей рассмотрено для композитов со случайными неоднородностями, для слоистых материалов и для матричных систем с регулярной структурой.

Современные композиты представляют собой широкий спектр материалов, в которых тем или иным способом смешаны несколько изотропных или анизотропных компонентов. Предполагается, что механические свойства каждого из компонентов известны. Известна также

структура (распределение) компонентов в объеме материала. Основная задача состоит в математическом определении эффективных свойств, которые можно также определить экспериментально путем механических испытаний. Эти эффективные свойства при их математическом моделировании позволяют оптимально проектировать материал с учетом влияния структуры и технологии изготовления композита. В данной работе эта задача рассматривается только для моделирования эффективных упругих свойств композита.

## 2. Общая постановка задачи

Если в многокомпонентной среде композиционного материала каждый компонент подчиняется закону Гука, то и весь композит подчиняется закону Гука:

$$\sigma = c\varepsilon. \quad (1)$$

В такой записи тензор  $c$  будет оставаться постоянным внутри зерна неоднородности и меняться скачком при переходе в другое зерно. Поэтому  $c$  может быть представлен в виде:

$$c = \langle c \rangle + c', \quad (2)$$

где  $\langle c \rangle$  — среднее значение,  $c'$  — флуктуационная составляющая.

Относительно средних значений закон Гука может быть записан в виде:

$$\langle \sigma \rangle = c_* \langle \varepsilon \rangle \quad (3)$$

где  $c_*$  — тензор эффективных упругих характеристик.

Если удастся найти этот тензор, то легко можно найти эффективные технические модули упругости  $E_*$ ,  $K_*$ ,  $\mu_*$  и коэффициент Пуассона  $\nu_*$ .

Определим среднее напряжение равенством:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \sigma dV. \quad (4)$$

Здесь в качестве элемента объема  $\Delta V$  следует брать область, достаточно большую по сравнению с характерным размером элемента неоднородности (например, средним диаметром зерна). В этом случае возникает понятие представительного объема. Под этим определением понимается такой объем, который характеризует равенство объемной плотности одного компонента в этом объеме объемной плотности этого компонента во всем материале.

Из соотношения (4) получим известное правило смесей:

$$\langle \sigma \rangle = \vartheta_1 \sigma_1 + \vartheta_2 \sigma_2, \quad (5)$$

где  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — объемные концентрации компонентов,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — тензоры средних напряжений в компонентах. Правило смесей обобщается и на случай большего числа компонентов.

Разложим в равенстве (1) все величины на регулярные и флуктуационные и осредним полученные выражения. Тогда имеем:

$$\langle \sigma \rangle = \langle c \rangle \langle \varepsilon \rangle + \langle c' \varepsilon' \rangle. \quad (6)$$

Если выразить флуктуационные составляющие полей деформаций  $\varepsilon'$  через средние значения, то получим:

$$\varepsilon' = P \langle \varepsilon' \rangle. \quad (7)$$

Тогда эффективные коэффициенты упругости могут быть получены по формуле:

$$c_* = \langle c \rangle + \langle c' P' \rangle. \quad (8)$$

Компоненты тензора  $P'$  должны представлять собой некоторые интегральные операторы, зависящие от координат. Упругое поле в точке должно определяться не только средними значениями напряжений, но оно будет зависеть от напряженного состояния в соседних областях. Вычисление оператора  $P'$  сводится к известной задаче многих тел, и поэтому может быть выполнено лишь приближенно. Рассмотрим различные математические модели, которые с тем или иным приближением позволяют вычислить эффективные характеристики тензора  $c_*$ .

### 3. Виральное разложение

В этом случае для эффективного тензора  $c_*$  используется разложение в ряд по степеням объемной концентрации одного из компонентов:

$$c_* = \sum_{n=0}^{\infty} c^{(n)} \vartheta^n, \quad (9)$$

где  $\vartheta$  — меньшая из концентраций.

Область применения метода ограничена малыми концентрациями одного из компонентов. В этом случае взаимным влиянием включений в матрице можно пренебречь, а среднее напряжение в матрице будет равно приложенному внешнему напряжению  $\sigma_0$ . После решения соответствующей краевой задачи [1] эффективный объемный модуль и эффективный модуль сдвига определяется по формулам [1]:

$$K_* = K_2 \left[ 1 + \frac{3(1 - \nu_2)(K_1 - K_2)\vartheta_1}{2K_2(1 - 2\nu_2) + K_1(1 + \nu_2)} \right] \quad (10)$$

$$\mu_* = \mu_2 \left[ 1 + \frac{15(1 - \nu_2)(\mu_1 - \mu_2)\vartheta_1}{\mu_2(7 - 5\nu_2) + 2\mu_1(4 - 5\nu_2)} \right], \quad (11)$$

где знаком 1 отмечены упругие характеристики включения, а знаком 2 — характеристики матрицы,  $\vartheta_i$  — концентрация компонентов. Частным случаем этой задачи является пористая среда с малой концентрацией пор. Соответствующие формулы для  $K_*$  и  $\mu_*$  имеют вид:

$$K_* = K_2 \left[ 1 - \frac{3(1 - \nu)\vartheta}{2(1 - 2\nu)} \right] \quad (12)$$

$$\mu_* = \mu_2 \left[ 1 + \frac{15(1 - \nu)\vartheta}{(7 - 5\nu)} \right], \quad (13)$$

где  $\vartheta$  — пористость,  $\nu$  — коэффициент Пуассона матрицы.

### 4. Метод самосогласования

Напряженное состояние в матрице в данном методе считается средним по всему композиту, и упругие свойства среды определяются эффективными модулями композита в целом. В методе самосогласования принимается вначале, что первая фаза (компонент) представляет собой сферическое включение в матрице с эффективными свойствами, затем это же предположение делается относительно второй фазы. После решения соответствующих краевых задач

получены следующие соотношения для эффективных упругих модулей [2]:

$$\frac{\vartheta_1}{1 + \alpha \left( \frac{K_1}{K_* - 1} \right)} + \frac{\vartheta_2}{1 + \alpha \left( \frac{K_2}{K_*} - 1 \right)} = 1 \quad (14)$$

$$\frac{\vartheta_1}{1 + \beta \left( \frac{\mu_1}{\mu_*} - 1 \right)} + \frac{\vartheta_2}{1 + \beta \left( \frac{\mu_2}{\mu_*} - 1 \right)} = 1, \quad (15)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)}; \quad \beta = \frac{2(4 - 5\nu)}{15(1 - \nu)} \quad (16)$$

$$\nu = \frac{3K_* - 2\mu_*}{6K_* + 2\mu_*}. \quad (17)$$

В частности для пористых материалов соответствующие формулы имеют вид:

$$\frac{\vartheta}{1 - \alpha} + \frac{1 - \vartheta}{1 + \alpha \left( \frac{K_2}{K_*} - 1 \right)} = 1 \quad (18)$$

$$\frac{\vartheta}{1 - \beta} + \frac{1 - \vartheta}{1 + \beta \left( \frac{\mu_2}{\mu_*} - 1 \right)} = 1 \quad (19)$$

Метод самосогласования может применяться при любых концентрациях компонентов и не имеет существенных недостатков, свойственных методу вириального разложения.

## 5. Корреляционное приближение теории случайных функций

Метод основан на приближении, учитывающем малость влияния упругих полей, находящихся на большом удалении от конкретного включения (компонента). Обычно учитывается лишь влияние упругих полей на данное включение от ближайшего включения. Этот метод применим, если разность модулей упругости компонентов невелика. Расчетные зависимости эффективных характеристик содержат корреляционные функции упругих модулей компонентов, которые предполагаются известными. Для определения этих функций решается (приближенно) статистически нелинейная краевая задача теории упругости, которая линеаризуется с учетом вышеуказанного приближения. Уравнение равновесия запишем в операторном виде [3]:

$$LZ = 0, \quad (20)$$

$$\text{где } L_{il} = \nabla_k c_{ijkl} \nabla_m; \quad Z_i = U_i. \quad (21)$$

Для изотропных компонентов:

$$c_{ijkl} = KV + 2\mu D \quad (22)$$

$$V_{ijk} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{km}$$

$$D_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{km} \right).$$

Разбивая операторы и функции на осредненную и флуктуационную составляющие и осредняя получившиеся выражения, имеем:

$$\langle L \rangle \langle Z \rangle + \langle L' Z' \rangle = 0. \quad (23)$$

Уравнение для осредненных напряжений и деформаций должно содержать эффективный тензор  $c_*$ . Тогда рассмотрим эффективный оператор  $L_*$ :

$$L_* = \langle L \rangle + \langle L' X \rangle, \quad Z' = X \langle Z \rangle, \quad (24)$$

где  $X$  — неизвестный оператор.

Вычтем (23) из (20), тогда:

$$\langle L \rangle Z' + L' \langle Z \rangle + (L' Z' - \langle L' Z' \rangle) = 0. \quad (25)$$

Скобка, содержащая разность произведений флуктуаций будет весьма малой по сравнению предыдущими слагаемыми, поэтому в корреляционном приближении ею пренебрегают, т.е.:

$$\langle L \rangle Z' + L' \langle Z \rangle = 0. \quad (26)$$

Введем регулярный оператор  $M_o$  равенством:

$$M_o \langle Z \rangle = -J, \quad (27)$$

где  $J$  — единичный оператор,  $M_o$  — интегральный оператор, ядром которого является тензор Грина оператора  $\langle L \rangle$ . Можно показать, что оператор  $X$  связан с оператором  $M_o$  формулой:

$$X + M_o L' = 0. \quad (28)$$

Тогда из (24) имеем:

$$L_* = \langle L \rangle + \langle L' M_o L' \rangle = \langle L \rangle + M_o \langle L' L' \rangle. \quad (29)$$

Последнее выражение содержит корреляционную функцию упругих модулей. В явном виде в случае одноосного растяжения  $\langle \sigma_1 \rangle = E_* \langle e_1 \rangle$  из работы [4] имеем вместо (29):

$$E_* = \langle E \rangle - \frac{\langle 2\lambda + 7\mu \rangle}{15\langle \mu \rangle \langle \lambda + 2\mu \rangle} [(3D_{\lambda\lambda} + 4D_{\mu\lambda})(1 - 2\nu) + 4D_{\mu\mu}], \quad (30)$$

где  $D_{\lambda\lambda} = c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2$ ;  $D_{\mu\lambda} = c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2)$ ;  $D_{\mu\mu} = c_1 c_2 (\mu_1 + \mu_2)^2$ ,

где  $\lambda_i, \mu_i$  — коэффициенты упругости компонентов,  $\lambda_i = K_i - \frac{2}{3}\mu_i$ ,  $K$  — объемный модуль,  $\mu$  — модуль сдвига,  $c_1, c_2$  — объемные концентрации компонентов.

При вычислении корреляционных функций упругих модулей использовалось показательное распределение элементов структуры композита. Применение этого распределения обосновано в работе [5].

## 6. Метод сингулярного приближения

В корреляционном приближении учитываются лишь парные взаимодействия упругих полей между элементами структуры. Сингулярное приближение позволяет учесть все типы многочастичных взаимодействий. Однако этот учет удастся осуществить за счет некоторых упрощающих предположений, которые приводят к размазыванию упругого поля по зерну неоднородности и обращения в ноль дисперсии напряжений и деформаций в пределах фазы.

Основой метода является приближение, основанное на разложении в степенной ряд по операторам  $X$  (по формуле (28)) эффективного оператора  $L_*$ . При этом члены ряда зависят только от сингулярной части производных тензора Грина. Это соответствует постоянству упругого

поля в пределах каждой фазы. Степенной ряд для композитов с изотропными компонентами удастся просуммировать. В результате получим расчетные формулы для эффективных модулей упругости [6]:

$$K_* = \langle K \rangle - \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 (K_1 - K_2)^2}{\vartheta_1 K_2 + \vartheta_2 K_1 + a}, \quad (31)$$

$$\mu_* = \langle \mu \rangle - \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{\vartheta_1 \mu_2 + \vartheta_2 \mu_1 + b} \quad (32)$$

$$a = \frac{4}{3} \langle \mu \rangle, \quad b = \frac{1}{6} \frac{\langle \mu \rangle \langle 9K + 8\mu \rangle}{\langle K + 2\mu \rangle}. \quad (33)$$

Угловыми скобками обозначены средние значения, определяемыми по методу смесей  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — объемные концентрации компонентов.

В частности для пористых композитов имеем:

$$K_* = \vartheta_2 K_2 - \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 K_2^2}{\vartheta_1 K_2 + a_1}, \quad (34)$$

$$\mu_* = \vartheta_2 \mu_2 - \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 \mu_2^2}{\vartheta_1 \mu_2 + b_1}, \quad (35)$$

$$a_1 = \frac{4}{3} \vartheta_2 \mu_2, \quad b_1 = \frac{1}{6} \frac{\vartheta_2 \mu_2 \langle 9K_2 + 8\mu_2 \rangle}{\langle K_2 + 2\mu_2 \rangle}. \quad (36)$$

## 7. Эффективные упругие модули слоистых материалов

Рассматриваются материалы со слоистой структурой. Все слои обладают свойствами изотропии и имеют одинаковую толщину. В целом такой материал будет трансверсально изотропным [7] и содержать пять независимых констант  $E_1, E_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1$ . Определение эффективных значений констант в таком материале имеется в работе [8]. В плоскости изотропии — это величины  $E_1^*, \mu_1^*, \nu_1^*$ , в направлении, перпендикулярном слоям  $E_2^*, \mu_2^*$ . Коэффициент Пуассона в этом направлении зависит от  $E_1^*, \nu_1^*$  по формуле:

$$E_1^* \nu_1^* = E_2^* \nu_2^*. \quad (37)$$

После решения краевой задачи теории упругости при трансверсальной изотропии слоистого материала получены следующие соотношения для эффективных модулей [9]:

$$c_{11}^* = \langle \chi \rangle - M_\chi^{-1} D_\lambda, \quad (38)$$

$$c_{12}^* = \langle \lambda \rangle - M_\chi^{-1} D_\lambda, \quad (39)$$

$$c_{13}^* = \langle \lambda \rangle - M_\chi^{-1} D_{\lambda\chi}, \quad (40)$$

$$c_{33}^* = \langle \chi \rangle - M_\chi^{-1} D_\chi, \quad (41)$$

$$c_{44}^* = \langle \mu \rangle - M_\mu^{-1} D_\mu, \quad (42)$$

где

$$M_\chi = \vartheta_1 \chi_2 + \vartheta_2 \chi_1,$$

$$D_{xy} = \vartheta_1 \vartheta_2 (x_1 - x_2)(y_1 - y_2),$$

$$\chi = \lambda + 2\mu; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Эффективные модули  $c_{ij}^*$  связаны с техническими модулями  $E_i^*$  и  $\nu_i^*$  соотношениями (значок \* далее не указан)

$$c_{11} = \frac{E_1^2 E_2}{\Delta} \left( \frac{1}{E_1} - \frac{\nu_1^2}{E_2} \right), \quad (43)$$

$$c_{12} = \frac{E_1^2 E_2}{\Delta} \left( \frac{\nu_1}{E_1} + \frac{\nu_1^2}{E_2} \right), \quad (44)$$

$$c_{13} = \frac{E_1^2 E_2}{\Delta} \nu_2 \frac{1 + \nu_1}{E_1}, \quad (45)$$

$$c_{33} = \frac{E_2^2}{\Delta} (1 - \nu_1^2), \quad (46)$$

где  $\Delta = (1 + \nu_1) [(1 - \nu_1)E_2 - 2\nu_2^2 E_1]$ ;  $\nu_2 = \frac{E_1}{E_2} \nu_1$ .

## 8. Эффективные модули упругости матричных систем

Рассматриваются регулярные среды, когда все включения имеют одинаковую форму и размеры и расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. Таким образом, имеется периодическая (ячеистая) структура. Предполагается, что модули упругости компонентов известны. В работе [10] и [11] получены границы вилки, внутри которых имеются точные значения эффективных модулей  $K_*$  и  $\mu_*$  таких материалов. Для этого использованы решения соответствующих краевых задач теории упругости. В работе [11] границы вилки для  $K_*$  и  $\mu_*$  вычислены для кубической периодической решетки с включениями кубической формы. Элементарная ячейка представляет собой куб с ребром  $2a$ , в который вложен другой куб, причем ребра ячейки и кубика включения параллельны. Будем обозначать величины, относящиеся к матрице индексом  $m$ , а к включению — индексом  $i$ , верхнюю границу вилки для эффективных модулей будем отмечать индексом  $u$ , а нижнюю — индексом  $l$ . Окончательный вид формул для границ вилки следующий [11]:

$$\mu_u = \mu_m M [\alpha \mu_m + (1 - \alpha) M]^{-1} \quad (47)$$

$$\mu_l = (1 - \alpha) \mu_m + \frac{\alpha \mu_i \mu_m}{\alpha^2 \mu_m + (1 - \alpha^2) \mu_i} \quad (48)$$

$$\mu_i \leq \mu_* \leq \mu_u \quad (49)$$

$$K_u = \vartheta_m K_m + \vartheta_i K_i + 3 \left[ \frac{(K_m f_1 + f_2 f_3)^2}{f_1 + f_3} - f_1 K_m^2 - f_2^2 f_3 \right] \quad (50)$$

$$K_l = K_R + \frac{(1 - \alpha^2) \mu_m (K_m - K_R)^2}{K_m (3K_m + \mu_m)} + \alpha^2 \frac{(1 - K_R f_4)^2}{f_4 + 3f_5}, \quad (51)$$

где

$$K_R = (\vartheta_m K_m^{-1} + \vartheta_i K_i^{-1})^{-1}$$

$$f_1 = \frac{1 - \alpha}{3K_m + 4\mu_m}$$

$$f_2 = \alpha^2 K_i + (1 - \alpha^2) K_M$$

$$f_3 = \alpha \{ 3f_2 + 4 [\alpha^2 \mu_i + (1 - \alpha^2) \mu_m] \}^{-1}$$

$$f_4 = \frac{1 - \alpha}{K_m} + \frac{\alpha}{K_i}$$

$$f_5 = \frac{1 - \alpha}{\mu_m} + \frac{\alpha}{\mu_i}$$

$$K_l \leq K_* \leq K_u.$$

## 9. Заключение

В работе рассмотрены различные математические модели, позволяющие теоретически вычислить эффективные упругие характеристики композитов. Следует отметить, что все эти модели были разработаны в 60 ÷ 70-х годах XX века. Дальнейшее развитие эти методы и модели получили в связи с появлением и внедрением компьютерных технологий. В частности, значительное продвижение в этом направлении было достигнуто с появлением пакетов прикладных программ, основанных на методе конечных элементов. Решение краевых задач с помощью этих пакетов осуществлялось как для регулярных структур, так и для сред со случайным распределением компонентов. Дальнейшее развитие получило математическое моделирование вязкоупругих и упругопластических свойств композитов. Применение этих моделей было использовано для решения различных прикладных задач пластичности и прочности композитов.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривоглаз М. А., Черевко А. С. Об упругих модулях твердой смеси // Физика металлов и металловедение. 1959. Т.8. № 2. С. 161-164.
2. Канаун С.К. Метод самосогласованного поля в задаче об эффективных свойствах упругого композита // Прикладная механика и техническая физика. 1975. №4. С. 194.
3. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
4. Архипов И.К., Толоконников Л.А. Эффективные соотношения между напряжениями и деформациями в корреляционной теории упругопластических деформаций // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. Т.2. 1984. С.196–200.
5. Архипов И.К., Герлейн О.В. Корреляционные характеристики пластической жесткости формоизменения хаотически армированного композита. // Известия вузов. Математика. №7, 1982. С. 66–70.
6. Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. Вычисление эффективных упругих модулей композиционных материалов с учетом многочастичных взаимодействий // Прикладная механика и техническая физика. 1969. №1. С. 51.
7. Лившиц И.М., Розенцвейг Л.Н. К теории упругих свойств поликристаллов. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1946. Т.11. С. 967.
8. Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. Статистическое описание упругого поля слоистых материалов. // Инженерно-физический журнал. Механика твёрдого тела. 1968. №4. С. 93.
9. Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. Эффективные модули упругости композита, составленного из анизотропных слоев // Механика полимеров. 1975. №3. С. 408.
10. Yeh R.H.T. Variational principles of elastic moduli of composite materials. // J. App. Phys. 1970. №8. p. 3353.
11. Yeh R.H.T. Variational bounds of the elastic moduli of twophase materials. // J.App. Phys. 1971. №3. p. 1101.

## REFERENCES

1. Krivoglaz M. A., Cherevko A.S. 1959, «About elastic modules of a solid mixture», *Metal Physics and metal science*, vol.8, no. 2, pp. 161-164.
2. Kanaun S. K. 1975, «Self-consistent field Method in the problem of effective properties of an elastic composite», *Applied mechanics and technical physics*, no. 4, pp. 194.
3. Shermergor T.D. 1977, *Theory of elasticity of micro-homogeneous media*. Moscow. Nauka, 399 pp.
4. Arkhipov I. K., Tolokonnikov L. A. 1984, «Effective relations between stresses and deformations in the correlation theory of elastic-plastic deformations», *Izvestiya ANSSSR. Solid mechanics*, vol.2. pp. 196-200.
5. Arkhipov I. K., Gerlein O. V. 1982, «Correlation characteristics of the plastic stiffness of a chaotically reinforced composite», *News of universities. Mathematics*, no. 7, pp. 66-70.
6. Fokin A. G., Shermergor T. D. 1969, «Calculation of effective elastic modules of composite materials taking into account multiparticle interactions», *Applied mechanics and technical physics*, no. 1, pp. 51.
7. Livshits I. M., Rosenzweig L. N. 1946, «On the theory of elastic properties of polycrystals», *Journal of experimental and theoretical physics*, vol.11, pp. 967.
8. Fokin A. G., Shermergor T. D. 1968, «Statistical description of the elastic field of layered materials», *Engineering and physical journal. Solid mechanics*, no. 4, pp. 93.
9. Fokin A. G., Shermergor T. D. 1975, «Effective elastic modulus of a composite composed of anisotropic layers», *Mechanics of polymers*, no. 3, pp. 408.
10. Yeh R. H. T. 1970, «Variational principles of elastic moduli of composite materials», *J. App. Phys*, no. 8, pp. 3353.
11. Yeh R. H. T. 1971, «Variational bounds of the elastic moduli of twophase materials», *J.App. Phys*, no. 3, pp. 1101.

Получено 11.04.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 621.2.082.18

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-272-291

**Эмпирические математические экспертные модели  
пластичности, прочности и износостойкости материалов  
на примере стали Р18**

А. Д. Бреки, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, В. Ю. Кузовлев

**Александр Джалюльевич Бреки** — кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).

*e-mail:* albreki@yandex.ru

**Александр Евгеньевич Гвоздев** — доктор технических наук, профессор, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail:* gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

**Ольга Владимировна Кузовлева** — кандидат технических наук, доцент, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

*e-mail:* kusovleva@yandex.ru

**Владислав Юрьевич Кузовлев** — старший преподаватель, полковник полиции, Московский университет МВД России имени В.Я. Кикотя (г. Москва).

*e-mail:* kusovleva@yandex.ru

**Аннотация**

В работе приведен анализ результатов лабораторных экспериментальных исследований параметров, характеризующих пластичность, прочность и износостойкость инструментальной стали Р18, полученных в ходе материаловедческих экспертиз. Разработаны новые эмпирические математические экспертные модели зависимости показателей пластичности и прочности стали Р18 от температуры. Получены эмпирические математические экспертные модели зависимости механических свойств и износостойкости стали Р18 от различных факторов. Показана возможность аналитического представления сложных экспериментальных графических зависимостей механических и трибологических свойств стали Р18 от различных факторов в целях использования в судебно-экспертной практике.

*Ключевые слова:* аппроксимация, износостойкость, инструментальная сталь Р18, математическая модель, пластичность, прочность, судебная металловедческая экспертиза, температурная зависимость, трение.

*Библиография:* 52 названий.

**Для цитирования:**

А. Д. Бреки, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, В. Ю. Кузовлев Эмпирические математические экспертные модели пластичности, прочности и износостойкости материалов на примере стали Р18 // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 272–291.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 621.2.082.18

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-272-291

**Empirical mathematical models of plasticity, strength and wear resistance of materials on the example of P18 steel**

A. D. Breki, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, V. Yu. Kuzovlev

**Alexander Dzhalyulyevich Breki** — candidate of technical Sciences, associate Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).

*e-mail:* albreki@yandex.ru

**Alexander Evgenievich Gvozdev** — doctor of engineering, Professor, Professor, Tula state pedagogical University L.N. Tolstoy (Tula).

*e-mail:* gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

**Olga Vladimirovna Kuzovleva** — candidate of technical Sciences, docent, docent, Russian State University of justice (Moscow).

*e-mail:* kusovleva@yandex.ru

**Vladislav Yurievich Kuzovlev** — senior lecturer, police Colonel, Moscow University of the Ministry of internal Affairs of Russia named after V.Ya. Kikotya (Moscow).

*e-mail:* kusovleva@yandex.ru

**Abstract**

The paper analyzes the results of laboratory experimental studies of parameters that characterize the plasticity, strength and wear resistance of P18 tool steel obtained during material science examinations. New empirical mathematical expert models have been developed for the dependence of P18 steel ductility and strength on temperature. Empirical mathematical expert models of the dependence of mechanical properties and wear resistance of P18 steel on various factors are obtained. The possibility of analytical representation of complex experimental graphical dependencies of mechanical and tribological properties of P18 steel on various factors for use in forensic practice is shown.

*Keywords:* approximation, wear resistance, P18 tool steel, mathematical model, plasticity, strength, forensic examination of metals and alloys, temperature dependence, friction.

*Bibliography:* 52 titles.

**For citation:**

A. D. Breki, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, V. Yu. Kuzovlev, 2020, "Empirical mathematical models of plasticity, strength and wear resistance of materials on the example of P18 steel", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 272–291.

## 1. Введение

Разработка ресурсосберегающих технологий при получении заготовок металлорежущего инструмента из стали Р18 является актуальной задачей современного металловедения и обработки металлов давлением. Достигается это различными методами обработки металлических материалов в силовых, скоростных и различных других энергетических полях. Среди этих методов особое место занимают методы, связанные с использованием состояния сверхпластичности и повышенной пластичности [1].

С другой стороны, металлорежущий инструмент из стали Р18 должен обладать высокой износостойкостью, неразрывно связанной с её различными механическими свойствами и состояниями. Кроме того, криминалистическое исследование подобных состояний металлов и сплавов является актуальной задачей металловедческой судебной экспертизы, которая является одним из средств доказывания в системе уголовного судопроизводства. Более глубокое использование специальных знаний в области современного металловедения при раскрытии и расследовании преступлений должно опираться как на практические, так и на эмпирические разработки в этой области.

## 2. Основной текст статьи

Металловедческие аспекты в проблеме повышения износостойкости инструмента имеют первостепенное значение, хотя многие возможности в этом плане уже реализованы. Роль структурных составляющих сталей различных классов и каждой структурной основы предстоит ещё обстоятельно изучить, учитывая большое количество факторов, определяющих износостойкость в парах трения [2]. Следует отметить, что износостойкость зависит от реологического поведения материала поверхностного слоя режущего инструмента в связи с наличием высоких температур на фактической площади контакта и пластического течения субмикро- и микронеровностей. В механике сплошных сред для количественного описания влияния структуры на реологическое поведение материалов в состоянии сверхпластичности используются уравнения состояния [3]:

$$\Phi(\sigma, \xi, D_k, T, t, \dots) = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma$  — напряжение течения;  $\xi$  — скорость деформации;  $D_k$  — совокупность параметров, характеризующих состояние структуры материала;  $T$  — температура деформации;  $t$  — время. От приведённых выше факторов также зависит и износостойкость.

В силу сложности процессов пластического деформирования и, тем более, трения и изнашивания, часто используются однофакторные математические модели, выражающие зависимости пластичности, прочности и износостойкости от какого-либо существенного фактора. В частности, для выявления и анализа состояния сверхпластичности определяют зависимость пластичности стали от температуры, имеющую в общем случае сигмоидальный вид [1]. Еникеев Ф.У. в работе [4], например, предлагает аппроксимировать сигмоидальную кривую сверхпластичности кубическим полиномом. Однако следует отметить, что кривые сверхпластичности далеко не всегда имеют чисто сигмоидальный характер. Более того, в силу сложности даже однофакторных зависимостей пластичности, прочности и износостойкости от различных факторов, не всегда удаётся определить удовлетворительные аппроксимирующие функции. История физики знает немало примеров, когда нелинейная функция на коротком участке изменения переменной первоначально аппроксимировалась как линейная. В трибологии, в силу высокой сложности изучаемых явлений, часто выявляются такие экспериментальные зависимости, в которых одновременно присутствуют черты нелинейных и линейных функций.

В связи с этим, в границах данной работы реализована аппроксимация экспериментальных результатов различных авторов, проводивших исследования пластичности, прочности и

износостойкости инструментальной стали Р18, посредством использования сложных функций, объединяющих в себе линейные и нелинейные зависимости. Для этой цели были использованы функции, разработанные Бреки А.Д. при анализе результатов испытаний различных материалов на трение и износ в области трибологии [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35]. Одна из таких функций в общем виде записывается следующим образом [15, 16, 17, 18, 19, 20]:

$$\tilde{\theta}_{\Sigma}(x) = C + \sum_{i=1}^k \frac{\Delta C_i}{1 + \exp(-r_i(x - x_{ci}))}, \quad (2)$$

где  $C$  — постоянная,  $r_i$  — параметр, характеризующий резкость перехода (скачкообразного либо плавного) от одного постоянного значения функции к другому,  $\Delta C_i$  — разности постоянных значений функции до и после перехода,  $x_{ci}$  — абсциссы центров перехода,  $k$  — количество переходов функции от одного постоянного значения к другому постоянному значению. Функция (2) представляет собой алгебраическую сумму сигмоидальных (логистических) функций и постоянной.

Проинтегрировав функцию [2] получим [6, 11, 17]:

$$\tilde{\beta}_{\Sigma}(x) = Cx + C_{\Sigma} + \sum_{i=1}^k \frac{\Delta C_i}{r_i} \cdot \ln[1 + \exp(r_i(x - x_{ci}))], \quad (3)$$

где  $C_{\Sigma}$  — постоянная, являющаяся суммой постоянных от интегрирования отдельных слагаемых из (2). Параметры, входящие в выражение, стоящее под знаком суммы в [3] удобно для анализа систематизировать в виде «матрицы параметров» следующим образом:

$$M_{p\beta} = \begin{pmatrix} \Delta C_1 & \Delta C_2 & \dots & \Delta C_i & \dots & \Delta C_k \\ r_1 & r_2 & \dots & r_i & \dots & r_k \\ x_{c1} & x_{c2} & \dots & x_{ci} & \dots & x_{ck} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

следует отметить, что резкость перехода определяется из соотношения:

$$r_i \approx \frac{\pi^2}{\Delta x_i}, \quad (5)$$

где  $\Delta x_i$  — ширина области перехода функции, стоящей под знаком суммы в правой части (2). В случае исследования двух и более объектов, для множеств параметров, находящихся в строках (4) определяются средние значения и показатели вариации, позволяющие детальнее оценить, проанализировать и сравнить рассматриваемые явления.

Функция (3) использована для аппроксимации экспериментальных точек в границах данной работы. Для реализации аппроксимации осуществлялись следующие действия:

1. в результате детального рассмотрения экспериментальных точек выделяются области, которые аппроксимируются линейными функциями, с учётом специфики рассматриваемого физического явления;
2. последовательно выявляются абсциссы и ординаты экспериментальных точек  $(x_{ci}, g(x_{ci}))$ , в которых одна линейная функция сменяется другой линейной функцией;
3. посредством использования метода наименьших квадратов реализуется аппроксимация  $k$  выделенных участков линейными функциями, которые приводятся к виду:

$$g_n(x) = g(x_{cn}) + (x - x_{cn}) \sum_{i=1}^n \Delta C_i, \quad n = 1, 2, \dots, k$$

в результате чего определяются коэффициенты  $\Delta C_i$ ;

4. функция  $\tilde{\beta}_{\Sigma}(x)$  стремится к «ломаной» линии при  $r_i \rightarrow \infty$ , а сами параметры  $r_i$  выбираются из условия:

$$\left| \tilde{\beta}_{\Sigma}(x) - g_n(x) \right| < \varepsilon_n,$$

в малой  $\delta$ -окрестности  $x_{cn}$ , при этом  $\varepsilon_n$  подбирается также и с учётом механизмов изучаемых процессов;

5. постоянные  $C$  и  $C_{\Sigma}$  находятся при аппроксимации начального нулевого линейного участка методом наименьших квадратов.
6. выявленные параметры подставляются в (3), в результате чего определяется аналитическое и последующее графическое представление результатов экспериментального исследования.

Известно, что состояние сверхпластичности у быстрорежущих сталей, полученных способом традиционного металлургического передела, впервые было обнаружено А.П. Гуляевым и Л.М. Сармановой при кручении в изотермических условиях при температурах, близких к температурам диффузионных фазовых превращений [1, 5]. Было установлено, что в быстрорежущих сталях не происходит монотонного повышения пластичности при увеличении температуры, а наблюдается ее резкое изменение, обусловленное наличием фазовых превращений в частности в стали Р18. На рис. 1 приведены экспериментальные точки, полученные А.П. Гуляевым, дискретно выражающие зависимость пластичности стали Р18 от температуры.

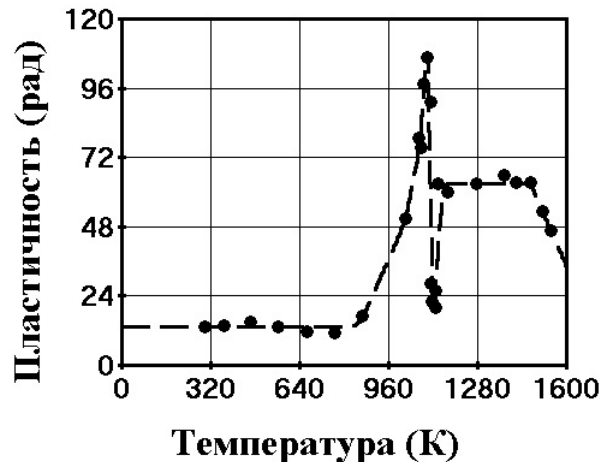


Рис. 1: Зависимость пластичности стали Р18 от температуры при кручении.

При анализе данных А.П. Гуляева по пластичности было выделено  $k = 7$  областей, которые аппроксимируются линейными функциями. В результате реализации описанных выше действий 1 – 6 установлено, что экспериментальные точки хорошо аппроксимируются следующей сложной функцией (пунктирная линия на рис. 1):

$$\begin{aligned} \varphi(T) = & 2\pi[2,1 + 0,34 \ln(1 + \exp(0,1(T - 850))) + 0,45 \ln(1 + \exp(0,1(T - 1020))) + \\ & + 0,4 \ln(1 + \exp(0,34(T - 1072))) - 1,6 \ln(1 + \exp(0,7(T - 1100))) + \\ & + 1,6 \ln(1 + \exp(0,7(T - 1117,5))) - 1,075 \ln(1 + \exp(0,2(T - 1154))) - \\ & - 0,05 \ln(1 + \exp(0,7(T - 1470)))], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\varphi$  — параметр, выражающий пластичность, в радианах (в случае отсутствия множителя  $2\pi$  пластичность измеряется в оборотах),  $T$  — термодинамическая температура.

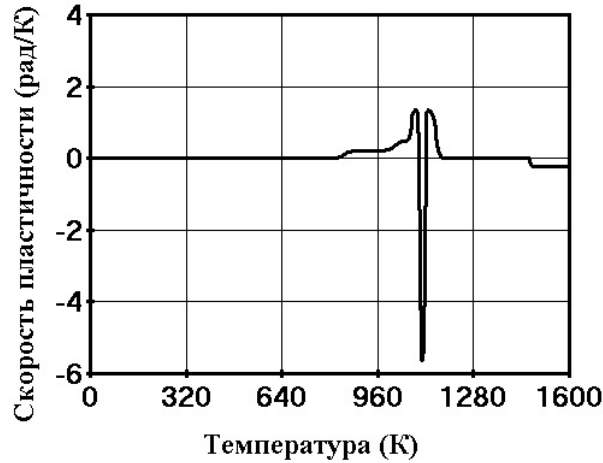


Рис. 2: Зависимость «скорости» изменения пластичности стали P18 относительно роста температуры.

Дифференцируя функцию (2) получим зависимость «скорости» изменения пластичности относительно роста температуры. График данной зависимости приведён на рис. 2. Полученная после дифференцирования (2) зависимость имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(T)}{dT} = 2\pi & \left[ \frac{0,034}{1 + \exp(-0,1(T - 850))} + \frac{0,045}{1 + \exp(-0,1(T - 1020))} + \right. \\ & + \frac{0,136}{1 + \exp(-0,34(T - 1072))} - \frac{1,12}{1 + \exp(-0,7(T - 1100))} + \frac{1,12}{1 + \exp(-0,7(T - 1117,5))} - \\ & \left. - \frac{0,215}{1 - \exp(-0,2(T - 1154))} - \frac{0,035}{1 + \exp(-0,7(T - 1470))} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае отсутствия множителя  $2\pi$  в (7) скорость изменения пластичности измеряется в оборотах, делённых на кельвин. Рисунок 2 очень хорошо иллюстрирует скачкообразное изменение пластичности в случае перехода стали P18 в состояние сверхпластичности.

Как видно из рис. 2 производная обращается в ноль в двух точках участка графика, описывающего состояние сверхпластичности (1098K; 108 рад) и (1119,7K; 18,5 рад).

Из рис. 1 следует, что до температуры 825K ( $\approx 550^\circ C$ ) пластичность, которая характеризуется углом  $\varphi$ , не изменяется. Соответственно скорость её изменения относительно роста температуры равна 0 рад/К (рис. 2). После температуры 825K, кривая пластичности идет резко вверх и при температуре 1098K ( $\approx 825^\circ C$ ) достигает максимума, при этом угол поворота до разрушения составляет 108,23 рад ( $\approx 17$  оборотов). Это в  $\approx 8$  раз больше, чем при температурах до 825K. Это явление и характеризуется как сверхпластичность быстрорежущей стали P18 [36]. Сопоставление температуры максимума пластичности с температурой начала превращения эвтектоида в аустенит свидетельствует о том, что максимум пластичности совпадает с самой высокой температурой существования легированного феррита ( $\alpha$ -фазы) [1].

С началом образования аустенита пластичность резко снижается и к моменту завершения  $\alpha$ - $\gamma$ -превращения 1133K ( $860^\circ C$ ) она составляет  $\approx 19$  рад. При повышении температуры более 1133K пластичность стали P18 снова возрастает (угол поворота до разрушения достигает  $20\pi$  рад или 10 оборотов), в интервале температур 1173...1473K ( $900...1200^\circ C$ ) остается постоянной, а затем снижается. Таким образом, по данным автора [5], приведенная температурная зависимость пластичности быстрорежущей стали P18 совершенно четко показывает явление СП вблизи критической точки  $A_{c1}$  (соответствующей превращению перлита в аустенит и началу перекристаллизации) и резкое снижение его при фазовом превращении.

Зависимость крутящего момента, действующего на образец из стали Р18 от термодинамической температуры в виде экспериментальных точек по данным А.П. Гуляева показана на рис. 3.

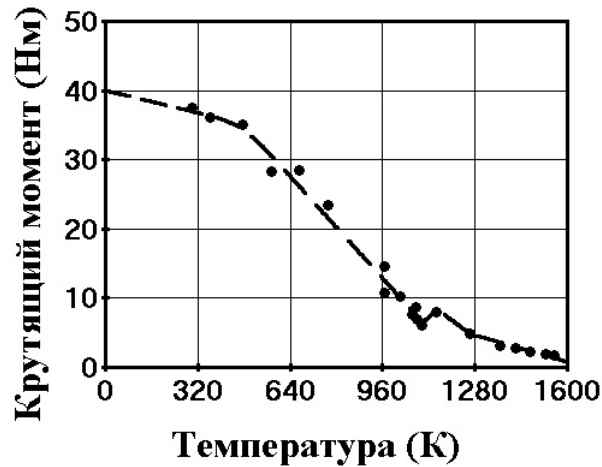


Рис. 3: Зависимость крутящего момента от температуры для стали Р18.

При анализе данных А.П. Гуляева по крутящему моменту было выделено  $k = 4$  области, которые аппроксимируются линейными функциями. В результате реализации описанных выше действий 1 – 6 установлено, что экспериментальные точки хорошо аппроксимируются следующей функцией (пунктирная линия на рис. (3)):

$$M_{tor}(T) = 40 - 0,01T - 1,2 \ln(1 + \exp(0,03(T - 473))) + 0,45 \ln(1 + \exp(0,2(T - 1100))) - \\ - 0,76 \ln(1 + \exp(0,1(T - 1147))) + 0,25 \ln(1 + \exp(0,08(T - 1260))), \quad (8)$$

где  $M_{tor}$  — крутящий момент, параметр, характеризующий прочность (сопротивление деформации) образца из стали Р18.

Как отмечено выше, до температуры 825К пластичность, не изменяется, а сопротивление деформации, оцениваемое крутящим моментом  $M_{tor}$ , снижается. Прочность уменьшается и при резком росте пластичности, однако отмечается аномалия и в ее свойствах [1, 5]: крутящий момент монотонно снижается по мере повышения температуры и только в области температур превращения наблюдается некоторое его повышение с последующим снижением.

В результате оцифровки полученных графиков функций (рис. 1 и рис. 3) с шагом 10К установлена зависимость параметра пластичности  $\varphi$  от крутящего момента  $M_{tor}$  при неизотермических условиях (рис. 4).

Зависимость, показанная на рис. 4, аппроксимируется следующей функцией (сплошная линия на рис. 4):

$$\varphi(M_{tor}) = 18,1M_{tor} + 20 - 1,207 \ln(1 + \exp(15(M_{tor} - 2,36))) - \\ - 0,627 \ln(1 + \exp(15(M_{tor} - 8,95))) + 0,32 \ln(1 + \exp(15(M_{tor} - 10,56))) + \\ + 1,53 \ln(1 + \exp(3(M_{tor} - 18,1))), \quad M_{tor} > 0. \quad (9)$$

График функции (9) отлично проходит через экспериментальные точки, за исключением отрезка значений крутящего момента [5, 6, 7, 8] длиной всего 2,2 Нм. Только на данном отрезке наблюдается большой разброс значений параметра пластичности от 18,5 до 108 радиан (пунктирная линия на рис. 4). Именно при данных диапазонах значений параметров было определено состояние сверхпластичности.

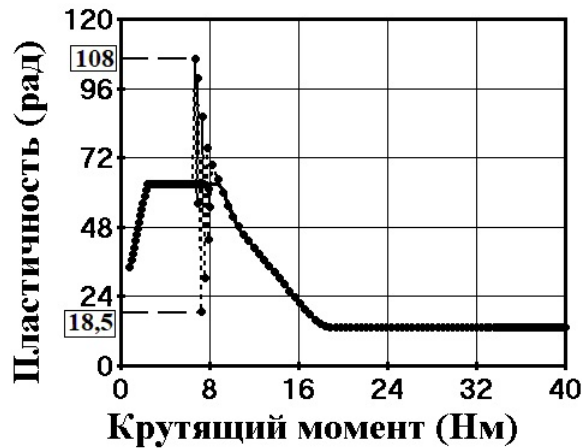


Рис. 4: Зависимость пластичности стали P18 от крутящего момента в неизотермических условиях.

Как отмечено выше, при получении заготовок металлорежущего инструмента из стали P18 особое место занимают методы, связанные с использованием состояния сверхпластичности и повышенной пластичности [1]. С другой стороны, явление трения и износа готового инструмента связано с возникновением данных состояний в локальных участках фактической площади контакта с обрабатываемой деталью.

Известно, что фактическая площадь контакта в общем виде определяется из соотношения [37]:

$$A_r = \frac{A_a \cdot p_a}{c_T \cdot \sigma_T}, \quad (10)$$

где  $A_r$  — фактическая площадь контакта,  $A_a$  — номинальная площадь контакта,  $p_a$  — номинальное давление,  $A_a p_a = P_N$  — нормальная сила, прижимающая контактирующие тела друг к другу,  $c_T$  — безразмерный коэффициент,  $\sigma_T$  — предел текучести. Фактическое давление в общем случае определяется по формуле:

$$p_r = c_T \cdot \sigma_T. \quad (11)$$

Соответственно фактическое давление прямо пропорционально пределу текучести и при его инвариантности оно остаётся постоянным, на что указывается также в работах Н.Б. Демкина и Д. Мура [42, 43]. Согласно обширным экспериментальным и теоретическим исследованиям Хохлова В.М. [37, 38, 39, 40, 41], базирующихся на результатах широкого круга авторов, коэффициент  $2 < c_T < 2,139$ . Эти данные соответствуют выводам работы Петрусевича А.И. [44], где установлено, что напряжения на микронеровностях практически всегда будут иметь величину, превышающую предел текучести материала. В работе академика Ишлинского А.Ю. [45] показано, что для перевода сферического выступа от упругой деформации к пластической необходимо на площадке контакта создать напряжения не менее утроенного предела текучести. По данным Боудена Ф.П. и Тabora Д. [46] необходимо создать напряжение такой же величины для перевода в пластическое состояние неровностей с углами при вершине близкими к  $180^\circ$ . Таким образом, можно предположить, что коэффициент  $c_T$  является переменным и изменяется в пределах от 2 до 3. Для одного и того же материала может изменяться и предел текучести.

Из материаловедения известно, что предел текучести закалённых сталей изменяется при отпуске. Зависимость предела текучести стали P18 от температуры отпуска в виде экспериментальных точек по данным В.Н. Виноградова и Г.М. Сорокина [2] показана на рис. 5.

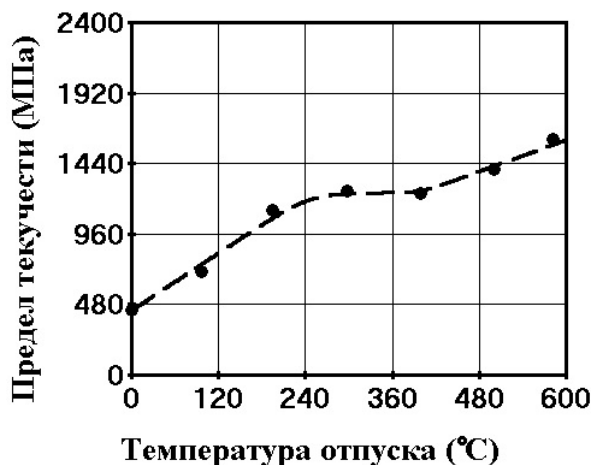


Рис. 5: Зависимость предела текучести стали Р18 от температуры отпуска.

При анализе данных по пределу текучести было выделено  $k = 2$  области, которые аппроксимируются линейными функциями. Зависимость, показанная на рис. 5, аппроксимируется следующей функцией:

$$\sigma_{0,2}(T) = 440 + 3,25t_t - 64 \ln(1 + \exp(0,05(t_t - 245))) + 17,3 \ln(1 + \exp(0,1(t_t - 400))), \quad (12)$$

где  $\sigma_{0,2}$  — условный предел текучести,  $t_t$  — температура отпуска.

Результаты многих исследований показывают зависимость предела текучести различных материалов от температур, при которых проводились механические испытания [47, 48, 49, 50, 51]. Приведённые данные подтверждают высокую структурную чувствительность стали Р18 к тепловому воздействию [2]. Такие сильные изменения предела текучести Р18 могут вызвать соответствующие изменения её износостойкости в условиях эксплуатации, когда режимы работы постоянно изменяются, а контролировать их не всегда возможно.

Зависимость износостойкости стали Р18 от температуры отпуска в виде экспериментальных точек по данным В.Н. Виноградова и Г.М. Сорокина показана на рис. 6.

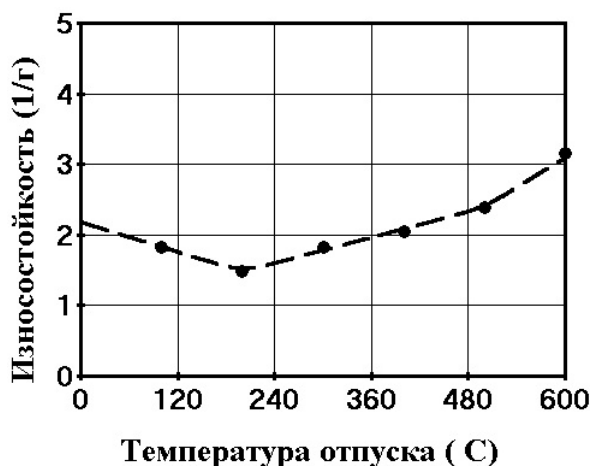


Рис. 6: Зависимость износостойкости стали Р18 от температуры отпуска.

При анализе данных В.Н. Виноградова и Г.М. Сорокина по износостойкости также было выделено  $k = 2$  области, которые аппроксимируются линейными функциями. Зависимость,

показанная на рис. 6, аппроксимируется следующей функцией:

$$I_m(t_t) = 2,18 - 0,0035t_t + 0,0654 \ln(1 + \exp(0,1(t_t - 200))) + 0,04 \ln(1 + \exp(0,1(t_t - 500))), \quad (13)$$

где  $I_m$  — износостойкость по массе.

Соответственно прогнозировать постоянство механических свойств можно только в случае, когда заранее известны колебания температуры в зоне трения при изнашивании; это весьма существенная причина различия значений износостойкости, полученных при испытаниях одной и той же стали разными экспериментаторами при разных режимах нагружения [2]. Из полученных данных следует, что с повышением температуры отпуска износостойкость стали Р18 карбидного класса вначале снижается а затем повышается (в отличие от ряда сталей перлитного класса). Природа самоупрочнения сталей типа Р18 хорошо известна и обусловлена образованием вторичной твёрдости при отпуске в результате превращения остаточного аустенита в мартенсит [2].

В результате оцифровки полученных графиков функций (рис. 5 и рис. 6) с шагом  $10^\circ C$  установлена зависимость износостойкости стали Р18 от её условного предела текучести при соответствующих температурах отпуска (рис. 7).

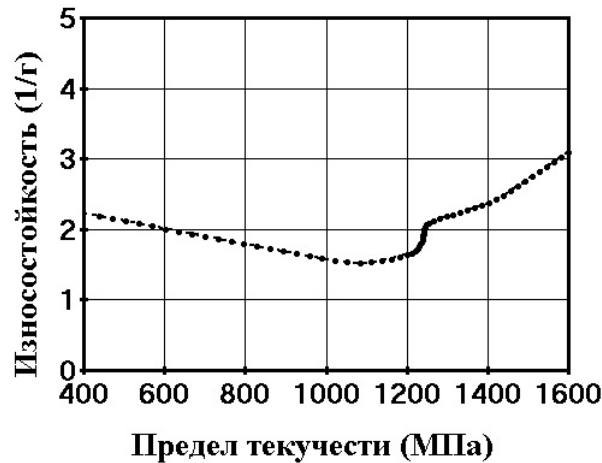


Рис. 7: Зависимость износостойкости стали Р18 от её предела текучести, полученного при отпуске.

Зависимость, показанная на рис. 7, отлично аппроксимируется следующей функцией при  $k = 4$ :

$$\begin{aligned} I_m(\sigma_{0,2}) = & 2,67 - 0,0011\sigma_{0,2} + 0,1 \ln(1 + \exp(0,03(\sigma_{0,2} - 1104))) + \\ & + 0,0967 \ln(1 + \exp(0,3(\sigma_{0,2} - 1234))) - 0,0967 \ln(1 + \exp(0,3(\sigma_{0,2} - 1246))) + \\ & + 0,00643 \ln(1 + \exp(0,3(\sigma_{0,2} - 1421))). \end{aligned} \quad (14)$$

Исследование функции (14) показывает, что износостойкость практически линейно уменьшается от  $2,23 \text{ г}^{-1}$  до минимального значения  $1,52 \text{ г}^{-1}$ , соответствующего условному пределу текучести  $\approx 1086 \text{ МПа}$ . Далее следует небольшой линейный рост до значения  $\approx 1,7 \text{ г}^{-1}$ , после чего происходит резкий сигмоидальный скачок до значения  $\approx 2,1 \text{ г}^{-1}$ . Далее следуют ещё два линейных участка повышения износостойкости, обусловленные образованием вторичной твёрдости.

В процессе сухого трения двух твёрдых тел разогрев границы раздела в точках фактической площади контакта  $A_f$  может достигать весьма высоких значений (до  $1000^\circ C$  и более) [52]. Даже в условиях эффективной смазки контактирующие поверхности иногда нагреваются

до  $600^{\circ}\text{C}$ . Столь значительный разогрев может вызвать существенные изменения структуры и свойств поверхностных слоёв, например, их рекристаллизацию. Рекристаллизация сопровождается изменением размера зерна материала и релаксацией напряжений в твёрдом теле. Оба фактора влияют на механические свойства, трение и износ материала. Соответственно зависимость, представленная на рис. 7, отражает влияние исходных значений условного предела текучести на износостойкость образцов из стали Р18. При любом виде фрикционного взаимодействия материалов происходит деформация поверхностных слоёв. Степень деформации зависит от ряда параметров [52]: скорости, нагрузки, геометрии поверхностей, температуры и др. Поверхностный слой поликристаллического материала содержит участки различной ориентации, поэтому даже при равенстве всех внешних параметров деформация отдельных кристаллов оказывается различной и поверхности трения заведомо характеризуются неоднородностью деформированного состояния. Неравномерность деформации и, соответственно, энергии, запасённой отдельными зёрнами, приводит к неравновесному состоянию поверхности трения, что сказывается на кинетике поверхностных процессов, например, на рекристаллизации. Чем больше накопленная при деформации энергия, тем ниже температура рекристаллизации.

Следовательно, сильно деформированные зёрна могут выступать центрами рекристаллизации и способствовать развитию процесса в смежных областях фактического контакта. Процесс трения вызывает не только деформацию поверхностных зёрен, но и изменение их ориентации, то есть поверхность приспособляется к действующей схеме механических напряжений. Рекристаллизация стимулируется постоянной деформацией решётки при трении в сочетании с температурными всплесками на пятнах фактического контакта и интегральным нагревом поверхностей трения. В указанных условиях преобладающим оказывается процесс измельчения зерна. Он может идти до кажущейся потери кристаллического строения.

Внешнее силовое воздействие вызывает изменение состояния и микроструктуры поверхностных слоёв и отражается на конечном износе. Существенное развитие деформационных процессов на поверхностях трения реализуется при абразивном изнашивании. В работе [2] приведены результаты испытаний на абразивное изнашивание стали Р18 при трении по шлифовальному кругу марки 39А40 СТ со скоростью скольжения  $2,47\text{ м/с}$  и подачей в зону трения смазочно-охлаждающей эмульсии при различном номинальном контактном давлении.

Зависимость износа стали Р18 от номинального контактного давления в виде экспериментальных точек по данным работы [2] показана на рис. 8.



Рис. 8: Зависимость износа стали Р18 от номинального контактного давления.

При анализе данных работы [2] по износу было выделено  $k = 3$  области, которые аппроксимируются линейными функциями. Зависимость, показанная на рис. 8, аппроксимируется

следующей функцией:

$$\Delta m(p_a) = 0,0047p_a + 0,014\ln(1 + \exp(0,5(p_a - 81))) - \\ - 0,0114\ln(1 + \exp(0,5(p_a - 117))) + 0,1466\ln(1 + \exp(0,5(p_a - 146))), \quad (15)$$

где  $\Delta m$  — массовый износ,  $p_a$  — номинальное давление.

При абразивном изнашивании стали Р18 в диапазоне номинального давления от 0 до 175 МПа было выделено три этапа. При переходе от одного этапа к другому происходило увеличение интенсивности изнашивания, на третьем этапе влияние нагрузки на износ проявлялось наиболее существенно. Большая удельная нагрузка на поверхность трения приводит к переходу абразивного в тепловое изнашивание. Продукты изнашивания стали Р18 на первом этапе — порошок светло-серого цвета, на втором и третьем — тёмно-синего, наблюдалось искрообразование. Поверхности образцов имели следы микро-резания, царапания и вдавливания, это подтверждает справедливость соотношений (10) и (11) для фактической площади контакта и фактического давления, превышающего условный предел текучести, полученный при отпуске, а также изменяющийся в процессе рекристаллизации. С другой стороны, тепловое изнашивание, начинающееся при высоком номинальном давлении, характеризовалось наличием оплавленного пятна тёмно-синего цвета с образованием на кромке образца наплыва металла. Это говорит о наличии высоких температур в зоне трения, аналогичных температурам, при которых проявляется повышенная пластичность и сверхпластичность стали Р18 (рис. 1). В настоящее время ещё не установлены и не приняты критерии проявления сверхпластичности при трении и изнашивании. При увеличении нагрузки объём поверхностных слоёв, подверженных деформации в результате нагрева, увеличивается, соответственно происходит резкое приращение износа, подобно резкому росту пластичности при приращении температуры (рис. 1 и рис. 8). Проявление сверхпластической деформации в зоне трения должно также оцениваться и такими характеристиками как сила и коэффициент трения.

Приведённые закономерности имеют огромное значение и могут быть использованы в судебно-экспертной практике при разработке экспертных методик исследования металлов и сплавов.

### 3. Заключение

На основании проведённых исследований можно сделать следующие основные выводы:

1. Разработана математическая модель, позволяющая реализовать аппроксимацию результатов экспериментальных, в том числе экспертных, исследований пластичности, прочности и износостойкости материалов с учётом взаимного перехода линейных и нелинейных зависимостей.
2. Установлено, что разработанная математическая модель отлично аппроксимирует результаты испытаний образцов из стали Р18 на пластичность, прочность и износостойкость с различной сложностью расположения экспериментальных точек.
3. Показано, что посредством использования разработанной модели появляется возможность более детального анализа результатов экспериментальных исследований в области теории пластического формоизменения и трибологии.
4. Выявлено, что результаты экспериментальных исследований пластичности, прочности и износостойкости стали Р18 могут быть аппроксимированы функциями одного вида.
5. Указано на взаимосвязь состояния сверхпластичности с износостойкостью сталей, на примере стали Р18.

6. Показано место разработанных математических моделей в системе судебной металловедческой экспертизы.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гвоздев А. Е., Черных Д. П., Бреки А. Д., Моисеев В. В., Стариков Н. Е., Пустовгар А. С., Аверьянов Р. В. Сверхпластичность сталей ледебуритного класса. – Тула: Издательство Тульского государственного университета. 2006. – 75 с.
2. Виноградов В. Н., Сорокин Г. М. Износостойкость сталей и сплавов. – М.: Нефть и газ, 1994. – 417 с.
3. Чумаченко Е. Н., Цепин М. А., Чекин А. В., Панина О. Н. Анализ влияния структуры на формоизменение заготовки при листовой сверхпластической формовке // Кузнечно-штамповочное производство. – 2001. – №7. – С. 3–7.
4. Еникеев Ф. У. Определение параметров сигмоидальной кривой сверхпластичности // Кузнечно-штамповочное производство. – 2001. – №4. – С. 18–22.
5. Гуляев А. П. Технологическая пластичность быстрорежущих сталей / А. П. Гуляев, Л. М. Сарманова // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1969. – №7. – С. 2–9.
6. Бреки А. Д., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г. Полуэмпирические математические модели трения верчения стали ШХ15 по стали Р6М5, по схеме шар – плоскость с учетом износа // Материаловедение. – 2019. – № 2. – С. 43–48.
7. Чулкин С. Г., Стешенков А. Л., Бреки А. Д., Лысенков П. М. Математическое моделирование процесса обкатки гребных валов // Морские интеллектуальные технологии. – 2019. – № 1–3 (43). – С. 76–86.
8. Бреки А. Д. О функциональном контуре конечного треугольного массива чисел / В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XV Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. – 2018. – С. 166–169.
9. Бреки А. Д., Александров С. Е., Тюриков К. С., Колмаков А. Г., Гвоздев А. Е., Калинин А. А. Антифрикционные свойства плазмохимических покрытий на основе  $SiO_2$  с наночастицами  $MoS_2$  в условиях трения верчения по стали ШХ15 // Материаловедение. – 2018. – №1. – С. 31–35.
10. Breki A. D., Medvedeva V. V., Krylov N. A., Aleksandrov S. E., Kolmakov A. G., Gvozdev A. E., Sergeev N. N., Provotorov D. A., Fadin Y. A. Antiwear properties of composite greases «LITOL-24–magnesium hydrosilicate particles» // Inorganic Materials: Applied Research. 2018. T. 9. № 1. P. 21–25.
11. Бреки А. Д., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г., Сергеев Н. Н. Исследование трения верчения стали ШХ15 по сталям Р6М5 и 10Р6М5-МП с использованием математического моделирования // Материаловедение. – 2018. – №12. – С. 40–45.
12. Koltsova T. S., Breki A. D., Larionova T. V., Tolochko O. V. Operational characteristics of the composite aluminum – carbon nanofibers // Materials Physics and Mechanics. 2018. T.38. №1. P. 11–15.

13. Breki A., Nosonovsky M. Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition // *Applied Physics Letters*. 2018. Т. 113. № 24. P. 241602.
14. Breki A., Nosonovsky M. Einstein's viscosity equation for nanolubricated friction // *Langmuir: the ACS journal of surfaces and colloids*. 2018. Т. 34. № 43. P. 12968-12973.
15. Бреки А. Д., Семенов С. А., Стариков Н. Е., Гвоздев А. Е., Лаврушин А. В. Влияние микроскопических грибов *aspergillus niger* на триботехнические свойства пластичного смазочного материала марки «ЛИТА» // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. – 2018. – №7. – С. 108–117.
16. Чечулин К. Н., Бреки А. Д., Молоков И. Е., Гвоздев А. Е., Кутепов С. Н., Пантюхин О. В. Влияние изменения пригодности моторного масла М-8ДМ в двигателе внутреннего сгорания Д-245.7ЕЗ автомобиля ГАЗ-3309 на циклы его поставки в границах технического обеспечения // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. – 2018. – №7. – С. 137–150.
17. Бреки А. Д., Гвоздев А. Е., Минаев И. В., Кутепов С. Н., Калинин А. А. Математические модели характеристик процесса фрикционного взаимодействия гетерофазных металлических систем // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. – 2018. – №7. – С. 39–53.
18. Чечулин К. Н., Бреки А. Д., Молоков И. Е., Гвоздев А. Е., Кутепов С. Н., Пантюхин О. В. Влияние изменения свойств моторного масла М10Г2К в двигателе внутреннего сгорания ЯМЗ-236 автомобиля УРАЛ-4320 на циклы его поставки в границах технического обеспечения // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2018. – №8. – С. 127–140.
19. Чечулин К. Н., Бреки А. Д., Молоков И. Е., Гвоздев А. Е., Кутепов С. Н., Пантюхин О. В. Влияние диагностики моторного масла М10Г2К в двигателе внутреннего сгорания КАМАЗ-740 автомобиля КАМАЗ на циклы его поставки в границах технического обеспечения // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. – 2018. – №8. – С. 79–93.
20. Бреки А. Д., Тюрикова И. А., Шатульский А. А., Гвоздев А. Е., Кутепов С. Н. Влияние магнитных наночастиц Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub> на трение и износ стали 10X17H13M2T в режиме верчения в среде смазочного масла // *Вестник Рыбинской государственной авиационной технологической академии им. П.А. Соловьева*. – 2018. – №4 (47). – С. 103–111.
21. Breki A. D., Kol'tsova T. S., Skvortsova A. N., Tolochko O. V., Aleksandrov S. E., Kolmakov A. G., Lisenkov A. A., Fadin Y. A., Gvozdev A. E., Provotorov D. A. Tribotechnical properties of composite material «aluminum–carbon nanofibers» under friction on steels 12KH1 and SHKH15 // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2018. Т. 9. № 4. P. 639–643.
22. Breki A. D., Aleksandrov S. E., Tyurikov K. S., Kolmakov A. G., Gvozdev A. E., Kalinin A. A. Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO<sub>2</sub> with MoS<sub>2</sub> nanoparticles under conditions of spinning friction on SHKH15 steel // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2018. Т. 9. № 4. P. 714–718.
23. Stankevich P., Mironovs V., Vasilyeva E., Breki A., Tolochko O. The possibility of modifying the elements of the bearing assembly with nanoparticles in order to reduce the friction coefficient // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 2017. P. 012084.

24. Alexandrov S.E., Tyurikov K.S., Breki A.D. Low-temperature plasma-chemical deposition of nanocomposite antifriction molybdenum disulfide (filler)–silicon oxide (matrix) coatings // Russian Journal of Applied Chemistry. 2017. Т. 90. №11. Р. 1753–1759.
25. Бреки А. Д., Кольцова Т. С., Скворцова А. Н., Толочко О. В., Александров С. Е., Колмаков А. Г., Лисенков А. А., Гвоздев А. Е., Фадин Ю. А., Провоторов Д. А. Триботехнические свойства композиционного материала «алюминий-углеродные нановолокна» при трении по сталям 12Х1 и ШХ15 // Материаловедение. – 2017. – №11. – С. 37–42.
26. Бреки А. Д., Медведева В. В., Крылов Н. А., Колмаков А. Г., Фадин Ю. А., Гвоздев А. Е., Сергеев Н. Н., Александров С. Е., Провоторов Д. А. Противоизносные свойства пластичных смазочных композиционных материалов «ЛИТОЛ24-частицы гидросиликатов магния» // Материаловедение. – 2017. – №3. – С. 38–42.
27. Бреки А. Д., Александров С. Е., Тюриков К. С., Гвоздев А. Е., Калинин А. А. Антифрикционные свойства покрытия на основе  $SiO_2$ , содержащего наночастицы  $MoS_2$  со средним размером 61 нм при трении по стали ШХ15 // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2017. – №7. С. 334–343.
28. Бреки А. Д., Александров С. Е., Тюриков К. С., Гвоздев А. Е., Калинин А. А. Исследование трения стали ШХ15 по покрытию на основе  $SiO_2$ , содержащего наночастицы дисульфида молибдена со средним размером 53 нм // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2017. – №7. – С. 363–373.
29. Бреки А. Д., Александров С. Е., Тюриков К. С., Гвоздев А. Е., Агеев Е. В., Провоторов Д. А., Куц В. В. Лабораторные исследования трения стали ШХ15 по покрытию на основе  $SiO_2$ , содержащему наночастицы  $MoS_2$  со средним размером 64 нм // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2017. – №4 (73). – С. 52–67.
30. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Starikov N., Provotorov D.A., Sergeyev N.N., Khonelidze D.M. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. Т. 8. № 1. Р. 126–129.
31. Breki A.D., Didenko A.L., Kudryavtsev V.V., Vasilyeva E.S., Tolochko O.V., Kolmakov A.G., Gvozdev A.E., Provotorov D.A., Starikov N.E., Fadin Yu.A. Synthesis and dry sliding behavior of composite coating with (R-OOO)FT polyimide matrix and tungsten disulfide nanoparticle filler // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. Т. 8. № 1. Р. 32–36.
32. Breki A.D., Didenko A.L., Kudryavtsev V.V., Vasilyeva E.S., Tolochko O.V., Gvozdev A.E., Sergeyev N.N., Provotorov D.A., Starikov N.E., Fadin Yu.A., Kolmakov A.G. Composite coatings based on A-OOO polyimide and  $WS_2$  nanoparticles with enhanced dry sliding characteristics // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. Т. 8. № 1. Р. 56–59.
33. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. Т. 8. № 4. Р. 509–514.
34. Бреки А. Д., Александров С. Е., Тюриков К. С., Гвоздев А. Е., Калинин А. А., Агеев Е. В., Ивахненко А. Г. Закономерности трения верчения стали ШХ15 по поверхности покрытия на основе  $SiO_2$ , содержащего наночастицы  $MoS_2$  со средним размером 70 нм, нанесённого на подложку из стали 12Х18Н10Т // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. – 2017. – №3 (24). – С. 48–59.

35. Breki A. D., Vasilyeva E. S., Tolochko O. V., Didenko A. L., Kudryavtsev V. V., Kolmakov A. G., Sergeyev N. N., Gvozdev A. E., Starikov N. E., Provotorov D. A., Fadin Y. A. Synthesis and tribotechnical properties of composite coatings with PM-DADPE polyimide matrix and fillers of tungsten dichalcogenide nanoparticles upon dry sliding friction // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2016. Т. 7. №4. P. 542–546.
36. Ondracek G. Zum Zussaommenhang zwischen Eigenschaften und Gefugestruktur mehrphasiger Werkstoffe // *Werkstofftechnik*. 1977. №8. P. 240–246
37. Хохлов В. М. Расчёт площадей контакта, допускаемых напряжений, износа и износостойких деталей машин: Монография. – Брянск, БГТУ, 1999. – 104 с.
38. Хохлов В. М. Основы расчёта контурных и фактических площадей контакта и давлений // *Вестник машиностроения*. – 1990. – №7. – С. 21–22.
39. Хохлов В. М. Расчёт контурных площадей контакта и давлений // *Известия вузов. Машиностроение*. – 1990. – №4. – С. 20–24.
40. Khokhlov V. M. Foundations underlying the calculation of contour and actual contact areas and pressures // *Russian Engineering Research*. 1990. Vol.10. №7. P. 15–18.
41. Khokhlov V. M. Calculation of contour and nominal working stresses // *Russian Engineering Research*. 1994. Vol.14. №4. P. 1–4.
42. Демкин Н. Б. Исследование контакта двух шероховатых поверхностей // *Трение и износ*. – 1990. – Т.11. – №6. – С. 1002–1006.
43. Мур Д. Основы и применения трибоники. – М.: Мир, 1978. – 488 с.
44. Петрусевич А. И. Основные выводы из контактно-гидродинамической теории смазки. – М.: АН СССР, ОТН, 1951, №2. – С. 209–223.
45. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача теории пластичности и проба Бринелля // *Прикладная математика и механика*. – 1944. – Т.8. – Вып.3. – С. 201–224.
46. Bowden F. P., Tabor D. *Reibung und Schmierung fester Korper*. Berlin-Gottingen-Heidelberg: Springer – Verlag, 1959. 410 p.
47. Петров Ю. В., Груздков А. А., Ситникова Е. В. Аномальное поведение предела текучести при повышении температуры в условиях высокоскоростного деформирования // *Доклады Академии наук*. – 2007. – Т. 417. – №4. – С. 493–496.
48. Янушкевич Ж. Ч., Луговская А. С., Беляков А. Н., Добаткин С. В., Кайбышев Р. О. Влияние температуры испытания на предел текучести аустенитных коррозионностойких сталей, подвергнутых прокатке при различных температурах // В сборнике: VI Всероссийская конференция по наноматериалам с элементами научной школы для молодежи Сборник материалов. – 2016. – С. 320–321.
49. Табачникова Е. Д., Бенгус В. З., Подольский А. В., Смирнов С. Н., Валиев Р. З. Предел текучести и пластичность наноструктурного титана разной чистоты при температурах 300, 77 и 4.2 К // *Кристаллография*. – 2009. – Т.54. – №6. – С. 1119–1122.
50. Александров С. Е., Лямина Е. А., Новожилова О. В. Влияние зависимости предела текучести от температуры на напряженное состояние в тонком полом диске // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. – 2013. – №3. – С. 43–48.

51. Ситников И.В., Саломатова Е.С. Численное моделирование сварки трением с перемешиванием // Master's Journal. – 2014. – №2. – С. 84–88.
52. Бакли Д. Поверхностные явления при адгезии и фрикционном взаимодействии / Пер. с англ. А.В. Белого, Н.К. Мышкина; Под ред. А.И. Свириденка. – М.: Машиностроение, 1986. – 360 с.

## REFERENCES

1. Gvozdev A.E., Chernykh D.P., Breki A.D., Moiseev V.V., Starikov N.E., Pustovgar A.S., Averyanov R.V. 2006, *Superplasticity of ledeburite-class steels*. Tula, Tula state University Press, 75 p.
2. Vinogradov V.N., Sorokin G.M. 1994, *Wear Resistance of steels and alloys*. Moscow, Oil and gas, 417 p.
3. Chumachenko E.N., Tsepin M.A., Chekin A.V., Panina O.N. 2001, «Analysis of the influence of structure on the shaping of the workpiece during sheet superplastic molding», *Forging and stamping production*, No.7, pp. 3–7.
4. Enikeev F.U. 2001, «Determination of the parameters of the sigmoidal superplastic curve», *Forging and stamping production*, No.4, pp. 18–22.
5. Gulyaev A.P. 1969, «Technological plasticity of high-speed steels», *Metal Science and heat treatment of metals*, No.7, pp. 2–9.
6. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2019, «Semiempirical mathematical models of the friction of twisting steel SHX15 on steel P6M5, according to the ball – plane scheme with wear», *Material Science*, No.2, pp. 43–48.
7. Chulkin S.G., Steshenkov A.L., Breki A.D., Lysenkov P.M. 2019, «Mathematical modeling of the process of running in propeller shafts», *Marine intelligent technologies*, No.1-3(43), pp. 76–86.
8. Breki A.D. 2018, «On the functional contour of a finite triangular array of numbers», *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications Materials of the XV International conference dedicated to the centenary of the birth of Professor Nikolai Mikhailovich Korobov*, pp. 166–169.
9. Breki A.D., Alexandrov S.E., Tyurikov K.S., Kolmakov A.G., Gvozdev A.E., Kalinin A.A. 2018, «Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO<sub>2</sub> with MoS<sub>2</sub> nanoparticles under conditions of torsion friction on steel SHX15», *Material Science*, No.1, pp. 31–35.
10. Breki A.D., Medvedeva V.V., Krylov N.A., Aleksandrov S.E., Kolmakov A.G., Gvozdev A.E., Sergeev N.N., Provotorov D.A., Fadin Y.A. 2018, «Antiwear properties of composite greases «LITOL-24–magnesium hydrosilicate particles»», *Inorganic Materials: Applied Research*, Vol.9, No.1, pp. 21–25.
11. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Sergeyev N.N. 2018, «Investigation of the friction of twisting steel SHX15 on P6M5 and 10R6M5-MP steels using mathematical modeling», *Material Science*, No.12, pp. 40–45.
12. Koltsova T.S., Breki A.D., Larionova T.V., Tolochko O.V. 2018, «Operational characteristics of the composite aluminum–carbon nanofibers», *Materials Physics and Mechanics*, Vol.38, No.1, pp. 11–15.

13. Breki A., Nosonovsky M. 2018, «Ultraslow frictional sliding and the stick-slip transition», *Applied Physics Letters*, Vol.113, No.24, pp. 241602.
14. Breki A., Nosonovsky M. 2018, «Einstein's viscosity equation for nanolubricated friction», *Langmuir: the ACS journal of surfaces and colloids*, Vol.34, No.43, pp. 12968–12973.
15. Breki A.D., Semenov S.A., Starikov N.E., Gvozdev A.E., Lavrushin A.V. 2018, «Influence of microscopic *Aspergillus niger* fungi on tribotechnical properties of LITA brand plastic lubricant», *Izvestiya Tula state University. Technical science*, No.7, pp. 108–117.
16. Chechulin K.N., Breki A.D., Molokov I.E., Gvozdev A.E., Kutepov S.N., Pantyukhin O.V. 2018, «Influence of changes in the suitability of M-8DM engine oil in the internal combustion engine D-245. 7E3 of the GAZ-3309 car on the cycles of its delivery within the technical support», *Izvestiya Tula state University. Technical science*, No.7, pp. 137–150.
17. Breki A.D., Gvozdev A.E., Minaev I.V., Kutepov S.N., Kalinin A.A. 2018, «Mathematical models of characteristics of the process of friction interaction of heterophase metal systems», *Izvestiya Tula state University. Technical science*, No.7, pp. 39–53.
18. Chechulin K.N., Breki A.D., Molokov I.E., Gvozdev A.E., Kutepov S.N., Pantyukhin O.V. 2018, «Influence of changes in the properties of M10G2K engine oil in the internal combustion engine YAMZ-236 of the URAL-4320 car on the cycles of its delivery within the boundaries of technical support», *Izvestiya Tula state University. Technical science*, No.8, pp. 127–140.
19. Chechulin K.N., Breki A.D., Molokov I.E., Gvozdev A.E., Kutepov S.N., Pantyukhin O.V. 2018, «Influence of diagnostics of M10G2K engine oil in the KAMAZ-740 internal combustion engine on the cycles of its delivery within the boundaries of technical support», *Izvestiya Tula state University. Technical science*, No.8, pp. 79–93.
20. Breki A.D., Tyurikova I.A., Shatul'sky A.A., Gvozdev A.E., Kutepov S.N. 2018, «Influence of magnetic Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub> nanoparticles on friction and wear of 10H17N13M2T steel in the spinning mode in the medium of lubricating oil», *Bulletin of the Rybinsk state aviation technological Academy. P.A. Solovyov*, No.4(47), pp. 103–111.
21. Breki A.D., Kol'tsova T.S., Skvortsova A.N., Tolochko O.V., Aleksandrov S.E., Kolmakov A.G., Lisenkov A.A., Fadin Y.A., Gvozdev A.E., Provotorov D.A. 2018, «Tribotechnical properties of composite material «aluminum–carbon nanofibers» under friction on steels 12KH1 and SHKH15», *Inorganic Materials: applied research*, Vol.9, No.4, pp. 639–643.
22. Breki A.D., Aleksandrov S.E., Tyurikov K.S., Kolmakov A.G., Gvozdev A.E., Kalinin A.A. 2018, «Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO<sub>2</sub> with MoS<sub>2</sub> nanoparticles under conditions of spinning friction on SHKH15 steel», *Inorganic Materials: Applied Research*, Vol.9, No.4, pp. 714–718.
23. Stankevich P., Mironovs V., Vasilyeva E., Breki A., Tolochko O. 2017, «The possibility of modifying the elements of the bearing assembly with nanoparticles in order to reduce the friction coefficient», *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, pp. 012084.
24. Alexandrov S.E., Tyurikov K.S., Breki A.D. 2017, «Low-temperature plasma-chemical deposition of nanocomposite antifriction molybdenum disulfide (filler)–silicon oxide (matrix) coatings», *Russian Journal of Applied Chemistry*, Vol.90, No.11, pp. 1753–1759.
25. Breki A.D., Koltsova T.S., Skvortsova A.N., Tolochko O.V., Alexandrov S.E., Kolmakov A.G., Lisenkov A.A., Gvozdev A.E., Fadin Yu.A., Provotorov D.A. 2017, «Tribotechnical properties of

- the composite material «aluminum-carbon nanofibers» at friction on steels 12X1 and SHX15», *Material Science*, No.11. pp. 37–42.
26. Breki A.D., Medvedeva V.V., Krylov N.A., Kolmakov A.G., Fadin Yu.A., Gvozdev A.E., Sergeev N.N., Alexandrov S.E., Provotorov D.A. 2017, «Anti-Wear properties of plastic lubricating composite materials «LITHOL24-particles of magnesium hydrosilicates»», *Material Science*, No.3, pp. 38–42.
27. Breki A.D., Alexandrov S.E., Tyurikov K.S., Gvozdev A.E., Kalinin A.A. 2017, «Antifriction properties of a  $\text{SiO}_2$ -based coating containing  $\text{MoS}_2$  nanoparticles with an average size of 61 nm when friction occurs on steel SHX15», *Proceedings of the Tula state University. Technical science*, No.7, pp. 334–343.
28. Breki A.D., Alexandrov S.E., Tyurikov K.S., Gvozdev A.E., Kalinin A.A. 2017, «Investigation of the friction of SHX15 steel on a coating based on  $\text{SiO}_2$  containing nanoparticles of molybdenum disulfide with an average size of 53 nm», *Proceedings of the Tula state University. Technical science*, No.7, pp. 363–373.
29. Breki A.D., Alexandrov S.E., Tyurikov K.S., Gvozdev A.E., Ageev E.V., Provotorov D.A., Kuts V.V. 2017, «Laboratory studies of the friction of SHX15 steel on a  $\text{SiO}_2$ -based coating containing  $\text{MoS}_2$  nanoparticles with an average size of 64 nm», *Izvestiya Yugo-ZAPADNOGO gosudarstvennogo universiteta*, No.4(73), pp. 52–67.
30. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Starikov N.E., Provotorov D.A., Sergeyev N.N., Khonelidze D.M. 2017, «On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon», *Inorganic Materials: Applied Research*, Vol.8, No.1, pp. 126–129.
31. Breki A.D., Didenko A.L., Kudryavtsev V.V., Vasilyeva E.S., Tolochko O.V., Kolmakov A.G., Gvozdev A.E., Provotorov D.A., Starikov N.E., Fadin Yu.A. 2017, «Synthesis and dry sliding behavior of composite coating with (R-OOO)FT polyimide matrix and tungsten disulfide nanoparticle filler», *Organic Materials: Applied Research*, Vol.8, No.1, pp. 32–36.
32. Breki A.D., Didenko A.L., Kudryavtsev V.V., Vasilyeva E.S., Tolochko O.V., Gvozdev A.E., Sergeyev N.N., Provotorov D.A., Starikov N.E., Fadin Yu.A., Kolmakov A.G. 2017, «Composite coatings based on A-OOO polyimide and  $\text{WS}_2$  nanoparticles with enhanced dry sliding characteristics», *Organic Materials: Applied Research*, Vol.8, №1, pp. 56–59.
33. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2017, «Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces», *Inorganic Materials: Applied Research*, Vol.8, No.4, pp. 509–514.
34. Breki A.D., Alexandrov S.E., Tyurikov K.S., Gvozdev A.E., Kalinin A.A., Ageev E.V., Ivakhnenko A.G. 2017, «Regularities of the friction of twisting steel SHX15 on the surface of a coating based on  $\text{Si}_2$  containing  $\text{MoS}_2$  nanoparticles with an average size of 70 nm, deposited on a substrate made of steel 12X18N10T», *Izvestiya Yugo-ZAPADNOGO gosudarstvennogo universiteta. Series: Engineering and technology*, No.3(24), pp. 48–59.
35. Breki A.D., Vasilyeva E.S., Tolochko O.V., Didenko A.L., Kudryavtsev V.V., Kolmakov A.G., Sergeyev N.N., Gvozdev A.E., Starikov N.E., Provotorov D.A., Fadin Y.A. 2016, «Synthesis and tribotechnical properties of composite coatings with PM-DADPE polyimide matrix and fillers of tungsten dichalcogenide Nanoparticles upon dry Sliding friction», *Inorganic materials: applied Research*, Vol.7, No.4, pp. 542–546.

36. Ondracek G. 1977, «Zum Zussaammenhang zwischen Eigenschaften und Gefugestruktur mehrphasiger Werkstoffe», *Werkstofftechnik*, No.8, pp. 240–246.
37. Khokhlov V.M. 1999, *Calculation of contact areas, allowable stresses, wear and wear-resistant machine parts*. Bryansk, Belgorod state technological University, 104 p.
38. Khokhlov V.M. 1990, «The basis of the calculation and the actual contour of the areas of contact and pressure», *Vestnik mashinostroeniya*, No.7, pp. 21–22.
39. Khokhlov V.M. 1990, «The calculation of the contour areas of contact and pressure», *Proceedings of the universities. Engineering*, No.4. pp. 20–24.
40. Khokhlov V.M. 1990, «Foundations underlying the calculation of contour and actual contact areas and pressures», *Russian Engineering Research*, Vol.10, No.7, pp. 15–18.
41. Khokhlov V.M. 1994, «Calculation of contour and nominal working stresses», *Russian Engineering Research*, Vol.14, No.4, pp. 1–4.
42. Demkin N.B. 1990, «Investigation of the contact of two rough surfaces», *Friction and wear*, Vol.11, No.6, pp. 1002–1006.
43. Moore D. 1978, *Principles and applications of trebonice*. – Moscow, Mir, 488 p.
44. Petrusevich A.I. 1951, *Main conclusions from the contact-hydrodynamic theory of lubrication*, Moscow, USSR Academy of Sciences, OTN, No.2. pp. 209–223.
45. Ishlinsky A.Yu. 1944, «Axisymmetric problem of plasticity theory and Brinell test», *Applied mathematics and mechanics*, Vol.8, Vol.3, pp. 201–224.
46. Bowden F.P., Tabor D. 1959, *Reibung und Schmierung fester Korper*. Berlin-Gottingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 410 p.
47. Petrov Yu.V., Gruzdkov A.A., Sitnikova E.V. 2007, «Anomalous behavior of the yield point when the temperature increases in high-speed deformation», *Reports of the Academy of Sciences*, T.417, No.4. pp. 493–496.
48. Yanushkevich Zh.Ch., Lugovskaya A.S., Belyakov A.N., Dobatkin S.V., Kaibyshev R.O. 2016, «Influence of the test temperature on the yield strength of austenitic corrosion-resistant steels subjected to rolling at different temperatures», *VI all-Russian conference on nanomaterials with elements of a scientific school for young people Collection of materials*, pp. 320–321.
49. Tabachnikova E.D., Bengus V.Z., Podolsky A.V., Smirnov S.N., Valiev R.Z. 2009, «Yield Strength and plasticity of nanostructured titanium of different purity at temperatures of 300, 77 and 4.2 K», *Crystallography*, T.54. No.6. pp. 1119–1122.
50. Alexandrov S.E., Lyamina E.A., Novozhilova O.V. 2013, «Influence of the dependence of the yield point on temperature on the stress state in a thin hollow disk», *Problems of mechanical engineering and machine reliability*, No.3, pp. 43–48.
51. Sitnikov I.V., Salomatova E.S. 2014, «Numerical simulation of friction welding with mixing», *Master's Journal*, No.2, pp. 84–88.
52. Buckley D. 1986, *Surface phenomena in adhesion and frictional interaction*. Moscow, Mashinostroenie, 360 p.

Получено 16.04.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

---

УДК 51-74

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-292-305

**Разработка математического комплекса моделирования  
процесса разрушения композиционных конструкций на основе  
высокоскоростных моделей деформирования**

Г. М. Журавлев, В. Г. Теличко, Н. С. Куриен, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева

**Геннадий Модестович Журавлев** — доктор технических наук, профессор, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail:* technology@tsput.ru

**Виктор Григорьевич Теличко** — кандидат технических наук, доцент, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail:* katranv@yandex.ru

**Никита Сергеевич Куриен** — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail:* kyrien@mail.ru

**Александр Евгеньевич Гвоздев** — доктор технических наук, профессор, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail:* gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

**Ольга Владимировна Кузовлева** — кандидат технических наук, доцент, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).

*e-mail:* kusovleva@yandex.ru

**Аннотация**

На сегодняшний день существует риск разрушения для большого количества зданий от различных аварийных ситуаций. Современная нормативная база проектирования и эксплуатации зданий, содержит многолетний опыт анализа причин обрушения, учитывает большое количество воздействий на конструкции (динамические нагрузки, климатические воздействия, временные и постоянные) в течении всего срока службы. Однако возрастающее количество аварий, с разной степенью разрушений, как отдельных частей, так и всего строения, говорит о том, что воздействие, вызвавшее разрушение, не было учтено в нормативных документах, на основании которых был спроектирован объект. Поэтому возникает необходимость в точных расчетных алгоритмах, современных надежных и экономически выгодных методиках по конструктивному усилению несущих каркасов зданий.

В статье рассмотрены существующие методы, для прогнозирования эффектов разрушения и решения задач на определение напряженно-деформированного состояния исходя из специально разработанной модели прочности RHT (Riedel-Hiermaier-Thoma) для высокоскоростного деформирования железобетона в условиях динамического нагружения. Рассмотрена модельная задача с использованием вариационного подхода, основанного на построении функционала расчета мощности упругой деформации с учетом мощности сил инерции для заряда взрывчатого вещества сферической формы, расположенного непосредственно перед сооружением. Все расчеты производились в среде ANSYSLS-DYNA, получены результаты в форме графиков скоростей деформаций и полей напряжений.

*Ключевые слова:* динамическое нагружение, напряженно-деформированное состояние, взрывчатые вещества, энергетический метод, метод конечных элементов, железобетон.

*Библиография:* 22 названия.

**Для цитирования:**

Г. М. Журавлев, В. Г. Теличко, Н. С. Куриен, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева. Разработка математического комплекса моделирования процесса разрушения композиционных конструкций на основе высокоскоростных моделей деформирования // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 292–305.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 51-74

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-292-305

**The development of a mathematical complex for modeling the progress of destruction of composite structures based on high-speed deformation models**

G. M. Zhuravlev, V. G. Telichko, N. S. Kurien, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva

**Gennady Modestovich Zhuravlev** — doctor of technical Sciences, Professor, Professor, Tula State University (Tula).

*e-mail:* technology@tspu.ru

**Victor Grigorievich Telichko** — candidate of technical Sciences, associate Professor, Tula State University (Tula).

*e-mail:* katranv@yandex.ru

**Nikita Sergeevich Kurien** — post-graduate student, Tula State University (Tula).

*e-mail:* kyrien@mail.ru

**Alexandr Evgenievich Gvozdev** — doctor of engineering, Professor, Professor, Tula State Pedagogical University L.N. Tolstoy (Tula).

*e-mail:* gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

**Olga Vladimirovna** — candidate of technical Sciences, docent, docent, Russian State University of justice (Moscow).

*e-mail:* kusovleva@yandex.ru

**Abstract**

Today, there is a risk of destruction for a large number of buildings from various emergencies. Modern regulatory framework for the design and operation of buildings, contains many years of experience in analyzing the causes of collapse, takes into account a large number of impacts on structures (dynamic loads, climatic effects, temporary and permanent) during the entire service life. However, the increasing number of accidents with varying degrees of destruction, both of individual parts and of the entire structure, suggests that the impact that caused the destruction was not taken into account in the regulatory documents on the basis of which the object was designed. Therefore, there is a need for accurate calculation algorithms, modern reliable and cost-effective methods for the structural strengthening of supporting frames of buildings.

The article considers existing methods for predicting the effects of fracture and solving problems for determining the stress-strain state based on a specially developed RHT (Riedel-Hiermaier-Thoma) strength model for high-speed deformation of reinforced concrete under dynamic loading conditions. A model problem is considered using a variational approach based on the construction of a functional for calculating the elastic deformation power, taking into account the power of inertia forces for a spherical explosive charge located directly in front of the structure. All calculations were performed in the ANSYSLS-DYNA environment, the results were obtained in the form of graphs of strain rates and stress fields.

*Keywords:* dynamic loading, stress-strain state, explosives, energy method, finite element method, reinforced concrete.

*Bibliography:* 22 titles.

**For citation:**

G. M. Zhuravlev, V. G. Telichko, N. S. Kurien, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, 2020, "The development of a mathematical complex for modeling the progress of destruction of composite structures based on high-speed deformation models", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 292–305.

## 1. Введение

На сегодняшний день существует риск разрушения для большого количества зданий от различных аварийных ситуаций, в связи с развитием взрывоопасных отраслей промышленности, что выдвигает ответственную и сложную задачу охраны населения, обслуживающего персонала и окружающей среды от аварий [3, 5]. Современная нормативная база проектирования и эксплуатации зданий, содержит многолетний опыт, анализа причин обрушения, учитывает большое количество воздействий на конструкции (динамические нагрузки, климатические воздействия, временные и постоянные) в течение всего срока службы. Однако возрастающее количество аварий, с разной степенью разрушений, как отдельных частей, так и всего строения, говорит о том, что воздействие, вызвавшее разрушение, не было учтено в нормативных документах, на основании которых был запроектирован объект. Первостепенное значение приобретает анализ возможных отклонений от нормальных эксплуатационных режимов на данных производствах и тщательное изучение возможного развития различных аварийных ситуаций, приводящих к динамическим воздействиям на сооружения [5, 7, 9].

Стратегия борьбы с взрывами и реализация мер по смягчению последствий взрыва требуют внимания и решения, начиная с этапов планирования и проектирования опасного производственного объекта, поскольку впоследствии, при эксплуатации, решение данных задач становится либо трудным, либо невозможным. В настоящий момент существуют два пути уменьшения последствий воздействия взрыва: разработка взрывоустойчивой конструкции зданий и сооружений на вновь проектируемых или реконструируемых объектах; создание универсального защитного устройства, способного эффективно снизить интенсивность падающей ударной волны и удовлетворить требованиям по его размещению в условиях существующей плотной застройки на опасных объектах [10, 18, 22]. В обоих случаях для строительства конструкции, устойчивой к взрывам, изначально необходимо определить величину взрывной нагрузки, которую может выдержать конструкция.

Методы, доступные для прогнозирования эффектов взрыва, можно сгруппировать по трем основным категориям: эмпирические (или аналитические), полуэмпирические и численные (первого порядка). Эмпирические подходы разрабатываются на основе обширного анализа огромного объема экспериментальных данных, собранных в течение длительного периода времени [13, 14]. Таким образом, они ограничены объемом экспериментальной базы данных. Кроме того, хорошо известно, что эмпирические уравнения не дают точных результатов при рассмотрении ближайшей от источника взрыва зоны действия ударной волны. Полуэмпирические подходы основаны на упрощенных моделях физики явлений [3, 4, 5, 6]. В них основное внимание уделяется моделированию физических процессов в значительно упрощенном виде. Этот подход в основном зависит от обширных данных и тематических исследований, а точность, как правило, выше, чем та, которая обеспечивается эмпирическим подходом. Численный метод (первого порядка) включает совокупность физических, математических и численных методов, предназначенных для вычисления характеристик потоковых процессов. В этих методах математические функции описывают законы сохранения массы, импульса и энергии. Динамическое

поведение материалов при этом выражено эмпирическими зависимостями, полученными на основе экспериментов, проведенных на этих материалах [1, 11]. Под эту категорию подпадают методы: конечных элементов (англ. Finite Element Method), конечных разностей (англ. Finite difference Method) и граничных элементов (англ. Boundary Element Method) [2, 6, 15].

В связи с этим нахождение условий разрушения элементов строительных конструкций динамическим нагружением, с использованием метода, доступного для прогнозирования эффектов взрыва, в контексте с применением современных программных комплексов основанных на методе конечных элементов (КЭ) представляет собой актуальную задачу, особенно в прикладном плане.

## 2. Материалы и методы исследования

В данной работе для описания прочности конструкции будем использовать модель RHT — моделью прочности (Riedel-Hiermaier-Thoma) [20], разработанной специально для высокоскоростного деформирования железобетона. Данная модель является модульной и описывает поведение упругопластического тела с упрочнением и широко применяется в современных комплексах САПР [16]. Ниже дано краткое описание математических основ модели RHT [11, 20].

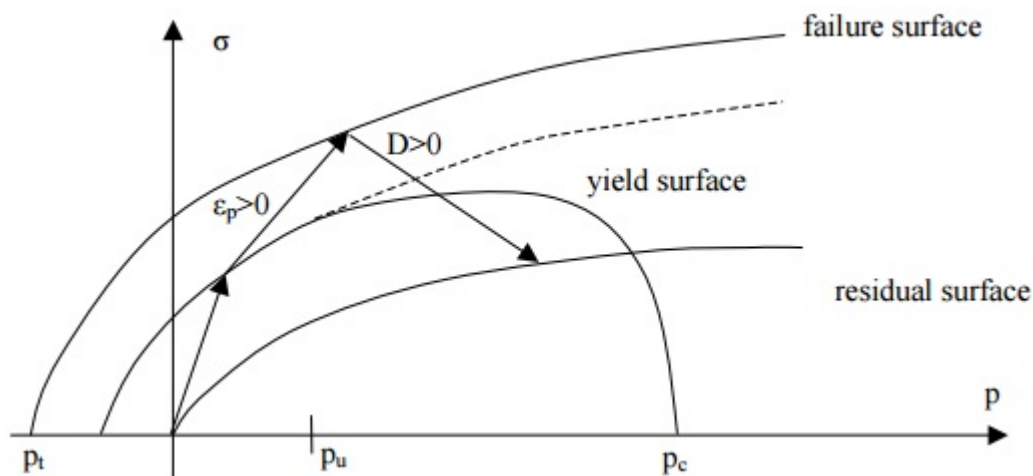


Рис. 1: Предельная нагрузка материала и его разгрузка

Модель прочности RHT выражается в терминах трех предельных поверхностей напряжений: начальной упругой поверхности текучести (yieldsurface), поверхности разрушения (failuresurface) и остаточной поверхности (residualsurface). В то время как поверхности учитывают снижение прочности вдоль различных меридианов, а также влияние скорости деформации, статические сжимающие меридианные поверхности изображены на рис. 1.

Поверхность разрушения, то есть предел прочности бетона, формируется из параметров материала, включая прочность бетона на сжатие, растяжение и сдвиг. Начальная поверхность текучести формируется из введенных пользователем параметров поверхности разрушения вдоль меридиана растяжения и сжатия и дополнительно включает в себя предел давления закрытия пор. Модель является упругой до тех пор, пока напряжение не достигнет начальной поверхности текучести, за которой развиваются пластические деформации. Пластические деформации вместе со свойствами упрочнения бетона, заданными в качестве входных данных, используются для формирования эффективной поверхности текучести путем интерполяции между исходной поверхностью текучести и поверхностью разрушения. Аналогично,

когда напряжение достигает поверхности разрушения, используется параметризованная модель повреждения, которая управляет эволюцией разрушения, обусловленной пластическими деформациями, которая, в свою очередь, представляет собой предельную поверхность напряжения после разрушения путем интерполяции между поверхностью разрушения и остаточной поверхностью. Для полностью поврежденного материала нет зависимости от меридиана или скорости деформации, а прочность на сдвиг поддерживается только в ограниченных условиях, т.е. при положительных давлениях.

RHT модель использует модель объемного уплотнения [17]. Схематическое описание модели представлено на рис. 2, где важную роль играют давление закрытия пор и давление уплотнения. Пористое уплотнение начинается при значении давления, соответствующем давлению закрытия пор, ниже которого модель является упругой. При инициировании коллапса пор наблюдается значительное снижение эффективного объемного модуля упругости, так как связанные с этим микромеханические эффекты снижают объемную жесткость материала. Внутренняя переменная  $\alpha$  представляет пористость материала, как долю между плотностью матрицы материала и пористым бетоном, и, таким образом, уменьшается с увеличением давления и делает процесс нагружения необратимым. Разгрузка происходит по текущей упругой жесткости и приведет к постоянной объемной деформации при нулевом давлении, последующий новый этап загрузки происходит по кривой разгрузки. Когда давление достигает давления закрытия пор, материал считается полностью уплотненным ( $\alpha = 1$ ) и будет описываться обычными уравнениями состояния для бетона.

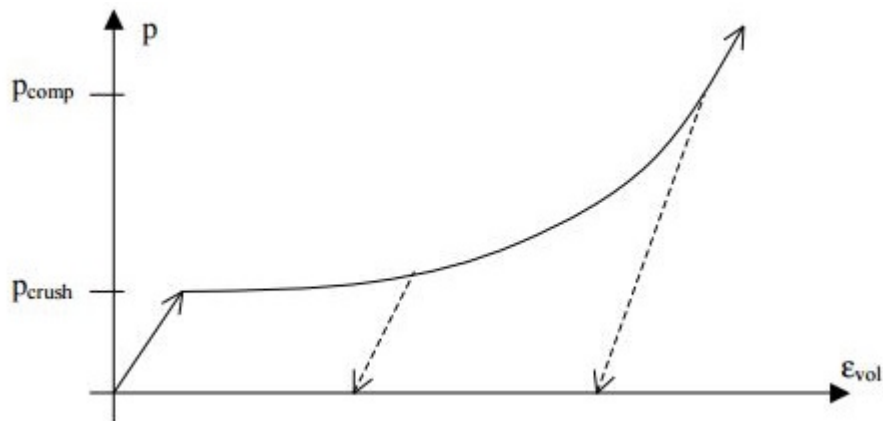


Рис. 2: Схематическое описание  $p$ - $\alpha$  уравнения состояния

Здесь  $p$  — величина давления,  $\varepsilon_{vol}$  — объемная деформация,  $\alpha$  — коэффициент пористости.

В модели RHT часть сдвиг и давление связаны, причем давление описывается в форме уравнения Ми-Грюнейзена [21, 22] с полиномиальной кривой Гюгоньо и отношением уплотнения  $p$ - $\alpha$  (рис. 2). Для модели уплотнения мы определяем переменную, представляющую собой пористость  $\alpha$ , которая меняется в диапазоне от 0 до 1. Эта переменная представляет собой текущую долю плотности между материалом матрицы и пористым бетоном, и будет уменьшаться с увеличением давления. Эволюция этой переменной задается как [20]

$$\alpha(t) = \max \left( 1, \min \left( \alpha_0, \min_{s \leq t} \left( 1 + (\alpha_0 - 1) \left[ \frac{p_{comp} - p(s)}{p_{comp} - p_{el}} \right]^N \right) \right) \right),$$

где  $p(t)$  — величина давления,  $t$  — время. Это выражение также включает начальное давление закрытия пор  $p_{el}$ , давление уплотнения  $p_{comp}$  и экспоненциальный показатель пористости  $N$ . Для дальнейшего использования мы определим предельное давление, или текущее давление

закрытия пор материала, как [20]

$$p_c = p_{comp} - (p_{comp} - p_{el}) \left[ \frac{\alpha - 1}{\alpha_0 - 1} \right]^{1/N}.$$

Остаточная часть давления дана в терминах плотности и удельной внутренней энергии. В зависимости от параметров определяющих соотношений для материала ( $B_0 > 0$ ):

$$p(\rho, e) = \frac{1}{\alpha} \begin{cases} (B_0 + B_1\eta)\alpha\rho e + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3, & \eta > 0, \\ B_0\alpha\rho e + T_1\eta + T_2\eta^2, & \eta < 0 \end{cases}$$

или при ( $B_0 = 0$ ):

$$p(\rho, e) = \Gamma\rho e + \frac{1}{\alpha}p_H(\eta) \left[ 1 - \frac{1}{2}\Gamma\eta \right],$$

$$p_H(\eta) = A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3,$$

совместно с

$$\eta(\rho) = \frac{\alpha\rho}{\alpha_0\rho_0} - 1.$$

Для описания прочности на сдвиг используем следующее выражение:

$$p^* = p/f_c,$$

где давление нормализовано с параметром прочности на сжатие. Также используем  $s$  для обозначения тензора девиатора напряжений и  $\dot{\epsilon}_p$  для скорости пластической деформации.

Для заданного НДС и скорости нагружения упругопластическая поверхность текучести для модели RHT задается следующим образом [20]:

$$\sigma_y(p^*, s, \varepsilon_p, \varepsilon_p^*) = f_c \sigma_y^*(p^*, F_r(\varepsilon_p, p^*), \varepsilon_p) R_3(\theta, p^*),$$

которая и является композицией двух функций и параметра прочности на сжатие  $f_c$ . Первая описывает зависимость давления для главных напряжений ( $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$ ) и выражается через поверхность разрушения и нормализованную пластическую деформацию как

$$\sigma_y^*(p^*, F_r, \varepsilon_p^*) = \sigma_f^* \left( \frac{p^*}{y}, F_r \right) y, \text{ где } y = \varepsilon_p^* + 1(1 - \varepsilon_p^*) F_e F_c.$$

Поверхность разрушения задается как [19]:

$$\sigma_f^*(p^*, F_r) = \begin{cases} A(p^* - F_r/3 + (A/F_r)^{-1/n})^n & 3p^* \geq F_r \\ F_r f_s^*/Q_1 + 3p^*(1 - f_s^*/Q_1) & F_r > 3p^* \geq 0 \\ F_r f_s^*/Q_1 - 3p^* \left( 1/Q_2 - \frac{f_s^*}{Q_1 f_t^*} \right) & 0 > 3p^* \geq 3p_t^* \\ 0 & 3p_t^* > 3p^* \end{cases},$$

где  $p_t^* = \frac{F_r Q_2 f_s^* f_t^*}{3(Q_1 f_t^* - Q_2 f_s^*)}$  критическое давление,  $F_r$  — множитель динамического роста давления и

$$Q_1 = R_3(\pi/6, 0) \quad Q_2 = Q(p^*).$$

В этих выражениях  $f_t^*$  и  $f_s^*$  представляют собой прочность бетона на растяжение и сдвиг относительно прочности на сжатие  $f_c$ , и значения  $Q$  вводятся для учета меридианной зависимости растяжения и сдвига.

Для описания пониженной прочности на сдвиг и растяжение введем следующее обозначение:

$$R_3(\theta, p^*) = \frac{2(1 - Q^2) \cos \theta + (2Q - 1) \sqrt{4(1 - Q^2) \cos^2 \theta + 5Q^2 - 4Q}}{4(1 - Q^2) \cos^2 \theta + (1 - 2Q)^2},$$

где  $\theta$  — угол Лодэ получен из тензора девиатора напряжений  $s$  [21]:

$$\cos 3\theta = \frac{27 \det(s)}{2\bar{\sigma}(s)^3} \quad \bar{\sigma}(s) = \sqrt{\frac{3}{2} s : s}.$$

Максимальная потеря прочности описывается как функция относительного давления:

$$Q = Q(p^*) = Q_0 + Bp^*.$$

Окончательно, зависимость скорости деформации определяется как [20]:

$$F_r(\varepsilon_p, p^*) = \begin{cases} F_r^c & 3p^* \geq F_r^c \\ F_r^c - \frac{3p^* - F_r^c}{F_r^c + F_r^t f_t^*} (F_r^t - F_r^c) & F_r^c > 3p^* \geq -F_r^t f_t^* \\ F_r^t & -F_r^t f_t^* > 3p^* \end{cases},$$

где

$$F_r^{c/t}(\varepsilon_p) = \begin{cases} \left( \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_p^{c/t}} \right)^{\beta_{c/t}} & \varepsilon_p \leq \varepsilon_p^{c/t} \\ y_{c/t} \sqrt[3]{\varepsilon_p} & \varepsilon_p > \varepsilon_p^{c/t} \end{cases}.$$

Параметры, используемые в этих выражениях, задаются как:

$$\beta_c = \frac{4}{20 + 3f_c} \quad \beta_t = \frac{2}{20 + f_c},$$

где  $y_{c/t}$  — определяется из условий непрерывности [20].

Тогда, как предел поверхности текучести представлен:

$$F_c(p^*) = \begin{cases} 0 & p^* \geq p_c \\ \sqrt{1 - \left( \frac{p^* - p_u^*}{p_c^* - p_u^*} \right)} & p_c > p^* \geq p_u^* \\ 1 & p_u^* > p^* \end{cases},$$

где

$$p_c^* = \frac{p_c}{f_c} \quad p_u^* = \frac{F_r^c g_c^*}{3} + \frac{G^* \varepsilon_p}{f_c}.$$

Упрочнение описывается линейно по отношению к пластической деформации, где

$$\varepsilon_p^* = \min \left( \frac{\varepsilon - p}{\varepsilon_p^h}, 1 \right) \quad \varepsilon_p^h = \frac{\sigma_y(p^*, s, \varepsilon_p, \varepsilon_p^*)(1 - FeFc)}{y3G^*}$$

здесь

$$G^* = \xi G,$$

где  $G$  — модуль сдвига исходного материала, а  $\xi$  — понижающий фактор, отражающий упрочнение.

Когда упрочнение достигает предела прочности бетона на поверхности разрушения, повреждения накапливаются при дальнейшем неупругом нагружении, контролируемой пластической деформацией. Пластическая деформация при разрушении определяется как [20]:

$$\varepsilon_p^f = \begin{cases} D_1(p^* - (1 - D)p_t^*)^{D_2} & p^* \geq (1 - D)p_t^* + \left(\frac{\varepsilon_p^m}{D - 1}\right)^{1/D_2} \\ \varepsilon_p^m & (1 - D)p_t^* + \left(\frac{\varepsilon_p^m}{D_1}\right)^{1/D_2} > p^* \end{cases}.$$

Параметр повреждения при пластическом деформировании определяется в соответствии с

$$D = \int_{\varepsilon_p^h}^{\varepsilon_p} \frac{d\varepsilon_p}{\varepsilon_p^f},$$

и полученная поверхность разрушения дана как:

$$\sigma_d(p^*, s, \varepsilon_p) = \begin{cases} \sigma_y(p^*, s, \varepsilon_p, 1)(1 - D) + D f_c \sigma_r^*(p^*) & p^* \geq 0 \\ \sigma_y(p^*, s, \varepsilon_p, 1) \left(1 - D - \frac{p^*}{p_t^*}\right) & (1 - D)p_t^* \leq p^* < 0 \end{cases},$$

где  $\sigma_r^*(p^*) = A_f(p^*)^{n_f}$ .

Для демонстрации работы, приведенной выше модели, была решена задача о расчете взрывозащитного сооружения показанного на рис. 3-4. Решение выполнено на базе LS-DYNA из пакета ANSYS, [8, 12] где реализована модель RHT. Материалом конструкции принимался бетон с прочностью 35 МПа, величина заряда 1,4 кг в тротиловом эквиваленте [19].

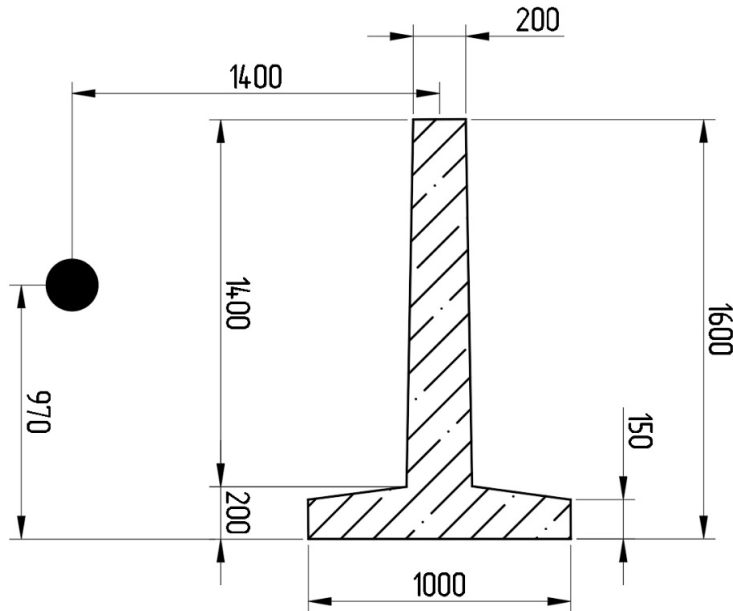


Рис. 3: Вид конструкции сбоку



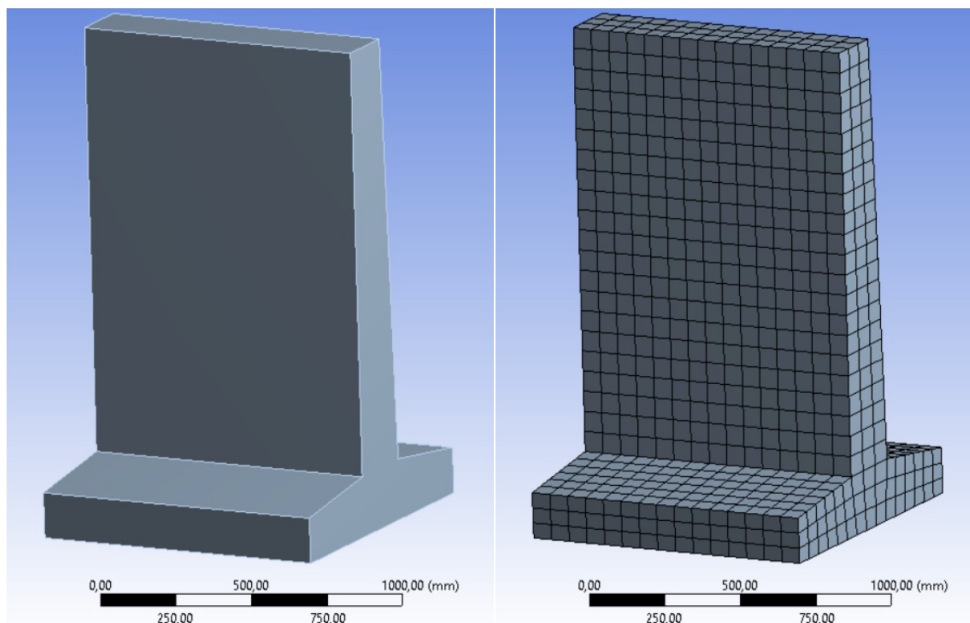


Рис. 5: Общий вид расчетной модели и разбиение на КЭ

нейность материалов, а также сложную конфигурацию сооружений и расположение внешней нагрузки.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баженов Ю.М. Бетон при динамическом нагружении. М.: Стройиздат, 1970. 271 с.
2. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
3. Бирбраер А. Н., Роледер А. Ю. Экстремальные воздействия на сооружения. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 594 с.
4. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. М.: Мир, 1984. 428 с.
5. Козлитин А. М., Попов А. И., Козлитин П. А. Теоретические основы и практика анализа техногенных рисков. Вероятностные методы количественной оценки опасностей техносферы. Саратов: СГТУ, 2002. 178 с.
6. Дегтярев Д. В., Лисанов М. В., Сумской С. И., Швыряев А. А. Количественный анализ риска при обосновании взрывоустойчивости зданий и сооружений // Безопасность труда в промышленности, 2013, № 6. С. 82–89.
7. Мартынюк В. Ф. Лекции по теории горения и взрыва: учеб. пособие. М.: Изд. центр РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2014. 184 с.
8. Журавлев Г. М., Куриен Н. С. Математическое моделирование взрывного воздействия неконтактного заряда на изотропную бетонную плиту // Тезисы 20-ой Международной научно-технической конференции «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СТРОИТЕЛЬСТВА, СТРОИТЕЛЬНОЙ ИНДУСТРИИ И АРХИТЕКТУРЫ». Тула, 2019. С. 194–197.

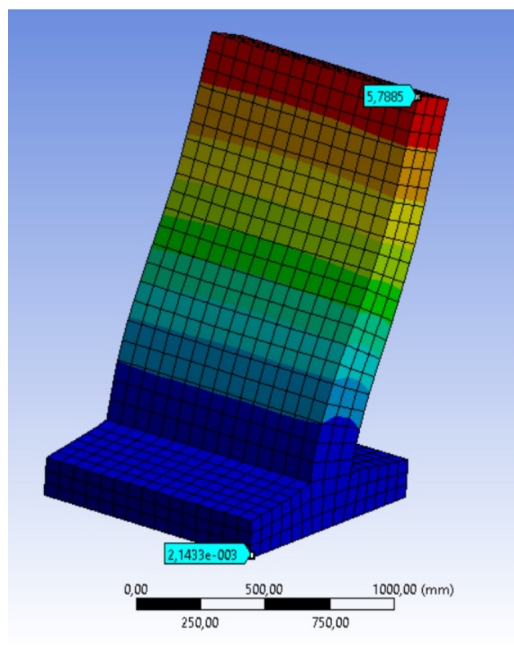


Рис. 6: Результаты расчета перемещений (деформированная схема), мм

9. Методика оценки последствий аварийных взрывов топливно-воздушных смесей: рук. по безопасности: приказ Ростехнадзора от 31 марта 2016 г. № 137. Сер. 27. Вып. 15. М.: ЗАО НТЦ ПБ, 2016. 44 с.
10. Методы обоснования взрывоустойчивости зданий и сооружений при взрывах топливно-воздушных смесей на опасных производственных объектах: рук. по безопасности: приказ Ростехнадзора от 13 мая 2015 г. № 189. Сер. 27. Вып. 17. М.: ЗАО НТЦ ПБ, 2016. 78 с.
11. Невская Е. Е., Глебова Е. В. Анализ способов и средств повышения уровня защиты зданий и сооружений от действия ударных волн // Безопасность труда в промышленности. 2017. № 2. С. 73–78.
12. Журавлев Г. М., Куриен Н. С. Постановка задачи математического моделирования взрывостойкости и гарантированного разрушения пластин взрывной нагрузкой // Научно-технический журнал. Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии Изд-во ОГУ им. И. С. Тургенева г. Орел, № 2. 2017, С 56–63.
13. Расторгуев Б. С., Плотников А. И., Хуснутдинов Д. З. Проектирование зданий и сооружений при аварийных взрывных воздействиях. М.: Изд-во АСВ, 2007. 152 с.
14. Ефремов К. В., Лисанов М. В., Софьин А. С. и др. Расчет зон разрушения зданий и сооружений при взрывах топливно-воздушных смесей на опасных производственных объектах // Безопасность труда в промышленности. 2011. № 9. С. 70–77.
15. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов М.: Мир, 1979. 392 с.
16. Агапова Е. А., Дегтярев Д. В., Лисанов М. В. и др. Сравнительный анализ российских и зарубежных методик и компьютерных программ по моделированию аварийных выбросов и оценке риска // Безопасность труда в промышленности. – 2015. – № 9. – С. 71–78.

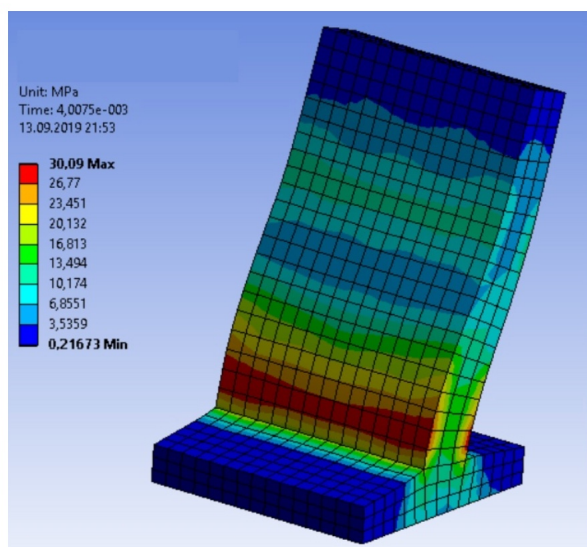


Рис. 7: Результаты расчета напряжений в плите, МПа

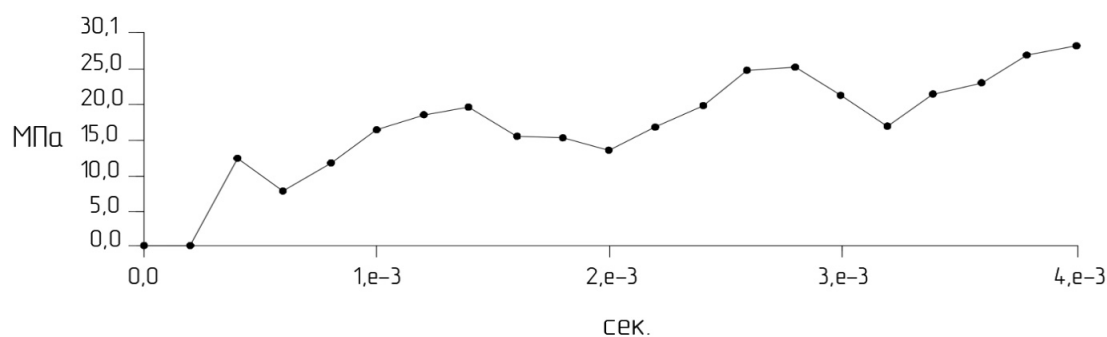


Рис. 8: График изменения максимального давления в конструкции, МПа

17. Физика взрыва / Под ред. Л.П. Орленко. Изд. 3-е, переработанное. В 2 т. Т.1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 832 с.
18. American Society of Civil Engineers «Design of blast resistant buildings in petrochemical facilities». New York, 2010. 318 p.
19. Moxnes J. F. et al. (2014) Experimental and numerical study of the fragmentation of expanding warhead casings by using different numerical codes and solution technics. Defence Technology, vol. 10, pp. 161-176.
20. Riedel W., Thoma K., Hiermaier S. Schmolinske E. (1999) Penetration of reinforced concrete by BETA-B-500. Numerical analysis using a new macroscopic concrete model for hydrocodes. Proceeding of 9th international symposium on interaction of the effects of munitions with structures. Berlin, pp. 315-322.
21. Tham C. Y. (2005) Reinforced concrete perforation and penetration simulation using Autodyn 3D. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 41, pp. 1401-1410.

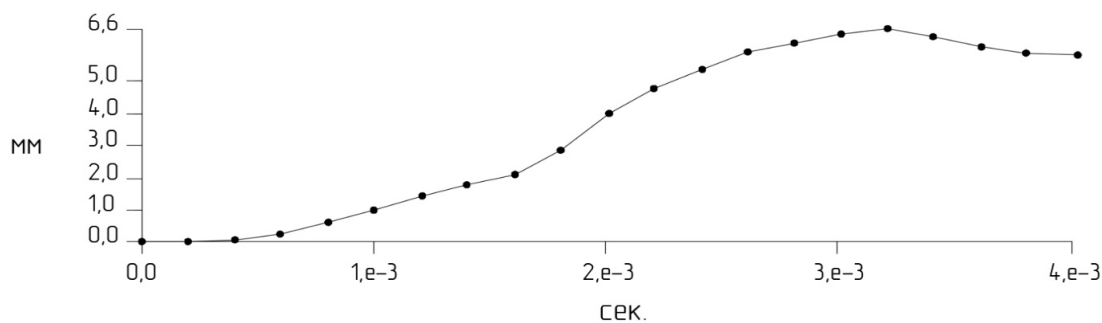


Рис. 9: График изменения максимального значения перемещений, с

22. Uddin N. Blast Protection of Civil Infrastructures and Vehicles Using Composites. New York, 2010. 488 p.

## REFERENCES

1. Bazhenov, Y. M. (1970), *Concrete under dynamic loading*, Moscow, Stroizdat, 271 p.
2. Bate, K., Wilson, E. (1982) *Numerical methods of analysis and the finite element method*, Moscow, Stroizdat, 448 p.
3. Birbraer, A. N., Roleder, A. Yu. (2009) *Extreme impacts on structures*. St. Petersburg: Publishing house of Polytech, UN-TA, 594 p.
4. Gallagher, R. (1984) *Finite element method. Basics*, Moscow, Mir, 428 p.
5. Kozlitin, A. M., Popov, A. I., Kozlitin, P. A. (2002) *Theoretical bases and practice of analysis of technogenic risks. Probabilistic methods for quantifying the dangers of the technosphere*, Saratov, SSTU, 178 p.
6. Degtyarev, D. V., Lisanov, M. V., Sumskey, S. I., Shvyryaev, A. A. (2013), «Quantitative risk analysis in justifying the explosion resistance of buildings and structures», *Labor Safety in industry*, No. 6, pp. 82-89.
7. Martynyuk, V. F. (2014) *Lectures on the theory of combustion and explosion*, Moscow, Russian state University of oil and gas. I. M. Gubkina, 184 p.
8. Zhuravlev, G. M., Kurien N. S., (2019), «Mathematical modeling of the explosive effect of a non-contact charge on an isotropic concrete slab», *Theses of the 20th International scientific and technical conference «ACTUAL PROBLEMS of CONSTRUCTION, CONSTRUCTION INDUSTRY and ARCHITECTURE»*. Tula, 2019, pp. 194-197.
9. Methodology for assessing the consequences of emergency explosions of fuel and air mixtures: safety guide. Rostekhnadzor order №137 of March 31, 2016. Ser. 27. Vol. 15, Moscow, ZAO STC PB, 2016. 44 p.
10. Methods for substantiating the explosion resistance of buildings and structures during explosions of fuel and air mixtures at hazardous production facilities: safety guide: Rostekhnadzor order No. 189 of may 13, 2015, Ser. 27, Vol. 17, Moscow, ZAO STC PB, 2016, 78 pp.

11. Nevskaya, E. E., Glebova, E. V. (2017), «Analysis of ways and means of increasing the level of protection of buildings and structures from the action of shock waves», *Labor Safety in industry*, No. 2. Pp. 73-78.
12. Zhuravlev, G. M., Kurien, N. S. (2017), «Statement of the problem of mathematical modeling of explosion resistance and guaranteed destruction of plates by explosive load», *Scientific and technical journal. Fundamental and applied problems of engineering and technology*, No. 2, pp. 56-63.
13. Rastorguev, B. S., Plotnikov, A. I., Khusnutdinov, D. Z. (2007) *Design of buildings and structures in case of emergency explosive impacts*, Moscow, ASV publishing House, 152 p.
14. Efremov, K. V., Lisanov, M. V., Sofin, A. S., etc. (2011) «Calculation of zones of destruction of buildings and structures during explosions of fuel and air mixtures at hazardous production facilities», *Labor Safety in industry*, No. 9. pp. 70-77.
15. Segerlind, L. (1979) *Application of the finite element method*, Moscow, Mir, 392 p.
16. Agapova, E. A., Degtyarev, D. V., Lisanov, M. V., et al. (2015) «Comparative analysis of Russian and foreign methods and computer programs for modeling emergency emissions and risk assessment», *Labor Safety in industry*, No. 9, pp. 71-78.
17. *Physics of explosion*, Editor Orlenko, L. P., T.1, Moscow, FIZMATLIT, 2002, 832 pp.
18. American Society of Civil Engineers (2010) «Design of blast resistant buildings in petrochemical facilities», New York, 318 p.
19. Moxnes, J.F. et al. (2014) «Experimental and numerical study of the fragmentation of expanding warhead casings by using different numerical codes and solution technics», *Defence Technology*, vol. 10, pp. 161-176.
20. Riedel, W., Thoma, K., Hiermaier, S. Schmolinske, E. (1999) «Penetration of reinforced concrete by BETA-B-500. Numerical analysis using a new macroscopic concrete model for hydrocodes», *Proceeding of 9th international symposium on interaction of the effects of munitions with structures*, Berlin, pp. 315-322.
21. Tham, C.Y. (2005) «Reinforced concrete perforation and penetration simulation using Autodyn 3D», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 41, pp. 1401-1410.
22. Uddin, N. (2010) *Blast Protection of Civil Infrastructures and Vehicles Using Composites*, New York, 488 p.

Получено 9.04.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 517.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-306-316

Спектральный элемент Лежандра в задачах локализации  
пластических деформаций<sup>1</sup>

В. А. Левин, К. М. Зингерман, К. Ю. Крапивин, М. Я. Яковлев

**Владимир Анатольевич Левин** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной механики механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: v.a.levin@mail.ru*

**Константин Моисеевич Зингерман** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и вычислительной математики, Тверской государственный университет (г. Тверь).

*e-mail: zingerman@rambler.ru*

**Кирилл Юрьевич Крапивин** — ООО «Фидесис» (г. Москва).

*e-mail: k.krapivin@gmail.com*

**Максим Яковлевич Яковлев** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: m.ya.yakovlev@yandex.ru*

## Аннотация

В статье предложен метод спектральных элементов, построенных на полиноме Лежандра для плоских стационарных задач упруго-пластического течения при больших деформациях. Метод спектральных элементов основывается на вариационном принципе, методе Галеркина. Решение указанных задач обладает феноменом локализации пластических деформаций в узких областях - линиях скольжения. Исследована возможность применения спектрального элемента для численного решения указанных задач с разрывными решениями. Условие текучести материала - критерий Мизеса. Напряжения интегрируются методом радиального возврата по неявной обратной схеме Эйлера. Система нелинейных алгебраических уравнений решается итерационным методом Ньютона. Приведено численное решение примера растяжения полосы, ослабленной вырезами с круговым основанием, в плоском напряженном и плоском деформированном состояниях. Получены кинематические поля и предельная нагрузка. Приведены сравнения численных результатов с аналитическим решением, полученным для несжимаемых сред, построенным методом характеристик.

**Ключевые слова:** спектральный элемент, феномен локализации, пластичность, метод характеристик, конечные деформации, итерационный метод Ньютона

**Библиография:** 20 названий.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках базовой части Государственного задания по научной деятельности (проект № 9.7446.2017/8.9) в части, связанной с математической постановкой задачи, при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы в рамках научного проекта № 19-38-70001 в части, связанной с разработкой математического метода и алгоритма решения задачи, и за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10008) в части, связанной с разработкой и верификацией программного обеспечения и анализом результатов расчетов.

**Для цитирования:**

В. А. Левин, К. М. Зингерман, К. Ю. Крапивин, М. Я. Яковлев. Спектральный элемент Лежандра в задачах локализации пластических деформаций // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 306–316.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 517.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-306-316

**Legendre spectral element for plastic localization problems at large scale strains<sup>2</sup>**

V. A. Levin, K. M. Zingerman, K. Yu. Krapivin, M. Ya. Yakovlev

**Vladimir Anatolyevich Levin** — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor of the department of computational mechanics of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: v.a.levin@mail.ru*

**Konstasntin Moiseevich Zingerman** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of chair of mathematical modeling and computational mathematics, Tver State University (Tver).

*e-mail: zingerman@rambler.ru*

**Kirill Yurievich Krapivin** — CAE Fidesys (Moscow).

*e-mail: k.krapivin@gmail.com*

**Maksim Yakovlevich Yakovlev** — candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics of the Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: m.ya.yakovlev@yandex.ru*

**Abstract**

In paper the method of spectral elements based on the Legendre polynomial for time-independent elastic-plastic plane problems at large strains is proposed. The method of spectral elements is based on the variational principle (Galerkin's method). The solution of these problems has the phenomenon of localization of plastic deformations in narrow areas called slip-line or shear band. The possibility of using a spectral element for the numerical solution of these problems with discontinuous solutions is investigated. The yield condition of the material is the von Mises criterion. The stresses are integrated by the radial return method by backward implicit Euler scheme. The system of nonlinear algebraic equations is solved by the Newton's iterative method. A numerical solution is given of an example of stretching a strip weakened by cuts with a circular base in a plane stress and plane deformed state. Kinematic fields and limit load are obtained. Comparisons of numerical results with the analytical solution obtained for incompressible media constructed by the method of characteristics are presented

<sup>2</sup>This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the basic part of the Government task for scientific activity (project No. 9.7446.2017 / 8.9) in the part related to the mathematical formulation of the problem, with financial support from the Russian Foundation of Basic Research and the Moscow Government (project No. 19-38-70001) in the part related to the development of the mathematical method and algorithm for problem solving, with financial support from the Russian Science Foundation (project No. 19-71-10008) in the part related to development and verification of software and analysis of calculation results.

*Keywords:* spectral method, localization phenomenon, plasticity, slip-line, finite strains, iterative Newton's method

*Bibliography:* 20 titles.

#### For citation:

V. A. Levin, K. M. Zingerman, K. Yu. Krapivin, M. Ya. Yakovlev. 2020, "Legendre spectral element for plastic localization problems at large scale strains", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 306–316.

## 1. Введение

Пластическое течение как металлов, так и геоматериалов, при значительных деформациях имеет свойство локализации пластических деформаций в некоторой области. При определенных условиях напряженно-деформированного состояния известен феномен интенсивной локализации сдвиговых пластических деформаций в узких областях, называемых линиями скольжения (shear band). Феномен достаточно хорошо изучен и описан в литературе [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Теоретический анализ, приведенный в литературе, показывает равенство нулю толщины линий скольжения и также, вызываемые их наличием, неединственность и разрывность решения.

Сложность конечно-элементного моделирования процесса формирования линий скольжения связана с тем, что стандартные конечно-элементные формулировки не допускают разрывных решений внутри элементов.

В данной статье для приближенного моделирования разрывных решений используются полиномиальные элементы высокого порядка, называемые спектральными элементами. Первоначально спектральный элемент, построенный на полиноме Чебышева, был предложен для задач вычислительной гидродинамики [14]. В работе [15] спектральный элемент предложен с полиномом Лежандра. Отметим связь задачи об определении узлов интерполяции в спектральном элементе с задачей построения оптимальных кубатурных формул [16]. Спектральные элементы являются аналогом  $h-p$  элемента [13]; применяются в различных дисциплинах: гидродинамика, акустические волны, геофизика, медицина. В задачах упруго-пластического деформирования метод не сильно распространен, например, в [20] рассмотрены задачи упругости для околонежимаемых сред; в [18, 19] рассмотрено применение метода к пластическому деформированию сыпучих дилатирующих сред; обоими авторами решение получено с определяющими соотношениями в малых деформациях.

В данной статье метод спектральных элементов на указанных задачах исследован, учитывая конечность деформаций. Формирование линий скольжения рассмотрено на примере растяжения полосы, ослабленной вырезами с круговым основанием в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний. Для данного примера существует построенное в рамках несжимаемого тела аналитическое решение. Ранее в [21] смоделировано развитие больших деформаций в объемном случае с локализацией и образованием “шейки”, применяя стандартный квадратичный изопараметрический конечный элемент.

## 2. Основные уравнения

### 2.1. Формулировка задачи

Рассматривается статическая задача с учетом конечности деформаций. Уравнение равновесия без инерционных членов в координатах деформированного состояния:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \text{ на } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{t}_n \text{ на } \Gamma_t,\end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — напряжения Коши,  $f$  — вектр массовых сил

Уравнение равновесия в слабой формулировке:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u \cdot f d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot t_n d\Gamma_t, \quad (2)$$

где  $\delta u$  — вариация допустимых перемещений.

## 2.2. Спектральная интерполяция

Перемещение ищется в виде:

$$\mathbf{u} = \sum_a^n N_a(\xi) \bar{\mathbf{u}}_a. \quad (3)$$

В спектральном элементе Лежандра функция формы элемента  $N_a$  определяется как тензорное произведение одномерных полиномов Лагранжа степени  $n = N - 1$  в узлах интерполяции Гаусса - Лобатто - Лежандра (GLL)

$$l_a^n(\xi) = \prod_{b=1; a \neq b}^N \frac{\xi - \xi_b}{\xi_a - \xi_b}$$

$$N_a = l_i^n(\xi_a) l_j^n(\eta_a),$$

где  $i \leq N, j \leq N$  — индексы узла  $a$ ,  $\xi, \eta$  — координаты на референсном квадрате. Координаты точек GLL определяются как корни уравнения:  $(1 - \xi^2)P'_n(\xi) = 0$ , где  $P_n$  — полином Лежандра степени  $n$ .

Для случая  $n = 1$  получается простой результат для изопараметрического элемента:  $N_a = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta)$ .

## 2.3. Кинематические соотношения

Аффино́р деформаций определяется через градиент вектора перемещений  $\mathbf{u}$  следующим образом [12]:

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I} + \overset{0}{\nabla} \mathbf{u}. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{I}$  — единичный тензор.

Тензорные меры деформаций Грина  $\mathbf{C}$  и Фингера  $\mathbf{b}$  определяются через аффино́р деформаций:

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Psi}^*, \quad \mathbf{b} = \boldsymbol{\Psi}^* \cdot \boldsymbol{\Psi},$$

символ  $*$  обозначает транспонирование.

Соотношение для кратности изменения элементарного объёма:

$$J = \det \boldsymbol{\Psi}. \quad (5)$$

Тензор деформации Грина:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

Вариация тензора деформации Грина выражается через вариацию тензора малых деформаций  $\varepsilon$  и аффинов деформаций:

$$\delta E_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \Psi_{ik} \Psi_{jl} = \delta \varepsilon_{ij} \Psi_{ik} \Psi_{jl}$$

## 2.4. Уравнения Галеркина

Подставляя перемещения (3) в уравнения в слабой формулировке (2) получим систему уравнений Галеркина при больших деформациях:

$$K \mathbf{u} = F,$$

$$\begin{aligned} \text{где } K &= \int_{\Omega} B^T \mathbf{a}_{\text{ер}} B d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_a}{\partial x_i} \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial N_b}{\partial x_j} d\Omega, \\ F &= \int_{\Omega} N^T f d\Omega + \int_{\Gamma_t} N^T \bar{t}_n d\Gamma_t - \int_{\omega} B^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega, \\ B_a &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial x_2} & \frac{\partial N}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$\mathbf{a}_{\text{ер}}$  — линеаризованная тангенциальная определяющая матрица.

Система нелинейных алгебраических уравнений решается итерационным методом Ньютона - Рафсона. Для улучшения сходимости используется метод продолжения по параметру.

## 2.5. Определяющие соотношения для упругопластического материала

В случае конечных деформаций аффинов деформаций можно разложить на упругую и пластическую мультипликативные составляющие [8, 9]:  $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}^p \cdot \boldsymbol{\Psi}^e$ .

Упругое поведение материала характеризуется определяющими соотношениями для гиперупругого материала. Эти соотношения записываются в виде, который позволяет не использовать объективные скорости напряжений. Функция накопленной энергии деформации (упругий потенциал) представляется следующим образом:

$$\mathcal{W} = U(J^e) + W(\bar{\mathbf{b}}^e) = \frac{1}{2} K \left( \frac{1}{2} (J^{e^2} - 1) - \ln J^e \right) + \frac{1}{2} \mu (\text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) - 3), \quad (6)$$

где  $\bar{\mathbf{b}}^e = \bar{\boldsymbol{\Psi}}^{e*} \cdot \bar{\boldsymbol{\Psi}}^e$  — сохраняющая объем часть тензора меры упругих деформаций Фингера;  $\bar{\boldsymbol{\Psi}}^e = J^{-\frac{1}{3}} \boldsymbol{\Psi}^e$  — сохраняющая объем часть аффинора упругой деформации;  $K, \mu$  — упругие модули объемного сжатия и сдвига;  $\text{tr}$  — первый инвариант тензора второго ранга.

Тензор напряжений Кирхгофа выражается через упругий потенциал следующим образом:

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \boldsymbol{\Psi}^{e*} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{C}^e} \cdot \boldsymbol{\Psi}^e. \quad (7)$$

Для упругого потенциала, записанного в форме (6), выражение (7) имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{K}{2} J^e \left( J^e - \frac{1}{J^e} \right) \mathbf{I} + \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^e],$$

здесь  $\text{dev}$  — девиатор тензора. Напряжения Коши связаны с напряжениями Кирхгофа:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \boldsymbol{\tau}$$

Условие пластичности Мизеса, записанное в напряжениях Кирхгофа:

$$f_y(\boldsymbol{\tau}, \alpha) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\| - (h(\alpha) + \sigma_0), \quad (8)$$

где  $\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\| = \sqrt{\text{dev}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\tau})}$ ,  $\sigma_0$  — предел текучести,  $h(\alpha)$  — функция упрочнения. Ассоциированный с функцией (8) закон течения [10]:

$$\dot{\mathbf{C}}^{p-1} = -\frac{2}{3}\lambda \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) \boldsymbol{\Psi}^{-1*} \cdot \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Psi}^{-1}, \quad \mathcal{L}_v \bar{\mathbf{b}}^e = -\frac{2}{3}\lambda \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) \cdot \mathbf{n}, \quad (9)$$

где  $\mathcal{L}_v$  — производная Ли,  $\mathbf{n} = \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\tau})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|}$  — нормаль к поверхности напряжений,  $\lambda$  — множитель Лагранжа, для условия Мизеса равный:

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda$$

Замыкающими соотношениями, котрым соответствует внутренняя переменная  $\alpha$  являются условие Куна - Таккера:

$$f(\tau, \alpha) \leq 0, \dot{\alpha} \geq 0, \dot{\alpha} f(\tau, \alpha) = 0$$

и условие совместности:

$$\lambda \dot{f}(\tau, \alpha) = 0. \quad (10)$$

Уравнения (9) интегрируются по обратной неявной схеме Эйлера; обновление напряжений производится методом радиального возврата [11].

Линеаризованная тангенциальная определяющая матрица выписывается из условия совместности (10):

$$\mathbf{a}_{ep} = \mathbf{a}_e - \frac{\nabla_{\sigma} f^T \mathbf{a}_e \otimes \mathbf{a}_e^T \nabla_{\sigma} f}{\mathcal{H} + \nabla_{\sigma} f^T \mathbf{a}_e \nabla_{\sigma} f}$$

### 3. Метод характеристик

В случае несжимаемого материала при малых деформациях решение плоской задачи восстанавливается методом характеристик [1, 2, 3].

В плоском деформированном состоянии система уравнений равновесия является гиперболической, линии скольжения являются ее характеристиками. Направления  $\alpha$  и  $\beta$  линий скольжения определяются свободной от нагрузок формой границы. В нашем случае полосы с вырезами с круговым основанием семейства  $\alpha$  и  $\beta$  будут гиперболическими спиралями, Рис. 1а. Окружное напряжение в окрестности вырезов определяется по формуле  $\sigma_{\phi} = \sigma_0 \ln(1 + \frac{r}{a})$ , где  $r$  расстояние от центра окружности. Элементарная предельная нагрузка равна  $P_0^* = \frac{4}{\sqrt{3}} h \sigma_0$ ,  $\sigma_0$  — предел текучести. Отношение  $P^*/P_0^*$  (коэффициент усиления) выражается следующей формулой:

$$P^*/P_0^* = (1 + \frac{a}{h}) \ln(1 + \frac{h}{a}).$$

Угол  $\gamma$  половины раствора дуги  $AB$ , Рис. 1а, зависит от  $h$ :  $\gamma = \ln(1 + \frac{h}{a})$ .

В плоском напряженном состоянии решение получено в [3]. В окрестности свободной границы уравнения гиперболические. Два семейства  $\alpha$  и  $\beta$ , исходящих от границы линий (Рис. 1б) в точке  $O$  сливаются в одну линию, где уравнения становятся параболическими. Элементарная предельная нагрузка равна  $P_0^* = 2h\sigma_0$ . Отношение  $P^*/P_0^*$  при  $h \leq 1.07$  равняется:

$$P^*/P_0^* \approx 1 + 0.23 \frac{h}{a + h}$$

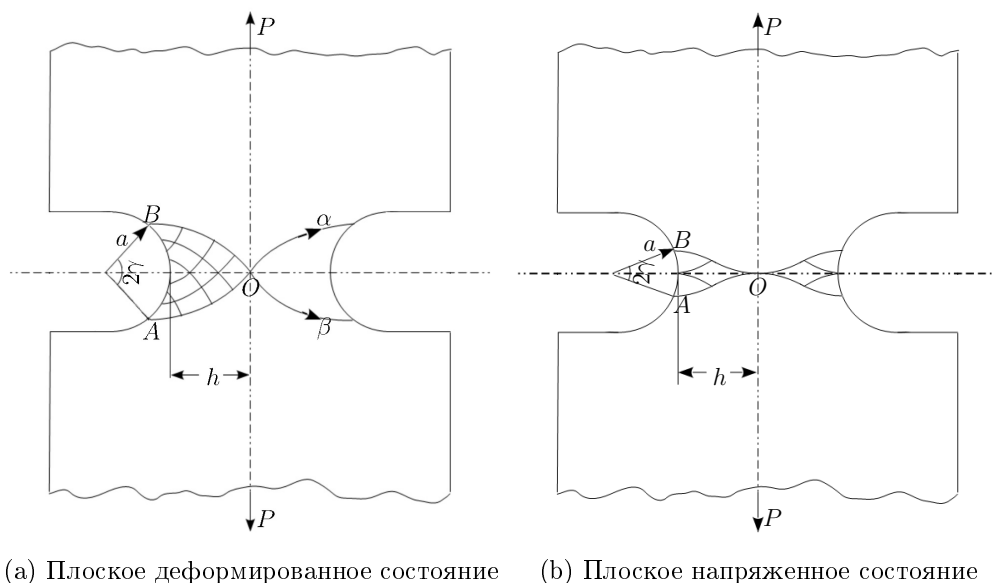


Рис. 1: Вид линий скольжения в области пластического течения

#### 4. Результат численного решения

Полоса шириной  $2l = 200\text{мм}$ , высотой  $4l$  имеет вырезы с круговыми основаниями радиуса  $a = l/2$ , ширина шейки  $h = a$ ,  $h = 1.07a$  в случаях плоского деформированного и плоского напряженного состояний, соответственно. Рассчитана четверть полосы с условиями симметрии на границах; на верхней границе прикладывается перемещение, Рис. 1, 2. Материал рассмотрен близким к несжимаемому с модулем Юнга  $E = 100\text{ГПа}$ , коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.49$  и постоянным пределом текучести  $\sigma_0 = 5\text{МПа}$ ; упрочнение и разупрочнение не применяются.

Зависимости предельной нагрузки от перемещения показаны на Рис. 3. Из рисунка видно соответствие численных значений с аналитическими. Локализация пластических деформаций начинается при достижении нагрузкой максимального значения. На Рис. 4, 5 показана динамика формирования линий скольжения. С увеличением степени интерполяции элемента толщина линий уменьшается. Вдоль линий скольжения в плоском напряженном состоянии в отличие от плоского деформированного состояния наблюдается разрыв не только касатель-

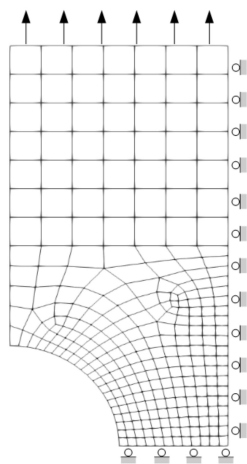
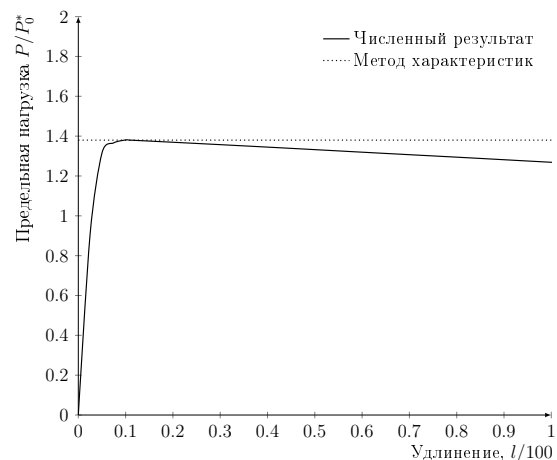
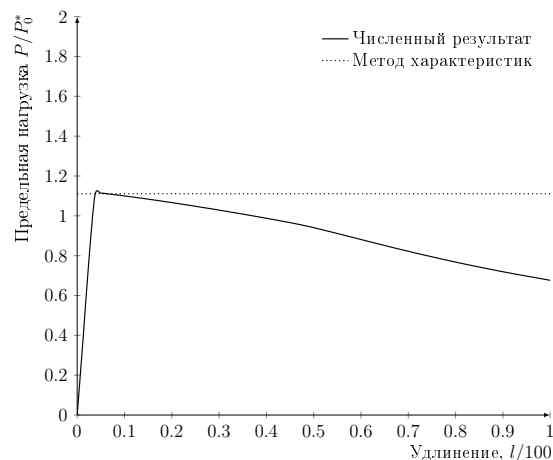


Рис. 2: Конечно-элементная сетка



(a) Плоское деформированное состояние



(b) Плоское напряженное состояние

Рис. 3: Зависимость коэффициента усиления предельной нагрузки от удлинения

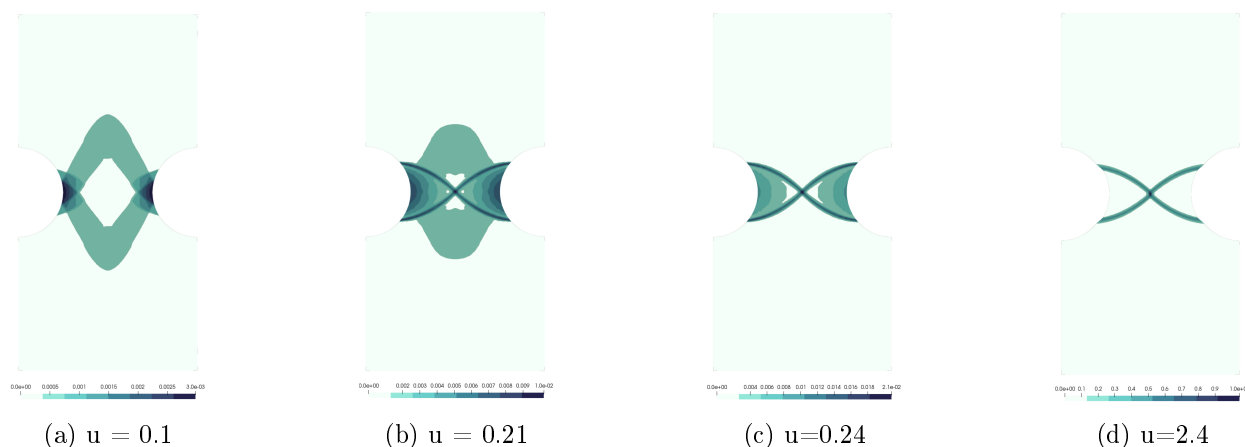


Рис. 4: Формирование линий скольжения в плоском деформированном состоянии. Интенсивность пластических деформаций.

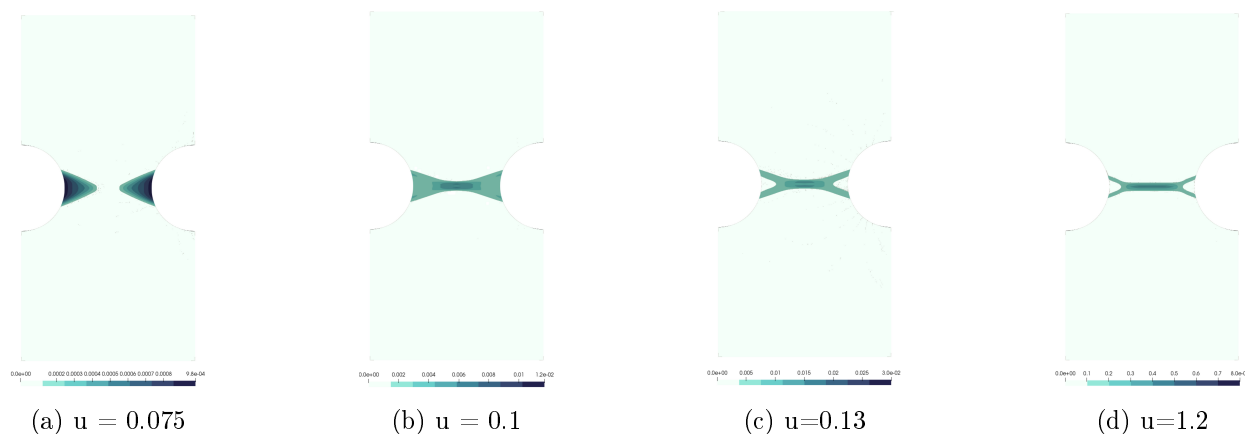


Рис. 5: Формирование линий скольжения в плоском напряженном состоянии. Интенсивность пластических деформаций.

ных перемещений, но и нормальных. В местах локализации при дальнейшем деформировании образуется “шейка”.

Вычисления на элементе первого порядка показали невозможность ни при каком измельчении сетки получить линии скольжения, а также завышенную оценку предельной нагрузки.

## 5. Заключение

С помощью спектрального элемента высокого порядка в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний получены локализации деформаций вдоль линий скольжения, геометрически соответствующие теоритическим. В процессе расчета линии формируются автоматически без дополнительных вмешательств: адаптивного измельчения сетки, критериев локализации или ограничений в определяющие соотношения вдоль направлений локализации. С увеличением порядка спектрального элемента градиент возрастает, толщина линий уменьшается. Заметим, что линейный изопараметрический элемент не позволяет достичь линий скольжения и дает грубое приближение предельной нагрузки, значительное превышающее теоритическое значение. В будущем планируем провести численный анализ для дилатирующих сред, пластическое поведение которых зависит от вида напряженного состояния.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. 1969. Наука, Москва. 420 стр.
2. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Физматлит, Москва, 2001. 704 стр.
3. Соколовский В. В. Теория пластичности, 3-е изд. 1969. Наука, Москва. 608 стр.
4. Rice J.R. The Localization of Plastic Deformation. Proceedings of the 14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics. W.T. Koiter. NorthHolland Publishing Co. 1976. Vol. 1. P. 207-220.
5. Tvergaard V., Needleman A., Lo K. K. Flow localization in the plane strain tensile test. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1981. Vol. 29. Issue 2. P. 115-142.
6. Needleman A., Rice J. R. Limits to ductility set by plastic flow localization. Mechanics of Sheet Metal Forming. 1978. P. 237-264.
7. Hill R., Hutchinson J. W. Bifurcation phenomena in the plane tension test. J. Mech. Phys. Solids. 1975. Vol. 23. P. 239-264.
8. Lee E. H. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. Journal of Applied Mechanics. 1969. Vol. 36. Issue 1. P. 1-6.
9. Mandel, J. Contribution theorique a l'etude de l'ecrouissage et des lois de l'ecoulement plastique. Proceedings of the 11th International Congress on Applied Mechanics. 1966. P. 502-509.
10. Simo J. C., Hughes T. J. R. Computational Inelasticity, Vol. 7. 1998. Springer Verlag. New York. 392 p.
11. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The finite element method for solid and structural mechanics. Seventh Edition. Elsevier, 2014
12. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. – 512 стр.

13. Babuška I., Suri M. The p- and h-p versions of the finite element method, an overview. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 80, Issues 1–3, 1990, P. 5-26
14. Patera A. T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. Journal of Computational Physics, 54(3), 468–488.
15. Rønquist, E.M. and Patera, A.T. (1987), A Legendre spectral element method for the Stefan problem. Int. J. Numer. Meth. Engng., 24: 2273-2299. doi:10.1002/nme.1620241204
16. Шабозов М. Ш. (2014). Об одной оптимальной кубатурной формуле для классов функций, задаваемых модулями непрерывности. Модел. и анализ информ. систем. Т. 21, вып. 3. С. 91–105.
17. Liu, Z. L., Menouillard, T. and Belytschko, T. (2011). An XFEM/Spectral element method for dynamic crack propagation. International Journal of Fracture, 169(2), 183–198.
18. Gharti H. N., Komatitsch D., Oye V., Martin R. and Tromp J. (2012). Application of an elastoplastic spectral-element method to 3D slope stability analysis. Int. J. Numer. Meth. Engng., 91(1), 1-26.
19. Gharti H. N., Oye V., Komatitsch D. and Tromp J., (2012) Simulation of multistage excavation based on a 3D spectral-element method, Computers & Structures, V. 100–101. P. 54-69. doi: 10.1016/j.compstruc.2012.03.005
20. Peet Y. T. and Fischer P. F. (2014) Legendre spectral element method with nearly incompressible materials, European Journal of Mechanics - A/Solids, V. 44, P. 91-103.
21. Абрамов С.М., Амелькин С.А., Ключев Л.В., Крапивин К.Ю., Ножницкий Ю.А., Серветник А.Н., Чичковский А.А. Использование программы Фидесис для моделирования развития больших пластических деформаций во вращающемся диске. Чебышевский сборник. 2017;18(3):15-27.

## REFERENCES

1. *Kachanov L. M.* Foundations of the theory of plasticity. Amsterdam: North-Holland, 1971. 482 p.
2. *Ishlinskii A. Yu., Ilev D. D.* Mathematical Theory of Plasticity (in Russian). Fizmatlit, Moscow, 2001. 704 p.
3. *Sokolovsky W. W.* Theory of Plasticity (in Russian), 3rd ed. 1969. Nauka, Moscow. 608 p.
4. Rice J.R. The Localization of Plastic Deformation. Proceedings of the 14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics. W.T. Koiter. NorthHolland Publishing Co. 1976. Vol. 1. P. 207-220.
5. Tvergaard V., Needleman A., Lo K. K. Flow localization in the plane strain tensile test. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1981. Vol. 29. Issue 2. P. 115-142.
6. Needleman A., Rice J.R. Limits to ductility set by plastic flow localization. Mechanics of Sheet Metal Forming. 1978. P. 237-264.
7. Hill R., Hutchinson J.W. Bifurcation phenomena in the plane tension test. J. Mech. Phys. Solids. 1975. Vol. 23. P. 239-264.

8. Lee E.H. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. Journal of Applied Mechanics. 1969. Vol. 36. Issue 1. P. 1-6.
9. Mandel, J. Contribution theorique a l'etude de l'ecrouissage et des lois de l'ecoulement plastique. Proceedings of the 11th International Congress on Applied Mechanics. 1966. P. 502-509.
10. Simo J. C., Hughes T. J. R. Computational Inelasticity, Vol. 7. 1998. Springer Verlag. New York. 392 p.
11. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D.* The finite element method for solid and structural mechanics. Seventh Edition. Elsevier, 2014
12. *Lurie A.I.* Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980. – 512p.
13. Babuška I., Suri M. The p- and h-p versions of the finite element method, an overview. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 80, Issues 1–3, 1990, P. 5-26
14. Patera A. T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. Journal of Computational Physics, 54(3), 468–488.
15. Rønquist, E.M. and Patera, A.T. (1987), A Legendre spectral element method for the Stefan problem. Int. J. Numer. Meth. Engng., 24: 2273-2299. doi:10.1002/nme.1620241204
16. Shabozov M.S. (2014) On an Optimal Quadrature Formula for Classes of Functions Given by Modulus of Continuity. Modelirovanie i Analiz Informatsionnykh Sistem. V. 21, No. 3. P. 91–105. (in Russian).
17. Liu, Z. L., Menouillard, T. and Belytschko, T. (2011). An XFEM/Spectral element method for dynamic crack propagation. International Journal of Fracture, 169(2), 183–198.
18. Gharti H. N., Komatitsch D., Oye V., Martin R. and Tromp J. (2012). Application of an elastoplastic spectral-element method to 3D slope stability analysis. Int. J. Numer. Meth. Engng., 91(1), 1-26.
19. Gharti H. N., Oye V., Komatitsch D. and Tromp J., (2012) Simulation of multistage excavation based on a 3D spectral-element method, Computers & Structures, V. 100–101. P. 54-69. doi: 10.1016/j.compstruc.2012.03.005
20. Peet Y. T. and Fischer P. F. (2014) Legendre spectral element method with nearly incompressible materials, European Journal of Mechanics - A/Solids, V. 44, P. 91-103.
21. Abramov S.M., Amel'kin S.A., Kljuev L.V., Krapivin K.J., Nozhnickij J.A., Servetnik A.N., Chichkovskij A.A. Modeling the development of large plastic deformations in a rotating disk it the fidesys program. Chebyshevskii Sbornik. 2017;18(3):15-27. (In Russ.)

Получено 11.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 539.12.01

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-317-335

**80-летие профессора  
Владимира Николаевича Безверхнего**

А. Е. Устьян, И. В. Добрынина, Ю. Э. Трубицын, А. С. Угаров,  
Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва

**Ашот Енофович Устьян** — кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: ustyans77@mail.ru*

**Ирина Васильевна Добрынина** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, Академия гражданской защиты МЧС России (г. Москва).

*e-mail: dobrynirina@yandex.ru*

**Юрий Эдвардович Трубицын** — кандидат физико-математических наук, доцент (США).

**Андрей Сергеевич Угаров** — ассистент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: ugarandrey@gmail.com*

**Николай Михайлович Добровольский** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: dobrovol@tspu.ru*

**Ирина Юрьевна Реброва** — кандидат физико-математических наук, декан факультета математики, физики и информатики, доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: i\_rebrova@mail.ru*

**Аннотация**

Авторы статьи ставили перед собой две главные задачи: охарактеризовать основные этапы жизни профессора Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого Владимира Николаевича Безверхнего и дать краткий анализ его научной и педагогической деятельности, имеющей значительное влияние на развитие комбинаторной теории групп.

Особо отмечаются исследования профессора В. Н. Безверхнего и его учеников по алгоритмическим проблемам теории групп и полугрупп.

В. Н. Безверхний, являясь учеником профессора М. Д. Гриндлингера, руководит семинаром "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп аспирантурой по комбинаторной теории групп.

Среди его учеников 8 человек защитили кандидатские диссертации, причём один из них впоследствии стал доктором физико-математических наук.

**Ключевые слова:** группа, подгруппа, образующие, определяющие соотношения, алгоритмические проблемы.

**Библиография:** 42 название.

**Для цитирования:**

Устьян А. Е., Добрынина И. В., Трубицын Ю. Э., Угаров А. С. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю. 80-летие профессора Безверхнего Владимира Николаевича // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 317–335.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 539.12.01

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-317-335

### The 80th anniversary of professor Vladimir Nikolaevich Bezverkhni

A. E. Ustyan, I. V. Dobrynina, Yu. E. Trubitsyn, A. S. Ugarov,  
N. M. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova

**Ashot Enofovich Ustyan** — candidate of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: ustyan37@mail.ru*

**Irina Vasilievna Dobrynina** — doctor of physics and mathematics, professor, professor of the department of higher mathematics of the Academy of Civil Protection of the Ministry of Emergencies of Russia (Moscow).

*e-mail: dobrynirina@yandex.ru*

**Yuri Edvardovich Trubitsyn** — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor (USA).

**Andrey Sergeevich Ugarov** — assistant of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: ugarandrey@gmail.com*

**Nikolai Mihailovich Dobrovolsky** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: dobrovol@tsput.ru*

**Irina Yuryevna Rebrova** — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: i\_rebrova@mail.ru*

**Abstract**

The authors of the article set themselves two main tasks: to characterize the main stages of life of a professor at Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University Vladimir Nikolaevich Bezverkhni and to give a brief analysis of his scientific and pedagogical activity, which has a significant impact on the development of the combinatorial group theory.

The studies of Professor V. N. Bezverkhni and his students on algorithmic problems in the theory of groups and semigroups are particularly noted.

V. N. Bezverkhni, a student of Professor M. D. Grindlinger, conducts the seminar "Algorithmic Problems of Group and Semigroup Theory" and supervises postgraduate studies in combinatorial group theory.

Among his students, 8 people defended their Ph.D. theses, and one of them later became Doctor in Physics and Mathematics.

*Keywords:* group, subgroup, generators, defining relations, algorithmic problems

*Bibliography:* 42 titles.

**For citation:**

Ustyan A.E., Dobrynina I.V., Trubitsyn Y.E., Ugarov A. S., Dobrovolsky N. M., Rebrova I. Yu., 2020, "The 80th anniversary of professor V. N. Bezverkhniy" *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 317–335.

## 1. Введение



Владимир Николаевич Безверхний родился 31 января 1940 года в г. Севастополь Крымской области в семье военнослужащего. С 1947 по 1957 год учился в общеобразовательной школе. Во время учёбы отличался математическими способностями, хорошо рисовал. Всегда увлекался чтением книг и любил музыку, в основном серьёзную, в частности неплохо знал оперные произведения. После окончания школы два года работал слесарем на судоремонтном заводе в г. Севастополь. С 1959 по 1962 годы служил в рядах Советской Армии. После окончания службы, в 1962 году, поступил на математический факультет Тульского государственного педагогического института (ТГПИ) им. Л. Н. Толстого, где был одним из лучших студентов. Учился увлечённо, много читал математической литературы, не ограничиваясь только программным материалом. Был победителем математических олимпиад. Окончил институт в 1966 году.

## 2. Трудовая и научная деятельность

С сентября 1966 по январь 1968 года работал ассистентом на кафедре высшей математики Рязанского сельскохозяйственного института, после чего перешёл на ту же должность на кафедру высшей математики Тульского политехнического института.

В ноябре 1968 года поступил в аспирантуру при кафедре алгебры и теории чисел Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого, научный руководитель — профессор М. Д. Гриндлингер.



Рис. 1: М. Д. Гриндлингер с учениками, 1978 год. Первый ряд: Ю. А. Игнатов, В. А. Гринблат, М. Д. Гриндлингер, В. Н. Безверхний, В. И. Классен. Второй ряд: А. Е. Устьян, И. С. Безверхняя, А. А. Чеботарь, Е. И. Гриндлингер, И. Пак, Я. А. Кофнер, Н. А. Пионтковская, Третий ряд: Р. А. Александров, О. М. Александрова, Л. Р. Трахтенберг, И. И. Шатрова, А. И. Некрицухин, А. И. Бобровский

После окончания аспирантуры, с ноября 1971 года, вернулся на кафедру высшей математики Тульского политехнического института на должность ассистента.

В 1974 году защитил кандидатскую диссертацию на тему "Проблемы вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп" в Ленинградском государственном педагогическом институте им. А. И. Герцена.

В 1975 году по конкурсу избран на должность старшего преподавателя на кафедру высшей математики Тульского высшего артиллерийского инженерного училища. С 1979 года — доцент этой кафедры, а с 1985 по июнь 1988 года — заведующий кафедрой.

Владимир Николаевич вёл все виды занятий по курсу высшей математики: аналитическую геометрию и линейную алгебру, математический анализ, теорию вероятностей и др.

В. Н. Безверхний активно поддерживал и всячески содействовал изданию в ТГПИ им. Л. Н. Толстого математических сборников научных трудов, тесно сотрудничая с их главным редактором М. Д. Гриндлингером, причем с 1983 года был его заместителем, а в 1994-2001 годах — главным редактором.

Под руководством М. Д. Гриндлингера и В. Н. Безверхнего выпущены:

- Ученые записки математических кафедр (под общей редакцией М. Д. Гриндлингера, 1970 год, 310 стр.).
- Вопросы теории групп и полугрупп (1972 год, 200 стр.)
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (Межвузовский сборник научных трудов, 1981 год, 133 стр.)
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложения (1983 год, 120 стр.)
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1986 год, 124 стр.)
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1990 год, 183 стр.)
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1991 год, 162 стр.)
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1994 год, 132 стр., отв. редактор — проф. В. Н. Безверхний)
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (2001 год, 200 стр., отв. редактор — проф. В. Н. Безверхний)

С 24 ноября 1988 г. доцент кафедры математического анализа ТГПИ им. Л. Н. Толстого.

2 сентября 1991 г. переведен на должность доцента кафедры алгебры, 25 июня 1992 г. избран на должность профессора этой же кафедры. В 1993 году В. Н. Безверхний стал руководителем аспирантуры по специальности 01.01.06. — математическая логика, алгебра и теория чисел. По его инициативе на факультете появилась традиция приглашать в комиссию по приёму кандидатских экзаменов у аспирантов профессора МГУ А. Л. Шмелькина, что существенно поднимало планку требовательности и качества знаний.

Владимир Николаевич установил тесные научные контакты с алгебраистами МГУ им. М. В. Ломоносова, Московского педагогического государственного университета, Ленинградского педагогического университета им. А. И. Герцена, Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова, Ивановского государственного университета.

Благодаря В. Н. Безверхнему, к чтению лекций для студентов и аспирантов на математический факультет приглашали известных учёных, докторов наук и профессоров, таких как А. Л. Шмелькин, В. Н. Латышев, В. Н. Чубариков, М. М. Глухов и других.

С 27 июня 1995 г. В. Н. Безверхний был переведён на должность старшего научного сотрудника для завершения докторской диссертации. Основанием служило письмо профессора кафедры высшей алгебры МГУ А. Л. Шмелькина, который считал, что полученные и опубликованные в центральных математических журналах результаты В. Н. Безверхнего по решению проблем вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп составляют не менее 70% докторской диссертации.

Срок пребывания на должности старшего научного сотрудника — с 1 июля 1996 г. по 31 августа 1997 г.

За период творческого отпуска Владимир Николаевич подготовил докторскую диссертацию. Она состоит из шести глав и содержит 400 страниц. Результаты диссертации докладывались на семинаре по теории групп под руководством профессоров А. Л. Шмелькина и А. Ю. Ольшанского, на научно-исследовательский семинаре по алгебре в МГУ, а также на международных конференциях в Новосибирске (1989), Туле (1996), Санкт-Петербурге (1997).



Рис. 2: А. Е. Устьян (слева), В. Н. Безверхний (в центре) и А. Ю. Ольшанский (справа) на XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза

В 1999 году В. Н. Безверхний защитил докторскую диссертацию на тему "Проблемы вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп" в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Степень доктора физико-математических наук присвоена в 1999 году.

С 1 февраля 2001 года по июль 2002 года Владимир Николаевич заведовал кафедрой алгебры и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

В. Н. Безверхний на посту заведующего кафедрой показал себя исключительным руководителем кафедрой. Он создал на кафедре доброжелательную, отличную рабочую обстановку для работы и творческого роста членов кафедры. Под его руководством кафедра динамично развивалась.

С 8 апреля 2002 года — профессор кафедры высшей математики Академии гражданской защиты МЧС России. Ведет курсы по высшей математике, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей и математической статистике, продолжает руководить аспирантурой по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел в Тульском государственном педагогическом университете им. Л. Н. Толстого.

Следует отметить талант В. Н. Безверхнего не только как ученого, но и как педагога. Его лекции интересны, содержательны и одновременно построены с большим педагогическим тактом. Удивительна его способность находить талантливых молодых людей и ставить им

математические задачи, соответствующие их наклонностям и возможностям.

Интеллигентность, доброжелательность и требовательность, душевные и профессиональные качества снискали уважение не только студентов и преподавателей, но и всех тех, кому довелось сотрудничать с Владимиром Николаевичем.

В 2004 году В. Н. Безверхнему присуждено ученое звание профессора.

Награжден грамотой Министерства образования. Отличник народного просвещения.

Руководил проектами № 00-01-00767-а, № 03-01-00198-а, №15-41-03222 р\_а, №19-41-710002 р\_а, поддержанными РФФИ, а также проектом РД № 02-1.1-209, поддержанным Министерством образования России.

### 3. Основные результаты

#### 3.1. Решение алгоритмических проблем в групповых конструкциях

Основными алгоритмическими проблемами, поставленными М. Дэном в одной из его работ в 1911 г., являются проблемы равенства и сопряженности слов в конечно определенных группах, а также сформулированная Х. Титце проблема изоморфизма групп.

Исследование этих проблем стимулировало развитие комбинаторных методов в теории групп, что явилось причиной возникновения одного из самых активно развивающихся направлений современной математики — комбинаторной теории групп. В настоящее время имеется целый ряд книг, посвященных данной теме; среди них достаточно назвать монографии Карраса, Магнуса и Солитера, а также Линдона и Шуппа.

Среди работ, связанных с исследованием алгоритмических проблем, наиболее выдающимися являются работы П. С. Новикова, доказавшего неразрешимость проблемы равенства слов в конечно определенных группах, им же доказана неразрешимость проблемы изоморфизма групп.

С. И. Адяном определено понятие наследственного нетривиального свойства группы и доказано, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольной группы с конечным числом образующих и определяющих соотношений распознать выполнимость свойства  $\beta$ , представляющего собой объединение нетривиального наследственного и инвариантного свойства, если только существуют группы, обладающие свойством  $\beta$ .

Из этого результата следует, что практически все проблемы, относящиеся к конечно определенным группам, в общем случае неразрешимы. Сюда относятся, в частности, такие проблемы, как распознавание нильпотентности, конечности, простоты, свободы или единичности группы, включая основные проблемы теории групп.

Отрицательное решение проблемы равенства слов явилось причиной изучения алгоритмических проблем в определенных классах групп.

Для групп с разрешимой проблемой равенства слов возникает более общая проблема — проблема вхождения, впервые решенная Нильсеном в свободных группах и Магнусом в группах с одним определяющим соотношением для так называемых магнусовых подгрупп.

Известно, что проблема вхождения в классе всех конечно определенных групп неразрешима, это непосредственно следует из связи между проблемой вхождения и проблемой равенства слов. Поэтому естественно возникает интерес к изучению рассматриваемой проблемы для каких-то фиксированных классов групп. Как было отмечено выше, положительное решение проблемы вхождения в свободных группах следует из результата Нильсена.

К. А. Михайловой этот результат был обобщен на свободное произведение групп, доказано, что если в группах  $A$  и  $B$  разрешима проблема вхождения, то она разрешима в их свободном произведении.

В отличие от свободного произведения, прямое произведение групп, как доказала К. А. Михайлова, не наследует свойства сомножителей иметь разрешимой проблему вхождения, а

именно: в прямом произведении двух свободных групп ранга 2 проблема вхождения неразрешима.

Г. Г. Щепиным, рассмотревшим данную проблему для нильпотентного произведения групп, установлено, что нильпотентное произведение групп в общем случае не наследует свойство сомножителей «иметь разрешимой проблему вхождения».

Обозначим через  $A$  класс амальгамных групп. В. Н. Безверхним [1], [2] выделен подкласс  $A_0$  групп вида  $F_m *_H F_n$ , где  $F_m, F_n$  — свободные группы, соответственно, рангов  $m, n$ , объединенных по конечно порожденной подгруппе  $H$ ; было доказано, что в группах  $G = F_m *_C F_n$ , где  $C$  — бесконечная циклическая подгруппа, проблема вхождения разрешима [1], тем не менее, во всем подклассе  $A_0$  — неразрешима [2]. Указан пример группы вида  $F_2 *_H F_2^*$ , где  $H < F_2$  — конечно порожденная подгруппа ранга 4,  $\phi$  — изоморфизм сомножителей, проблема вхождения в которой неразрешима.

Для свободных произведений групп В. Н. Безверхним [3] была доказана разрешимость проблемы сопряженности подгрупп при условии, что в сомножителях разрешимы проблема вхождения и сопряженности подгрупп.

В. Н. Безверхним [4] доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с циклическим объединением и ее неразрешимость в свободном произведении свободных групп рангов 2, объединенных по подгруппе ранга 4 [5].

А. И. Мальцевым была поставлена проблема о нахождении образующих пересечения конечно порожденных подалгебр данной алгебры. С данной проблемой тесно связано свойство Хаусона подалгебр данной алгебры, а именно, алгебра обладает свойство Хаусона, если пересечение конечно порожденных подалгебр есть конечно порожденная подалгебра.

Для свободных групп проблема А. И. Мальцева о пересечении подгрупп решена В. Н. Безверхним [6].

Конструктивное доказательство теоремы Б. Баумслага, данное в статье [7], позволило решить указанную проблему А. И. Мальцева для свободного произведения групп. Доказано, что если сомножители  $G_i, i = 1, 2$ , обладают свойством Хаусона и в них разрешимы: (1) проблема А. И. Мальцева о пересечении подгрупп; (2) существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп  $H_1, H_2$  и элемента  $w_i$  установить, пусто или непусто  $wH_1 \cap H_2$ , то в группе  $G = G_1 * G_2$  разрешимы проблема Мальцева и проблема (2).

В статье [8] данные результаты были обобщены на свободное произведение групп с объединением и на  $HNN$ -расширения групп. Рассмотрим группу

$$G^* = \langle G, t; \text{rel } G, t^{-1}U_1t = \phi(U_1) \rangle,$$

являющуюся  $HNN$ -расширением группы  $G$  с помощью конечных изоморфных подгрупп  $U_1, U_{-1}$  и фиксированного изоморфизма  $\phi: \phi(U_1) = U_{-1}$ ;  $t$  — не принадлежащая  $G$  правильная проходная буква; группа  $G$  называется основой группы  $G^*$ , изоморфные подгруппы  $U_1, U_{-1}$  группы называются ассоциированными подгруппами  $G^*$ .

В. Н. Безверхним введено понятие специального множества [9]. Приведем его ниже.

Конечное множество слов  $W = w_{i=1, \overline{N}}$  группы  $G^*$  назовем специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) закрытая левая половина слова  $w_i \in W$ , являющегося нетрансформой, изолирована в  $W$ ; если  $w_i$  — нетрансформа четной длины, то ее закрытые левая и правая половина изолированы в  $W$ ;

2) длину слова  $w_j \in W$ , являющегося нетрансформой, нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством  $\{\{w_i\}_{i=1, \overline{N}} w_j\}$ ; длину произвольного элемента  $w_j \in W$  нельзя уменьшить, умножая на слово  $v \in \langle \{w_i\}_{i=1, \overline{N}} \rangle$ ,  $L(v) < L(w_j)$ ;

3) пусть

$$w^\epsilon = t^\alpha l_{1w_j} t^{\epsilon_1} \dots l_{sw_j} t^{\epsilon_s} K_{w_j} t^{s'_s} r_{sw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^\beta,$$

где  $\alpha, \beta = 0, \pm 1, \epsilon = \pm 1, w_j$  — нетрансформа из  $W$ , имеющая четное число слогов, либо

$$w^\epsilon = t^\alpha l_{1w_j} t^{\epsilon_1} \dots l_{sw_j} h t^{\epsilon_s} r_{sw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^\beta,$$

где  $\alpha, \beta = 0, \pm 1, \epsilon = \pm 1, w_j$  — нетрансформа из  $W$ , имеющая нечетное число слогов и

$$\{w_\gamma^{\nu_\gamma} = t_\gamma^\alpha l_{1w_\gamma} t^{\epsilon_1} \dots l_{sw_j} h t^{\epsilon_s} r_{sw_j} t^{\epsilon_{s-1}'} \dots r_{i+1}, w_\gamma t^{\epsilon_i} r_{iw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^\beta\},$$

где  $\nu_\gamma = \pm 1, \alpha_\gamma = 0, \pm 1$  есть подмножество нетрансформ из  $\{\{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \setminus w_j\} \cup \{\{w_i^{-1}\}_{i=\overline{1,N}} \setminus w_j^{-1}\}$ , закрытая правая половина которых оканчивается на  $t^{\epsilon_i} r_{iw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^\beta$ ; тогда если подгруппа

$$H = \langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle \cap t^{-\beta} r_{1w_j}^{-1} t^{-\epsilon'_1} \dots t^{-\epsilon'_i} G t^{\epsilon_i} r_{iw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^\beta \neq E$$

( $E$  - единичная подгруппа), то  $\forall u \in HL(w_j u) \geq L(w_j), L(w_j u w_\gamma^{-\nu_\gamma}) \geq L(w_j)$ ;

4) пусть

$$w_i^\epsilon = t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\epsilon_1} \dots l_{pw_i} t^{\epsilon_p} \dots l_{nw_i} t^{\epsilon_n} \dots t^{\epsilon'_i} r_{iw_i} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_i} t^{\beta_1}$$

$$w_j^\nu = t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\nu_1} \dots l_{pw_j} t^{\nu_p} \dots l_{nw_j} t^{\nu_n} \dots t^{\nu'_i} r_{iw_j} \dots t^{\nu'_1} r_{1w_j} t^{\beta_2}$$

где  $\epsilon = \pm 1, \nu = \pm 1, \alpha_t = 0, \pm 1, \beta_t = 0, \pm 1, t = 1, 2$  - слова из  $\{\{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \cup \{w_i^{-1}\}_{i=\overline{1,N}}\}$ , не обязательно различные,  $t^{\alpha_1} l_{1w_i} \dots l_{pw_i} t^{\epsilon_p}$  — начальное подслово закрытой левой половины  $w_i^\nu$ ,  $t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\nu_1} \dots l_{pw_j} t^{\nu_p}$  — начальное подслово закрытой левой половины  $w_j^\nu$ . Если

$$t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_{p-1}} l_{pw_i} \neq t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\nu_1} \dots t^{\nu_{p-1}} l_{pw_j},$$

то не существует слов  $w \neq 1, w \in \langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle, L(w) < 2p$ , такого что

$$w \cdot w_j^\nu = t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_{p-1}} l_{pw_i} t^{\nu_p} l'_{p+1, w_j} \dots r_{1w_j} t^{\beta_2}.$$

**ТЕОРЕМА 1.** Если в группе  $G^*$  ее основа  $G$  обладает свойством Хаусона, то и  $G^*$  обладает свойством Хаусона.

Из теоремы Мюллера-Шуппа следует, что группа

$$G = \langle G_1 * G_2; rel G_i, i = 1, 2, U_i = \phi(U_1) \rangle,$$

где  $U_1 < G_1, U_{-1} = \phi(U_1) < G_2$ , изоморфно вкладывается в группу

$$G^* = \langle G_1 * G_2, t; rel G_i, i = 1, 2, t^{-1} U_1 t = \phi(U_1) \rangle$$

с помощью отображения  $\psi: \forall g_1 \in G_1, \psi_{g_1} = t^{-1} g_1 t; \forall g_2 \in G \psi(g_2) = g_2$ .

Отсюда получается, что понятие специального множества является общим для свободных групповых конструкций и, будучи обобщением нильсеновского множества свободной группы, может быть успешно применено к исследованию различных алгоритмических проблем и различных свойств подгрупп в свободных групповых конструкциях.

Пусть  $A, B$  — группы с одним определяющим соотношением и с кручением, и группа  $G = A *_C B$  является свободным произведением групп  $A, B$  с циклическим объединением  $C$ .

**ТЕОРЕМА 2.** В группе  $G = A *_C B$ , являющейся свободным произведением групп  $A, B$  с циклическим объединением, где сомножители  $A, B$  есть группы с одним определяющим соотношением и с кручением, разрешима проблема степенной сопряженности слов.

В процессе доказательства данной теоремы, В. Н. Безверхним была доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности слов и проблема степенной сопряженности слов в группах с одним определяющим соотношением и с кручением, а также

**ТЕОРЕМА 3.** В группе  $G = A *_C B$ , являющейся свободным произведением групп  $A, B$  с циклическим объединением, где сомножители  $A, B$  есть группы с одним определяющим соотношением и с кручением, разрешима проблема сопряженности слов.

При доказательстве данных теорем для групп с одним определяющим соотношением и с кручением В. Н. Безверхним была доказана алгоритмическая разрешимость ряда других проблем, представляющих самостоятельный интерес, например: пересечение произвольной циклической подгруппы  $\langle g \rangle$  и магнусовой подгруппы  $M$ ; проблемы пересечения циклических подгрупп; доказано, что для любого  $w \in G$  и любой магнусовой подгруппы  $M < G$  можно эффективно установить, существует ли  $n \in \mathbb{Z}^+$  ( $\mathbb{Z}^+$  - множество натуральных чисел) и  $z \in G$  такие, что  $z^{-1}w^n z \in M$  и другие проблемы.

Обозначим через  $\bar{A}$  класс групп вида

$$G = \langle G_1 * G_2; \text{rel} G_i, i = 1, 2; H_1 = \phi(H_1) \rangle,$$

являющихся свободным произведением групп  $G_i, i = 1, 2$ , с объединением по изоморфным свободным конечно порожденным подгруппам  $H_1, H_2 = \phi(H_1), H_i < G_i, i = 1, 2, G_i$  - группы с одним определяющим соотношением и с кручением.

**ТЕОРЕМА 4.** В классе групп  $\bar{A}$  проблема сопряженности слов алгоритмически неразрешима.

Тем не менее, В. Н. Безверхним было доказано, что если в качестве объединяемых подгрупп  $H_i < G_i, i = 1, 2$ , взять изоморфные магнусовы подгруппы, объединенные с помощью конструктивного изоморфизма  $\phi$ , то получим группу  $G$  с разрешимой проблемой сопряженности и степенной сопряженности слов.

В работе [10] положительно решена проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с ассоциированными циклическими подгруппами. Представленный результат является обобщением известного результата С. Липшуца для свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением. При решении основной проблемы доказывается разрешимость проблемы пересечения конечно порожденной подгруппы данного класса групп с циклической подгруппой, принадлежащей сомножителю основной группы, а так же проблема пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической подгруппой, принадлежащей сомножителю.

В работе [11] была установлена разрешимость проблемы сопряженности подгрупп в свободном произведении двух циклических групп с объединением по циклической подгруппе.

### 3.2. Исследование алгоритмических проблем в группах Артина и $C(p) \& T(q)$ -группах

Группа кос задается образующими  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  и определяющими соотношениями:  
 $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, i, j = 1, \dots, n, |i-j| > 1.$

Обобщением групп кос являются группы Артина.

Группа Артина — это группа  $G$ , заданная копредставлением с системой образующих  $a_i, i \in J$ , и соотношениями  $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_i a_j \rangle^{m_{ji}}, i \neq j, i, j \in J$ , где слова, стоящие

слева и справа, состоят каждое из  $m_{ij}$  чередующихся букв  $a_i, a_j, m_{ij}$  — элементы матрицы Кокстера  $M = (m_{ij})_{i,j \in J}$ , соответствующий данной группе  $G$ , причем  $\forall i \in J, m_{ii} = 1, \forall i, j \in J, i \neq j, m_{ij} \geq 2, m_{ij} = m_{ji}$

Добавляя к определяющим соотношениям группы Артина  $G$  соотношения:  $\forall i \in J, a_i^2 = 1$ , получим копредставление группы Кокстера  $\bar{G}$ .

Группа Артина  $G$  называется группой Артина конечного типа, если соответствующая ей группа Кокстера  $\bar{G}$  конечна. Известно, что группа кос  $A_n$  (с  $n$  образующими) принадлежит классу групп Артина конечного типа.

Группа Артина  $G$  называется неприводимой, если множество ее образующих  $X$  нельзя разбить на два непустых множества  $X_1, X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset, X = X_1 \cup X_2$ , таких, что каждый элемент из  $X_1$  коммутирует с каждым элементом из  $X_2$ .

Каждой неприводимой группе Артина  $G$  соответствует связный граф Кокстера  $\Gamma$ , вершины которого соответствуют образующим  $G$ . Любые две вершины  $a$  и  $b$  графа  $\Gamma$  соединены ребром, если  $m_{ab} \geq 3, m_{ab}$  — элемент матрицы Кокстера, соответствующий данной группе; если вершины  $c$  и  $d$  соединены путем, состоящим более, чем из одного ребра, то  $m_{cd} = 2$ .

Неприводимыми группами Артина конечного типа являются следующие группы: группа кос  $A_n, n \geq 1; B_n, n \geq 2; D_n, n \geq 4; E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4; J_2(p), p = 5$  или  $p \geq 7$ .

Известно, что каждая группа Артина конечного типа является либо одной из групп  $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4; J_2(p), p = 5$  или  $p \geq 7$ , либо прямым произведением неприводимых групп.

В. Н. Безверхним были доказаны следующие теоремы.

**ТЕОРЕМА 5.** *В группах Артина конечного типа:  $B_n, n \geq 4; D_n, n \geq 4; F_4, H_4, E_6, E_7, E_8$  проблема вхождения неразрешима.*

**ТЕОРЕМА 6.** *В группах  $A_2, A_3, B_2, B_3, H_3, G_2, J_2(p)$  проблема вхождения разрешима.*

В. Н. Безверхним совместно с В. А. Гринблатом было введено понятие крашеной подгруппы группы Артина конечного типа. Была доказана разрешимость обобщенной проблемы сопряженности слов в крашенных подгруппах групп Артина конечного типа [12].

В статье [13] доказана алгоритмическая неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп в группе крашенных кос  $R_5$ .

Совместно с И. В. Добрыниной проведено изучение нормализаторов некоторых классов подгрупп группы кос  $B_{n+1}$  [14].

Если  $m_{ij} \geq 3$  для всех  $i \neq j \in J$ , то группа Артина называется группой Артина большого типа. Если  $m_{ij} > 3$  для всех  $i \neq j \in J$ , то группа Артина называется группой Артина экстрабольшого типа.

Для групп Артина большого типа с помощью геометрического метода доказана разрешимость проблемы сопряженности слов [15].

В. Н. Безверхний решил обобщенную проблему сопряженности слов в группах Артина большого типа [16].

Для групп Кокстера большого типа решена проблема обобщенной сопряженности слов, доказано, что централизатор конечно порожденной подгруппы конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие. Показано, что в общем случае централизатор конечно порожденной группы не является циклическим. Построен пример группы данного класса, не являющейся гиперболической группой [17].

Для групп Кокстера экстрабольшого типа предложен алгоритм, который по двум элементам находит порождающий элемент пересечения их циклических подгрупп [18].

Известно, что группы Кокстера являются группами, порожденными отражениями евклидова пространства. Кроме того, группы Артина, а в частности группы кос, непосредственно используются в криптографии.

Совместно с О. В. Инченко в работе [19] дано описание централизатора элементов конечного порядка конечно порожденной группы Кокстера с древесной структурой.

В. Н. Безверхним и О. Ю. Карповой была решена проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина с древесной структурой [20].

В работе [21] было рассмотрено решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа.

С О. Ю. Платоновой была описана структура централизатора элементов в группах Артина с древесной структурой [22].

В работе [23] была доказана теорема о свободных подгруппах для групп Артина с древесной структурой: пусть  $H$  — конечно порожденная подгруппа группы Артина  $G$  с древесной структурой, причем для любого  $g \in G$  и любой подгруппы  $G_{ij}, i \neq j$ , выполнено равенство  $gHg^{-1} \cap G_{ij} = E$ , то  $H$  является свободной. В доказательстве основной теоремы использованы идеи В. Н. Безверхнего о приведении множества образующих подгруппы к специальному.

В статье [24] В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя, И. В. Добрынина, О. В. Инченко, А. Е. Устьян произвели анализ результатов по решению алгоритмических проблем в группах Кокстера, полученных членами Тульской алгебраической школы “Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп” под руководством В. Н. Безверхнего. Дан обзор утверждений и теорем, доказанных авторами статьи для различных классов групп Кокстера: групп Кокстера большого и экстрабольшого типов, групп Кокстера с древесной структурой, групп Кокстера с  $n$ -угольной структурой. Приводятся основные подходы и методы доказательства, среди которых метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним, в части, введения  $R$ -сокращений, специальных  $R$ -сокращений, специальных кольцевых сокращений, а также метод графов, метод типов, введенный В. Н. Безверхним, метод специального множества слов, разработанный В. Н. Безверхним на основе обобщения метода Нильсена на свободные конструкции групп. Рассмотренные в статье классы групп включают все группы Кокстера, которые либо принадлежат данным классам групп, либо могут быть представлены как обобщенные древесные структуры групп Кокстера, образованные из групп Кокстера с древесной структурой заменой некоторых вершин соответствующего дерева-графа группами Кокстера большого или экстрабольшого типов, а также группами Кокстера с  $n$ -угольной структурой.

В статье [25] рассмотрены обобщенные древесные структуры групп Кокстера, представляющие собой древесные произведения групп Кокстера экстрабольшого типа и групп Кокстера с древесной структурой. Обобщенные древесные структуры групп Кокстера, также как группы Кокстера экстрабольшого типа и группы Кокстера с древесной структурой, относятся к гиперболическим группам, поэтому в них решено большинство алгоритмических проблем, в частности, алгоритмически разрешима проблема обобщенной сопряженности слов. Предлагается оригинальный метод доказательства алгоритмической разрешимости проблемы обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера. Данный метод использует подход Г. С. Маканина, примененный им для доказательства конечной порожденности нормализатора элемента в группах кос. Кроме того, в данной работе показывается, что централизатор конечно порожденной подгруппы в обобщенной древесной структуре групп Кокстера конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

В статье [26] определяются группы Артина с  $m$ -угольной структурой.

Группа Артина (Кокстера) называется группой с  $m$ -угольной структурой, если соответствующий граф состоит из  $m$ -угольников,  $m \geq 3$ ; элементы соответствующей матрицы Кокстера удовлетворяют условиям  $m_{ij} \geq 2, i \neq j, m_{ii} = 1$ . Доказаны следующие теоремы:

**ТЕОРЕМА 7.** *В группе Артина с  $m$ -угольной структурой,  $m > 3$ , разрешима проблема равенства слов.*

**ТЕОРЕМА 8.** *В группе Артина с  $t$ -угольной структурой,  $t > 3$ , разрешима проблема сопряженности слов.*

В [27] рассматривалась ширина вербальных подгрупп в классе групп Артина с двумя порождающими.

В статье [28] В. Н. Безверхним и А. Е. Устьяном вводится понятие полугруппы Артина большого (экстрабольшого) типа. Доказывается инъективное вложение этих полугрупп в соответствующие им группы Артина большого (экстрабольшого) типа и разрешимость проблемы сопряженности слов в данном классе полугрупп.

Конечно определенную группу  $G$ , множество определяющих соотношений которой образует симметризованное множество, удовлетворяющее условию малого налегания  $C(6)$ ,  $C(4)$  и  $T(4)$ ,  $C(3)$  и  $T(6)$ , является  $C(p)&T(q)$ -группой.

В зависимости от того, какие значения принимают  $p$  и  $q$ , получается соответствующий класс групп.

**ТЕОРЕМА 9.** [29] *Пусть  $H$  — конечно порожденная подгруппа конечно определенной группы  $G$ , принадлежащей классу  $C(p)&T(q)$ -групп. Тогда централизатор  $C_G(H)$  подгруппы  $H$  конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.*

**ТЕОРЕМА 10.** *В конечно определенной группе, принадлежащей классу  $C(p)&T(q)$ -групп разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

**ТЕОРЕМА 11.** *Существует алгоритм, позволяющий для любого конечно множества слов из конечно определенной групп  $G$  класса  $C(p)&T(q)$  выписать образующие их нормализатора.*

**ТЕОРЕМА 12.** *Для того, чтобы нормализатор циклически несократимого в свободной группе слова  $w \in G$ , где  $G$  есть  $C(p)&T(q)$ -группа, была расширением циклической группы  $\langle w \rangle$  с помощью конечной, необходимо и достаточно существование такого натурального числа  $n(w)$ , которого не превосходит ширина любой кольцевой неприводимой  $R$ -диаграммы сопряженности  $w$  с  $w$ .*

Под шириной кольцевой диаграммы понимается число ее слоев.

Совместно с А. Е. Устьяном получено обобщение известной теоремы В. Магнуса об изоморфизме групп с одним определяющим соотношением на группы  $C(3)&T(6)$ . Из доказанной теоремы получены следствия на группе с малым сокращением [30]. В работе [31] получены обобщения известной теоремы В. Магнуса об изоморфизме групп с одним определяющим соотношением и теоремы Гриндлингера об изоморфизме групп с условием  $C'(\frac{1}{6})$  на группы  $C(6)$  и  $C(4)&T(4)$  и  $C(3)&T(6)$ . Из доказанной теоремы получены следствия на группе с малым сокращением.

## 4. Научная школа В. Н. Безверхнего

Фундаментальные результаты по теории групп и полугрупп Владимира Николаевича Безверхнего во многом определили дальнейшее развитие этих областей математики.

В. Н. Безверхний руководит научным семинаром и научной школой "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп", основанной М. Д. Гриндлингером.

Под руководством В. Н. Безверхнего защищены докторская диссертация [32]:

- Добрынина Ирина Васильевна "Решение алгоритмических проблем в группах Кокстера" (ЯрГУ, 2010);

кандидатские диссертации [33] - [41]:

- Добрынина Ирина Васильевна "О подгруппах в группах крашенных кос и группах Артина конечного типа"(МПУ, 1997),
- Паршикова Елена Владиславовна "Проблемы степени и степенной сопряженности в группах с условиями  $C(4)&T(4)$ "(МПУ, 2001),
- Новикова Ольга Александровна "Решение алгоритмических проблем для свободного произведения с коммутирующими подгруппами"(МПУ, 2002),
- Безверхняя Наталия Борисовна "Гиперболичность, SQ-универсальность и некоторые другие свойства групп с одним определяющим соотношением"(МПУ, 2002),
- Инченко Оксана Владимировна "Некоторые алгоритмические проблемы в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой"(МПУ, 2010),
- Кузнецова Анна Николаевна "Некоторые алгоритмические проблемы в группах Артина большого и экстрабольшого типа"(МПУ, 2010),
- Платонова Оксана Юрьевна "Решение некоторых алгоритмических проблем в группах Артина с древесной структурой"(ЯрГУ, 2013).
- Логачева Елена Сергеевна "Проблемы сопряженности слов и подгрупп в свободных конструкциях групп"(ЯрГУ, 2015)

## 5. Заключение

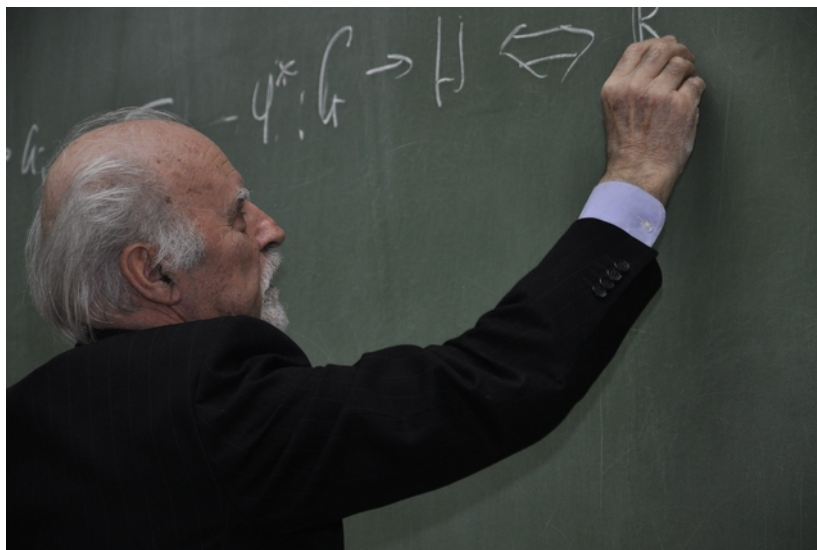


Рис. 3: Выступление В. Н. Безверхнего на XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза

В настоящее время Владимир Николаевич плодотворно занимается наукой: выступал с пленарными и секционными докладами на XVII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. (Тула, ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 23-29 сентября 2019 года), XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза (Тула, ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 13-18 мая 2019 года),

с секционным докладом на Международной конференции, посвященной 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (Москва, МГУ, 27-29 мая 2019 года).

Руководит грантом РФФИ и Правительства Тульской области по исследованию алгоритмических проблем в группах Артина и Кокстера, активно публикуется.

В данной работе авторами использовались материалы из публикации [42].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н. "Решение проблемы вхождения для одного класса групп"// Вопросы теории групп и полугрупп - Тула: Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 1972. С. 3-86.
2. Безверхний В. Н. "О неразрешимости проблемы вхождения для некоторого класса групп"// Сб. науч. тр. каф. высш. матем. - Тула: Из-во ТулПИ, 1974. С. 51-54.
3. Безверхний В. Н. "Решение проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения групп"// IX Всесоюз. алгебр. коллоквиум. Резюме сообщений и докладов. 1971. С. 9-10.
4. Безверхний В. Н. "Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп"// Современная алгебра. Вып. 6. - Л., 1977. С. 16-23, 24-32.
5. Безверхний В. Н. "Неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с объединением"// Сб. науч. тр. каф. высш. матем. - Тула, 1975. С. 90-94.
6. Безверхний В. Н. "О пересечении конечно порожденных подгрупп свободной группы"// Сб. науч. тр. каф. высш. матем. - Тула: Изд-во ТулПИ, 1974., С. 51-56.
7. Безверхний В. Н., Роллов Э. В. "О подгруппах свободного произведения групп"// Современная алгебра, вып. 1. - Л., 1974. С. 16-31.
8. Безверхний В. Н. "О пересечении подгрупп в  $HNN$ -группах"// Фундамент. и прикл. матем., 4:1 - 1998. С. 199-222
9. Безверхний В. Н. "Решение проблемы вхождения в классе  $HNN$ -групп"// Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. научных тр. - Тула, 1981. С. 20-62.
10. Безверхний В. Н., Логачева Е. С., "Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением"// Дискрет. матем., 28:1 - 2016. С. 3-18.
11. Безверхний В. Н., Логачева В. Н., "Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении циклических групп с объединением"// Чебышевский сб., 13:1 - 2012. С. 20-45.
12. Безверхний В. Н., Гринблат В. А., "Решение обобщенной проблемы сопряженности слов в крашенных подгруппах групп Артина конечного типа"// Матем. заметки, 79:5 - 2006. С. 653-661.
13. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. "О неразрешимости проблемы сопряженности подгрупп в группе крашенных кос  $R_5$ "// Матем. заметки. 65:1. - 1999. С. 5-22.
14. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., "О нормализаторах некоторых классов подгрупп в группах кос"// Матем. заметки, 74:1 - 2003. С. 19-31.

15. Безверхний В. Н. "Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа"// Алгоритмические проблемы групп и полугрупп: Мужвуз. сб. науч. тр. - Тула, 1986. С. 26-61.
16. Безверхний В. Н. "Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа"// Фундаментальная и прикладная математика, 5:1 - 1999. С. 1-38.
17. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., "Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа"// Дискрет. матем., 17:3 - 2005. С. 123-145.
18. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., "Решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа"// Дискрет. матем., 20:3 - 2008. С. 101-110.
19. Безверхний В. Н., Инченко О. В., "Централизатор элементов конечного порядка конечно порожденной группы Кокстера с древесной структурой"// Чебышевский сб., 9:1 - 2008. С. 17-27.
20. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю., "Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина с древесной структурой"// Чебышевский сб., 9:1 - 2008. С. 30-49.
21. Безверхний В. Н., Кузнецова А. Н., "Разрешимость проблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа"// Чебышевский сб., 9:1 - 2008. С. 50-68.
22. Платонова О. Ю., Безверхний В. Н., "О структуре централизатора элементов в группах Артина с древесной структурой"// Чебышевский сб., 14:3 - 2013. С. 100-120.
23. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., "О свободных подгруппах в группах Артина с древесной структурой"// Чебышевский сб., 15:1 - 2014. С. 32-42.
24. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., Добрынина И. В., Инченко О. В., Устьян А. Е., "Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера"// Чебышевский сб., 17:4 - 2016. С. 23-50.
25. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., "О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера"// Чебышевский сб., 19:3 - 2018. С. 135-147.
26. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., "Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина"// Фундамент. и прикл. матем., 22:4 - 2019. С. 9-27.
27. Безверхний В. Н., Добрынина И. В., "Решение проблемы конечной ширины в группах Артина с двумя образующими"// Чебышевский сб. 3:1 - 2002. С. 11-16.
28. Безверхний В. Н., Устьян А. Е., "О полугруппах Артина"// Фундамент. и прикл. матем., 22:4 - 2019. С. 39-49.
29. Безверхний В.Н. "О нормализаторах элементов в  $C(p)-T(q)$ -группах"// Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. научных тр. - Тула, 1991. С. 4-58.
30. Безверхний В. Н., Устьян А. Е., "Обобщение одной теоремы Магнуса"// Чебышевский сб., 11:3 - 2010. С. 57-62
31. Безверхний В. Н., Устьян А. Е., "Обобщения теорем В. Магнуса и М. Д. Гриндлингера"// Чебышевский сб. 14:3 - 2013. С. 20-33
32. Добрынина И. В. "Решение алгоритмических проблем в группах Кокстера": дисс. . . . д. физ.-мат. наук. Ярославль. 2010

33. Добрынина И. В. "О подгруппах в группах крашенных кос и группах Артина конечного типа": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 1997.
34. Паршикова Е. В. "Проблемы степени и степенной сопряженности в группах с условиями  $C(4)&T(4)$ ": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2001.
35. Новикова О. А. "Решение алгоритмических проблем для свободного произведения с коммутирующими подгруппами": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2002.
36. Безверхняя Н. Б. "Гиперболичность, SQ-универсальность и некоторые другие свойства групп с одним определяющим соотношением": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2002.
37. Инченко О. В. "Некоторые алгоритмические проблемы в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2010.
38. Кузнецова А. Н. "Некоторые алгоритмические проблемы в группах Артина большого и экстрабольшого типа": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2010.
39. Платонова О. Ю. "Решение некоторых алгоритмических проблем в группах Артина с древесной структурой": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2013.
40. Логачева Е. С. "Проблемы сопряженности слов и подгрупп в свободных конструкциях групп": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Ярославль. 2015.
41. Трубицын Ю. Э. "Алгоритмические проблемы и тождества в полугруппах со свойством Черча-Россера": дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Москва. 1996.
42. Добрынина И. В., Устьян А. Е., Трубицын Ю. Э., "К 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Безверхнего Владимира Николаевича" // Чебышевский сб., 16:1 - 2015. С. 291–300.

## REFERENCES

1. Bezverkhni V. N., 1972, Solution of the entry problem for one class of groups, Questions of the theory of groups and semigroups, pp. 3-86.
2. Bezverkhni V. N., 1974, On the undecidability of the entry problem for a certain class of groups, Collection of scientific works of the department of higher mathematics, pp. 51-54.
3. Bezverkhni V. N., 1971 Solution of the conjugacy problem of subgroups for a free product of groups, IX All-Union Algebraic Colloquium. Summary of communications and reports, pp. 9-10.
4. Bezverkhni V. N., 1977, Solution of the conjugacy problem of subgroups for one class of groups, Modern Algebra, vol. 6., pp. 16-23, 24-32.
5. Bezverkhni V. N., 1975, Unsolvability of the conjugacy problem of subgroups for the free product of free groups with union, Collection of scientific works of the department of higher mathematics, pp. 90-94.
6. Bezverkhni V. N., 1974, On the intersection of finitely generated subgroups of a free group, Collection of scientific works of the department of higher mathematics, pp. 51-56.
7. Bezverkhni V.N., Rollov E.V., 1974, On subgroups of a free product of groups, Modern Algebra, Vol. 1., pp. 16-31.

8. Bezverkhni V. N., 1998, On the intersection of subgroups in  $HNN$ -groups, /Fundamental and Applied Mathematics, Vol. 4 No. 1, pp. 199–222
9. Bezverkhni V.N., 1981, Solution of the problem of occurrence in the class of  $HNN$ -groups, Algorithmic problems in the theory of groups and semigroups, pp. 20-62.
10. Bezverkhni V.N., Logacheva E. S., 2016, The problem of conjugation of words in the tree product of free groups with cyclic union, Discrete Mathematics and Applications, Vol. 28, I. 1, pp. 3–18
11. Bezverkhni V.N., Logacheva V.N., 2012, The problem of conjugacy of subgroups in the free product of cyclic groups with a union, Chebyshev Sb., Vol. 13, No. 1, pp. 20–45.
12. Bezverkhni V.N., Grinblat V.A., Solution of the generalized conjugation problem for words in colored subgroups of Artin groups of finite type, Mathematical Notes, Vol. 79, No. 5, 2006, pp. 653–661.
13. Bezverkhni V.N., Dobrynina I. V., 1999, On the unsolvability of the conjugacy problem for subgroups in the group of colored braids  $R_5$ , Mathematical Notes, Vol. 65, No. 1, pp. 15-22.
14. Bezverkhni V. N., Dobrynina I. V., 2003, On the normalizers of certain classes of subgroups in braid groups, Mathematical Notes, Vol. 74, No. 1, pp. 19–31.
15. Bezverkhni V. N., 1986, Solution of the word conjugacy problem in large Artin and Coxeter groups, Algorithmic problems of groups and semigroups, pp. 26-61.
16. Bezverkhni V. N., 1999, Solution of the generalized conjugacy problem in Artin groups of large type, Fundamental and Applied Mathematics, Vol. 5, No. 1, pp. 1-38.
17. Bezverkhni V.N., Dobrynina I.V., 2005, Solving the problem of generalized conjugacy of words in large Coxeter groups, Discrete Mathematics and Applications, Vol. 17, No. 3, pp. 123–145.
18. Bezverkhni V.N., Dobrynina I.V., 2008, Solving the problem of power conjugacy of words in extra-large Coxeter groups, Discrete Mathematics and Applications, Vol. 20, No. 3, pp. 101–110.
19. Bezverkhni V. N., Inchenko O. V., 2008, Centralizer of finite order elements of a finitely generated Coxeter group with a tree structure”, Chebyshev Sb., Vol. 9, no. 1, pp. 17–27.
20. Bezverkhni V.N., Karpova O. Yu., 2008, The problem of joining a cyclic subgroup in Artin groups with a tree structure, Chebyshev Sb., Vol. 9, No. 1, pp. 30–49.
21. Bezverkhni V. N., Kuznetsova A. N., 2008, Solvability of the power conjugacy problem for words in extra-large type Artin groups, Chebyshev Sb., Vol. 9, No. 1, pp. 50–68.
22. Platonova O. Yu., Bezverkhniy V. N., 2013, On the structure of the centralizer of elements in Artin groups with a tree structure, Chebyshev Sb., Vol. 14, No. 3, pp. 100–120
23. Bezverkhni V. N., Dobrynina I. V., 2014, On free subgroups in Artin groups with a tree structure, Chebyshev Sb., Vol. 15, No. 1, pp. 32–42.
24. Bezverkhni V. N., Bezverkhniy N. B., Dobrynina I. V., Inchenko O. V., Ustyan A. E., 2016, On algorithmic problems in Coxeter groups, Chebyshev Sb., Vol. 17, No. 4, pp. 23–50.
25. Bezverkhni V. N., Dobrynina I. V., 2018, On the problem of generalized conjugacy of words in generalized tree structures of Coxeter groups, Chebyshev Sb., Vol. 19 No. 3, pp. 135–147.

26. Bezverkhonii V. N., Bezverkhniaya N. B., 2019, Solving the problem of equality and conjugacy of words in a certain class of Artin groups, *Fundamental and Applied Mathematics*, Vol. 22, No. 4, pp. 9–27.
27. Bezverkhonii V.N., Dobrynina I.V., 2002, Solution of a finite width problem in Artin groups with two generators, *Chebyshev Sb.*, Vol. 3, No. 1, pp. 11–16.
28. Bezverkhonii V.N., Ustyan A.E., 2019, On Artin semigroups, *Fundamental and Applied Mathematics*, Vol. 22, No. 4, pp. 39–49.
29. Bezverkhonii V. N., 1991, On normalizers in  $C(p)&T(q)$  - groups, *Algorithmic problems in the theory of groups and semigroups*, pp. 4–58.
30. Bezverkhonii V. N., Ustyan A. E., 2010, A generalization of a Magnus theorem, *Chebyshev Sb.*, Vol. 11, No. 3, pp. 57–62
31. Bezverkhonii V. N., Ustyan A. E., 2013, Generalizations of the theorems of V. Magnus and M. D. Greendlinger, *Chebyshev Sb.*, Vol. 14, No. 3, pp. 20–33
32. Dobrynina I. V., 2010, Solution of algorithmic problems in Coxeter groups, Doctor of Science thesis, Yaroslavl
33. Dobrynina I.V., 1997, On subgroups in colored braid groups and Artin groups of finite type, PhD thesis. Tula.
34. Parshikova E. V., 2001, Problems of degree and power conjugacy in groups with conditions  $C(4)&T(4)$ , PhD thesis. Tula.
35. Novikova O. A., 2002, Solution of algorithmic problems for free product with commuting subgroups, PhD thesis. Tula.
36. Bezverkhniyaya N. B., 2002, Hyperbolicity, SQ-universality, and some other properties of groups with one defining relation, PhD thesis. Tula.
37. Inchenko O. V., 2010, Some algorithmic problems in finitely generated Coxeter groups with a tree structure, PhD thesis. Tula.
38. Kuznetsova A. N., 2010, Some algorithmic problems in Artin groups of large and extra large type, PhD thesis. Tula.
39. Platonova O. Yu., 2013, Solution of some algorithmic problems in Artin groups with a tree structure, PhD thesis. Tula.
40. Logacheva E. S., 2015, Problems of conjugacy of words and subgroups in free group constructions, PhD thesis. Yaroslavl.
41. Trubitsyn Yu. E., 1996, Algorithmic problems and identities in semigroups with the Church-Rosser property, PhD thesis. Moscow. 1996.
42. Dobrynina I. V., Ustyan A. E., Trubitsyn Yu. E., 2015, To the 75th anniversary of professor V. N. Bezverkhonii, *Chebyshev Sb.*, Vol. 16, No. 1, pp. 291–300.

Получено 18.07.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

---

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-336-336

## Письмо в редакцию

Д. В. Горбачев, И. А. Мартянов

**Дмитрий Викторович Горбачев** — доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Екатеринбург, г. Тула).

*e-mail: dv@mail.ru*

**Иван Анатольевич Мартянов** — аспирант, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: martyanov.ivan@yandex.ru*

## Аннотация

Исправления к статье “Горбачев Д.В., Мартянов И.А. Взаимосвязь между константами Никольского–Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа. Чебышевский сборник. 2019; 20(3): 143–153. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-143-153>”.

*Ключевые слова:**Библиография:* 0 названий.

## Для цитирования:

Д. В. Горбачев, И. А. Мартянов. Письмо в редакцию // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 336–338.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

---

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-336-336

## Letter to the Editor

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov

**Dmitry Viktorovich Gorbachev** — Doctor of physical and mathematical sciences, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Yekaterinburg, Tula).

*e-mail: dv@mail.ru*

**Ivan Anatol'evich Martyanov** — Graduate student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).

*e-mail: martyanov.ivan@yandex.ru*

## Abstract

Corrections to the article “Gorbachev D.V., Martyanov I.A. Interrelation between Nikolskii—Bernstein constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type. *Chebyshevskii Sbornik*. 2019; 20(3): 143-153. (In Russ.) <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-143-153>”.

*Keywords:*

*Bibliography:* 0 titles.

# For citation:

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov. 2020, "Letter to the Editor", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 336–338.

В статье “Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Взаимосвязь между константами Никольского–Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа. Чебышевский сборник. 2019;20(3):143-153. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-143-153>” нами была допущена неточность в формулировке теоремы 1 (ii). Полностью поправленную версию следует читать так:

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $p \in (0, \infty]$ ,  $r, n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $s \in \mathbb{N}$ .

(i) Если  $2s \geq r + 1$ ,  $n \geq s - 1$ , то для произвольной функции  $F \in \mathcal{E}_1^p$ , такой что  $\|F\|_p = 1$ , имеем

$$\mathcal{C}(n; p; r) \geq (n - s + 1)^{r+1/p} \left( F^{(r)}(0) + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{(-1)^i \binom{r}{2i} A_{s,i}}{n^{2i}} F^{(r-2i)}(0) \right).$$

(ii) Если  $n \geq 1$ ,  $ps \geq 1$ , то для произвольного полинома  $T \in \mathcal{T}_n$ , такого что  $\|T\|_p = 1$ ,

$$T^{(r)}(0) + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} A_{s,i} T^{(r-2i)}(0) \leq (n + s)^{r+1/p} \mathcal{L}(p; r).$$

Здесь в последней оценке вместо “ $n^r(n + s)^{1/p}$ ” теперь стоит правильный множитель “ $(n + s)^{r+1/p}$ ”. Ошибку повлекла предпоследняя формула пункта 2.2, где нужно было использовать свойство точной константы Никольского–Бернштейна  $\mathcal{L}(\sigma; p, \infty; r) = \sigma^{r+1/p} \mathcal{L}(p; r)$  (стояло “ $\sigma^{1/p}$ ”). Степень однородности  $r + 1/p$  вытекает из простого факта, что если  $f_\sigma(x) = f(\sigma x)$ , то  $f_\sigma^{(r)}(0)/\|f_\sigma\|_p = \sigma^{r+1/p} f^{(r)}(0)/\|f\|_p$ .

Данная коррекция автоматически ведет к правкам в следствии 1 (ii), гипотезе и центрированной формуле между ними. Правильные версии записываются следующим образом:

СЛЕДСТВИЕ 1. Имеем (i)

$$\mathcal{C}(n; p; r) \geq (n - s + 1)^{r+1/p} \left( \mathcal{L}(p; r) + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{(-1)^i \binom{r}{2i} A_{s,i}}{n^{2i}} \tilde{F}_r^{(r-2i)}(0) \right)$$

и (ii)

$$\mathcal{C}(n; p; r) + \sum_{i=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} (-1)^i \binom{r}{2i} A_{s,i} \tilde{T}_{n,r}^{(r-2i)}(0) \leq (n + s)^{r+1/p} \mathcal{L}(p; r),$$

где

$$|\tilde{T}_{n,r}^{(r-2i)}(0)| \leq n^{r-2i} (n + \lceil 1/p \rceil)^{1/p} \mathcal{L}(p; 0).$$

Для  $n \geq 1$  имеем

$$n^{1+1/p} \mathcal{L}(p; 1) \leq \mathcal{C}(n; p; 1) \leq (n + \lceil 1/p \rceil)^{1+1/p} \mathcal{L}(p; 1).$$

**Гипотеза.** Знаки ненулевых коэффициентов Тейлора  $\tilde{T}_{n,r}^{(j)}(0)$ ,  $\tilde{F}_r^{(j)}(0)$  (как минимум до порядка  $r$ ) чередуются.

Если гипотеза верна, то при всех  $p \in (0, \infty]$ ,  $r \geq 0$  и  $n \geq \lceil (r+1)/2 \rceil - 1$  ( $n \geq 1$  при  $r = 1$ )

$$(n - \lceil (r+1)/2 \rceil + 1)^{r+1/p} \mathcal{L}(p; r) \leq \mathcal{C}(n; p; r) \leq (n + \lceil 1/p \rceil)^{r+1/p} \mathcal{L}(p; r).$$

Получено 21.05.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.

# РЕДКОЛЛЕГИЯ

---

Том 21 Выпуск 3

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**Чубариков Владимир Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su*

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**Добровольский Николай Михайлович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

*e-mail: dobrovol@tsput.ru*

**Михалев Александр Васильевич** — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: mikhalev@shade.msu.ru*

**Нижников Александр Иванович** — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

*e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru*

ОТВЕТСТВЕННЫЕ СЕКРЕТАРИ

**Добровольский Николай Николаевич** — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Реброва Ирина Юрьевна** — кандидат физико-математических наук, декан факультета математики, физики и информатики, доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

*e-mail: i\_rebrova@mail.ru*

ПРИГЛАШЁННЫЙ РЕДАКТОР: **Игорь Борисович Жуков** — Санкт-Петербургский государственный университет.

*e-mail: i.zhukov@spbu.ru*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

**Артамонов Вячеслав Александрович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com*

**Быковский Виктор Алексеевич** — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

*e-mail: vab@iam.khv.ru*

**Востоков Сергей Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского государственного университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

*e-mail: sergei.vostokov@gmail.com*

**Гвоздев Александр Евгеньевич** — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологии и сервиса Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

*e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru*

**Георгиевский Дмитрий Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

**Гриценко Сергей Александрович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: s.gritsenko@gmail.com*

**Демидов Сергей Сергеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.

*e-mail: serd42@mail.ru*

**Дурнев Валерий Георгиевич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.

*e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru*

**Зубков Андрей Михайлович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

*e-mail: zubkov@mi.ras.ru*

**Иванов Валерий Иванович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

*e-mail: ivaleryi@mail.ru*

**Карташов Владимир Константинович** — кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики и физики Волгоградского государственного социально-педагогического университета.

*e-mail: kartashovvk@yandex.ru*

**Королёв Максим Александрович** — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

*e-mail: korolevma@mi.ras.ru*

**Кузнецов Валентин Николаевич** — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета им. Ю. А. Гагарина.

*e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru*

**Матиясевич Юрий Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

*e-mail: yumat@pdmi.ras.ru*

**Мищенко Сергей Петрович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета.

*e-mail: mishchenkosp@mail.ru*

**Нестеренко Юрий Валентинович** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: nester@mi.ras.ru*

**Панин Владимир Алексеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, действительный член Академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

*e-mail: tgpu@tula.net*

**Пачев Урусби Мухамедович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета имени Х. М. Бербекова.

*e-mail: urusbi@rambler.ru*

**Семёнов Алексей Львович** — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: alsemno@ya.ru*

**Фомин Александр Александрович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры Московского педагогического государственного университета.

*e-mail: alexander.fomin@mail.ru*

**Чирский Владимир Григорьевич** — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

*e-mail: vgchirskii@yandex.ru*

**Аллаков Исмаил** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского университета (Узбекистан).

*e-mail: iallakov@mail.ru*

**Белов Алексей Яковлевич** — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор Университета имени Бар-Илана (Израиль).

*e-mail: Kanelster@gmail.com*

**Берник Василий Иванович** — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси.

*e-mail: bernik@im.bas-net.by*

**Касьянов Павел Олегович** — доктор физико-математических наук, профессор Учебно-научного комплекса «Институт прикладного системного анализа» НТУУ «КПИ» МОН и НАН Украины.

*e-mail: kasyanov@i.ua*

**Лауринчикас Антанас** — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюс-

ского университета (Литва).

*e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt*

**Лю Юнпин** — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).

*e-mail: ypli@bnu.edu.cn*

**Мисир Джумаил оглы Марданов** — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана.

*e-mail: rmi@lan.ab.az*

**Мусин Олег Рустамович** — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).

*e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com*

**Рахмонов Зарулло Хусейнович** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН.

*e-mail: zarullo\_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru*

**Салиба Холем Мансур** — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).

*e-mail: qwe123@rocketmail.com*

**Табари Абдулло Хабибулло** — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки.

*e-mail: rektor@kgu.tj*

**Фукшанский Леонид Евгеньевич** — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).

*e-mail: lenny@cmc.edu*

**Шяучюнас Дарюс** — профессор, доктор математических наук, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).

*e-mail: darius.siauciunas@su.lt*

# THE EDITORIAL BOARD

---

Volume 21 Issue 3

---

## THE MAIN EDITOR

**Chubarikov Vladimir Nikolaevich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, president of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su*

## THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

**Dobrovolsky Nikolai Mihailovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: dobrovol@tspu.ru*

**Mihalev Alexander Vasilyevich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of theoretical Informatics of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: mikhalev@shade.msu.ru*

**Nijnikov Alexander Ivanovich** — doctor of pedagogical sciences, professor, head of chair of the mathematical physics of the Moscow Pedagogical State University, honored worker of the higher school of the Russian Federation.

*e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru*

## THE EXECUTIVE SECRETARY:

**Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science of the Tula State University; associate Professor of algebra, mathematical analysis and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Rebrova Irina Yuryevna** — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: i\_rebrova@mail.ru*

## GUEST EDITOR:

**Igor Borisovich Zhukov** — Saint Petersburg State University.

*e-mail: i.zhukov@spbu.ru*

## THE MEMBERS OF THE EDITORIAL BOARD:

**Artamonov Vyacheslav Alexandrovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of Higher algebra's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com*

**Bykovsky Victor Alekseevich** — doctor of physico-mathematical Sciences, correspondent member of RAS, Deputy Director of the Federal state institution of science, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS) on scientific work, Director of the Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS.

*e-mail: vab@iam.khv.ru*

**Vostokov Sergey Vladimirovich** — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor of algebra and number theory Department of Saint Petersburg State University, President of the Foundation. L. Euler.

*e-mail: sergei.vostokov@gmail.com*

**Gvozdev Alexander Evgenievich** — doctor of technical sciences, professor, professor of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru*

**Georgievsky Dmitry Vladimirovich** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Chair of Elasticity at Mechanical and Mathematical Department of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

**Gritsenko Sergey Alexandrovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the chair Mathematics of the 1 Financial University under the Government of the Russian Federation, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: s.gritsenko@gmail.com*

**Demidov Sergey Sergeyivich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the department of probability theory of mechanics and mathematics of Moscow state University, head of the cabinet of history and methodology of mathematics and mechanics, head. department of history of physical and mathematical sciences of the Institute of history of science and technology RAS, editor-in-chief of "Historical and mathematical research president of the International Academy of history of science.

*e-mail: serd42@mail.ru*

**Durnev Valery Georgievich** — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of computer security and mathematical methods of data processing of the Yaroslavl state a public University. P. G. Demidov.

*e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru*

**Zubkov Andrey Mihailovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the Academy of cryptography of the Russian Federation, head of the chair of mathematical statistics and random processes mechanics and mathematics faculty Moscow state University of a name of M. of Century University, head of the Department of discrete mathematics Mathematical Institute. Century A. Steklov mathematical Institute RAS.

*e-mail: zubkov@mi.ras.ru*

**Ivanov Valery Ivanovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of applied mathematics and Informatics of Institute of Applied Mathematics and Computer Science of the Tula State University.

*e-mail: ivaleryi@mail.ru*

**Kartashov Vladimir Konstantinovich** — candidate of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra, geometry and Informatics of the Volgograd State Social and Pedagogical University.

*e-mail: kartashovvk@yandex.ru*

**Korolev Maxim Aleksandrovich** — doctor of physical and mathematical sciences, the leading researcher of the Department of Algebra and Number Theory of Steklov Mathematical Institute of RAS.

*e-mail: korolevma@mi.ras.ru*

**Kuznetsov Valentin Nikolaevich** — doctor of technical sciences, professor, professor of the department of applied mathematics and systems analysis, Saratov State Technical University.

*e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru*

**Matiyasevich Yuri Vladimirovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor,

full member of Russian Academy of Sciences, RAS Counselor of St. Petersburg department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, president of the St. Petersburg Mathematical society.

*e-mail: yumat@pdmi.ras.ru*

**Mishchenko Sergey Petrovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor, Department of applied mathematics of the Ulyanovsk State University.

*e-mail: mishchenkosp@mail.ru*

**Nesterenko Yuriy Valentinovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of RAS, head of number theory's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: nester@mi.ras.ru*

**Panin Vladimir Alexeyevich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member Russian Academy of Natural Sciences, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: tgpu@tula.net*

**Pachev Urusbi Mukhamedovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor of algebra and differential equations Kabardino-Balkar State University. After H. M. Berbekov

*e-mail: urusbi@rambler.ru*

**Semenov Alexey Lvovich** — doctor of physico-mathematical Sciences, Professor, academician of the Russian Academy of Sciences, academician of the Russian Academy of education, head of Department of Mathematical logic and theory of algorithms, Moscow state University named after M. V. Lomonosov.

*e-mail: alsemno@ya.ru*

**Fomin Aleksandr Aleksandrovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra of the Moscow Pedagogical State University.

**Chirsky Vladimir Grigoryevich** — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, head of number theory's chair of the Moscow Pedagogical State University, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

*e-mail: vgchirskii@yandex.ru*

**Allakov Ismail** — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor of Termez University, Uzbekistan.

*e-mail: iallakov@mail.ru*

**Belov Alexey Yakovlevich** — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor, professor Bar Ilan University, Israel.

*e-mail: Kanelster@gmail.com*

**Bernik Vasily Ivanovich (Belorussia)** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, the main researcher of the Belorussia Institute of Mathematics of NAS.

*e-mail: bernik@im.bas-net.by*

**Kasyanov Pavel Olegovich (Ukraine)** — doctor of physical and mathematical Sciences, head of the research department at Educational and Scientific Complex "Institute for Applied System Analysis" of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute" of the MES of Ukraine and NAS of Ukraine.

*e-mail: kasyanov@i.ua*

**Laurinchikas Antanas (Lithuania)** — Full member of the AS in Lithuania, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of probability theory's and number theory's chair of the Vilnius University.

*e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt*

**Liu Yongping (China)** — Ph.D, professor, head of the Research Center for Modern Analysis of Mathematics of the Beijing Normal University.

*e-mail: ypliu@bnu.edu.cn*

**Misir Jumayil oglu Mardanov (Azerbaijan)** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director of the institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan.

*e-mail: rmi@lan.ab.az*

**Musin Oleg Rustamovich (USA)** — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematics, University of Texas at Brownsville, United States of America

*e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com*

**Rahmonov Zarullo Huseinovich (Tajikistan)** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Republic of Tajikistan AS, director of the Institute of Mathematics of the Tajik AS.

*e-mail: zarullo\_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru*

**Saliba Holem Mansour (Lebanon)** — Ph.D. Assistant Professors of faculty of natural & applied sciences of Notre Dame University Louaize

*e-mail: qwe123@rocketmail.com*

**Tabari Abdullo Habibullo (Tajikistan)** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Republic of Tajikistan AS, rector of the Kulob State University named after Abuabdullo Rudaki.

*e-mail: rektor@kgu.tj*

**Fukshansky Lenny (USA)** — Ph.D. in mathematics, Professor of mathematics, Claremont McKenna College (California, USA).

*e-mail: lenny@cmc.edu*

**Šiaučiūnas Darius** — professor, doctor of mathematics, senior researcher of Research Institute, Šiauliai University, Lithuania.

*e-mail: darius.siauciunas@su.lt*

# TABLE OF CONTENTS

---

Volume 21 Issue 3

---

|                                                                                                                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| From the editor .....                                                                                                                                                                                   | 3   |
| S. V. Vostokov. Boris Beniaminovich Lur'e .....                                                                                                                                                         | 6   |
| I. B. Zhukov. To the 75th anniversary of Sergei Vladimirovich Vostokov .....                                                                                                                            | 10  |
| <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">B. B. Lur'e.</span> To the 80th anniversary of Anatoly Vladimirovich Yakovlev .....                                                              | 15  |
| A. A. Artjemov, V. N. Chubarikov. On the trigonometric sum modulo subdivision of the real axis .....                                                                                                    | 18  |
| M. V. Bondarko, S. V. Vostokov. The hearts of weight structures are the weakly idempotent complete categories .....                                                                                     | 29  |
| S. V. Vostokov, T. Yu. Shashkov, S. S. Afanas'eva. Schnirelmann's integral and analogy of Cauchy integral theorem for two-dimensional local fields .....                                                | 39  |
| S. V. Vostokov, I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova. Inaba extensions of complete fields of characteristic 0 .....                                                                                             | 59  |
| N. M. Glazunov. On Langlands program, global fields and shtukas .....                                                                                                                                   | 68  |
| P. V. Danchev. Representing Matrices over Fields as Square-Zero Matrices and Diagonal Matrices .....                                                                                                    | 84  |
| A. Kanel Belov, L. Rowen. The Braun–Kemer–Razmyslov Theorem for affine PI-algebras .....                                                                                                                | 89  |
| E. V. Larkin, A. N. Privalov, T. A. Akimenko, I. N. Larioshkin. Mathematical model of a digital control system with background controllers of the Neuman type for complex multicirculated objects ..... | 129 |
| A. Kh. Munos Vaskes. Lower estimates of polynomials and linear forms in the values of $F$ – series .....                                                                                                | 142 |
| E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii. Smooth manifold of one-dimensional lattices .....                                                         | 165 |
| M. E. Changa. On the asymptotic behavior of some sums involving the number of prime divisors function .....                                                                                             | 186 |
| V. V. Iudelevich. On the mean value of functions related to the divisors function in the ring of polynomials over a finite field .....                                                                  | 196 |
| BRIEF MESSAGE                                                                                                                                                                                           |     |
| A. N. Kormacheva. Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices — II .....                                                                                                          | 215 |
| A. V. Mikhlyayeva. Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets — II ...                                                                                                          | 223 |
| E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova. Asymptotic estimation for trigonometric sums of algebraic grids .....                                                                                | 232 |

|                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A. V. Rodionov. Hyperbolic parameter of approximation of quadratic algebraic lattices .....                                                                                                                                                  | 241 |
| M. Sh. Shabozov, M. K. Abdukarimzoda. Best quadrature formulas calculation<br>of curvilinear integrals for some classes of functions and curves .....                                                                                        | 250 |
| HISTORY OF MATH AND APPLICATIONS                                                                                                                                                                                                             |     |
| I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva. Mathematical<br>modeling of elasticity properties in the mechanics of composite materials .....                                                                              | 262 |
| A. D. Breki, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, V. Yu. Kuzovlev. Empirical mathematical<br>models of plasticity, strength and wear resistance of materials on the example of P18 steel                                                          | 272 |
| G. M. Zhuravlev, V. G. Telichko, N. S. Kurien, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva.<br>The development of a mathematical complex for modeling the progress<br>of destruction of composite structures based on high-speed deformation models ..... | 292 |
| V. A. Levin, K. M. Zingerman, K. Yu. Krapivin, M. Ya. Yakovlev. Legendre spectral<br>element for plastic localization problems at large scale strains .....                                                                                  | 306 |
| MEMORABLE DATE                                                                                                                                                                                                                               |     |
| A. E. Ustyan, I. Dobrynina, Y. Trubitsyn, A. S. Ugarov, N. M. Dobrovolsky,<br>I. Yu Rebrova. The 80th anniversary of professor V. N. Bezverkhni                                                                                              | 317 |
| LETTER TO THE EDITOR                                                                                                                                                                                                                         |     |
| D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov. Letter to the Editor .....                                                                                                                                                                                 | 336 |
| РЕДКОЛЛЕГИЯ .....                                                                                                                                                                                                                            | 339 |
| THE EDITORIAL BOARD .....                                                                                                                                                                                                                    | 343 |