ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 4 раза в год

Свидетельство о регистрации
СМИ: ПИ № ФС77-47855
ISSN 2226-8383

Том XXI

Выпуск 2 (74)

Тула
2020

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,
г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL:
http://www.chebsbornik.ru

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

12+

Данный выпуск Чебышевского сборника посвящен 75-летию выдающегося советского и российского математика, академика Российской академии наук, доктора физико-математических наук, профессора Анатолия Тимофеевича Фоменко

А. Т. Фоменко

Анатолий Тимофеевич Фоменко

В 2020 году академику Анатолию Тимофеевичу Фоменко исполняется 75 лет.

А. Т. Фоменко родился 13 марта 1945 года, в городе Сталино (сегодня — Донецк). В 1950 году переехал вместе с родителями в Магадан, затем в 1959 году — в Луганск, где закончил среднюю школу номер 26 с золотой медалью. Участник школьных олимпиад, победитель Всесоюзной заочной Олимпиады по математике. В 1956 и 1959 годах был удостоен бронзовых медалей ВДНХ. В 1962 году поступил на механико-математический факультет МГУ, на отделение механики. Учился на кафедре теоретической механики у профессора В. В. Румянцева. Перейдя на 4-ом курсе на отделение математики факультета, закончил его в 1967 году и поступил в аспирантуру на кафедру дифференциальной геометрии к профессору П. К. Рашевскому. Активно включившись в научные исследования, А. Т. Фоменко в 1969 году становится ассистентом кафедры дифференциальной геометрии механико-математического факультета МГУ, а в 1970 году успешно защищает кандидатскую диссертацию по теме «Вполне геодезические модели циклов».

Спустя всего два года А. Т. Фоменко блестяще защитил докторскую диссертацию «Решение многомерной проблемы Плато на римановых многообразиях». Ему удалось решить многомерную проблему Плато в классе спектральных поверхностей: доказано существование «геометрического» решения — глобально минимальной поверхности, представимой в виде непрерывного образа спектра многообразий с краем. Эта работа А. Т. Фоменко получила широкое международное признание; он приглашен с пленарным докладом на Международный математический конгресс в Ванкувере (ICM 1974), получил премию Московского математического общества. Написанные А. Т. Фоменко монографии о проблеме Плато неоднократно издавались как у нас в стране, так и за рубежом.

Уже тогда А. Т. Фоменко проявил себя как блестящий организатор науки. Сформировавшаяся к началу 80-х годов вокруг него школа специалистов по топологическим вариационным задачам получила ряд глубоких результатов, связанных с теорией мультиварифолдов, обобщенными формами калибровки, геометрией особенностей минимальных поверхностей, геометрией экстремалей функционала Дирихле, индексами минимальных поверхностей, теорией экстремальных сетей. Среди учеников А. Т. Фоменко в этом направлении работают Дао Чонг Тхи, А. И. Плужников, А. В. Тырин, Ле Хонг Ван, И. С. Новикова, А. О. Иванов, А. А. Тужилин, И. В. Шклянко (Птицына), А. А. Борисенко, М. В. Пронин.

В конце 70-х годов основной темой исследований А. Т. Фоменко стала разработка алгебраических конструкций интегрируемых гамильтоновых систем и теория некоммутативного интегрирования (совместно с А. С. Мищенко). Результаты, полученные в те годы, лежат в основе многих современных исследований интегрируемых гамильтоновых систем на группах Ли и однородных пространствах. Отметим здесь работы таких учеников А. Т. Фоменко как В. В. Трофимов, А. В. Браилов, Ле Нгок Тьеуен, А. В. Болсинов, К. Швая.

Во второй половине 80-х годов А. Т. Фоменко создал теорию топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем. Несмотря на фундаментальный математический характер основных результатов этой теории, она, в отличие от многих других работ в этой области, с самого начала имела в виду приложения к конкретным задачам механики и физики. Оказалось, что техника, развитая в работах А. Т. Фоменко, позволяет эффективно справляться с многочисленными техническими трудностями, возникающими в процессе топологического анализа поведения динамических систем. Эти исследования были удостоены премии Президиума АН СССР в 1987 году.

Школой А. Т. Фоменко были разработаны методы вычисления инвариантов интегрируемых гамильтоновых систем, что позволило дать топологическую классификацию многих случаев интегрируемости, известных в математической физике, механике и геометрии. Среди наиболее ярких представителей этой школы А. В. Болсинов, А. А. Ошемков, Нгуен Тьен Зунг, Л. С. Полякова, Е. В. Аношкина, Е. Н. Селиванова, В. С. Матвеев, В. В. Калашников, П. Й. Топалов, Б. С. Кругликов, О. Е. Орел, Н. В. Коровина, Ю. А. Браилов, Е. А. Кудрявцева, А. Ю. Коняев, П. В. Морозов, А. Ю. Москвин, А. С. Воронцов, Т. А. Лепский, М. М. Деркач, А. М. Изосимов, И. К. Козлов, И. Н. Шнурников, Н. С. Славина, О. А. Загрядский, Д. А. Федосеев, В. В. Ведюшкина (Фокичева), Е. О. Кантонистова, М. А. Тужилин, С. С. Николаенко.

Начиная с 2015 года А. Т. Фоменко, совместно с В. В. Ведюшкиной, Е. Е. Каргиновой, И. С. Харчевой и другими учениками, активно разрабатывает новое направление — теорию интегрируемых топологических бильярдов. Идея рассматривать «бильярдные столы» сложной геометрии и топологии оказалась чрезвычайно плодотворной и позволила построить новые наглядные модели сложных интегрируемых систем. В настоящее время активно обсуждается частично доказанная «бильярдная гипотеза» А. Т. Фоменко об универсальности бильярдных систем.

В 1990 году А. Т. Фоменко становится член-корреспондентом АН СССР, а уже в 1994 — действительным членом Российской Академии Наук. В 1996 году за цикл работ «Исследование инвариантов гладких многообразий и гамильтоновых динамических систем» он удостоен Государственной Премии Российской Федерации (совместно с А. С. Мищенко). С 1992 года А. Т. Фоменко возглавляет кафедру дифференциальной геометрии и приложений, а с 1987 также и Отделение математики механико-математического факультета МГУ.

Научные интересы А. Т. Фоменко охватывают чрезвычайно широкий круг вопросов современной математики и ее приложений. В 70–90-е годы, вместе с О. В. Мантуровым и Л. В. Сабининым, А. Т. Фоменко руководит Семинаром по векторному и тензорному анализу, вокруг которого концентрируются важнейшие исследования по дифференциальной геометрии и топологии. Многие годы под руководством В. В. Козлова и А. Т. Фоменко работал исследовательский семинар «Геометрия и Механика», основной целью которого являлась разработка топологических и геометрических подходов к изучению качественного поведения механических систем. По его инициативе на механико-математическом факультете МГУ была создана Лаборатория компьютерных методов в естественных и гуманитарных науках. Только за последние годы он принимал активное участие в организации различных научных семинаров: по квантовым вычислениям (мех-мат МГУ), по приложениям геометрических и топологических методов к молекулярной биологии (мех-мат и биофак МГУ), Общефакультетского семинара по математике, и др. Также под руководством А. Т. Фоменко, декана биологического факультета М. П. Кирпичникова и профессора К. В. Шайтана при поддержке программы развития МГУ была создана межфакультетская лаборатория Структурной биологии. Лаборатория приняла участие в поддержанном РНФ междисциплинарном проекте «Ноев ковчег» и продолжает разрабатывать и изучать математические модели биополимеров.

А. Т. Фоменко ведет активную педагогическую деятельность. Он много лет бессменно читает курс дифференциальной геометрии и топологии для студентов математиков. По его инициативе был организован курс компьютерной геометрии, а также Практикум по компьютерной геометрии, вызвавший большой интерес среди студентов. Также под руководством А. Т. Фоменко был создан новый курс Наглядной геометрии и топологии для всех студентов первого курса мех-мата, который позволяет первокурсникам быстрее освоиться и перейти на новый уровень изучения геометрии, познакомится с целым рядом достаточно сложных, но тем не менее наглядных конструкций, допускающих глубокие обобщения, погрузиться в современную геометрическую проблематику.

А. Т. Фоменко автор более 350 научных работ, более 90 книг, монографий и учебников, многие из которых выдержали несколько изданий и переведены на многие языки мира. Под его руководством защищено 11 докторских и более 55 кандидатских диссертаций.

Вместе с его многочисленными учениками, коллегами и друзьями, мы желаем Анатолию Тимофеевичу Фоменко крепкого здоровья и новых ярких достижений в его разносторонней научной и педагогической работе.

А. Болсинов, Н. Добровольский, А. Иванов,
Е. Кудрявцева, А. Ошемков, Ф. Попеленский,
А. Тужилин, В. Чубариков, А. Шафаревич

СОДЕРЖАНИЕ

Том 21 Выпуск 2

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-10-25

Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков на проективной плоскости в потенциальном поле[1]

Е. И. Антонов, И. К. Козлов

Антонов Евгений Игоревич — студент кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: antonov.zhenya@hotmail.com
Козлов Иван Константинович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: ikozlov90@gmail.com

Аннотация

Получена лиувиллева классификация натуральной гамильтоновой системы на проективной плоскости с метрикой вращения и линейным интегралом. Вычислены все инварианты Фоменко — Цишанга (т. е. меченые молекулы) системы.

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, геодезический поток, меченая молекула, инвариант Фоменко — Цишанга.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
Е. И. Антонов, И. К. Козлов. Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков на проективной плоскости в потенциальном поле // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 10–25.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-10-25

Liouville classification of integrable geodesic flows on a projective plane in a potential field

E. I. Antonov, I. K. Kozlov

Antonov Evgenii Igorevich — student at the Department of Differential Geometry and Applications of the Faculty of Mechanics and Mathematics of M. V. Lomonosov MSU (Moscow).
e-mail: antonov.zhenya@hotmail.com
Kozlov Ivan Konstantinovich — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor at the Department of Differential Geometry and Applications of the Faculty of Mechanics and Mathematics of M. V. Lomonosov MSU (Moscow).
e-mail: ikozlov90@gmail.com

[1]Исследование И. К. Козлова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 17-11-01303).

Abstract

A Liouville classification of a natural Hamiltonian system on the projective plane with a rotation metric and a linear integral is obtained. All Fomenko–Zieschang invariants (i. e., labeled molecules) of the system are calculated.

Keywords: integrable Hamiltonian systems, geodesic flow, labeled molecule, Fomenko–Zieschang invariant.

Bibliography: 9 titles.

For citation:
E. I. Antonov, I. K. Kozlov, 2020, "Liouville classification of integrable geodesic flows on a projective plane in a potential field" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 10–25.

1. Введение

В данной работе мы изучим топологические свойства интегрируемого геодезического потока на $\mathbb{RP}^2$, получающегося как фактор по инволюции геодезического потока на S^2, рассмотренного в работе Е. О. Кантонистовой [3]. А именно, мы вычислим все инварианты Фоменко — Цишанга (т. е. меченые молекулы) этой системы (см. Теорему 3).

Полученные результаты основываются на теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, созданной А. Т. Фоменко и его школой (см. [2]). Основы этой теории были заложены в [5, 6, 7, 8].

Подробнее о лиувиллевой классификации (т.е. о вычислении инвариантов Фоменко — Цишанга) для геодезических потоков см. [2]. В частности, инварианты Фоменко — Цишанга для линейно интегрируемого геодезического потока на $\mathbb{RP}^2$ без потенциала были вычислены В. С. Матвеевым (см. [2, Том 2, Раздел 3.4]). В работе [3] Е. О. Кантонистовой были вычислены все меченые молекулы интегрируемых геодезических потоков на поверхностях вращения, гомеоморфных сфере S^2, с инвариантным потенциалом и линейным интегралом. Д. С. Тимонина в [4] описала все возможные грубые молекулы для геодезических потоков на $\mathbb{RP}^2$, получающих как фактор систем из [3] по инволюции. Коротко опишем эти системы на S^2 и $\mathbb{RP}^2$.

1.1. Линейно интегрируемый геодезический поток на S^2

Рассмотрим риманово многообразие вращения $M = S^2$ с естественными координатами $(r;\varphi), r \in (0;L), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, в которых метрика вращения записывается в виде

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + f^2(r)\mathrm{d}\varphi^2.$$

В окрестности полюсов введем локальные координаты

$$x = f(r)\cos\varphi, \qquad y = f(r)\sin\varphi.$$

Функция $f(r)$ удовлетворяет условиям следующей леммы, поэтому метрика в полюсах $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$.

Лемма 1 (А. Бессе [1]). *Метрика на многообразии вращения M и инвариантная при вращениях функция $V(r)$ на нем являются гладкими в полюсах (то есть в точках $r = 0$ и $r = L$), если существуют $F = F(r)$ и $W = W(r)$, определенные на всей числовой прямой такие, что $F|_{[0;L]} = f, W|_{[0;L]} = V$, и выполнены следующие условия:*

1. *$F(-r) = -F(r) = F(2L-r)$, то есть функции $F(r)$ и $F(L+r)$ нечетны (или, что эквивалентно, функция $F(r)$ — периодична с периодом $2L$ и нечетна) и $F'(0) = 1, F'(L) = -1$;*

2. $W(-r) = W(r) = W(2L - r)$, то есть функции $W(r)$ и $W(L + r)$ четны (или, что эквивалентно, функция $W(r)$ — периодична с периодом $2L$ и четна).

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему на кокасательном расслоении T^*S^2 с гамильтонианом

$$H = \begin{cases} \dfrac{p_r^2}{2} + \dfrac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r), & \text{вне полюсов (т.е. } r \neq 0, L),\\ \dfrac{p_x^2 + p_y^2}{2} + V(0), & \text{в полюсах (т.е. } r = 0 \text{ или } L) \end{cases} \tag{1}$$

и первым интегралом

$$K = \begin{cases} p_\varphi, & \text{вне полюсов,}\\ xp_y - yp_x, & \text{в окрестности полюсов.} \end{cases} \tag{2}$$

Замечание 1 ([3]). *В полюсах (т.е. при $x = y = 0$) $K = 0$. При $K = 0$ у системы нет критических точек ранга 1 на неособых изоэнергетических поверхностях Q_h^3. При этом у системы на T^*S^2 ровно две точки ранга 0: это $(0, N)$ и $(0, S)$, где N и S — полюса сферы.*

Рассмотрим тор Лиувилля системы $H = h, K = k$, не содержащий точки полюсов. Тогда он состоит из точек (p_r, k, r, φ), $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, удовлетворяющих уравнению

$$p_r = \pm\frac{1}{f(r)}\sqrt{U_h(r) - k^2}, \tag{3}$$

где

$$U_h(r) = 2f^2(r)(h - V(r)). \tag{4}$$

Замечание 2. *В [3] объяснено, как построить грубую молекулу системы по графику функции $U_h(r)$ (см. также [2] или [4]). Молекула всегда симметрична относительно уровня $k = 0$ и имеет вид $W - W$. Неформально говоря, слоение Лиувилля для "половины молекулы" W получается, если взять "объемный горный рельеф" функции $U_h(r)$, расслоить его на поверхности уровня $U_h = \mathrm{const}$, а затем домножить на окружность S^1.*

Теорема 1 (Е. О. Кантонистова [3]). *Рассмотрим систему (то есть геодезический поток с линейным интегралом и с инвариантным при вращениях потенциалом) на многообразии вращения $M \approx S^2$, заданную парой функций $(V(r); f(r))$. Пусть $Q \subseteq Q_h^3$ — связная компонента неособой изоэнергетической поверхности, на которой K — функция Ботта. Тогда:*

1. *молекула системы симметрична (без учета ориентации на ребрах) относительно оси h, а ориентация на ребрах задается в сторону возрастания k. То есть молекула имеет вид $W - W$, где соединяющее молекулы ребро суть однопараметрическое семейство торов Лиувилля, а каждая молекула W — это либо один атом A, либо дерево. Все неконцевые (то есть седловые) вершины дерева — это атомы V_l, а концевые имеют тип A. При этом при $k > 0$ входящее ребро для каждого атома V_l — одно, а исходящих ребер — l (при $k < 0$ картина антисимметрична, то есть без учета ориентации на ребрах молекула симметрична относительно h, а ориентации на кусках $W_+ = W(k > 0)$ и $W_- = W(k < 0)$ противоположны).*

2. (a) *Метки на ребрах типа $A - V_l$ молекулы: $r = 0, \varepsilon = +1$.*

   (b) *Метки на ребрах типа $V_s - V_l$, где оба седловых атома находятся в одной полуплоскости ($k > 0$ или $k < 0$): $r = \infty, \varepsilon = +1$.*

(c) *метки на центральном ребре типа $V_l - V_l$ (симметричном относительно уровня $k=0$): $r=\infty, \varepsilon=-1$.*

(d) *Если молекула $W-W$ имеет типа $A-A$, то метка r определяется следующим образом: разрежем многообразие M^4 по поверхности Q^3 на два куска M^4_- и M^4_+ (напомним, что Q^3 — связная компонента Q^3_h). Кусок M^4_-, который отвечает строго меньшим значениям энергии, чем h, может содержать 2, 1 или 0 особых точек ранга нуль. Тогда соответственно $r=\frac{1}{2}$, $r=0$, или $r=\infty$. Во всех трех случаях $\varepsilon=+1$.*

(e) *Если молекула $W-W$ отлична от $A-A$, то она содержит единственную семью, получаемую отбрасыванием всех атомов A. Метка n в этом случае равна числу особых точек ранга ноль на многообразии M^4_- (см. п. 2d).*

Замечание 3. *Рассмотрим молекулу $A-A$. Метка $r=\frac{1}{2}, 0, \infty$ или $r=\frac{p}{q}$ (где $p<q$ и $q\geq 3$), тогда и только тогда, когда соответствующая поверхность Q^3 гомеоморфна $\mathbb{RP}^3$, S^3, $S^1\times S^2$ или линзовому пространству $L_{q,p}$ соответственно (см. [2, Том 1, Предложение 4.3]).*

1.2. Линейно интегрируемый геодезический поток на $\mathbb{RP}^2$

Представим проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$ как фактор сферы S^2 по инволюции η, которая в координатах r,φ задается формулой:

$$\eta(r,\varphi)=(L-r,\varphi+\pi). \tag{5}$$

Полюса при инволюции переходят друг в друга: $\eta(S)=N, \eta(N)=S$. Имеем: $T^*\mathbb{RP}^2=T^*S^2/\eta^*$, где

$$\eta^*(p_r,p_\varphi,r,\varphi)=(-p_r,p_\varphi,L-r,\varphi+\pi). \tag{6}$$

Далее мы считаем, что $f(r)=f(L-r)$ и $V(r)=V(L-r)$, чтобы f и V задавали функции на $\mathbb{RP}^2$.

Теорема 2 (Д. С. Тимонина, [4]). *Пусть система (то есть геодезический поток с линейным интегралом на многообразии вращения с инвариантным потенциалом) на проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ задана парой функций $f(r)$ и $V(r)$ так, как описано выше. Тогда молекуда системы, соответствующая связной компоненте изоэнергетичекой поверхности $Q^3_{\mathbb{RP}^2}$, симметрична и имеет вид $W-W$, где каждая молекула W — это либо один атом A, либо дерево. Все неконцевые (то есть седловые) вершины дерева — это атомы V_l, V_k^*, A^*, а концевые вершины имеют тип A. Постороение грубой молекулы осуществляется по графику функции $U_h(r)=2f^2(r)(h-V(r))$.*

Замечание 4. *Некоторые свойства функций $U_h(r)$:*

1. *Из симметрий функций f и V следует, что функция $U_h(r)$ симметрична относительно оси $r=\frac{L}{2}$. Иными словами, функция $U_h(r-\frac{L}{2})$ четная.*

2. *В полюсах $U_h(0)=U_h(L)=0$.*

3. *При $r\neq 0,L$ функция $U_h(r)>0$ тогда и только тогда, когда $V(r)<h$.*

4. *Также отметим, что при $K=0$ и $r\neq 0,L$ нули $U_h(r)=0$ не могут быть точками локального экстремума функции $U_h(r)$. В противном случае в этих точках $p_r=0$ и $\frac{\partial H}{\partial r}=0$, и это были бы точки ранга 1. Но на неособых поверхностях при $K=0$ нет точек ранга 1 (см. Замечание 1).*

Несложно доказать следующее утверждение о топологии $Q^3_{\mathbb{RP}^2}$. Пусть $\pi : Q^3_h \to \mathbb{RP}^2$ — проекция изоэнергитической поверхности. Заметим, точки $\pi(Q^3_h)$ — это в точности точки, где $V(r) \leq h$. Множество $\pi(Q^3_h)$ симметрично относительно вращения, поэтому каждая его связная компонента — либо все $\mathbb{RP}^2$, либо "шапочка" у полюса, либо лист Мебиуса (окрестность "экватора"), либо кольцо.

Утверждение 1. *Пусть Q^3 — связная компонента Q^3_h неособой изоэнергетической поверхности для рассматриваемой системы на $\mathbb{RP}^2$. Возможны три случая:*

1. *Если $\pi(Q^3) = \mathbb{RP}^2$, т.е. $V(r) \leq h$ на всем $\mathbb{RP}^2$, то $Q^3 \approx L_{4,1}$.*
2. *Если $\pi(Q^3)$ — это диск D^2 с центром в полюсе, то $Q^3 \approx S^3$.*
3. *Если $\pi(Q^3)$ — это кольцо $I^1 \times S^1$ или лист Мебиуса $\mathbb{M}^2$, то $Q^3 \approx S^1 \times S^2$.*

Замечание 5. *В случаях из Утверждения 1 соответствующая поверхность для сферы $Q^3_{S^2}$ гомеоморфна $\mathbb{RP}^3$, S^3 и $S^1 \times S^2$ соответственно (см. [3]).*

Доказательство. [Доказательство Утверждения 1] Если $\pi(Q^3) = \mathbb{RP}^2$, то легко видеть, что Q^3 гомеоморфно расслоению единичных касательных векторов к $\mathbb{RP}^2$. Хорошо известно, что это пространство гомеоморфно $L_{4,1}$ (см., например, [9]). Если $\pi(Q^3) \approx D^2$ или $\pi(Q^3) \approx I^1 \times S^1$, то ответ такой же, как и для соответствующего случая на сфере S^2 (см. [3]). Остается рассмотреть случай $\pi(Q^3) \approx \mathbb{M}^2$. В этом случае $Q^3 \approx Q^3_{S^2}/\eta^*$, где инволюция η^* задана (6) и $Q^3_{S^2} \approx S^1 \times S^2$. Инволюция η^* действует на $Q^3_{S^2}$ следующим образом: координату φ на S^1 она увеличивает на π, а отображение на сомножителе S^2 изотопно тождественному отображению (в координатах (p_r, p_φ, r) легко видеть, что оно изотопно повороту на угол π вокруг оси p_φ). Следовательно, $Q^3 \approx S^1 \times S^2/\eta^* \approx S^1 \times S^2$. Утверждение 1 доказано. □

Замечание 6. *Для молекул вида $A - A$ по топологии Q^3 можно найти метку r (см. Замечание 3). Однако мы поступим наоборот: в Разделе 4 во всех трех случаях мы вначале вычислим метку r для молекул вида $A - A$. А потом убедимся, что ответ согласуется с Утверждением 1.*

2. Основные результаты

Для удобства разобьем классификацию меченых молекул для рассматриваемой системы на два утверждения: для случая, когда молекула имеет вид $A - A$, и для всех остальных случаев.

Теорема 3. *Рассмотрим натуральную гамильтонову систему на $\mathbb{RP}^2$ с гамильтонианом (1) и первым интегралом (2). Пусть Q^3 — связная компонента неособой изоэнергетической поверхности Q^3_h. Для всех молекул $A - A$ метка $\varepsilon = 1$, а метка r следующим образом зависит от проекции $\pi(Q^3)$ на $\mathbb{RP}^2$.*

1. *Если $\pi(Q^3) = \mathbb{RP}^2$, то метка $r = \frac{1}{4}$.*
2. *Если $\pi(Q^3) \approx D^2$, то метка $r = 0$.*
3. *В остальных случаях (т.е. если $\pi(Q^3) \approx I^1 \times S^1$ или $\pi(Q^3) \approx \mathbb{M}^2$) метка $r = \infty$.*

Замечание 7. *Пусть проекция Q^3 на $\mathbb{RP}^2$ в координатах (r, φ) имеет вид $\pi(Q^3) = [a, b] \times S^1$, где $[a, b] \subseteq \left[0, \frac{L}{2}\right]$ (при этом мы формально отождествляем все точки вида $(0, \varphi)$). Иными словами, пусть $[a, b] \subseteq \left[0, \frac{L}{2}\right]$ — связная компонента множества точек r,* *в которых $V(r) \le h$. Молекула системы на Q^3 имеет тип $A-A$ тогда и только тогда, когда функция $U_h(r)$ на $[a,b]$ имеет ровно один положительный локальный экстремум (который будет глобальным максимумом), см. [4]. А топология $\pi(Q^3)$ следующим образом зависит от вида отрезка $[a,b]$.*

1. *Если $a=0, b=\frac{L}{2}$, то $\pi(Q^3)=\mathbb{RP}^2$.*

2. *Если $a=0, b<\frac{L}{2}$, то $\pi(Q^3)\approx D^2$.*

3. *Если $a>0, b=\frac{L}{2}$, то $\pi(Q^3)\approx \mathbb{M}^2$.*

4. *Если $a>0, b<\frac{L}{2}$, то $\pi(Q^3)\approx I^1\times S^1$.*

Также отметим, что если молекула имеет вид $A-A$ и $\pi(Q^3)=\mathbb{RP}^2$ (т.е. $a=0, b=\frac{L}{2}$), то $U_h\left(\frac{L}{2}\right)$ — это максимум функции.

Пример 1. *Случай, когда потенциал $V(r)=0$ был разобран В. С. Матвеевым (см. [2, Том 2, Раздел 3.4]). В этом случае, если молекула имеет вид $A-A$, то $V(r)\le h$ на всем $\mathbb{RP}^2$. Поэтому метка $r=\frac{1}{4}$ и $Q^3\approx L_{4,1}$.*

Теорема 4. *Пусть молекула $W-W$ системы на Q^3 отлична от $A-A$. Тогда метки на ней имеют следующий вид.*

1. *На ребрах типа $A-V_l$ метка $\varepsilon=1$. Если атом A центральный (см. Определение 1), то метка $r=\frac{1}{2}$, иначе метка $r=0$.*

2. *На ребрах между седловыми атомами метки $r=\infty$. Если ребро нецентральное (т.е. $k>0$ или $k<0$), то метка $\varepsilon=+1$. На центральном ребре метка $\varepsilon=-1$.*

3. *Если молекула $W-W$ отлична от $A-A$, то она содержит единственную семью, получаемую отбрасыванием всех атомов A. Метка n следующим образом зависит от проекции $\pi(Q^3)$ на $\mathbb{RP}^2$.*

   (a) *Если $\pi(Q^3)=\mathbb{RP}^2$, то метка $n=-2$.*
   (b) *Если $\pi(Q^3)\approx D^2$ или $\pi(Q^3)\approx\mathbb{M}^2$, то метка $n=-1$.*
   (c) *В оставшемся случае (если $\pi(Q^3)\approx I^1\times S^1$) метка $n=0$.*

Замечание 8. *В [2, Том 2, Теорема 3.11] в результате В.С. Матвеева про случай нулевого потенциала $V(r)=0$ неверно указана метка n. Если $V(r)=0$, то $\pi(Q^3)=\mathbb{RP}^2$ и метка $n=-2$, а не -1 (это также подтверждается формулой Топалова, см. Замечание 13).*

3. Построение допустимых базисов

Для доказательства теорем 3 и 4 явно построим допустимые базисы для всех атомов, и затем вычислим по ним метки по правилам из [2]. Отдельно разберем построение допустимых атомов для эллиптических и седловых атомов.

3.1. Случай эллиптических атомов

Единственный эллиптический атом — это атом A.

Замечание 9. *Для атома A мы выбираем допустимый базис (λ, μ) по следующему правилу из [2]:*

1. *λ-цикл стягивается в точку;*
2. *μ-цикл дополняет цикл λ до базиса;*
3. *μ-цикл ориентирован направлением $\operatorname{sgrad} H$ на критической окружности;*
4. *λ-цикл ориентирован так, что пара (λ, μ) положительно ориентирована на граничном торе $\mathbb{T}^2$ полнотория. Мы считаем, что пара векторов u, v задает положительную ориентацию касательного пространства $T_x\mathbb{T}^2$, если*
$$\omega \wedge \omega(\operatorname{grad} H, N, u, v) > 0, \tag{7}$$
т.е. четверка $(\operatorname{grad} H, N, u, v)$, где N — внешняя нормаль к полноторию, положительно ориентирована относительно $\omega \wedge \omega$.

Напомним (см. [2]), что λ-цикл для атома A определен однозначно, а μ-цикл — с точностью до прибавления $k\lambda$, где $k \in \mathbb{Z}$.

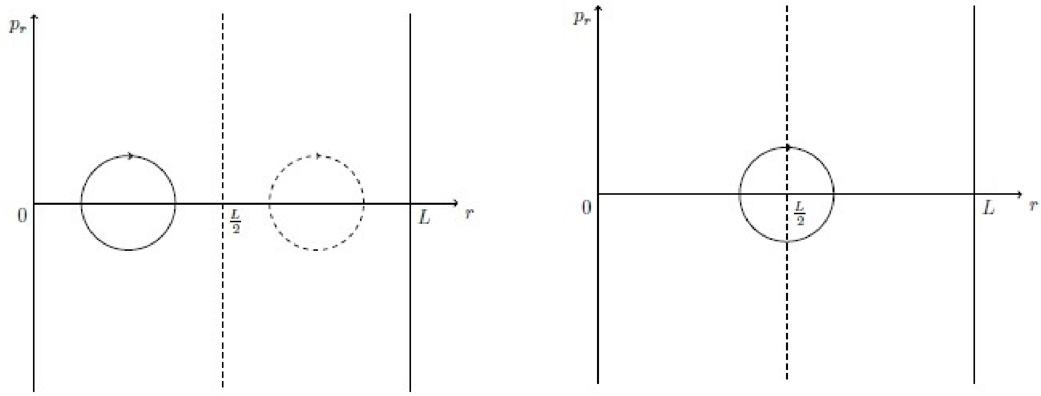
Замечание 10. *Замена*
$$(p_r, p_\varphi, r, \varphi) \to (p_r, -p_\varphi, r, -\varphi), \tag{8}$$
сохраняет симплектическую структуру $\omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi$ на T^*S^2, при этом $H \to H, K \to -K$. Мы будем строить допустимые базисы при $K < 0$ из допустимых базисов при $K > 0$ при помощи замены (8). В частности, для атома A в координатах $(p_{r'}, p_{\varphi'}, r', \varphi') = (p_r, -p_\varphi, r, -\varphi)$ допустимый базис (λ', μ') задается теми же формулами, что и базис (λ, μ).

Далее заметим, что при $K \neq 0$ (и до факторизации по инволюции (6)) тор Лиувилля, заданный (3), является произведением двух циклов:

1. цикла α_φ вида
$$\Big\{p_r = const, \quad p_\varphi = const, \quad r = const, \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\Big\}, \tag{9}$$
где мы считаем $\dot\varphi > 0$;
2. и цикла α_r вида
$$\Big\{p_r = \pm\frac{1}{f(r)}\sqrt{U_h(r) - k^2}, p_\varphi = const, r \in [r_1, r_2] \subset [0, L], \varphi = const\Big\}, \tag{10}$$
который для определенности обходится по часовой стрелке (т.е. $\dot r > 0$ при $p_r > 0$).

Каждый атом A соответствует максимуму функции $U_h(r)$ при $K > 0$ и минимуму функции $U_h(r)$ при $K < 0$. Пусть это значение достигается в точке r_{ext}. Для $\mathbb{RP}^2$ будет два случая:

1. если $r_{\text{ext}} \neq \frac{L}{2}$, то инволюция (6) отождествляет два тора Лиувилля в окрестности особого слоя атома A (на Рис. 1a изображены соответствующие циклы α_r);



(a) Нецентральный атом (b) Центральный атом

Рис. 1: Сечения атома A

2. если же $r_{\text{ext}} = \frac{L}{2}$, то инволюция (6) переводит тор Лиувилля в окрестности особого слоя атома A в себя (см. Рис. 1b)

Definition 1. *Атом A, соответствующий $r_{\text{ext}} \neq \frac{L}{2}$, мы будем называть нецентральным, а атом A, соответствующий $r_{\text{ext}} = \frac{L}{2}$, — центральным.*

Утверждение 2. *Для рассматриваемой системы на $\mathbb{RP}^2$ в окрестности атома A можно взять указанные в Таблице 1 допустимые базисы (λ, μ) в зависимости от значений интеграла K и типа атома A.*

	Нецентр. A	Центр. A
$K > 0$	$\lambda = \alpha_r,\ \mu = \alpha_\varphi$	$\lambda = \alpha_r,\ \mu = \frac{\alpha_r + \alpha_\varphi}{2}$
$K < 0$	$\lambda = \alpha_r,\ \mu = -\alpha_\varphi$	$\lambda = \alpha_r,\ \mu = \frac{\alpha_r - \alpha_\varphi}{2}$

Таблица 1: Допустимые базисы для атома A

Доказательство. [Доказательство Утверждения 2] В соответствии с Замечанием 10 достаточно доказать утверждение при $K > 0$. Вначале рассмотрим нецентральные атомы (см. рис. 1a). Очевидно, что цикл λ стягивается в точку, и что (λ, μ) — базис. Далее, каноническая симплектическая структура на кокасательном расслоении имеет вид $\omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi$. Поэтому

$$\operatorname{sgrad} H = \omega^{-1} dH = \left(-\frac{\partial H}{\partial r}, 0, p_r, \frac{p_\varphi}{f^2}\right). \tag{11}$$

В особых точках ранга 1 векторное поле $\operatorname{sgrad} H$ пропорционально $\operatorname{sgrad} K = (0,0,0,1)$. Поэтому ориентация цикла μ зависит только от знака $p_\varphi = k$ и выбрана правильно.

Остается проверить, что ориентация λ выбрана правильно, т.е. что выполнено (7). Обозначим через v_λ и v_μ касательные векторы к указанным циклам λ и μ. Будем считать $p_r > 0$. В данном случае четверка векторов будет выглядеть следующим образом.

$$\operatorname{grad} H = \left(p_r, \frac{p_\varphi}{f^2}, \frac{\partial H}{\partial r}, 0\right), \qquad N = (\alpha, -1, -\alpha\beta, 0)$$
$$v_\lambda = (\beta, 0, 1, 0), \qquad v_\mu = (0,0,0,1),$$

где
$$\alpha = \frac{k}{f^2}\frac{p_r}{p_r^2+\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2}, \qquad \beta = -\frac{1}{p_r}\frac{\partial H}{\partial r}.$$
Отметим, что вектор N находится из условий
$$(N, \operatorname{grad} H) = (N, v_\lambda) = (N, v_\mu) = 0, \qquad N(p_\varphi) < 0.$$
Форма объема $\omega\wedge\omega = -2dp_r\wedge dp_\varphi\wedge dr\wedge d\varphi$, поэтому четверка будет положительно определена, т.к. определитель соответствующей матрицы отрицательный:
$$\begin{vmatrix} p_r & \frac{p_\varphi}{f^2} & \frac{\partial H}{\partial r} & 0 \\ \alpha & -1 & -\alpha\beta & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{p_r}\left(p_r^2+\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2+\frac{k^2}{f^4}\right) < 0,$$
т.к. мы взяли $p_r > 0$. Условие (7) выполнено, следовательно, (λ, μ) — допустимый базис.

Рассмотрим теперь центральные атомы (см. Рис. 1*b*). Достаточно доказать, что (λ, μ) — базис на торе Лиувилля (после факторизации по инволюции (6)). Остальные утверждения (что λ стягивается в точку, и что ориентации λ, μ выбраны правильно) доказываются так же, как и в случае $r_{\text{ext}} \neq \frac{L}{2}$. До факторизации по инволюции (6) можно взять такой же базис (λ', μ'), что и в случае $r_{\text{ext}} \neq \frac{L}{2}$. Введем на замкнутой кривой на Рис. 1*b* параметр $\psi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. При этом можно считать, что инволюция (6) действует как $(\varphi, \psi) \to (\varphi+\pi, \psi+\pi)$. В таком случае, до инволюции тор $\mathbb{T}^2$ получался как фактор $\mathbb{R}^2$ по подгруппе, порожденной векторами $(2\pi, 0)$ и $(0, 2\pi)$. После инволюции к порождающим подгруппы нужно добавить (π, π). Следовательно $\lambda = \lambda'$ и $\mu = \frac{\lambda'+\mu'}{2}$ действительно будут новым базисом в $\pi_1(\mathbb{T}^2/\mathbb{Z}^2)$. Что и требовалось доказать.

Утверждение 2 доказано. $\square$

3.2. Случай седловых атомов

Есть два типа седловых атомов — со звездочками и без.

Замечание 11. *Для седлового атома без звездочек мы выбираем допустимые базисы (λ, μ_i) по следующему правилу из [2]:*

1. *λ-цикл — слой расслоения Зейферта (т.е. цикл получается из критической окружности непрерывным продолжением на соседние торы);*
2. *μ_i-циклы дополняют цикл λ до базиса, при этом должно существовать глобальное сечения 3-атома, проходящее одновременно через все μ_i.*
3. *λ-цикл ориентирован направлением $\operatorname{sgrad} H$ на критической окружности.*
4. *μ_i-цикл ориентирован так, что пара (λ, μ_i) положительно ориентирована на граничном торе $\mathbb{T}^2$ (ориентация на торе $\mathbb{T}^2$ задана (7), как и для случая атома A).*

Замечание 12. *Для атомов со звездочками, в соответствии с [2], мы построим допустимые базисы по дублю атома. В данном случае дубль атома — это соответствующий атом для сферы S^2. Если соответствующий тор Лиувилля переходит в себя при инволюции (6), то цикл $\hat{\mu}_i$ для сферы S^2 нужно заменить на $\mu_i = \frac{\lambda+\hat{\mu}_i}{2}$. В противном случае этот цикл можно оставить без изменения: $\mu_i = \hat{\mu}_i$.*

Напомним (см. [2]), что λ-цикл для седловых атомов определен однозначно, а μ_i-циклы — с точностью до прибавления $k_i\lambda$, где $k_i \in \mathbb{Z}$ и $\sum_i k_i = 0$.

Определение 1. *Седловой атом, который инволюция (6) переводит в себя мы будем называть центральным. Остальные седловые атомы мы будем называть нецентральными.*

Утверждение 3. *Для рассматриваемой системы на $\mathbb{RP}^2$ в окрестности седлового атома λ-цикл допустимого базиса равен α_φ при $K > 0$ и $-\alpha_\varphi$ при $K < 0$.*

1. *Пусть седловой атом — нецентральный (пример сечения такого атома до факторизации по инволюции (6) схематично изображено на Рис. 2c). Для "внешнего", в соответствии с рис. 2c, тора Лиувилля $\mu_{\text{out}} = -\alpha_r$, для "внутренних" торов $\mu_{\text{in}} = \alpha_r$.*

2. *Пусть седловой атом — центральный и не имеет звездочек (пример сечения такого атома до факторизации по инволюции (6) схематично изображен на Рис. 2b). В соотв. с рис. 2b будет 3 типа μ-циклов, соответствующих различным граничным торам Лиувилля — "внешний" μ_{out}, "внутренние не центральные" μ_{in} и "внутренний центральный" μ_{cent}. Их можно взять следующими:*

$$\mu_{\text{out}} = \begin{cases} \frac{\alpha_\varphi - \alpha_r}{2}, & K > 0, \\ \frac{-\alpha_\varphi - \alpha_r}{2}, & K < 0, \end{cases} \qquad \mu_{\text{in}} = \alpha_r, \qquad \mu_{\text{cent}} = \begin{cases} \frac{\alpha_r - \alpha_\varphi}{2}, & K > 0, \\ \frac{\alpha_r + \alpha_\varphi}{2}, & K < 0. \end{cases}$$

3. *Пусть седловой атом — центральный и имеет звездочки (пример сечения такого атома до факторизации по инволюции (6) схематично изображен на Рис. 2a). Для "внутренних", в в соответствии с Рис. 2a, торов Лиувилля $\mu_{\text{in}} = -\alpha_r$, а для "внешнего" тора $\mu_{\text{out}} = \frac{\alpha_\varphi - \alpha_r}{2}$ при $K > 0$ и $\frac{-\alpha_r - \alpha_\varphi}{2}$ при $K < 0$.*

Доказательство. [Доказательство Утверждения 3] Утверждение 3 доказывается аналогично Утверждению 2. Более того, большинство вычислений можно не проводить, поскольку в Утверждении 2 для каждого тора Лиувилля уже были найдены базисные циклы и найдена их ориентация. Также согласно Замечанию 10 достаточно построить базис при $K > 0$: в координатах $(p_{r'}, p_{\varphi'}, r', \varphi') = (p_r, -p_\varphi, r, -\varphi)$ для седловых атомов, как и для эллиптических, допустимый базис (λ', μ') задается теми же формулами, что и базис (λ, μ).

Для примера, рассмотрим "внешний" тор для случая, соответствующего Рис. 2c, при $K > 0$. Для седлового атома $\lambda = \alpha_\varphi$ при $K > 0$, поскольку это цикл, соответствующий критической окружности. Для соответствующего атома A допустимый базис $\lambda_A = \alpha_r, \mu_A = \alpha_\varphi$. Ориентация "внешних" торов Лиувилля будет как у соответствующих атомов A, а у "внутренних" — противоположная. Поэтому оставшийся цикл $\mu_{\text{out}} = -\alpha_r$.

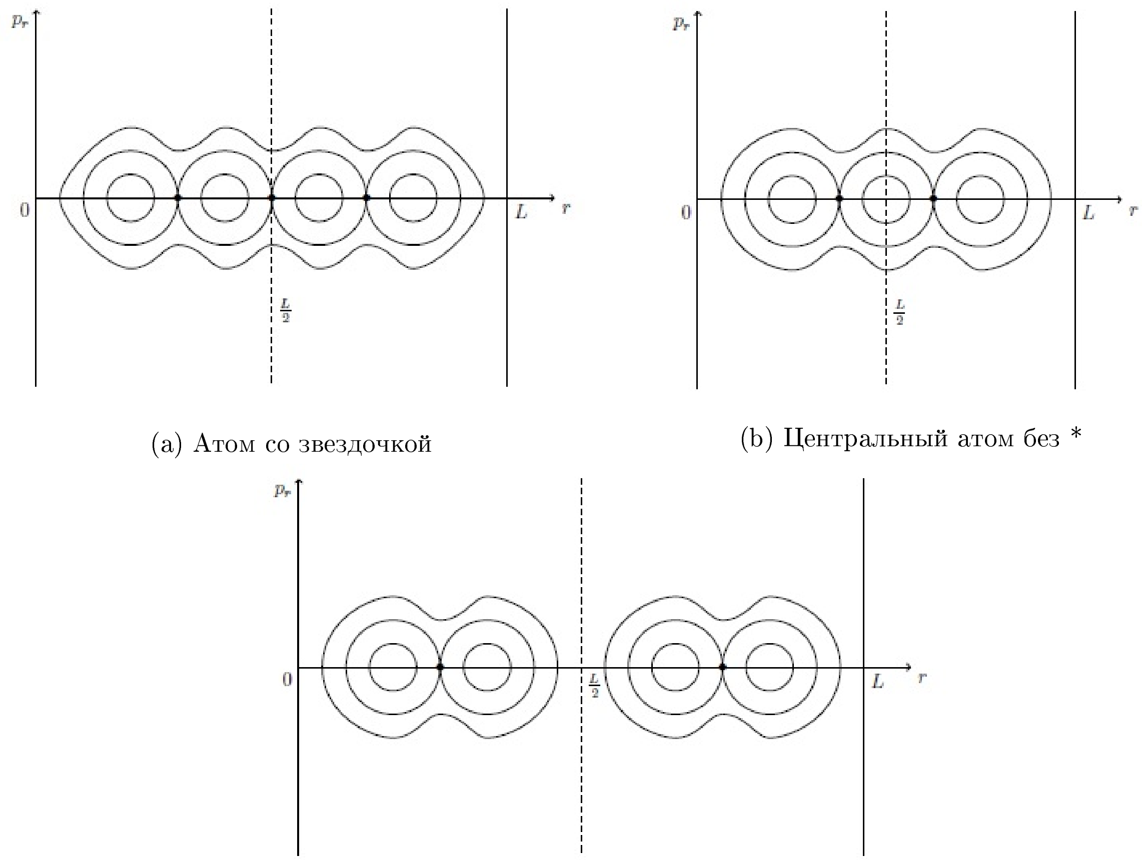
Отметим особенности выборов базисов в седловом случае. Для случая, соответствующего Рис. 2b), через циклы μ_i должно проходить сечение. Поэтому мы берем противоположные знаки при α_φ в μ_{out} и μ_{cent}, чтобы в сумме эти они сократились. Для случая, соответствующего Рис. 2a, μ-циклы находятся в соответствии с Замечанием 12.

Утверждение 3 доказано. □

4. Доказательство Теоремы 3

Доказательство. [Доказательство Теоремы 3] Явно вычислим все матрицы перехода в указанных в Разделе 3 допустимых базисах. Во всех случаях метки r и ε вычисляются по матрице перехода так, как описано в [2].

Обозначим через (λ_+, μ_+) и (λ_-, μ_-) допустимые базисы при $K > 0$ и $K < 0$ соответственно. Во всех случаях цикл α_φ корректно определен при всех K. Для циклов α_r это неверно,



(a) Атом со звездочкой

(b) Центральный атом без *

(c) Нецентральный атом без *

Рис. 2: Сечения седлового атома

потому что координаты (r, φ) имеют особенности в полюсах. Поэтому если уровень $K = 0$ содержит полюс, то циклы $\alpha_{r\pm}$ при $K > 0$ и $K < 0$ могут переходить в разные циклы при продолжении на уровень $K = 0$.

1. Вначале рассмотрим случай 3. Поскольку при $K = 0$ тор Лиувилля не содержит полюсов, $(p_r, p_\varphi, r, \varphi)$ будут глобальными координатами на Q^3. Поэтому формулы для допустимых базисов из Утверждения 2 будут выполнены для всех K. Матрица перехода для нецентральных атомов имеет вид
$$\begin{pmatrix}\lambda_+\\ \mu_+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_-\\ \mu_-\end{pmatrix},$$
а для центральных атомов — вид
$$\begin{pmatrix}\lambda_+\\ \mu_+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_-\\ \mu_-\end{pmatrix}.$$

2. Рассмотрим теперь случай 2. Несложно показать, что выполнено соотношение
$$\alpha_{r+} = \alpha_{r-} - \alpha_\varphi. \tag{12}$$
На Рис. 3 схематично изображено, как (непрерывно) меняется цикл α_{r+} при изменении K. Из (12) и Утверждения 2 вытекает, что в этом случае матрица перехода имеет вид
$$\begin{pmatrix}\lambda_+\\ \mu_+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_-\\ \mu_-\end{pmatrix}. \tag{13}$$

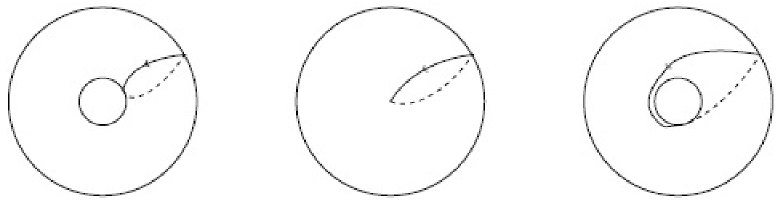


Рис. 3: Перестройка цикла λ в случае 2

Продемонстрируем это на простейшем примере: рассмотрим систему на плоскости $\mathbb{R}^2(x,y)$ натуральную систему с гамильтонианом $H = \frac{p_x^2+p_y^2}{2} + \frac{x^2+y^2}{2}$ и первым интегралом $K = xp_y - yp_x$. Легко видеть, что эта система имеет одну особую точку ранга 0 типа центр-центр. В координатах

$$u_1 = \frac{p_x + y}{\sqrt{2}}, \quad v_1 = \frac{p_y - x}{\sqrt{2}}, \quad u_2 = \frac{p_x - y}{\sqrt{2}}, \quad v_2 = \frac{p_y + x}{\sqrt{2}},$$

форма имеет вид $\omega = du_1 \wedge dv_1 + du_2 \wedge dv_2$, а интегралы $F_1 = \frac{H-K}{2} = \frac{u_1^2+v_1^2}{2}$ и $F_2 = \frac{H+K}{2} = \frac{u_2^2+v_2^2}{2}$ имеют канонический вид, как в теореме Элиассона (см. [2]). Обозначим через α_1 и α_2 циклы, соответстсвующие траекториям гамильтоновых векторных полей $\operatorname{sgrad} F_1$ и $\operatorname{sgrad} F_2$ соответственно. Аналогично доказательству Утверждения 2 несложно показать, что в качестве допустимых базисов можно взять $\lambda_+ = \alpha_1, \mu'_+ = \alpha_2$ (в окрестности точек $F_1 = 0$) и $\lambda_- = \alpha_2, \mu'_- = \alpha_1$ (в окрестности точек $F_2 = 0$). Для системы на $\mathbb{RP}^2$ в качестве циклов $\mu_\pm$ берутся циклы, соответствующие потокам $\operatorname{sgrad} K$. Поэтому нужно взять $\mu_+ = \alpha_2 - \alpha_1$ и $\mu_- = \alpha_1 - \alpha_2$. Таким образом мы получаем требуемое соотношение (13).

3. Рассмотрим наконец случай 1. Аналогично случаю 2 (см. также [2, Том 2, Раздел 3.4]) можно показать, что
$$\alpha_{r+} = \alpha_{r-} - 2\alpha_\varphi. \tag{14}$$
Из (14) и Утверждения 2 вытекает, что в этом случае матрица перехода имеет вид
$$\begin{pmatrix}\lambda_+\\ \mu_+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_-\\ \mu_-\end{pmatrix}.$$

Теорема 3 полностью доказана. □

5. Доказательство Теоремы 4

Доказательство. [Доказательство Теоремы 4] Теорема 4 доказывается аналогично Теореме 3. Укажем лишь все матрицы перехода между бифуркациями. Через $\lambda^A_\pm, \mu^A_\pm$ мы будем обозначать допустимые базисы для атома A, а через $\lambda^V_\pm, \mu^V_\pm$ мы будем обозначать допустимые базисы для седловых атомов (как со звездочками, так и без). Знак $\pm$ будет положительным у атома, отвечающему большему значению K (и отрицательном — для меньшего значения K).

В таблице 2 указана матрице перехода C для ребер вида $A - V$ и $V - A$ (т.е. между эллиптическим и седловым атомами). Здесь мы считаем, что $\begin{pmatrix}\lambda^A_+\\ \mu^A_+\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}\lambda^V_-\\ \mu^V_-\end{pmatrix}$ при $K > 0$ и $\begin{pmatrix}\lambda^V_+\\ \mu^V_+\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}\lambda^A_-\\ \mu^A_-\end{pmatrix}$ при $K < 0$.

	Нецентр. A	Центр. A
$K>0$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
$K<0$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

Таблица 2: Матрицы перехода между эллиптическими и седловыми атомами

Для нецентральных ребер вида $V-V$ (т.е. между седловыми атомами)

$$\begin{pmatrix}\lambda_+^V\\ \mu_+^V\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_-^V\\ \mu_-^V\end{pmatrix}.$$

Матрица перехода C на центральном ребре вида $V-V$ зависит от типа проекции $\pi(Q^3)$ на $\mathbb{RP}^2$ и указана в Таблице 3. Мы считаем, что $\begin{pmatrix}\lambda_+^V\\ \mu_+^V\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}\lambda_-^V\\ \mu_-^V\end{pmatrix}$. Здесь достаточно воспользоваться тем, что мы знаем выражение допустимых базисов через α_r и α_φ (см. Утверждение 3) и то, как эти циклы меняются при изменении знака K (см. доказательство Теоремы 3). А именно, во всех случаях цикл α_φ не меняется, $\alpha_{r+}=\alpha_{r-}$ если $\pi(Q^3)\approx I^1\times S^1$ или $\mathbb{M}^2$, выполнено (12) если $\pi(Q^3)\approx D^2$, и выполнено (14) если $\pi(Q^3)=\mathbb{RP}^2$.

$\pi(Q^3)$	$\mathbb{RP}^2$	D^2	$\mathbb{M}^2$	$I^1\times S^1$
C	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Таблица 3: Матрицы перехода на центральном ребре между седловыми атомами

Все метки (r,ε и n) вычисляются по матрицам перехода по формулам из [2]. Теорема 4 полностью доказана. □

Замечание 13. *Продемонстрируем, что при $V(r)=0$ по формуле Топалова (см. [2, Том 2, Раздел 1.9]) метка n равна 0 или -2, что согласуется с Теоремой 4, но не согласуется с указанной в [2, Том 2, Теорема 3.11]) меткой n. Если $V(r)=0$, то для любой компоненты неособой изоэнергетической поверхности $\pi(Q^3)=\mathbb{RP}^2$ и $Q^3\approx L_{4,1}$. Значит, $\operatorname{Tor} H_1(Q^3)=4$. Возможны следующие два варианта.*

1. *Пусть $r=\frac{L}{2}$ является локальным максимумом функции $U_h(r)$. В этом случае в молекуле нет атомов со звездочками, зато есть два центральных атома A (пример такого атома и функции $U_h(r)$ указаны на Рис. 4).*

   На соответствующих двух ребрах, исходящих из единственной семьи, матрица перехода равна $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, и метка $r=\frac{1}{2}$ (отметим, что при $K<0$ мы обратили ребро, и поэтому нужно взять не матрицу из Таблицы 2, а обратную к ней). На остальных исходящих ребрах матрица перехода равна $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, и метка $r=0$. В обозначениях из [2] энергия оснащенной молекулы $N(W^*)=4$ и

$$N(W^*)=\beta_1\dots\beta_m\tilde{n}. \tag{15}$$

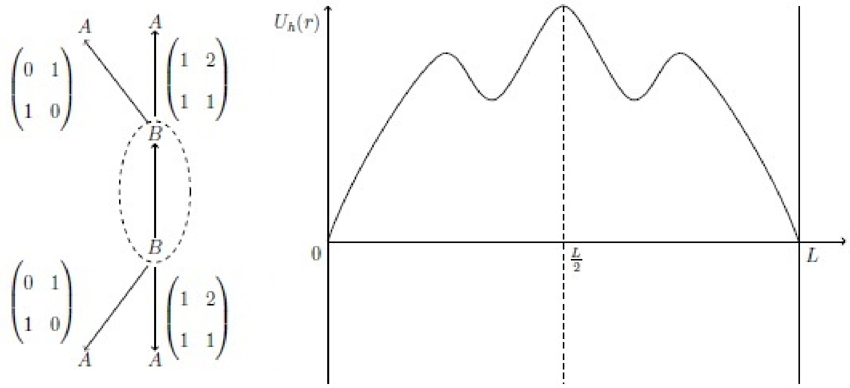


Рис. 4: Молекула с центральными атомами A

Два знаменателя r-меток равны двум: $\beta_1 = \beta_2 = 2$, а остальные $\beta_i = 0$. Поэтому "энергия семьи" $\tilde{n} = \pm 1$. С другой стороны, $\tilde{n} = n + \sum\limits_{\text{внешн. ребр.}} r_i = n + 1$. Откуда $n = 0$ или -2.

2. *Пусть $r = \frac{L}{2}$ является локальным минимумом функции $U_h(r)$. В этом случае в молекуле $p = 2$ атома со звездочкой, зато нет центральных атома A (пример такого атома и функции $U_h(r)$ указаны на Рис. 5).*

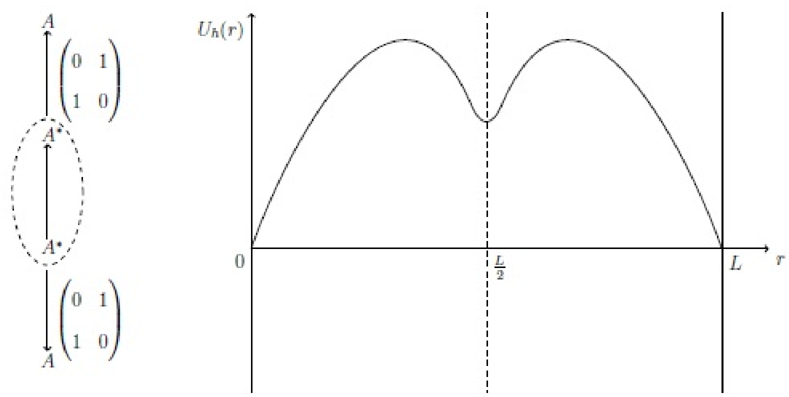


Рис. 5: Молекула без центральных атомов A

На всех исходящих ребрах матрица перехода равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и метка $r = 0$. По правилам из [2] формула (15) заменится на

$$N(W^*) = 4\beta_1 \dots \beta_m \tilde{n},$$

а "энергия семьи" $\tilde{n} = n + \sum\limits_{\text{внешн. ребр.}} r_i + \frac{p}{2} = n + 1$. Откуда опять же $n = 0$ или -2.

Неоднозначность в метке n здесь связана с выбором ориентации Q^3. При изменении ориентации Q^3 метка $n = 0$ меняется на $n = -2$ и наоборот (см. [2, Том 1, Раздел 4.5.2]). Мы выбрали ориентацию так, что $n = -2$.

6. Заключение

Получена лиувиллева классификация натуральной гамильтоновой системы на проективной плоскости с метрикой вращения и линейным интегралом. Вычислены все инварианты Фоменко — Цишанга (т.е. меченые молекулы) системы. Тем самым завершен тонкий лиувиллев анализ системы, начатый в [4]. Исправлена опечатка в метке n в [2, Том 2, Теорема 3.11].

И. К. Козлов благодарен проф. А. В. Болсинову за полезные комментарии и советы при написании работы. Исследование И. К. Козлова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01303).

Работа посвящается академику Анатолию Тимофеевичу Фоменко к его семидесятипятилетию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981, 327 с.

2. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2, Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999, 1: 444 с.; 2: 447 с.

3. Кантонистова Е. О. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле // Матем. сб., 207:3 (2016), 47–92;

4. Тимонина Д. С. Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков в потенциальном поле на двумерных многообразиях вращения: торе и бутылке Клейна // Матем. сб., 209:11 (2018), 103–136;

5. Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Докл. АН СССР, 287:5 (1986), 1071–1075.

6. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем., 50:6 (1986), 1276–1307.

7. Фоменко А. Т., Цишанг Х. О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике // Докл. АН СССР, 294:2 (1987), 283–287.

8. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил., 22:4 (1988), 38–51.

9. Geiges H., Lange C., Seifert fibrations of lens spaces // `arXiv:1608.06844 [math.GT]`

REFERENCES

1. Besse A. L., “Manifolds all of whose geodesics are closed”, Ergeb. Math. Grenzgeb., **93**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1978, ix+262 с.

2. Bolsinov A. V. and Fomenko, A T., “Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification”, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, xvi+730 с.

3. Kantonistova E. O. “Topological classification of integrable Hamiltonian systems in a potential field on surfaces of revolution”, *Sb. Math.*, **207**:3 (2016), 358–399.

4. Timonina D. S., "Liouville classification of integrable geodesic flows in a potential field on two-dimensional manifolds of revolution: the torus and the Klein bottle", *Sb. Math.*, **209**:11 (2018), 1644–1676.

5. Fomenko A. T., "Morse theory of integrable Hamiltonian systems", *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2 (1986), 502–506.

6. Fomenko A. T., "The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability", *Math. USSR-Izv.*, **29**:3 (1987), 629–658.

7. Fomenko A. T., Zieschang, H., "On the topology of the three-dimensional manifolds arising in Hamiltonian mechanics", *Soviet Math. Dokl.*, **35**:2 (1987), 520–534.

8. Fomenko A. T., "Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems", *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 286–296.

9. Geiges H., Lange C., "Seifert fibrations of lens spaces", `arXiv:1608.06844 [math.GT]`

Получено 12.01.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 2.

УДК 515.146.6+515.164.635 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-26-36

О свойствах группы кобордизма стабильно-оснащённых погружений в коразмерности k

П. М. Ахметьев

Ахметьев Петр Михайлович — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова, Департамент прикладной математики, профессор; ведущий научный сотрудник теоротдела ИЗМИРАН (г. Москва).
e-mail: pmakhmet@mail.ru

Аннотация

Изучается понятие „intermediate bordism group" , которое было введено П. Дж. Экклзом для исследовании фильтраций в стабильных гомотопических группах сфер. Введено новое понятие группы кобордизма стабильно-оснащенных погружений. Строится представляющее пространство для новых групп и вычисляются ранги этих групп кобордизма. Инварианты Хопфа и гомоморфизм Кана-Придди обобщаются на группы кобордизма стабильно-оснащенных погружений.

Ключевые слова: стабильные гомотопические группы сфер, погружения;

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:
П. М. Ахметьев. О свойствах группы кобордизма стабильно-оснащённых погружений в коразмерности k // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 26–36.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 2.

UDC 515.146.6+515.164.635 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-26-36

On the properties of the cobordism group of stably-framed immersions in codimension k

P. M. Akhmet'ev

Akhmet'ev Petr Mikhailovich — HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics (MIEM HSE), School of Applied Mathematics, professor (Moscow).
e-mail: pmakhmet@mail.ru

Abstract

The notion „intermediate bordism group“, which was introduced by P. J. Eccles to investigate filtrations in stable homotopy group of spheres, is considered. A new notion „cobordism groups of stable-framed immersions“ is introduced. The classifying space for the new groups is constructed, ranks of the groups are calculated. Hopf invariants and the Kahn-Priddy homomorphism are generalized for cobordism groups of stable-framed immersions.

Keywords: stable homotopy groups of spheres, immersion.

Bibliography: 11 titles.

For citation:
P. M. Akhmet'ev, 2020, "On the properties of the cobordism group of stably-framed immersions in codimension k" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 26–36.

1. Введение

В работах [7], [8] были определены группы кобордизма „intermediate bordism group“, которые использовались для изучения фильтрации Вуда в гомотопических группах сфер. Фильтрацию Вуда, на наш взгляд, было бы правильно рассматривать вместе с денадстроечной фильтрацией и называть такую двойную фильтрацию бифильтрацией Вуда-Экклза. Коротко говоря, изучается возможность перевложить оснащенное вложенное подмногообразие, представляющее заданный элемент гомотопической группы сфер, в Евклидово пространство минимальной размерности. Чем выше минимальная коразмерность вложения, тем больше вес элемента в бифильтрации Вуда-Экклза. При этом, если мы ищем оснащенное вложение в классе оснащенного кобордизма, которое минимизирует коразмерность, то получается вес денадстроечной фильтрации. А если мы минимизируем коразмерность без условия оснащенности вложения, сохраняя лишь свойство стабильной оснащенности, т.е. сохраняя элемент в стабильной гомотопической группе сфер, и не требуем оснащения вложения, то получается вес фильтрации в смысле Вуда.

Экклзом были построены пространства Тома, гомотопические группы которых соответствуют „intermediate bordism group“. На основе этих пространств Тома им были построены примеры элементов с разнообразными весами фильтрации.

В настоящей работе мы не используем понятие „intermediate bordism group“ полностью, а используем лишь стабильную версию этих групп кобордизма. Поэтому мы ввели новый термин для изучаемых групп и назвали эти частные группы Экклза группами кобордизма стабильно-оснащенных погружений m-мерных многообразий в коразмерности k. Такие группы мы обозначим через $Imm^{st-fr}(m,k)$, определение приводится в разделе 2. представляющие пространства строятся в разделе 3. В разделе 4 проводятся вычисления рангов этих групп.

Группы кобордизма стабильно-оснащенных погружений в коразмерности k являются расширением стабильных гомотопических групп сфер. Расширенные группы естественно проектируются на стабильные гомотопические группы сфер, при этом, если $k = 1$, эта проекция естественна по отношению к действию алгебры Стинрода в спектральной последовательности Адамса для стабильных гомотопических групп сфер. Если же параметр k увеличивать от 1 до веса элемента фильтрации Вуда-Экклза (т.е. не более, чем до метастабильного ранга), в этом диапозоне размерностей разнообразных элементов в группах стабильно-оснащенных погружений становится больше. Таким образом, свойства групп кобордизма описываются новой алгебраической структурой, которая, по нашему мнению, требуется для более глубокого понимания самих стабильных гомотопических групп сфер.

В нашей работе мы сделали лишь начальный шаг в намеченном направлении. В разделе 5 мы отследили определение инвариантов Хопфа в новых группах кобордизма. В разделе 6 мы определили группы кобордизма $Imm^{st-sfr}(m-k,k)$ погружений в коразмерности k со стабильной проективной структурой нормального расслоения и построили трансфер $Imm^{st-sfr}(m-k,k)$ в группы $Imm^{st-fr}(m,k)$. Этот трансфер обобщает трансфер Кана-Придди. Мы исследовали простейшие алгебраические свойства нового трансфера, они оказались аналогичными.

Планируется перенести теорию вторичных операций в стабильных гомотопических группах сфер на теорию стабильно-оснащенных погружений. В частности планируется проанализировать теорему Браудера [2] об Арф-инварианте и конструкцию бесконечной серии элементов Маховальда в стабильных гомотопических группах сфер [4]. Проблема денадстройки элементов стабильной гомотопической группы в нестабильную область важна и выражается соответствующим весом элемента в фильтрации Вуда-Экклза. Планируется перенести результаты об итерированной денадстройке в стабильных гомотопических груцппах на группы кобордизма стабильно-оснащенных погружений. Несмотря на то, что группы кобордизма стабильно-оснащенных погружений содержат значительно больше элементов по сравнению со стабильными гомотопическими группами сфер, теорема о денадстройке, по-видимому, вносит некоторые ограничения на свойства элементов с точки зрения высших операций в алгебре Стинрода.

2. Группа кобордизма стабильно-оснащенных погружений в коразмерности k

Представляющая пара, – это пара (φ, Ξ), где $\varphi : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+k}$ – погружение, Ξ – его стабильное n-оснащение, где n-большое натуральное число, т. е изоморфизм $\Xi : \nu_{I\circ\varphi} = n\varepsilon$, где $I : \mathbb{R}^{m+k} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ – стандартное координатное вложение. Отношение кобордантности определяется стандартным способом, оно задает отношение эквивалентности на представляющих парах, подробности в этом определении можно записать как в аналогичных определениях из [1]. Фактормножество пар, по отношению эквивалентности снабжено структурой абелевой группы относительно операции дизъюнктного объединения. Построенная группа обозначается через $Imm^{st-fr}(m,k)$ и называется группой m-мерного кобордизма стабильно-оснащенных (посредством Ξ) погружений в коразмерности k.

Определим два забывающих гомоморфизма

$$A : Imm^{st-fr}(m,k) \to \Pi_m = \pi_{m+N}(S^N), \quad N >> m; \tag{1}$$

$$B : Imm^{st-fr}(m,k) \to Imm^{SO}(m,k), \tag{2}$$

где $Imm^{SO}(m,k)$–группа кобордизма погружений в коразмерности k ориентированных многообразий размерности m.

В частном случае $k = 2$ группа $Imm^{st-fr}(m,2)$ естественно отображается в $m+2$-стабильную гомотопическую группу пространства $BU(1) = CP(\infty) = K(\mathbb{Z},2)$, которая изучена при помощи конструкции Понтрягина-Тома в [11].

3. Пространство Тома

Представляющим пространством для $Imm^{st-fr}(m,k)$ служит пространство Тома $T(\eta)$ тавтологического n-мерного расслоения η над многообразием Штифеля $V_{n,n-k}$, n-большое натуральное число. Поскольку расслоение η– тривиальное, имеем равенство $T(\eta) = \Sigma^n(V_{n,n-k})$.

Гомотопическая группа $\pi_{m+n}(T(\eta))$ по конструкции Понтрягина-Тома представлена оснащенным вложением $(\psi : M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}; \Xi)$, при этом дополнительно определено поле $(n-k)$-реперов в нормальном расслоении ν_ψ, которое обозначим через Ψ. Согласно теореме Хирша, определено оснащенное погружение $\varphi : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+k} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ в гиперпространчство, регулярно гомотопное ψ, причем однозначно с точностью до регулярной конкордантности, если $k = 1$ и до регулярной гомотопии, если $k > 1$. При $k = 1$ получится оснащенное вложение $(\psi : M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}; \Xi)$, которое дополнительно снабжено полем $n-1$-реперов Ψ нормального расслоения. Поле Ψ однозначно продолжается до полного поля n-реперов, поэтому получится отображение $F : M^m \to SO(n)$.

4. Рациональный гомотопический стабильный тип пространства Тома

Вычислим гомотопические группы $\pi_{m+n}\Sigma^n(V_{n,n-k}) \otimes \mathbb{Q}$, при условии, что $n >> m, n >> k$, используя простые факты из рациональной теории гомотопий, изложенные в [3]. Вначале вычислим $H^m(V_{n,n-k}) \otimes \mathbb{Q}$, $n >> m$, $n >> k$. Рассмотрим локально-тривиальное расслоение, при условии $k = 2l$:

$$V_{2l+1,1} \subset V_{n,n-2l} \to V_{n,n-2l-1}. \tag{3}$$

Далее рассмотрим цепочку локально-тривмальных расслоений

$$V_{2l+3,2} \subset V_{n,n-2l-1} \to V_{n,n-2l-3} \dots \tag{4}$$

$$V_{2l+2s+1,2} \subset V_{n,n-2l-2s+1} \to V_{n,n-2l-2s-1}. \tag{5}$$

Параметр s выбираем не слишком большим, так, что $n >> 2l+2s+1$, при этом вычисления групп когомологий проводим в диапазоне размерностей от 0 до $2l+2s-1$ включительно.

Слой $V_{2l+2s+1,2}$ в расслоении (5) является рациональной сферой $S^{4l+3s-1}$ при каждом $s \geqslant 0$. Действительно, многообразие $V_{2l+2s+1,2}$ является пространством расслоения:

$$S^{2l+2s-1} \subset V_{2l+2s+1} \to S^{2l+2s},$$

в котором рациональный фундаментальный класс слоя $[S^{2l+2s-1}]^*$ трангсгрессируется в рациональный фундаментальный класс базы $[S^{2l+2s}]^*$. Определено отображение $V_{2l+2s+1} \to S^{2l+2s+1}$, которое переводит гомологический фундаментальный класс $[V_{2l+2s+1}]_*$ в гомологический фундаментальный класс образа $[S^{2l+2s+1}]_*$ и индуцирует изоморфизм групп гомологий с рациональными коэффициентами.

Теорема 1. *При условии $n >> m$, $n >> k$, группа $H^m(V_{n,n-k}) \otimes \mathbb{Q}$ при $m = k$, $2k+3$, $2k+7, \dots$ имеет ранг 1, если $k = 2l$, и при $m = 2k+3, 2k+7, \dots,$ если $k = 2l+1$.*

Следствие 1. *Градуированные группы $\Pi_m(V_{n,n-k}) \otimes \mathbb{Q} = \pi_{m+n}\Sigma^n(V_{n,n-k}) \otimes_{\mathbb{Q}}$, $n >> m$, $n >> k$ вычисляются как произведение градуированных групп от образующих размерностей $m = k$, $2k+3$, $2k+7, \dots,$ если $k = 2l$ и от образующих размерностей $2k+7, \dots,$ если $k = 2l+1$.*

Доказательство. Поскольку гомотопические группы $\Pi_m(V_{n,n-k}) \otimes_{\mathbb{Q}}$ вычисляются лишь в метастабильных размерностях (в размерностях не более $2n-2$) у n-связного клеточного пространства, они изоморфны группам гомологий многообразия $V_{n,n-k}$, которые ваычислены в Теореме 1. Вычисляющий гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом Гуревича, который переводит фундаментальный класс $n+m$-мерного сферойда в класс гомологий представляющего пространства Тома. Пользуясь изоморфизмом Тома, можно заметить, что при гомоморфизме Гуревича фундаментальный класс $[M^m]$ многообразия из представляющей пары переходит в m-мерный гомологический класс многообразия Штифеля $V_{n,n-k}$. $\square$

При каждом четном $m = 2l$ согласно Следствию 1 группа $Imm^{st-fr}(m,m)$ содержит образующую бесконечного порядка. Опишем такую образующую, построив соответствующее погружение со стабильным оснащением.

Рассмотрим разложение координатного $2m$-мерного пространства в прямую сумму двух ортогональных m-мерных координатных подпространств: $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m_1 \oplus \mathbb{R}^m_2$. В подпространствах рассмотрим единичные диски $D_i \subset \mathbb{R}^m_i$, $i = 1, 2$. Определим образ кусочно-линейного погружения $f : S^m \looparrowright \mathbb{R}^{2m}$, соединив отрезками точки с одинаковыми координатами на дисках. Само погружение f, тем самым, также определено. Мы будем считать, что f-гладкое, для этого у построенного погружения (которое не переобозначаем) сгладим углы в точках прикрепления отрезков к дискам. Представляющую пару (φ, Ξ) определим по формуле: $\varphi = Id \circ f$, где $Id : \mathbb{R}^{2m} \subset \mathbb{R}^{2m+(n-m)}$ координатное вложение, $n > 2m$; Ξ–оснащение размерности $n-m$, определенное координатными векторами гиперпространства образа вложения Id.

Аналогичная конструкция проходит и для нечетных m. Обозначим серию построенных элементов $\alpha_m \in Imm^{st-fr}(m,m)$. Докажем, что α_{2l}, $l \geqslant 0$, является образующей бесконечного порядка. Для $l = 0$ это очевидно. Для положительного $m = 2l$ погружение φ_m имеет дисковое нормальное расслоение, изоморфное дисковому касательному расслоению $T(S^m)$. При регулярной гомотопии погружения $\varphi_m : S^m \looparrowright \mathbb{R}^{2m} \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ к стандартному вложению $\bar{\varphi}_m : S^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{R}^{2m+1}$, вектор оснащения вдоль оси с номером $2m+1$, т.е. первый вектор оснащения Ξ, перейдет перейдет в вектор, параметризующий m-сферу направлений в стандартном $m+1$-оснащении к вложению $\bar{\varphi}_m$. Остальные $(n-m-1)$ вектора оснащения Ξ, начиная со второго, не изменяют направления вдоль координатных осей.

Тем самым, представляющая пара (φ_m, Ξ) строится так, что при образе гомоморфизма Гуревича, фундаментальный класс $[S^m]$ переходит в образующую $H_m(V_{n,n-m}, \mathbb{Q}) = H_{m+n}(\Sigma^n(V_{n,n-m}))$, $m = 2l$. Дополнительно заметим, что $m = 2l+1$ аналогичная конструкция также возможна. При произвольном m получается образующая из $H_m(V_{n,n-m}; \mathbb{Z}/2)$.

5. Стабильно-оснащенные погружения с инвариантом Хопфа 1

Инвариантом Хопфа называется гомоморфизм (ср. с формулой (2))

$$h_m : Imm^{st-fr}(m,m) \to Imm^{SO}(m,m) \to \mathbb{Z}/2, \tag{6}$$

сопоставляющий погружению $\varphi : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{2m}$ (которое предполагается самотрансверсальным) представляющей пары четность числа его точек самопересечения. Выше было доказано, что при любом положительном m существует инвариант Хопфа является ненулевым. Условно будем считать, что при $m = 0$ инвариант Хопфа совпадает с четностью числа компонент многообразия M^m.

Наша ближайшая цель – выписать формулу для вычисления инварианта Хопфа в терминах гомотопических инвариантов пространства Тома.

Напомним необходимые сведения из теории (обобщенных) систем Постникова, [5]. Определим одноэтажные системы Постникова, которые строятся по образующим элементам алгебры Стинрода.

Рассмотрим класс когомологий $Sq^{k+1} \in K(\mathbb{Z}, n)$, $n > 2k+2$. Рассмотрим одноэтажную систему расслоенных пространств, дополненную слева отображением $f : S^{n+k} \to S^n$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & K(\mathbb{Z}/2, n+k) & \xrightarrow{i_1} & P_1 & & \\ & \bar{f} \nearrow & & & \downarrow & & \\ S^{n+k} & \xrightarrow{f} & S^n & \xrightarrow{i_0} & P_0 \cong K(\mathbb{Z}, n) & \xrightarrow{Sq^{k+1}} & K(\mathbb{Z}/2, n+k+1). \end{array} \tag{7}$$

Используя диаграмный поиск и размерностные соображения, заключаем, что определено отображение $\bar{f}: S^{n+k} \to K(\mathbb{Z}/2, n+k)$, дополняющее диаграмму до коммутативной. Определено характеристическое число $h(f) = (\bar{f})[\tau] \in \mathbb{Z}/2$, $\tau \in H^{n+k}(K(\mathbb{Z}/2, n+k); \mathbb{Z}/2)$, ассоциированное с отображением $\bar{f}: S^{n+k} \to K(\mathbb{Z}/2, n+k)$ (на диаграмме левое диагональное). Это число детектирует элемент $[f] \in \pi_{n+k}(S^n)$ гомотопической группы при помощи когомологической операции Sq^{k+1} в одноэтажной системе Постникова (здесь и далее в этом разделе когомологии и гомологии рассматриваются над $\mathbb{Z}/2$). Это характеристическое число называется инвариантом Хопфа отображения f. По теореме Адамса $h(f) = 0$, если $k+1 \neq 2, 4, 8$. Существуют отображения (расслоения) $S^3 \to S^2$, $S^7 \to S^4$, $S^{15} \to S^8$ с инвариантом Хопфа 1.

Перенесем это определение на случай гомотопических групп $\pi_{n+k}(\Sigma^n(V_{n,n-m}))$, $k = m$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & K(\mathbb{Z}/2, n+m) & \xrightarrow{i_1} & P_1 & & \\ & \bar{f} \nearrow & & & \downarrow & & \\ S^{n+m} & \xrightarrow{f} & \Sigma^n(V_{n,n-m}) & \xrightarrow{i_0} & P_0 \cong K(\mathbb{Z}, n) & \xrightarrow{Sq^{m+1}} & K(\mathbb{Z}/2, n+m+1). \end{array} \tag{8}$$

В диаграмме (8) отображение i_0 определено как класс Тома.

Определено отображение $\bar{f}: S^{n+m} \to K(\mathbb{Z}/2, n+m)$, дополняющее диаграмму до коммутативной. Индуцированное характеристическое число

$$h(f) = (\bar{f})[\tau] \in \mathbb{Z}/2, \quad \tau \in H^{n+m}(K(\mathbb{Z}/2, n+m); \mathbb{Z}/2) \tag{9}$$

называется инвариантом Хопфа отображения f. Поскольку диаграмма (7) естественно отображается в диаграмму (8), инвариант Хопфа на $\pi_{n+m}(\Sigma^n(V_{n,n-m}))$ согласован со стандартным инвариантом Хопфа на образе группы $\pi_{n+m}(S^n)$.

Теорема 2. *Инвариант Хопфа (Хопфа-Стинрода) на всей группе* $\pi_{n+m}(\Sigma^n(V_{n,n-m}))$, *определенный по диаграмме* (8), *согласован с инвариантом Хопфа (Хопфа-Джеймса), определенным по диаграмме* (6).

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \Sigma^{n-m-1}MO(m+1) & \xrightarrow{Sq^{m+1}} & K(\mathbb{Z}/2, n+m+1) \\ & & & & \uparrow & & \Updownarrow \\ & & & & \Sigma^{n-m}MO(m) & \xrightarrow{Sq^{m+1}} & K(\mathbb{Z}/2, n+m+1) \\ & & & \nearrow & \uparrow & & \Updownarrow \\ D^{n+m+1} & \supset & S^{n+m} & \xrightarrow{f} & \Sigma^n(V_{n,n-m}) & \xrightarrow{Sq^{m+1}} & K(\mathbb{Z}/2, n+m+1). \end{array} \tag{10}$$

Отображение $S^{n+m} \to \Sigma^{n-m}MO(m) \to \Sigma^{n-m-1}MO(m+1)$, заданное композицией косой и левой верхней вертикальных стрелок, продолжается до отображения диска D^{n+m+1} (по теореме Тома о кобордизме, по конструкции Понтрягина – Тома и теореме Уитни о вложении). При этом относительный конус $(C_f, \Sigma^n(V_{n,n-m}))$ отображения f отображается в пару пространств $(\Sigma^{n-m-1}MO(m+1), \Sigma^{n-m}MO(m))$ посредством отображения $F: D^{n+m+1} \to \Sigma^{n-m-1}(MO(m+1))$ с фиксированным ограничением $f: S^{n+m} \to$ $\to \Sigma^{n-m-1}(MO(m+1))$ на основание.

Действительно, рассмотрим представляющую пару (φ, Ξ) для отображения $S^{n+m} \xrightarrow{f}$ $\longrightarrow \Sigma^n(V_{n,n-m})$, здесь $\varphi: M^m \looparrowright \mathbb{R}^{2m}$–погружение, Ξ – стабильное оснащение этого погружения в коразмерности $n-m$. Рассмотрим однократную надстройку $\bar{\varphi}: M^m \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ погружения φ, отображение $\bar{\varphi}$–вложение. По теореме Тома о кобордизме найдется многообразие с краем W^{m+1}, $\partial W = M^m$, поскольку M^m–оснащенное многообразие. По теореме Уитни о вложении, найдется вложение $\theta : (W^{m+1}, M^m) \subset \mathbb{R}^{2m+1} \times [0,1], \mathbb{R}^{2m+1} \times \{0\}$, продолжающее вложение $\bar{\varphi}$.

Вложение $\bar{\varphi}$ является надстройкой над φ, поэтому снабжено ненулевым вертикальным сечением ξ нормального расслоения $\nu_{\bar{\varphi}}$. Препятствие $h \in \mathbb{Z}/2$ к продолжению ненулевого сечения нормального расслоения ν_θ над W^{m+1} с заданным сечением ξ на ∂W называется инвариантом Хопфа-Стинрода погружения φ. Инвариант Хопфа-Стинрода является препятствием, которое вычисляется как характеристическое число $Sq^{m+1}[F^*(i)]$, где $i \in H^n(V_{n,n-m})$–класс Тома. По коммутативности диаграммы (10) инвариант Хопфа-Стинрода совпадает с (9). С другой стороны, инвариант Хопфа-Стинрода, определенный геометрически, совпадает и инвариантом Хопфа-Джеймса, который определен последовательностью (6). Последнее вытекает из того, что инвариант Хопфа-Стинрода определяется как четность числа критических точек проекции $p \circ \theta : W^{m+1} \to \mathbb{R}^{2m+1} \times [0,1] \to \mathbb{R}^{2m} \times [0,1]$. Многообразие критических точек проекции кобордантно (посредством многообразия самопересечения погружения $p \circ \theta$) многообразию точек самопересечения погружения φ, поскольку ограничение проекции $p \circ \theta$ на ∂W^{m+1} совпадает с φ. $\square$

6. Трансфер Кана-Придди

Напомним конструкцию трансфера Кана-Придди, следуя [6], [10]. Начнем построение, используя конструкцию Понтрягина-Тома, получится определение трансфера в форме Кошорке.

Пусть дано погружение $f : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+1}$ ориентированного многообразия, представляющее элемент $[f] \in \Pi_m$. Предположим, что погружение f общего положения и имеет трансверсальное самопересечение. В этом случае многообразие самопересечения погружение f является замкнутым многообразием, которое обозначим через N^{m-1}, это многообразие, вообще говоря, неориентируемо и снабжено погружением $g : N^{m-1} \looparrowright \mathbb{R}^m$. Погружение g определено однозначно, с точностью до регулярной конкордантности. Погружение g представляет элемент стабильной гомотопической группы $\Pi_m(\mathbb{RP}^\infty)$, поскольку $\mathbb{RP}^\infty$ является пространством Тома канонического линейного расслоения над $\mathbb{RP}^{\infty-1} = Gr^O(1,\infty)$.

Конструкция, ставящая в соответствие погружению $g : N^{m-1} \looparrowright \mathbb{R}^m$ неориентированного многообразия ориентированное погружение $f : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+1}$, состоит в следующем. Рассмотрим погружение $I \circ g : N^{m-1} \looparrowright \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, где $I : \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$–стандартное вложение. Погружение $I \circ g$ имеет нормальное расслоение $\nu_{I\circ g}$, которое изоморфно сумме Уитни линейного ориентирующего расслоения κ_N (над N^{m-1}) и тривиального расслоения ε. В каждый слой расслоения $\nu_{I\circ g}$ вклеивается кривая формы ∞, причем так, что горизонтальная ось симметрии кривой, прересекающая кривую в 4 точках, соответствует слагаемому ε нормального расслоения $\nu_{I\circ g}$. Семейство кривых параметризует замкнутое ориентированное многообразие, которое мы обозначим через M^m. Многообразие M^m наделим ориентацией так, что вектор внешней нормали в обеих крайних точках горизонтальной оси симметрии слоя был бы направлен вдоль положительного вектора слоя ε. Определено, тем самым, погружение $f : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+1}$ ориентированного многообразия, которое представляет элемент $[f] \in \Pi_m$. Соответствие $g \mapsto f$ называется прямым трансфером. Соответствие $f \mapsto g$ называется обратным трансфером.

Теперь проведем аналогичное построение, используя петлевые пространства, которые являются представляющими пространствами для групп оснащенных и скошенно-оснащенных погружений. Отображение $QS^0 \to Q\mathbb{RP}^\infty$, где $Q = \Omega^\infty\Sigma^\infty$, которое определяет обратный трансфер, описано в [10], предложение 1.5.5.

Определим отображение Кана-Придди $\lambda : \mathbb{RP}^\infty \to Q(S^0)$, $Q(\dots) = \Omega^\infty\Sigma^\infty(\dots) = \lim_{k\to+\infty}(\Omega^{k+1}\Sigma^{k+1}(S^0))$, $\Omega^{k+1}\Sigma^{k+1}(S^0) = \Omega^{k+1}(S^{k+1})$. Определим отображение $\lambda_k : \mathbb{RP}^{k+1} \to \Omega^{k+1}(S^{k+1})$.

Построим вспомогательное отображение $\tilde{\lambda}_k : \mathbb{RP}^k \to \Omega_\circ^{k+1}(S^{k+1})$ как семейство одноточечных компактификаций отражений $\mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{k+1}$ относительно прямой в плоскости, ортогональной прямой $x \subset \mathbb{R}^{k+1}$, проходящей через начало координат и соответствующей прямой $[x] \in \mathbb{RP}^k$. Мы воспользовались обозначением $\Omega_\circ$ для непунктированных петель.

Теперь определим отображение $\lambda_k : \mathbb{RP}^k \to \Omega^{k+1}(S^{k+1})$. Рассмотрим тождественное отображение $1 : S^{k+1} \to S^{k+1}$ степени $+1$, затем возьмем букетную сумму $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k * 1$ семейства $\tilde{\lambda}_k$ с тождественным отображением. Этим достигается, что образ отображения λ_k лежит в компоненте связности тождественной петли, т.к. имеет нулевую степень. Поэтому, где потребуется, мы сможем считать сразу для всех k, что отмеченная точка в $\mathbb{RP}^k$ отображается в тождественную петлю над отмеченной точкой S^{k+1}.

Рассмотрим допредельное отображение $\lambda_n : \Sigma^n\mathbb{RP}^{n-1} \to S^n$ Кана-Придди, $n >> 1$. Ограничение отображения $\bar{\lambda}_n$ на подпространство $\Sigma^n(\mathbb{RP}^1) = S^{n+1}$ пространства $\Sigma^n\mathbb{RP}^{n-1}$ представляет (по элементарным геометрическим соображениям) отображение $f : S^{n+1} \to S^n$ с нечетным инвариантом Хопфа. Поясним этот хорошо известный результат, см. [6], начало доказательства предложения 4.6.

Заметим, что отображение f является $(n-2)$-кратной надстройкой над отображением $f_1 : \Sigma^2(\mathbb{RP}^1) \to S^2$. Для построения f_1 опишем однопараметрическое семейство вспомогательных отображений f'_φ, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Отображение f'_φ– это композиция проекции $p : S^2 \to S^2 \vee S^2$, однопараметрического поворота первой сферы в букете $S^2 \vee S^2$ на угол φ вдоль экватора и стандартного отображения проекции $\pi : S^2 \vee S^2 \to S^2$ степени -1 на первой сфере и степени $+1$ на второй сфере (это отображение $S^2 \to S^2$ над выделеенной точкой $pt \in \mathbb{RP}^1$). Теперь рассмотрим гомотопию $\pi \circ p$ над отмеченной точкой $pt \in \mathbb{RP}^1$ в нулевое отображение (такую гомотопию считаем стандартной). Выделенную сферу в $S^2 \times \mathbb{RP}^1$ над $S^2 \times pt$ стягиваем, из $\pi \circ f'_\varphi \circ p$ получается отображение f_1 на $S^2 \times \mathbb{RP}^1 / S^2 \times pt = \Sigma^2(\mathbb{RP}^1)$. Из построения следует, что прообразы двух регулярных значений отображения f_1, каждый прообраз - это кривая в $\Sigma^2(\mathbb{RP}^1) = S^3$, зацеплены с нечетным коэффициентом. Значит, отображение $f : S^{n+1} \to S^n$, действительно, имеет нечетный инвариант Хопфа.

Известно, что сфероид $f : S^{n+1} \to S^n$ с нечетным инвариантом Хопфа детектируется функциональной когомологической операцией Sq^2_f, примененной к фундаментальному классу $[S^n] \in H^n(S^n; \mathbb{Z}/2)$, [5].

Обозначим через $Sq^{k+1}_{\bar{\lambda}_n}([i]) \in H^{n+k}(\Sigma^n\mathbb{RP}^\infty)$ результат применения функциональной когомологической операции Sq^{k+1} при отображении λ к фундаментальному классу $[i] \in H^n(S^n)$ (подробности в определении функциональной когомологической операции см. [5], гл. 16). В частности, согласно замечанию выше, при $k = 1$ получим $Sq^2_{\bar{\lambda}}([i]) = t$, где $t \in H^{n+1}(\Sigma^n(\mathbb{RP}^{n-1}); \mathbb{Z}/2)$–образующий когомологический класс.

Теорема 3. *В [6], Предложение 4.6, доказано, что если* $S^{n+k} \to \Sigma^n(\mathbb{RP}^{n-1}) \xrightarrow{\bar{\lambda}_n} S^n$ *произвольный сфероид,* $f : S^{n+k} \to S^n$, *определяющий элемент* $[f] \in \Pi_k$, $k << n$, *то* $[f]$ *детектируется* Sq^k, *тогда и только тогда, когда образ фундаментального класса сфероида* $S^{n+k} \to \Sigma^n(\mathbb{RP}^n)$ *совпадает с образующей* $t^k \in H^{n+k}(\Sigma^n(\mathbb{RP}^n))$.

7. Обобщение трансфера Кана-Придди в форме Кошорке для стабильно-оснащенных погружений

Обобщим вышеизложенные результаты, докажем аналогичные результаты для группы кобордизма стабильно-оснащенных погружений. Определим группу кобордизма скошенных стабильно-оснащенных $(m-k)$-мерных погружений в коразмерности k, которую обозначим через $Imm^{st-sf}(m-k, k)$. Элементы группы представлены тройками (ψ, f, Ψ), где $\psi : N^{m-k} \looparrowright \mathbb{R}^m$-погружение (если k-нечетно, то многообразие N^{n-k} ориентированным не предполагается); $f : N^{m-k} \to PV_{n,n-k}$ – отображение в многообразие Штифеля проективных $n-k$-реперов в n-пространстве; $\Psi : \nu_\psi \cong f^*(\eta_{n,n-k})$, где $\eta_{n,n-k}$–каноническое k-мерное расслоение над $PV_{n,n-k}$, при этом предполагается, что $n >> m$.

Замечание 1. *В вычислительном аспекте потребуется знать кольцо когомологий многообразия $PV_{n,n-k}$. Удобно предположить, что общности не ограничивает, что $n-k=2^s$, $k=2^l$, $s >> l$. Согласно [9] в этом случае получим*

$$H^*(PV_{n,n-k}) = \mathbb{Z}_2[t]/t^{k+1} \otimes V(\tau_k, \tau_{k+1}, \dots \tau_{n-1}),$$

где τ_i, $i = k, \dots, n-1$ – классы когомологий размерности i, которые можно определить в терминах когомологий канонического двулистного накрытия $V_{n,n-k} \to PV_{n,n-k}$, t-класс линейного канонического расслоения γ над $PV_{n,n-k}$. Пространство Тома $\Sigma^n(PV_{n,n-k})$ имеет те же группы когомологий со сдвинутой на n градуировкой, так что элемент $t^j\tau_k$ имеет размерность $j+k+n$. При $k=n-1$ получается случай Кана-Придди, поскольку $PV_{n,1} = \mathbb{RP}^{n-1}$.

Определим гомоморфизм обобщенного трансфера $Imm^{st-sf}(m-k,k) \to Imm^{st-fr}(m,k)$, $(\psi, f, \Psi) \mapsto (\varphi, \Xi)$. Для этого к нормальному расслоению ν_ψ (обозначим для краткости это расслоение через ζ) погружения $\psi : N^{m-k} \looparrowright \mathbb{R}^m$ добавим прямое слагаемое $\zeta \otimes \mathbb{Z}/2$. Расслоение $\zeta \otimes \mathbb{Z}/2$ снабжено стабильной тривиализацией $\Psi_{tw} : \zeta \otimes \mathbb{Z}/2 \oplus (n-k)\varepsilon = n\varepsilon$, построенной по стабильной скошенной тривиализации расслоения ζ путем тензорного домножения на линейное расслоение $f^*(\gamma)$. Здесь через $\zeta \otimes \mathbb{Z}/2$ обозначено расслоение $f^*[(\eta_{n,n-k}) \otimes \gamma] = \zeta \otimes f^*(\gamma)$, где γ-каноническое линейное расслоение над $PV_{n,n-k}$.

Рассмотрим погружение $\psi : N^{m-k} \looparrowright \mathbb{R}^m$ и стабилизируем это погружение, добавив к нормальному расслоению слагаемое $\zeta \otimes \mathbb{Z}/2$ с заданной стабильной тривиализацией. Полученное погружение обозначим через $\psi_1 : N^{m-k} \looparrowright \mathbb{R}^{m+k}$, его нормальное расслоение раскладывается в сумму Уитни двух k-мерных расслоений $\Psi_1 = \Psi \oplus \Psi_{tw} : \nu_{\psi_1} \cong \zeta \oplus \zeta \otimes \mathbb{Z}/2$.

Построим погружение $\varphi : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+k}$. Сферу S^k впишем в каждый слой подрасслоения $\zeta \oplus \zeta \otimes \mathbb{Z}/2$, дополнив пару дисков вдоль пары биссектриссных подрасслоений семейством отрезков, соединяющих соответствующие точки на дисках. Под биссектриссами понимаются всевозможные неупорядоченные пары прямых l, l', биссектрисс в плоскостях $x, x \otimes \mathbb{Z}/2$, где прямые $x \subset \zeta$, $x \otimes \mathbb{Z}/2 \subset \eta \otimes \mathbb{Z}/2$ соответствуют друг другу. Направления на $l, l \otimes \mathbb{Z}/2$ связаны друг с другом при проекции на $x \otimes \mathbb{Z}/2$, они могут обратится лишь одновременно.

Полученное погружение обозначим через $\varphi : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+k}$. Докажем, что погружение φ является стабильно-параллелизуемым посредством Ξ (в коразмерности $n-m$). Нормальное расслоение к паре биссектриссных дисков L, L' определим параллельным слагаемому $\zeta \otimes \mathbb{Z}/2$. Над соответствующими точками дисков с общей проекцией на горизонтальный слой отождествление слоев над соответствующих точках биссектриссных дисков с общей горизонтальной проекцией следует выбирать $\mathbb{Z}/2$-косоинвариантным, этим достигается корректность.

На ленточке из отрезков над граничной (экваториальной) S^{m-k-1}-мерной сферой слои обеих расслоений отождествляются со слоем, нормального расслоения к погруженной сфере в рассматриваемом слое. Хотя такое отождествление задается с известным произволом, оно общее для слоя каждого диска, поэтому слои двух дисков над экваториальной сферой отождествляются тождественной матрицей в горизонтальном слое. Поэтому нормальное расслоение к каждой погруженной сфере естественно изоморфно горизонтальному слою $\zeta \oplus \mathbb{Z}/2$, а все нормальное расслоение ν_φ изоморфно $\pi^*(\zeta \otimes \mathbb{Z}/2)$, где $\pi : M^m \to N^{n-k}$– послойная проекция каждой вписанной сферы на нулевой вектор нормального расслоения к N^{m-k}. Построеная стабильная тривиализация $\Xi : \nu_\varphi \oplus (n-k)\varepsilon = n\varepsilon$ завершает конструкцию. Трансфер $(\psi, f, \Psi) \mapsto (\varphi, \Xi)$ определен.

Автор благодарит А. С. Мищенко за обсуждения, Ф. Ю. Попеленского за обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. P.M.Akhmet'ev, O.D.Frolkina, „On properties of skew-framed immersions cobordism groups“, http://arxiv.org/abs/1712.00959v1.
2. W.Browder, *The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization*, Ann. of Math., (2) 90 (1969) 157-186.
3. Ф.А.Гриффитс, Д.В.Морган *Рациональная теория гомотопий и дифференциальные формы* пер. с англ. М. Наука 1990.
4. M.Mahowald, *A new infinite family in* ${}_2\pi_*^S$, Topology vol. 16 (1977) 249-256.
5. Mosher R.S. Tangora M.C., *Cohomology operations and their applications in homotopy theory*, N.Y. Harper and Row, Publishers, 1968. Перевод Мир 1970.
6. P.J.Eccles, *Codimension One Immersions and the Kervaire Invariant One Problem*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. vol 90 (1981) 483- 493.
7. P. J. Eccles, *Representing framed bordism classes by manifolds embedded in low codimension*, Geometric Applications of Homotopy Theory, Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977, Vol. I, Lecture Notes in Math. Vol. 657, Springer, Berlin, 1978, pp. 150–155.
8. P. J. Eccles, *Filtering framed bordism by embedding codimension*, J. London Math. Soc. (2) 19 (1979), 163–169.
9. S. Gitler and D.Handel *The projective Stiefel manifolds - I*, Topology Vol. 7, pp. 39-45.
10. V.P. Snaith, *Stable homotopy around the Arf-Kervaire invariant*, Birkhauser Progress on Math. Series vol. 273 (April 2009).
11. A.Szucs and T.Terpai, *Singularities and stable homotopy groups of spheres. II* Journal of Singularities Volume 17 (2018), 28-57.

REFERENCES

1. P.M.Akhmet'ev, O.D.Frolkina, „On properties of skew-framed immersions cobordism groups“, http://arxiv.org/abs/1712.00959v1.
2. W.Browder, *The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization*, Ann. of Math., (2) 90 (1969) 157-186.
3. P.Griffiths; J.Morgan *Rational Homotopy Theory and Differential Forms* Progress in Mathematics, 16. Birkhuser, Boston, Mass., 1981
4. M.Mahowald, *A new infinite family in* ${}_2\pi_*^S$, Topology vol. 16 (1977) 249-256.
5. Mosher R.S. Tangora M.C., *Cohomology operations and their applications in homotopy theory*, N.Y. Harper and Row, Publishers, 1968.
6. P.J.Eccles, *Codimension One Immersions and the Kervaire Invariant One Problem*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. vol 90 (1981) 483- 493.
7. P. J. Eccles, *Representing framed bordism classes by manifolds embedded in low codimension*, Geometric Applications of Homotopy Theory, Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977, Vol. I, Lecture Notes in Math. Vol. 657, Springer, Berlin, 1978, pp. 150–155.

8. P. J. Eccles, *Filtering framed bordism by embedding codimension*, J. London Math. Soc. (2) 19 (1979), 163–169.

9. S. Gitler and D.Handel *The projective Stiefel manifolds - I*, Topology Vol. 7, pp. 39-45.

10. V.P. Snaith, *Stable homotopy around the Arf-Kervaire invariant*, Birkhauser Progress on Math. Series vol. 273 (April 2009).

11. A.Szucs and T.Terpai, *Singularities and stable homotopy groups of spheres. II* Journal of Singularities Volume 17 (2018), 28-57.

Получено 25.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 530.145 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-37-42

Особенные пространства для релятивистских полей

В. В. Белокуров, Е. Т. Шавгулидзе

Белокуров Владимир Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова; Институт ядерных исследований РАН (г. Москва).
e-mail: vvbelokurov@yandex.ru
Шавгулидзе Евгений Тенгизович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: shavgulidze@bk.ru

Аннотация

Мы изучаем, как модифицируются модели квантовой теории при перепараметризации координат пространства-времени и одновременно некоторых преобразований полевой функции. Предъявлены преобразования, которые превращают действие массивного поля в пространстве-времени Минковского в действие безмассового поля в некотором искривлённом пространстве.

Ключевые слова: уравнение Клейна — Гордона — Фока, репараметризация пространства-времени, преобразование полевых функций

Библиография: 3 названия.

Для цитирования:
В. В. Белокуров, Е. Т. Шавгулидзе. Особенные пространства для релятивистских полей // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 37–42.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 530.145 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-37-42

Peculiar spaces for relativistic fields

V. V. Belokurov, E. T. Shavgulidze

Belokurov Vladimir Viktorovich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov MSU; Institute for Nuclear Research of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: vvbelokurov@yandex.ru
Shavgulidze Evgeni Tengizovich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, M. V. Lomonosov MSU (Moscow).
e-mail: shavgulidze@bk.ru

Abstract

We study how quantum field theory models are modified under the reparametrizations of the space-time coordinates and some simultaneous transformations of the field function. The transformations that turn the action of the massive field in the Minkowski space-time into the action of the massless field in some curved space are presented.

Keywords: Klein–Gordon–Fock equation reparametrization of the space-time transformation of field functions

Bibliography: 3 titles.

For citation:
V. V. Belokurov, E. T. Shavgulidze, 2020, "Peculiar spaces for relativistic fields", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 37–42.

1. Introduction

In this paper, we study how the quantum field theory model is modified under the reparametrizations of the space-time coordinates x^μ and some simultaneous transformations of the field function $u(x)$. It is an important part of a more general problem to study the behaviour of functional integrals in quantum field theory under transformations of coordinates of the space-time and field functions.

It is known that the properties of the Wiener measure remain valid under reparametrizations of the time variable t. In this case, there is the invariant differential $(u(t))^{-2}\, dt$. We consider the class of transformations of the coordinates of the $d-$dimensional space and the simultaneous transformations of the field function $u(x)$ that leave invariant the differential

$$(u(x))^{2d-4}\, dx\,, \qquad x \in \mathbf{R}^d\,.$$

In this class, there are transformations that relate massive and massless theories. If we start with the action of the massive field in the Minkowski space-time then we get the action of the massless field in some curved space. The metric tensor of this space is determined by the mass of the initial field and the form of the transformations. The metric and the curvature are singular at some points of the space, although the determinant of the metric does not change: $\det G_{\mu\nu} = -1$.

2. Mass of relativistic field and deformation of the geometry of space-time

Consider the action of self-interacting scalar field in the ordinary Minkowski[1] space-time

$$2\mathcal{A} = \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 - m^2 u^2 + u^4 \right] d^4 x\,. \tag{1}$$

Representing the field $u(x)$ as the product

$$u(x) = v(x)\, \varphi(x)$$

and supposing that u and v vanish at infinity, we rewrite the action (1) in the form

$$2\mathcal{A} = \int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x^i} \right)^2 \right] \varphi^2\, d^4 x$$

[1] The similar scheme can also be carried out in the Euclidean space.

$$+\int v^4\,\varphi^4\,d^4x + \int \varphi\left[-\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^0)^2}+\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^i)^2}-m^2\varphi\right] v^2\,d^4x\,. \tag{2}$$

If the function $\varphi(x)$ satisfies the Klein-Gordon (KG) equation [1]

$$-\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^0)^2}+\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^i)^2}-m^2\varphi=0\,, \tag{3}$$

then the action (2) is reduced to the action of the massless field in some curved space

$$\int\left[G^{\mu\nu}\frac{\partial w}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial w}{\partial\xi^\nu}+w^4\right]\sqrt{-G}\,d^4\xi\,, \tag{4}$$

where $v(x)=w(\xi(x))$. The geometry of the space is determined by the solution of the KG equation for $\varphi(x)$.

We demand the form of the interaction term to be invariant. In this case, the Jacobian of the substitution

$$\det\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\varphi^4(x)\,. \tag{5}$$

and

$$G=\det G_{\mu\nu}=-1\,.$$

However the metric tensor $G^{\mu\nu}$ is nontrivial.

There are various options for the function $\xi^\mu(x^\nu)$. First, let us consider a special case with $\varphi=\varphi(s)$, where $s=\sqrt{(x^0)^2-(x^i)^2}$. The KG equation is transformed to the ordinary differential equation

$$\varphi''+\frac{3}{s}\varphi'+m^2\varphi=0\,. \tag{6}$$

Its general solution is expressed in terms of the Bessel functions

$$\varphi(s)=\frac{1}{s}\left[C_1J_1(ms)+C_2Y_1(ms)\right]\,. \tag{7}$$

The values of the constants $C_1,\ C_2$ are determined by the boundary conditions. In particular, $s^{-1}J_1(ms)\sim const$ and $s^{-1}Y_1(ms)\sim C\left(\ln s-2m^{-2}s^{-2}\right)$ at $s\sim 0$.

A simple but nontrivial way to define the new coordinates is a dilatation of the old ones with the dilatation factor depending on s only

$$\xi^\mu=\rho(s)s^{-1}\,x^\mu\,,\quad \rho(0)=0\,.$$

In this case, the angles do not change and

$$\sigma\equiv\sqrt{(\xi^0)^2-(\xi^i)^2}=\rho(s)\,.$$

Evaluating the Jacobian of the substitution and taking into account (5) we get the equation for $\rho(s)$

$$\rho^3(s)\rho'(s)s^{-3}=\varphi^4(s)\,. \tag{8}$$

Thus,

$$\rho^4(s)=\int\limits_0^{s^4}\varphi^4(s)ds^4\,.$$

The points of the x space where $\varphi(s)=0$ correspond to some singular points in ξ space. To explain this statement in more detail, in the next section we consider a slightly different substitution $\xi^\mu(x^\nu)$ and find the metric tensor and scalar curvature [2] of the obtained space.

3. The structure of the peculiar spaces for some special diffeomorphisms of space-time coordinates

Now, we suppose that the function φ does not depend on the spatial variables: $\varphi = \varphi(t)$. In this case, the KG equation reduces to the equation for a harmonic oscillator with the solution

$$\varphi(t) = \mu \sin m(t - t_0)\,. \tag{9}$$

Consider the following transformations of space-time

$$\tau = f(t)\,, \quad \xi^i = f'(t)\, x^i\,, \tag{10}$$

and let $\varphi(t)$ be equal to $f'(t)$

$$u(t,x) = v(t,x)\,\varphi(t) = w\left(f(t),\, f'(t)\,x\right)\, f'(t)\,. \tag{11}$$

In order that the directions of the initial time t and the new time τ be the same, the function $\varphi(t) = f'(t)$ must be nonnegative. However, the solution (9) does not satisfy this condition. To overcome the problem, note that at the points t^* where $\varphi(t) = 0$ it may not be a solution of the equation (3). If the zeroes of the function $\varphi(t)$ form a discrete set then they do not give any contribution to integrals. So, we can take arbitrary solutions on the intervals between the zeroes and sew them together at these points.

For simplicity, we take

$$\varphi(t) = \mu|\sin m(t - t_0)|\,. \tag{12}$$

We denote by $g(\tau)$ the diffeomorphism inverse to $f(t)$

$$t = g(\tau) = f^{-1}\left(f(t)\right)\,,$$

and recall some useful relations

$$f'(t) = \frac{1}{g'(\tau)}\,, \quad \frac{f''(t)}{f'(t)} = -\frac{g''(\tau)}{\left(g'(\tau)\right)^2}\,.$$

The action (1) is written now in the form

$$\int \left[G^{\mu\nu}\frac{\partial w}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial w}{\partial \xi^\nu} + w^4\right]\sqrt{-G}\, d^4\xi$$

$$= \int \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \tau} - h(\tau)\,\xi^i\frac{\partial w}{\partial \xi^i}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi^i}\right)^2 + w^4\right] d\tau d^3\xi \tag{13}$$

where

$$h(\tau) = \frac{g''(\tau)}{g'(\tau)}\,.$$

Thus, the components of the metric tensor are

$$G^{00} = 1\,, \quad G^{0i} = -h(\tau)\,\xi^i\,, \quad G^{ij} = h^2(\tau)\,\xi^i\xi^j - \delta^{ij}\,. \tag{14}$$

By the direct evaluation, one can check that $\det G_{\mu\nu} = -1$ and get the expression for the Riemann tensor and the scalar curvature

$$R = 2\left[3h'(\tau) + \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right)\left(h'(\tau)\right)^2 + \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right) h(\tau)h''(\tau)\right]\,. \tag{15}$$

Now, let us find the explicit form of the dependence $\tau = f(t)$, $t = g(\tau)$, $h(\tau)$. From (12) it follows

$$\tau = f(t) = \frac{\mu}{m} \int\limits_0^t |\sin mt| \, m \, dt \,. \tag{16}$$

Here, we put the constant $t_0 = 0$ and assume that $\tau = 0$ at $t = 0$.

We integrate (16) over intervals $(k-1)\frac{\pi}{m} \le t \le k\frac{\pi}{m}$ separately and sew the results together.

At the interval $(k-1)\frac{\pi}{m} \le t \le k\frac{\pi}{m}$, $\quad k = 1, 2, \ldots$, the result looks like

$$\tau = \frac{\mu}{m}\Big((-1)^k \cos mt + 2k - 1\Big)\,, \quad 2(k-1)\frac{\mu}{m} \le \tau \le 2k\frac{\mu}{m}\,. \tag{17}$$

In this case,

$$t = g(\tau) = -\frac{1}{m} \arccos\Big(\tau - (2k-1)\frac{\mu}{m}\Big) + k\frac{\pi}{m}\,, \tag{18}$$

$$\frac{1}{g'(\tau)} = m \sqrt{\Big(\tau - (2k-1)\frac{\mu}{m}\Big)\,\Big(-\tau + 2k\frac{\mu}{m}\Big)}\,, \tag{19}$$

and

$$2h(\tau) = \frac{1}{\tau - (2k-1)\frac{\mu}{m}} - \frac{1}{2k\frac{\mu}{m} - \tau}\,. \tag{20}$$

Thus, the function $\tau = f(t)$ is a continuous monotone increasing one with the points of inflection at $t = k\frac{\pi}{2m}$. Note that it is valid for negative values of t and τ as well.

At some values of the new time variable, namely at $\tau = k\frac{\mu}{m}$, the components of the metric tensor G^{0i}, G^{ij} and the scalar curvature R tend to infinity. On the other hand, $\frac{1}{g'(\tau)}$, and hence the space coordinates ξ^i , vanish at these singular points. It makes sense to emphasize that the points $\tau = k\frac{\mu}{m}$, where the space collapses, in this case are determined only by the mass of the field m .

One can easily check that the form of the action of a gauge field is invariant at the transfer to the new space. In fact, in the Minkowski space the action of the electromagnetic field has the form

$$\mathcal{A}_{em} = -\frac{1}{4} \int \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} f_{\alpha\gamma} f_{\beta\delta}\, d^4x\,, \qquad f_{\alpha\gamma} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\alpha}\,. \tag{21}$$

Using the following relations

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} = \frac{1}{g'} V^\lambda_\gamma \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda}\,, \qquad a_\alpha = \frac{1}{g'} V^\lambda_\alpha A_\lambda\,, \qquad V^\lambda_\gamma = g'\,\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\gamma}\,. \tag{22}$$

one gets

$$\mathcal{A}_{em} = -\frac{1}{4} \int G^{\mu\lambda} G^{\nu\sigma} F_{\mu\lambda} F_{\nu\sigma} \sqrt{-G}\, d^4\xi\,, \qquad F_{\mu\lambda} = \frac{\partial A_\mu}{\partial \xi^\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial \xi^\mu}\,, \tag{23}$$

were

$$G^{\mu\lambda} = \eta^{\alpha\gamma}\, V^\mu_\alpha\, V^\lambda_\gamma\,. \tag{24}$$

The same result is valid for nonabelian gauge fields as well.

4. Conclusion

Although we do not yet know if the discussed peculiar spaces have any physical sense, the study of these spaces can help to understand the structure of functional integrals in quantum field theory in plane and in curved spaces.

Since the factor in the field function transformation (11) is singular at some points, the functional integrations in the theories in the initial and the new spaces are carried out over different functional spaces. Some simple examples of the modification of the functional spaces at nonlinear nonlocal substitutions in functional integrals related with interaction terms in the action were given in [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. “Введение в теорию квантованных полей” 4 изд., М. Наука. 1984.

2. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. “Современная геометрия: Методы и приложения” 3 изд., УРСС, Москва. 1994.

3. В.В. Белокуров, Е.Т. Шавгулидзе. “Необычайные свойства функциональных интегралов и группы диффеоморфизмов”, Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2017. Т. 48. Вып. 2. С. 194-235.

REFERENCES

1. Bogoliubov, N.N. & Shirkov, D.V. 1984, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Nauka, Moskow (in Russian).

2. Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T. & Novikov, S.P. 1992, *Modern geometry – methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Grad. Texts in Math., 93, Springer-Verlag, New York.

3. Belokurov, V.V. & Shavgulidze, E.T. 2017, “Extraordinary Properties of Functional Integrals and Groups of Diffeomorphisms”, *Physics of Particles and Nuclei*, vol. 48, no. 2, pp. 267-286.

Получено 12.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 514.752.8+514.763+514.765+514.764.227 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-43-64

ПМП, (ко)присоединённое представление и нормальные геодезические левоинвариантных (суб)финслеровых метрик на группах Ли[1]

В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева

Берестовский Валерий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет (г. Новосибирск).
e-mail: vberestov@inbox.ru
Зубарева Ирина Александровна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН (г. Омск).
e-mail: i_gribanova@mail.ru

Аннотация

С помощью основ теории групп и алгебр Ли, их (ко)присоединенных представлений и принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального быстродействия даны независимое обоснование методов геодезического векторного поля поиска геодезических левоинвариантных (суб)финслеровых метрик на группах Ли и поиска соответствующих локально оптимальных управлений в (суб)римановом случае, а также несколько их применений.

Ключевые слова: алгебра Ли, группа Ли, (ко)присоединенное представление, левоинвариантная (суб)риманова метрика, левоинвариантная (суб)финслерова метрика, математический маятник, нормальная геодезическая, оптимальное управление.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:
В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева. ПМП, (ко)присоединённое представление и нормальные геодезические левоинвариантных (суб)финслеровых метрик на группах Ли // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 43–64.

[1]Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 514.752.8+514.763+514.765+514.764.227 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-43-64

PMP, (co)adjoint representation, and normal geodesics, of left-invariant (sub-)Finsler metric on Lie groups

V. N. Berestovskii, I. A. Zubareva

Berestovskii Valerii Nikolaevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University (Novosibirsk).
e-mail: vberestov@inbox.ru
Zubareva Irina Aleksandrovna — candidate of physical and mathematical Sciences, Senior Researcher, Sobolev Institute of Mathematics (Omsk).
e-mail: i_gribanova@mail.ru

Abstract

On the ground of origins of the theory of Lie groups and Lie algebras, their (co)adjoint representations, and the Pontryagin maximum principle for the time-optimal problem are given an independent foundation for methods of geodesic vector field to search for normal geodesics of left-invariant (sub-)Finsler metrics on Lie groups and to look for the corresponding locally optimal controls in (sub-)Riemannian case, as well as some their applications.

Keywords: (co)adjoint representation, left-invariant (sub-)Finsler metric, left-invariant (sub-)Riemannian metric, Lie algebra, Lie group, mathematical pendulum, normal geodesic, optimal control.

Bibliography: 27 titles.

For citation:
V. N. Berestovskii, I. A. Zubareva, 2020, "PMP, (co)adjoint representation, and normal geodesics, of left-invariant (sub-)Finsler metric on Lie groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 43–64.

1. Introduction

After Gromov's 1980s papers, homogeneous sub-Finsler manifolds, in particular, sub-Riemannian manifolds were actively studied [1], [15], [22], [26]. Their investigation is based on the Rashevsky–Chow theorem which states that any two points of a connected manifold can be joined by a piecewise smooth curve tangent to a given totally nonholonomic distribution [14], [20].

1) Every homogeneous manifold with intrinsic metric is the quotient space G/H of some connected Lie group G by its compact subgroup H, equipped with G-invariant Finsler or sub-Finsler metric d; in particular, it may be Riemannian or sub-Riemannian metric [3], [4], [5];

2) moreover, according to a form of metric d, there exists a left-invariant Finsler, sub-Finsler, Riemannian or sub-Riemannian metric ρ on G such that the canonical projection $(G,\rho)\rightarrow(G/H,d)$ is a submetry [5], [2], [18].

The search for geodesics of homogeneous (sub-)Finsler manifolds are reduced to the case of Lie groups with left-invariant (sub-)Finsler metrics.

The shortest arcs on Lie groups with left-invariant (sub)-Finsler metrics are optimal trajectories of the corresponding left-invariant time-optimal problem on Lie groups [3]. This permits to apply the Pontryagin maximum principle (PMP) for their search [13]. By this method, in [7] are found all geodesics and shortest arcs of an arbitrary sub-Finsler metric on the three-dimensional Heisenberg group.

In [8] is proposed a search method of normal geodesics on Lie groups with left-invariant sub-Riemannian metrics. The method is applicable to Lie groups with left-invariant Riemannian metrics, since all their geodesics are normal.

In this paper, to find geodesics of left-invariant (sub-)Finsler metrics on Lie groups and corresponding locally optimal controls in (sub-)Riemannian case we use the geodesic vector field method (Theorems 7, 8) and an improved version of method from [8], applying (co)adjoint representations. The version is based on differential equations from Theorem 9 for controls, using only the structure constants of Lie algebras of Lie groups.

An interesting feature of these two methods in (sub-)Riemannian case is that locally optimal controls on Lie algebras of Lie groups for geodesics and corresponding geodesic vector fields on Lie groups (their integral curves are geodesics, i.e., locally optimal trajectories) can be determined independently of each other. Moreover, controls on different Lie algebras could be solutions of the same mathematical pendulum equation (see sections 6–8).

Analogues of Theorems 4 and 7 (but for the last theorem is only along one geodesic) are proved in the book [22] on the basis of more complicated concepts and apparatus. Apparently, other researchers did not apply PMP *for the time-optimal problem* to find geodesics of left-invariant metrics on Lie groups.

2. Preliminaries

The left and the right shifts $l_g : h \in G \to g \cdot h$, $r_g : h \in G \to h \cdot g$, $g, h \in G$, of a Lie group $(G, \cdot)$ by an element g are diffeomorphisms with the inverse shifts $l_{g^{-1}}$, $r_{g^{-1}}$, and their differentials $(dl_g)_h : T_hG \to T_{gh}G$ and $(dr_g)_h : T_hG \to T_{hg}G$ are linear isomorphisms of tangent vector spaces to G at corresponding points.

There exist an open neighborhoods U of zero in the Lie algebra $\mathfrak{g} = T_eG$ of the Lie group G and W of unit e in G such that $\exp : U \to W$ is a diffeomorphism. If $\dim G = n$ then after introduction of arbitrary Cartesian coordinates $(x_1, \dots, x_n)$ with zero origin 0 in $\mathfrak{g}$, it is naturally identified with $\mathbb{R}^n$. Then $\exp^{-1} : W \to U \subset \mathbb{R}^n$ is a local chart (a coordinate system) on G in the neighborhood W of the point $e \in G$. This coordinate system in W is called *a coordinate system of the first kind.*

The group $\mathrm{GL}(n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ of all nondegenerate real squared $(n \times n)$-matrices is a Lie group relative to the global map that associates to each matrix $g \in \mathrm{GL}(n)$ its elements g_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$. Obviously, for every $g \in G$ the mapping $I(g) : G \to G$ such that

$$I(g)(h) = g \cdot h \cdot g^{-1} = (l_g \circ r_{g^{-1}})(h) = (r_{g^{-1}} \circ l_g)(h)$$

is an automorphism of the Lie group $(G, \cdot)$, $I(g)(e) = e$, and the differential

$$(dI(g))_e := dl_g \circ dr_{g^{-1}} : T_eG \to T_eG$$

is a nondegenerate linear map (i.e. an element of the Lie group $\mathrm{GL}(n)$ relative to some vector basis in T_eG, if $\dim G = n$), denoted with $\mathrm{Ad}(g)$. The calculation rule for the differential of composition gives

$$\mathrm{Ad}(g_1 \cdot g_2) = (dI(g_1 \cdot g_2))_e = (d(I(g_1) \circ I(g_2)))_e =$$

$$(dI(g_1))_e \circ (dI(g_2))_e = \mathrm{Ad}(g_1) \circ \mathrm{Ad}(g_2),$$

i.e., $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(n)$ is a homomorphism of Lie groups, called the *adjoint representation of the Lie group G.*

3. Theoretical results

Definition 1. *Let $(\mathfrak{l},[\cdot,\cdot])$ be a Lie algebra; $\mathfrak{p},\mathfrak{q}\subset\mathfrak{l}$ are nonzero vector subspaces. By definition,*

$$[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]=\{[v,w]:v\in\mathfrak{p},w\in\mathfrak{q}\}.$$

If $\dim\mathfrak{p}\geq 2$ then by definition,

$$\mathfrak{p}^1=\mathfrak{p},\quad \mathfrak{p}^{k+1}=[\mathfrak{p},\mathfrak{p}^k],\quad \mathfrak{p}_m=\sum_{k=1}^{m}\mathfrak{p}^k.$$

The vector subspace $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{l}$ generates the Lie algebra $(\mathfrak{l},[\cdot,\cdot])$, if $\mathfrak{l}=\mathfrak{p}_m$ for some natural number m; the smallest number $m:=s$ with such property is called the generation degree (of the algebra $(\mathfrak{l},[\cdot,\cdot])$ by the subspace $\mathfrak{p}$).

It is clear that subsets from Definition 1 are vector subspaces of $\mathfrak{l}$.

Let $\{e_1,\dots,e_r\}$ be any basis of the vector subspace $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$, generating the Lie algebra $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ of a Lie group $(G,\cdot)$. One can prove the following special case of the Rashevsky-Chow theorem.

Theorem 1. *Let $(G,\cdot)$ be a connected Lie group and a vector subspace $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$ generates Lie algebra $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$. Then the control system*

$$\dot{g}=dl_g(u),\quad u\in\mathfrak{p}, \tag{1}$$

is controllable (attainable) by means of piecewise constant controls

$$u=u(t)\in\mathfrak{p},\quad 0\leq t\leq T, \tag{2}$$

where $u(t)=\pm e_j$, $j=1,\dots,r$, in the constancy segments of the control. In other words, for any elements $g_0,g_1\in G$ there exists a piecewise constant control (2) of this type such that $g(T)=g_1$ for solution of the Cauchy problem

$$\dot{g}(t)=dl_{g(t)}(u(t)),\quad g(0)=g_0.$$

Every left-invariant (sub-)Finsler metric $d=d_F$ on a connected Lie group G with Lie algebra $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ is defined by a subspace $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$, generating $\mathfrak{g}$, and some norm F on $\mathfrak{p}$. A distance $d(g,h)$ for $g,h\in G$ is defined as the infimum of lengths $\int_0^T|\dot{g}(t)|dt$ of piecewise smooth paths $g=g(t)$, $0\leq t\leq T$, such that $dl_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t))\in\mathfrak{p}$ and $g(0)=g$, $g(T)=h$; T is not fixed, $|\dot{g}(t)|=F(dl_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t)))$. The existence of such paths and, consequently, the finiteness of d are guaranteed by Theorem 1. Obviously, all three metric properties for d are fulfilled. If $\mathfrak{p}=\mathfrak{g}$ then d is a left-invariant Finsler metric on G; if $F(v)=\sqrt{\langle v,v\rangle}$, $v\in\mathfrak{p}$, where $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is some scalar product on $\mathfrak{g}$, then d is a left-invariant sub-Riemannian metric on G, and d is a left-invariant Riemannian metric, if additionally $\mathfrak{p}=\mathfrak{g}$.

The following statements were proved in [4]. The space (G,d) is a locally compact and complete. Then in consequence of S.E. Cohn–Vossen theorem [12] the space (G,d) is a *geodesic* space, i.e. for any elements $g,h\in G$ there exists a shortest arc $c=c(t)$, $0\leq t\leq T$, in (G,d), which joins them. This means that c is a continuous curve in G, whose length in the metric space (G,d) is equal to $d(g,h)$. Therefore we can assume that c is parameterized by arc length, i.e. $T=d(g,h)$ and $d(c(t_1),c(t_2))=t_2-t_1$ if $0\leq t_1\leq t_2\leq d(g,h)$. Then $c=c(t)$, $0\leq t\leq d(g,h)$, is a Lipschitz curve relative to the smooth structure of the Lie group G. Therefore this curve is absolutely continuous. Then in consequence of well–known theorem from mathematical analysis, there exists a measurable, almost everywhere defined derivative function $\dot{c}(t)$, $0\leq t\leq d(g,h)$, and $c(t)=c(0)+\int_0^t\dot{c}(\tau)d\tau$, $0\leq t\leq T$.

Theorem 2. *[3] Every shortest arc $g = g(t)$, $0 \leq t \leq T = d(g_0, g_1)$, in (G, d) with $g(0) = g_0$, $g(T) = g_1$, is a solution of the time-optimal problem for the control system (1) with compact control region*

$$U = \{u \in \mathfrak{p} : F(u) \leq 1\}$$

and indicated endpoints.

In consequence of Theorem 2, one can apply the Pontryagin maximum principle [13] for the time-optimal problem from Theorem 2 and a covector function $\psi = \psi(t) \in T^*_{g(t)}$ to find shortest arcs on the Lie group G with left-invariant sub-Finsler metric d. The function ψ can be considered as a left-invariant 1-form on $(G, \cdot)$ and therefore it is natural to identify it with a covector function $\psi(t) \in \mathfrak{g}^* = T^*_e G$. Then every optimal trajectory $g(t)$, $0 \leq t \leq T$, is determined by some mesurable optimal control $\overline{u} = \overline{u}(t) \in U$, $0 \leq t \leq T$. Moreover, for some non-vanishing absolutely continuous function $\psi = \psi(t)$, $0 \leq t \leq T$, we have

$$H = H(g, \psi, u) = \psi(dl_g(u)) = \psi(u), \tag{3}$$

$$\dot{g} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial g}, \tag{4}$$

$$H(\tau) := H(g(\tau), \psi(\tau), \overline{u}(\tau)) = \psi(\tau)(\overline{u}(\tau)) = \max_{u \in U} \psi(\tau)(u) \tag{5}$$

for almost all $\tau \in [0, T]$.

Definition 2. *Later on, an extremal for the problem from Theorem* 2 is called a parameterized curve $g = g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, satisfying PMP for the time-optimal problem.

Remark 1. *For every extremal, $H(t) = \mathrm{const} := M_0 \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, [1], [13].*

Definition 3. *An extremal is called normal (abnormal), if $M_0 > 0$ ($M_0 = 0$). Every normal extremal is parameterized by arc length; proportionally changing $\psi = \psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, if it is necessary, one can assume that $M_0 = 1$. Every normal extremal for a left-invariant (sub-)Riemannian metric on a Lie group is a geodesic, i.e. a locally shortest curve [23].*

Theorem 3. *[8] The Hamiltonian system for the function H on the Lie group $G = \mathrm{GL}(n)$ with the Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ has a form*

$$g' = g \cdot u, \quad g \in G, \quad u \in \mathfrak{g}, \tag{6}$$

$$\psi(v)' = \psi([u, v]), \quad g \in G, \quad u, v \in \mathfrak{g}. \tag{7}$$

Proof. Each element $g \in G = \mathrm{GL}(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ is defined by its standard matrix coordinates g_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, and ψ is defined by its components $\psi_{ij} = \psi(e_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, where $e_{ij} \in \mathfrak{g}$ is a matrix having 1 in the ith row and the jth column and 0 in all other places.

In consequence of (3),

$$H(g, \psi, u) = \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij} \left(\sum_{l=1}^{n} g_{il} u_{lj} \right) = \sum_{l,j=1}^{n} (g^T \psi)_{lj} u_{lj}. \tag{8}$$

The variables g_{ij}, ψ_{ij} must satisfy the Hamiltonian system of equations

$$g'_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \psi_{ij}}(g, \psi, u) = \sum_{l=1}^{n} g_{il} u_{lj} = (gu)_{ij}, \tag{9}$$

$$\psi'_{ij} = -\frac{\partial H}{\partial g_{ij}} = -\sum_{m=1}^{n} \psi_{im} u_{jm} = -(\psi u^T)_{ij}. \tag{10}$$

The formula (9) is a special case of the formula (6). It is clear that

$$\psi(v) = \psi(gv) = \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij} \left(\sum_{l=1}^{n} g_{il} v_{lj} \right).$$

On the ground of formulae (9) and (10) we get from here that

$$(\psi(v))' = \sum_{i,j=1}^{n} \psi'_{ij} \left(\sum_{l=1}^{n} g_{il} v_{lj} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij} \left(\sum_{l=1}^{n} g'_{il} v_{lj} \right) =$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} \psi_{im} u_{jm} \sum_{l=1}^{n} g_{il} v_{lj} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij} \left(\sum_{l,m=1}^{n} g_{im} u_{ml} v_{lj} \right) =$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij} \left(\sum_{l=1}^{n} g_{il} (vu)_{lj} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij} \left(\sum_{l=1}^{n} g_{il} (uv)_{lj} \right) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij} (g[u,v])_{ij} = \psi([u,v]),$$

which proves the formula (7). □

Theorem 4. *[8] The Hamiltonian system for the function H on a Lie group G with Lie algebra $\mathfrak{g}$ has a form*

$$\dot{g} = dl_g(u), \quad g \in G, \quad u \in \mathfrak{g}, \tag{11}$$

$$\psi(v)' = \psi([u,v]), \quad g \in G, \quad u, v \in \mathfrak{g}. \tag{12}$$

Proof. In consequence of Theorem 3, Theorem 4 holds for every matrix Lie group and for every Lie group $(G, \cdot)$, because it is known that $(G, \cdot)$ is locally isomorphic to some connected Lie subgroup (may be, virtual) of the Lie group $\mathrm{GL}(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$. □

It follows from Theorem 4, especially from (12), and Remark 1 that

Theorem 5. *If* $\dim G = 3$, $\dim \mathfrak{p} \geq 2$ *in Theorem* 2 then every extremal of the problem from Theorem 2 is normal.

The following lemma holds.

Lemma 1. *[16] Let $g = g(t)$, $t \in (a,b)$, be a smooth path in the Lie group G. Then*

$$(g(t)^{-1})' = -g(t)^{-1} g'(t) g(t)^{-1}. \tag{13}$$

Proof. Differentiating the identity $g(t)g(t)^{-1} = e$ by t, we get

$$0 = (g(t)g(t)^{-1})' = g'(t)g(t)^{-1} + g(t)(g(t)^{-1})',$$

whence the equality (13) follows immediately. □

Theorem 6. *[16] Let* $\psi \in \mathfrak{g}^* = T_e^*G$ *be a covector,*

$$\operatorname{Ad}^*\psi(g) := (\operatorname{Ad} g)^*(\psi) = \psi \circ Ad(g), \quad g \in G,$$

an action of the coadjoint representation of the Lie group G *on* ψ*. Then*

$$(d(\operatorname{Ad}^*\psi)(w))(v) = ((\operatorname{Ad} g_0)^*(\psi))([u,v]),$$

if

$$u, v \in \mathfrak{g}, \quad w = dl_{g_0}(u) \in T_{g_0}G, \quad g_0 \in G.$$

Proof. In the case of a matrix Lie group G,

$$\operatorname{Ad}(g)(v) = gvg^{-1}, \quad dl_g(u) = gu, \quad u, v \in \mathfrak{g}, \quad g \in G.$$

We choose a smooth path $g = g(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, in the Lie group G such that $g(0) = g_0$, $g'(0) = w$. Then by Lemma 1,

$$(d(\operatorname{Ad}^*\psi)(w))(v) = (\psi(g(t)vg(t)^{-1}))'(0) = \psi((g(t)vg(t)^{-1})'(0)) =$$

$$\psi(g'(0)vg_0^{-1} + g_0v(g(t)^{-1})'(0)) = \psi(g_0uvg_0^{-1} - g_0v(g_0^{-1}g'(0)g_0^{-1})) =$$

$$\psi(g_0uvg_0^{-1} - g_0v(g_0^{-1}g_0ug_0^{-1})) = \psi(g_0uvg_0^{-1} - g_0vug_0^{-1}) =$$

$$\psi(g_0[u,v]g_0^{-1}) = ((\operatorname{Ad} g_0)^*(\psi))([u,v]),$$

as required. □

It follows from Theorems 4 and 6 that

Theorem 7. *1. Any normal extremal* $g = g(t) : \mathbb{R} \to G$ *(parameterized by arc length and with origin* $e \in G$*), of left-invariant (sub-)Finsler metric* d *on a Lie group* G*, defined by a norm* F *on the subspace* $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ *with closed unit ball* U*, is a Lipschitz integral curve of the following vector field*

$$v(g) = dl_g(u(g)), \quad u(g) = \psi_0(\operatorname{Ad}(g)(w(g)))w(g), \quad w(g) \in U,$$

$$\psi_0(\operatorname{Ad}(g)(w(g))) = \max_{w \in U} \psi_0(\operatorname{Ad}(g)(w)),$$

where $\psi_0 \in \mathfrak{g}^*$ *is some fixed covector with* $\max_{v \in U} \psi_0(v) = 1$*.*

2. (Conservation law) In addition, $\psi(t)(g(t)^{-1}g'(t)) \equiv 1$ *for all* $t \in \mathbb{R}$*, where* $\psi(t) := (\operatorname{Ad} g(t))^*(\psi_0)$*.*

Remark 2. *Every extremal with origin* g_0 *is obtained by the left shift* l_{g_0} *from some extremal with origin* e*.*

Remark 3. *In (sub-)Riemannian case, the vector* $u(g)$ *is characterized by condition* $\langle u(g), v \rangle = \psi_0(Ad(g)(v))$ *for all* $v \in \mathfrak{p}$*. In Riemannian case, every extremal is a normal geodesic, and we can assume that* ψ_0 *is an unit vector in* $(\mathfrak{p} = \mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$*, setting* $\psi_0(v) = \langle \psi_0, v \rangle$*,* $v \in \mathfrak{g}$*. Moreover,* $\dot{g}(0) = \psi_0$*.*

Theorem 8. *If* $v(g_0) \neq 0$*,* $g_0 \in G$*, then an integral curve of the vector field* $v(g), g \in G$*, with origin* g_0 *is a normal extremal parameterized proportionally to arc length with the proportionality factor* $|dl_{g_0^{-1}}(v(g_0))|$*.*

Proof. Let $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, be an integral curve under consideration and set $\gamma = \gamma(t) = g_0^{-1}g(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Then γ is an integral curve of vector field $dl_{g_0^{-1}}(v(g))$, $g \in G$, with origin e. Hence

$$\dot{\gamma}(t) = dl_{g_0^{-1}}(\dot{g}(t)) = dl_{g_0^{-1}}(dl_{g(t)}(u(g(t)))) = dl_{\gamma(t)}(u(g(t))). \tag{14}$$

In addition,

$$\mathrm{Ad}(g(t))^* = \mathrm{Ad}(g_0 \cdot \gamma(t))^* = \mathrm{Ad}(\gamma(t))^* \circ \mathrm{Ad}(g_0)^*. \tag{15}$$

By definition,

$$u(g(t)) = \mathrm{Ad}(g(t))^*(\psi_0)(w(g(t)))w(g(t)),$$
$$\mathrm{Ad}(g(t))^*(\psi_0)(w(g(t))) = \max_{w\in U} \mathrm{Ad}(g(t))^*(\psi_0)(w),$$

that by (15) can be rewriten as

$$u(g(t)) = \mathrm{Ad}(\gamma(t))^*(\psi_0')(w(g(t))),$$
$$\mathrm{Ad}(\gamma(t))^*(\psi_0')(w(g(t))) = \max_{w\in U} \mathrm{Ad}(\gamma(t))^*(\psi_0')(w),$$

where $\psi_0' = \mathrm{Ad}(g_0)^*(\psi_0)$. As a result of this and (14), we see that $u(g(t))$ plays a role of $u(\gamma(t))$ for constant covector ψ_0' (instead of ψ_0). Due to point 2 of Theorem 7 the curve $\gamma(t)$ is a normal extremal parameterized proportionally to arc length with the proportionality factor $|dl_{g_0^{-1}}(v(g_0))|$. Then its left shift $g(t) = g_0 \cdot \gamma(t)$ also has this property. $\square$

Remark 4. *Theorem* 8 holds for left-invariant Riemannian metrics on (connected) Lie groups. In this case, $v(g_0) \neq 0$ for all $g_0 \in G$.

Let us choose a basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ in $\mathfrak{g}$, assuming that $\{e_1, \dots, e_r\}$ is an orthonormal basis for the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on $\mathfrak{p}$ in case of left-invariant (sub-)Riemannian metric. Define a scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on $\mathfrak{g}$, considering $\{e_1, \dots, e_n\}$ as its orthonormal basis. Then each covector $\psi \in \mathfrak{g}^*$ can be considered as a vector in $\mathfrak{g}$, setting $\psi(v) = \langle \psi, v \rangle$ for every $v \in \mathfrak{g}$. If $\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i e_i$, $v = \sum_{k=1}^n v_k e_k$, then $\psi(v) = \psi \cdot v$, where ψ and v are corresponding vector-row and vector-column, $\cdot$ is the matrix multiplication. If $l : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ is a linear map, then we denote by (l) its matrix in the basis $\{e_1, \dots, e_n\}$.

If $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, is a normal geodesic of a left-invariant (sub-)Riemannian metric d on a Lie group G, then $u(g(t))$ is the orthogonal projection onto $\mathfrak{p}$ of the vector $(\mathrm{Ad}\, g(t))^*(\psi_0)$ in the notation of Theorem 7 for the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ introduced above on $\mathfrak{g}$. This fact and formula (12) imply

Theorem 9. *Every normal parameterized by arc length geodesic of left-invariant (sub-) Riemannian metric on a Lie group G issued from the unit is a solution of the following system of differential equations*

$$\dot{g}(t) = dl_{g(t)}(u(t)),\ u(t) = \sum_{i=1}^r \psi_i(t)e_i,\ |u(0)| = 1,\ \dot{\psi}_j(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^r c_{ij}^k \psi_i(t)\psi_k(t), \tag{16}$$

where $j = 1, \dots, n$, c_{ij}^k are structure constants of Lie algebra $\mathfrak{g}$ in its basis $\{e_1, ..., e_n\}$. In Riemannian case, $r = n$.

Corollary 1.

$$|\dot{g}(t)| = |u(t)| \equiv 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Proof. The first equality in (17) is a consequence of the first equality in (16) and left invariance of the scalar product. Therefore, due to the equality $|u(0)| = 1$, it suffices to prove that $\frac{d}{dt}\langle u(t), u(t)\rangle = 0$. Now by (16),

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), u(t)\rangle = \left(\sum_{j=1}^r \psi_j^2(t)\right)' = 2\sum_{j=1}^r \psi_j(t)\psi_j'(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^r c_{ij}^k \psi_i(t)\psi_j(t)\psi_k(t),$$

which is zero by the skew symmetry of c_{ij}^k with respect to subscripts. $\square$

Remark 5. *In fact, the same equations for $\dot{\psi}_j(t)$ from (16) in a different interpretation were obtained in [21] as "normal equations". Their derivation there uses more complicated concepts and techniques.*

4. Lie groups all of whose left-invariant Riemannian metrics have constant negative curvature

The only Lie groups which do not admit left-invariant sub-Finsler metrics are commutative Lie groups and Lie groups G_n, $n \geq 2$, consisting of parallel translations and homotheties (without rotations) of Euclidean space E^{n-1} [5], [17]. Up to isomorphisms, Lie groups G_n can be described as connected Lie groups every whose left-invariant Riemannian metric has constant negative sectional curvature [24].

The group G_n, $n \geq 2$, is isomorphic to the group of real block matrices

$$g = (y, x) := \begin{pmatrix} xE_{n-1} & y^T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

where E_{n-1} is unit matrix of order $n-1$, y^T is a transposed $(n-1)-$vector–row y, 0 is a zero $(n-1)-$vector–row, $x > 0$.

It is clear that in vector notation the group operations have a form

$$(y_1, x_1) \cdot (y_2, x_2) = x_1(y_2, x_2) + (y_1, 0), \quad (y, x)^{-1} = x^{-1}(-y, 1). \tag{19}$$

Let E_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, be a $(n \times n)$-matrix having 1 in the ith row and the jth column and 0 in all other places. Matrices

$$e_i = E_{in},\ i = 1, \dots, n-1, \quad e_n = \sum_{k=1}^{n-1} E_{kk} \tag{20}$$

constitute a basis of Lie algebra $\mathfrak{g}_n$ of the Lie group G_n. In addition,

$$[e_i, e_j] = 0,\ i, j = 1, \dots, n-1; \quad [e_n, e_i] = e_i,\ i = 1, \dots, n-1,$$

so all nonzero structure constants in the basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ are equal to

$$c_{ni}^i = -c_{in}^i = 1, \quad i = 1, \dots, n-1. \tag{21}$$

Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be a scalar product on $\mathfrak{g}_n$ with the orthonormal basis $e_1, \dots, e_n$. Then we get left-invariant Riemannian metric d on the Lie group G_n of constant sectional curvature -1 [24].

On the ground of Theorem 9 and (21), $\psi_i = \psi_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, are solutions of the Cauchy problem

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i(t) = \psi_i(t)\psi_n(t),\ i = 1, \dots, n-1, \quad \dot{\psi}_n(t) = -\sum\limits_{i=1}^{n-1} \psi_i^2(t); \\ \psi_i(0) = \varphi_i,\ i = 1, \dots, n, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i^2 = 1. \end{cases} \tag{22}$$

It follows from (22) that

$$\ddot{\psi}_n(t) = -2\psi_n(t) \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^2(t) = 2\psi_n(t)\dot{\psi}_n(t) = \left(\psi_n^2\right)^{\cdot}(t),$$

whence on the ground of initial data of the Cauchy problem (22), it follows that

$$\dot{\psi}_n(t) = \psi_n^2(t) - 1, \quad \psi_n(0) = \varphi_n.$$

Solving this Cauchy problem, we find that

$$\psi_n(t) = \frac{\varphi_n \cosh t - \sinh t}{\cosh t - \varphi_n \sinh t}.$$

Then on the base of (22), for $i = 1, \ldots, n-1$,

$$\ln|\psi_i(t)| = \int_0^t \frac{\varphi_n \cosh\tau - \sinh\tau}{\cosh\tau - \varphi_n \sinh\tau} d\tau + \ln|\varphi_i| = -\ln|\cosh t - \varphi_n \sinh t| + \ln|\varphi_i|,$$

if $\varphi_i \neq 0$, so

$$\psi_i(t) = \frac{\varphi_i}{\cosh t - \varphi_n \sinh t}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

and these formulae are true also when $\varphi_i = 0$.

Consequently, on the ground of (16),

$$u(t) = \frac{1}{\cosh t - \varphi_n \sinh t}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i e_i + (\varphi_n \cosh t - \sinh t)\, e_n\right). \tag{23}$$

If $g \in G_n$ is defined by formula (18), $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \in \mathfrak{g}_n$, then

$$gu = \begin{pmatrix} (xu_n)E_{n-1} & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = (xu_1, \ldots, xu_{n-1})^T. \tag{24}$$

Therefore on the base of Theorem 9 and (23) in the notation (18), the corresponding parameterized by arc length normal geodesic $g = g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, of the space (G_n, d) with $g(0) = e$ is a solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\varphi_n \cosh t - \sinh t}{\cosh t - \varphi_n \sinh t} x(t),\ \dot{y}_i(t) = \frac{\varphi_i}{\cosh t - \varphi_n \sinh t} x(t), \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ x(0) = 1, \quad y_i(0) = 0,\ i = 1, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{25}$$

Solving the problem, we find

$$x(t) = \frac{1}{\cosh t - \varphi_n \sinh t}, \quad y_i(t) = \int_0^t \frac{\varphi_i dt}{(\cosh t - \varphi_n \sinh t)^2} = \frac{\varphi_i \sinh t}{\cosh t - \varphi_n \sinh t}. \tag{26}$$

This implies that

$$x(t) = e^{\pm t}, \quad y_i(t) \equiv 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \text{if} \quad \varphi_n = \pm 1. \tag{27}$$

Let $\varphi_n^2 < 1$. Let us show that for any $t \in \mathbb{R}$, the equality

$$\sum_{i=1}^{n-1} (y_i(t) - a_i)^2 + x^2(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + 1 \tag{28}$$

holds, where a_i, $i=1,\dots,n-1$, are real numbers such that

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i\varphi_i = \varphi_n. \tag{29}$$

We introduce a function $f(t)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}(y_i(t)-a_i)^2+x^2(t)$. Due to initial data (25), $f(0)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i^2+1$. On the ground of (25), (26) and last equation in (22), we get

$$\frac{1}{2}f'(t)=\sum_{i=1}^{n-1}(y_i(t)-a_i)\dot{y}_i(t)+x(t)\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\varphi_i\sinh t}{\cosh t-\varphi_n\sinh t}-a_i\right)\varphi_i+$$

$$\frac{\varphi_n\cosh t-\sinh t}{\cosh t-\varphi_n\sinh t}=\frac{\sinh t\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\varphi_i^2-1\right)+\varphi_n\cosh t}{\cosh t-\varphi_n\sinh t}-\sum_{i=1}^{n-1}a_i\varphi_i=$$

$$\varphi_n-\sum_{i=1}^{n-1}a_i\varphi_i=0.$$

Consequently, $f(t)\equiv f(0)$ and the equality (28) is proved.

It is easy to check that the equality (29) holds for

$$a_i=\varphi_i\varphi_n/(1-\varphi_n^2),\quad i=1,\dots,n-1;\quad \text{moreover}\quad \sum_{i=1}^{n-1}a_i^2+1=\frac{1}{1-\varphi_n^2}. \tag{30}$$

These numbers a_i are obtained as halves of sums of limits $y_i(t)$ when $t\to+\infty$ and $t\to-\infty$, which are equal to $\varphi_i/(1-\varphi_n)$ and $-\varphi_i/(1+\varphi_n)$ respectively.

Formulae (19) show that the group G_n is a simply transitive isometry group of the famous Poincare's model of the Lobachevsky space L^n in the half space $\mathbb{R}^n_+$ with metric $ds^2 = (\sum_{k=1}^{n-1}dy_k^2+dx^2)/x^2$.

The above results, including formulae (26), (27), (30), show that geodesics of the space L^n in this model, passing through the point $(0,\dots,0,1)$, are semi-straights or semi-circles (with centers $(a_1,\dots,a_{n-1},0)$ and radii $1/\sqrt{1-\varphi_n^2}$, (30)), orthogonal to the hyperplane $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$. Since all other geodesics are obtained by left shifts on the group, in other words, by indicated parallel translations and homotheties of this model, then also all straights and semi-circles, orthogonal to the hyperplane $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$, are geodesics of the space L^n.

We got a well-known description of geodesics in this Poincare's model.

Now let us look what the vector field method gives us for the problem.

Every vector $\psi\in\mathfrak{g}_n$ can be considered as a covector $\mathfrak{g}^*$, setting $\psi(v)=\langle\psi,v\rangle$ for $v\in\mathfrak{g}_n$. Then any (co)vector ψ_0 from Theorem 7 has a form

$$\psi_0=\sum_{i=1}^{n}\varphi_ie_i,\quad \sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2=1.$$

Let $w=\sum\limits_{i=1}^{n}w_ie_i\in\mathfrak{g}_n$, $g\in G_n$ is defined by formula (18). It is easy to see that

$$\mathrm{Ad}(g)(w)=gwg^{-1}=\sum_{i=1}^{n-1}(w_ix-w_ny_i)e_i+w_ne_n,$$

$$\langle\psi_0, \mathrm{Ad}(g)(w)\rangle = \sum_{i=1}^{n-1}(w_i x - w_n y_i)\varphi_i + w_n\varphi_n = x\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i w_i + \left(\varphi_n - \sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i y_i\right) w_n.$$

It is clear that

$$u(g) = x\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i e_i + \left(\varphi_n - \sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i y_i\right) e_n,$$

$$v(g) = gu(g) = x\sum_{i=1}^{n} u_i e_i = x^2\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i e_i + x\left(\varphi_n - \sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i y_i\right) e_n.$$

Thus geodesic $g = g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, with $g(0) = e$ is a solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left(\varphi_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1}\varphi_i y_i(t)\right) x(t), \quad \dot{y}_i(t) = \varphi_i x^2(t),\ i = 1,\dots,n-1, \\ x(0) = 1, \quad y_i(0) = 0,\ i = 1,\dots,n-1. \end{cases} \tag{31}$$

Dividing the first equation in (31) by $x(t)$, we get on the left hand side the derivative of the function $\ln x(t) := z(t)$. Differentiating both sides of the resulting equation and using the second equation in (31) and the equality $\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i^2 = 1$, we get

$$\ddot{z}(t) = -\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i^2 x^2(t) = -(1-\varphi_n^2)e^{2z(t)}, \quad z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = \varphi_n.$$

If $\varphi_n = \pm 1$ then $\ddot{z}(t) \equiv 0$ and due to the initial data and the second equation in (31), we get $z(t) = \pm t$, $x(t) = e^{\pm t}$, $y_i(t) \equiv 0$, $i = 1,\dots,n-1$.

Let $0 \le \varphi_n^2 < 1$. Let us multiply both sides of the resulting equation by $2\dot{z}$. Then

$$2\dot{z}\ddot{z} = -(1-\varphi_n^2)e^{2z}2\dot{z}, \quad d(\dot{z})^2 = -(1-\varphi_n^2)e^{2z}d(2z), \quad \dot{z}^2 = -(1-\varphi_n^2)e^{2z} + C.$$

Taking into account the initial conditions for $z(t)$, we get $C = 1$ and $\dot{z}(t)^2 = 1-(1-\varphi_n^2)e^{2z(t)}$. The expression on the right is positive for t sufficiently close to zero. Therefore, with these t, we get

$$\dot{z}(t) = \pm\sqrt{1-(1-\varphi_n^2)e^{2z(t)}},$$

where the sign coincides with the sign of φ_n, if $\varphi_n \neq 0$. Separating variables, we get

$$dt = \frac{\pm dz}{\sqrt{1-(1-\varphi_n^2)e^{2z}}} = \frac{\pm dz}{e^z\sqrt{1-\varphi_n^2}\sqrt{(e^{-2z}/(1-\varphi_n^2)) - 1}} =$$

$$\frac{\mp d(e^{-z}/\sqrt{1-\varphi_n^2})}{\sqrt{(e^{-2z}/(1-\varphi_n^2)) - 1}} = \mp d\left(\cosh^{-1}\left(\frac{e^{-z}}{\sqrt{1-\varphi_n^2}}\right)\right),$$

$$\pm\cosh^{-1}\left(\frac{e^{-z}}{\sqrt{1-\varphi_n^2}}\right) = c - t, \quad c = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varphi_n^2}}\right).$$

The applying cosh to the left and right sides of the resulting equality gives

$$\frac{e^{-z(t)}}{\sqrt{1-\varphi_n^2}} = \cosh c\cosh t - \sinh c\sinh t = \frac{\cosh t - \varphi_n\sinh t}{\sqrt{1-\varphi_n^2}}.$$

Consequently, when t is sufficiently close to zero,

$$x(t) = e^{z(t)} = \frac{1}{\cosh t - \varphi_n\sinh t}.$$

Since the right sides of the system of differential equations (31) are real analytic, this equality is true for all $t \in \mathbb{R}$. We obtain from this and the second system in (31) the same solutions $y_i(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n-1$, as in (26).

Using formulae (19) and (26) for $x = x(t)$, $y_i = y_i(t)$, we shall find a formula for distances d between group elements, or, which is the same, between points of the Lobachevsky space in Poincare's model under consideration. We obtain from (26)

$$\frac{1}{x} = \cosh t - \varphi_n \sinh t, \quad x = \frac{\cosh t + \varphi_n \sinh t}{\cosh^2 t - \varphi_n^2 \sinh^2 t} = \frac{\cosh t + \varphi_n \sinh t}{1 + (1 - \varphi_n^2)\sinh^2 t},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (y_i/x)^2 = \sinh^2 t \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i^2 = (1 - \varphi_n^2)\sinh^2 t,$$

$$\cosh t + \varphi_n \sinh t = \frac{x}{x^2}\left(x^2 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\right) = \frac{1}{x}\left(x^2 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\right),$$

$$\cosh t = \frac{1}{2x}\left(1 + x^2 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\right),$$

$$d((0,1),(y,x)) = \cosh^{-1}\left[\frac{1}{2x}\left(1 + x^2 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\right)\right].$$

Now by (19), the last formula, and left-invariance of metric d,

$$(y_1, x_1)^{-1}(y_2, x_2) = x_1^{-1}(-y_1, 1)(y_2, x_2) = (x_1^{-1}(y_2 - y_1), x_1^{-1}x_2),$$

$$d((y_1, x_1), (y_2, x_2)) = d((0,1), (x_1^{-1}(y_2 - y_1), x_1^{-1}x_2)) =$$

$$\cosh^{-1}\left[\frac{x_1}{2x_2}\left(1 + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{1}{x_1^2}\sum_{i=1}^{n-1}(y_{2,i} - y_{1,i})^2\right)\right] =$$

$$\cosh^{-1}\left[\frac{1}{2x_1x_2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(y_{2,i} - y_{1,i})^2\right)\right] = d((y_1, x_1), (y_2, x_2)). \qquad (32)$$

5. The three–dimensional Heisenberg group

This Heisenberg group is a nilpotent Lie group of upper–triangular matrices

$$H = \left\{ h = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \; x, y, z \in \mathbb{R}. \qquad (33)$$

It is easy to compute that

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xy - z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (34)$$

Clearly, H is naturally diffeomorphic to $\mathbb{R}^3$ and H is a connected Lie group with respect to this differential structure. Matrices

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (35)$$

constitute a basis of Lie algebra $\mathfrak{h}$ of Heisenberg group H. In addition,

$$[e_1, e_2] = e_1 e_2 - e_2 e_1 = e_3.$$

Hence the vector subspace $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{h}$ with basis $\{e_1, e_2\}$ generates $\mathfrak{h}$.

Thus the triple $(H, \mathfrak{h}, \mathfrak{p})$ satisfies all conditions of Theorems 1 and 2.

Let us search for all geodesics of the problem from Theorem 2. They are all normal by Theorem 5, and we can use Theorem 7.

Let us define a scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on $\mathfrak{h}$ with orthonormal basis $\{e_1, e_2, e_3\}$. Then each vector $\psi \in \mathfrak{h}$ can be considered as a covector from $\mathfrak{h}^*$, if we set $\psi(v) = \langle \psi, v \rangle$ for $v \in \mathfrak{h}$. Then any (co)vector ψ_0 from Theorem 7 has a form

$$\psi_0 = \cos\xi e_1 + \sin\xi e_2 + \beta e_3, \quad \xi, \beta \in \mathbb{R}. \tag{36}$$

Let

$$v = \sum_{k=1}^{2} v_k e_k = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathfrak{p},\ v_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2.$$

Using formulae (33), (34), we get

$$Ad(h)(v) = hvh^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & -yv_1 + xv_2 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\langle \psi_0, \mathrm{Ad}(h)(v) \rangle = \cos\xi v_1 + \sin\xi v_2 + \beta(-yv_1 + xv_2) =$$

$$(\cos\xi - \beta y)v_1 + (\sin\xi + \beta x)v_2.$$

It is clear that

$$u(h) = (\cos\xi - \beta y)e_1 + (\sin\xi + \beta x)e_2$$

and so a geodesic is an integral curve of the vector field

$$v(h) = hu(h) = (\cos\xi - \beta y)e_1 + (\sin\xi + \beta x)e_2 + x(\sin\xi + \beta x)e_3.$$

Therefore $h(t)$ is a solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos\xi - \beta y, \\ \dot{y} = \sin\xi + \beta x, \\ \dot{z} = x(\sin\xi + \beta x)(= x\dot{y}) \end{cases} \tag{37}$$

with initial data $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.

Let us turn to *the coordinate system* $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ *of the first kind* on the Lie group $H:$

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & z + (xy)/2 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hence $\tilde{x} = x,\ \tilde{y} = y,\ \tilde{z} = z - (xy)/2$.

It is easy to see that for $\beta = 0$ we get

$$x(t) = t\cos\xi,\ y(t) = t\sin\xi,\ z(t) = \frac{t^2}{2}\cos\xi\sin\xi,\ \tilde{z}(t) \equiv 0,\ t \in \mathbb{R},$$

and geodesic is a 1–parameter subgroup

$$g(t) = \exp(t(\cos\xi e_1 + \sin\xi e_2)),\ t\in\mathbb{R}.$$

If $\beta\neq 0$, the calculations are more difficult:

$$\ddot{x} = -\beta\dot{y} = -\beta(\sin\xi + \beta x) = -\beta^2 x - \beta\sin\xi,$$

$$x(t) = C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t - \frac{\sin\xi}{\beta}.$$

Since $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=\cos\xi$, then $C_1 = (\sin\xi)/\beta$, $C_2 = (\cos\xi)/\beta$,

$$x(t) = \frac{1}{\beta}(\sin\xi\cos\beta t + \cos\xi\sin\beta t - \sin\xi) = \frac{1}{\beta}(\sin(\xi+\beta t) - \sin\xi); \tag{38}$$

$$\ddot{y} = \beta\dot{x} = \beta(\cos\xi - \beta y) = -\beta^2 y + \beta\cos\xi,$$

$$y(t) = C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t + \frac{\cos\xi}{\beta}.$$

Since $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=\sin\xi$, then $C_1 = -(\cos\xi)/\beta$, $C_2 = (\sin\xi)/\beta$,

$$y(t) = \frac{1}{\beta}(-\cos\xi\cos\beta t + \sin\xi\sin\beta t + \cos\xi) = \frac{1}{\beta}(-\cos(\xi+\beta t) + \cos\xi), \tag{39}$$

$$\tilde{z}' = \dot{z} - \frac{(xy)'}{2} = x\dot{y} - \frac{1}{2}(\dot{x}y + x\dot{y}) = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) =$$

$$\frac{1}{2\beta}[(\sin(\xi+\beta t) - \sin\xi)\sin(\xi+\beta t) - \cos(\xi+\beta t)(-\cos(\xi+\beta t) + \cos\xi)] =$$

$$\frac{1}{2\beta}[1 - (\sin\xi\sin(\xi+\beta t) + \cos(\xi+\beta t)\cos\xi)] = \frac{1}{2\beta}(1-\cos\beta t) = \tilde{z}'.$$

Since $\tilde{z}(0)=0$ then

$$\tilde{z}(t) = \frac{1}{2\beta}\left(t - \frac{\sin\beta t}{\beta}\right),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{40}$$

It follows from equalities (38), (39), (40) that the projection of geodesic $g=g(t)$ onto the plane x,y is *a circle with radius* $1/|\beta|$ *and center* $(1/\beta)(-\sin\xi,\cos\xi)$, $T=2\pi/|\beta|$ *is a circulation period*, while $\tilde{z}(t)$, $t\in\mathbb{R}$, does not depend on the parameter ξ. Therefore, if we fix $\beta\neq 0$ then for different ξ all geodesic segments $g(\beta,\xi,t), 0\leq t\leq 2\pi/|\beta|$, start at e and finish at the same point. It follows from the existence of the shortest arcs, Theorem 2, PMP and our calculations that if $\beta=0$ (respectively, $\beta\neq 0$) then every segment (respectively, of the length less or equal to $T=2\pi/|\beta|$) of these geodesics is a shortest arc. There is no other geodesic or shortest arc except indicated above and their left shifts.

6. Controls for left-invariant sub-Riemannian metrics on $SO(3)$

It is well known that every two–dimensional vector subspace $\mathfrak{p}$ of Lie algebra $(\mathfrak{so}(3),[\cdot,\cdot])$ of the Lie group $SO(3)$ generates $\mathfrak{so}(3)$. Moreover, there exists a basis $\{e_1,e_2\}$ of the space $\mathfrak{p}$ such that $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_3,e_1]=e_2$ for the vector $e_3=[e_1,e_2]$. Let $(\cdot,\cdot)$ be a scalar product on $\mathfrak{so}(3)$ with orthonormal basis $\{e_1,e_2,e_3\}$. Then if a scalar product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on $\mathfrak{p}$ defines a left-invariant sub-Riemannian metric d on the Lie group $G=SO(3)$, then there exists a basis $\{v,w\}$ in $\mathfrak{p}$ that is orthonormal relative to $\langle\cdot,\cdot\rangle$, orthogonal relative to $(\cdot,\cdot)$, and such that $(v,v)=a^2\leq b^2=(w,w)$, $[v,w]=(ab)e_3$, where $0<a\leq b$. Let v,w be new vectors e_1,e_2. Then

$$[e_1,e_2]=(ab)e_3,\ [e_3,e_1]=(b/a)e_2,\ [e_2,e_3]=(a/b)e_1,\ 0<a\leq b. \tag{41}$$

It follows from (41) that all nonzero structure constants are

$$c_{12}^3 = -c_{21}^3 = ab,\ c_{31}^2 = -c_{13}^2 = b/a,\ c_{23}^1 = -c_{32}^1 = a/b.$$

Let $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, be a geodesic of the space $(SO(3), d)$, parameterized by arc length, and $g(0) = e$. On the ground of Theorem 9,

$$g'(t) = g(t)u(t), \quad u(t) = \psi_1(t)e_1 + \psi_2(t)e_2,$$

where

$$\psi_1'(t) = -ab\psi_2(t)\psi_3(t), \quad \psi_2'(t) = ab\psi_1(t)\psi_3(t), \quad \psi_3'(t) = \frac{a^2 - b^2}{ab}\psi_1(t)\psi_2(t). \tag{42}$$

Since $|u(t)| \equiv 1$ then $\psi_1(t) = \cos\xi(t)$, $\psi_2(t) = \sin\xi(t)$ and (42) is written as

$$-\sin\xi(t)\dot{\xi}(t) = -ab\sin\xi(t)\psi_3(t), \quad \cos\xi(t)\dot{\xi}(t) = ab\cos\xi(t)\psi_3(t),$$

$$\psi_3'(t) = \frac{a^2 - b^2}{ab}\cos\xi(t)\sin\xi(t).$$

Then $\psi_3(t) = \frac{1}{ab}\xi'(t)$ and $\xi = \xi(t)$ is a solution of the differential equation

$$\xi''(t) = \frac{a^2 - b^2}{2}\sin 2\xi(t). \tag{43}$$

If $a = b$ then $\xi''(t) = 0$, $\xi'(t) = \mathrm{const} = \beta$. Then geodesics are obtained from geodesics in the case of $a = b = 1$ with the change the parameter s by the parameter $t = s/a$. Geodesics, shortest arcs, the distance d, the cut locus and conjugate sets for geodesics in the case of $a = b = 1$ are found in papers [9] and [10].

The case $0 < a < b$ is reduced to the case $a^2 - b^2 = -1$ by proportional change of the metric d. Then the variable $\omega(t) := 2\xi(t)$ allows us to rewrite the equation as the mathematical pendulum equation

$$\omega''(t) = -\sin\omega(t). \tag{44}$$

In [11], I.Yu. Beschastnyi and Yu.L. Sachkov studied geodesics of left-invariant sub-Riemannian metrics on the Lie group $SO(3)$ and gave estimates for the cut time and the metric diameter. Under replacement $b^2 - a^2$ by a^2 and ξ by ψ, the equation (43) coincides with the equation (2.4) from their paper, obtained by another method.

7. To search for geodesics of a sub-Riemannian metric on $SH(2)$

The Lie group $SH(2)$ consists of all matrices of a form

$$g = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \tag{45}$$

It is not difficult to see that

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Clearly, matrices

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

constitute a basis of Lie algebra $\mathfrak{sh}(2)$. In addition,

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_2. \tag{48}$$

Let us define a scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on $\mathfrak{sh}(2)$ with orthonormal basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ and the subspace $\mathfrak{p}$ with orthonormal basis $\{e_1, e_2\}$ generating Lie algebra $\mathfrak{sh}(2)$. Thus a left-invariant sub-Riemannian metric d is defined on the Lie group $SH(2)$.

Let us take a (co)vector $\psi_0 = \cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2 + \beta e_3 \in \mathfrak{sh}(2)$. We calculate

$$\psi_g(w) = \langle \psi_g, w \rangle = \langle \psi_0, gwg^{-1} \rangle \quad g \in SH(2),\ w = w_1 e_1 + w_2 e_2 \in \mathfrak{p}.$$

$$gwg^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi & x \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w_1 & w_2 \\ w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi & -x\cosh\varphi + y\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi & x\sinh\varphi - y\cosh\varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= w_1 e_1 + (-w_1 y + w_2 \cosh\varphi) e_2 + (-w_1 x + w_2 \sinh\varphi) e_3,$$

$$\psi_g(v) = w_1 \cos\alpha + (-w_1 y + w_2 \cosh\varphi)\sin\alpha + (-w_1 x + w_2 \sinh\varphi)\beta =$$

$$w_1(\cos\alpha - y\sin\alpha - \beta x) + w_2(\cosh\varphi \sin\alpha + \beta\sinh\varphi).$$

Therefore,

$$u(g) = (\cos\alpha - y\sin\alpha - \beta x)e_1 + (\sin\alpha\cosh\varphi + \beta\sinh\varphi)e_2,\ v(g) = gu(g) =$$

$$\begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi & x \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha - y\sin\alpha - \beta x & \sin\alpha\cosh\varphi + \beta\sinh\varphi \\ \cos\alpha - y\sin\alpha - \beta x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sinh\varphi(\cos\alpha - y\sin\alpha - \beta x) & \cosh\varphi(\cos\alpha - y\sin\alpha - \beta x) & \cosh\varphi(\sin\alpha\cosh\varphi + \beta\sinh\varphi) \\ \cosh\varphi(\cos\alpha - y\sin\alpha - \beta x) & \sinh\varphi(\cos\alpha - y\sin\alpha - \beta x) & \sinh\varphi(\sin\alpha\cosh\varphi + \beta\sinh\varphi) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hence integral curves of vector field $v(g)$, $g \in SH(2)$, satisfy the system of differential equations

$$\begin{cases} \dot\varphi = \cos\alpha - y\sin\alpha - \beta x, \\ \dot x = \cosh\varphi(\sin\alpha\cosh\varphi + \beta\sinh\varphi), \\ \dot y = \sinh\varphi(\sin\alpha\cosh\varphi + \beta\sinh\varphi). \end{cases} \tag{49}$$

The geodesic $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, with $g(0) = e$ is a solution of this system with initial data $\varphi(0) = x(0) = y(0) = 0$. In this case, $|u(g(t))| \equiv 1$, i.e.

$$g(t) \in M_1 = \{(\sin\alpha\cosh\varphi + \beta\sinh\varphi)^2 + (\cos\alpha - y\sin\alpha - \beta x)^2 = 1\} \subset SH(2). \tag{50}$$

Therefore there exists a differentiable function $\gamma = \gamma(t)$ such that

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\alpha\cosh\varphi + \beta\sinh\varphi, \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\alpha - y\sin\alpha - \beta x. \tag{51}$$

Since $\varphi(0) = x(0) = y(0) = 0$, then we can assume that $\gamma(0) = \pi - 2\alpha$.

On the ground of (51) the sistem (49) is written in the form

$$\begin{cases} \dot\varphi = \sin\frac{\gamma}{2}, \\ \dot x = \cos\frac{\gamma}{2}\cosh\varphi, \\ \dot y = \cos\frac{\gamma}{2}\sinh\varphi. \end{cases} \tag{52}$$

Differentiating the first and the second equalities in (51) and using (52), we get

$$-\frac{\dot\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=(\sin\alpha\sinh\varphi+\beta\cosh\varphi)\dot\varphi=\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\alpha\sinh\varphi+\beta\cosh\varphi\right),$$

$$\frac{\dot\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=-\dot y\sin\alpha-\beta\dot x=-\cos\frac{\gamma}{2}\left(\sin\alpha\sinh\varphi+\beta\cosh\varphi\right),$$

whence

$$\dot\gamma=-2(\sin\alpha\sinh\varphi+\beta\cosh\varphi),\quad \dot\gamma(0)=-2\beta.$$

Consequently, on the ground of the first equality in (51) and (52)

$$\ddot\gamma=-2(\sin\alpha\cosh\varphi+\beta\sinh\varphi)\dot\varphi=-2\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=-\sin\gamma.$$

We got the mathematical pendulum equation. In paper [19] this equation together with equations (52) are obtained by another method replacing φ with z.

8. To search for geodesics of a sub-Riemannian metric on $SE(2)$

The Lie group $SE(2)$ is isomorphic to the group of matrices of a form

$$\begin{pmatrix} A & v\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2. \tag{53}$$

The same formula (46) is true.

It is clear that matrices

$$e_1=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{54}$$

constitute a basis of Lie algebra $\mathfrak{se}(2)$. In addition,

$$[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=-e_2,\quad [e_2,e_3]=0. \tag{55}$$

Let us define a scalar product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on $\mathfrak{se}(2)$ with orthonormal basis $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ and the subspace $\mathfrak{p}$ with orthonormal basis $\{e_1,\ e_2\}$ generating Lie algebra $\mathfrak{se}(2)$. Thus a left-invariant sub-Riemannian metric d is defined on the Lie group $SE(2)$ (see [6], [25], [27] and other papers).

Let us take a (co)vector $\psi_0=\cos\alpha e_1+\sin\alpha e_2+\beta e_3\in\mathfrak{se}(2)$. We calculate

$$\psi_g(w)=\langle\psi_g,w\rangle=\langle\psi_0,gwg^{-1}\rangle,\quad g\in SH(2),\ w=w_1e_1+w_2e_2\in\mathfrak{p}.$$

$$gwg^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-w_1&w_2\\ w_1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & -x\cos\varphi-y\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & x\sin\varphi-y\cos\varphi\\ 0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$w_1e_1+(w_1y+w_2\cos\varphi)e_2+(-w_1x+w_2\sin\varphi)e_3,$$

$$\psi_g(w)=w_1\cos\alpha+(w_1y+w_2\cos\varphi)\sin\alpha+(-w_1x+w_2\sin\varphi)\beta=$$

$$w_1(\cos\alpha+y\sin\alpha-\beta x)+w_2(\sin\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi).$$

Consequently,

$$u(g)=(\cos\alpha+y\sin\alpha-\beta x)e_1+(\sin\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi)e_2,\ v(g)=gu(g)=$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & x \\ \sin\varphi & \cos\varphi & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\cos\alpha - y\sin\alpha + \beta x & \sin\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi \\ \cos\alpha + y\sin\alpha - \beta x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi(\beta x - \cos\alpha - y\sin\alpha) & \cos\varphi(\beta x - \cos\alpha - y\sin\alpha) & \cos\varphi(\sin\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi) \\ \cos\varphi(\cos\alpha + y\sin\alpha - \beta x) & \sin\varphi(\beta x - \cos\alpha - y\sin\alpha) & \sin\varphi(\sin\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hence integral curves of vector field $v(g)$, $g \in SE(2)$, satisfy the system of differential equations

$$\begin{cases} \dot\varphi = \cos\alpha + y\sin\alpha - \beta x, \\ \dot x = \cos\varphi(\sin\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi), \\ \dot y = \sin\varphi(\sin\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi). \end{cases} \tag{56}$$

The geodesic $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, with $g(0) = e$ is a solution of this system with initial data $\varphi(0) = x(0) = y(0) = 0$. In this case, $|u(g(t))| \equiv 1$, i.e.

$$g(t) \in M_1 = \{(\sin\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi)^2 + (\cos\alpha + y\sin\alpha - \beta x)^2 = 1\} \subset SE(2). \tag{57}$$

Therefore there exist differentiable functions $\omega = \omega(t) = 2\xi(t)$ such that

$$\sin\frac{\omega(t)}{2} = \sin\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi, \quad \cos\frac{\omega(t)}{2} = \cos\alpha + y\sin\alpha - \beta x. \tag{58}$$

Given the equality $\varphi(0) = x(0) = y(0) = 0$, we can assume that $\omega(0) = 2\xi(0) = 2\alpha$.

On the ground of formula (58) the system (56) is written in a form

$$\begin{cases} \dot\varphi = \cos\frac{\omega}{2}, \\ \dot x = \sin\frac{\omega}{2}\cos\varphi, \\ \dot y = \sin\frac{\omega}{2}\sin\varphi. \end{cases} \tag{59}$$

Differentiating the first and the second equalities in (58) and using (59), we get

$$\frac{\dot\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2} = -\left(\sin\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi\right)\dot\varphi = -\cos\frac{\omega}{2}\left(\sin\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi\right),$$

$$-\frac{\dot\omega}{2}\sin\frac{\omega}{2} = \dot y\sin\alpha - \beta\dot x = \sin\frac{\omega}{2}\left(\sin\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi\right),$$

whence

$$\dot\omega = 2(\beta\cos\varphi - \sin\xi\sin\varphi), \quad \dot\omega(0) = 2\dot\xi(0) = 2\beta. \tag{60}$$

Differentiating the last equality, we get in view of formulae (58) and (59)

$$\ddot\omega = -2(\beta\sin\varphi + \sin\alpha\cos\varphi)\dot\varphi = -2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2} = -\sin\omega. \tag{61}$$

We get again the mathematical pendulum equation.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

2. Берестовский В. Н. Субметрии пространственных форм неотрицательной кривизны // Сиб. матем. журн. — 1987. — Т. 28, No 4. — С. 44–56.

3. Берестовский В. Н. Однородные пространства с внутренней метрикой // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 301, No 2. — С. 268–271.

4. Берестовский В. Н. Однородные многообразия с внутренней метрикой I // Сиб. матем. журн. — 1988. — Т. 29, No 6. — С. 17–29.

5. Берестовский В. Н. Однородные многообразия с внутренней метрикой II // Сиб. матем. журн. — 1989. — Т. 30, No 2. — С. 14–28.

6. Берестовский В. Н. Геодезические левоинвариантной неголономной римановой метрики на группе движений евклидовой плоскости // Сиб. матем. журн. — 1994. — Т. 35, No 6. — С. 1223–1229.

7. Берестовский В. Н. Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметриксы плоскости Минковского // Сиб. матем. журн. — 1994. — Т. 35, No. 1. — С. 3–11.

8. Берестовский В. Н. Универсальные методы поиска нормальных геодезических на группах Ли с левоинвариантной субримановой метрикой // Сиб. мат. журн. — 2014. — Т. 55, No 5. — С. 959–970.

9. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SO(3)$ // Сиб. мат. журн. — 2015. — Т. 56, No 4. — С. 762–774.

10. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. Субриманово расстояние в группах Ли $SU(2)$ и $SO(3)$ // Мат. труды. — 2015. — Т. 18, No 2. — С. 3–21.

11. Бесчастный И. Ю., Сачков Ю. Л. Геодезические в субримановой задаче на группе $SO(3)$ // Матем. сб. — 2016. — Т. 207, No 7. — С. 29–56.

12. Кон-Фоссен С. Э. О существовании кратчайших путей // Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 288–303.

13. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1969.

14. Рашевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой кривой // Уч. зап. пед. ин.-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук 2. — 1938. — С. 83–94.

15. Bellaiche A., Risler J. (Eds.) Sub-Riemannian geometry. — Progress in Math. — Vol. 144. — Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1996.

16. Berestovskii V. N. Curvatures of homogeneous sub-Riemannian manifolds // European Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 3. — P. 788–807.

17. Berestovskii V. N., Gorbatsevich V. V. Homogeneous spaces with inner metric and with integrable invariant distributions // Analysis and Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 4, no. 4. — P. 263–331.

18. Berestovskii V. N., Guijarro L. A. Metric Characterization of Riemannian Submersions // Annals of Global Analysis and Geometry. — 2000. — Vol. 18. — P. 577–588.

19. Butt Y. A., Sachkov Y. L., Bhatti A. I. Extremal Trajectories and Maxwell Strata in Sub-Riemannian Problem on Group of Motions of Pseudo Euclidean Plane // Journal of Dynamical and Control Systems. — 2014. — Vol. 20, no. 3. — P. 341–364.

20. Chow W. L. Über systeme von linearen partiellen differential gleichungen erster ordnung // Math. Ann. — 1939. — Vol. 117. — P. 98–105.

21. Golé C., Karidi R. A note on Carnot geodesics in nilpotent Lie groups // J. Dyn. Control Syst. — 1995. — Vol. 4, no. 1. — P. 535–549.

22. Jurdjevich V. Geometric control theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.

23. Liu W., Sussman H. J. Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two-distributions // Memoirs of the Amer. Math. Soc. — Vol. 118, no. 564. — (Amer. Mth. Soc., Providence, 1995).

24. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. — 1976. — Vol. 21. — P. 293–329.

25. Moiseev R. S., Sachkov Yu. L. Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. — 2010. — Vol. 16, no. 2. — P. 380–399.

26. Montgomery R. A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. — AMS, 2002.

27. Sachkov Yu. L. Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. — 2010. — V. 16, no. 4. — P. 1018–1039.

REFERENCES

1. Agrachev, A.A. & Sachkov, Yu.L. 2004, *Control theory from the geometric viewpoint*, V. 87 of Encyclopedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin.

2. Berestovskii, V.N. 1987, “Submetries of space forms of nonnegative curvature”, *Siber. Math. J.*, vol. 28, no. 4., pp. 552–562.

3. Berestovskii, V.N. 1989, “Homogeneous spaces with intrinsic metric”, *Soviet Math. Dokl.*, vol. 38, no. 1, pp. 60–63.

4. Berestovskii, V.N. 1988, “Homogeneous manifolds with intrinsic metric. I”, *Siber. Math. J.*, vol. 29, no. 6, pp. 887–897.

5. Berestovskii, V.N. 1989, “Homogeneous manifolds with intrinsic metric. II”, *Siber. Math. J.*, vol. 30, no. 2, pp. 180-–191.

6. Berestovskii, V.N. 1994, “Geodesics of a left-invariant nonholonomic Riemannian metric on the group of motions of the Euclidean plane”, *Siberian Math. J.*, vol. 35, no. 6, pp. 1083–1088.

7. Berestovskii, V.N. 1994, “Geodesics of nonholonomic left-invariant inner metrics on the Heisenberg group and isoperimetrics of Minkowski plane”, *Siber. Math. J.*, vol. 35, no. 1, pp. 1–8.

8. Berestovskii, V.N. 2014, “Universal methods of the search of normal geodesics on Lie groups with left-invariant sub-Riemannian metric”, *Siberian Math. J.* vol. 55, no. 5, pp. 783–791.

9. Berestovskii, V.N. & Zubareva, I.A. 2015, “Geodesics and shortest arcs of a special sub-Riemannian metric on the Lie group $SO(3)$”, *Siberian Math. J.*, vol. 56, no. 4, pp. 601–611.

10. Berestovskii, V.N. & Zubareva, I.A. 2016, “Sub-Riemannian distance in the Lie groups $SU(2)$ and $SO(3)$”, *Siberian Adv. Math.*, vol. 26, no. 2, pp. 77–89.

11. Beschastnyi, I.Yu. & Sachkov, Yu.L., “Geodesics in the sub-Riemannian problem on the group $SO(3)$”, *Sb. Math.*, vol. 207, no. 7, pp. 915–941.

12. Cohn-Vossen, S. 1936, “Existenz Kürzester Wege”, *Compositio Math.*, vol. 3, pp. 441–452.

13. Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V. & Mishchenko E.F. 1962, *The mathematical theory of optimal processes*, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York–London.

14. Rashevsky, P.K. 1938, “Any two points of a totally nonholonomic space may be connected by an admissible line” (Russian), *Uch. Zap. Ped Inst. im. Liebknechta*, vol. 2, pp. 83–94.

15. Bellaiche, A. & Risler, J.(Eds.) 1996, *Sub-Riemannian geometry*, Progress in Math., Vol. 144. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin.

16. Berestovskii, V.N. 2017, "Curvatures of homogeneous sub-Riemannian manifolds", *European Journal of Mathematics*, vol. 3, pp. 788–807.

17. Berestovskii, V.N. & Gorbatsevich, V.V. 2014, "Homogeneous spaces with inner metric and with integrable invariant distributions", *Analysis and Mathematical Physics*, vol. 4, no. 4, pp. 263–331.

18. Berestovskii, V.N. & Guijarro, L. 2000, "A Metric Characterization of Riemannian Submersions", *Annals of Global Analysis and Geometry*, vol. 18, pp. 577–588.

19. Butt, Y.A., Sachkov, Y.L. & Bhatti, A.I. 2014, "Extremal Trajectories and Maxwell Strata in Sub-Riemannian Problem on Group of Motions of Pseudo Euclidean Plane", *Journal of Dynamical and Control Systems*, vol. 20, no. 3, pp. 341–364.

20. Chow, W.L. 1938, "Über systeme von linearen partiellen differential gleichungen erster ordnung", *Math. Ann.* , vol. 117, pp. 98–105.

21. Golé, C. & Karidi, R. 1995, "A note on Carnot geodesics in nilpotent Lie groups", *J. Dyn. Control Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 535–549.

22. Jurdjevich, V. 1997, *Geometric control theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

23. Liu, W. & Sussman H.J. 1995, "Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two-distributions", *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, vol. 118. no. 564., (Amer. Mth. Soc., Providence, 1995).

24. Milnor, J. 1976, "Curvatures of left invariant metrics on Lie groups", *Adv. Math.*, vol. 21, pp. 293–329.

25. Moiseev, R.S. & Sachkov, Yu.L. 2010, "Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane", *ESAIM: COCV*, vol. 16, no. 2, pp. 380–399.

26. Montgomery, R. 2002, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, AMS.

27. Sachkov, Yu.L. 2010, "Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane", *ESAIM: COCV*, vol. 16, no. 4, pp. 1018–1039.

Получено 14.09.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 515.162.8 + 514.132 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-65-83

Идеальные прямоугольные многогранники в пространстве Лобачевского[1]

А. Ю. Веснин, А. А. Егоров

Веснин Андрей Юрьевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор, Новосибирский государственный университет; главный научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; главный научный сотрудник, Томский государственный университет, Томск (г. Новосибирск).
e-mail: vesnin@math.nsc.ru
Егоров Андрей Александрович — магистрант кафедры геометрии и топологии, Новосибирский государственный университет, Новосибирск; лаборант-исследователь, Томский государственный университет, Томск (г. Новосибирск).
e-mail: a.egorov2@g.nsu.ru

Аннотация

В работе рассматривается класс прямоугольных многогранников в трехмерном пространстве Лобачевского, все вершины которых лежат на абсолюте. Получены новые верхние оценки объемов через число граней многогранника. Вычислены объемы многогранников, имеющих не более, чем 23 граней. Показано, что наименьшие объемы реализуются на антипризмах и скрученных антипризмах. Установлены первые 248 значений объемов идеальных прямоугольных многогранников. Введен класс многогранников с изолированными треугольниками, получены комбинаторные оценки на существование и приведены минимальные примеры таких многогранников.

Ключевые слова: Пространство Лобачевского, идеальный многогранник, прямоугольный многогранник, антипризма

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:
А. Ю. Веснин, А. А. Егоров. Идеальные прямоугольные многогранники в пространстве Лобачевского // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 65–83.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 19-01-00569)

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 515.162.8 + 514.132 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-65-83

Ideal right-angled polyhedra in Lobachevsky space

A. Yu. Vesnin, A. A. Egorov

Vesnin Andrei Yurievich — Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding member of RAS, Professor, Novosibirsk State University, Chief Researcher, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk; Chief Researcher, Tomsk State University, Tomsk (Novosibirsk).
e-mail: vesnin@math.nsc.ru
Egorov Andrey Alexandrovich — Master student of the Department of Geometry and Topology, Novosibirsk State University, Novosibirsk; Laboratory Assistant, Tomsk State University, Tomsk (Novosibirsk).
e-mail: a.egorov2@g.nsu.ru

Abstract

In this paper we consider a class of right-angled polyhedra in three-dimensional Lobachevsky space, all vertices of which lie on the absolute. New upper bounds on volumes in terms the number of faces of the polyhedron are obtained. Volumes of polyhedra with at most 23 faces are computed. It is shown that the minimum volumes are realized on antiprisms and twisted antiprisms. The first 248 values of volumes of ideal right-angled polyhedra are presented. Moreover, the class of polyhedra with isolated triangles is introduces and there are obtained combinatorial bounds on their existence as well as minimal examples of such polyhedra are given.

Keywords: Hyperbolic 3-space, ideal polyhedron, right-angled polyhedron, antiprism

Bibliography: 24 titles.

For citation:
A. Yu. Vesnin, A. A. Egorov, 2020, "Ideal right-angled polyhedra in Lobachevsky space" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 65–83.

To the 75th anniversary of academician Anatoly Timofeevich Fomenko.

Introduction

Applying of computer methods is a powerful tool for the study of three-dimensional hyperbolic manifolds. For example, the tabulation of manifolds obtained by Dehn surgery on manifolds with cusps led by S. V. Matveev and A. T. Fomenko [5] and independently J. Weeks [24] to recognizing the smallest volume closed orientable three-dimensional hyperbolic manifold. Todays it is known as the *Weeks – Matveev – Fomenko manifold*. Recall that it can be obtained by surgery on the Whitehead link and its volume is approximately equal to 0.942707.

In recent years many results appeared on the enumeration and classification of three-dimensional hyperbolic manifolds which admit decompositions into polyhedra with prescribed properties.

In [11] there are described hyperbolic three-dimensional manifolds that can be decomposed into regular ideal tetrahedra (up to 25 tetrahedra in the oriented case and up to 21 tetrahedrons in the non-oriented case). Three-dimensional hyperbolic manifolds that can be subdivided into Platonic polyhedra are listed in [13]. In [12] all three-dimensional orientable manifolds that can be obtained from various realizations of an octahedron were constructed and classified. The paper [14] contains an initial list of 825 bounded right-angled hyperbolic polyhedra.

In this paper, the objects of our study are polyhedra which can be realized with right, $\pi/2$, dihedral angles in a three-dimensional space of constant negative curvature $\mathbb{H}^3$, known as hyperbolic space or Lobachevsky space. Namely, we will consider only ideal right-angled hyperbolic polyhedra, that is, those for which all vertices lie on the absolute of Lobachevsky space. We will denote by $\mathcal{IR}$ the class of ideal right-angled three-dimensional hyperbolic polyhedra. Recent results on the theory of right-angled polyhedra in Lobachevsky space and using them for constructing three-dimensional hyperbolic manifolds are given in the survey [2], see also [4]. The main attention in the survey was given to bounded right-angled polyhedra, while in this paper we will consider the case of ideal polyhedra. We will follow the standard terminology of the theory of hyperbolic manifolds; see, for example, [19].

Hyperbolic three-dimensional manifolds of finite volume, which can be decomposed into ideal right-angled polyhedra, have been intensively studied in last decade. In particular, due to their close relationship with the right-angled Coxeter groups. It is known that their fundamental groups have the LERF property, i.e. they are locally extended residually finite groups (each finitely generated subgroup is separable) [21]. Several types of hyperbolic three-dimensional manifolds admitting decomposition into ideal right-angled polyhedra are presented in [9]. Since the volume of a manifold is the sum of the volumes of the polyhedra into which it is decomposed, a description of the volumes of ideal right-angled polyhedra is interesting from this point of view.

The paper has the following structure. In Section 1 we recall some facts about the existence of ideal polyhedra in Lobachevsky spaces, in particular, Andreev's theorem (Theorem 1) and Rivin's theorem (Theorem 2), which give necessary and sufficient conditions for their existence in dimension three. In Section 2 the notion of twisted antiprism is introduced and a formula for volumes of right-angled twisted antiprisms is given (Theorem 7). The Table 2 provides information on the number of ideal right-angled polyhedra in Lobachevsky space with at most 23 faces and indicates the minimum and maximum volume values for each number of faces. The carried out calculations allow to propose a conjecture which polyhedra are of smallest volumes for an arbitrary number of faces (Conjecture 1). In Section 3 we obtain new upper bounds on the volume of an ideal right-angled polyhedron in terms of the number of its faces (Theorems 9 and 10). Also, we present ideal right-angled polyhedra of smallest and largest volume with at most 23 faces (see Tables 4 and 5) and the first 248 values of volumes of ideal right-angled polyhedra (see Table 6). In Section 4 we introduce the notion of polyhedra with isolated triangles and give a lower bound on the number of faces of such polyhedra (Proposition 3). For the minimum possible number of faces equals to 26, two examples of polyhedra with isolated triangles are given.

1. Existence

1.1. Dimension and number of cusps

It was shown in [10] that right-angled polyhedra of finite volume can exist in $\mathbb{H}^n$ only for dimensions $n < 13$. Such polyhedra can have both finite vertices and cusps. At the same time [3], in dimensions $n > 4$ there are no bounded right-angled polyhedra. Thus, a right-angled polyhedron in $\mathbb{H}^n$, $n \geq 5$, has at least one cusp. It was shown in [17] that in high dimensions right-angled polyhedra of finite volume should have a lot of cusps. Namely, the lower bounds $c(n)$ of the number of cusps for dimensions $n < 13$ are given in Table 1.

We will be interested in right-angled hyperbolic polyhedra in which all vertices are cusps. Such polyhedra are called *ideal*. It was shown in [15] that in $\mathbb{H}^n$, $n \geq 7$, there are no ideal right-angled polyhedra. Examples of three-dimensional and four-dimensional ideal right-angled hyperbolic polyhedra will be given below.

Table 1: Lower bounds for the number of cusps.

n	6	7	8	9	10	11	12
c(n)	3	17	36	91	254	741	2200

1.2. Three-dimensional case

Necessary and sufficient conditions for a combinatorial polyhedron P to belong to the class $\mathcal{IR}$ can be obtained as a very special case of E. M. Andreev's theorem [1] on acute-angled polyhedra of finite volume.

Theorem 1. *[1] Let P be an abstract three-dimensional polyhedron with three or four faces meeting at each vertex, and P is not a simplex. The following conditions are necessary and sufficient conditions for the existence in $\mathbb{H}^3$ of a convex polyhedron of finite volume of a combinatorial type P with angles $\alpha_{ij} \leq \pi/2$:*

0. $0 < \alpha_{ij} \leq \pi/2$.

1. If F_{ijk} is a vertex of P, then $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{ki} \geq \pi$, if F_{ijkl} is a vertex, then $\alpha_{ij}+$ $+\alpha_{jk} + \alpha_{kl} + \alpha_{li} = 2\pi$.

2. If F_i, F_j, F_k is a triangular prismatic element, then $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{ki} < \pi$.

3. If F_i, F_j, F_k, F_l is a quadrilateral prismatic element, then $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{kl} + \alpha_{li} < 2\pi$.

4. If P is a triangular prism with bases F_1 and F_2, then $\alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{23} + \alpha_{24} + \alpha_{25} < 3\pi$.

5. If among the faces F_i, F_j, F_k there are adjacent F_i and F_j, F_j and F_k, but F_i and F_k are not adjacent, but meet at a common vertex and all three faces don't meet at one vertex, then $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} < \pi$.

For the case of an ideal right-angled polyhedron the conditions are significantly simplified since all vertices are four-valent and all dihedral angles are $\pi/2$.

We also recall a result of I. Rivin [20], concerning arbitrary convex ideal hyperbolic polyhedra, which is formulated in terms of the dual graph.

Theorem 2. *[20] Let P be a plane polyhedral graph with a weight $w(e)$ assigned to each edge e. Let P^* be the dual graph of P and assume that the weight $w^*(e^*) = \pi - w(e)$ is assigned to the edge e^* dual to e. Then P can be realized as a convex ideal polyhedron in $\mathbb{H}^3$ with dihedral angles $w(e)$ at its edges if and only if the following conditions are satisfied:*

(1) $0 < w^*(e^*) < \pi$ *for all e;*

(2) *if edges $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_k^*$ bound a face in P^*, then*

$$w^*(e_1^*) + w^*(e_2^*) + \ldots + w^*(e_k^*) = 2\pi;$$

(3) *if edges $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_k^*$ form a cycle in P^*, that does not bound a face, then*

$$w^*(e_1^*) + w^*(e_2^*) + \ldots + w^*(e_k^*) > 2\pi.$$

Ideal hyperbolic polyhedra are also interesting from the point of views of Euclidean geometry, since they are exactly those polyhedra that can be inscribed into the ball. This correspondence and the Rivin's theorem made it possible to solve the problem of Jacob Steiner on describing a sphere around a polyhedron.

In the case of a right-angled polyhedron, the weights of edges and the weights of dual edges in the Rivin's theorem are $\pi/2$ and all faces of P^* are quadrilateral. Accordingly, all vertices of the polyhedron $P \in \mathcal{IR}$ are 4-valent.

It is easy to see that from the classical Euler formula for a polyhedron, $V - E + F = 2$, where V is the number of vertices, E is the number of edges, and F is the number of faces of a polyhedron P, and from the fact that each vertex of an ideal right-angled polyhedron is incident to exactly four edges, it follows that $2E = 4V$. Thus, the relation $F = V + 2$ holds. Denote by p_k the number of k–gonal faces ($k \geq 3$) of a polyhedron of class $\mathcal{I}R$. Then

$$p_3 = 8 + \sum_{k \geq 5} p_k(k-4). \tag{1}$$

Thus, each polyhedron from $\mathcal{IR}$ has at least 8 triangular faces. It is easy to see that the octahedron shown in the Figure 1 has the minimum number of faces among the polyhedra in $\mathcal{IR}$.

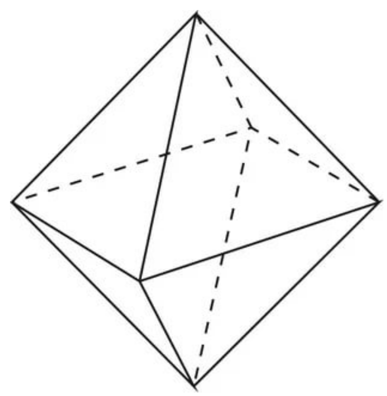


Figure 1: The octahedron.

At the same time, as we will see below, the octahedron is also minimal in volume among all ideal right-angled polyhedra.

1.3. Four-dimensional case

Recall [8, Table I] that the only regular four-dimensional polyhedron for which each vertex has a type of the cone over a cube is a 24-cell. In particular, it is realized as an ideal right-angled polyhedron in $\mathbb{H}^4$.

Let $P \subset \mathbb{H}^4$ be an ideal right-angled polyhedron with the face vector $f(P) = (f_0, f_1, f_2, f_3)$, where f_i is number of its i-faces. Since P is a convex four-dimensional polyhedron, then its surface ∂P is homeomorphic to S^3, that means that its Euler characteristic turns to zero. Thus, $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$. The volume of the polyhedron can expressed in terms of the components of the face vector, namely, the following statement holds.

Lemma 1. *[15] Let $P \subset \mathbb{H}^4$ be an ideal right-angled polyhedron with a face vector $f(P) = (f_0, f_1, f_2, f_3)$. Then its volume is equal to*

$$\operatorname{vol} P = \frac{f_0 - f_3 + 4}{3} \pi^2.$$

Since for a 24-cell, the face vector has the form $(24, 96, 96, 24)$, its volume is $4\pi^2/3$. It is shown in [15] that the 24-cell is the unique smallest volume ideal right-angled polyhedron in $\mathbb{H}^4$.

2. Enumeration of polyhedra and their volumes

2.1. Antiprisms and the edge-twist operation

Considering the octahedron as a triangular antiprism, that is, a polyhedron with triangular top and bottom and with a lateral surface formed by two levels of triangles, it can be naturally generalized to the next infinite family of polyhedra. By an n-antiprism $A(n)$, $n \geq 3$, we mean $(2n+2)$-hedron with n-gonal top and bottom and with a lateral surface formed by two levels of n triangles in each; and with each vertex incident to four edges. Schlegel diagrams of polyhedra $A(3)$ and $A(4)$ are presented in Figure 3.

By checking the conditions of Andreev's theorem or Rivin's theorem, it is easy to see that the antiprisms $A(n)$, $n \geq 3$, can be realized as ideal right-angled polyhedra in $\mathbb{H}^3$.

A. Kolpakov demonstrated in [15] that the polyhedra $A(n)$ are minimal in the following sense

Theorem 3. *[15] For $n \geq 3$ the antiprism $A(n)$ has the smallest number of faces, equal to $2n+2$, among all the ideal right-angled hyperbolic polyhedra with at least one n-gonal face.*

As will be clear below, antiprisms play an important role in understanding the structure of the set $\mathcal{IR}$ of all ideal right-angled hyperbolic polyhedra.

Theorem 2 admits to characterize the class $\mathcal{IR}$ in terms of the dual graphs of the polyhedral graphs. The dual graph must be a quadrangulation of the sphere, that is, a finite graphs with quadrilateral faces on a 2-sphere. Furthermore, the dual graph cannot contain a cycle of length four that separates two faces. The class of graphs with these properties was considered in [7], where it was denoted by $\mathscr{Q}_4$. Using the results of [7] on graphs from the class $\mathscr{Q}_4$ and passing from dual graphs to the original graphs, one can state the following result.

Theorem 4. *[7] The class of 4-valent 3-connected and cyclically 6-connected planar graphs is generated by 1-skeletons of antiprisms $A(n)$ and by edge-twist moves.*

Recall that a graph is said to be *cyclically k-connected* if k is the smallest number of edges such that removing them decomposes the graph into two components each of which contains a cycle.

The *edge-twist* move is defined as follows. Let $P \in \mathcal{IR}$ and assume that some face of the polyhedron has four distinct ideal vertices that split in pairs of connected by edges e_1 and e_2.

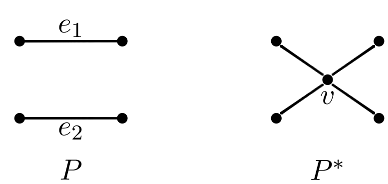


Figure 2: An edge-twist move.

Then the transformation involves removing e_1 and e_2, creating a new vertex v and connecting it by edges with the above four vertices. We denote the resulting polyhedron by P^* and say that P^* is obtained from P by an edge-twist move. For example, $A(4)^*$ in Figure 3 is obtained from $A(4)$ by the edge-twist move. The edges e_1, e_2 and the new vertex v are indicated in the figure.

Theorems 2 and 4 lead to the following result.

Theorem 5. *Each ideal right-angled hyperbolic polyhedron is an antiprism or can be obtained from some antiprism by a finite number of edge-twist moves.*

Let us introduce a class of polyhedra obtained from antiprisms. Let $A(n)$, $n \geq 4$, be an antiprism, and e_1 and e_2 be two edges that belong to one of n-gonal faces, such that there is a third edge on the same face to which they are both adjacent, let us denote it by e_3. In other words, e_1 and e_2

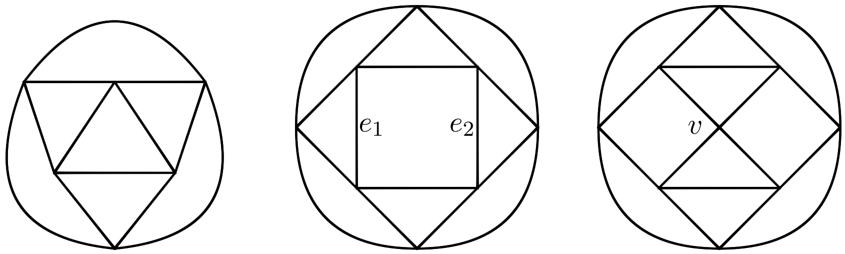


Figure 3: Polyhedra $A(3)$, $A(4)$ and $A(4)^*$.

are adjacent through an edge. We apply the edge-twist move to the edges e_1 and e_2. As one can see from Figure 4, illustrating the case of the antiprism $A(6)$, when we apply edge-twist move to the edges adjacent through an edge, the combinatorial structure changes as follows. The antiprism $A(n)$ had $2n+2$ faces: two n-gonal faces and $2n$ triangular faces. The new polyhedron $A(n)^*$ has $2n+3$ faces: one n-gonal face, one $(n-1)$-gonal face, two quadrilateral faces and $(2n-1)$ triangular faces. The polyhedron $A(n)^*$ will be referred to as a *twisted antiprism*. Observe that the number of faces of the antiprism is always even, but the number of faces of the twisted antiprism is always odd. As well as the antiprism, by virtue of Andreev's or Rivin's theorems, any twisted antiprism can be realized as an ideal right-angled polyhedron in $\mathbb{H}^3$.

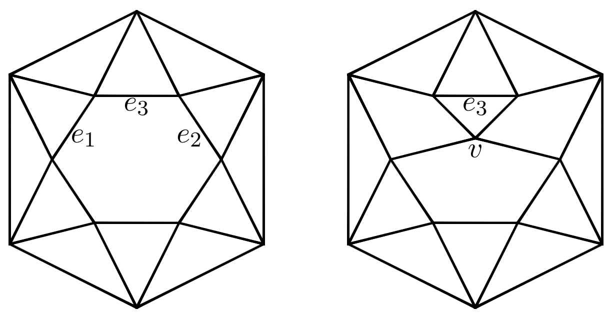


Figure 4: Polyhedra $A(6)$ and $A(6)^*$.

Denote by v_8 the volume of an ideal right-angled hyperbolic octahedron. The numerical value of this quantity will be given in the next section.

Lemma 2. *Let $A(n)$, $n \geq 4$, be an ideal right-angled antiprism in $\mathbb{H}^3$ having $2n+2$ faces and $A(n)^*$ be an ideal right-angled twisted antiprism obtained from $A(n)$ and having $2n+3$ faces. Then for the volume of the twisted antiprism the following equality holds:*

$$\mathrm{vol}(A(n)^*) = \mathrm{vol}(A(n-1)) + v_8.$$

Proof. Since the edge-twist move of edges adjacent through one edge is a local transformation of a polyhedron, we will illustrate the proof for the case $n=6$. For an arbitrary $n \geq 4$, the proof is analogous.

Let us consider the antiprism $A(n-1)$. The left side of Figure 5 presents the antiprism $A(5)$. Put an ideal right-angled octahedron on one of its faces to the triangular face ABC. Since the triangular faces of the antiprism and the triangular faces of the octahedron are ideal triangles, these faces are pairwise isometric. The remaining seven faces of the octahedron are drawn inside the triangle ABC in the middle of Figure 5. Recall that the dihedral angles at the edges of the antiprism and at the edges of the octahedron are equal to $\pi/2$. Therefore, when we combine the antiprism and the octahedron along the triangular face ABC in the resulting polyhedron, the angles at the edges AB, BC and AC will be equal to π and the corresponding faces will belong to the same plane in pairs. Thus the polyhedron obtained by combining the antiprism and the octahedron will have a combinatorial structure as in the right part of Figure 5, where the edges AB, BC and AC are absent.

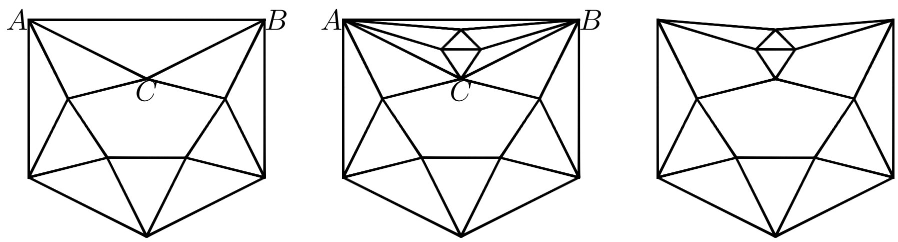


Figure 5: $A(5)$ and its union with an octahedron.

It is easy to see that the resulting polyhedron coincides combinatorially with the polyhedron $A(6)^*$ and is also right-angled. By virtue of Andreev's uniqueness theorem, these polyhedra are isometric, which implies equality of volumes. $\square$

2.2. The Lobachevsky function

Traditionally, volumes of polyhedra in three-dimensional hyperbolic space are computed in terms of function

$$\Lambda(\theta) = -\int_0^\theta \log|2\sin(t)|\,\mathrm{d}t,$$

which J. Milnor introduced in the survey [16] and called it the *Lobachevsky function*. He demonstrated that the volume of an ideal tetrahedron $T(\alpha, \beta, \gamma)$ in a three-dimensional hyperbolic space with dihedral angles α, β and γ (meaning that at one of the vertices dihedral angles are α, β, γ, where $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, and dihedral angles at the opposite edges of the tetrahedron coincide) is calculated by the formula:

$$\mathrm{vol}(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma).$$

Splitting an ideal right-angled octahedron into four ideal tetrahedra with dihedral angles $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/4$, and using $\Lambda(\pi/2) = 0$, we obtain

$$v_8 = 8\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3.663862376708876\ldots.$$

A formula for the volume of a right-angled antiprism was presented by W. Thurston in his well-known lectures [23, Chapter 6.8], where the antiprism was called by a drum with triangular sides, and its volume was used to calculate the volume of the complement to some link in a three-dimensional sphere.

Theorem 6. *[23] For $n \geq 3$ the volume of a right-angled n–antiprism is given by*

$$\mathrm{vol}(A(n)) = 2n\left[\Lambda\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n}\right)\right],$$

where $\Lambda(x)$ is the Lobachevsky function.

Theorem 6 implies that vol($A(n)$) is asymptotically equivalent to $\frac{v_8}{2}n$ when $n \to \infty$. In particular, the above formula gives the volume of an ideal right-angled octahedron $A(3)$:

$$\mathrm{vol}(A(3)) = 8\Lambda(\pi/4) = v_8,$$

where we used properties of the Lobachevsky function [19].

THEOREM 7. *For the volume of the twisted antiprism $A(n)^*$, $n \geq 4$, the following formula holds:*

$$\mathrm{vol}(A(n)^*) = 2(n-1)\left[\Lambda\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2(n-1)}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2(n-1)}\right)\right] + 8\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

PROOF. It follows from Lemma 2 and Theorem 6. □

2.3. Volumes of polyhedra with at most 23 faces

As we noted above, the Euler's formula implies that any ideal right-angled polyhedron has at least 8 triangular faces.

For each $n = 8, 10, 11, \ldots, 23$ Table 2 gives the number of ideal right-angled polyhedra in $\mathbb{H}^3$ with n faces; the number of different volumes of them; the minimum and maximum volume values.

Table 2: Ideal right-angled polyhedra.

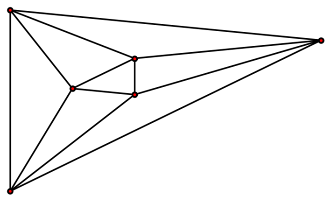
# of faces	# of polyhedra	# of volumes	min volume	max volume
8	1	1	3.663863	3.663863
9	0	0	-	-
10	1	1	6.023046	6.023046
11	1	1	7.327725	7.327725
12	2	2	8.137885	8.612415
13	2	2	9.686908	10.149416
14	9	7	10.149416	12.046092
15	11	7	11.801747	13.350771
16	37	17	12.106298	14.832681
17	79	31	13.813278	16.331571
18	249	79	14.030461	18.069138
19	671	172	15.770160	19.523353
20	2182	495	15.933385	21.241543
21	6692	1359	17.694323	22.894415
22	22131	4276	17.821704	24.599233
23	72405	13031	19.597248	26.228126

Combinatorial enumeration of polyhedra was done with using the computer program `plantri` [18]. Volumes of hyperbolic polyhedra were calculated with the applying some modification of the computer program `SnapPea` [22]. Values of volumes are given up to 10^{-6}.

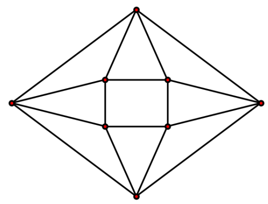
Denote by $P_n^{\min}$ and $P_n^{\max}$ polyhedra which realize minimal and maximal values of volumes in the class of all polyhedra with n faces. The first seven polyhedra with smallest volume are given in Table 3.

The volume calculations showed that the following fact holds for $n \leq 23$. If n is even, then the smallest volume is achieved on the antiprism, that is, $P_n^{\min} = A(k)$, where $n = 2k+2$. If n is odd, then the smallest volume is achieved on the twisted antiprism, that is, $P_n^{\min} = A(k)^*$, where $n = 2k+3$. We formulate this observation in the following form.

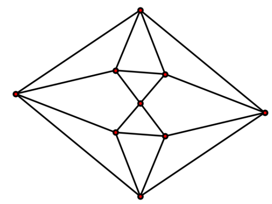
Table 3: The first seven ideal right-angled polyhedra



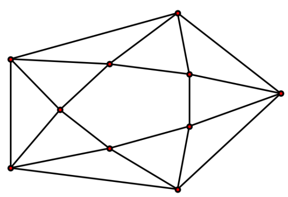
(1) $\mathrm{vol}(P_8) = 3.663863$



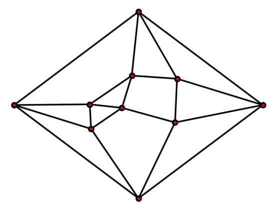
(2) $\mathrm{vol}(P_{10}) = 6.023046$



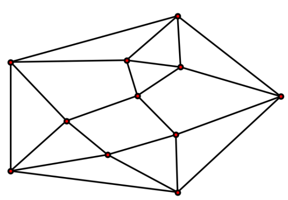
(3) $\mathrm{vol}(P_{11}) = 7.327725$



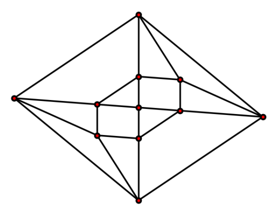
(4) $\mathrm{vol}(P_{12}^{\min}) = 8.137885$



(5) $\mathrm{vol}(P_{12}^{\max}) = 8.612415$



(6) $\mathrm{vol}(P_{13}^{\min}) = 9.686908$



(7) $\mathrm{vol}(P_{13}^{\max}) = 10.149416$

Proposition 1. *For ideal right-angled hyperbolic polyhedra with at most 23 faces, the minimum value of volumes is achieved on antiprisms and twisted antiprisms. The minimum and maximum volumes are presented in Tables 2, 4 and 5.*

Conjecture 1. *If $n \geq 8$ is even, then the minimum volume is achieved on the antiprism, that is, $P_n^{\min} = A(k)$, where $n = 2k+2$. If $n \geq 11$ is odd, then the minimum volume is achieved on the twisted antiprism, that is, $P_n^{\min} = A(k)^*$, where $n = 2k+3$.*

The statement 1 confirms the conjecture for $n \leq 23$.

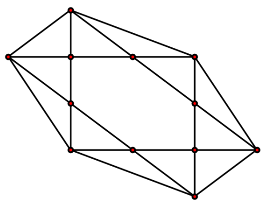
3. Upper and lower volume bounds

Bilateral bounds for the volumes of ideal right-angled polyhedra in terms of the number of vertices were obtained by K. Atkinson in [6].

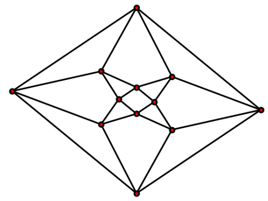
Theorem 8. *[6] Let P be an ideal right-angled polyhedron with N vertices, then*

$$(N-2) \cdot \frac{v_8}{4} \leqslant \mathrm{vol}(P) \leqslant (N-4) \cdot \frac{v_8}{2}.$$

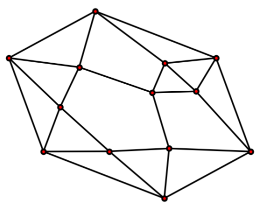
Table 4: Ideal right-angled polyhedra with n faces having minimum and maximum volume, $14 \leq n \leq 18$.



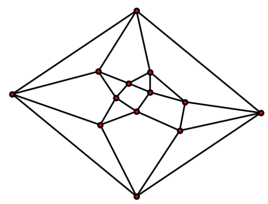
$P_{14}^{\min}$



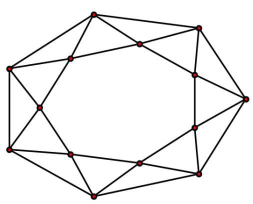
$P_{14}^{\max}$



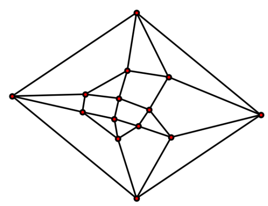
$P_{15}^{\min}$



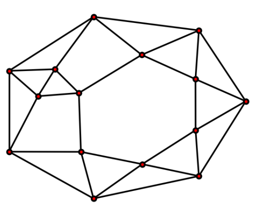
$P_{15}^{\max}$



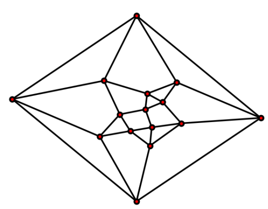
$P_{16}^{\min}$



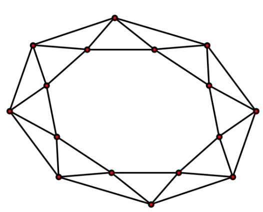
$P_{16}^{\max}$



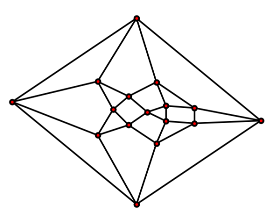
$P_{17}^{\min}$



$P_{17}^{\max}$



$P_{18}^{\min}$

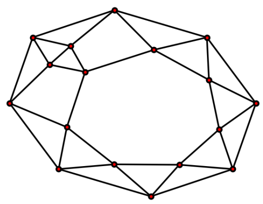


$P_{18}^{\max}$

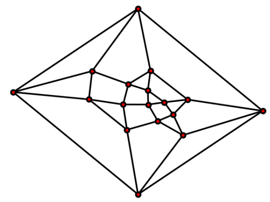
Both inequalities became equalities when P is the regular ideal hyperbolic octahedron. Moreover, there exists a sequence of ideal right-angled polyhedra P_i with N_i vertices such that $\mathrm{vol}(P_i)/N_i$ *tends to $v_8/2$ as $i \to \infty$.*

Figure 6 shows the graphs of the upper and lower bounds from Theorem 8, the set of volume values of ideal right-angled polyhedra with at most 23 faces, where volumes of antiprisms and

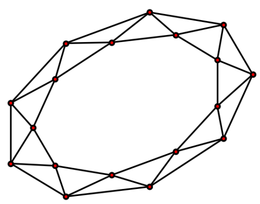
Table 5: Ideal right-angled polyhedra with n faces having minimum and maximum volume, $19 \leq n \leq 23$.



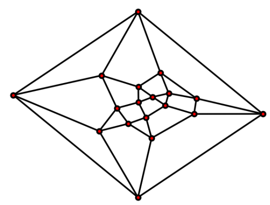
$P_{19}^{\min}$



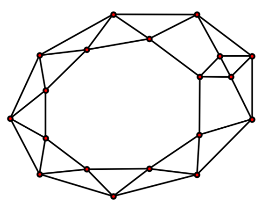
$P_{19}^{\max}$



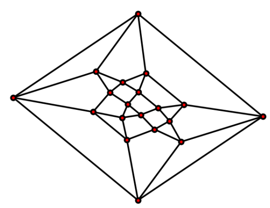
$P_{20}^{\min}$



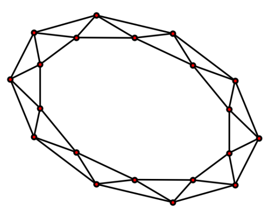
$P_{20}^{\max}$



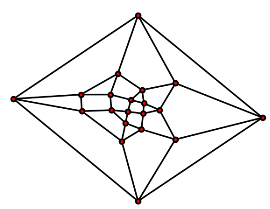
$P_{21}^{\min}$



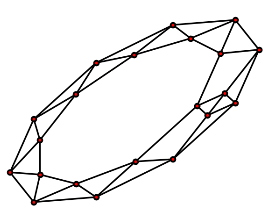
$P_{21}^{\max}$



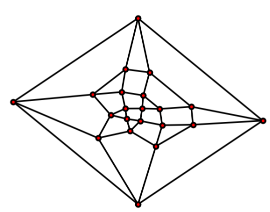
$P_{22}^{\min}$



$P_{22}^{\max}$



$P_{23}^{\min}$



$P_{23}^{\max}$

twisted antiprisms are separately highlighted.

The upper bound in Theorem 8 can be improved as follows.

THEOREM 9. *Let P be an ideal right-angled hyperbolic polyhedron with N vertices, different from the octahedron. Let F_1 and F_2 be two faces of P such that F_1 is n_1-gon, and F_2 is n_2-gon, where*

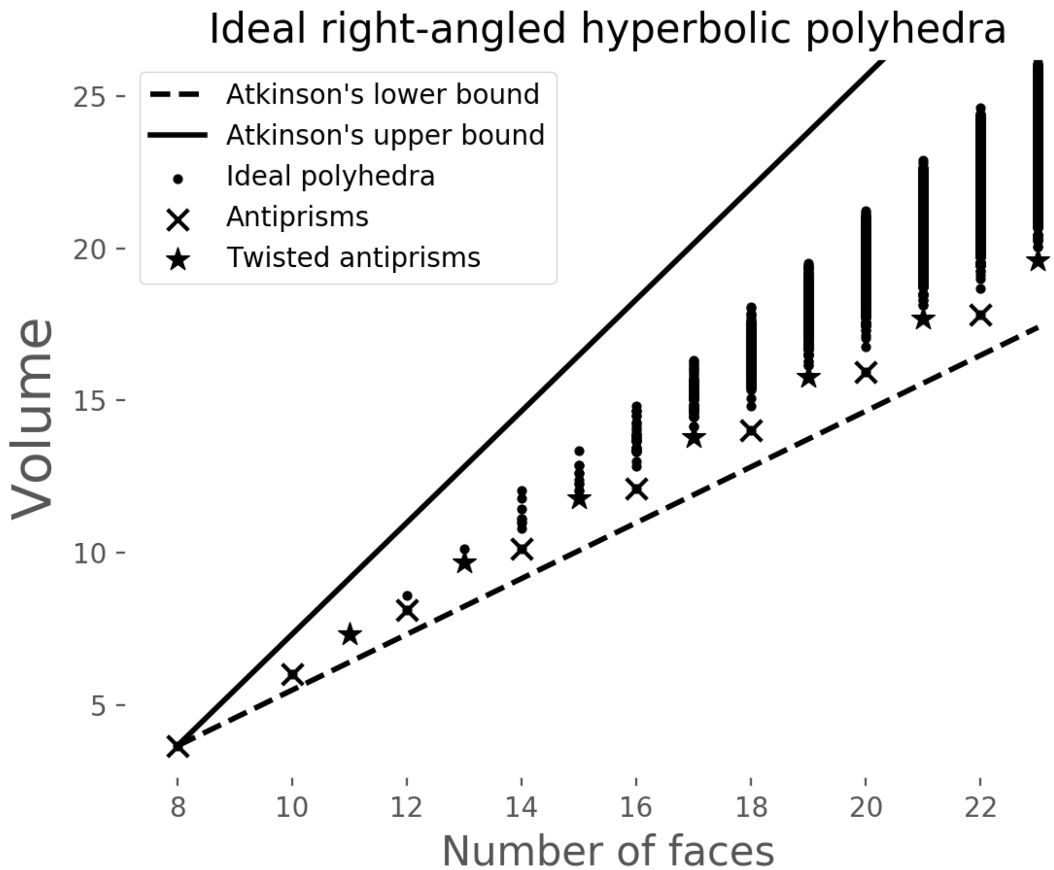


Figure 6: The set of volumes and Atkinson bounds.

$n_1, n_2 \geq 4$. *Then for its volume the following upper bound holds:*

$$\mathrm{vol}(P) \leq \left(N - \frac{n_1}{2} - \frac{n_2}{2}\right) \cdot \frac{v_8}{2}.$$

Proof. As follows from the Euler formula for polyhedra, if an ideal right-angled polyhedron P is different from an octahedron, then it would have two faces that have at least four sides. For definiteness, we denote these faces by F_1 and F_2. We consider two cases according to whether the faces F_1, F_2 are adjacent or not.

(1) Let the faces F_1 and F_2 be not adjacent. We construct a family of right-angled polyhedra by induction, attaching at each step a copy of the polyhedron P. Put $P_1 = P$. Define $P_2 = P_1 \cup_{F_1} P_1$, identifying two copies of the polyhedron P_1 along the face F_1. Obviously, P_2 is an ideal right-angled polyhedron with the number of vertices $N_2 = 2N - n_1$ and the volume $\mathrm{vol}(P_2) = 2\,\mathrm{vol}(P)$. The polyhedron P_2 has at least one face isometric to F_2. We attache the polyhedron P to the polyhedron P_2 along this face. We get $P_3 = P_2 \cup_{F_2} P = P \cup_{F_1} P \cup_{F_2} P$. Obviously, P_3 is an ideal right-angled polyhedron with the number of vertices $N_3 = 3N - n_1 - n_2$ and the volume $\mathrm{vol}(P_3) = 3\,\mathrm{vol}(P)$. Continuing the process of adding the polyhedron P alternately through the faces isometric to F_1 and F_2, we obtain the polyhedron $P_{2k+1} = P_{2k-1} \cup_{F_1} P \cup_{F_2} P$, which is an ideal right-angled polyhedron with $N_{2k+1} = (2k+1)N - k, n_1 - kn_2$ vertices and of volume $\mathrm{vol}(P_{2k+1}) = (2k+1)\,\mathrm{vol}(P)$. Now let us apply the upper bound from Theorem 8 to polyhedron P_{2k+1}:

$$(2k+1)\,\mathrm{vol}(P) \leq ((2k+1)N - kn_1 - kn_2 - 4)\,\frac{v_8}{2}.$$

Dividing both sides of the inequality by $(2k+1)$ and passing to the limit as $k \to \infty$, we obtain the required inequality.

(2) Let the faces F_1 and F_2 be adjacent. Put $P_2 = P \cup_{F_1} P$. The constructed polyhedron P_2 has $N_2 = 2N - n_1$ vertices and its volume is two times the volume of the polyhedron P. By construction, the polyhedron P_2 has a face F_{21}, which is a $(2n_2-2)$-gon. Since the face of F_1 has at least 4 edges, there is a face in P adjacent to F_1, but not adjacent to F_2. As a result of attaching P along F_1, this face will turn into a face F_{22} in a polyhedron P_2 that has at least 4 sides. Thus, in P_2 there is a pair of non-adjacent faces F_{21} and F_{22}, each of which has at least 4 sides. This situation corresponds to the already proved case (1). Thus, for the polyhedron P_2 and its non-adjacent faces F_{11} and F_{12} we get:

$$2\,\mathrm{vol}(P) \le \left(N_2 - \frac{(2n_2-2)}{2} - \frac{4}{2}\right)\frac{v_8}{2},$$

from where we receive

$$2\,\mathrm{vol}(P) \le (2N - n_1 - n_2 - 1)\,\frac{v_8}{2}.$$

and therefore,

$$\mathrm{vol}(P) < \left(N - \frac{n_1}{2} - \frac{n_2}{2}\right)\frac{v_8}{2}.$$

□

Theorem 10. *Let P be an ideal right-angled hyperbolic polyhedron with $N \ge 17$ faces and having only triangular or quadrilateral faces. Then for its volume the following upper bound holds:*

$$\mathrm{vol}(P) < (N-5)\frac{v_8}{2}$$

Proof. Observe that in the polyhedron P there are three quadrilateral faces F_1, F_2, F_3 such that F_2 is adjacent to F_1 and F_3 both. In fact, assume that there is no such triple of faces. Then each quadrilateral face is adjacent to at most one quadrangular face. If a quadrilateral face has no adjacent quadrilateral (we will say that it is isolated), then through its four sides it is adjacent to the triangular faces. If two quadrilaterals are adjacent to each other and none of them is adjacent to another quadrilateral (we will say that the faces form a pair), then their union is adjacent through six sides with triangular faces. Hence, if there are k_1 isolated quadrilateral faces and k_2 pairs of quadrilateral faces, then through their sides they are adjacent to triangular faces through $4n_1+6n_2$ sides. Since the polyhedron does not contain n-gonal faces for $n \ge 5$, it follows from Euler's formula that the number of triangles is 8. Their total number of sides is 24. If the number of faces $N \ge 17$ and eight of them are triangles, then $n_1 + 2n_2 \ge 9$ and $S = 4n_1 + 6n_2$ sides of triangles are required. Using the fact that $2n_2 \ge 9 - n_1$, we obtain $S \ge 4n_1 + 3(9-n_1) = 27 + n_1 > 24$. This contradiction implies that there is a triple of sequentially adjacent quadrilateral faces F_1, F_2, F_3, where F_2 is adjacent to F_1 and F_3

Let us consider the union $P_2 = P \cup_{F_2} P$ of two copies of P along F_2. Then the doubled faces F_1 and F_3 of the polyhedron P will give two hexagonal faces in the polyhedron P_2. The total number of vertices in P_2 is $2N-4$. We apply the upper bound from Theorem 4 to P_2 and the indicated hexagonal faces:

$$2\,\mathrm{vol}(P) < \left(2N - 4 - \frac{6}{2} - \frac{6}{2}\right)\frac{v_8}{2},$$

from where we receive

$$\mathrm{vol}(P) < (N-5)\,\frac{v_8}{2},$$

this is exactly what we needed to prove. □

The following statement describes the structure of the initial part of the set of volumes of ideal right-angled polyhedra.

Proposition 2. *The volume values of ideal right-angled hyperbolic polyhedra not exceeding* $5v_8$ *are listed in Table 6. The number of such values is* 248.

Proof. By virtue of a lower bound from Theorem 8, if the number of faces of the ideal right-angled polyhedron P is F (hence the number of its vertices is $F-2$), then for its volume the lower bound holds:

$$(F-4) \cdot \frac{v_8}{4} \leqslant \mathrm{vol}(P).$$

If $F \geq 24$ then this bound is at least $5v_8$. Thus, the volume of any polyhedron with at least 24 faces is bounded below by $5v_8 = 18.319312$, where the approximate value is indicated on the right-hand side. Direct calculations of volumes of polyhedra with at most 23 faces show that the number of values of volumes not exceeding $5v_8$ is 248, All of them are listed in Table 6. □

Table 6: The first 248 values of volumes.

1	3,663863	51	15,46561	101	16,735095	151	17,477141	201	17,974896
2	6,023046	52	15,478658	102	16,744556	152	17,509421	202	17,98967
3	7,327725	53	15,495403	103	16,750301	153	17,516143	203	18,009307
4	8,137885	54	15,546518	104	16,755495	154	17,517167	204	18,026172
5	8,612415	55	15,654866	105	16,769779	155	17,52091	205	18,038106
6	9,686908	56	15,655017	106	16,780195	156	17,528985	206	18,045655
7	10,149416	57	15,709955	107	16,798534	157	17,530777	207	18,047625
8	10,806002	58	15,720116	108	16,805953	158	17,548392	208	18,058361
9	10,991587	59	15,77016	109	16,829048	159	17,55096	209	18,063652
10	11,136296	60	15,795313	110	16,83204	160	17,558575	210	18,063815
11	11,447207	61	15,803436	111	16,855785	161	17,571217	211	18,069138
12	11,801747	62	15,8569	112	16,864012	162	17,577434	212	18,084139
13	12,106298	63	15,85949	113	16,896062	163	17,5839	213	18,08961
14	12,276278	64	15,933385	114	16,961302	164	17,600432	214	18,092676
15	12,414155	65	15,94014	115	16,974442	165	17,615398	215	18,099757
16	12,46092	66	15,958101	116	16,98803	166	17,616542	216	18,109351
17	12,611908	67	15,959551	117	17,004375	167	17,633184	217	18,109786
18	12,854902	68	15,996629	118	17,014633	168	17,671046	218	18,128273
19	12,883862	69	16,049989	119	17,024507	169	17,694323	219	18,129371
20	13,020639	70	16,061517	120	17,061166	170	17,701559	220	18,133727
21	13,310579	71	16,078017	121	17,061237	171	17,70449	221	18,144299
22	13,350771	72	16,158579	122	17,061342	172	17,709902	222	18,152718
23	13,447108	73	16,172462	123	17,110971	173	17,712742	223	18,15859
24	13,677298	74	16,213678	124	17,140322	174	17,740113	224	18,167534
25	13,714015	75	16,27577	125	17,159342	175	17,751064	225	18,1677
26	13,813278	76	16,295989	126	17,165397	176	17,759743	226	18,173199
27	13,907355	77	16,324638	127	17,169868	177	17,766925	227	18,175729
28	14,030461	78	16,330917	128	17,174806	178	17,766983	228	18,180264
29	14,103121	79	16,331571	129	17,19799	179	17,769525	229	18,180633
30	14,160931	80	16,339295	130	17,199831	180	17,773653	230	18,207313
31	14,171606	81	16,382246	131	17,201332	181	17,790452	231	18,21988
32	14,273414	82	16,39832	132	17,22483	182	17,812693	232	18,233526
33	14,469865	83	16,448631	133	17,233217	183	17,821704	233	18,234257
34	14,494727	84	16,465777	134	17,238195	184	17,824793	234	18,244844
35	14,635461	85	16,48952	135	17,280423	185	17,835469	235	18,247553
36	14,655449	86	16,49154	136	17,303311	186	17,83745	236	18,276848
37	14,766948	87	16,506891	137	17,324068	187	17,844054	237	18,281813
38	14,800159	88	16,518764	138	17,341161	188	17,845073	238	18,287301
39	14,832681	89	16,535273	139	17,342423	189	17,857212	239	18,28917
40	14,898794	90	16,538867	140	17,354288	190	17,860804	240	18,291323
41	15,031667	91	16,547725	141	17,354866	191	17,864013	241	18,292895
42	15,052463	92	16,575188	142	17,362724	192	17,864685	242	18,299323
43	15,07859	93	16,595363	143	17,377493	193	17,894018	243	18,300817
44	15,11107	94	16,605736	144	17,377877	194	17,899631	244	18,304268
45	15,126498	95	16,615815	145	17,38534	195	17,901906	245	18,307302
46	15,169623	96	16,627568	146	17,420943	196	17,907162	246	18,31334
47	15,253393	97	16,657287	147	17,429408	197	17,918936	247	18,316267
48	15,323216	98	16,678106	148	17,45025	198	17,922791	248	18,319312
49	15,350907	99	16,684502	149	17,470253	199	17,937276		
50	15,367058	100	16,726449	150	17,470735	200	17,944583		

4. Polyhedra with isolated triangles

Recall that an ideal right-angled polyhedron has at least eight triangles. In the case of an octahedron, each triangle is adjacent to three other triangles along sides. From Table 4 and 5 one can see that with the increasing the number of faces of polyhedra with maximum volume, the triangles move away from each other more and more. From the presence of common sides, the situation changes towards the presence of common vertices. The question appears when polyhedra arise in which all triangular faces are isolated, that is, no two triangular faces have common vertices. In this case we will call the polyhedron *ITR-polyhedron*, emphasizing that it satisfies the isolated triangles rule.

PROPOSITION 3. *Let P be an ideal right-angled polyhedron in Lobachevsky space having N faces. Denote by p_3 the number of its triangular faces. If $N < 3p_3 + 2$, then P is not ITR-polyhedron.*

PROOF. Let n be the maximum number of edges in faces of the polyhedron P. Denote by p_k, $k = 3, \ldots, n$, the number of k-gonal faces in P. Then $\sum_{k=3}^{n} p_k = N$. Recall that by the formula (1), $p_3 = 8 + \sum_{k=4}^{n} p_k(k-4)$. Assume, on the contrary, that P is an ITR-polyhedron. So at each vertex of the triangle there are meet three more vertices related to the faces that are not triangular. The number of vertices of all triangles is $3p_3$. So, the number of vertices in all remaining polygons must be at least $9p_3$. Let us calculate this number:

$$\sum_{k=4}^{n} kp_k = 4p_4 + \sum_{k=5}^{n} kp_k = 4p_4 + \sum_{k=5}^{n} p_k(k-4) + 4\sum_{k=5}^{n} p_k$$
$$= p_3 - 8 + 4\sum_{k=4}^{n} p_k = p_3 - 8 + 4(N - p_3) = 4N - 3p_3 - 8.$$

Demanding inequality

$$4N - 3p_3 - 8 \geq 9p_3,$$

we get

$$N \geq 3p_3 + 2,$$

which contradicts the original condition. Therefore, for $N < 3p_3 + 2$ the polyhedron P cannot have isolated triangles. □

Since the smallest possible value of p_3 is 8, there are no polyhedra with isolated triangles among polyhedra with at most 25 faces. But among the 26-faced polyhedra there are two such examples, which are shown in Figure 7. The volume of the ITR-polyhedron shown on the left-hand side is

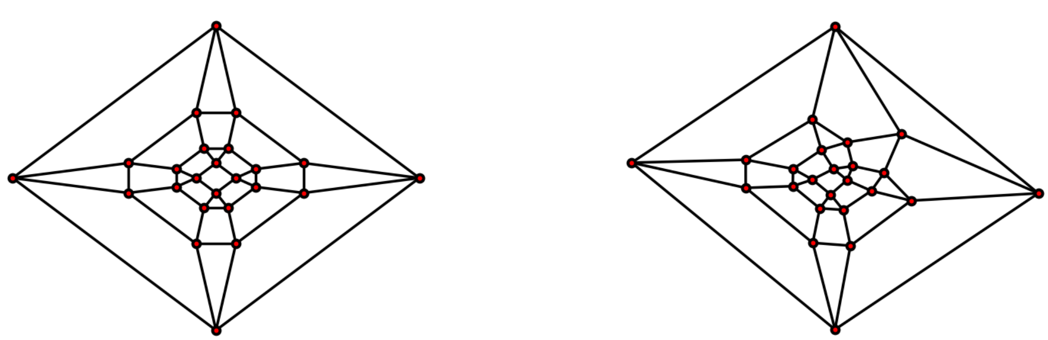


Figure 7: 26-gonal polyhedra with isolated triangles

31.0930375, and the volume of the ITR-polyhedron shown on the right-hand side is 31.1668675.

PROPOSITION 4. *There are infinitely many ITR-polyhedra.*

Proof. Let P_1 be an ITR-polyhedron (for example, it can be taken any of the polyhedra shown in Figure 7) and let F_1 be one of its triangular faces. Consider the polyhedron $P_2 = P_1 \cup_{F_1} P_1$ obtained by gluing two copies of the polyhedron P_1 along the face F_1. Obviously, the polyhedron P_2 will also be an ideal right-angled polyhedron with isolated triangles. Suppose, for certainty, that the faces of the polyhedron P_1, which have common sides with F_1, have n_1, n_2, n_3 sides, where $n_i \geq 4$, $i = 1, 2, 3$, by virtue of the triangle isolation property. When these faces are doubled, they will turn into faces of a polyhedron P_2, having, respectively, $2n_i - 2$ sides, $i = 1, 2, 3$. If P_1 have $p_3(P_1)$ triangular faces, then P_2 will have $p_3(P_2) = 2p_3(P_1) - 2 = p_3(P_1) + \sum_{i=1}^{3}(2n_i - 6)$ triangular faces. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. М. Андреев, *О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского*, Матем. сб., **83(2)** (1970), 256–260.

2. А. Ю. Веснин, *Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия*, Успехи матем. наук, **72(2)** (2017), 147–190.

3. Э. Б. Винберг, *Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности*, Труды Московского матем. общества, **47** (1984), 68–102.

4. Н. Ю. Ероховец, *Трехмерные прямоугольные многогранники конечного объема в пространстве Лобачевского: комбинаторика и конструкции*, Труды МИАН, **305** (2019) (в печати).

5. С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трёхмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий*, Успехи матем. наук, **43(1)** (1988), 5–22.

6. C. K. Atkinson, *Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra,* Algebraic & Geometric Topology, **9** (2009), 1225–1254.

7. G. Brinkmann, S. Greenberg, C. Greenhill, B. D. McKay, R. Thomas, P. Wollan, *Generation of simple quadrangulations of the sphere*, Discrete Mathematics, **305** (2005), 33–54.

8. H. S. M. Coxeter, Regular polytopes, 3rd edition, New. York (1973).

9. E. Chesebro, J. DeBlois, H. Wilton, *Some virtually special hyperbolic 3-manifold groups*, Comment. Math. Helv., **87** (2012), 727–787,

10. G. Defour, *Notes on right-angled Coxeter polyhedra in hyperbolic spaces*, Geom. Dedicata, **147** (2009), 277-282.

11. E. Fominykh, S. Garoufalidis, M. Goerner, V. Tarkaev, A. Vesnin, *A census of tetrahedral hyperbolic manifolds*, Experimental Mathematics, **25(4)** (2016), 466–481.

12. D. Heard, E. Pervova, C. Petronio, *The 191 orientable octahedral manifolds*, Experimental Mathematics, **17** (2008), 473–486.

13. M. Goerner, *A census of hyperbolic Platonic manifolds and augmented knotted trivalent graphs*, preprint available on arxiv:1602.02208v2.

14. T. Inoue, *Exploring the list of smallest right-angled hyperbolic polyhedra*, Experimental Mathematics, Published online April 11, 2019. DOI: 10.1080/10586458.2019.1593897.

15. A. Kolpakov, *On the optimality of the ideal right-angled 24-cell*, Algebraic and Geometric Topology, **12** (2012), 1941–1960.

16. J. Milnor, *Hyperbolic geometry: the first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982),. 9–24.

17. J. Nonaka, *The number of cusps of right-angled polyhedra in hyperbolic spaces*, Tokyo Journal of Math., **38(2)** (2015), 539–560.

18. `Plantri`, a computer software for generation of certain types of planar graphs, see `https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/plantri/`

19. J. G. Ratcliffe, Foundations of Hyperbolic Manifolds. Springer-Verlag. 1994.

20. I. Rivin, *A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. (2) **143(1)** (1996), 51–70.

21. P. Scott, *Subgroups of surface groups are almost geometric*, J. London Math. Soc. (2) **17(3)** (1978), 555–565.

22. `SnapPea`, a computer program for calculation hyperbolic structures on 3-manifolds, see `http://www.geometrygames.org/SnapPea/`

23. W. P. Thurston. The Geometry and Topology of 3-manifolds. Princeton University Notes, Princeton, New Jersey, 1980.

24. J. Weeks. Hyperbolic structures on 3-manifolds. Ph. D. Thesis, Princeton University. 1985.

REFERENCES

1. Andreev, E. M. 1970, “On convex polyhedra of finite volume in Lobachevskii space”, *Math. USSR-Sb.*, vol.12, no. 2, pp. 255—259.

2. Vesnin, A. Yu. 2017, “Right-angled polyhedra and hyperbolic 3-manifolds”, *Russian Math. Surveys*, vol. 72, no. 2, pp. 335—374.

3. Vinberg, É. B. 1984, “Absence of crystallographic groups of reflections in Lobachevski˜i spaces of large dimension”, *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, vol. 47, MSU, M., pp. 68—102.

4. Erokhovets, N. Yu. 2019, “Three-Dimensional Right-Angled Polytopes of Finite Volume in the Lobachevsky Space: Combinatorics and Constructions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 305, pp. 78-–134

5. Matveev, S. V. & Fomenko, A. T. 1988, “Constant energy surfaces of Hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic manifolds”, *Russian Math. Surveys*, vol. 43, no. 1, pp. 3—24.

6. Atkinson, C. K. 2009, “Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra”, *Algebraic & Geometric Topology*, vol. 9, pp. 1225–1254.

7. Brinkmann, G., Greenberg, S., Greenhill, C., McKay, B. D., Thomas,R. & Wollan,P. 2005, “Generation of simple quadrangulations of the sphere”, *Discrete Mathematics*, vol. 305, pp. 33–54.

8. Coxeter, H. S. M. 1973, *Regular polytopes*, 3rd edition, New. York.

9. Chesebro, E., DeBlois, J. & Wilton, H. 2012, “Some virtually special hyperbolic 3-manifold groups”, *Comment. Math. Helv.*, vol. 87, pp. 727–787.

10. Defour, G. 2009, “Notes on right-angled Coxeter polyhedra in hyperbolic spaces”, *Geom. Dedicata*, vol. 147, pp. 277-282.

11. Fominykh, E., Garoufalidis, S., Goerner, M., Tarkaev, V. & Vesnin, A. 2016, “A census of tetrahedral hyperbolic manifolds”, *Experimental Mathematics*, vol. 25, no. 4, pp. 466–481.

12. Heard, D., Pervova,E. & Petronio, C. 2008, “The 191 orientable octahedral manifolds”, *Experimental Mathematics*, vol. 17, pp. 473–486.

13. Goerner,M. 2016 “A census of hyperbolic Platonic manifolds and augmented knotted trivalent graphs”, Available at: arxiv:1602.02208v2.

14. Inoue, T. 2019, “Exploring the list of smallest right-angled hyperbolic polyhedra”, *Experimental Mathematics*, Published online April 11, 2019. DOI: 10.1080/10586458.2019.1593897.

15. Kolpakov, A. 2012, “On the optimality of the ideal right-angled 24-cell”, *Algebraic and Geometric Topology*, vol. 12, pp. 1941–1960.

16. Milnor J. 1982, “Hyperbolic geometry: the first 150 years”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 6, pp. 9–24.

17. Nonaka, J. 2015, “The number of cusps of right-angled polyhedra in hyperbolic spaces”, *Tokyo Journal of Math.*, vol. 38, no.2, pp. 539–560.

18. `Plantri`, a computer software for generation of certain types of planar graphs, Available at: `https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/plantri/`

19. Ratcliffe, J. G. 1994, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag.

20. Rivin, I. 1996, “A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space”, *Ann. of Math.*, Second Series, vol.143, no. 1, pp. 51–70.

21. Scott, P. 1978, “Subgroups of surface groups are almost geometric”, *J. London Math. Soc.*, vol. s2-17, no. 3, pp. 555–565.

22. `SnapPea`, a computer program for calculation hyperbolic structures on 3-manifolds, Available at: `http://www.geometrygames.org/SnapPea/`

23. Thurston, W. P. 1980, *The Geometry and Topology of 3-manifolds*, Princeton University Notes, Princeton, New Jersey.

24. Weeks, J. 1985, *Hyperbolic structures on 3-manifolds*, Ph. D. Thesis, Princeton University.

Получено 14.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-84-93

Дифференциальные включения с производными в среднем, имеющие асферические правые части

Ю. Е. Гликлих

Гликлих Юрий Евгеньевич — доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственные университет (г. Воронеж).
e-mail: yeg@math.vsu.ru

Аннотация

На плоском n-мерном торе изучаются стохастические дифференциальные включения с производными в среднем, у которых правые части имеют, вообще говоря, не выпуклые (асферические) значения. Выделен подкласс таких включений, для которых существует последовательность ε-аппроксимаций, поточечно сходящаяся к измеримому по Борелю селектору. На этой основе получена теорема существования решения.

Ключевые слова: производные в среднем; дифференциальные включения; асферические правые части; поточечная сходимость; существование решений

Библиография: 17 названия.

Для цитирования:
Ю. Е. Гликлих. Дифференциальные включения с производными в среднем, имеющие асферические правые части // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 84–93.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-84-93

Differential inclusions with mean derivatives, having aspherical right-hand sides

Yu. E. Gliklikh

Gliklikh Yurii Evgen'evich — doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh State University (Voronezh).
e-mail: yeg@math.vsu.ru

Abstract

On flat n-dimensional torus we study stochastic differential inclusions with mean derivatives, for which the right-hand sides have, generally speaking, not convex (aspherical) values. A subclass of such inclusions is distinguished for which there exists a sequence of ε-approximations, converging point-wise to a Borel measurable selector. On this base a solution existence theorem is obtained.

Keywords: mean derivatives; differential inclusions; aspherical right-hand sides; point-wise convergence; solution existence

Bibliography: 17 titles.

For citation:
Yu. E. Gliklikh, 2020, "Differential inclusions with mean derivatives, having aspherical right-hand sides" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 84–93.

1. Introduction

The concept of mean derivatives was introduced by E. Nelson in the 60-s years of 20th century (see [1, 2, 3]) for the needs of the so-called stochastic mechanics constructed by him (a variant of quantum mechanics). Then it turned out that equations and inclusions with mean derivatives naturally arose in many branches of mathematical physics, economics and other sciences.

In this article, differential inclusions with mean derivatives, for which the right-hand sides are, generally speaking, have non-convex values of points. These are mappings that are aspherical in all dimensions from 1 to $n-1$ (see exact definitions below). This class of mappings was the first time described by A.D. Myshkis in 1954 in [4]. In [5] and in [6] for such mappings the topological characteristics of the type of topological index and Lefschetz number were constructed. Later (in the 1980s) this class was independently rediscovered by the group of Polish mathematicians led by Lech Górniewicz, and named "mappings whose values at each point have the so-called uv^k-property for $k = 1, \dots, n$" (see, for example, [7]). It is important that for such upper semicontinuous mappings, there exist the so-called ε-approximations (a special case here is the well-known construction of ε-approximations for mappings with convex values).

Here we study ε-approximations for such mappings from the point of view of existence of their sequences with the property of point-wise convergence to a Borel-measurable selector of the set valued mapping. For a subclass of mappings with this property on the flat n-dimensional torus an existence of solution theorem is proved for differential inclusions with mean derivatives.

It should be pointed out, that no unform but only point-wise convergence of ε-approximations of the right-hand sides of the ordinary differential inclusion, gives nothing useful for the investigation of those inclusions. But this paper shows that in the case of stochastic differential inclusions the point-wise convergence of ε-approximations of the right-hand sides is a powerful machinery for proving the existence of solution theorems.

Preliminaries from the theory of set-valued mappings can be found in [8, 9, 10], and the necessary information on stochastic analysis – in [11, 12].

The research is supported by the RFBR grant 18-01-00048.

2. A brief introduction to the theory of set-valued mappings

The set-valued mapping F from the set X to the set Y is the rule that associates the nonempty set $F(x) \subset Y$ to each point $x \in X$; $F(x)$ is called the value of F at x.

To distinguish the set-valued maps from the single-valued ones, we introduce notation $F : X \multimap Y$ for the set-valued mapping F, acting from X to Y, and for single-valued mappings we keep the standard notation $f : X \to Y$.

If X and Y are metric spaces, for set-valued mappings there are several continuity analogues that turn into ordinary continuity in the case of single-valued mappings (here we do not consider the description of these properties for set-valued mappings of topological spaces, referring the reader, for example, to [9]). In this article we use only upper semicontinuity.

Definition 1. *The set-valued mapping F is called upper semicontinuous at the point $x \in X$ if for each $\varepsilon > 0$ there is a neighborhood $U(x)$ of the point x such that from $x' \in U(x)$ it follows that $F(x')$ belongs to ε -neighborhood of the set $F(x)$. F is called upper semicontinuous if it is upper semicontinuous at each point of the set X.*

A set-valued mapping is called closed if its graph is a closed set in $X \times Y$. It follows, e.g., from [9, 1.2.29] that every upper semicontinuous mapping with bounded closed values of metric spaces is closed.

An important technical role in the study of set-valued mappings play the single-valued mappings approximating them in some sense.

Definition 2. *For a given $\varepsilon > 0$ the continuous single-valued mapping $f_\varepsilon : X \to Y$ is called the ε-approximation of the set-valued mapping $F : X \multimap Y$ if the graph of f as a set in $X \times Y$ belongs to the ε-neighborhood of the graph of F.*

For the following classes of upper semicontinuous set-valued mappings in finite-dimensional spaces the existence of ε-approximations for any $\varepsilon > 0$ is shown:

— mappings with convex closed values;

— the so-called mappings that are aspherical in all dimensions from 1 to $n-1$ and are slightly aspherical in dimensions n (see the history of research and references in §1).

3. ε-approximations for upper semicontinuous mappings with aspherical values

We give an exact definition of set-valued mappings with aspherical values, following [4, 5, 6].

Everywhere below, we consider a set-valued upper semicontinuous mapping $F : X \multimap E$ from an n -dimensional compact polyhedron X lying in some Euclidean space, to E or to the polyhedron X itself. Assumption that X is a polyhedron does not restrict the generality. In particular, $F : X \multimap X$ and $F : E \multimap E$ can be considered as such mappings.

By the symbol $O(A, r)$ we denote the r-neighborhood of the set A, the symbol $d(A)$ means the diameter of A.

It is easy to see that from the definition of upper semicontinuity or closeness of the mapping F it follows that for any $\varepsilon > 0$ and $\beta > 0$ there exists a number $\alpha(\varepsilon, \beta)$ such that in β -neighborhood $O(T, \beta)$ of an arbitrary set T with the diameter smaller than α, there exists a point x_0 called *satellite* of the set T, such that $O(F(x_0), \varepsilon) \supset F(T)$.

Definition 3. *The map $F : X \multimap X$ is called aspherical in dimension k, if in each neighborhood $O(F(x), \varepsilon)$ of each value $F(x)$ there exists a neighborhood of $Q(x, \varepsilon, k)$ containing $\delta = \delta(\varepsilon)$ neighborhood $F(x)$ (δ is independent from x) such that $\pi_k(Q) = 0$, where $\pi_k(Q)$ is the k-th homotopy group of Q.*

Everywhere below we assume that F is aspherical in dimensions $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Recall that $\pi_0(Q) = 0$ means that Q is linearly connected. We describe the construction of ε -approximations for such set-valued mappings F that are upper semicontinuous and have closed values, by modifying the approach of [5].

Let μ be a real number such that $O(F(x), \mu)$ lies in aspherical in dimension $n-1$ neighborhood of $F(x)$, μ is independent of x. We construct a sequence

$$\mu > \varepsilon_{2n+1} > \varepsilon_{2n} > \delta(\varepsilon_{2n}) > \varepsilon_{2n-1} > \cdots > \varepsilon_2 > \delta(\varepsilon_2) > \varepsilon_1 \tag{1}$$

where $\delta(\varepsilon_i)$ is the number defining the $\delta(\varepsilon_i)$-neighborhood of the value $F(x)$ that is contained in $\bigcap\limits_{k=0}^{n} Q(x, \varepsilon_i, k)$. Then we construct the sequence $\{\beta_i\}_1^{n+1}$ and the number α_0 such that

$$0 < \beta_k < \frac{1}{4}\beta_{k+1}; \qquad \beta_k + \alpha_0 < \alpha(\varepsilon_{2k+1} - \varepsilon_{2k}, \beta_{k+1}) \tag{2}$$

where $\alpha(\varepsilon, \beta)$ is introduced above in this section. Obviously, such a sequence can be constructed by starting with the largest indices.

Now we define a triangulation of X such that the diameter of each simplex would be less than $d < min(\alpha_0, \alpha(\varepsilon_1, \beta_1))$. To each 0-dimensional simplex T_i^0 we associate a point $f(T_i^0) \in F(T_i^0)$. For each 1 -dimensional simplex T_i^1 we get that $d(T_i^1) < \alpha(\varepsilon_1, \beta_1)$. Thus, for the satellite x_i^1 it holds that $x_i^1 \in O(T_i^1, \beta_1)$ and $F(T_i^1) \subset O(F(x_i^1), \varepsilon_1)$. Hence, the following inclusions

$$f(T_{i_1}^0) \cup f(T_{i_2}^0) \subset F(T_i^1) \subset O(F(x_i^1), \varepsilon_1) \tag{3}$$

and

$$O(F(x_i^1), \varepsilon_1) \subset O(F(x_i^1), \delta(\varepsilon_2)) \subset Q(x_i^1, \varepsilon_2, 0) \subset O(F(x_i^1), \varepsilon_2) \tag{4}$$

hold, where $T_{i_1}^0$ and $T_{i_2}^0$ are the edges of T_i^1. Since Q is aspherical in dimension 0, f can be extended on T_i^1 as continuous mapping and

$$f(T_i^1) \subset Q(x_i^1, \varepsilon_2, 0) \subset O(F(x_i^1), \varepsilon_2). \tag{5}$$

Let T_i^2 be a 2-dimensional simplex with 1-dimensional edges $T_{i_1}^1$, $T_{i_2}^1$ and $T_{i_3}^1$. Let $x_{i_1}^1$, $x_{i_2}^1$ and $x_{i_3}^1$ be the satellites corresponding to these edges. They form the set $\tilde{T}_i^1$ for which

$$d(\tilde{T}_i^1) < 2\beta_1 + \alpha_0 < \alpha(\varepsilon_3 - \varepsilon_2, \beta_2).$$

There is a satellite x_i^2 of the set $\tilde{T}_i^1$ such that,

$$x_i^2 \in O(\tilde{T}_i^1, \beta_2) \quad \text{and} \quad F(\tilde{T}_i^1) \subset O(F(x_i^2), \varepsilon_2).$$

Taking into account (4) and (5) we derive

$$\bigcup_{j=1,2,3} f(T_{i_j}^1) \subset O(F(\tilde{T}_i^1), \varepsilon_2) \subset O(F(x_i^2), \varepsilon_2). \tag{6}$$

By (1) we have inclusions

$$O(F(x_i^2), \varepsilon_3) \subset O(F(x_i^2), \delta(\varepsilon_4)) \subset Q(x_i^2, \varepsilon_4, 1) \subset O(F(x_i^2, \varepsilon_4). \tag{7}$$

Since $\pi_2 Q(x_i^2, \varepsilon_4, 1) = 0$, we can extend f from the boundary of the simplex T_i^2 to the whole simplex as continuous mapping. In addition, we obtain that

$$f(T_i^2) \subset Q(x_i^2, \varepsilon_4, 1) \subset O(F(x_i^2), \varepsilon_4). \tag{8}$$

And so on. In the last step, we extend f from $(n-1)$-skeleton of X to the entire X as a continuous mapping. By the construction the graph of f lies in ε_{2n+1}-neighborhood of the graph of F.

Theorem 1. *For F as above there exists a sequence $f^{(k)}$ of continuous ε_{2n+1}^k-approximations of the type described above, $\varepsilon_{2n+1}^k \to 0$ for $k \to \infty$, such that for any point x of some countable everywhere dense subset $\Xi \subset X$ there is an integer K such that for any $k > K$ the inclusion $f^{(k)}(x) \in F(x)$ and $f^{(k+l)}(x) = f^{(k)}(x)$ for any integer $l > 0$.*

Proof. By the construction, for each x from 0-dimensional skeleton of X for f constructed above, we set the value of $f(x) \in F(x)$. Now consider the sequence of barycentric partitions of X. We denote by X_0^k the 0-dimensional skeleton of the k-th partitions. At each $k+1$ -th step for $x \in X_0^k$ we save the value $f^{(k+1)}(x) = f^{(k)}(x)$ and introduce an arbitrary value $f^{(k+1)}(x) \in F(x)$ for $x \in X_0^{(k+1)} \backslash X_0^{(k)}$. Then we construct continuous $f^{(k+1)}$ on all X in the same way, as above. The limit set Ξ in $X_0^{(k)}$ for $k \to \infty$ is the desired set. $\square$

Corollary 1. *In the notation of Theorem1 the sequence $f^{(k)}$ on Ξ converges point-wise to the selector f of F so that for any $x \in \Xi$ the values of $f^{(k)}(x)$ stabilize starting from some number $K(x)$. From the point-wise convergence it follows that f is Borel measurable on Ξ.*

Among the set-valued mappings with aspherical values there is a subclass of mappings that have sequences of ε-approximations that converge point-wise to some Borel selector on the whole polyhedron. For example, this includes upper semicontinuous mappings with values aspherical in dimensions $k = 0, 1, \dots, n-1$ only at a finite number points (which we include in the number of vertices of simplexes), and in the rest points the value are closed and convex. Existence of point-wise convergent ε-approximations for upper semicontinuous set-valued mappings with convex values in two different cases are proved in [13, 14].

For the convenience of references in the text, we write down the property of those mappings, which we will consider below.

Condition 1. *We assume that the considered mappings with aspherical values have sequences of ε-approximations, which converge point-wise to a certain Borel selector on the whole polyhedron.*

4. Preliminary Information on Mean Derivatives

Consider a stochastic process $\xi(t)$ in $\mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$ defined on some probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ and such that $\xi(t)$ is L_1-random element for all t. Denote by $\mathcal{N}_t^\xi$ the completed with sets of measure 0 σ-subalgebra of σ-algebra $\mathcal{F}$ generated by the preimages of Borel sets in $\mathbb{R}^n$ under the map $\xi(t)$ (following Nelson, see, for example, [1, 2, 3], we call $\mathcal{N}_t^\xi$ the “present” for the process $\xi(t)$). For convenience, we denote the conditional expectation of $\xi(t)$ relative to $\mathcal{N}_t^\xi$ by $E_t^\xi(\cdot)$.

The usual (“unconditional”) mathematical expectation we denote by E.

Strictly speaking, almost sure (a.s.) the sample trajectories of $\xi(t)$ are not differentiable for almost all t. So, the classic derivatives $\xi(t)$ exist only in the sense of generalized functions. To avoid using generalized functions, by following Nelson (see, for example, [1, 2, 3]) we give

Definition 4. *The forward mean derivative $D\xi(t)$ of the process $\xi(t)$ at time instant t is an L_1-random element of the form*

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t}\right) \tag{9}$$

where the limit is assumed to exist in $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, and $\Delta t \to +0$ means that Δt tends to 0 $\Delta t > 0$.

From the properties of conditional mathematical expectation (see [11]) it follows that $D\xi(t)$ can be represented as a superposition of $\xi(t)$ swith the Borel measurable vector field (regression)

$$a(t,x) = \lim_{\Delta t \to +0} E\left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} | \xi(t) = x\right) \tag{10}$$

on $\mathbb{R}^n$. This means that $D\xi(t) = a(t, \xi(t))$.

Following [15] (see also [12]), we introduce the mean derivative D_2 of the process $\xi(t)$ by the following formula

$$D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\left(\frac{(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))^*}{\triangle t}\right), \tag{11}$$

where $(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))$ is considered as a column (vector in $\mathbb{R}^n$) and $(\xi(t+\triangle t) - \xi(t))^*$ - as a row (transposed or conjugate vector). As above, the limit exists in $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definition 5. *D_2 is called the quadratic mean derivative.*

It is shown that the quadratic mean derivative takes values in the space of symmetric positive semi-definite $(n \times n)$ matrices $\overline{S}_+(n)$.

5. Differential inclusions with aspherical right-hand sides

In this section we consider differential inclusions with mean derivatives on the flat n-dimensional torus $\mathbb{T}^n$. On the one hand, T^n is a compact polyhedron, i.e. on it the constructions from §3 are well-defined. On the other hand, Riemannian metric on $\mathbb{T}^n$ is inherited from $\mathbb{R}^n$ on factorizing with respect to integer lattice. This makes possible applying the technique developed for $\mathbb{R}^n$.

Consider on $\mathbb{T}^n$ a set-valued vector field $\mathbf{a}(t,x)$ and a set-valued $(2,0)$-tensor field $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ having closed uniformly bounded values, aspherical in dimensions $k = 0, 1, \ldots, n-1$ values and satisfy Condition 1. In addition, for $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$ we assume that it takes values in symmetric positive definite bilinear forms ($(2,0)$ tensors). The differential inclusion with those fields is the system of the form

$$\begin{cases} D\xi(t) \in \mathbf{a}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)). \end{cases} \tag{12}$$

Definition 6. *The inclusion* (12) *has a solution with the initial condition* $\xi_0 \in \mathbb{T}^n$ *if there exists a probability space and a random process* $\xi(t)$ *given on it and taking values in* $\mathbb{T}^n$*, such that* $\xi(0) = \xi_0$ *and a.s.* $\xi(t)$ *satisfies inclusion* (12)*.*

For simplicity, we deal only with determinate initial conditions.

Theorem 2. *Under the assumptions made above, for any initial condition* $\xi(0) \in \mathbb{T}^n$ *inclusion* (12) *has a solution.*

Proof. Choose a sequence of positive numbers $\varepsilon_k \to 0$ such that the corresponding continuous ε_k-approximations of $a_k(t,x)$ and of $\alpha_k(t,x)$ converge point-wise to Borel selectors $a(t,x)$ and $\alpha(t,x)$ of set-valued fields $\mathbf{a}(t,x)$ and $\boldsymbol{\alpha}(t,x)$, respectively. Moreover, it is easy to see that $\alpha_k(t,x)$ are symmetric and positive definite. Then by [12, Lemma 8.40] there exist continuous matrix fields $A_k(t,x)$ such that $\alpha_k(t,x) = A_k(t,x)A_k^*(t,x)$, where $A_k^*(t,x)$ is the transposed matrix $A(t,x)$. In this case, the sequence $A_k(t,x)$ converges point-wise to the matrix field $A(t,x)$.

Consider the sequence of stochastic differential equations in Ito form

$$\xi_k(t) = \xi_0 + \int_0^t a_k(s,\xi_k(s))ds + \int_0^t A_k(s,\xi_k(s))dw(s). \tag{13}$$

Since the coefficients in (13) are continuous and also, by construction, are uniformly bounded, by [16, Theorem III.2.4] all these equations have weak solutions $\xi_k(t)$. The corresponding measures μ_k on the space $(C^0([0,T],\mathbb{T}^n),\mathfrak{C})$, where $\mathfrak{C}$ is the σ-algebra of cylindrical sets, are weakly compact by [16, Corollary to Lemma III.2.2], hence we can choose a subsequence that weakly converges to some measure μ. For convenience, we assume that the sequence μ_k itself converges weakly to μ. We shall show that the coordinate process $\xi(t)$ on the probability space $(C^0([0,T],\mathbb{T}^n),\mathfrak{C},\mu)$ is the solution we are looking for. Recall that the coordinate process is defined by the equality $\xi(t,x(\cdot)) = x(t)$.

Denote by λ the normalized Lebesgue measure on $[0,T]$.

Since $a_i(t,x(\cdot))$ point-wise converges as $i \to \infty$ to $a(t,x(\cdot))$, this convergence takes place a.s. for each measure $\lambda\times\mu_k$. Choose $\delta > 0$. By the Egorov theorem (see, e.g. , [17]) for any k there is a subset $\tilde{K}_\delta^k \subset [0,T]\times C^0([0,T],\mathbb{T}^n)$ such that $(\lambda\times\mu_k)(\tilde{K}_\delta^k) > 1-\delta$, and the sequence $a_i(t,x(\cdot))$ converges to $a(t,x(\cdot))$ uniformly on $\tilde{K}_\delta^k$. We introduce $\tilde{K}_\delta = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{K}_\delta^k$. The sequence $a_i(t,x(\cdot))$ converges to $a(t,x(\cdot))$ uniformly on $\tilde{K}_\delta$ and $(\lambda\times\nu_k)(\tilde{K}_\delta) > 1-\delta$ for all $k = 0,\ldots,\infty$.

Note that $a(t,x(\cdot))$ is continuous on the set of full measure $\lambda\times\mu$ on $[0,T]\times C^0([0,T],\mathbb{T}^n)$. Indeed, consider the sequence $\delta_k \to 0$ and the corresponding sequence $\tilde{K}_{\delta_k}$ from the Egorov theorem. From the above construction it follows that $a(t,x(\cdot))$ is the uniform limit of the sequence of continuous functions on each $\tilde{K}_{\delta_k}$. Thus it is continuous on every $\tilde{K}_{\delta_k}$ and so on every final union $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}$. It is obvious that $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda\times\mu)(\bigcup\limits_{i=1}^{n}\tilde{K}_{\delta_i}) = (\lambda\times\mu)([0,T]\times C^0([0,T],\mathbb{T}^n)$.

Let $g_t(x(\cdot))$ be bounded (set $|g_t(x(\cdot))| < \Theta$ for all $x(\cdot)\in C^0([0,T],\mathbb{T}^n)$ and continuous, $\mathcal{N}_t^\xi$-measurable function on $C^0([0,T],\mathbb{T}^n)$, where $\mathcal{N}_t^\xi$ is the "present" of the coordinate process, see §4).

From uniform convergence (see above) to $\tilde{K}_\delta$ for all k and the boundedness of g_t it follows that for sufficiently large k

$$\left\| \int_{\tilde{K}_\delta} \left(\int_t^{t+\Delta t} (a_k(\tau,x(\cdot)) - a(\tau,x(\cdot)))d\tau \right) g_t(x(\cdot))d\mu_k \right\| < \delta.$$

Since $(\lambda\times\mu_k)(\tilde{K}_\delta) > 1-\delta$ for all k, $\|a_k(t,x(\cdot)) - a(t,x(\cdot)) < Q$ for all k and $|g_t(x(\cdot))| < \Theta$ (see above), we obtain

$$\left\| \int_{C^0([0,T],\mathbb{T}^n)\setminus\tilde{K}_\delta} \left(\int_t^{t+\Delta t} (a_k(\tau,x(\cdot)) - a(\tau,x(\cdot)))d\tau \right) g_t(x(\cdot))d\mu_k \right\| < 2Q\Theta\delta.$$

From the fact that δ is an arbitrary positive number, it follows that

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathbb{T}^n)} \left(\int_t^{t+\Delta t} a_k(\tau,x(\cdot))d\tau - \int_t^{t+\Delta t} a(\tau,x(\cdot))d\tau \right) g_t(x(\cdot))d\mu_k = 0.$$

From the weak convergence of μ_k to μ it follows that

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{C^0([0,T],\mathbb{T}^n)} \left(\int_t^{t+\Delta t} a(\tau,x(\cdot))d\tau \right) g_t(x(\cdot))d\mu_k =$$
$$\int\limits_{C^0([0,T],\mathbb{T}^n)} \left(\int_t^{t+\Delta t} a(\tau,x(\cdot))d\tau \right) g_t(x(\cdot))d\mu. \tag{14}$$

It's obvious that

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{C^0([0,T],\mathbb{T}^n)} (x(t+\Delta t) - x(t))d\mu_k = \int\limits_{C^0([0,T],\mathbb{T}^n)} (x(t+\Delta t) - x(t))d\mu. \tag{15}$$

Note that

$$\int_{C^0([0,T],\mathbb{T}^n)} \left(\Big[x(t+\Delta t) - x(t) \Big] - \int_t^{t+\Delta t} a_k(\tau,x(\cdot))d\tau \right) g_t(x(\cdot))d\mu_k = 0 \tag{16}$$

since

$$\int\limits_{C^0([0,T],\mathbb{T}^n)} [x(t+\Delta t) - x(t)] g_t(x(\cdot))d\mu_k = E\left[(\xi_k(t+\Delta t) - \xi_k(t)) g_t(\xi_k(t)) \right],$$

$$\int\limits_{C^0([0,T],\mathbb{T}^n)} \left(\int_t^{t+\Delta t} a_k(\tau,x(\cdot))d\tau \right) g_t(x(\cdot))d\mu_k = E\Big[\left(\int_t^{t+\Delta t} a_k(\tau,\xi_k(\tau))d\tau \right) g_t(\xi_k(t)) \Big]$$

and $\xi_k(t)$ is a solution (13).

Formulae (14), (15) and (16) yield the equality

$$\int\limits_{C^0([0,T],\mathbb{T}^n)} \left(\Big[x(t+\Delta t) - x(t)\Big] - \int\limits_t^{t+\Delta t} a(s,x(\cdot))ds \right) g_t(x(\cdot))d\mu = 0.$$

Since g_t is an arbitrary continuous bounded function, measurable with respect to $\mathcal{N}_t^\xi$, the latter relation is equivalent to

$$E_t^\xi \left(\Big[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)\Big] - \int\limits_t^{t+\Delta t} a(s,\xi(\cdot))ds \right) = 0. \tag{17}$$

So from (17) it follows that

$$D\xi(t) = a(t,\xi(\cdot)) \in \mathbf{a}(t,\xi(\cdot)). \tag{18}$$

Now we turn to $A_k(t,x(\cdot))$. Recall that $\alpha_k(t,x(\cdot)) = A_k(t,x(\cdot))A_k^*(t,x(\cdot))$ point-wise converges to $\alpha(t,x(\cdot))$, a Borel measurable selector of $\boldsymbol{\alpha}(t,x(\cdot))$. Absolutely similar to the above arguments, it is easy to show that

$$\int\limits_{C^0([0,T],\mathbb{T}^n)} \left(\Big[(x(t+\Delta t) - x(t))(x(t+\Delta t) - x(t))^*\Big] - \int\limits_t^{t+\Delta t} \alpha(s,x(\cdot))ds \right) g_t(x(\cdot))d\mu = 0 \tag{19}$$

with the same g_t as above. Relation (19) is equivalent to

$$E_t^\xi \left(\Big[(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))(\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^*\Big] - \int\limits_t^{t+\Delta t} \alpha(s,\xi(\cdot)))ds \right) = 0$$

which obviously implies that

$$D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(\cdot)) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(\cdot)). \tag{20}$$

Equalities (18) and (20) complete the proof. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics / E. Nelson // Phys. Reviews, 1966.– Vol. 150, No. 4.– P. 1079–1085
2. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. / E. Nelson – Princeton: Princeton University Press, 1967.
3. Nelson E. Quantum fluctuations. / E. Nelson – Princeton: Princeton University Press, 1985.
4. Мышкис А.Д. Обобщение теоремы о стационарной точке динамической системы внутри замкнутой траектории / А.Д. Мышкис // Мат. сборник.- 1954.- Т. 34, No 3.- С. 525-540
5. Брисович Ю.Г. Очисле Лефшеца для одного класса многозначных отображений / Ю.Г. Борисович, Ю.Е. Гликлих // Трохимчук Ю.Ю.(ed.) 7 летняя математическая школа.- Киев, 1970.- С. 283-294.
6. Гликлих Ю.Е. Неподвижные точки многозначнгых отображений с невыпуклыми образами и вращение многозначных векторных полей / Ю.Е Гликлих // Борисович Ю.Г. (ed.) Сборник трудов аспиранитов математического факультета.- Воронеж: Воронежский университет, 1972.- С. 30-38

7. Kryszewski W. Homotopy properties of set-valued mappings / Kryszewski, W.- Torun: Torun University, 1997.- 243 p.
8. Aubin J.-P. Differential Inclusions. Set-valued maps and viability theory / J.-P. Aubin, A. Cellina.- Berlin et al.: Springer-Verlag, 1984.- 342 p.
9. Борисович Ю.Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский .- М.: КомКнига, 2005.- 216 p.
10. Kamenskiĭ M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskiĭ, V. Obukhovskiĭ, P. Zecca.- Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.- 231 p.
11. Партасарати К.Р. Введение в теорию вероятностей теорию меры / К.Р. Партасарати. М.: МирN1988.- 344 с.
12. Gliklikh Yu.E. Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics.- London: Springer-Verlag.- 2011.- 460 p.
13. Azarina, S.V. Solvability of Langevin differential inclusions with set-valued diffusion terms on Riemannian manifolds / S.V. Azarina, Yu.E. Gliklikh, A.V. Obukhovskii// Applicable Analysis.- 2007.- Vol. 86, No. 9.- P. 1105-1116
14. Azarina, S.V., Gliklikh, Yu.E.: Stochastic differential equations and inclusions with mean derivatives relative to the past / S.V. Azarina, Yu.E. Gliklikh// International Journal of Difference Equations.- 2009.- Vol.4, No. 1.- P. 27-41
15. Azarina S.V. Differential inclusions with mean derivatives / S.V. Azarina, Yu.E. Gliklikh // Dynamic Systems and Applications.- 2007.- Vol.16, No. 1.- P. 49-71
16. Гихман И.И. ТЬеорния случайных процессов / И.И. Гихиан, А.В. Скороход.- М.: НаукаNew York: Springer-Verlag, 1975.- Т.3.- 495 p.
17. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида.– М. Мир, 1967.- 624 с.

REFERENCES

1. Nelson, E. 1966, "Derivation of the Schr ö dinger equation from Newtonian mechanics", *Phys. Reviews*, vol. 150, no. 4, pp. 1079–1085.
2. Nelson, E. 1967, *Dynamical theory of Brownian motion*, Princeton University Press, Princeton.
3. Nelson, E. 1985, *Quantum fluctuations*, Princeton University Press, Princeton.
4. Myshkis, A.D. 1954, "Generalization of the theorem on the stationary point of the dynamical system inside a closed trajectory", *Mat.sbornik* vol. 34, no. 3, pp. 525–540.
5. Borisovich, Yu.G. 1970, "On lefschetz number for a certain class of set-valued maps" Yu.G. Borisovich, Yu.E. Gliklikh, Trokhimchuk Yu.Yu. (ed.) 7-th Summer Mathematical School, Kiev, pp. 283-294. (Russian)
6. Gliklikh, Yu.E. 1972, "Fixed points of set-valued mappings with nonconvex values and the rotation of set-valued vector fields" / Yu.E. Gliklikh, Borisovich Yu.G. (ed.) Sbornik Trudov Aspirantov Matematicheskogo Fakul'teta, Voronezh University, Voronezh, pp. 30-38 (Russian)

7. Kryszewski, W. 1997, *Homotopy properties of set-valued mappings*, Torun University, Torun, 243 p.

8. Aubin, J.-P. & Cellina, A. 1984, *Differential Inclusions. Set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin et al, 342 p.

9. Borisovich, Yu.G., Gel'man, B.D., Myshkis,A.D. & Obukhovskiĭ V.V. 2005, *Introduction to the theory of set-valued mappings and differential inclusions*, KomKniga, Moscow, 216 p. (in Russian)

10. Kamenskiĭ, M., Obukhovskiĭ, V. & Zecca, P. 2001, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 231 p.

11. Parthasarathy, K.R. 1978, *Introduction to Probability and Measure*, Springer-Verlag, New York, 344 p.

12. Gliklikh, Yu.E. 2011, *Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics*, Springer-Verlag, London, 460 p.

13. Azarina,S.V., Gliklikh, Yu.E. & Obukhovskii A.V. 2007, "Solvability of Langevin differential inclusions with set-valued diffusion terms on Riemannian manifolds", *Applicable Analysis*, vol. 86, no. 9, pp. 1105-1116.

14. Azarina, S.V. & Gliklikh, Yu.E 2009, "Stochastic differential equations and inclusions with mean derivatives relative to the past", *International Journal of Difference Equations*, vol. 4, no. 1, pp. 27-41.

15. Azarina, S.V. & Gliklikh Yu.E. 2007, "Differential inclusions with mean derivatives", *Dynamic Systems and Applications*, vol.16, no. 1, pp. 49-71.

16. Gihman,I.I. & Skorohod A.V., 1979, "Theory of stochastic Processes", Springer-Verlag, New York, vol. 3, 495 p.

17. Yosida, Y. 1965, *Functional Analysis* Springer - Verlag, Berlin et. al.

Получено 14.01.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 512.66+512.81+515.143 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-94-108

Степени отображений между гомотопическими пространственными формами[1]

Д. Гонсалвес, П. Вонг, Ч. Сюэчжи

Гонсалвес Дациберг — доктор наук, профессор, департамент математики, Институт математики и статистики, Университет Сан-Паулу (г. Сан-Паулу, Бразилия).
e-mail: dlgoncal@ime.usp.br
Вонг Питер — доктор наук, профессор, департамент математики, Бэйтс-колледж (г. Льюистон, США).
pwong@bates.edu
Сюэчжи Чжао — доктор наук, профессор, математический факультет, Столичный педагогический университет (Пекин, Китай).
zhaoxve@mail.cnu.edu.cn

Аннотация

Пусть $\mathcal{G}$ — семейство периодических групп периода 2 или 4, а $\bar{\Sigma}^m$ — гомотопическая m-пространственная форма где $\pi_1(\bar{\Sigma}^m) \in \mathcal{G}$. Для $m = 3$ мы изучаем множество степеней отображения $D(\bar{\Sigma}^m_1, \bar{\Sigma}^m_2)$ из $\bar{\Sigma}^m_1$ в $\bar{\Sigma}^m_2$.

Ключевые слова: Гомотопические сферические пространственные формы, степень отображения

Библиография: 29 названия.

Для цитирования:
Д. Гонсалвес, П. Вонг, Ч. Сюэчжи. Степени отображений между гомотопическими пространственными формами // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 94–108.

[1]Эта работа была начата во время первого и второго визита авторов в столичный педагогический университет с 18 апреля по 2 мая 2018 года. Первого автора частично поддержал FAPESP Projeto Temático “Topologia Algébrica, Geométrica e Diferencial” 2016/24707-4 (Бразилия). Третий автор был частично поддержан NSF of China (11431009, 11961131004).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 512.66+512.81+515.143 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-94-108

Mapping degrees between homotopy space forms[2]

D. Gonçalves, P. Wong, X. Zhao

Gonçalves Daciberg — Doctor of Sciences, Professor, Dept. de Matemática - IME - USP, São Paulo (São Paulo, Brazil).
e-mail: dlgoncal@ime.usp.br
Wong Peter — Doctor of Sciences, Professor, Department of Mathematics, Bates College, (Lewiston, U.S.A).
pwong@bates.edu
Zhao Xuezhi — Doctor of Sciences, Professor, Department of mathematics, Capital Normal University (Beijing, China).
zhaoxve@mail.cnu.edu.cn

Abstract

Let $\mathcal{G}$ be the family of periodic groups of period either 2 or 4, and $\bar{\Sigma}^m$ be a homotopy m-space form where $\pi_1(\bar{\Sigma}^m) \in \mathcal{G}$. For $m = 3$, we study the set $D(\bar{\Sigma}_1^m, \bar{\Sigma}_2^m)$ of degrees of the maps from $\bar{\Sigma}_1^m$ to $\bar{\Sigma}_2^m$.

Keywords: Homotopy spherical space forms, mapping degrees

Bibliography: 29 titles.

For citation:
D. Gonçalves, P. Wong, X. Zhao, 2020, "Mapping degrees between homotopy space forms", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 94–108.

1. Introduction

Let M and N be two closed connected n-manifolds. The study of mapping degrees of maps from M to N is a classical problem in the classification of manifolds. When M and N are 3-manifolds with spherical geometry, the set $D(M, N)$ of mapping degrees from M to N has been determined in [20]. It is natural to study the same problem when the spaces involved are orbit spaces of homotopy spheres, i.e., homotopy spherical space forms.

A space Σ^m is called a *homotopy m-sphere*, if Σ^m is a CW-complex which has the same homotopy type of the sphere S^m. If G is a finite group which acts freely on Σ^m then the quotient Σ^m/G of Σ^m by the free action of the finite group G is called a *homotopy m-spherical space form*, or alternatively *a homotopy m-space form*, and it will be denoted by $\bar{\Sigma}^m$.

We recall the classification of the homotopy types of the homotopy m-space forms as well as the set of self-homotopy equivalences of each homotopy space form. In what follows, we will not distinguish the homotopy type of the space form $\bar{\Sigma}^m = \Sigma^m/G$ whether the homotopy sphere Σ^m is a finite CW-complex, an infinite CW-complex, or the sphere itself.

The following is well known:

[2]This work was initiated during the first and second authors' visit to Capital Normal University April 18 to May 2, 2018. The first author was supported in part by FAPESP Projeto Temático "Topologia Algébrica, Geométrica e Diferencial" 2016/24707-4 (Brazil). The third author was supported in part by the NSF of China (11431009, 11961131004).

Proposition 1. *Let G be a finite group acting freely on a homotopy m-sphere Σ^m.*

1. *If m is even and G is non-trivial then G is isomorphic to $\mathbb{Z}_2$. Furthermore $H^m(\Sigma^m, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ and $H^m(\Sigma^m/G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.*

2. *If m is odd then G is a finite periodic group. Furthermore $H^m(\Sigma^m/G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

Given two homotopy m-space forms $\bar{\Sigma}_1^m$, $\bar{\Sigma}_2^m$, which are the orbit spaces of Σ_1^m, Σ_2^m, respectively, we have the notion of degree of a map, as a result of the Proposition 1. More precisely, if the cohomology of the domain is $\mathbb{Z}$ then the degree is an integer otherwise it is an element of $\mathbb{Z}_2$. Therefore for m odd it is always an element of $\mathbb{Z}$ and for m even it is an element of $\mathbb{Z}_2$, except in the case where the domain is a homotopy sphere, in which case it is again an element of $\mathbb{Z}$.

For a given finite periodic group G of period an even positive integer n and an odd positive integer m such that n divides $m + 1$, the classification of the homotopy types of the homotopy m-space forms is described in [27, Theorem 1.8], which in turn refers to the earlier references [5] and [23]. More precisely, the set of homotopy classes of homotopy m-space forms is in one-to-one correspondence with the equivalence classes of the invertible elements of the cyclic group $\mathbb{Z}_{|G|}$, where two invertible elements k_1, k_2 are related if and only if there is an automorphism $\phi : G \to G$ such that the induced automorphism $\phi^{\#m} : H^m(G, \mathbb{Z}) \to H^m(G, \mathbb{Z})$ satisfies either $\phi^{\#m}(k_1) = k_2$ or $\phi^{\#m}(k_1) = -k_2$. This correspondence was later established using two-stage Postnikov tower, see [6], which is the approach we use in this work.

The classification of finite groups which act freely in a homotopy sphere was obtained by Suzuki-Zassenhaus. (Table I in Section 3)

1.1. Even dimensional homotopy space forms

In the case of an even dimensional space form $\bar{\Sigma}^{2m}$ we have only two possibilities, namely, either $\bar{\Sigma}^{2m}$ has the homotopy type of the $2m$-sphere or it is the quotient of an even dimensional homotopy sphere by a free action of the group $\mathbb{Z}_2$. In the former case we have $H^{2m}(\bar{\Sigma}^{2m}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ and in the latter case $H^{2m}(\bar{\Sigma}^{2m}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$. Now we can easily describe the possible degrees for even dimensional homotopy space forms.

(I) If $\bar{\Sigma}_1^{2m}$, $\bar{\Sigma}_2^{2m}$ are homotopy spheres then this reduces to the classical case.

(II) If $\bar{\Sigma}_1^{2m}$ is a homotopy space form for $G = \mathbb{Z}_2$ and $\bar{\Sigma}_2^{2m}$ is a homotopy sphere then $Hom(\mathbb{Z}_2, \{1\})$ contains only the trivial homomorphism. So in this case the degree will lie in $H^{2m}(\bar{\Sigma}_1^{2m}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ and using Hopf's theorem about the correspondence between this latter group and $[\bar{\Sigma}_1^{2m}, S^{2m}]$, both elements of $\mathbb{Z}_2$ can be realized as the degree of maps.

(III) If $\bar{\Sigma}_1^{2m}$ is a homotopy sphere and $\bar{\Sigma}_2^{2m}$ is a homotopy space form for $G = \mathbb{Z}_2$, then $Hom(\{1\}, \mathbb{Z}_2)$ contains only the trivial homomorphism. So in this case the degree will lie in $H^{2m}(\bar{\Sigma}_1^{2m}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ and the ones which are realizable are all the even integers. It is because $H^{2m}(\bar{\Sigma}_2^{2m}, \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$, where $\tilde{\mathbb{Z}}$ is the orientation local coefficient system, $H^{2m}(\bar{\Sigma}_1^{2m}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ and any map $f : \bar{\Sigma}_1^{2m} \to \bar{\Sigma}_2^{2m}$ factors through Σ_2, the universal covering of $\bar{\Sigma}_2^{2m}$. Then we use the formula (1) given in the next section.

(IV) If $\bar{\Sigma}_1^{2m}$ and $\bar{\Sigma}_2^{2m}$ are homotopy space forms for $G = \mathbb{Z}_2$ then $Hom(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ contains two homomorphisms, the identity and the trivial homomorphism. In case of the identity, the degree is an integer and the one's which are realizable are congruent to 1 (mod 2) since a homotopy equivalence realizes this degree 1. In case the homomorphism is the trivial homomorphism, the degree lies in $\mathbb{Z}_2$ and it is $\bar{0}$ which can be realized by the constant map.

2. The sets $D(\bar{\Sigma}_1^m, \bar{\Sigma}_2^m)$ and $[\bar{\Sigma}_1^m, \bar{\Sigma}_2^m]$

Let $\bar{\Sigma}_1^m$, $\bar{\Sigma}_2^m$ be two homotopy m-spherical space forms. From now on we will consider only those values of m that are odd. The works of P. Olum [22], [23] can be used to describe the possible degrees that can be realized by maps and to describe the set of homotopy classes of maps between two such space forms. We will first discuss the degree.

It follows from [22] and [23] that we have the following:

Proposition 2. *Let $\bar{\Sigma}_1^m$ and $\bar{\Sigma}_2^m$ be two homotopy m-space forms with $G_1 = \pi_1(\bar{\Sigma}_1^m)$ and $G_2 = \pi_1(\bar{\Sigma}_2^m)$. Then*

1. *Given any homomorphism $\varphi : G_1 \to G_2$, there is a map $f : \bar{\Sigma}_1^m \to \bar{\Sigma}_2^m$ such that $f_\# = \varphi$.*
2. *If two maps $f, g : \bar{\Sigma}_1^m \to \bar{\Sigma}_2^m$ induce the same homomorphism $\varphi : G_1 \to G_2$, then their degree are congruent module $|G_2|$.*
3. *If $f : \bar{\Sigma}_1^m \to \bar{\Sigma}_2^m$ is a map, then there is a map of degree d for any integer d with $d \equiv \deg(f) \mod |G_2|$.*
4. *Two maps from $\bar{\Sigma}_1^m$ to $\bar{\Sigma}_2^m$ are homotopic if and only if $f_{1\#} = f_{2\#}$ and they have the same degree.*

The above results show that in order to find all possible degrees between the two space forms it suffices to find for a given homomorphism $\varphi : G_1 \to G_2$, the degree of one map which induces φ on the fundamental group. We write $\overline{\deg}(\varphi) \in \mathbb{Z}_{|G_2|}$. The goal of this section is to provide a method to compute such degree for a given homomorphism φ.

Let G be a finite group which acts freely on a homotopy m-sphere Σ^m. Then the orbit space $\bar{\Sigma}^m = \Sigma^m/G$ can be assigned an invertible element $k \in \mathbb{Z}_{|G|} = H^{m+1}(G, \mathbb{Z})$, which is the Postnikov invariant determining the fibration

$$K(\mathbb{Z}, m) \to E \to K(G, 1) \xrightarrow{k} K(\mathbb{Z}, m+1).$$

Lemma 1. (**Fundamental Lemma**) *Let $\bar{\Sigma}_1^m$ and $\bar{\Sigma}_2^m$ be two homotopy m-space forms with $G_1 = \pi_1(\bar{\Sigma}_1^m)$ and $G_2 = \pi_1(\bar{\Sigma}_2^m)$. If $\varphi : G_1 \to G_2$ is a homomorphism, then the degree $\overline{\deg}(\varphi)$ is determined by*

$$d|G_2| = |G_1|\overline{\deg}(\varphi) \in \mathbb{Z}, \quad dk_1 = \varphi^*(k_2) \in \mathbb{Z}_{|G_1|} = H^{m+1}(G_1, \mathbb{Z}), \tag{1}$$

where k_1, k_2 are respectively the Postnikov invariants determining $\bar{\Sigma}_1^m$ and $\bar{\Sigma}_2^m$.

Proof. For $i = 1, 2$, from the theory of Postnikov tower, the space E_i is a total space of a fibration $K(\mathbb{Z}, m) \hookrightarrow E_i \to K(G_i, 1)$ having as fibre $K(\mathbb{Z}, m)$ and the base $K(G_i, 1)$. Such a fibration is classified by $k_i \in H^{m+1}(G_i, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|G_i|} = [K(G_i, 1), K(\mathbb{Z}, m+1)]$. Let $f : \bar{\Sigma}_1^m \to \bar{\Sigma}_2^m$ be a map such that the induced homomorphism by f on the fundamental group of the spaces is φ. We have following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
K(\mathbb{Z}, m) \arrow[r, "\Omega(f')"] \arrow[d, "i_1"] & K(\mathbb{Z}, m) \arrow[d, "i_2"] \\
E_1 \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "p_1"] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\
K(G_1, 1) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "k_1"] & K(G_2, 1) \arrow[d, "k_2"] \\
K(\mathbb{Z}, m+1) \arrow[r, "f'"] & K(\mathbb{Z}, m+1).
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Consider the induced commutative diagram in H^{m+1}, we have

$$\begin{tikzcd} H^{m+1}(K(G_1,1)) & H^{m+1}(K(G_2,1)) \arrow[l, "\varphi"'] \\ H^{m+1}(K(\mathbb{Z},m+1)) \arrow[u, "k_1^*"] & H^{m+1}(K(\mathbb{Z},m+1)). \arrow[l, "f'^*"'] \arrow[u, "k_2^*"'] \end{tikzcd}$$

Since $H^{m+1}(K(\mathbb{Z},m+1)) = \mathbb{Z}$, we may write f'^* as multiplication by d. It follows that $\Omega(f')^* : H^m(K(\mathbb{Z},m)) \to H^m(K(\mathbb{Z},m))$ is also multiplication by d. Note that Σ_i^m has the homotopy type of S^m. By the construction of Postnikov tower, the space E_i can be obtained from $\bar{\Sigma}_i^m$ by attaching some cells with dimension at least $m+2$. Thus, $H^m(E_i) = H^m(\bar{\Sigma}_i^m)$. Consider the cohomology spectral sequence of the fibration $K(\mathbb{Z},m) \hookrightarrow E_i \to K(G_i,1)$. Then

$$H^m(E_i) = \oplus_{p+q=m} E_\infty^{p,q} = \oplus_{p+q=m} E_{m+2}^{p,q} = \ker d_{m+1} \oplus \operatorname{coker} d_{m+1}.$$

Observe that $d_{m+1} : H^m(K(\mathbb{Z},m)) \to H^{m+1}(K(G_i,1)) = \mathbb{Z}_{|G_i|}$. Since $H^m(E_i) = \mathbb{Z}$, the differential d_{m+1} must be surjective and therefore its kernel is $\mathbb{Z}$. It follows that the inclusion $\iota_i : K(\mathbb{Z},m) \to E_i$ induces a homomorphism ι_i^*, which is actually multiplication by $|G_i|$. Using the induced homomorphism on H^m of (2), we obtain that $d|G_2| = |G_1|\deg(f) \in \mathbb{Z}$. (Note all cohomologies involved here are integral.) $\square$

Corollary 1. *Let G be a finite group which acts freely on a homotopy m-sphere Σ^m. If $\varphi : G \to G$ is an endomorphism, then the degree $\overline{\deg}(\varphi) = \deg(\varphi^* : H^{m+1}(G,\mathbb{Z}) \to H^{m+1}(G,\mathbb{Z}))$.*

Corollary 2. *Let G be a finite group which acts freely on a homotopy m-sphere Σ_1^m, Σ_2^m. Then $\overline{\deg}(id) = k_1^{-1}k_2$, where k_1, k_2 are respectively the Postnikov invariants of Σ_1^m/G and Σ_2^m/G.*

These corollaries tell us that the degree $\overline{\deg}(\varphi)$ coming from self-map is independent of the choice of space form Σ^m. The degrees of maps from Σ_1^m/G to Σ_2^m/G coincide with the degrees for self-maps by multiplying an invertible element $k_1^{-1}k_2$. Thus, we have obtained all degrees for $\varphi : G_1 \to G_2$ as long as both G_1 and G_2 are the fundamental groups of 3-dimensional spherical manifolds, by using [20].

3. Groups of period either 2 or 4

Let $\mathcal{G}$ be the family of all finite periodic groups of period 2 or 4. In this section we summarize the description of the groups $G \in \mathcal{G}$.

Recall from [1, p. 154] we have the table below which provides the Suzuki-Zassenhaus classification of all finite periodic groups.

Family	Definition	Conditions
(I)	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b$	$(a,b)=1$
(II)	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\beta (\mathbb{Z}_b \times \mathcal{Q}_{2^i})$	$(a,b)=(ab,2)=1$
(III)	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\gamma (\mathbb{Z}_b \times T_i)$	$(a,b)=(ab,6)=1$
(IV)	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\tau (\mathbb{Z}_b \times O_i^*)$	$(a,b)=(ab,6)=1$
(V)	$(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) \times SL_2(\mathbb{F}_p)$	$(a,b)=(a,p(p^2-1))=1$
(VI)	$\mathbb{Z}_a \rtimes_\mu (\mathbb{Z}_b \times TL_2(\mathbb{F}_p))$	$(a,b)=(ab,p(p^2-1))=1 \quad p\neq 2$

Table I

For the definition of a periodic group, a period and the period of G, see [1, Chapter IV, section 6 Definition 6.1]. The only finite group which has least period 1 is the trivial group. We will consider only non-trivial groups. The following result is well known.

Lemma 2. *The only finite groups which have least period 2 are the non-trivial finite cyclic groups. These groups appear in the family* (I) *of Table I.*

A proof of Lemma 2 can be obtained by describing the least period of the elements of the table above.

Let us recall the following result about period of a semi-direct product of two finite periodic groups.

Proposition 3. *([8, Proposition 2.1]) Let $\mathbb{Z}_a$ be a cyclic group, G a finite group, $\alpha : G \to (\mathbb{Z}_a)^*$ an action and $(|G|, a) = 1$, where $|G|$ denotes the order of G. If G is periodic with period (the least period) $2d$ then the semi-direct product $\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha G$ is also a periodic finite group with period (the least period) $2[\ell(\alpha), d] = 2 \cdot \mathrm{l.c.m.}(\ell(\alpha), d)$. Here, $\ell(\alpha) = \mathrm{l.c.m.}\{|\alpha(g)| \mid g \in G\}$.*

Now we consider the groups which have period 4. First let us consider the groups G in Table II below:

group	condition	presentation	normal form	
$\mathbb{Z}_n$		$\{c \mid c^n = 1\}$	c^s,	$0 \leqslant s < n$
D^*_{4n}	$2\|n$	$\{b, a \mid a^2 = b^n = (ab)^2, a^4 = 1\}$	b^s, $b^s a$,	$0 \leqslant s < 2n$
O^*_{48}		$\{b, a \mid a^2 = b^3 = (ab)^4, a^4 = 1\}$		
I^*_{120}		$\{b, a \mid a^2 = b^3 = (ab)^5, a^4 = 1\}$		
$T'_{8\cdot 3^q}$		$\{b, a, w \mid a^2 = b^2 = (ab)^2, a^4 = w^{3^q} = 1,$ $wa = bw, wb = abw\}$	$b^s w^t$, $b^s a w^t$,	$0 \leqslant s < 4,\ 0 \leqslant t < 3^q$
$D'_{n\cdot 2^q}$	$2 \not\| n, q \geq 1$	$\{u, w \mid u^n = w^{2^q} = 1, uwu = w\}$	$u^s w^t$	$0 \leqslant s < n,\ 0 \leqslant t < 2^q$

Table II

Remark 1. *The only groups in Table II which are not the fundamental groups of any closed* 3*-manifold are the Dihedral groups $D'_{2(2n+1)}$.*

Consider all groups of the form $(\mathbb{Z}/m \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/n) \times G$ and $\mathbb{Z}_m \rtimes_\alpha G$ where G belongs to Table II. Each pair (m, n), $(m, |G|)$ and $(n, |G|)$ consists of relatively prime integers, and the image of $\alpha : G \to Aut(\mathbb{Z}_m)$ is either the trivial subgroup or the subgroup $\{\pm Id\}$. This follows by analyzing the Suzuki-Zassenhaus classification, Table II, and Proposition 3. Observe that the families (I) - (VI) given by Table I are not mutually disjoint. But whenever two such subfamilies have non-empty intersection, we have enough information about the intersection which helps to the study of our problem.

Lemma 3. *Let G belong to the family* (I)*. Then it has period* 4 *if and only if the order of α is two.*

Proof. This follows immediately from Proposition 3. □

Observe that the direct product of two finite cyclic groups of relatively prime orders is again a cyclic group. Now we consider the family (V). Recall from [1, Chapter IV, page 149] that $SL_2(F_p)$ is isomorphic to

1. the symmetric group on 3 letters for $p = 2$;
2. the semi-direct product of Q_8 by $\mathbb{Z}_3$ with the action $i \to j, j \to k, k \to i$ (which is the binary tetrahedral group) for $p = 3$;
3. the binary icosahedral group I^* of order 120 for $p = 5$. It has a presentation given by $\langle r, s | r^2 = s^3 = (rs)^5\rangle$, (see [1, page 151]).

Lemma 4. *Let G belong to the family* (V)*. For $G = SL_2(F_p)$, where p is a prime, the period of G is* 4 *if and only if p is either* 2, 3 *or* 5*. Furthermore, the group $(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) \times SL_2(\mathbb{F}_p)$ where $(a, b) = (a, p(p^2 - 1)) = 1$ has period* 4 *if and only if p is either* 2, 3 *or* 5 *and $\ell(\alpha) = 2$ if $a \neq 1$.*

Proof. The first part follows from the comment after [10, Theorem 1.2] which says that the period of these groups are the l.c.m. of 4 and $p-1$. Therefore we have only three values of p such that l.c.m. of 4 and $p-1$ is 4, which are $p = 2, 3, 5$. For the second part, since the period of $SL_2(F_p)$ cannot be 2, it is necessary to have period 4. The rest of the proof follows from Lemma 3 and Proposition 3. □

Remark 2. *As we can see the only new groups in this family* (V) *of period* 4 *with respect to the previous families, are I^* and the direct product of I^* with a group of period either* 2 *or* 4 *of the family* (I).

Now we consider the family (VI). In the Table I, the case $p = 2$ for this family is not considered. The reason is that if we perform the construction of $TSL_2(F_p)$ given in [1] we have an extension

$$1 \to SL_2(F_2) \to TSL_2(F_2) \to \mathbb{Z}_2 \to 1,$$

where $SL_2(F_2) \cong S_3$ and consequently $TSL_2(F_p)$ has order 12. There are 5 groups of order 12 where 3 of them are not abelian. They are: the dyclic D^*_{12} (which is already in the family (II)); the alternating group A_4; the dihedral group $D'_{12} \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$ (which is already in the family (I)). But A_4 does not contain S_3 as a normal subgroup.

Lemma 5. *Let G belong to the family* (VI). *The group $TSL_2(F_p)$ has period* 4 *if and only if p equals* 3. *Furthermore, the group $\mathbb{Z}_a \rtimes_\mu (\mathbb{Z}_b \times TL_2(\mathbb{F}_p))$ where $(a, b) = (ab, p(p^2 - 1)) = 1$, $p \neq 2$ has period* 4 *if and only if p is* 3 *and $\mu(\alpha) = 2$ if $a \neq 1$.*

Proof. The first part follows from [11, Corollary 2.3], since $p - 1$ cannot be greater than 3. For the second part, we use Proposition 3. □

Remark 3. *By [1, Chapter IV] the group $TSL_2(F_3)$ is isomorphic to O^*. Therefore the groups of period* 4 *which belong to the family* (VI) *already appear in a previous family.*

For the remaining 3 families, we have the following result.

Lemma 6. *If G belongs to one of the families family* (II), (III) *or* (IV), *then the group $\mathbb{Z}_a \rtimes_\theta (\mathbb{Z}_b \times G)$ has period* 4 *if and only if $\ell(\theta) = 2$ if $a \neq 1$.*

Proof. Again we use Proposition 3 and the fact that the groups $\mathcal{Q}_{2^i}$, T_i and O^*_i already have period 4 □

Remark 4. *We should point out that the groups of period* 4 *that appear in Lemma 6 cannot be the fundamental group of any spherical* 3*-manifold.*

4. Integral cohomology ring of the periodic groups of period 4

For $G = \mathbb{Z}_n$, the cyclic group of order n, we have that G has period 2 and its integral cohomology ring $H^*(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_2]/\langle nx_2 \rangle$ is the quotient of the polynomial ring over $\mathbb{Z}$ in one generator x_2 of dimension 2 module the ideal generated by nx_2 (see e.g. [2, p.114]). Note that H^0 is $\mathbb{Z}$ and not $\mathbb{Z}_n$.

Next, we describe the integral cohomology ring of periodic groups with least period 4. The additive group structure of $H^*(G, \mathbb{Z})$ is quite straightforward. Since G is a group of period 4 we have $H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^1(G, \mathbb{Z}) = H^3(G, \mathbb{Z}) = 0$, $H^2(G, \mathbb{Z}) = H_1(G, \mathbb{Z}) = G_{ab}$, and $H^4(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|G|}$. Because of the periodicity, it follows that $H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^{1+4k}(G, \mathbb{Z}) = H^{3+4k}(G, \mathbb{Z}) = 0$, $H^{2+4k}(G, \mathbb{Z}) = G_{ab}$, and $H^{4k}(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|G|}$. Furthermore, the cup product with a generator of $\mathbb{Z}_{|G|} \cong H^4(G, \mathbb{Z})$ defines an isomorphism $H^m(G, \mathbb{Z}) \to H^{m+4}(G, \mathbb{Z})$ if $m \neq 0$. Therefore to compute the cup product of any two elements, it suffices to compute the cup product of any two elements of H^2.

Remark 5. *Due to periodicity, the task of finding the mapping degree for spherical space forms of dimension $4n+3$, for groups of period 4, should follow easily from the case of space forms of dimension 3.*

(I) Let G be in the family (I) of the form $\mathbb{Z}_a \rtimes_\theta \mathbb{Z}_b$ where $\theta(\iota_b)$ has order 2 if $a \neq 1$. We will use [13, Proposition 3.1] and [8]. So we obtain

$H^0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^n(G,\mathbb{Z}) = 0$ for n odd, $H^{2+4k}(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_b$ $k \geq 0$, $H^{4k}(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{ab}$ $k > 0$. If ι_b, ι_{ab} are generators of $\mathbb{Z}_b$, $\mathbb{Z}_{ab}$, respectively, then we have: $b\iota_b = 0$ and $\iota_b^2 = a\iota_{ab}$. In this family we have included the Dihedral groups D'_{n2^q}, where n is odd.

(II) For the family (II), observe that the group is of the form $\mathcal{Q}_{2^i}$ or $\mathbb{Z}_a \rtimes_\beta \mathcal{Q}_{2^i}$. The integral cohomology of $\mathcal{Q}_{2^i}$ is given by $H^2(\mathcal{Q}_{2^i},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ and $H^4(\mathcal{Q}_{2^i},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{2^i}$. One should get the multiplicative structure from [1] or from [8], or from [29]. From [29, Theorem 3.7] we have:

Proposition 4. *The cohomology ring $H^*(Q_{4n};\mathbb{Z})$ has the following presentation:*

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{Z}[\gamma_2,\gamma_2',\alpha_4]/(2\gamma_2 = 2\gamma_2' = 4n\alpha_4, \gamma_2^2 = 0, \gamma_2\gamma_2' = \gamma_2'^2 = 2n\alpha_4), & \text{if } n = 4m\\
\mathbb{Z}[\gamma_2',\alpha_4]/(4\gamma_2' = 0 = 4n\alpha_4, \gamma_2'^2 = n\alpha_4) & \text{if } n = 4m+1\\
\mathbb{Z}[\gamma_2,\gamma_2',\alpha_4]/(2\gamma_2 = 2\gamma_2' = 4n\alpha_4, \gamma_2^2 = 0 = \gamma_2'^2, \gamma_2\gamma_2' = 2n\alpha_4) & \text{if } n = 4m+2\\
\mathbb{Z}[\gamma_2',\alpha_4]/(4\gamma_2' = 0 = 4n\alpha_4, \gamma_2'^2 = 3n\alpha_4), & \text{if } n = 4m+3
\end{array}$$

(III) The tetrahedral groups ([29, Theorem 4.4]). The ring structure of the group cohomology is given by

$$H^*(T_{24}^*,\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[\gamma_2,\alpha_4]/(\gamma_2^2 = 8\alpha_4, 3\gamma_2 = 0 = 24\alpha_4).$$

The general case $T'_{8.3^k}$. The ring structure is given by (but [29] only gives the additive structure):

$$H^*(T_{8.3^k}^*,\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[\gamma_2,\alpha_4]/(\gamma_2^2 = 8\alpha_4, 3^k\gamma_2 = 0 = 8\cdot 3^k\alpha_4).$$

(IV) The octahedral group [29, Thorem 4.10]. The ring structure of the group cohomology is given by

$$H^*(O_{48}^*,\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[\gamma_2,\alpha_4]/(\gamma_2^2 = 24\alpha_4, 2\gamma_2 = 0 = 48\alpha_4).$$

(V) The only case to be considered is I^*, see [29, Theorem 4.17]. In this case $H^m(I^*,\mathbb{Z})$ is $\mathbb{Z}$ for $m = 0$, $\mathbb{Z}_{120}$ for $m = 4k$ with $k \in N > 0$, and zero otherwise. So the cohomology ring is a polynomial algebra on a generator of dimension 4. On the other hand there is no group of the form $G \rtimes_\alpha I^*$ with α of order 2. This follows because there is no epimorphism $I^* \to \mathbb{Z}_2$ since besides the trivial group and the entire group the only normal subgroup of I^* is $\mathbb{Z}_2$, which is the center.

There is no need for the case **(VI)** since the groups already belong to the previous families.

4.1. The cohomology ring of G, the space forms of dimensions $2k+1$ and $4k+3$, and degree

Let $G \in \mathcal{G}$. If G has period 2 then it is cyclic and we have homotopy $2k+1$-space forms for all positive k. For the remaining groups in $\mathcal{G}$, which are the ones with period 4, we have homotopy $4n+3$-space forms. The description of the cohomology ring of the space forms $\bar{\Sigma}^{2n+1} = \Sigma^{2n+1}/G$, which for n even include the cases of period 4, are quite simple. The additive group structure is $H^i(\bar{\Sigma}^{2n+1},\mathbb{Z}) = H^i(G,\mathbb{Z})$ for $0 \leq i \leq 2n$, $H^{2n+1}(\bar{\Sigma}^{2n+1},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, and $H^i(\bar{\Sigma}^{2n+1},\mathbb{Z}) = 0$ for $i > 2n+1$. The ring structure follows promptly from the ring structure of the cohomology ring $H^*(G,\mathbb{Z})$ and dimensional reason. The ring structure of the cohomology ring $H^*(G,\mathbb{Z})$ was given in the previous section. Now comes the main useful result which relates the degree with the homomorphism induced in cohomology.

For $G \in \mathcal{G}$ we have:

Proposition 5. *Let q be the period of G. If the induced homomorphism on $H^q(G,\mathbb{Z})$ is multiplication by d, then the degree obtained among all maps from $\bar{\Sigma}_1(kd+d-1)$ to $\bar{\Sigma}_2(kd+d-1)$ are all the integers congruente to d^{k+1} mod the cardinality of G_2, as in Olum.*

Proof. This follows from the comparison of the cohomology of the group and that of the homotopy space form. $\square$

5. Classification of the maps between homotopy space forms Σ_1^3, Σ_2^3 for groups in $\mathcal{G}$

We first consider homotopy space forms where the associated fundamental groups belong to the Table II. Following [20], we will focus on surjective homomorphisms between two groups and at least one of the groups is of the form D'_{2n} for n odd, i.e. we consider surjective homomorphisms $\phi : G \to D'_{2m}$(Dihedral group) and $\phi : D'_{2m} \to G$. Such a homomorphism induces a homomorphism in cohomology at dimension 4, i.e. a homomorphism $\phi^* : \mathbb{Z}_{2m} \to \mathbb{Z}_{|G|}$ and a homomorphism $\phi^* : \mathbb{Z}_{|G|} \to \mathbb{Z}_{2m}$, respectively, which we must compute in order to determine the degrees. The case where ϕ is an isomorphism has been computed, see [8].

Now we will describe all surjective homomorphisms which are either in $Hom(G, D'_{2m})$ or in $Hom(D'_{2m}, G)$, and m is odd. If $G = D'_{2m}$ then a surjective homomorphisms is an isomorphism and this case is known (see [8]). Thus, we divide into three cases: a) $Hom(D_{2^q m_1}, D_{2m_2})$, for m_1, m_2 odd, $m_1 > m_2$ and $q \geq 1$; b) $Hom(D_{2m}, G)$ for G not dihedral; c) $Hom(G, D_{2m})$ for G not dihedral.

Lemma 7. *Let φ be a surjective homomorphism from G to D'_{2m} with G in Table* II *and m odd. Then $G = D^*_{4n}$ or $D'_{m'\cdot 2^q}$, and $\varphi = \eta'\psi\eta''$, where $\eta'' \in Aut(G)$ and $\eta' \in Aut(D'_{2m})$. Moreover,*

1. *if $G = D^*_{4n}$, then $m|n$ and ψ is given by $b \mapsto u$, $a \mapsto w$;*
2. *if $G = D'_{m'\cdot 2^q}$, then $m|m'$ and ψ is given by $u' \mapsto u$, $w' \mapsto w$.*

Proof. The results in [20, Sec. 4] about quotient groups in Table II tell us that there are two possibilities: either $G = D^*_{4n}$ with $m|n$ or $G = D'_{m'\cdot 2^q}$ with $m|m'$. In the first case, the corresponding normal subgroup of D^*_{4n} is $\langle b^m \rangle$. We have our ψ. The second case follows from [20, Theorem 4.12], where the argument still works in the situation $q = 1$. $\square$

Lemma 8. *Let φ be a surjective homomorphism from D'_{2m} to G with G in Table* II *and m odd. Then $G = \mathbb{Z}_2$ or $D'_{2m'}$, and $\varphi = \eta'\psi\eta''$, where $\eta'' \in Aut(D'_{2m})$ and $\eta' \in Aut(G)$. Moreover,*

1. *if $G = \mathbb{Z}_2 = \langle c \mid c^2 = 1\rangle$, then ψ is given by $u \mapsto 1$, $w \mapsto c$;*
2. *if $G = D'_{2m'}$, then $m'|m$ and ψ is given by $u \mapsto u'$, $w \mapsto w'$.*

Proof. By [20, Lemma 2.11], the quotient group of D'_{2m} is either $\mathbb{Z}_2$ or $D'_{2m'}$ with $m'|m$. If $G = \mathbb{Z}_2$, then the commutator $\langle u \rangle$ must be sent to 1. Hence, we obtain the first case. The second case is obtained by [20, Theorem 4.12]. The Theorems in [20, Sec. 4] show that there is no more. $\square$

Now we proceed to compute the induced homomorphisms on H^4 for all the homomorphisms described above. Using the functor EXT or the abelianization, one may determine the induced homomorphism on H^2 for a homomorphism between two groups. Using certain short exact sequences associated to the groups G_1, G_2, for a given homomorphism $\varphi : G_1 \to G_2$ such that the homomorphism induces a homomorphism of short exact sequence, we will consider the map induced between the spectral sequences associated to the correspondents short exact sequence. This approach will be used to determine the induced homomorphism on H^4.

First consider the following well known example. Let $\phi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ be a surjective homomorphism which send the generator ι_m to $k\iota_n$ where k is relatively prime with n (for example

$k=1$) and n divides m. Then the induced homomorphism $\phi^* : H^2(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n \to H^2(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_m$ send the generator ι_n to $(km/n)\iota_m$ (in particular if $k=1$ then ι_n is mapped to $(m/n)\iota_m$. Now the induced $\phi^* : H^4(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n \to H^4(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_m$ is the square, i.e. ι_n to $(km/n)^2\iota_m$. In order to compute the induced homomorphisms on H^4 for other homomorphisms between two groups we need the following two lemmas.

Let us consider abelian groups of the form $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ with m and n relatively prime. Call ι_m, ι_n generators of $\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n$, respectively. Let ι_{mn} denote one generator of the cyclic group $\mathbb{Z}_{mn}$. We identify the two groups by the isomorphism $\phi : \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{mn}$ defined by $\phi(\iota_m) = n\iota_{mn}$ and $\phi(\iota_n) = m\iota_{mn}$.

Lemma 9. *Consider the groups $\mathbb{Z}_{m_i} \oplus \mathbb{Z}_{n_i}$ with $(m_i, n_i) = 1$ for $i = 1, 2$. Call $\iota_{m_i}, \iota_{n_i}, \iota_{m_i n_i}$ generators of $\mathbb{Z}_{m_i}, \mathbb{Z}_{n_i}, \mathbb{Z}_{m_i n_i}$ respectively. Denote by $\phi_i : \mathbb{Z}_{m_i} \oplus \mathbb{Z}_{n_i} \to \mathbb{Z}_{m_i n_i}$ the isomorphism defined by $\phi_i(\iota_{m_i}) = n_i \iota_{m_i n_i}$ and $\phi_i(\iota_{n_i}) = m_i \iota_{m_i n_i}$, for $i = 1, 2$. Let $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \to \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \mathbb{Z}_{n_2}$ be a homomorphism where φ_i is multiplication by d_i for $i = 1, 2$. The homomorphism $\tilde{\varphi} = \phi \circ \varphi \circ \phi^{-1} : \mathbb{Z}_{m_1 n_1} \to \mathbb{Z}_{m_2 n_2}$ is multiplication by $d = (n_2 d_1 + m_2 d_2)(m_1 + n_1)^{-1}$.*

Proof. The element $m_1 \oplus n_1$ is invertible in $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_1}$. Since $\tilde{\varphi}((n_1+m_1)\iota_{m_1 n_1}) = (d_1 n_2 + d_2 m_2)\iota_{m_2 n_2}$ the result follows. □

Let $G = A \rtimes B$ where the orders of A and B are relatively prime, and p is a period of all three groups $A, B, A \rtimes B$.

Lemma 10. *Let $G_i = A_i \rtimes B_i$ where A_i, B_i have orders relatively prime, for $i = 1, 2$, and $\theta : G_1 \to G_2$ a homomorphism such that $\theta(A_1) \subset A_2$, and denote by $\bar{\theta}$ the induced homomorphism on the quotient $G_1/A_1 \to G_2/A_2$. If A_i, B_i and G_i have period p, for $i = 1, 2$ and the induced homomorphisms on cohomology $\theta|_{A_1}^{\#} : H^p(A_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|A_2|} \to H^p(A_1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|A_1|}$, and $\bar{\theta}^{\#} : H^p(B_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|B_2|} \to H^p(B_1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|B_1|}$, are multiplication by d_1, d_2, respectively, then the homomorphism induced on cohomology $\theta^{\#} : H^p(G_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|G_2|} \to H^p(G_1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|G_1|}$ is multiplication by $d = (d_1|B_1| + d_2|A_1|)(|A_2| + |B_2|)^{-1}$.*

Proof. Consider the homomorphism of short exact sequences:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\theta|_{A_1}"] & G_1 \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\theta}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & G_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd} \tag{3}$$

The Lyndon-Hochschild-Serre spectral sequence associated to these short exact sequences are very simple since the groups (subgroup and quotient of a given short exact sequence) have order relatively prime. Namely the E_2 page of the spectral sequence in cohomology have all terms $E_2^{p,q} = 0$ if $pq \neq 0$. The spectral sequence collapse and $E_\infty^{r,0} = H^r(B_i, \mathbb{Z})$, $E_\infty^{0,s} = H^0(B_i, H^s(A_i, \mathbb{Z}))$. For $r = s = p$ we have $E_\infty^{p,0} = H^p(B_i, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|B_i|}$ and $E_\infty^{0,p} = H^0(B_i, H^p(A_i, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}_{|A_i|}$ since p is the period and the action of the local coefficient system is trivial. So we have a short exact sequence

$$1 \to \mathbb{Z}_{|B_i|} \to \mathbb{Z}_{|G_i|} \to \mathbb{Z}_{|A_i|} \to 1,$$

as well a homomorphism of short exact sequence induced by the homomorphism θ. Then we apply Lemma 10. □

Now we make use of Lemmas 7, 8, 9 and 10 above to compute all the induced homomorphisms on H^4 of the above homomorphisms. The homomorphisms are divided in the following three cases.

Degree for Case I: Consider the homomorphism $\varphi \in Hom(D'_{2^q m_1}, D'_{2m_2})$ defined by $u_1 \to u_2$, $w_1 \to w_2$, where w_1 has order 2^q, w_2 has order 2, u_i has order m_i, $i = 1, 2$. Then we get a homomorphism of short exact sequences:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & {[D'_{2^q m_1}, D'_{2^q m_1}] = \mathbb{Z}_{m_1}} \arrow[r] \arrow[d] & D'_{2^q m_1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{Z}_{2^q} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & {[D'_{2m_2}, D'_{2m_2}] = \mathbb{Z}_{m_2}} \arrow[r] & D'_{2m_2} \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd} \tag{4}$$

Now we can apply Lemma 10 for the diagram above. Since the induced map on the quotient $\mathbb{Z}_{2^q} \to \mathbb{Z}_2$ is the homomorphism sending w_1 to w_2, the induced in dimension on H^2 is multiplication by 2^{q-1} and on H^4 is multiplication by 2^{2q-2}, which is degree 0 except when $q = 1$, which is degree 1. The degree of the homomorphisms on H^4 when restricted to the kernels of the examples above is multiplication by $(m_2/m_1)^2$. Therefore the induced homomorphism $H^4(D'_{2m_2}, \mathbb{Z}) \to H^4(D'_{2^q m_1}, \mathbb{Z})$ is multiplication by $2^{2q-2}(m_2/m_1)^2$. This complete the calculation.

Degree for Case II: Consider the unique surjective homomorphism $D'_{2n} \to \mathbb{Z}_2$ which is the Abelianization. The induced homomorphism $H^2(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \to H^2(D'_{2n}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ is the identity. Therefore the induced homomorphism on H^4 is the homomorphism which sends the generator $\iota_2^2 \in H^4(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$ to the square of the generator of $H^2(D'_{2n}, \mathbb{Z})$ which is $n\iota_4$, using the ring structure from section 4. This complete the calculation.

Degree for Case III: Consider the homomorphism $\phi : D^*_{4m} \to D'_{2n}$ defined by $a \mapsto w$, $b \mapsto u$. Then we decompose D^*_{4m} as $\mathbb{Z}_l \rtimes Q_{2^r}$ where l is odd, so $r \geq 3$. We also have the decomposition $D'_{m_2} = \mathbb{Z}_{m_2} \rtimes \mathbb{Z}_2$ and we have a homomorphism of short exact sequences:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathbb{Z}_l \arrow[r] \arrow[d] & D^*_{4m} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & Q_{2^q} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{Z}_{m_2} \arrow[r] & D'_{2m_2} \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd} \tag{5}$$

Using the same strategy as in Case I, we have a homomorphism induced on the spectral sequences of the corresponding short exact sequences. It remains to determine the induced homomorphism of the surjective homomorphism $Q_{2^r} \to \mathbb{Z}_2$ in cohomology. In dimension 2, this is an inclusion of $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Now we should identify the image of the generator $\iota_2 \in H^2(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$ in $H^2(Q_{2^r}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2[\bar{\gamma}_2] \oplus \mathbb{Z}_2[\bar{\gamma}'_2]$, where γ_2, γ'_2 are given by Proposition 4 and $\bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}'_2$ are the projection on the abelianization of $\bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}'_2$. From the proof of Proposition 4 follows that the image of ι_2 is γ'_2. So it suffices to take the square of this element using the ring structure and the result follows. Again from Propositon 4 we have two cases. The first case is for $m = 4l$. Then we will see that the degree will be multiplication by $2m$. The case for $m = 4l + 2$, the square of any element of H^2 is trivial. So follows that the degree is 0, and this complete the proof of the result.

6. Degree from space forms associated to two arbitrary groups of period 4

In this section we show how to compute the mapping degree between two space forms where the fundamental groups of the space forms are of the form $\mathbb{Z}_{m_1} \rtimes_{\alpha_1} G_1$ and $\mathbb{Z}_{m_2} \rtimes_{\alpha_2} G_2$, where G_i belong to the Table II, and α_i is either trivial or the image $\alpha_i(G_i)$ is isomorphic to $\mathbb{Z}_2$. We will assume that m_i is relatively prime to $|G_i|$.

Given a surjective homomorphism $\phi : \mathbb{Z}_{m_1} \rtimes_{\alpha_1} G_1 \to \mathbb{Z}_{m_2} \rtimes_{\alpha_2} G_2$ the calculation of the degree of this general case can be reduced to the case given by the Lemma 10 above.

Lemma 11. *Given a surjective homomorphism $\phi : \mathbb{Z}_{m_1} \rtimes_{\alpha_1} G_1 \to \mathbb{Z}_{m_2} \rtimes_{\alpha_2} G_2$, let $H_1 = \phi(\mathbb{Z}_{m_1})$ and $H_2 = \phi(G_1)$. Then we have:*

1. *H_1 is a normal subgroups of $\mathbb{Z}_{m_2} \rtimes_{\alpha_2} G_2$;*

2. *the subgroup* $\langle H_1, H_2\rangle = \mathbb{Z}_{m_2} \rtimes_{\alpha_2} G_2$*;*

3. $H_1 \cap H_2 = \{1\}$*;*

4. $\mathbb{Z}_{m_2} \rtimes_{\alpha_2} G_2 = H_1 \rtimes H_2$*, where* H_1 *is cyclic and* H_2 *belong to the Table* II*.*

Proof. Note that the image of a cyclic group is again cyclic. The image of a group G_1 is isomorphic to a quotient of G_1 by a normal subgroup which in turn is also periodic. By inspection we see that the image of G_1 is again in Table II. □

Now we can state the main result:

Theorem 1. *Given a surjective homomorphism* $\phi : \mathbb{Z}_{m_1} \rtimes_{\alpha_1} G_1 \to \mathbb{Z}_{m_2} \rtimes_{\alpha_2} G_2$*, the degree is the product of the degrees of* $\phi_1 = \phi|_{\mathbb{Z}_{m_1}}$ *with the degree of* $\phi_2 = \phi|_{G_1}$*.*

Proof. Follows from the Lemma 10 and Lemma 11. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Adem and J. Milgram, Cohomology of Finite Groups, *Springer-Verlag*, New York-Heidelberg-Berlin (1994).

2. K. Brown, Cohomology of Groups, *Springer-Verlag*, New York-Heidelberg-Berlin (1982).

3. J. Davis and J. Milgram, A survey of the Spherical Space Form Problem, *Mathematical Reports*, **2** Part 2 (1985), 223–284.

4. X. Du, On Self-mapping Degrees of S^3-geometry manifolds, *Acta Mathematica Sinica*, English Series, **25** (2009), 1243–1252.

5. S. Eilenberg and S. MacLane, Homology of spaces with operators, II *Trans. American Math. Soc.*, **65** (1949) , 49–99.

6. M. Golasinski and D. L. Gonçalves, Homotopy spherical space forms-a numerical bound for homotopy types, *Hiroshima Math. J.* **31** (2001), 107–116.

7. M. Golasinski and D. L. Gonçalves, Spherical space forms-Homotopy types and self-equivalences, in: The Skye Conference Proceedings, in: *Progr. Math.,* **215**, Birkhäuser, Basel, 2004, 153–165.

8. M. Golasinski and D. L. Gonçalves, Spherical space forms-Homotopy types and self-equivalences for the groups $Z/a \rtimes Z/b$ and $Z/a \rtimes (Z/b \times Q_{2^i})$, *Topology Appl.* **146-147** (2005), 451–470.

9. M. Golasiński, D.L. Gonçalves, Spherical space forms-Homotopy types and self-equivalences for the groups $Z/a \rtimes (Z/b \times T_i^*)$ and $Z/a \rtimes (Z/b \times O_n^*)$, *J. Homotopy Relat. Struct.* **1** (1) (2006), 29–45.

10. M. Golasiński, D.L. Gonçalves, Spherical space forms-Homotopy types and self-equivalences for the group $(Z/a \rtimes Z/b) \times SL2$, *Canad. Math. Bull.* **50** (2) (2007), 206–214.

11. M. Golasiński, D. L. Gonçalves, Spherical space forms-Homotopy self-equivalences and homotopy types, the case of the groups $Z/a \rtimes (Z/b \times TL_2(Fp))$ *Topology and its Applications* **56** (2009), 2726–2734

12. D. L. Gonçalves and J. Guaschi, The classification of the virtually cyclic subgroups of the sphere braid groups. *Springer Briefs in Mathematics.* Springer, Cham, 2013. x+102 pp.

13. D. L. Gonçalves; S. T. Martins and M. de Jesus Soares, The cohomology ring of certain families of periodic virtually cyclic groups, *Internat. J. Algebra Comput.* **27** no. 7 (2017), 793–818.

14. D. Gonçalves and P. Wong, Nielsen numbers of self maps of *Sol* 3-manifolds, *Top. Appl.* **159** (2012), 3729–3737.

15. D. Gonçalves and P. Wong, Homogeneous spaces in coincidence theory, 10th Brazilian Topology Meeting (São Carlos, 1996). *Mat. Contemp.* **13** (1997), 143–158.

16. D. Gonçalves and P. Wong, Homogeneous spaces in coincidence theory II, *Forum Math.* **17** (2005), 297–313.

17. D. Gonçalves, P. Wong and X. Zhao, Nielsen numbers of self maps of flat 3-manifolds, *Bulletin Belgian Math. Society* **21** (2014), 193–222.

18. D. Gonçalves, P. Wong and X. Zhao, Nielsen theory on 3-manifolds covered by $S^2 \times \mathbb{R}$, *Acta Math. Sinica* **31** (2015), 615–636.

19. D. Gonçalves, P. Wong and X. Zhao, Fixed point theory of spherical 3-manifolds, *Top. Appl.* **181** (2015), 134–49.

20. Д. Гонсалвес, П. Вонг, С. Чжао, Степени отображений между трехмерными сферическими многообразиями, *Матем. сб.*, **208** no. 10 (2017), 34–58.

21. R. Lee, C. B. Thomas, Free finite group actions on S^3, *Bull. Amer. Math. Soc.* **79** (1973), 211–215.

22. P. Olum, On mappings into spaces in which certain homotopy groups vanish, *Ann. Math.* **57** (1953), 561–574.

23. P. Olum, Mappings of manifolds and the notion of degree, *Ann. Math.* **58** (1953), 458–480.

24. R.G. Swan, A new method in fixed point theory, *Comment. Math. Helv.* **34** (1960), 1–16.

25. R.G. Swan, Periodic resolutions for finite groups, *Ann. of Math.* **72** (2) (1960), 267–291.

26. R. G. Swan, The p-period of a finite group, *Illinois J. Math.* **3** (1960), 341–346.

27. C. B. Thomas, The oriented homotopy type of compact 3-manifolds, *Proc. London Math. Soc.* (3) **19** (1969) 31–44.

28. C. B. Thomas, Homotopy classification of free actions by finite groups on S^3, *Proc. London Math. Soc.* (3) **40** (1980), no. 2, 284–297.

29. S. Tomoda and P. Zvengrowski, Remarks on the cohomology of finite groups of $3-$manifolds, *Geometry & Topology Monographs* **14** (2008), 519–556.

REFERENCES

1. Adem, A. & Milgram, J. 1994, *Cohomology of Finite Groups*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.

2. Brown,K. 1982, *Cohomology of Groups*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.

3. Davis, J. & Milgram, J. 1985, “A survey of the Spherical Space Form Problem”, *Mathematical Reports*, vol. 2, Part 2, pp. 223–284.

4. Du, X. 2009, “On Self-mapping Degrees of S^3-geometry manifolds”, *Acta Mathematica Sinica*, English Series, vol. 25, pp. 1243–1252.

5. Eilenberg, S. & MacLane, S. 1949, “Homology of spaces with operators, II”, *Trans. American Math. Soc.*, vol. 65, pp. 49–99.

6. Golasinski, M. & Gonçalves, D. L. 2001, “Homotopy spherical space forms-a numerical bound for homotopy types”, *Hiroshima Math. J.*, vol. 31, pp. 107–116.

7. Golasinski, M. & Gonçalves, D. L. 2004, “Spherical space forms-Homotopy types and self-equivalences”, in: The Skye Conference Proceedings, in: *Progr. Math.,* vol. 215, Birkhäuser, Basel, pp. 153–165.

8. Golasinski, M. & Gonçalves, D. L. 2005, “Spherical space forms-Homotopy types and self-equivalences for the groups $Z/a \rtimes Z/b$ and $Z/a \rtimes (Z/b \times Q_{2^i})$”, *Topology Appl.*, vol. 146-147, pp. 451–470.

9. Golasiński, M. & Gonçalves, D.L. 2006, “Spherical space forms-Homotopy types and self-equivalences for the groups $Z/a \rtimes (Z/b \times T_i^*)$ and $Z/a \rtimes (Z/b \times O_n^*)$”, *J. Homotopy Relat. Struct.*, vol. 1, no. 1, pp. 29–45.

10. Golasiński, M. & Gonçalves,D.L. 2007, “Spherical space forms-Homotopy types and self-equivalences for the group $(Z/a \rtimes Z/b) \times SL2$”, *Canad. Math. Bull.*, vol.50, no.2, pp. 206–214.

11. Golasiński, M. & Gonçalves, D. L. 2009, “Spherical space forms-Homotopy self-equivalences and homotopy types, the case of the groups $Z/a \rtimes (Z/b \times TL_2(Fp))$”, *Topology and its Applications*, vol. 56, pp. 2726–2734

12. Gonçalves, D. L. & Guaschi, J. 2013, *The classification of the virtually cyclic subgroups of the sphere braid groups*, Springer Briefs in Mathematics, Springer, Cham, x+102 pp.

13. Gonçalves, D. L., Martins, S. T. & Soares, M. de Jesus 2017, “The cohomology ring of certain families of periodic virtually cyclic groups”, *Internat. J. Algebra Comput.*, vol 27, no. 7, pp. 793–818.

14. Gonçalves, D. & Wong, P. 2012, “Nielsen numbers of self maps of *Sol* 3-manifolds”, *Top. Appl.*, vol. 159, pp. 3729–3737.

15. Gonçalves, D. & Wong, P. 1997, “Homogeneous spaces in coincidence theory”, 10th Brazilian Topology Meeting (São Carlos, 1996). *Mat. Contemp.*, vol. 13, pp. 143–158.

16. Gonçalves, D. & Wong, P. 2005, “Homogeneous spaces in coincidence theory II”, *Forum Math.*, vol. 17, pp. 297–313.

17. Gonçalves, D., Wong, P. & Zhao, X. 2014, “Nielsen numbers of self maps of flat 3-manifolds”, *Bulletin Belgian Math. Society*, vol. 21, pp. 193–222.

18. Gonçalves, D., Wong, P. & Zhao, X. 2015, “Nielsen theory on 3-manifolds covered by $S^2 \times \mathbb{R}$”, *Acta Math. Sinica*, vol. 31, pp. 615–636.

19. Gonçalves, D., Wong, P. & Zhao, X. 2015, “Fixed point theory of spherical 3-manifolds”, *Top. Appl.*, vol. 181, pp. 134–49.

20. Gonçalves, D., Wong, P. & Zhao, X. 2017, “Mapping degrees between spherical 3-manifolds”, *Sbornik Math.*, vol. 208, no. 10, pp. 1449–1472.

21. Lee, R. & Thomas, C. B. 1973, “Free finite group actions on S^3”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 79, pp. 211–215.

22. Olum,P. 1953, “On mappings into spaces in which certain homotopy groups vanish”, *Ann. Math.*, vol. 57, pp. 561–574.

23. Olum, P. 1953, “Mappings of manifolds and the notion of degree”, *Ann. Math.*, vol. 58, pp. 458–480.

24. Swan, R.G. 1960, “A new method in fixed point theory”, *Comment. Math. Helv.*, vol. 34, pp. 1–16.

25. Swan, R.G. 1960, “Periodic resolutions for finite groups”, *Ann. of Math.*, vol. 72, no.2, pp. 267–291.

26. Swan,R. G. 1960, “The p-period of a finite group”, *Illinois J. Math.*, vol. 3, pp. 341–346.

27. Thomas, C. B. 1969, “The oriented homotopy type of compact 3-manifolds”, *Proc. London Math. Soc.* (3) vol. 19, pp. 31–44.

28. Thomas, C. B. 1980, “Homotopy classification of free actions by finite groups on S^3”, *Proc. London Math. Soc.* (3), vol. 40, no. 2, pp. 284–297.

29. Tomoda, S. & Zvengrowski, P. 2008, “Remarks on the cohomology of finite groups of 3−manifolds”, *Geometry & Topology Monographs*, vol. 14, pp. 519–556.

Получено 11.01.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 524.83 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-109-138

О нелокальной модифицированной гравитации[1]

И. Димитриевич, Б. Драгович, З. Ракич, Е. Станкович

Димитриевич Иван — доктор наук, профессор, математический факультет Белградского университета (г. Белград, Сербия).
e-mail: ivand@matf.bg.ac.rs

Драгович Бранко — доктор наук, профессор, Институт физики Белградского университета; Математический институт САНУ (г. Белград, Сербия).
e-mail: dragovich@ipb.ac.rs

Ракич Зоран — доктор наук, профессор, математический факультет Белградского университета (г. Белград, Сербия).
e-mail: zrakic@matf.bg.ac.rs

Станкович Елена — доктор наук, профессор, педагогический факультет Белградского университета (г. Белград, Сербия).
e-mail: jelenagg@gmail.com

Аннотация

За последние сто лет многие существенные гравитационные явления были предсказаны и обнаружены Общей теорией относительности (GR), которая до сих пор остается лучшей теорией гравитации. Тем не менее, из-за великих наблюдательных открытий 20-го века некоторые (квантовые) теоретические и (астрофизические и космологические) феноменологические трудности современной гравитации были мотивацией для поиска более общей теории гравитации, чем ОТО. В результате были рассмотрены многие модификации ТО. Одним из многообещающих недавних исследований является нелокальная модифицированная гравитация. В этой статье мы представляем обзор некоторых нелокальных гравитационных моделей с их точными космологическими решениями, в которых нелокальность выражается аналитической функцией от оператора Даламбера — Бельтрами $\Box$. Некоторые из полученных решений содержат эффекты, которые обычно присваиваются темной материи и темной энергии.

Ключевые слова: Нелокальная измененная гравитация, точные космологические решения, темная материя, темная энергия, общая теория относительности и конечная производная гравитация.

Библиография: 63 названия.

Для цитирования:

И. Димитриевич, Б. Драгович, З. Ракич, Е. Станкович. О нелокальной модифицированной гравитации // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 109–138.

[1]Эта статья частично поддержана сербским Министерством образования и науки, проект № 174012.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 2.

UDC 524.83 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-109-138

On Nonlocal Modified Gravity

I. Dimitrijević, B. Dragovich, Z. Rakić, J. Stanković

Dimitrijević Ivan — Doctor of Sciences, Professor, Faculty of Mathematics, University of Belgrade (Belgrade, Serbia).
e-mail: ivand@matf.bg.ac.rs

Dragovich Branko — Doctor of Sciences, Professor, Institute of Physics, University of Belgrade; Mathematical Institute SANU (Belgrade, Serbia).
e-mail: dragovich@ipb.ac.rs

Rakić Zoran — Doctor of Sciences, Professor, Faculty of Mathematics, University of Belgrade (Belgrade, Serbia).
e-mail: zrakic@matf.bg.ac.rs

Stanković Jelena — Doctor of Sciences, Professor, Teacher Education Faculty, University of Belgrade (Belgrade, Serbia).
e-mail: jelenagg@gmail.com

Abstract

In the last hundred years many significant gravitational phenomena have been predicted and discovered by General Relativity (GR), which is still the best theory of gravity. Nevertheless, due to the great observational discoveries of 20th century some (quantum) theoretical and (astrophysical and cosmological) phenomenological difficulties of modern gravity have been motivation to search more general theory of gravity than GR. As a result, many modifications of GR have been considered. One of promising recent investigations is Nonlocal Modified Gravity. In this article we present a review of some nonlocal gravity models with their exact cosmological solutions, in which nonlocality is expressed by an analytic function of the d'Alembert–Beltrami operator $\Box$. Some of obtained solutions contain effects which are usually assigned to the dark matter and dark energy.

Keywords: Nonlocal modi
ed gravity, exact cosmological solutions, dark matter, dark energy, general relativity, in
nite derivative gravity.

Bibliography: 63 titles.

For citation:
I. Dimitrijević, B. Dragovich, Z. Rakić, J. Stanković, 2020, "On Nonlocal Modified Gravity", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 109–138.

1. Introduction

In 2015, General relativity (GR), known also as Einstein theory of gravity, celebrated its first hundred years is considered as one of the most profound and beautiful physical theories with great phenomenological achievements and nice theoretical properties. GR has important astrophysical implications predicting existence of black holes, gravitational redshift, gravitational lensing and gravitational waves[2], it has been tested and quite well confirmed in the Solar system, and it has been also used as a theoretical laboratory for gravitational investigations at other spacetime scales.

Despite of just mentioned phenomenological successes and many nice theoretical properties, GR is not complete theory of gravity. For example, attempts to quantize GR lead to the problem of nonrenormalizability. GR also contains singularities like the Big Bang and black holes. In cosmology, it predicts existence of about 95% of additional new kind of matter, which makes dark side of the universe. Namely, if GR is the gravity theory for the universe as a whole and if the universe is homogeneous and isotropic with the flat Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metric at the cosmic scale, then it contains about 68% of *dark energy*, 27% of *dark matter*, and only about 5% of *visible matter* [63], which are not verified in laboratory conditions and have not so far seen in particle physics. If a physical theory contains singularities then it has to be modified in that domain. Because of that, there are many attempts to modify General relativity. Motivations for its modification usually come from quantum gravity, string theory, astrophysics and cosmology (for a review, see [55, 58, 15, 16, 57]). We are mainly interested in cosmological reasons to modify GR, i.e. to find such extension of Einstein theory of gravity which will not contain the Big Bang singularity and offer another possible description of the universe acceleration and large velocities in galaxies instead of mysterious dark energy and dark matter. In the case that dark energy and dark matter really exist it is still interesting to know is there a modified gravity which can imitate the same or similar effects.

Any well founded modification of the Einstein theory of gravity should be a generalization of the general theory of relativity, and consequently it should be verified at least on the dynamics of the Solar system. On the mathematical level it should be formulated within the pseudo-Riemannian geometry in terms of covariant quantities and take into account equivalence of the inertial and gravitational mass. It means that the Ricci scalar R in gravity Lagrangian $\mathcal{L}_g$ of the Einstein-Hilbert action should be replaced by an appropriate function which may contain not only R but also some scalar covariant constructions (as norms of Ricci and curvature tensor, etc.) which are possible in the pseudo-Riemannian geometry. Since there are infinitely many possibilities for such functions (i.e. its modifications), and since so far there is no guiding theoretical principle which could make appropriate choice between all possibilities, our task is very complicated. In this context the Einstein-Hilbert action is the simplest one, i.e. it can be viewed as realization of the principle of simplicity in construction of $\mathcal{L}_g$.

Modifications of GR were started a few years after its birth adding cosmological constant in the Lagrangian of Hilbert-Einstein action, later by adding Gauss-Bonnet invariant, replacing R with $f(R)$ ($f(R)$ modified gravity, see [45]) and recently nonlocal modifications, which are promising modern approaches towards more complete theory of gravity. Motivation for nonlocal modification of general relativity can be found in string theory which is nonlocal theory and contains gravity. We present here a review of our results on nonlocal gravity. In particular, we pay special attention to models in which nonlocality is expressed by an analytic function of the d'Alembert operator $\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\partial_\nu$ like nonlocality in string theory.

In Section 2 we give some preliminaries on cosmology and mention a few different approaches to nonlocal modified gravity. Section 3 contains a general modified action with an analytic nonlocality and we derive the corresponding equations of motion for nonlocality of the form $\mathcal{H}(R)\,\mathcal{F}(\Box)\,\mathcal{G}(R)$. In Sect. 4. we presented several different models of nonlocality which are special cases of general model from previous Section. In all models we found some cosmological solutions for appropriate scaling factor. We emphasize here the case when the nonlocality is given by $\mathcal{H}(R) = \mathcal{G}(R) = \sqrt{R - 2\,\Lambda}$ with scaling factor of the form $a(t) = A t^{\frac{2}{3}}\, e^{\frac{\Lambda}{14}\, t^2}$ in the flat universe. This model gives some effects usually attributed to the dark matter and dark energy. Finally, Sect. 5. is devoted to the perturbations over de Sitter background. We obtained some cosmological solutions and investigated stability of them.

[2]which were experimentally discovered in 2016. [1].

At the end we showed that equations of motion of gravitational waves in our nonlocal modified gravity coincide with the corresponding equations in GR.

2. Preliminaries

2.1. Metric

General theory of relativity, i.e. Einstein theory of gravity (EG) assumes that the universe is four dimensional homogeneous and isotropic pseudo-Riemannian manifold M with metric $(g_{\mu\nu})$ of signature $(1,3)$. There exist three types of homogeneous and isotropic simple connected spaces of dimension 3:

- flat space $\mathbb{R}^3$ (of curvature equal 0),
- sphere $\mathbb{S}^3$ (of constant positive sectional curvature),
- hyperbolic space $\mathbb{H}^3$ (of constant negative sectional curvature).

The universe is homogeneous and isotropic (observation data) manifold, the generic metric in these spaces is of the form (Friedmann – Lemaître – Robertson – Walker metric, (FLRW)):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2\right), \qquad k \in \{-1,0,1\}, \tag{1}$$

where $a(t)$ is a *scaling factor* which describes the evolution (in time) of the universe and parameter k describes the curvature of the space. In the FLRW metric the Ricci scalar (scalar curvature) is

$$R = 6\left(\frac{\ddot a}{a} + \frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \tag{2}$$

and

$$\Box = -\partial_t^2 - 3H\partial_t. \tag{3}$$

where $H = \dot a/a$ is the Hubble parameter, which describes the expansion of the universe. We use natural system of units in which speed of light is $c = 1$.

2.2. Einstein-Hilbert action.

GR is based on Einstein-Hilbert action:

$$S = \int_M \Big(\frac{R-2\Lambda}{16\pi G} + \mathcal{L}_m\Big)\sqrt{-g}\; d^4x, \tag{4}$$

where R is scalar curvature of M, $g = \det(g_{\mu\nu})$ is determinant of metric tensor, Λ is cosmological constant and $\mathcal{L}_m$ is Lagrangian of matter.

By variation of the action S with respect to $g_{\mu\nu}$ we obtain Einstein equations of motion:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu} + \Lambda\,g_{\mu\nu} = 8\,\pi\,G\,T_{\mu\nu}, \tag{5}$$

where $T_{\mu\nu}$ is the energy momentum tensor, $g_{\mu\nu}$ is metric tensor, $R_{\mu\nu}$ is Ricci tensor and R is scalar curvature.

2.3. Friedman equations.

The energy momentum tensor for an ideal fluid (matter in cosmology) is given by

$$T = \mathsf{diag}(-\rho\, g_{00}, g_{11}p, g_{22}p, g_{33}p), \tag{6}$$

where ρ is energy density and p is pressure. Using the conservation law we get

$$0 = \nabla_\mu T^\mu_0 = -\dot{\rho} - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \tag{7}$$

Since in the cosmology holds $p = w\rho$, where w is usually a constant, we have that equation (7) has general solution $\rho = Ca^{-3(1+w)}$.

The basic types of matter in the universe are: cosmic dust - $w = 0\,(\rho_m = C\,a^{-3})$, and radiation - $w = 1/3$ $(\rho_r = C\,a^{-4})$. Nowadays, the ratio $\frac{\rho_m}{\rho_r} \approx 10^6$, in the early universe radiation was dominant. Introducing the cosmological constant $\Lambda\,(\neq 0)$ is equivalent to the (dark) energy of vacuum. From Einstein equation one can find energy-momentum tensor for vacuum,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}, \tag{8}$$

and see that $\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G}$. It is clear that energy density is a constant which does not depend on scaling factor a. Let us note that, if the universe is expanding for large values of cosmic time energy of vacuum will become dominant to the energy densities of matter and radiation.

Now, Einstein equation (5) implies *Friedmann equations*

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \qquad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \tag{9}$$

There are several of cosmological parameters which describe the state of the universe, the most important are: Hubble parameter H; the deceleration parameter

$$q = -\frac{\ddot{a}\,a}{\dot{a}^2}\,, \tag{10}$$

which measures the cosmic acceleration of the universe; the parameters of density

$$\Omega = \frac{8\,\pi\,G}{3\,H^2}\,\rho = \rho/\rho_c, \quad \text{where} \quad \rho_c = \frac{3\,H^2}{8\,\pi\,G} \quad \text{is a critical energy density,} \tag{11}$$

$\Omega_i = \rho_i/\rho_c$, and ρ_i are mass densities of matter, radiation and dark energy, and others.

From Friedmann equations (9) follows,

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2\,a^2}, \tag{12}$$

and the sign of constant k is determined by Ω, and it shows which of three FLRW metrics describes the universe. More precisely we have,

- $\Omega < 1, \quad \rho < \rho_c, \quad k = -1.$
- $\Omega = 1, \quad \rho = \rho_c, \quad k = 0.$
- $\Omega > 1, \quad \rho > \rho_c, \quad k = +1.$

Let us mention some cosmological parameters obtained from Planck 2018 [63] which describe the current state of the universe. The current Planck results for the ΛCDM universe are:

- $H_0 = (67.40 \pm 0.50)$ km/s/Mpc – Hubble parameter;
- $\Omega_m = 0.315 \pm 0.007$ – matter density parameter;
- $\Omega_\Lambda = 0.685$ – Λ density parameter;
- $t_0 = (13.801 \pm 0.024) \cdot 10^9$ yr – age of the universe;
- $w_0 = -1.03 \pm 0.03$ – ratio of pressure to energy density.

2.4. Nonlocal modified gravity.

As we mentioned in Section 1, GR has certain deficiencies, and should be modified. One of the most prominent approaches is nonlocal modification.

A nonlocal modified gravity model contains an infinite number of spacetime derivatives of the d'Alembert operator $\Box$, in the form of a power series expansion of it. In this article, we are mainly interested in nonlocality expressed in the form of an analytic function $\mathcal{F}(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$, where coefficients f_n should be determined from various theoretical and phenomenological conditions. Some conditions are related to the absence of tachyons and ghosts.

Here, it is worth to mention some other interesting approaches to the nonlocal gravity, as approaches containing $\Box^{-1}$ (see e.g., [19, 18, 61, 56, 41, 62, 38, 39, 42, 43, 5, 53] and references therein), nonlocal models with power of the inverse d'Alembert operator, i. e. with $\Box^{-n}$, which are proposed to explain the late time cosmic acceleration without dark energy. Such models have the form

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g}\,(R + L_{NL})\; d^4x, \tag{13}$$

where two typical examples are: $L_{NL} = R\, f(\Box^{-1} R)$ (see a review [55, 19] and references therein), and $L_{NL} = -\frac{1}{6} m^2 R \Box^{-2} R$ (see a review [31] and references therein).

Nonlocal models with $\mathcal{F}(\Box) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$ are mainly considered to improve general relativity in its ultraviolet region, unlike models with $\Box^{-1}$ and $\Box^{-2}$ which intend to modify gravity in its infrared sector. It may happen that there will be more than one modification of general relativity, which are valid at the different scales. Namely, any physical theory has a domain of validity, which depends on some conditions, including spatial scale and complexity of the system. It is natural that validity of general relativity is also restricted. At very short and very large cosmic distances may act different gravity theories.

Some other aspects of nonlocal gravity models have been considered, see e.g. [14, 11, 12, 54, 13, 31, 46] and references therein.

Our motivation to modify gravity in an analytic nonlocal way comes mainly from string theory, in particular from string field theory (see the very original effort in this direction in [2]) and p-adic string theory [3, 4, 10, 34, 35, 36, 60]. Since strings are one-dimensional extended objects, their field theory description contains spacetime nonlocality expressed by some exponential functions of d'Alembert operator $\Box$.

At classical level analytic non-local gravity has proven to alleviate the singularity of the Black-hole type because the Newtonian potential appears regular (tending to a constant) on a universal basis at the origin [37, 8, 6]. Also there was significant success in constructing classically stable solution for the cosmological bounce [8, 9, 44, 47, 50].

Analysis of perturbations revealed a natural ability of analytic non-local gravities to accommodate inflationary models. In particular, the Starobinsky inflation was studied in details and new predictions for the observable parameters were made [17, 49]. Moreover, in the quantum sector infinite derivative gravity theories improve renormalization, see e.g. while the unitarity is still preserved [51, 52, 49] (note that just a local quadratic curvature gravity was proven to be renormalizable while being non-unitary [59]). Later, we shall also investigate some conditions on the analytic function $\mathcal{F}(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$, in order to escape unphysical degrees of freedom like ghosts and tachyons, and to have good behavior in quantum sector (see [5, 6, 7, 37]).

3. The equations of motion

Models of nonlocal gravity which we mainly investigate are given by the following action

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_M \left(R - 2\Lambda + \mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + \mathcal{L}_m\right) \sqrt{-g}\ d^4x, \tag{14}$$

where M is a pseudo-Riemannian manifold of signature $(1,3)$ with metric $(g_{\mu\nu})$, $\mathcal{F}(\Box) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$, $\mathcal{H}$ and $\mathcal{G}$ are differentiable functions of the scalar curvature R and Λ is cosmological constant, and $\mathcal{L}_m$ is Lagrangian of matter.

Now, we will give an overview of deriving of the equations of motion (EOM) for the action without $\mathcal{L}_m$ (since this part in cosmology is known) and without proofs which could be find in [26, 29]. Firstly, we are starting with some technical lemmas which are proved by using standard variational calculus and Stokes theorem. Note that variations of the metric tensor elements and their first derivatives are zero on the boundary of manifold M, i.e. $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial M} = 0$, $\delta^n \partial_{x_\lambda} g_{\mu\nu}|_{\partial M} = 0, n \in \mathbb{N}$.

Lemma 1. *Let M be a pseudo-Riemannian manifold. Then the following basic relations hold:*

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \tag{15}$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}, \tag{16}$$

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(g_{\nu\alpha}\nabla_\mu \delta g^{\lambda\alpha} + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu \delta g^{\lambda\alpha} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\lambda \delta g^{\alpha\beta}\right), \tag{17}$$

where g is the determinant of the metric tensor.

Lemma 2. *The variation of Riemman tensor, Ricci tensor and scalar curvature satisfy the following relations*

$$\delta R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \nabla_\beta \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}, \tag{18}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}, \tag{19}$$

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - K_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{20}$$

$$\delta\nabla_\mu\nabla_\nu\psi = \nabla_\mu\nabla_\nu\delta\psi - \nabla_\lambda\psi\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}, \tag{21}$$

where $K_{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box$, and where ψ is a scalar function.

Lemma 3. *For every scalar function $\mathcal{H}(R)$ holds*

$$\int_M \mathcal{H} g_{\mu\nu}(\Box\delta g^{\mu\nu})\sqrt{-g}\ d^4x = \int_M g_{\mu\nu}(\Box\mathcal{H})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ d^4x, \tag{22}$$

$$\int_M \mathcal{H}\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ d^4x = \int_M \nabla_\mu\nabla_\nu\mathcal{H}\ \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ d^4x, \tag{23}$$

$$\int_M \mathcal{H} K_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ d^4x = \int_M K_{\mu\nu}\mathcal{H}\ \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ d^4x. \tag{24}$$

Lemma 4. *Let $\mathcal{H}(R)$ and $\mathcal{G}(R)$ be scalar functions such that $\delta\mathcal{G}|_{\partial M} = 0$. Then for all $n \in \mathbb{N}$ one has*

$$\int_M \mathcal{H}\delta\Box^n\mathcal{G}\sqrt{-g}\, d^4x = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\int_M S_{\mu\nu}(\Box^l\mathcal{H}, \Box^{n-1-l}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\, \sqrt{-g}\, d^4x + \int_M \Box^n\mathcal{H}\, \delta\mathcal{G}\sqrt{-g}\, d^4x, \tag{25}$$

where $S_{\mu\nu}(A,B) = g_{\mu\nu}\nabla^\alpha A\nabla_\alpha B + g_{\mu\nu}A\Box B - 2\nabla_\mu A\nabla_\nu B$.

Theorem 1. *Let $\mathcal{H}$ and $\mathcal{G}$ be scalar functions of scalar curvature, then*

$$\int_M \mathcal{H}\delta(\sqrt{-g})\, d^4x = -\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\mathcal{H}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x, \tag{26}$$

$$\int_M \mathcal{H}\delta R\sqrt{-g}\, d^4x = \int_M (R_{\mu\nu}\mathcal{H} - K_{\mu\nu}\mathcal{H})\, \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x, \tag{27}$$

$$\int_M \mathcal{H}\delta(\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G})\sqrt{-g}\, d^4x = \int_M (R_{\mu\nu} - K_{\mu\nu})\big(\mathcal{G}'\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}\big)\, \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1}\int_M S_{\mu\nu}(\Box^l\mathcal{H}, \Box^{n-1-l}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x, \tag{28}$$

where $S_{\mu\nu}(A,B) = g_{\mu\nu}\nabla^\alpha A\nabla_\alpha B + g_{\mu\nu}A\Box B - 2\nabla_\mu A\nabla_\nu B$.

Now, we can find the variation of the considered action (14). In order to calculate δS we introduce the following auxiliary actions

$$S_0 = \int_M (R - 2\Lambda)\, \sqrt{-g}\, d^4x, \tag{29}$$

$$S_1 = \int_M \mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\, \sqrt{-g}\, d^4x. \tag{30}$$

Action S_0 is Einstein-Hilbert action and its variation is

$$\delta S_0 = \int_M (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu})\, \delta g^{\mu\nu}\, \sqrt{-g}\, d^4x. \tag{31}$$

Lemma 5. *Variation of the action S_1 is*

$$\begin{aligned}\delta S_1 = &-\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\, \sqrt{-g}\, d^4x \\ &+ \int_M (R_{\mu\nu}W - K_{\mu\nu}W)\, \delta g^{\mu\nu}\, \sqrt{-g}\, d^4x \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sum_{l=0}^{n-1}\int_M S_{\mu\nu}(\Box^l\mathcal{H}(R), \Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R))\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x,\end{aligned} \tag{32}$$

where $W = \mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + \mathcal{G}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R)$.

Proof. Variation δS_1 is equal to

$$\begin{aligned}\delta S_1 = \int_M \Big(&\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\delta(\sqrt{-g}) + \delta\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\, \sqrt{-g} \\ &+ \mathcal{H}(R)\delta(\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R))\, \sqrt{-g}\Big) d^4x.\end{aligned} \tag{33}$$

All the terms in the previous formula are obtained by Theorem 1. In particular (26) yields

$$\int_M \mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\delta(\sqrt{-g})\, d^4x = -\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\, \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x. \tag{34}$$

Also, from equation (27) we get

$$\begin{aligned}\int_M \delta(\mathcal{H}(R))\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\, \sqrt{-g}\, d^4x &= \int_M \mathcal{H}'(R)\delta R\, \mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\, \sqrt{-g}\, d^4x \\ = \int_M \Big(R_{\mu\nu}\mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) &- K_{\mu\nu}\left(\mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\right)\Big)\, \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x.\end{aligned} \tag{35}$$

The last term is calculated by (28).

$$\begin{aligned}&\int_M \mathcal{H}(R)\delta(\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R))\, \sqrt{-g} d^4x \\ &\quad= \int_M \Big(R_{\mu\nu}\mathcal{G}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R) - K_{\mu\nu}\left(\mathcal{G}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R)\right)\Big)\, \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x \\ &\quad+ \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1}\int_M S_{\mu\nu}\left(\Box^l\mathcal{H}(R), \Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R)\right)\, \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x.\end{aligned} \tag{36}$$

Adding equations (34), (35) and (36) together proves the Lemma. □

Theorem 2. *Variation of the action* (14) *is equal to zero iff*

$$0 = \hat{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + (R_{\mu\nu}W - K_{\mu\nu}W) + \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}, \tag{37}$$

where

$$W = \mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + \mathcal{G}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R), \tag{38}$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} S_{\mu\nu}\left(\Box^l\mathcal{H}(R), \Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R)\right). \tag{39}$$

Proof. The proof of Theorem 2 is evident from the Lemma 5 and Theorem 1. □

Corollary 1. *Under the assumptions of previous theorem holds:*

(1) $\nabla^\mu\hat{G}_{\mu\nu} = 0$,

(2) Equations of motion (37) are invariant on the replacement of functions $\mathcal{G}$ *and* $\mathcal{H}$.

Since, in the case of FLRW metric only two of four (diagonal) non-trivial equations are linearly independent trace and 00 component, the equation (37) is equivalent to the following system:

$$\begin{aligned}&4\Lambda - R - 2\mathcal{H}(R)\,\mathcal{F}(\Box)\,\mathcal{G}(R) + R\,W + 3\,\Box\,W \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{\ell=0}^{n-1}\big(\partial_\mu\Box^\ell\mathcal{H}(R)\,\partial^\mu\Box^{n-1-\ell}\mathcal{G}(R) + 2\Box^\ell\mathcal{H}(R)\Box^{n-\ell}\mathcal{G}(R)\big) = 0,\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}&G_{00} + \Lambda g_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{H}(R)\,\mathcal{F}(\Box)\,\mathcal{G}(R) + R_{00}\,W - K_{00}\,W \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{\ell=0}^{n-1}\big(g_{00}\,g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\Box^\ell\mathcal{H}(R)\,\partial_\beta\Box^{n-1-\ell}\mathcal{G}(R) \\ &- 2\partial_0\Box^\ell\mathcal{H}(R)\partial_0\Box^{n-1-\ell}\mathcal{G}(R) + g_{00}\,\Box^\ell\mathcal{H}(R)\Box^{n-\ell}\mathcal{G}(R)\big) = 0.\end{aligned} \tag{41}$$

4. Cosmological solutions of EOM

The search for a general solution of the scale factor $a(t)$ of equations (40) and (41) is a very ambitious, and because of that we use the following ansatzs, see [22, 23, 24, 32, 27, 28, 45]:

- $\Box R = rR + s$, where r and s are constants.
- $\Box R = qR^2$, where q is a constant.
- $\Box R = qR^3$, where q is a constant.
- $\Box^n R = c_n R^{n+1},\ n \geq 1$, where c_n are constants.
- $\Box (R + R_0)^m = p\,(R + R_0)^m$, where $m \in \mathbb{Q}$ and R_0, p are constants.

In fact these ansatzs make some constraints on possible solutions, but on the other hand they simplify formalism to find a particular solution.

We consider several models of nonlocal gravity without matter which are described by the action (14),

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_M \Big(R - 2\Lambda + \mathcal{H}(R)\, \mathcal{F}(\Box)\, \mathcal{G}(R)\Big) \sqrt{-g}\; d^4x, \tag{42}$$

for the following choice of functions $\mathcal{H}$ and $\mathcal{G}$:

1. $\mathcal{H}(R) = R$, $\mathcal{G}(R) = R$.
2. $\mathcal{H}(R) = R^{-1}$, $\mathcal{G}(R) = R$.
3. $\mathcal{H}(R) = R^p$, $\mathcal{G}(R) = R^q$.
4. $R =$ const.
5. $\mathcal{H}(R) = (R + R_0)^m$, $\mathcal{G}(R) = (R + R_0)^m$.
6. $\mathcal{H}(R) = \mathcal{G}(R) = \sqrt{R - 2\,\Lambda}$.

Let us mention that for all cases we consider different scale factors, and cases 1., 2., 5. are not special case of 3. Now we will give short overview on the all six models.

4.1. Case 1: $\mathcal{H}(R) = R$, $\mathcal{G}(R) = R$.

In this model we use linear ansatz (fore more details see [23, 32, 28], with scaling factor $a(t) = a_0(\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t}),\ a_0 > 0,\ \lambda, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$ and firstly, we have:

Lemma 6. *(i1) For* $n \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{R}$ *holds*

$$\Box^n R = r^n (R + \frac{s}{r}),\ n \geq 1, \qquad \mathcal{F}(\Box) R = \mathcal{F}(r) R + \frac{s}{r}(\mathcal{F}(r) - f_0).$$

(i2) For given scaling factor hold

$$H(t) = \frac{\lambda(\sigma e^{\lambda t} - \tau e^{-\lambda t})}{\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t}}, \quad R(t) = \frac{6\left(2\, a_0^2\ \lambda^2 \left(\sigma^2 e^{4t\lambda} + \tau^2\right) + k\, e^{2t\lambda}\right)}{a_0^2 \left(\sigma e^{2t\lambda} + \tau\right)^2},$$

$$\Box\, R = -\frac{12\, \lambda^2 e^{2t\lambda} \left(4\, a_0^2\, \lambda^2 \sigma\tau - k\right)}{a_0^2 \left(\sigma e^{2t\lambda} + \tau\right)^2}.$$

(i3) $\quad \Box R = 2\lambda^2 R - 24\lambda^4, \qquad r = 2\lambda^2,\ s = -24\lambda^4.$

Using previous Lemma, and EOM we have the following theorem.

Theorem 3. *The scaling factor of the form $a(t) = a_0\,(\sigma\, e^{\lambda t} + \tau\, e^{-\lambda t})$ is a solution of EOM in the following three cases:*

$$\textit{Case 1.}\quad \mathcal{F}\left(2\lambda^2\right) = 0, \quad \mathcal{F}'\left(2\lambda^2\right) = 0, \quad f_0 = -\frac{1}{8\Lambda}. \tag{43}$$

$$\textit{Case 2.}\quad 3k = 4\,a_0^2\,\Lambda\,\sigma\,\tau. \tag{44}$$

$$\textit{Case 3.}\quad \mathcal{F}\left(2\lambda^2\right) = \frac{1}{12\,\Lambda} + \frac{2}{3}\,f_0, \quad \mathcal{F}'\left(2\lambda^2\right) = 0, \quad k = -4\,a_0^2\,\Lambda\,\sigma\,\tau. \tag{45}$$

In all three cases holds $3\,\lambda^2 = \Lambda.$

From previous theorem easily follows:
In the *Case 1.* there exist a solution for arbitrary σ, τ and a_0

$$a(t) = a_0(\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t}),$$

where $\mathcal{F}$ satisfies (43) and for arbitrary $k = 0, \pm 1$. This solution generalize the case $a(t) = a_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right)$, which is obtained in [8].

In the *Case 2.* we obtained a family of solutions for arbitrary $\sigma \neq 0$, a_0 and arbitrary analytic function $\mathcal{F}$

$$a(t) = a_0\left(\sigma e^{\lambda t} + \frac{3\,k}{4\,a_0^2\,\Lambda\,\sigma} e^{-\lambda\,t}\right).$$

The *Case 3.* also gives a family of solutions

$$a(t) = a_0\left(\sigma e^{\lambda t} - \frac{k}{4\,a_0^2\,\Lambda\,\sigma} e^{-\lambda\,t}\right),$$

where function $\mathcal{F}$ satisfies conditions (45).

Let us mention that in the *Case 2.* for $k = 0$ equation (44) and conditions (45) in *Case 3.* coincide, and consequently σ or τ must vanish, and we have two nonsingular de Sitter solutions, see ([9]),

$$a_1(t) = a_0 e^{\lambda t}, \qquad a_2(t) = a_0 e^{-\lambda t},$$

and that all solutions satisfies

$$\ddot{a}(t) = \lambda^2 a(t) > 0.$$

4.2. Case 2: $\mathcal{H}(R) = R^{-1}$, $\mathcal{G}(R) = R$.

In this model it is evident from action given by (42) that nonlocal term $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$ is invariant under the transformation $R \longrightarrow c\,R,\ c \in \mathbb{R}^*$. Let us remark that in this case f_0 plays role of cosmological constant, and because of that we put $\Lambda = 0$. We are searching for the solutions of EOM with the scaling factor of the form $a(t) = a_0|t - t_0|^\alpha$. For more details see [24, 32, 28]

Firstly we have a lemma.

Lemma 7. *Let us consider the nonlocality of the form $\mathcal{H}(R) = R^{-1}$, $\mathcal{G}(R) = R$, with the scaling factor $a(t) = a_0|t - t_0|^\alpha$, and for $\Lambda = 0$. Then*
(i1) $R(t) = 6\big(\alpha(2\alpha - 1)(t - t_0)^{-2} + \frac{k}{a_0^2}(t - t_0)^{-2\alpha}\big).$
(i2) $\Box\, R = q\, R^2$, *where q depend on α.*

Proof. (i1) It is easy to obtained this formula from the expression of R given in (2). (i2) Imposing condition $\Box R = q\,R^2$, we find

$$\alpha(2\alpha-1)(q\alpha(2\alpha-1)-(\alpha-1))(t-t_0)^{-4}+\frac{qk^2}{a_0^4}(t-t_0)^{-4\alpha} \\ +\frac{\alpha k}{3a_0^2}(1-\alpha+6q(2\alpha-1))(t-t_0)^{-2\alpha-2}=0. \tag{46}$$

The equation (46) is satisfied for all values of time t in six cases:

1. $k=0,\ \alpha=0,\ q\in\mathbb{R}$,
2. $k=0,\ \alpha=\frac{1}{2},\ q\in\mathbb{R}$,
3. $k=0,\ \alpha\neq 0$ and $\alpha\neq\frac{1}{2}$, $q=\frac{\alpha-1}{\alpha(2\alpha-1)}$,
4. $k=-1,\ \alpha=1,\ q\neq 0,\ a_0=1$,
5. $k\neq 0,\ \alpha=0,\ q=0$,
6. $k\neq 0,\ \alpha=1,\ q=0$.

In the cases (1), (2) and (4) we have $R=0$ and therefore R^{-1} is not defined. The case (5) yields a solution which does not satisfy equations of motion. $\Box$

The cases (3) and (6) from above lemma need additional investigations (for details, see [24]) which we will omit here, giving the following solutions.

Theorem 4. *The scale factor $a(t)=a_0|t-t_0|^\alpha$ for $\Lambda=0$ is a solution of EOM in the following cases:*

(3) For $k=0$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq\frac{1}{2}$ and $\frac{3\alpha-1}{2}\in\mathbb{N}$, the coefficients of $\mathcal{F}$ are

$$f_0=0,\qquad f_1=-\frac{3\,\alpha\,(2\,\alpha-1)}{2\,(3\,\alpha-2)},$$
$$f_n=0\qquad \textit{for}\quad 2\le n\le\frac{3\,\alpha-1}{2},$$
$$f_n\in\mathbb{R}\qquad \textit{for}\quad n>\frac{3\,\alpha-1}{2}.$$

(6) For $k\neq 0$, the coefficients of $\mathcal{F}$ are

$$f_0=0,\qquad f_1=-\frac{s}{4}\,,\qquad f_n\in\mathbb{R},\quad n\ge 2,$$

where $s=6\big(1+\frac{k}{a_0^2}\big)$.

Let us remark here that in the both cases $k=0,\alpha\neq 0,1/2$, the obtained solutions have not as its background Minkowski space, and as a special case of (6) is the solution $a(t)=|t-t_0|$ for $k=-1$ which corresponds to the Milne model of the universe.

4.3. 3. Case: $\mathcal{H}(R)=R^p$, $\mathcal{G}(R)=R^q$.

We consider the model given by $\mathcal{H}(R)=R^p$, $\mathcal{G}(R)=R^q$ with the scaling factor $a(t)=a_0\,e^{-\frac{\gamma}{12}t^2}$, $\gamma\in\mathbb{R}$, for details see [25, 20] Let us mention if $\gamma=0$ then M is a Minkowski space which is a solution of EOM (37) for $\Lambda=0$. In the following analysis is independent of the sign of γ, and one can obtain models in which the universe is expanding ($\gamma<0$) and collapsing ($\gamma>0$). Using appropriate formulas, firstly we have technical lemma.

Lemma 8. *In the model of nonlocality given by* $\mathcal{H}(R) = R^p$, $\mathcal{G}(R) = R^q$ *with metric* $a(t) = a_0\, e^{-\frac{\gamma}{12}t^2}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, *hold*

$$\text{(1)} \quad H(t) = -\frac{1}{6}\,\gamma\, t, \quad R(t) = \frac{1}{3}\,\gamma\,(\gamma\, t^2 - 3), \quad R_{00} = \frac{1}{4}\,(\gamma - R). \tag{47}$$

$$\text{(2)} \quad \Box\, R^p = p\,\gamma R^p - \frac{p}{3}\,(4p-5)\,\gamma^2\, R^{p-1} - \frac{4}{3}\, p\,(p-1)\,\gamma^3 R^{p-2}. \tag{48}$$

Equation (48) implies that linear space $V_p = span\{1, R, R^2, \dots, R^p\}$ is invariant under the action of $\Box$. Using identities from previous lemma one can show that trace and 00 equation are polynomial in R of degree $p+q$. If we consider only leading coefficients of both equations, for $p \neq q$ we obtain an linearly dependent system

$$p\mathcal{F}(q\gamma)(q-p+2) + q\mathcal{F}(p\gamma)(q-p-2) = 0, \tag{49}$$

$$(-q - \frac{1}{2}p(q-p))\mathcal{F}(q\gamma) + (-\frac{1}{2}q(q-p) + q)\mathcal{F}(p\gamma) = 0. \tag{50}$$

Similarly, in the case when $p = q$ we will obtain linearly dependent system. So, we have the following theorem.

Theorem 5. *Let us consider nonlocality given by* $\mathcal{H}(R) = R^p$, $\mathcal{G}(R) = R^q$ *with scaling factor* $a(t) = a_0\, e^{-\frac{\gamma}{12}t^2}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. *Then:*

(i1) for any $p, q \in \mathbb{N}$ *trace and 00 equation are equivalent.*

(i2) The trace equation is of polynomial type of degree $p+q$ *in* R*, with coefficients depending on* $f_0 = \mathcal{F}(0)$, $\mathcal{F}(\gamma)$, $\dots, \mathcal{F}(p\gamma)$, $\mathcal{F}'(\gamma)$, $\dots, \mathcal{F}'(q\gamma)$.

(i3) for $p = q = 1$*, trace equation is satisfied iff* $\gamma = -12\Lambda$, $\mathcal{F}'(\gamma) = 0$ *and* $f_0 = \frac{3}{2\gamma} - 8\mathcal{F}(\gamma)$. *In this case system has infinitely many solutions.*

Remark 1. *1. In this model, for the most simple case* $p = q = 1$*, the scaling factor of the form* $a(t) = a_0\, e^{\Lambda\, t^2}$*, firstly was considered by Koshelev and Vernov in the paper [44].*

2. The exact solutions, for $1 \leq q \leq p \leq 4$*, are found by I. Dimitrijević in his PhD thesis. It is not possible to obtain the solution for arbitrary* p *and* q *in closed form.*

4.4. Case 4: $R = R_0 = \text{const}$.

In this case we do not have any condition on functions $\mathcal{H}$ and $\mathcal{G}$, for details see [26, 27, 28, 21]. The condition $R = R_0$ plays role of an ansatz, and immediately one get

$$6\Big(\frac{\ddot a}{a} + \big(\frac{\dot a}{a}\big)^2 + \frac{k}{a^2}\Big) = R_0. \tag{51}$$

After the change of variable $b(t) = a^2(t)$ we obtain a second order linear differential equation with constant coefficients

$$3\,\ddot b - R_0\, b = -6\,k. \tag{52}$$

Depending on the sign of R_0 there exist the following solutions for $b(t)$,

$$\begin{aligned}
R_0 > 0, &\qquad b(t) = \frac{6\,k}{R_0} + \sigma\, e^{\sqrt{\frac{R_0}{3}}t} + \tau e^{-\sqrt{\frac{R_0}{3}}t}, \\
R_0 = 0, &\qquad b(t) = -k\, t^2 + \sigma\, t + \tau, \\
R_0 < 0, &\qquad b(t) = \frac{6\,k}{R_0} + \sigma \cos\sqrt{\frac{-R_0}{3}}t + \tau \sin\sqrt{\frac{-R_0}{3}}t.
\end{aligned} \tag{53}$$

If we now replace $R = R_0$ into trace equation (40) and 00 equation (41), we obtain a system of equation defined by the coefficient f_0

$$-2\,U + R_0\,W = R_0 - 4\,\Lambda, \qquad \frac{1}{2}\,U + R_{00}\,W \quad = \Lambda - G_{00}, \tag{54}$$

where $U = f_0\,\mathcal{H}(R_0)\,\mathcal{G}(R_0)$ and $W = f_0\,\frac{\partial}{\partial R}\Big(\mathcal{H}(R)\,\mathcal{G}(R)\Big)|_{R=R_0}$.

After elimination of U from (54) we obtain, for more detail see [21],

$$(R_0 + 4R_{00})\,(W + 1) = 0. \tag{55}$$

In the case when $R_0 + 4R_{00} = 0$, the following conditions on the parameters σ and τ hold:

$$\begin{aligned} R_0 &> 0, & 9\,k^2 &= R_0^2\,\sigma\,\tau, \\ R_0 &= 0, & \sigma^2 + 4\,k\,\tau &= 0, \\ R_0 &< 0, & 36\,k^2 &= R_0^2\,(\sigma^2 + \tau^2). \end{aligned} \tag{56}$$

Finally, we get the following theorem.

Theorem 6. *Let $R = R_0 = constant$. Then, we have solutions in the following cases:*

1. *If $R_0 > 0$ then for $k = 0$ there is a solution with constant Hubble parameter, for $k = +1$ the solution is $a(t) = \sqrt{\frac{12}{R_0}}\cosh\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}t + \varphi\right)$ and for $k = -1$ it is $a(t) = = \sqrt{\frac{12}{R_0}}\left|\sinh\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}t + \varphi\right)\right|$, where $\sigma + \tau = \frac{6}{R_0}\cosh\varphi$ and $\sigma - \tau = \frac{6}{R_0}\sinh\varphi$.*
2. *If $R_0 = 0$ then for $k = 0$ the solution is $a(t) = \sqrt{\tau} = const$ and for $k = -1$ the solution is $a(t) = |t + \frac{\sigma}{2}|$.*
3. *If $R_0 < 0$ then for $k = -1$ the solution is $a(t) = \sqrt{\frac{-12}{R_0}}\left|\cos\frac{1}{2}\left(\sqrt{-\frac{R_0}{3}}t - \varphi\right)\right|$, where $\sigma = \frac{-6}{R_0}\cos\varphi$ and $\tau = \frac{-6}{R_0}\sin\varphi$.*

Proof. The proof directly follows from (53) and conditions (56), for more details see [26, 21]. □

Remark 2. *The second case of the equation (55) gives the solution*

$$W = -1, \qquad U = 2\Lambda - R_0. \tag{57}$$

Equations (54) have common solution in f_0 iff the following condition is satisfied,

$$\mathcal{H}(R_0)\,\mathcal{G}(R_0) - (R_0 - 2\Lambda)\frac{\partial}{\partial R}\big(\mathcal{H}(R)\,\mathcal{G}(R)\big)|_{R=R_0} = 0. \tag{58}$$

4.5. Case 5: $\mathcal{H}(R) = (R + R_0)^m$, $\mathcal{G}(R) = (R + R_0)^m$.

Here we consider the action (14) given by $\mathcal{H} = \mathcal{G} = (R + R_0)^m$, where R_0 and m are real constants and scaling factor $a(t)$ is of the form

$$a(t) = A\,t^n e^{-\frac{\gamma}{12}t^2}, \tag{59}$$

for more details see [28, 29]

Let us consider the ansatz in the form

$$\Box(R+R_0)^m = r(R+R_0)^m + s, \tag{60}$$

where R_0, r, s, m are n real constants. In the case when $s=0$, the anzatz gives the following system of equations:

$$\begin{aligned}
0 &= -648mn^2(2n-1)^2(2m-3n+1),\\
0 &= -324n(2n-1)\left(-\gamma m+6\gamma mn^2-4\gamma mn-mnR_0+mR_0+2n^2r-nr\right),\\
0 &= 18n(2n-1)\left(8\gamma^2m^2-13\gamma^2m+12\gamma^2mn-3\gamma mR_0+24\gamma nr+6\gamma r-6rR_0\right),\\
0 &= -2\gamma^3m-24\gamma^3mn^2-14\gamma^3mn+6\gamma^2mnR_0+2\gamma^2mR_0+72\gamma^2n^2r+12\gamma^2nr\\
&\qquad -\ 24\gamma nrR_0+3\gamma^2r-6\gamma rR_0+3rR_0^2,\\
0 &= -\gamma^2\left(4\gamma^2m^2+\gamma^2m+18\gamma^2mn-3\gamma mR_0-24\gamma nr-6\gamma r+6rR_0\right),\\
0 &= -\gamma^4(r-\gamma m).
\end{aligned}$$

This system has five solutions:

1. $r=m\gamma$, $n=0$, $R_0=\gamma$, $m=\frac{1}{2}$
2. $r=m\gamma$, $n=0$, $R_0=\frac{\gamma}{3}$, $m=1$
3. $r=m\gamma$, $n=\frac{1}{2}$, $R_0=\frac{4}{3}\gamma$, $m=1$
4. $r=m\gamma$, $n=\frac{1}{2}$, $R_0=3\gamma$, $m=-\frac{1}{4}$
5. $r=m\gamma$, $n=\frac{2m+1}{3}$, $R_0=\frac{7}{3}\gamma$, $m=\frac{1}{2}$.

The case 2. is considered in the Subsection 3 and case 3. is known and considered in ([33]).

Let us consider now the case 1: $n=0$, $m=\frac{1}{2}$, then the anzatz is reduced to $\Box\sqrt{R+\gamma} = \frac{1}{2}\gamma\sqrt{R+\gamma}$, and we have the following consequence: $\mathcal{F}(\Box)\sqrt{R+\gamma}=\mathcal{F}(\frac{1}{2}\gamma)\sqrt{R+\gamma}$.

Trace equation (40) and 00 equation (41) are linear in R and they define two systems of equations in $\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2})$ and $\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2})$:

$$\gamma+4\,\Lambda-\gamma\,\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2})-\frac{\gamma^2}{3}\,\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2})=0,\quad -\frac{\gamma^2}{3}-\frac{\gamma^2}{3}\,\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2})+\frac{\gamma^3}{3}\,\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2})=0. \tag{61}$$

$$-\Lambda+\frac{\gamma}{2}\,\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2})+\frac{\gamma^2}{6}\,\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2})=0,\quad \gamma^2+\gamma^2\,\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2})-\gamma^3\,\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2})=0. \tag{62}$$

The solutions of these systems are the same for $\gamma=-2\,\Lambda$ and equal to:

$$\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2})=-1,\qquad \mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2})=0. \tag{63}$$

It is clear from (63) that considered case is a generalization of the Case 3. Here we allow that p,q are rational numbers. In this case we have $p+q=1$, and similarly as in Theorem 5 there exist a unique solution in $\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2})$ and $\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2})$.

Taking the similar analysis it was shown that in the Case 4. there are no solutions which satisfy EOM.

Finally, in the Case 5. the parameters are: $r=\frac{\gamma}{2}$, $n=\frac{2}{3}$, $R_0=\frac{7}{3}\gamma$, $m=\frac{1}{2}$. Since, the action is the same as in the 3. and similar calculations, using trace and 00 equations give

$$\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2})=-1,\qquad \mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2})=0,\qquad \Lambda=-\frac{7}{6}\gamma. \tag{64}$$

Let us remark that in (64) the solution could be given in terms of $\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2})$ and $\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2})$, with a constrain which connects cosmological constant Λ, and γ. Similar case was considered in the Case 3 for $p = q = 1$.

4.6. Case 5: $\mathcal{H}(R) = \mathcal{G}(R) = \sqrt{R - 2\,\Lambda}$.

In this nonlocal model (for more details see [29, 28, 30]) we can rewrite the action (14) in more compact form

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{R - 2\Lambda}\, F(\Box)\, \sqrt{R - 2\Lambda}\, \sqrt{-g}\; d^4x, \tag{65}$$

where $F(\Box) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, \Box^n$.

The related Friedmann equations (9) are

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\bar\rho + 3\bar p) + \frac{\Lambda}{3}\,, \qquad \frac{\dot a^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\bar\rho + \frac{\Lambda}{3}\,, \tag{66}$$

where $\bar\rho$ and $\bar p$ are analogs of the energy density and pressure of the dark side of the universe, respectively. Denote the corresponding equation of state as $\bar p(t) = \bar w(t)\, \bar\rho(t)$.

In this case we consider several subcases defining by different scaling factors. We mention three of them, and emphasize the first one since this case is the most important.

4.6.1. Cosmological solution $a(t) = A\, t^{\frac{2}{3}}\, e^{\frac{\Lambda}{14}t^2}\,,\ k = 0$.

Theorem 7. *In the case of nonlocality $\mathcal{H}(R) = \mathcal{G}(R) = \sqrt{R - 2\,\Lambda}$ with scaling factor of the form $a(t) = A\, t^{\frac{2}{3}}\, e^{\frac{\Lambda}{14}t^2}$ and $k = 0$ holds:*

$$R(t) = \frac{4}{3}t^{-2} + \frac{22}{7}\Lambda + \frac{12}{49}\Lambda^2 t^2, \qquad H(t) = \frac{2}{3}t^{-1} + \frac{1}{7}\Lambda t. \tag{67}$$

There exists a cosmological solution for ansatz $\Box\sqrt{R - 2\Lambda} = -\frac{3}{7}\Lambda\sqrt{R - 2\Lambda}$, and conditions

$$\mathcal{F}\Big(-\frac{3}{7}\Lambda\Big) = -1\,, \qquad \mathcal{F}'\Big(-\frac{3}{7}\Lambda\Big) = 0\,, \qquad \Lambda \neq 0.$$

Let us remark that in this case we have,

$$R_{00} = \frac{2}{3}\,t^{-2} - \Lambda - \frac{3}{49}\Lambda^2 t^2\,, \qquad G_{00} = \frac{4}{3}\,t^{-2} + \frac{4}{7}\Lambda + \frac{3}{49}\Lambda^2 t^2\,, \tag{68}$$

and

$$\bar\rho(t) = \frac{1}{12\pi G}\,\Big(\frac{2}{t^{-2}} + \frac{9}{98}\Lambda^2 t^2 - \frac{9}{14}\Lambda\Big)\,, \qquad \bar p(t) = -\frac{\Lambda}{56\pi G}\Big(\frac{3}{7}\Lambda t^2 - 1\Big). \tag{69}$$

This cosmological solution for $a(t) = A\, t^{\frac{2}{3}}\, e^{\frac{\Lambda}{14}t^2}$ can be viewed as a product of $t^{\frac{2}{3}}$ factor, related to the matter dominated case in Einstein's gravity, and $e^{\frac{\Lambda}{14}t^2}$ which is related to an acceleration. Moreover, the Hubble parameter consists of two terms: $\frac{2}{3}t^{-1}$ is just $H(t)$ in Einstein's theory of gravity for the universe dominated by matter, which play leading role for small t; the second term $\frac{1}{7}\Lambda t$ corresponds to an acceleration for $\Lambda > 0$, which is dominant role for larger times. Time dependent expansion acceleration is given by

$$\ddot a(t) = \Big(-\frac{2}{9}t^{-2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{\Lambda^2}{49}t^2\Big)\, a(t). \tag{70}$$

Also, according to expressions (69) follows that $\bar{w}(t) \to -1$ when $t \to \infty$, what corresponds to an analog of Λ dark energy dominance in the standard cosmological model. Therefore, one can say that nonlocal gravity model (65) with cosmological solution $a(t) = A\, t^{\frac{2}{3}}\, e^{\frac{\Lambda}{14}t^2}$ describes some effects usually attributed to the dark matter and dark energy. This solution is invariant under transformation $t \to -t$ and singular at cosmic time $t = 0$. Namely, $R(t)$, $H(t)$ and $\bar{\rho}(t)$ tend to $+\infty$ when $t \to 0$, while $\bar{\rho}(0)$ is finite.

Taking the above Planck results for t_0 and H_0 in the second formula of (67) one obtains $\Lambda = 1,05 \cdot 10^{-35}\, s^{-2}$ (in $c = 1$ units). This is close to $\Lambda = 0.98 \cdot 10^{-35} s^{-2}$ calculated by standard formula $\Lambda = 3H_0^2 \Omega_\Lambda$. From the same formula (67) one can also find time (t_m) for which the Hubble parameter has minimum value H_m, i.e. $t_m = 21,1 \cdot 10^9$ yr and $H_m = 61,72$ km/s/Mpc.

From (70) one can find that beginning of the universe expansion acceleration was at $t_a = 7,84 \cdot 10^9$ yr, or in other words at 5.96 billion years ago.

The first of Friedmann equations, $\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho} + \frac{\Lambda}{3}$, combined with expression (67) for the Hubble parameter, gives the critical energy density ρ_c and the energy density of the dark matter $\bar{\rho}$ for the solution $a(t) = A\, t^{\frac{2}{3}}\, e^{\frac{\Lambda}{14}t^2}$:

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 = 8,51 \cdot 10^{-30} \frac{g}{cm^3} \tag{71}$$

$$\bar{\rho} = \Big(\frac{4}{9} t_0^{-2} - \frac{\Lambda}{7} + \frac{\Lambda^2}{49} t_0^2\Big) \frac{3}{8\pi G} = 2,26 \cdot 10^{-30}\, \frac{g}{cm^3}. \tag{72}$$

From above formula, it follows that $\bar{\Omega} = \frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = 0,265$, and since Ω_v for the visible matter is approximatively $\Omega_v = 0,05$, then the value of $\bar{\Omega}_\Lambda = 1 - \bar{\Omega} - \Omega_v = 0,685$ coincides with the value obtained from Planck 2018 mission.

4.6.2. Another cosmological solution.

In this model we consider different scale factors and different type of the universe. Results are given in the following theorem.

THEOREM 8. *(i1) In the case of nonlocality $\mathcal{H}(R) = \mathcal{G}(R) = \sqrt{R - 2\,\Lambda}$ with scaling factor of the form $a(t) = A\, e^{\frac{\Lambda}{6}t^2}$ and $k = 0$ holds:*

$$R(t) = 2\Lambda(1 + \frac{2}{3}\,\Lambda\, t^2), \qquad H(t) = \frac{1}{3}\,\Lambda\, t. \tag{73}$$

There exists a cosmological solution for ansatz $\Box\sqrt{R - 2\Lambda} = -\Lambda\sqrt{R - 2\Lambda}$, and conditions

$$\mathcal{F}(-\Lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n (-\Lambda)^n = -1\,, \quad \mathcal{F}'(-\Lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\, n (-\Lambda)^{n-1} = 0. \tag{74}$$

(i2) In the case of nonlocality $\mathcal{H}(R) = \mathcal{G}(R) = \sqrt{R - 2\,\Lambda}$ with scaling factor of the form $a(t) = A\, e^{\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}\,t}$ and $k = \pm 1$ holds:

$$R(t) = \frac{6\,k}{A^2} e^{\mp\sqrt{\frac{2}{3}\Lambda}\, t} + 2\Lambda, \qquad H = \pm\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}\,. \tag{75}$$

There exists a cosmological solution for ansatz $\Box\sqrt{R - 2\Lambda} = \frac{\Lambda}{3}\sqrt{R - 2\Lambda}$, and conditions

$$\mathcal{F}\big(\frac{\Lambda}{3}\big) = -1\,, \qquad \mathcal{F}'\big(\frac{\Lambda}{3}\big) = 0. \tag{76}$$

Remark 3. *(i1) In this case one can calculate R_{00} and G_{00},*

$$R_{00} = -\frac{\Lambda^2}{3}\,t^2 - \Lambda\,, \quad G_{00} = \frac{\Lambda^2}{3}\,t^2\,. \tag{77}$$

Also, we have

$$\bar\rho(t) = \frac{\Lambda}{8\pi G}\big(\frac{\Lambda}{3}t^2 - 1\big)\,, \quad \bar p(t) = -\frac{\Lambda}{24\pi G}\big(\Lambda t^2 - 1\big). \tag{78}$$

Solution $a(t) = A\,e^{\frac{\Lambda}{6}t^2}$ is nonsingular with $R(0) = 2\Lambda$ and $H(0) = 0$. There is acceleration expansion $\ddot a(t) = \big(\frac{\Lambda}{3} + \frac{\Lambda^2}{9}\,t^2\big)\,a(t)$ which is positive and increasing with time.

(i2) Similarly to the previous case we find

$$R_{00} = -\frac{\Lambda}{2}, \qquad G_{00} = \frac{3k}{A^2}e^{\mp\sqrt{\frac{2}{3}\Lambda}\,t} + \frac{\Lambda}{2}. \tag{79}$$

$\bar\rho$ and $\bar p$ in this case are

$$\bar\rho(t) = \frac{1}{8\pi G}\,\big(-\frac{\Lambda}{2} + \frac{3\,k}{A^2}\,e^{\mp\sqrt{\frac{2}{3}\Lambda\,t}}\big)\,, \qquad \bar p(t) = \frac{1}{8\pi G}\,\big(\frac{\Lambda}{2} - \frac{k}{A^2}\,e^{\mp\sqrt{\frac{2}{3}\Lambda\,t}}\big). \tag{80}$$

We have two solutions: (1) $a(t) = A\,e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}\,t}$ and (2) $a(t) = A\,e^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}\,t}$, for both $k = +1$ and $k = -1$. They are similar to the de Sitter solution $a(t) = A\,e^{\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,t}$, $k = 0$, but have time dependent $R(t), \bar\rho(t)$ and $\bar p(t)$. When $t \to +\infty$, parameter $\bar w(t) \to -1$ in the case (1) and $\bar w(t) \to -\frac{1}{3}$ for solution (2).

5. Perturbations

This section is based on the papers [27, 30, 21, 48].

5.1. Conformal time.

In this section we are searching the cosmological spatially flat de Sitter which can be written as

$$ds^2 = -dt^2 + a_0^2 e^{2Ht} d\vec x^{\,2} = -dt^2 + a(t)^2 d\vec x^{\,2}, \tag{81}$$

where H is constant, t the cosmic time and $\vec x$ is the 3-dimensional vector. The last equality shows that this metric is a particular case of a spatially flat FLRW metric.

It is more convenient to work with the conformal time τ in perturbation theory, which is defined by $a\,d\tau = dt$. Then the general FLRW metric (81) transforms to

$$ds^2 = a(\tau)^2(-d\tau^2 + d\vec x^2), \tag{82}$$

and connection between cosmic and conformal time is given by

$$\tau = -\frac{1}{a_0 H}e^{-Ht} \;\Rightarrow\; a(\tau) = -\frac{1}{H\tau}.$$

So when t goes from past to future infinity, τ goes from $-\infty$ to 0_-. $t = 0$ corresponds to $\tau = -\frac{1}{a_0 H}$.

5.2. Perturbations.

The variation of the metric is as usual

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,. \tag{83}$$

where bars denote the back ground metric, and we will use this convention for background quantities.

Perturbations of equations of motion (37) around the de Sitter vacuum are

$$-m^2\,\delta\, G^{\mu}_{\nu} + (\bar{R}^{\mu}_{\nu} - \bar{K}^{\mu}_{\nu})\, v(\Box)\,\delta R = 0\,, \tag{84}$$

where $m^2 = 1 + f_0(\bar{\mathcal{H}}'\bar{\mathcal{G}} + \bar{\mathcal{G}}'\bar{H})$ and $v(\Box) = -\big((\bar{\mathcal{H}}''\bar{\mathcal{G}} + \bar{G}''\bar{\mathcal{H}})f_0 - 2\bar{\mathcal{H}}\bar{\mathcal{G}}'\mathcal{F}(\Box)\big)$, where $'$ denotes derivative with respect to R. Since the variation of the $\Box$ acting on a scalar function is a pure differential operator and all background curvatures are constants, we have

$$(\delta\Box)f = [-h^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu - \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}\partial_\rho) - \bar{g}^{\mu\nu}\gamma^{\rho}_{\mu\nu}\partial_\rho]f. \tag{85}$$

Here $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ denotes the Christoffel symbol. If we start with (83), then we get

$$\delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu},\ \ \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_\mu h^{\rho}_{\nu} + \bar{\nabla}_\nu h^{\rho}_{\mu} - \bar{g}^{\rho\sigma}\bar{\nabla}_\sigma h_{\mu\nu}). \tag{86}$$

So, for f be a constant we get $(\delta\Box)f = 0$. The same is true for K^{μ}_{ν}

$$(\delta K^{\mu}_{\nu})f = [-h^{\mu\sigma}(\partial_\sigma\partial_\nu - \bar{\Gamma}^{\rho}_{\sigma\nu}\partial_\rho) - \bar{g}^{\mu\sigma}\gamma^{\rho}_{\sigma\nu}\partial_\rho - \delta^{\mu}_{\nu}\delta\Box]f, \tag{87}$$

which is zero in the case that f is a constant. Hence all the corresponding terms vanish.

Taking the trace of (40) one gets

$$[m^2 + (\bar{R} + 3\,\Box)\, v(\Box)]\,\delta R = \mathcal{U}(\Box)\,\delta R = 0. \tag{88}$$

This is a homogeneous equation on δR. The general method of solving it is to use the method of Weierstrass factorization

$$\mathcal{U}(\Box)\delta R = \prod_i(\Box - \omega_i^2)\, e^{\gamma(\Box)}\delta R = 0\,, \tag{89}$$

where ω_i^2 are the roots of the equation $\mathcal{U}(\omega^2) = 0$ and since $\gamma(\Box)$ is taken to be an entire function and $e^{\gamma(\omega^2)}$ has no roots. Let assume that there are no multiple roots. Such roots complicate the story, but can be treated analogously, see [40]. Then we can solve (89) for each ω_i separately

$$(\Box - \omega_i^2)\delta R = 0. \tag{90}$$

The latter differential equation can be written explicitly as

$$\left(\partial_\tau^2 - \frac{2}{\tau}\partial_\tau + k^2 + \frac{\omega_i^2}{H^2\tau^2}\right)\delta R = 0, \tag{91}$$

where we have taken the de Sitter form of the background. The solution yields

$$\delta R_i = (-k\tau)^{3/2}\left(C_{1i}J_{\nu_i}(-k\tau) + C_{2i}Y_{\nu_i}(-k\tau)\right), \tag{92}$$

where J, Y are the Bessel functions of the first and second kinds, respectively, with $\nu_i = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{\omega_i^2}{H^2}}$ and $C_{1i,2i}$ are the integration constants.

For small values of τ which correspond to large cosmic times t the Bessel functions have the following asymptotic behavior

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &\sim z^{\mathrm{Re}\,\nu}, \\ Y_\nu(z) &\sim z^{-|\mathrm{Re}\,\nu|} \text{ for } \mathrm{Re}\,\nu \neq 0\,, \\ Y_\nu(z) &\sim \ln z \text{ for } \mathrm{Re}\,\nu = 0\,. \end{aligned}$$

From this we conclude that δR_i are bounded,

$$|\mathrm{Re}\,\nu_i| < \frac{3}{2}. \tag{93}$$

The general solution for δR is

$$\delta R = \sum_i \delta R_i. \tag{94}$$

where each δR_i has its arbitrary integration constants, chosen in such manner that δR is a real.

5.3. Scalar perturbation and Bardeen potentials.

Since the behavior of vector and tensor classical perturbations remain the same as in GR, we will focus on scalar classical perturbations.

The metric for the scalar perturbations around a FLRW background is given by

$$ds^2 = a(\tau)^2 \left[-(1+2\phi)d\tau^2 - 2\partial_i\beta d\tau dx^i + ((1-2\psi)\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j\gamma)dx^i dx^j\right]. \tag{95}$$

where ϕ, β, ψ and γ are scalar functions.

From 4 scalar modes only 2 are gauge invariant. The convenient gauge invariant variables, known also as Bardeen potentials, are introduced as

$$\Phi = \phi - \frac{1}{a}(a\vartheta)' = \phi - \dot{\chi}, \qquad \Psi = \psi + \mathcal{H}\vartheta = \psi + H\chi, \tag{96}$$

where $\chi = a\beta + a^2\dot{\gamma}$, $\vartheta = \beta + \gamma'$, $\mathcal{H}(\tau) = a'/a$. The prime denotes the differentiation with respect to the conformal time τ and the dot with the respect to the cosmic time t.

Now, we want to determine the Bardeen potentials introduced by (96). To do this we need two equations: the first one is given by the formulation of δR in terms of Φ and Ψ accounting that the time behavior of δR itself is found,

$$\widetilde{\delta R} = \frac{2}{a^2}\left[k^2(\Phi - 2\Psi) - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 6\frac{a''}{a}\Phi - 3\Psi'' - 9\frac{a'}{a}\Psi'\right], \tag{97}$$

where $\widetilde{\delta R} = \delta R - \bar{R}'(\beta + \gamma')$ is a convenient gauge invariant analog of δR. This expression is valid for any a while its de Sitter form is

$$\widetilde{\delta R} = -6H^2\left(4\Phi - \tau(\Phi' + 3\Psi') + \tau^2\Psi''\right) + 2\tau^2 H^2 k^2 (\Phi - 2\Psi)\,. \tag{98}$$

The second equation can be obtained from the system of equations (84). We find the $i \neq j$ component of the system (84) which becomes

$$-m^2(\Phi - \Psi) + v(\Box)\widetilde{\delta R} = 0. \tag{99}$$

Now, we write down the $(0i)$ equation of the system (84), which is

$$2m^2(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) + (v(\Box)\widetilde{\delta R})' - \mathcal{H}v(\Box)\widetilde{\delta R} = 0, \tag{100}$$

and finally, we deduce the (00) equation of system (84) which yields

$$-2m^2(k^2\Psi + 3\mathcal{H}\Psi' + 3\mathcal{H}^2\Phi) - 3\mathcal{H}(v(\Box)\widetilde{\delta R})' - \left(k^2 - \frac{3}{\tau^2}\right) v(\Box)\widetilde{\delta R} = 0, \tag{101}$$

where the last term is proportional to $1/\tau^2$ as a consequence that the background is a de Sitter space. If we multiply (99) by k^2, (100) by $3\,\mathcal{H}$ and summing these results with (101) and taking in account that for the de Sitter space-time $\mathcal{H}^2 = 1/\tau^2$ we finally get

$$-m^2\,k^2\,(\Phi + \Psi) = 0, \tag{102}$$

which is our second equation. Obviously, it simplifies the succeeding computations considerably. Since $\widetilde{\delta R}$ is given by (94), now from expression (99) easily follows

$$2\,\Phi = \frac{1}{m^2}\sum_i v(\omega_i^2)\,\delta R_i. \tag{103}$$

Let us remark, $\widetilde{\delta R}$ coincides with δR if $\bar{R}$ is a constant or on a more general basis in the longitudinal (Newtonian) gauge $\beta = \gamma = 0$. If we take into account (93), we see that Bardeen potentials are zero when $|\mathrm{Re}\,\nu_i| < 3/2$ for each i. If $\mathrm{Re}\,\nu_i = 0$ for some i then the perturbations become frozen. At last, in the case that for at least one i we have $|\mathrm{Re}\,\nu_i| > 3/2$ then perturbations grow. This is in perfect agreement with [9]. In that reference a more general class of solutions was studied which asymptote to the de Sitter background at late times while the nonlocality is given by $R\mathcal{F}(\Box)R$. In our case when $\mathcal{H}(R) = \mathcal{G}(R) = R$ we obtained exactly the same result as in Section 4 of [6].

Let us consider special case $m^2 = 0$, then it is not possible to find out the Bardeen potentials, separately. The compatibility of system (88,99) implies that either $\delta R = 0$ or there is a root of $v(\Box)$. All equations coming from (84) since all of them do not carry information about individual Bardeen potentials if $m^2 = 0$. Physically this means that effectively the Einstein-Hilbert term vanishes and one reduces the number of propagating degrees of freedom.

5.4. Stability for constant curvature background.

The main result of Section 5.2 implies the natural question of stability of the de Sitter vacuum solution of eq. (93). It turns out that ν depends on the structure of the nonlocal operator $\mathcal{U}(\Box)$ such that

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{\omega^2}{H^2}}, \tag{104}$$

and $\mathcal{U}(\omega^2) = 0$.

Moreover, the system does not lead to ghosts demands that there is no more than one such a root ω^2 for the operator $\mathcal{U}$, for more details see [27].

Firstly, let us make the analysis of nonlocality given by [21]

$$\mathcal{H}(R) = R^p, \quad \mathcal{G}(R) = R^q, \tag{105}$$

for some nonzero p and q. From the following modification of equation (40) we have,

$$R - 2\,\Lambda + f_0\,R^{p+q}\,(2 - p - q) = 0. \tag{106}$$

This equation can be solved w.r.t R in general for p, q integers and $-3 \leq p+q \leq 4$. It is necessary to analyze $\mathcal{U}$ to see whether the stability condition can be reached. Indeed, $\mathcal{U}$ is analytic by construction but a compatibility condition must be fulfilled

$$1 + R^{p+q-1}\,(p+q)\,(2-p-q)f_0 = -\omega^2 e^{\gamma(0)}. \tag{107}$$

It is obvious that as long as ω^2 is real it should be at least positive in order to satisfy (93). The constrain (107) clearly shows that ω^2 is real and therefore reduces to the following necessary inequality

$$1 + R^{p+q-1}(p+q)(2-p-q)f_0 < 0. \tag{108}$$

Satisfactory solution of previous relation is a necessary stability condition. Obviously we have two special cases, namely $p+q=0$ and $p+q=2$, and in both cases there is no stable solutions.

In a general situation we have to understand equation (106) together with the inequality (108). One can simplify (108) using the background equation (106) to

$$R\,(p+q-1) \;>\; 2\,\Lambda\,(p+q). \tag{109}$$

In the case $p+q=1$ one can have a stable solution for a negative Λ. The latter condition is possible as long as $\lambda f_0 < 0$.

In an attempt to solve the system (106) and (108) one can rewrite it as

$$1 - s + u = 0, \qquad 1 + uz < 0, \tag{110}$$

where $s = \frac{2\Lambda}{R}$, $z = p+q$, $u = f_0 R^{z-1}(2-z)$. This latter system looks simple but unfortunately does not provide new interesting solutions from the physical point of view.

5.5. Perturbation of Minkowski space.

Let us recall that in 2018 the gravitational waves were experimentally discovered following results of GR, see [1]. In this subsection we want to investigate if our nonlocal modified gravity predict gravitational waves and their explicit description.

In GR the equations of gravitational waves were obtained as perturbations of EOM for Minkowski metric, i.e. in the form

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \nabla_\mu \psi^{\mu\nu} = 0, \tag{111}$$

where $\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,h$, $h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$, $h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ and $|h_{\mu\mu}| \ll 1$. These equations are similar to expansion of electromagnetic waves with Lorentz condition. In this subsection we assume that metric $g_{\mu\nu}$ is Minkowski metric, given by $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1,1,1,1)$.

The covariant derivative is equal to the partial derivative and d'Alambert operator is given by

$$\Box = -\partial^2_{tt} + \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy} + \partial^2_{zz}.$$

The perturbations of EOM (37) up to the linear degree of Minkowski metric are in the following form

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\big(g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) - g_{\mu\nu}\mathcal{H}'(R)f_0\mathcal{G}(R)\delta R - h_{\mu\nu}f_0\mathcal{G}(R)\mathcal{H}(R)\big) \\ &+ \delta R_{\mu\nu}W - K_{\mu\nu}\delta W + (\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta R + h_{\mu\nu}\Lambda), \end{aligned} \tag{112}$$

where $\delta W = -2\mathcal{G}'(R)\mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\delta R - f_0(\mathcal{G}''(R)\mathcal{H}(R) + \mathcal{H}''(R)\mathcal{G}(R))\delta R$ and where the variation of curvature tensor is $\delta R = -K_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$, $\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\mu \gamma^\lambda_{\lambda\nu}$.

If we use tensor $\psi_{\mu\nu}$ (112) becomes

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{G}'(0)\mathcal{H}(0) - 2\mathcal{G}'(0)\mathcal{H}'(0)K_{\mu\nu}\right)\mathcal{F}(\Box)\delta R \\ &+ \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_0\mathcal{H}'(0)\mathcal{G}(0) - f_0(\mathcal{G}''(0)\mathcal{H}(0) + \mathcal{H}''(0)\mathcal{G}(0))K_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\right)\delta R \\ &- h_{\mu\nu}\left(\Lambda - \frac{1}{2}f_0\mathcal{G}(0)\mathcal{H}(0)\right) + \delta R_{\mu\nu}\big(f_0(\mathcal{G}\mathcal{H})'(0) + 1\big) = 0, \\ &\delta R = \nabla_\mu\nabla_\nu\psi^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Box(g_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{113}$$

Let us remark that if the equations (111) are satisfied then variations of δR and $\delta R_{\mu\nu}$ are vanishing and previous equation is reduced to

$$\Lambda = \frac{1}{2}\, f_0 \mathcal{G}(0)\, \mathcal{H}(0), \tag{114}$$

and gravitational waves in nonlocal modified gravity with nonlocality given by $\mathcal{H}\,\mathcal{F}(\Box)\,\mathcal{G}$ have the same behavior as in the GR. So, we prove the following theorem.

Theorem 9. *Let M be a Minkowski manifold with nonlocality given by $\mathcal{H}(R)\,\mathcal{F}(\Box)\,\mathcal{G}(R)$, then for $\Lambda = \frac{1}{2}\, f_0 \mathcal{G}(0)\, \mathcal{H}(0)$, the equations of gravitational waves are:*

$$\Box\, \psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \nabla_\mu \psi^{\mu\nu} = 0. \tag{115}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abbott, B. P., et al., (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration): Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016)
2. Aref'eva, I.Ya., Nonlocal string tachyon as a model for cosmological dark energy. AIP Conf. Proc. **826**, 301 (2006). [astro-ph/0410443].
3. Aref'eva, I.Ya., Joukovskaya, L.V., Vernov, S.Yu.: Bouncing and accelerating solutions in nonlocal stringy models. JHEP **0707**, 087 (2007) [hep-th/0701184]
4. Barnaby, N., Biswas, T., Cline, J.M.: p-Adic inflation. JHEP **0704**, 056 (2007) [hep-th/0612230]
5. Barvinsky, A.O.: Dark energy and dark matter from nonlocal ghost-free gravity theory. Phys. Lett. B **710**, 12–16 (2012). [arXiv:1107.1463 [hep-th]]
6. Biswas, T., Gerwick, E., Koivisto, T., Mazumdar, A.: Towards singularity and ghost free theories of gravity. Phys. Rev. Lett. **108**, 031101 (2012). [arXiv:1110.5249v2 [gr-qc]]
7. Biswas, T., Conroy, A., Koshelev, A.S., Mazumdar, A.: Generalized gost-free quadratic curvature gravity. [arXiv:1308.2319 [hep-th]]
8. Biswas, T., Mazumdar, A., Siegel, W: Bouncing universes in string-inspired gravity. J. Cosmology Astropart. Phys. **0603**, 009 (2006). [arXiv:hep-th/0508194]
9. Biswas, T., Koshelev, A.S., Mazumdar, A., Vernov, S.Yu.: Stable bounce and inflation in non-local higher derivative cosmology. J. Cosmology Astropart. Phys. **08**, 024 (2012). [arXiv:1206.6374 [astro-ph.CO]]
10. Brekke, L., Freund, P.G.O.: p-Adic numbers in physics. Phys. Rep. **233**, 1–66 (1993).
11. Briscese, F., Marciano, A., Modesto, L., Saridakis, E.N.: Inflation in (super-)renormalizable gravity. Phys. Rev. D **87**, 083507 (2013). [arXiv:1212.3611v2 [hep-th]]
12. Calcagni, G., Modesto, L., Nicolini, P.: Super-accelerting bouncing cosmology in assymptotically-free non-local gravity. [arXiv:1306.5332 [gr-qc]]
13. Calcagni, G., Nardelli, G.: Nonlocal gravity and the diffusion equation. Phys. Rev. D **82**, 123518 (2010). [arXiv:1004.5144 [hep-th]]
14. Capozziello S., Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S.D.: Accelerating cosmologies from non-local higher-derivative gravity. Phys. Lett. B **671**, 193 (2009). [arXiv:0809.1535]

15. Clifton,T., Ferreira, P.G., Padilla, A., Skordis, C.: Modified gravity and cosmology. Phys. Rep. **513**, 1–189 (2012). [arXiv:1106.2476v2 [astro-ph.CO]]

16. Conroy, A., Koshelev, A. S., Mazumdar, A., Geodesic completeness and homogeneity condition for cosmic inflation. Phys. Rev. D **90**, no. 12, 123525 (2014). [arXiv:1408.6205 [gr-qc]].

17. Craps, B., de Jonckheere, T., Koshelev, A.S.: Cosmological perturbations in non-local higher-derivative gravity. [arXiv:1407.4982 [hep-th]]

18. Deffayet, C., Woodard, R.P.: Reconstructing the distortion function for nonlocal cosmology. JCAP **0908**, 023 (2009). [arXiv:0904.0961 [gr-qc]]

19. Deser, S., Woodard, R.P.: Nonlocal cosmology. Phys. Rev. Lett. **99**, 111301 (2007). [arXiv:0706.2151 [astro-ph]]

20. Dimitrijevic, I.: Cosmological solutions in modified gravity with monomial nonlocality. Appl. Math. Comput. 195–203 (2016). [arXiv:1604.06824 [gr-qc]]

21. Dimitrijevic, I.: Geometric generalization of Einstein theory of gravity, PhD thesis of Belgrade University, (in Serbian), 1-96.

22. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Rakic, Z.: On modified gravity. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **36**, 251–259 (2013). [arXiv:1202.2352 [hep-th]]

23. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Rakic, Z.: New cosmological solutions in nonlocal modified gravity. Rom. Journ. Phys. **58** (5-6), 550–559 (2013). [arXiv:1302.2794 [gr-qc]]

24. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Rakic, Z.: A new model of nonlocal modified gravity. Publications de l'Institut Mathematique **94** (108), 187–196 (2013)

25. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Rakic, Z.: Some pawer-law cosmological solutions in nonlocal modified gravity. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **111**, 241–250 (2014)

26. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Rakic, Z.: Some cosmological solutions of a nonlocal modified gravity. Filomat 29 (3), 619–628. arXiv:1508.05583 [hep-th]

27. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Koshelev A. S., Rakic, Z.: Cosmology of modified gravity with a non-local $f(R)$. arXiv:1509.04254 [hep-th]

28. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Koshelev A. S., Rakic, Z.: Paper in preparation.

29. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Koshelev A. S., Rakic, Z.: Variations of Infinite Derivative Modified Gravity arXiv:1902.08820 [hep-th]

30. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Koshelev A. S., Rakic, Z.: Cosmological Solutions of a Nonlocal Square Root Gravity, Physics Letters B, Volume 797, 134848. arXiv:1902.08820 [hep-th]

31. Dirian, Y., Foffa, S., Khosravi, N., Kunz, M., Maggiore, M.: Cosmological perturbations and structure formation in nonlocal infrared modifications of general relativity. [arXiv:1403.6068 [astro-ph.CO]]

32. Dragovich, B.: On nonlocal modified gravity and cosmology. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **111**, 251–262 (2014). arXiv:1508.06584 [gr-qc]

33. A. A. Starobinsky. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. Phys. Lett. B, 91:99 (102), 1980.

34. Dragovich, B.: Nonlocal dynamics of p-adic strings. Theor. Math. Phys. **164** (3), 1151–115 (2010). [arXiv:1011.0912v1 [hep-th]]

35. Dragovich, B.: Towards p-adic matter in the universe. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics **36**, 13–24 (2013). [arXiv:1205.4409 [hep-th]]

36. Dragovich, B., Khrennikov, A. Yu., Kozyrev, S. V., Volovich, I. V.: On p-adic mathematical physics. p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. **1** (1), 1–17 (2009). [arXiv:0904.4205 [math-ph]]

37. Edholm, J., Koshelev, A. S., Mazumdar, A.: Universality of testing ghost-free gravity. [arXiv: 1604.01989 [gr-qc]]

38. Elizalde, E., Pozdeeva, E.O., Vernov, S.Yu.: Stability of de Sitter solutions in non-local cosmological models. PoS(QFTHEP2011) 038, (2012). [arXiv:1202.0178 [gr-qc]]

39. Elizalde, E., Pozdeeva, E.O., Vernov, S.Yu., Zhang, Y.: Cosmological solutions of a nonlocal model with a perfect fluid. J. Cosmology Astropart. Phys. **1307**, 034 (2013). [arXiv:1302.4330v2 [hep-th]]

40. S. Y. Vernov, *Localization of Non-local Cosmological Models with Quadratic Potentials in the case of Double Roots*, Class. Quant. Grav. **27**, 035006 (2010) [arXiv:0907.0468 [hep-th]].

41. Jhingan, S., Nojiri, S., Odintsov, S.D., Sami, Thongkool M.I., Zerbini, S.: Phantom and non-phantom dark energy: The Cosmological relevance of non-locally corrected gravity. Phys. Lett. B **663**, 424-428 (2008). [arXiv:0803.2613 [hep-th]]

42. Koivisto, T.S.: Dynamics of nonlocal cosmology. Phys. Rev. D **77**, 123513 (2008). [arXiv: 0803.3399 [gr-qc]]

43. Koivisto, T.S.: Newtonian limit of nonlocal cosmology. Phys. Rev. D **78**, 123505 (2008). [arXiv:0807.3778 [gr-qc]]

44. Koshelev, A.S., Vernov, S.Yu.: On bouncing solutions in non-local gravity. Phys.Part.Nucl., 43:666-668, (2012). [arXiv:1202.1289v1 [hep-th]]

45. Koshelev, A.S., Vernov, S.Yu.: Cosmological solutions in nonlocal models. [arXiv:1406.5887v1 [gr-qc]]

46. Koshelev, A.S.: Modified non-local gravity. [arXiv:1112.6410v1 [hep-th]]

47. Koshelev, A.S.: Stable analytic bounce in non-local Einstein-Gauss-Bonnet cosmology. [arXiv: 1302.2140 [astro-ph.CO]]

48. Koshelev, A.S., Vernov, S.Yu.: Analysis of scalar perturbations in cosmological models with a non-local scalar field. Class. Quant. Grav. **28**, 085019 (2011). [arXiv:1009.0746v2 [hep-th]]

49. Koshelev, A.S., Modesto, L., Rachwal, L., Starobinsky, A.A.: Occurrence of exact R^2 inflation in non-local UV-complete gravity. [arXiv:1604.03127v1 [hep-th]]

50. Li, Y-D., Modesto, L., Rachwal, L.: Exact solutions and spacetime singularities in nonlocal gravity. JHEP **12**, 173 (2015). [arXiv:1506.08619 [hep-th]]

51. Modesto, L.: Super-renormalizable quantum gravity. Phys. Rev. D **86**, 044005 (2012). [arXiv: 1107.2403 [hep-th]]

52. Modesto, L., Rachwal, L.: Super-renormalizable and finite gravitational theories. Nucl. Phys. B **889**, 228 (2014). [arXiv:1407.8036 [hep-th]]

53. Modesto, L., Tsujikawa, S.: Non-local massive gravity. Phys. Lett. B **727**, 48–56 (2013). [arXiv:1307.6968 [hep-th]]

54. Moffat, J.M.: Ultraviolet complete quantum gravity. Eur. Phys. J. Plus **126**, 43 (2011). [arXiv:1008.2482 [gr-qc]]

55. Nojiri, S., Odintsov, S.D.: Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models. Phys. Rep. **505**, 59–144 (2011). [arXiv:1011.0544v4 [gr-qc]]

56. Nojiri, S., Odintsov, S.D.: Modified non-local-F(R) gravity as the key for inflation and dark energy. Phys. Lett. B **659**, 821–826 (2008). [arXiv:0708.0924v3 [hep-th]

57. Novello, M., Bergliaffa, S.E.P.: Bouncing cosmologies. Phys. Rep. **463**, 127–213 (2008). [arXiv:0802.1634 [astro-ph]]

58. T. P. Sotiriou, V. Faraoni, $f(R)$ theories of gravity. Rev. Mod. Phys. **82** (2010) 451–497. [arXiv:0805.1726v4 [gr-qc]]

59. Stelle, K.S.: Renormalization of higher derivative quantum gravity. Phys. Rev. D **16**, 953 (1977)

60. Vladimirov, V.S., Volovich, I.V., Zelenov, E.I., p-adic Analysis and Mathematical Physics, 1994

61. Woodard, R.P.: Nonlocal models of cosmic acceleration. [arXiv:1401.0254 [astro-ph.CO]]

62. Zhang, Y.-li., Sasaki, M.: Screening of cosmological constant in non-local cosmology. Int. J. Mod. Phys. D **21**, 1250006 (2012). [arXiv:1108.2112 [gr-qc]]

63. N. Aghanim, et al., Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, Planck collaboration. arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO].

REFERENCES

1. Abbott, B. P., et al., 2016, "(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration): Observation of gravitational waves from a binary black hole merger", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, 061102

2. Aref'eva, I.Ya., 2006, "Nonlocal string tachyon as a model for cosmological dark energy", *AIP Conf. Proc.*, vol. 826, no. 301, [astro-ph/0410443].

3. Aref'eva, I.Ya., Joukovskaya, L.V. & Vernov, S.Yu. 2007, "Bouncing and accelerating solutions in nonlocal stringy models", *JHEP*, vol. 0707, no. 087, [hep-th/0701184].

4. Barnaby, N., Biswas, T. & Cline, J.M. 2007, "p-Adic inflation", *JHEP*, vol. 0704, no. 056, [hep-th/0612230].

5. Barvinsky, A.O. 2012, "Dark energy and dark matter from nonlocal ghost-free gravity theory", *Phys. Lett. B*, vol. 710, pp. 12–16. Available at: arXiv:1107.1463 [hep-th]

6. Biswas, T., Gerwick, E., Koivisto, T. & Mazumdar, A. 2012, "Towards singularity and ghost free theories of gravity", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, 031101. [arXiv:1110.5249v2 [gr-qc]]

7. Biswas, T., Conroy, A., Koshelev, A.S. & Mazumdar, A. "Generalized gost-free quadratic curvature gravity", Available at: [arXiv:1308.2319 [hep-th]]

8. Biswas, T., Mazumdar, A. & Siegel, W 2006, "Bouncing universes in string-inspired gravity", *J. Cosmology Astropart. Phys.*, vol. 0603, no. 009. Available at: [arXiv:hep-th/0508194]

9. Biswas, T., Koshelev, A.S., Mazumdar, A. & Vernov, S.Yu. 2012, "Stable bounce and inflation in non-local higher derivative cosmology", *J. Cosmology Astropart. Phys.*, vol.08, no. 024. Available at: [arXiv:1206.6374 [astro-ph.CO]]

10. Brekke, L. & Freund, P.G.O. 1993, "p-Adic numbers in physics", *Phys. Rep.*, vol.233, pp. 1–66.

11. Briscese, F., Marciano, A., Modesto, L. & Saridakis, E.N. 2013, "Inflation in (super-)renormalizable gravity", *Phys. Rev. D*, vol.87, 083507. Available at: [arXiv:1212.3611v2 [hep-th]]

12. Calcagni, G., Modesto, L. & Nicolini, P. "Super-accelerting bouncing cosmology in assymptotically-free non-local gravity." Available at: [arXiv:1306.5332 [gr-qc]]

13. Calcagni, G. & Nardelli, G. 2010, "Nonlocal gravity and the diffusion equation." *Phys. Rev. D*, vol. 82, 123518. Available at: [arXiv:1004.5144 [hep-th]]

14. Capozziello S., Elizalde E., Nojiri S. & Odintsov S.D. 2009, "Accelerating cosmologies from non-local higher-derivative gravity", *Phys. Lett. B*, vol.671, no. 193. Available at: [arXiv:0809.1535]

15. Clifton,T., Ferreira, P.G., Padilla, A. & Skordis, C. 2012, "Modified gravity and cosmology", *Phys. Rep.*, vol. 513, pp. 1–189. Available at: [arXiv:1106.2476v2 [astro-ph.CO]]

16. Conroy, A., Koshelev, A. S. & Mazumdar, A., 2014, "Geodesic completeness and homogeneity condition for cosmic inflation", *Phys. Rev. D*, vol. 90, no. 12, 123525. Available at: [arXiv: 1408.6205 [gr-qc]].

17. Craps, B., de Jonckheere, T. & Koshelev, A.S.: "Cosmological perturbations in non-local higher-derivative gravity", Available at: [arXiv:1407.4982 [hep-th]]

18. Deffayet, C. & Woodard, R.P. 2009, "Reconstructing the distortion function for nonlocal cosmology", *JCAP*, vol.0908, no. 023. Available at: [arXiv:0904.0961 [gr-qc]]

19. Deser, S. & Woodard, R.P. 2007, "Nonlocal cosmology", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, 111301. Available at: [arXiv:0706.2151 [astro-ph]]

20. Dimitrijevic, I. 2016, "Cosmological solutions in modified gravity with monomial nonlocality", *Appl. Math. Comput.* pp. 195–203. Available at: [arXiv:1604.06824 [gr-qc]]

21. Dimitrijevic, I., "Geometric generalization of Einstein theory of gravity", PhD thesis of Belgrade University, (in Serbian), pp. 1-96.

22. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J. & Rakic, Z. 2013, "On modified gravity", *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 36, pp. 251–259. Available at: [arXiv:1202.2352 [hep-th]]

23. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J. & Rakic, Z. 2013, "New cosmological solutions in nonlocal modified gravity", *Rom. Journ. Phys.*, vol.58, no.5-6, pp. 550–559. Available at: [arXiv:1302.2794 [gr-qc]]

24. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J. & Rakic, Z. 2013, "A new model of nonlocal modified gravity", *Publications de l'Institut Mathematique*, vol.94, no.108, pp. 187–196.

25. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J. & Rakic, Z. 2014, “Some pawer-law cosmological solutions in nonlocal modified gravity”, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol.111, pp. 241–250.

26. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J. & Rakic, Z., “Some cosmological solutions of a nonlocal modified gravity”, *Filomat*, vol.29, no.3, pp. 619–628. Available at: arXiv:1508.05583 [hep-th]

27. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Koshelev A. S. & Rakic, Z., “Cosmology of modified gravity with a non-local $f(R)$” Available at: arXiv:1509.04254 [hep-th]

28. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Koshelev A. S. & Rakic, Z., Paper in preparation.

29. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Koshelev A. S. & Rakic, Z., “Variations of Infinite Derivative Modified Gravity” Available at: arXiv:1902.08820 [hep-th]

30. Dimitrijevic, I., Dragovich, B., Grujic J., Koshelev A. S. & Rakic, Z., “Cosmological Solutions of a Nonlocal Square Root Gravity”, *Physics Letters B*, vol. 797, 134848. Available at: arXiv:1902.08820 [hep-th]

31. Dirian, Y., Foffa, S., Khosravi, N., Kunz, M. & Maggiore, M., “Cosmological perturbations and structure formation in nonlocal infrared modifications of general relativity”. Available at: [arXiv:1403.6068 [astro-ph.CO]]

32. Dragovich, B. 2014, “On nonlocal modified gravity and cosmology”, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 111, pp. 251–262. Available at: arXiv:1508.06584 [gr-qc]

33. Starobinsky, A. A. 1980, “A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity”, *Phys. Lett. B*, vol. 91:99, no. 102.

34. Dragovich, B. 2010, “Nonlocal dynamics of p-adic strings”, *Theor. Math. Phys.*, vol.164, no.3, pp. 1151–115 (2010). Available at: [arXiv:1011.0912v1 [hep-th]]

35. Dragovich, B. 2013, “Towards p-adic matter in the universe”, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, vol.36, pp. 13–24. Available at: [arXiv:1205.4409 [hep-th]]

36. Dragovich, B., Khrennikov, A. Yu., Kozyrev, S. V. & Volovich, I. V. 2009, “On p-adic mathematical physics”, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, vol. 1, no. 1, pp. 1–17. Available at: [arXiv:0904.4205 [math-ph]]

37. Edholm, J., Koshelev, A. S. & Mazumdar, A. “Universality of testing ghost-free gravity”, Available at: [arXiv:1604.01989 [gr-qc]]

38. Elizalde, E., Pozdeeva, E.O. & Vernov, S.Yu. 2012, “Stability of de Sitter solutions in non-local cosmological models”, *PoS(QFTHEP2011)* 038. Available at: [arXiv:1202.0178 [gr-qc]]

39. Elizalde, E., Pozdeeva, E.O., Vernov, S.Yu. & Zhang, Y. 2013, “Cosmological solutions of a nonlocal model with a perfect fluid”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, vol.1307, no. 034. Available at: [arXiv:1302.4330v2 [hep-th]]

40. S. Y. Vernov, 2010, “Localization of Non-local Cosmological Models with Quadratic Potentials in the case of Double Roots”, *Class. Quant. Grav.*, vol. 27, no. 035006, Available at: [arXiv:0907.0468 [hep-th]].

41. Jhingan, S., Nojiri, S., Odintsov, S.D., Sami, Thongkool M.I. & Zerbini, S. 2008, “Phantom and non-phantom dark energy: The Cosmological relevance of non-locally corrected gravity”, *Phys. Lett. B*, vol. 663, pp. 424-428. Available at: [arXiv:0803.2613 [hep-th]]

42. Koivisto, T.S. 2008, “Dynamics of nonlocal cosmology”, *Phys. Rev. D*, vol. 77, 123513. Available at: [arXiv:0803.3399 [gr-qc]]

43. Koivisto, T.S. 2008, “Newtonian limit of nonlocal cosmology”, *Phys. Rev. D*, vol. 78, 123505. Available at: [arXiv:0807.3778 [gr-qc]]

44. Koshelev, A.S. & Vernov, S.Yu. 2012, “On bouncing solutions in non-local gravity”, *Phys. Part. Nucl.*, vol.43, pp.666-668. Available at: [arXiv:1202.1289v1 [hep-th]]

45. Koshelev, A.S. & Vernov, S.Yu. “Cosmological solutions in nonlocal models”, Available at: [arXiv:1406.5887v1 [gr-qc]]

46. Koshelev, A.S. “Modified non-local gravity”, Available at: [arXiv:1112.6410v1 [hep-th]]

47. Koshelev, A.S. “Stable analytic bounce in non-local Einstein-Gauss-Bonnet cosmology”, Available at: [arXiv:1302.2140 [astro-ph.CO]]

48. Koshelev, A.S. & Vernov, S.Yu. 2011, “Analysis of scalar perturbations in cosmological models with a non-local scalar field”, *Class. Quant. Grav.*, vol. 28, no. 085019. Available at: [arXiv:1009.0746v2 [hep-th]]

49. Koshelev, A.S., Modesto, L., Rachwal, L. & Starobinsky, A.A. “Occurrence of exact R^2 inflation in non-local UV-complete gravity”, Available at: [arXiv:1604.03127v1 [hep-th]]

50. Li, Y-D., Modesto, L. & Rachwal, L. 2015, “Exact solutions and spacetime singularities in nonlocal gravity”, *JHEP*, vol. 12, no. 173. Available at: [arXiv:1506.08619 [hep-th]]

51. Modesto, L. 2012, “Super-renormalizable quantum gravity”, *Phys. Rev. D*, vol. 86, 044005 (2012). Available at: [arXiv:1107.2403 [hep-th]]

52. Modesto, L. & Rachwal, L. 2014, “Super-renormalizable and finite gravitational theories”, *Nucl. Phys. B*, vol. 889, pp. 228. Available at: [arXiv:1407.8036 [hep-th]]

53. Modesto, L. & Tsujikawa, S. 2013, “Non-local massive gravity”, *Phys. Lett. B*, vol. 727, pp. 48–56. Available at: [arXiv:1307.6968 [hep-th]]

54. Moffat, J.M. 2011, “Ultraviolet complete quantum gravity”, *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 126, no. 43. Available at: [arXiv:1008.2482 [gr-qc]]

55. Nojiri, S. & Odintsov, S.D. 2011, “Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models”, *Phys. Rep.*, vol. 505, pp. 59–144. Available at: [arXiv:1011.0544v4 [gr-qc]]

56. Nojiri, S. & Odintsov, S.D., 2008, “Modified non-local-F(R) gravity as the key for inflation and dark energy”, *Phys. Lett. B*, vol. 659, pp. 821–826. Available at: [arXiv:0708.0924v3 [hep-th]

57. Novello, M. & Bergliaffa, S.E.P. 2008, “Bouncing cosmologies”, *Phys. Rep.*, vol. 463, pp. 127–213. Available at: [arXiv:0802.1634 [astro-ph]]

58. Sotiriou, T. P. & Faraoni, V. 2010, “$f(R)$ theories of gravity”, *Rev. Mod. Phys.*, vol.82, pp. 451–497. Available at: [arXiv:0805.1726v4 [gr-qc]]

59. Stelle, K.S. 1977, “Renormalization of higher derivative quantum gravity”, *Phys. Rev. D*, vol. 16, 953

60. Vladimirov, V.S., Volovich, I.V. & Zelenov, E.I., 1994, *p-adic Analysis and Mathematical Physics*

61. Woodard, R.P., “Nonlocal models of cosmic acceleration”, Available at: [arXiv:1401.0254 [astro-ph.CO]]

62. Zhang, Y.-li. & Sasaki, M. 2012, “Screening of cosmological constant in non-local cosmology”, *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 21, 1250006. Available at: [arXiv:1108.2112 [gr-qc]]

63. N. Aghanim, et al., “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, Planck collaboration”. Available at: arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO].

Получено 22.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 515.126 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-139-143

О ретрактах линейных конечномерных пространств, порождённых коэрцитивными отображениями [1]

С. Е. Жуковский

Жуковский Сергей Евгеньевич — доктор физико-математических наук, доцент, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН (г. Москва).
e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Аннотация

Рассматриваются коэрцитивные непрерывные инъективные отображения, действующие из одного линейного конечномерного пространства в другое. Доказано, что образы этих отображений являются ретрактами линейных пространств.

Ключевые слова: ретракт, коэрцитивное отображение, равномерная регулярность.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:
С. Е. Жуковский. О ретрактах линейных конечномерных пространств, порождённых коэрцитивными отображениями // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 139–143.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 515.126 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-139-143

On the retracts of finite-dimensional spaces, generated by coercive mappings

S. E. Zhukovskiy

Zhukovskiy Sergey Evgenevich — Doctor of Physics and Mathematics, associate professor, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS (Moscow).
e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Abstract

Coercive continuous injective mappings acting from one linear finite-dimensional space to another are considered. It is proved that the images of these mappings are retracts of linear spaces.

Keywords: retract, coercive mapping, uniform regularity

Bibliography: 4 titles.

For citation:
S. E. Zhukovskiy, 2020, "On the retracts of finite-dimensional spaces, generated by coercive mappings", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 139–143.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 20-31-70013) и Volkswagen Foundation. Результаты §2 получены при поддержке гранта Российского научного фонда (проект N 17-11-01168).

1. Retracts of linear finite-dimensional spaces

On the seminar "Differential geometry and applications" academician A. T. Fomenko proposed the following question to the author of this paper. Under what assumption the image of a mapping $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $k \geq n$, is a retract of the space $\mathbb{R}^k$? An answer to this question is a result below which provides a sufficient condition for $f(\mathbb{R}^n)$ to be a retract of $\mathbb{R}^k$.

Let a number $k \geq n$ and a mapping $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ be given.

Theorem 1. *Assume that f is continuous and injective. Then for the conditions*

(a) *f is coercive (i.e. if $|x| \to +\infty$ then $|f(x)| \to +\infty$),*

(b) *there exists a continuous left inverse mapping $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ to the mapping f (i.e. $g(f(x)) = x$ for every $x \in \mathbb{R}^n$),*

(c) *$f(\mathbb{R}^n)$ is a retract of $\mathbb{R}^k$,*

the following implications take place: $(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c)$.

Proof. Set $Y := f(\mathbb{R}^n)$ and denote by $h : Y \to \mathbb{R}^n$ a mapping which assigns to $y \in Y$ a point $x \in \mathbb{R}^n$ such that $f(x) = y$. The existence and uniqueness of this mapping follows from the injectivity of f. Denote by h_i a function which assigns to $y \in Y$ the i-th coordinate of $h(y)$, $i = \overline{1, n}$, i.e. $h(y) = (h_1(y), ..., h_n(y))$ for every $y \in Y$.

1) Prove $(a) \Rightarrow (b)$. We first show that h is continuous. Take arbitrary $y \in Y$, $\{y_j\} \subset Y$ such that $y_j \to y$. The sequence $\{h(y_j)\}$ is bounded since otherwise there exists a subsequence $\{h(y_{j_i})\}$ such that $|h(y_{j_i})| \to \infty$ and $f(h(y_{j_i})) = y_{j_i} \to y$, and this contradicts (a).

Show that the sequence $\{h(y_j)\}$ has at most one limit point. Indeed, since f is continuous and $f(h(y_j)) = y_j \to y$, for a limit point $x \in \mathbb{R}^n$ of the sequence $\{h(y_j)\}$ equality $f(x) = y$ holds. Injectivity of f implies that such a point x is unique.

Since the sequence $\{h(y_j)\}$ is bounded and has the only limit point, this sequence converges to this limit point $x \in \mathbb{R}^n$. Continuity of f implies that $y_j = f(h(y_j)) \to f(x)$. Hence, $f(x) = y$, thus $x = h(y)$. Continuity of h is proved.

Show that Y is closed. Take a sequence $\{y_j\} \subset Y$ and a point $y \in \mathbb{R}^k$ such that $y_j \to y$. The sequence $\{h(y_j)\}$ is bounded, since otherwise it has a subsequence $\{h(y_{j_i})\}$ such that $|h(y_{j_i})| \to \infty$ and $f(h(y_{j_i})) = y_{j_i} \to y$ in contradiction to (a). Hence, the sequence $\{h(y_j)\}$ has at least one limit point $x \in \mathbb{R}^n$. The continuity of f and the relation $f(h(y_j)) = y_j \to y$ imply $f(x) = y$. Hence, Y is closed.

So, each function $h_i : Y \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, is a continuous function and its domain is a closed subset of $\mathbb{R}^k$. The Tietze-Urysohn extension theorem (see, for instance, [1, Theorem 2.1.8]) implies that for every $i = \overline{1, n}$ there exists a continuous function $g_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ such that $g_i(y) = h_i(y)$ for every $y \in Y$. Define a mapping $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ by formula $g(y) := (g_1(y), ..., g_k(y))$, $y \in \mathbb{R}^k$. Obviously g is continuous and $g(f(x)) = h(f(x)) = x$ for every $x \in \mathbb{R}^n$.

2) Prove $(b) \Rightarrow (a)$. Assume the contrary, i.e. there exist a sequence $\{x_j\} \subset \mathbb{R}^n$ and a point $y \in \mathbb{R}^k$ such that $x_j \to \infty$ and $f(x_j) \to y$ as $j \to \infty$. Put $y_j := f(x_j)$, $j = 1, 2, \ldots$. Then $g(y_j) = x_j \to \infty$ and the sequence $\{y_j\}$ converges, in contradiction to continuity of g.

3) Prove $(b) \Rightarrow (c)$. It is obvious that $y \mapsto f(g(y))$, $y \in \mathbb{R}^k$, is a retraction of $\mathbb{R}^k$ onto Y. □

In the proof of the theorem it is shown that (a) implies that the image Y of f is closed. Let us show that under the assumptions of continuity and injectivity of f the closedness of Y is not sufficient for Y to be a retraction of $\mathbb{R}^k$.

Example 1. *Let $S_1 \subset \mathbb{R}^2$ be a circle with radius one centered at the point $y_1 = (1, 0)$ and $S_2 \subset \mathbb{R}^2$ be a circle with radius one centered at the point $y_2 = (-1, 0)$. Define the mapping*

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ by formula

$$f(x)=y_1+(-\cos(4\mathrm{arctg}x),\sin(4\mathrm{arctg}x)),\quad \textit{for}\quad x\geq 0,$$

$$f(x)=y_2+(\cos(4\mathrm{arctg}x),\sin(4\mathrm{arctg}x)),\quad \textit{for}\quad x<0.$$

Obviously, this mapping is continuous (in particular, at the point $x=0$, the value of f and the left-hand and the right-hand limits of f equal $(0,0)$) and injective. Moreover, f assigns to nonnegative numbers the circle S_1 and assigns to nonpositive numbers the circle S_2. Therefore, the image $Y=S_1\cup S_2$ of f is closed. Since Y is bounded, f is not coercive.

Show that Y is not a retract of $\mathbb{R}^2$. Assume the contrary, i.e. there exists a retraction $r:\mathbb{R}^2\to Y$. Consider the mapping $w:Y\to S_1$, $w(y)=y$ for $y\in S_1$, $w(y)=(0,0)$ for $y\in S_2$. Obviously the mapping $y\mapsto w(r(y))$, $y\in\mathbb{R}^2$, is a retraction of $\mathbb{R}^2$ onto S_1. Hence, a circle is a retract of a plane which is impossible (see, for instance, [2, §3.4]). Therefore, Y is not a retract of $\mathbb{R}^2$.

Remark 1. *In connection with Theorem 1 there appears the following natural question. Is the implication (c) ⇒ (a) true? The author does not know the answer to this question yet.*

2. Images and preimages of retracts

Let us state a corollary of Theorem 1 which provides sufficient condition for an image of a retract to be a retract.

Corollary 1. *Let f be continuous, injective and coercive, $U\subset\mathbb{R}^n$ be a retract of $\mathbb{R}^n$. Then $f(U)$ is a retract of $\mathbb{R}^k$.*

Proof. Let $r:\mathbb{R}^n\to U$ be a retraction. By virtue of the proposition $(a)\Rightarrow(b)$ of Theorem 1 there exists a continuous mapping $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ such that $g(f(x))=x$ for every $x\in\mathbb{R}^n$. Show that the mapping $y\mapsto f(r(g(y)))$, $y\in\mathbb{R}^k$, is a retraction onto $f(U)$.

Since $g(\mathbb{R}^k)=\mathbb{R}^n$ and $r(\mathbb{R}^n)=U$, then $f(r(g(\mathbb{R}^k)))=f(U)$. Further, for every $y\in f(U)$ there exists $x\in U$ such that $f(x)=y$. The definition of g implies $g(y)=g(f(x))=x$, the definition of r and the inclusion $x\in U$ implies $r(x)=x$, thus

$$f(r(g(y)))=f(r(x))=f(x)=y.$$

Therefore, the mapping $f(r(g(\cdot)))$ is a retraction and its image coincide with $f(U)$. □

Let us now state conditions for preimage of a retract to be a retract.

Everywhere below we assume that the spaces $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^k$ are equipped with Euclidian norms. For arbitrary linear operator $A:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ denote by A^* the adjoint operator, for arbitrary linear operator $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ denote by $\|A\|$ the norm of A.

Proposition 1. *Let $U\subset\mathbb{R}^n$ be a retract of $\mathbb{R}^n$, a mapping $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ be twice continuosly differentiable, the linear operator $\dfrac{\partial g}{\partial y}(y)$ be surjective for every $y\in\mathbb{R}^k$ and*

$$\exists\, c\geq 0:\quad \left\|\frac{\partial g}{\partial y}(y)^*\left(\frac{\partial g}{\partial y}(y)\cdot\frac{\partial g}{\partial y}(y)^*\right)^{-1}\right\|\leq c\quad \forall\, y\in\mathbb{R}^k. \tag{1}$$

Then the set $g^{-1}(U):=\{y\in\mathbb{R}^k:\, g(y)\in U\}$ is a retract of $\mathbb{R}^n$.

Proof. Assume $g(0)=0$, without loss of generality. Put $M:=\{y\in\mathbb{R}^k:\ g(y)=0\}$, and let $s:\mathbb{R}^n\to U$ be a retraction. By virtue of [3, Theorem 1] there exists a homeomorphism $F:M\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ such that

$$g(F(\xi,x))=x\quad \forall\,(\xi,x)\in M\times\mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Denote by $a:\mathbb{R}^k\to M$ and $b:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ the projections of F^{-1} onto M and $\mathbb{R}^n$, respectively, i.e.

$$F^{-1}(y)=(a(y),b(y))\quad\forall\, y\in\mathbb{R}^k.$$

Show that $b=g$. Take arbitrary point $y\in\mathbb{R}^k$. We have $y=F(F^{-1}(y))=F(a(y),b(y))$. Thus,

$$g(y)=g(F(a(y),b(y)))=b(y).$$

Here, the second equality follows from (2). Thus $b=g$. This identity implies that

$$F(a(y),g(y))=F(a(y),b(y))=F(F^{-1}(y))=y\quad\forall\, y\in\mathbb{R}^k. \tag{3}$$

Define a mapping $r:\mathbb{R}^k\to g^{-1}(U)$ by formula

$$r(y):=F(a(y),s(g(y))),\quad y\in\mathbb{R}^k.$$

Show that it is well defined, i.e. $r(\mathbb{R}^k)\subset g^{-1}(U)$. For arbitrary $y\in\mathbb{R}^k$, we have $s(g(y))\in U$ by virtue of the definition of s. Thus, (2) implies

$$g(F(a(y),s(g(y))))=s(g(y))\in U.$$

So, the mapping r is well defined.

Show that r is a retraction. Take arbitrary $y\in g^{-1}(U)$. Put $x:=g(y)$. Obviously $x\in U$. We have

$$r(y)=F(a(y),s(g(y)))=F(a(y),s(x))=F(a(y),x).$$

Here, the last equality follows from the inclusion $x\in U$ since $s:\mathbb{R}^n\to U$ is a retraction. Further,

$$F(a(y),x)=F(a(y),g(y))=y.$$

Here, the last equality follows from (3). So, r is a retraction and $g^{-1}(U)$ is a retract. $\square$

Remark 2. *The assumption of nondegeneracy of the derivatives in Proposition 1 is essential. Indeed, let $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(y)=y^2$, $y\in\mathbb{R}$, $U=\{1\}$. The set U is obviously a retract of $\mathbb{R}$, however the set $g^{-1}(U)=\{-1,1\}$ is not a retract of $\mathbb{R}$ since $g^{-1}(U)$ is not connected.*

The uniform regularity assumption (1) is also essential. Indeed, let $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(y)=e^y$, $y\in\mathbb{R}$, $U=\mathbb{R}$ is obviously a retract of $\mathbb{R}$, however the set $g^{-1}(U)=(0,+\infty)$ is not a retract of $\mathbb{R}$ since $g^{-1}(U)$ is not closed.

In case $n=k$, Proposition 1 is a corollary of Hadamard's global homeomorphism theorem (see, for instance, [4, Theorem 5.3.10]). Indeed, if $n=k$ the surjectivity of linear operators $\dfrac{\partial g}{\partial y}(y)$, $y\in\mathbb{R}^k$, is equivalent to there invertability and uniform regularity condition (1) takes the following form:

$$\exists\, c\geq 0:\quad \left\|\left(\frac{\partial g}{\partial y}(y)\right)^{-1}\right\|\leq c\quad\forall\, y\in\mathbb{R}^k.$$

So, g satisfies the assumptions of Hadamard's theorem. Thus, g is a homeomorphism. Hence, if U is a retract, then $g^{-1}(U)$ is a retract.

Author expresses his sincere thanks to Academician A.T. Fomenko for the statement of the problem and useful discussions.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. Энгелькинг, Общая топология, М.: Мир, 1986.

2. А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии, М.: Наука, 1989.

3. А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции, Дифф. уравнения, 2019, т. 55, N 4, с. 452–463.

4. Дж. Ортега, В. Рейнболдт, Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, М.: Мир, 1975.

REFERENCES

1. Engelking, R. 1986, *General topology*, Mir, Moscow (in Russian).

2. Fomenko, A. T., Fuks, D. B. 1989, *A course in homotopic topology*, Nauka, Moscow.

3. Arutyunov A. V., Zhukovskiy S. E., 2019, "Application of Methods of Ordinary Differential Equations to Global Inverse Function Theorems", *Differential Equations*, vol. 55, no. 4, pp. 437-–448.

4. Ortega J., Reinboldt V., 1975, *Iterative methods for solving nonlinear systems of equations with many variables*, Mir Publ., Moscow.

Получено 28.11.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 517.977.57; 517.958 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-144-158

Оптимальное управление с обратной связью для одной модели движения нелинейно-вязкой жидкости[1]

В. Г. Звягин, А. В. Звягин, Н. М. Хонг

Звягин Виктор Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет (г. Воронеж).
e-mail: zvg_vsu@mail.ru
Звягин Андрей Викторович — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Воронежский государственный педагогический университет (г. Воронеж).
e-mail: zvyagin.a@mail.ru
Хонг Нгуен Минь — научный сотрудник, Научно-исследовательский институт математики Воронежского государственного университета (г. Воронеж).
e-mail: nmhong93@gmail.com

Аннотация

В работе рассматривается задача оптимального управления с обратной связью для начально-краевой задачи, описывающей движение нелинейно-вязкой жидкости. Доказывается существование оптимального решения, дающего минимум заданному функционалу качества. Для доказательства существования оптимального решения используется аппроксимационно-топологический метод исследования задач гидродинамики.

Ключевые слова: оптимальное управление с обратной связью, теорема существования, нелинейно-вязкая жидкость.

Библиография: 17 названия.

Для цитирования:
В. Г. Звягин, А. В. Звягин, Н. М. Хонг. Оптимальное управление с обратной связью для одной модели движения нелинейно-вязкой жидкости // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 144–158.

[1]Исследования первого автора выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00146, Теорема 1) и за счет гранта РФФИ в рамках научного проекта грант № 20-01-00051 (Леммы 1-2). Исследования второго автора выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта грант № 19-31-60014 (Теорема 2).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 517.977.57; 517.958 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-144-158

Optimal feedback control for one motion model of a nonlinearly viscous fluid

V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin, N. M. Hong

Zvyagin Viktor Grigor'evich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh State University (Voronezh).
e-mail: zvg_vsu@mail.ru
Zvyagin Andrey Viktorovich — Candidate of Physics and Mathematics, leading researcher, Voronezh State Pedagogical University (Voronezh).
e-mail: zvyagin.a@mail.ru
Hong Nguyen Minh — Researcher, Research Institute of Mathematics, Voronezh State University (Voronezh).
e-mail: nmhong93@gmail.com

Abstract

An optimal control problem with a feedback is considered for an initial boundary problem describing a motion of non-linearly viscous liquid. An existence of an optimal solution minimising a given quality functional is proved. A topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics is used in the proof of existence of an optimal solution.

Keywords: optimal control with feedback, existence theorem, nonlinearly viscous fluid.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin, N. M. Hong, 2020, "Optimal feedback control for one motion model of a nonlinearly viscous fluid" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 144–158.

Посвящается академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко по случаю 75-летия

1. Введение

Движение несжимаемой нелинейно–вязкой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset R^n$, $n = 2, 3$, на промежутке времени $[0, T]$ $(T < \infty)$ описывается следующей начально–краевой задачей:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\ \left[2\mu\big(I_2(v)\big)\varepsilon(v)\right] + \mathrm{grad}\ p = f, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\ v = 0, \qquad v|_{t=0} = v_0(x), \qquad v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{2}$$

Здесь $v(x,t)$ — вектор–функция скорости частицы жидкости в точке $x \in \Omega$ в момент времени $t \in [0,T]$; p — функция давления в жидкости; f — плотность внешних сил; ε — тензор скоростей деформации $\varepsilon(v) = \big(\varepsilon_{ij}(v)\big)$, $\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\big)$, тензор $I_2(v)$ определяется равенством:

$$I_2^2(v) = \varepsilon(v) : \varepsilon(v) = \sum_{i,j=1}^{n} \left[\varepsilon_{ij}(v)\right]^2.$$

Здесь для произвольных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ используется символ $A : B = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$. Символ Div M обозначающий дивергенцию тензора $M = (m_{ij})$, т. е. вектор

$$\operatorname{Div} M = \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial m_{1j}}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial m_{nj}}{\partial x_j}\Big).$$

Данная математическая модель подробно исследовалась в работах профессора В. Г. Литвинова (см. [1]), где приведены естественные ограничения на вязкость рассматриваемой среды через свойства функции $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$: $\mu(s)$ должна быть определенная при $s \geqslant 0$ непрерывно дифференцируемая скалярная функция, для которой выполнены неравенства

a) $0 < C_1 \leqslant \mu(s) \leqslant C_2 < \infty$;

b) $-s\mu'(s) \leqslant \mu(s)$ при $\mu'(s) < 0$;

c) $|s\mu'(s)| \leqslant C_3 < \infty$.

Здесь и далее через C_i обозначаются различные константы.

Вопрос существования решений для данной задачи рассматривался в работах В. Г. Литвинова (см., например, [1]), П. Е. Соболевского [2], В. Г. Звягина [3] и др. В работе [4] установлено существование траекторных и глобальных аттракторов для рассматриваемой начально-краевой задачи (1)–(2) в автономном случае.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления с обратной связью для системы уравнений (1)–(2). Исследованию задач управления посвящено большое количество работ (см. [5]-[7]). Однако, в то время как управление для линейных систем более или менее изучено, управление для нелинейных систем остается серьезной задачей (даже для конечномерных или локальных областей). На практике часто возникает задача управления (оптимального управления) движением жидкости при помощи внешних сил. Обычно при решении таких задач управление выбирается из некоторого заданного (конечного) множества управлений. В данной работе рассматривается управление внешними силами, которые зависят от скорости движения жидкости. Такие задачи называются задачами с обратной связью (см., например, [8]-[10] и приведенную там библиографию). Эта позволяет более точно выбирать управление, поскольку в данном случае управление выбирается не из конечного набора имеющихся управлений, а принадлежит образу некоторого многозначного отображения (естественно, что на это отображение накладываются некоторые условия), что может позволить более точно выбрать управление.

В данной работе изучается вопрос существования решений задачи управления с обратной связью для модели нелинейно–вязкой жидкости (1)–(2), а так же доказывается существование оптимального решения рассматриваемой задачи, дающего минимум заданному ограниченному функционалу качества.

2. Постановка задачи и основные результаты

Сначала введем основные обозначения и вспомогательные утверждения.

Через $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество измеримых вектор–функций $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-ой степенью. Через $W_p^m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, будем обозначать пространства Соболева. Через $C_0^\infty(\Omega)^n$ мы обозначим пространство бесконечно–дифференцируемых вектор–функций из Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω. Обозначим через $\mathcal{V}$ множество $\{v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$. Через H мы обозначим замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, через V — по норме $W_2^1(\Omega)$.

Введем основное пространство, в котором будут изучаться слабые решения изучаемой задачи:

$$W_1 = \{v : v \in L_2(0,T,V) \cap L_\infty(0,T;H), v' \in L_1(0,T,V^*)\}.$$

Пространство W_1 снабжено нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0,T,V)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;H)} + \|v'\|_{L_1(0,T,V^*)}$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W_1 \multimap L_2(0,T,V^*)$ в качестве функции управления. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) Отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные и выпуклые значения;

(Ψ2) Отображение Ψ компактно и полунепрерывно сверху (т.е. для любой функции $v \in W_1$ и открытого множества $Y \subset L_2(0,T,V^*)$, такого что $\Psi(v) \subset Y$, существует окрестность $U(v)$ такая, что $\Psi(U(v)) \subset Y$);

(Ψ3) Отображение Ψ глобально ограничено, то есть существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T,V^*)} := \sup\{\|u\|_{L_2(0,T,V^*)} : u \in \Psi(v)\} \leq C \text{ для всех } v \in W_1;$$

(Ψ4) Отображение Ψ слабо замкнуто в следующем смысле: если $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W_1, v_l \rightharpoonup v_0, u_l \in \in \Psi(v_l)$ и $u_l \to u_0$ в $L_2(0,T,V^*)$ тогда $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Будем рассматривать слабую постановку задачи управления с обратной связью для начально–краевой задачи (1)–(2). Под обратной связью мы понимаем условие

$$f \in \Psi(v). \tag{3}$$

Определение 1. *Пара функций $(v,f) \in W_1 \times L_2(0,T,V^*)$ называется слабым решением задачи с обратной связью (1)–(2), если она удовлетворяет при всех $\varphi \in V$ и п.в. $t \in [0,T]$ равенству*

$$\langle v', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + 2\int\limits_\Omega \mu(I_2(v))\varepsilon(v) : \varepsilon(\varphi)\, dx = \langle f, \varphi\rangle, \tag{4}$$

начальному условию $v(0) = v_0$ и условию обратной связи (3).

Здесь и далее $\langle v', \varphi\rangle = (\dfrac{\partial v}{\partial t}, \varphi)$.

Первым результатом работы является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение Ψ удовлетворяет условиям $(\Psi1)-(\Psi4)$, а вязкость рассматриваемой среды удовлетворяет условиям $a)-c)$. Тогда существует хотя бы одно решение $(v_*, f_*) \in W_1 \times L_2(0,T,V^*)$ задачи с обратной связью (1)–(2), (3).*

Обозначим через $\Sigma \subset W_1 \times L_2(0,T;V^*)$ множество всех слабых решений задачи управления с обратной связью (1)–(2), (3). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Φ1) Существует число γ такое, что $\Phi(v,f) \geqslant \gamma$ для всех $(v,f) \in \Sigma$.

(Ψ2) Если $v_l \rightharpoonup v_*$ в W_1 и $f_l \to f_*$ в $L_2(0,T;V^*)$, то $\Phi(v_*, f_*) \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \Phi(v_l, f_l)$.

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 2. *Если отображение Ψ удовлетворяет условиям* $(\Psi1)$–$(\Psi4)$, *вязкость рассматриваемой среды удовлетворяет условиям a) − c), а функционал Φ удовлетворяет условиям* $(\Phi1), (\Phi2)$, *тогда задача оптимального управления с обратной связью* (1)–(2), (3) *имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что*

$$\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f).$$

Доказательство теорем 1 и 2 основано на аппроксимационно–топологическом методе исследования задач гидродинамики (см. [11], [12]). Для этого сначала переходят к операторной трактовке рассматриваемой задачи (операторному включению) в подходящих функциональных пространствах. Далее, в связи с тем, что операторы в полученном операторном включении не обладают необходимыми свойствами, рассматривается задача, аппроксимирующая исходную (в данном случае это тоже операторное включение, но с лучшим оператором, обладающим требуемыми свойствами и в более лучших функциональных пространствах). После чего на основе априорных оценок решений и теории топологической степени многозначных векторных полей доказывается существование решения аппроксимационной задачи. И, наконец, показывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в некотором смысле к решению исходного операторного включения. После доказательства разрешимости задачи управления показывается, что в множестве решений найдется хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества (именно поэтому данный вид задач называют задачами оптимального управления движением жидкости с обратной связью).

Работа организована следующий образом. В пункте 3 рассматривается операторная трактовка изучаемой задачи и доказываются необходимые свойства введенных операторов. В пункте 4 вводится аппроксимационная задача и изучаются улучшенные свойства новых операторов. В следующем пункте 5 на основе теории топологической степени многозначных отображений доказывается разрешимость аппроксимационной задачи и устанавливаются необходимые оценки решений аппроксимационной задачи. Пункт 6 посвящен предельному переходу и доказательству теоремы 1, а заключительный пункт 7 — доказательству теоремы 2.

3. Операторная трактовка

Дадим операторную трактовку рассматриваемой задачи. Введем операторы при помощи следующих равенств:

$$K : V \to V^*, \quad \langle K(v), \varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in V, \varphi \in V;$$

$$D : V \to V^*, \quad \langle D(v), \varphi\rangle = 2\int_\Omega \mu(I_2(v))\varepsilon(v) : \varepsilon(\varphi)\, dx, \quad v \in V, \varphi \in V.$$

Тогда из (4) в силу произвольности функции φ получаем следующее операторное уравнение:

$$v'(t) + D(v) - K(v) = f. \tag{5}$$

Таким образом, слабое решение задачи с обратной связью (1)–(2), (3) – это решение $(v, f) \in W_1 \times L_2(0, T, V^*)$ операторного уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию $v|_{t=0} = v_0$ и условию обратной связи (3).

Отметим некоторые свойства введенных выше операторов.

Лемма 1. *Отображение $K : L_2(0,T;V) \to L_1(0,T;V^*)$ непрерывно и справедлива оценка*

$$\|K(v(t))\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_4\|u\|^2_{L_2(0,T;V)}.$$

Доказательство данного факта приведено в монографии [13].

Лемма 2. *Отображение $D : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ непрерывно и монотонно.*

Доказательство. Покажем непрерывность оператора D. Положив $z = v - u$ и используя теорему Лагранжа на интервале $[0,1]$ для функции $f(\delta) = \mu(I_2(u+\delta z))\varepsilon(u+\delta z) : \varepsilon(w)$, получим:

$$\langle D(v) - D(u), w\rangle = 2\int\limits_\Omega [\mu(I_2(v))\varepsilon(v) - \mu(I_2(u))\varepsilon(u)] : \varepsilon(w)\, dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \frac{d}{d\delta}[\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(u+\delta_0 z)] : \varepsilon(w)\, dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(z) + \frac{d}{d\delta}\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(u+\delta_0 z)\right] : \varepsilon(w)\, dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(w) + \frac{\varepsilon(u+\delta_0 z) : \varepsilon(z)}{(\varepsilon(u+\delta_0 z) : \varepsilon(u+\delta_0 z))^{\frac{1}{2}}}\frac{d\mu(I_2(u+\delta_0 z))}{dI_2(u+\delta_0 z)}\varepsilon(u+\delta_0 z) : \varepsilon(w)\right] dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(w) + \frac{1}{I_2(u+\delta_0 z)}\frac{d\mu(I_2(u+\delta_0 z))}{dI_2(u+\delta_0 z)}(\varepsilon(u+\delta_0 z) : \varepsilon(z))(\varepsilon(u+\delta_0 z) : \varepsilon(w))\right] dx.$$

Следовательно

$$|\langle D(v) - D(u), w\rangle| \leqslant 2\Big|\int\limits_\Omega \mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(w)\, dx\Big| +$$

$$+2\left|\int\limits_\Omega I_2(u+\delta_0 z)\frac{d\mu(I_2(u+\delta_0 z))}{dI_2(u+\delta_0 z)}I_2(z)I_2(w)\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2C_5\left(\int\limits_\Omega I_2^2(z)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_\Omega I_2^2(w)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} + 2C_5\left(\int\limits_\Omega I_2^2(z)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_\Omega I_2^2(w)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_6\|z\|_{L_2(\Omega)}\|w\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_7\|z\|_V\|w\|_V.$$

Следовательно, $\|D(v)-D(u)\|_{V^*} \leqslant C_7\|v-u\|_V$. Таким образом, оператор $D : V \to V^*$ непрерывен. Последнее неравенство выполнено для почти всех $t \in (0,T)$, возведем его в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T, получим

$$\int\limits_0^T \|D(v) - D(u)\|^2_{V^*}\, dx \leqslant C_7\int\limits_0^T \|v-u\|^2_V\, dx.$$

Так как $\|v-u\|_V \in L_2(0,T)$, то $\|D(v)-D(u)\|_{V^*} \in L_2(0,T)$ и, следовательно, $D(v)-D(u) \in$ $\in L_2(0,T;V^*)$. Из последней оценки следует требуемое неравенство:

$$\|D(v) - D(u)\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant C_7\|v-u\|_{L_2(0,T;V)}.$$

Теперь покажем монотонность оператора $D(v)$. Здесь также применим теорему Лагранжа к той же функции, что и выше.

$$\langle D(v)-D(u),v-u\rangle = 2\int\limits_\Omega [\mu(I_2(v))\varepsilon(v)-\mu(I_2(u))\varepsilon(u)]:\varepsilon(v-u)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \frac{d}{d\delta}[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(v+\delta_0 z)]:\varepsilon(z)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z)+\frac{d}{d\delta}\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(v+\delta_0 z)\right]:\varepsilon(z)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z):\varepsilon(z)+\frac{d}{d\delta}\mu((\varepsilon(v+\delta_0 z):\varepsilon(v+\delta_0 z))^{\frac{1}{2}})\varepsilon(v+\delta_0 z):\varepsilon(z)\right]dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z):\varepsilon(z)+\frac{\varepsilon(v+\delta_0 z):\varepsilon(z)}{(\varepsilon(v+\delta_0 z):\varepsilon(v+\delta_0 z))^{\frac{1}{2}}}\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}\varepsilon(v+\delta_0 z):\varepsilon(z)\right]dx=$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z):\varepsilon(z)+\frac{1}{I_2(v+\delta_0 z)}\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}(\varepsilon(v+\delta_0 z):\varepsilon(z))^2\right]dx.$$

Если $\dfrac{d\mu(s)}{ds}\geqslant 0$, тогда подынтегральная функция больше либо равна нулю. Следовательно

$$\langle D(u)-D(v),u-v\rangle\geqslant 0.$$

Если $\dfrac{d\mu(s)}{ds}\leqslant 0$, используя $s\dfrac{d\mu(s)}{ds}\geqslant-\mu(s)$, получим требуемое неравенство:

$$2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z):\varepsilon(z)+\frac{1}{I_2(v+\delta_0 z)}\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}(\varepsilon(v+\delta_0 z):\varepsilon(z))^2\right]dx\geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z):\varepsilon(z)+\frac{I_2(v+\delta_0 z)}{I_2^2(v+\delta_0 z)}\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}I_2^2(v+\delta_0 z)I_2^2(z)\right]dx\geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z):\varepsilon(z)+I_2(v+\delta_0 z)\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}I_2^2(z)\right]dx\geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))I_2^2(z)-\mu(I_2(v+\delta_0 z))I_2^2(z)\right]dx\geqslant 0,$$

что и завершает доказательство данной леммы. □

4. Аппроксимационная задача

Рассмотрим оператор $K_\delta(v)$, аппроксимирующий оператор $K(v)$:

$$K_\delta: V\to V^*,\quad \langle K_\delta(v),\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n\frac{v_iv_j}{1+\delta|v|^2}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx,\quad v\in V,\,\varphi\in V.$$

Здесь $|v|^2=\sum_{i=1}^n v_iv_i$ и δ — положительная константа.

Рассмотрим аппроксимационную задачу, заменяя в операторном уравнении (5) оператор $K(v)$ на оператор $K_\delta(v)$. По аналогии определения слабого решения исходной задачи, дадим определение слабого решения аппроксимационной задачи. Для этого введем пространство

$$W = \{v : v \in L_2(0,T;V),\ v' \in L_2(0,T;V^*)\}$$

с нормой $\|v\|_W = \|v\|_{L_2(0,T;V)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^*)}$.

Определение 2. *Пара функций $(v, f) \in W \times L_2(0,T,V^*)$ называется слабым решением аппроксимационной задачи с обратной связью, если она удовлетворяет операторному равенству*

$$v'(t) + D(v) - K_\delta(v) = f, \tag{6}$$

начальному условию $v(0) = v_0$ и условию обратной связи

$$f \in \Psi(v). \tag{7}$$

Приведем свойства аппроксимационного оператора $K_\delta(v)$, доказанные в монографии [14]:

Лемма 3. 1. *Для любого $\delta > 0$ отображение $K_\delta : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ корректно определено, непрерывно и справедлива оценка*

$$||K_\delta(v)||_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant \frac{C_8}{\delta} \tag{8}$$

с некоторой константой C_8, не зависящей от v.

2. *Для любого $\delta > 0$ отображение $K_\delta : W \to L_2(0,T;V^*)$ вполне непрерывно.*

3. *Для любого $\delta \geqslant 0$ справедлива оценка*

$$||K_\delta(v)||_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_9|v||^2_{L_2(0,T;V)}$$

с некоторой константой C_9, не зависящей от v и δ.

Для дальнейшего исследования введем новые операторы:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L} : W \to L_2(0,T;V^*) \times H, && \mathbf{L}(v) = (v' + D(v), v|_{t=0});\\
&\mathbf{K}_\delta : W \subset L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*) \times H, && \mathbf{K}_\delta(v) = (K_\delta(v), 0);\\
&\mathbf{\Psi} : W \to L_2(0,T;V^*) \times H, && \mathbf{\Psi}(v) = (\Psi(v), v_0)
\end{aligned}$$

и запишем аппроксимационную задачу в более компактном виде:

$$\mathbf{L}(v) - \mathbf{K}_\delta(v) \in \mathbf{\Psi}(v). \tag{9}$$

Исследуем свойства оператора $\mathbf{L}$.

Лемма 4. *Нелинейное отображение $\mathbf{L} : W \to L_2(0,T;V^*) \times H$, корректно определено, обратимо и справедлива оценка*

$$\|v\|_W \leqslant C_{10}\|\mathbf{L}(v)\|_{L_2(0,T;V^*)\times H}, \tag{10}$$

для любых $v \in W$ и некоторой константы C_{10}. Обратный оператор $\mathbf{L}^{-1} : L_2(0,T;V^*) \times H \to W$ непрерывен и

$$\|\mathbf{L}^{-1}(f, v_0)\|_W \leqslant C_{11}(\|v_0\|_H + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}).$$

Доказательство.

Оператор взятия производной непрерывен, это следует из определения пространства W, оператор $D(v)$ непрерывен по доказанному выше. Так как вложение $W \subset C([0,T],H)$ непрерывно (см. [13]), то оператор взятия следа функции $v|_{t=0}$ корректно определен и непрерывен, а следовательно, корректно определен и непрерывен оператор $\mathbf{L}$.

Докажем оценку (10). Для $v \in W$ обозначим $\mathbf{L}(v) = (\hat{f}, \hat{v}_0)$. При каждом фиксированном $t \in [0,T]$ применим функционалы $v' + D(v) = \hat{f}$ к функции $v(t) \in V$

$$\langle v'(t), v(t)\rangle + \langle D(v), v(t)\rangle = \langle \hat{f}(t), v(t)\rangle.$$

Так как

$$\langle v'(t), v(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2;$$
$$\langle \hat{f}(t), v(t)\rangle_V \leqslant \|\hat{f}(t)\|_{V^*}\|v(t)\|_V;$$
$$\langle D(v), v(t)\rangle = 2\int\limits_\Omega \mu(I_2(v))\varepsilon(v):\varepsilon(v)\,dx \geqslant 2C_{12}\int\limits_\Omega \varepsilon(v):\varepsilon(v)\,dx \geqslant C_{12}||v||_V^2.$$

Последнее неравенство выполнено в силу первого неравенства Корна (см. [15], Часть 1, Пункт 12).

Проинтегрируем полученное неравенство по переменной t на отрезке $[0,t]$. Используя начальное условие для функции $v(t)$ и неравенство Коши $a\cdot b \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ $(\forall \varepsilon, a, b > 0)$, приходим к оценке:

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|\hat{v}^0\|_H^2 + C_{12}\int_0^t \|v(\tau)\|_V^2 d\tau \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \|\hat{f}(t)\|_{V^*}^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^t \|v(\tau)\|_V^2 d\tau$$

теперь выбирая $\varepsilon = C_{12}$, получаем

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}C_{12}\int_0^t \|v(\tau)\|_V^2 d\tau \leqslant \frac{1}{2}\|\hat{v}^0\|_H^2 + \frac{1}{2C_{12}}\int_0^t \|\hat{f}(t)\|_{V^*}^2 d\tau,$$

умножим обе части неравенства на 2 и вычислим максимум по $t \in [0,T]$, получим

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_H^2 + C_{12}\|v\|_{L_2(0,T;V)}^2 \leqslant \|\hat{v}^0\|_H^2 + \frac{1}{C_{12}}\|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)}^2$$

Используя неравенство $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, $a,b > 0$, отсюда нетрудно получить итоговую оценку

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_H + \|v\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{13}(\|\hat{v}^0\|_H + \|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)})$$

с некоторой константой C_{13}.

Для того, чтобы оценить$\|v'\|_{L_2(0,T;V^*)}$, воспользуемся равенством $v' = -D(v) + \hat{f}$, оценкой $\|D(v)\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant C_{14}\|v\|_{L_2(0,T;V)}$ и полученной выше оценкой

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant \|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|D(v)\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant \|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)} + C_{14}\|v\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{15}(\|\hat{v}^0\|_H + \|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)}).$$

Таким образом, мы получаем требуемую оценку

$$\|v\|_W = \|v\|_{L_2(0,T;V)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant C_{15}\left(\|\hat{v}_0\|_H + \|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)}\right) = C_{15}\|\mathbf{L}(v)\|_{L_2(0,T;V^*)\times H}$$

с некоторой константой C_{15}.

Для доказательства обратимости отображения $\mathbf{L}$ достаточно применить теорему (см [16], Глава 4, Теорема 1.1). Так как, оператор $D : V \to V^*$ непрерывен и монотонен, то все условия теоремы выполнены. Применение теоремы показывает, что для каждого $(\hat{f}, \hat{v}_0)$ существует решение $v \in L_2(0, T; V)$, а следовательно, $v \in W$. Таким образом, оператор $\mathbf{L}$ обратим. Переписывая оценку (10) в виде

$$\|\mathbf{L}^{-1}(\hat{f}, \hat{v}_0)\|_W \leqslant C_{10}(\|\hat{v}^0\|_H + \|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)})$$

получаем, что оператор $\mathbf{L}^{-1}$ непрерывен.

□

Из последней леммы следует, что изучение операторного включения (9) эквивалентно исследованию задачи о неподвижной точке следующего включения:

$$v \in F(v), \tag{11}$$

где $F : W \to W$ и определен:

$$F(v) = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{K}_\delta(v) + \mathbf{\Psi}(v)).$$

5. Разрешимость аппроксимационной задачи

Теорема 3. *Операторное включение* (11) *имеет хотя бы одно решение* $v \in W$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы рассмотрим семейство аппроксимационных задач:

$$v' + D(v) - \lambda K_\delta(v) \in \lambda\Psi(v), \qquad \lambda \in [0, 1], \tag{12}$$

или в компактной форме:

$$v \in G(v), \tag{13}$$

где $G(v) = \mathbf{L}^{-1}(\lambda\mathbf{K}_\delta(v) + \lambda\mathbf{\Psi}(v))$. Заметим, что данное семейство совпадает с изучаемой задачей (11) при $\lambda = 1$.

Покажем, что определена топологическая степень deg $(G, \bar{B}_R, 0)$ (см. [17]) для многозначного отображения G на шаре $\bar{B}_R \subset W$ достаточно большого радиуса R и отлична от нуля.

Если $v \in W$ – решение одного из уравнений (12), то в силу оценок (8) и (10) и условий $(\Psi1) - (\Psi4)$ имеем

$$||v||_W \leqslant C_{11}||\mathbf{K}_\delta(v) + (f, v_0)||_{L_2(0,T;V^*)\times H} \leqslant$$
$$\leqslant C_{11}\left(||\mathbf{K}_\delta(v)||_{L_2(0,T;V^*)} + ||f||_{L_2(0,T;V^*)} + ||v_0||_H\right) \leqslant C_{11}\left(\frac{C_8}{\delta} + C_{16} + ||v_0||_H\right).$$

Выберем $R > C_{11}\left(\frac{C_8}{\delta} + C_{16} + ||v_0||_H\right)$, тогда ни одно решение включения (13) не принадлежит границе шара $B_R \subset W$. Поэтому отображение $G : W \times [0, 1] \to W$ определяет гомотопию многозначных отображений на B_R. Следовательно, топологическая степень $deg(G, \bar{B}_R, 0)$ определена для каждого значения $\lambda \in [0, 1]$ и в силу свойства гомотопической инвариантности степени имеем

$$deg(G, \bar{B}_R, 0) = deg(F, \bar{B}_R, 0) = deg(I, \bar{B}_R, 0) = 1.$$

так как $0 \in B_R$. Отличие от нуля степени отображения F обеспечивает существование решения операторного включения (11), а, следовательно, существование решения включения (9) и аппроксимационной задачи. □

Теорема 4. *Для любого решения $v_\delta \in W$, $\delta > 0$, операторного включения (11) справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \|v_\delta(t)\|_H + \|v_\delta\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{17} \left(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_{\delta_0}\|_H\right), \tag{14}$$

$$\|v'_\delta\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_{18} \left(1 + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_{\delta_0}\|_H\right)^2, \tag{15}$$

с константами C_{17} и C_{18}, не зависящими от δ.

Доказательство. Пусть $v_\delta \in W$ решение операторного включения (11), существующего по предыдущей теореме для некоторого $\delta > 0$. Повторяя рассуждения доказательства оценки (10) и используя тот факт, что $\langle K_\delta(v_\delta(t)), v_\delta(t)\rangle = 0$ для всех $t \in [0,T]$, отсюда нетрудно получить требуемую оценку:

$$\max_{t\in[0,T]} \|v_\delta(t)\|_H + \|v_\delta\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{17} \left(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_{\delta_0}\|_H\right).$$

Для того, чтобы оценить $\|v'_\delta\|_{L_1(0,T;V^*)}$, воспользуемся равенством $v'_\delta = -D(v_\delta)+K_\delta(v_\delta)+f$. Отсюда

$$\|v'_\delta\|_{L_1(0,T;V^*)} \leq \|D(v_\delta)\|_{L_1(0,T;V^*)} + \|K_\delta(v_\delta)\|_{L_1(0,T;V^*)} + \|f\|_{L_1(0,T;V^*)}. \tag{16}$$

Используя непрерывность вложение $L_2(0,T;V^*) \subset L_1(0,T;V^*)$, с помощью неравенства Коши и оценки $\|D(v_\delta)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_{14}\|v_\delta\|_{L_2(0,T;V)}$ получим

$$\|D(v_\delta)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_{14}\|D(v_\delta)\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant C_{19}\|v_\delta\|_{L_2(0,T;V)}, \quad \|f\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant \sqrt{T}\|f\|_{L_2(0,T;V^*)}.$$

Кроме того, для $\|K_\delta(v_\delta)\|_{L_1(0,T;V^*)}$ имеется оценку:

$$\|K_\delta(v_\delta)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_{20}\|v_\delta\|^2_{L_2(0,T;V)}.$$

Подставляя полученные оценки в неравенство (16) и используя оценку (14), получим:

$$\|v'_\delta\|_{L_1(0,T;V^*)} \leq C_{19}\|v_\delta\|_{L_2(0,T;V)} + C_{20}\|v_\delta\|^2_{L_2(0,T;V)} + \sqrt{T}\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{21} \left(1 + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_{\delta_0}\|_H\right)^2.$$

□

6. Доказательство теоремы 1

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1 о существовании слабых решений исходной задачи, сформулируем утверждение о предельном переходе для оператора K_δ.

Лемма 5. *Если последовательность $\{v_l\}_{l=1}^\infty$, $v_l \in L_2(0,T;V)$, удовлетворяет условиям:*

$$v_l \rightharpoonup v_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V),$$
$$v_l \to v_* \text{ почти всюду в } Q_T,$$
$$v_l \to v_* \text{ сильно в } L_2(Q_T),$$

тогда

$$K_\delta(v_l) \dashrightarrow K(v_*) \text{ в смысле распределений при } l\to\infty,\ \delta\to 0.$$

Доказательство данной леммы можно найти в [14] (Глава 5, Лемма 5.3).

Итак, докажем теорему 1 о существование решений задачи управления с обратной связью (1)–(2), (3).

Возьмем произвольную последовательность положительных чисел $\{\delta_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\delta_l \to 0$. Для каждого δ_l известно, что соответствующая аппроксимационная задача (11) имеет, по крайней мере, одно решение $v_l \in W$.

Из оценки (14) следует, что $\{v_l\}$ ограничена по норме $\|\cdot\|_{L_2(0,T;V)}$ и $\|\cdot\|_{L_\infty(0,T,H)}$, а из оценки (15) последовательность $\{v_l'\}$ ограничена по норме пространства $L_1(0,T;V^*)$. Тогда, не уменьшая общности рассуждений, будем полагать что:

$$
\begin{gathered}
v_l \rightharpoonup v_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V),\\
v_l \rightharpoonup \ ^*\text{- слабо в } L_\infty(0,T;H),\\
v_l \to v_* \text{ сильно в } L_2(Q_T),\\
v_l \to v_* \text{ почти всюду } Q_T,\\
v_l' \rightharpoonup v_*' \text{ в смысле распределений.}
\end{gathered}
$$

Так как оператор D слабо непрерывен, то будем полагать, что $D(v_l) \rightharpoonup D(v_*)$слабо в $L_2(0,T;V^*)$, а следовательно, в смысле распределений со значениями в V^*.

В силу леммы (5) выполнена следующая сходимость:

$$
K_{\delta_l}(v_l) \dashrightarrow K(v_*) \text{ в смысле распределений.}
$$

Принимая во внимание оценки (14), (15) и условия $(\Psi1)-(\Psi4)$, без ограничения общности можем предположить, что существует $f_* \in L_2(0,T;V^*)$ такое, что $f_l \to f_* \in \Psi(v_*)$ при $l \to \infty$.

Таким образом, переходя в каждом из членов равенства

$$
v_l' + D(v_l) - K_{\delta_l}(v_l) = f_l \in \Psi(v_l)
$$

к пределу при $l \to \infty$, получим, что предельные функции (v_*, f_*) удовлетворяют равенству

$$
v_*' + D(v_*) - K(v_*) = f_* \in \Psi(v_*),
$$

а также переходя в начальном условии $v_l(0) = v_0$ к пределу при $l \to \infty$, получим что v_* удовлетворяет начальному условию $v_*(0) = v_0$.

Следовательно, (v_*, f_*) — слабое решение задачи управления с обратной связью (1)–(2), (3). Заметим, что так как $v_* \in L_2(0,T;V) \cap L_\infty(0,T;H)$, то из равенства (5) следует, что $v_*' \in L_1(0,T;V^*)$.

7. Доказательство теоремы 2

Из теоремы 1 получаем, что множество решений непусто. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$ такая, что

$$
\lim_{l\to\infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f).
$$

Как и ранее при доказательстве теоремы 1 из оценок (14), (15) следует:

$$
\begin{gathered}
v_l \rightharpoonup v_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V),\\
v_l \rightharpoonup \ ^*\text{- слабо в } L_\infty(0,T;H),\\
v_l \to v_* \text{ сильно в } L_2(Q_T),\\
v_l \to v_* \text{ почти всюду } Q_T,\\
v_l' \rightharpoonup v_*' \text{ в смысле распределений,}\\
f_l \to f_* \in \Psi(v_*) \text{ сильно в } L_2(0,T;V^*).
\end{gathered}
$$

Отсюда аналогично получаем:

$$D(v_l) \rightharpoonup D(v_*) \text{ слабо в } L_2(0,T;V^*),$$
$$K(v_l) \dashrightarrow K(v_*) \text{ в смысле распределений.}$$

Переходя к пределу в соотношении

$$v_l' + D(v_l) - K(v_l) = f_l \in \Psi(v_l),$$

получаем что $(v_*, f_*) \in \Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, имеем

$$\Phi(v_*, f_*) \leqslant \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f).$$

Таким образом, (v_*, f_*) — требуемое решение, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. — М.: Наука, 1982.

2. Соболевский П. Е. Существование решений математической модели нелинейно вязкой жидкости // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, № 1. — С. 44—48.

3. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. The topological degree method for equations of the Navier–Stokes type // Abstract and Applied Analysis. — 1997. — V. 2, № 1. — P. 1—45.

4. Звягин В.Г., Казначеев М.В. Аттракторы автономной модели нелинейно–вязкой жидкости // Доклады РАН. — 2020 (принята к печати).

5. Lions J. L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. — Berlin: Springer, 1971.

6. Abergel F., Temam R. On some control problems in fluid mechanics // Theor. Comput. Fluid Dyn. — 1990. — V. 1, № 6. — P. 303—325.

7. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Университетская серия, 5, Научная книга, 1999.

8. Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A. On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems // J. Fixed Point Theory and Appl. — 2014. — V.16. — P. 27—82.

9. Звягин А.В. Оптимальное управление с обратной связью для термовязкоупругой модели движения жидкости Фойгта // Доклады РАН. — 2016. — Т. 468, № 3. — С. 251—253.

10. Звягин А.В. Оптимальное управление с обратной связью для альфа–модели Лере и альфа–модели Навье–Стокса // Доклады РАН. — 2019. — Т. 486, № 5. — С. 527—530.

11. Звягин В.Г. Аппроксимационно–топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики // Соврем. матем. Фундам. направления. — 2012. Т. 46. — С. 92—119.

12. Звягин В.Г., Турбин М.В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. — М: КРАСАНД, 2012.

13. Темам Р. Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ. — М: Мир, 1971.

14. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. Аппроксимационно–топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье–Стокса. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

15. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. — М: Мир, 1974.

16. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные оператоные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М: Мир, 1978.

17. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. — Berlin: Walter de Gruyter, 2001.

REFERENCES

1. Litvinov V.G., “Motion of nonlinear viscous fluid”, M.: Nauka, 1982.

2. Sobolevskii P.E., “The Existence of Solutions of a Mathematical Model of a Nonlinear Viscous Fluid”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **285** (1985), 44–48.

3. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G., “The topological degree method for equations of the Navier–Stokes type”, *Abstract and Applied Analysis*,**2**:1 (1997), 1–45.

4. Zvyagin V.G., Treasurer M.V., “Attractors of an autonomous model of a nonlinearly viscous fluid”, *Doklady RAS*, 2020 (accepted for publication).

5. Lions J. L., “Optimal control of systems governed by partial differential equations”, Berlin: Springer, 1971.

6. Abergel F., Temam R., “On some control problems in fluid mechanics”, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **1**:6 (1990), 303–325.

7. Fursikov A. V., “Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications”, Transl. Math. Monogr. 187, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

8. Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A., “On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems”, *J. Fixed Point Theory and Appl.* **16** (2014), 27–82.

9. Zvyagin A. V., “Optimal feedback control for a thermoviscoelastic model of Voigt fluid motion”, *Dokl. Math.*, **93**:3 (2016), 270-272.

10. Zvyagin A. V., "Optimal feedback control for Leray and Navier-Stokes alpha models *Dokl. Math.*, **99**:3 (2019), 299-302.

11. Zvyagin V. G., “Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics”, *J. Math. Sci.*, **201**:6 (2014), 830-858.

12. Zvyagin V. G., Turbin M. V., “Mathematical problems in the hydrodynamics of viscoelastic media”, Moscow: KRASAND, 2012.

13. Temam R., “Navier-Stokes Equation: Theory and Numerical Analysis”, North-Holland, 1977.

14. Zvyagin V. G., Dmitrienko V.T., “Topological Approximation Approach to the Study of Hydrodynamical Problems. The Navier–Stokes System” [in Russian], Moscow: URSS Editorial, 2004.

15. Ficker G., “Existence Theorems in the Theory of Elasticity”, Moscow: Mir, 1974 [Russian translation]

16. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K., “Nichtlineare operatorgleichungen und operator differentialgleichungen”, Berlin: Akad Verlag, 1974.

17. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P., “Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces.” Berlin: Walter de Gruyter, 2001.

Получено 1.03.2020 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-159-168

О значениях гипергеометрических функций

П. Л. Иванков

Иванков Павел Леонидович — доктор физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Аннотация

При изучении арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических функций часто применяют известный в теории трансцендентных чисел метод Зигеля. Наиболее общие результаты в данной области были получены именно этим методом. Однако возможности метода Зигеля в случае гипергеометрических функций с иррациональными параметрами ограничены. Это связано с тем, что такие гипергеометрические функции не являются E-функциями, и по этой причине построить линейную приближающую форму с высоким порядком нуля с помощью принципа Дирихле здесь не удается. При рассмотрении задач, связанных с исследованием арифметической природы значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами, в некоторых случаях можно применить метод, основанный на эффективном построении линейной приближающей формы, но возможности этого метода также ограничены из-за того, что слишком общие эффективные конструкции отсутствуют. Трудности имеются также и в тех случаях, когда такие конструкции известны. Особенности этих конструкций таковы, что часто не удается реализовать арифметическую часть метода.

Поэтому представляют интерес ситуации, когда можно провести требуемое исследование, опираясь на особые свойства конкретных гипергеометрических функций. Иногда удается так подобрать параметры исследуемых функций, что можно преодолеть те трудности, которые возникают в общем случае. В настоящей работе рассматривается гипергеометрическая функция специального вида и ее производные. С помощью эффективной конструкции удалось не только доказать линейную независимость значений этих функций над некоторым мнимым квадратичным полем, но и получить соответствующий количественный результат в виде оценки модуля линейной формы от указанных значений.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, эффективная конструкция, линейная независимость, мнимое квадратичное поле.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:
П. Л. Иванков. О значениях гипергеометрических функций // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 159–168.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-159-168

On the values of hypergeometric functions

P. L. Ivankov

Ivankov Pavel Leonidovich — doctor of physical and mathematical sciences, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Abstract

The investigation of arithmetic properties of the values of the generalized hypergeometric functions is often carried out by means of known in the theory of transcendental numbers Siegel's method. The most general results in this field have been obtained precisely by this method. But the possibilities of Siegel's method in case of hypergeometric functions with irrational parameters are restricted. This is connected with the fact that such hypergeometric functions are not E-functions and for that reason one is unable to construct linear approximating form with large order of zero by means of pigeonhole method. To consider problems connected with the investigation of arithmetic properties of the values of hypergeometric functions with irrational parameters it is possible in some cases to use the method based on the effective construction of linear approximating form but the possibilities of this method are also limited because of the absence of too general effective constructions. There are some difficulties also in the cases when such constructions are available. The peculiarities of these constructions often hinder the realization of arithmetic part of the method.

For that reason of some interest are situations when one is able to realize the required investigation by means of specific properties of concrete functions. Sometimes it is possible to choose the parameters of the functions under consideration in such a way that one receives the possibility to overcome the difficulties of the general case. In this paper we consider hypergeometric function of a special kind and its derivatives. By means of effective construction it is possible not only to prove linear independence of the values of this function and its derivatives over some imaginary quadratic field but also to obtain corresponding quantitative result in the form of the estimation the modulus of the linear form in the aforesaid values.

Keywords: hypergeometric function, effective construction, linear independence, imaginary quadratic field.

Bibliography: 25 titles.

For citation:
P. L. Ivankov, 2020, "On the values of hypergeometric functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 159–168.

1. Введение

Обобщенная гипергеометрическая функция определяется равенством

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)}\,, \tag{1}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ – многочлены, старшие коэффициенты которых равны 1; степени этих многочленов равны соответственно r и m; $a(x)b(x)\neq 0$ при $x=1,2,\ldots$. Если корни $a(x)$ и $b(x)$

рациональны, то для изучения арифметической природы значений функций вида (1) и их производных обычно применяют метод Зигеля. Примеры применения метода Зигеля см. в [1]–[10]. В случае, когда некоторые из корней многочленов $a(x)$ и $b(x)$ иррациональны, обычно применяют метод, основанный на эффективном построении линейной приближающей формы. Первоначально рассматривался случай $a(x) \equiv 1$; см. [11]-[14]. В работах [15]-[18] эффективная конструкция использовалась и в случае $a(x) \not\equiv 1$. По-видимому до сих пор нет результатов об арифметической природе функций вида (1) для случая, когда два (или больше) корня многочлена $a(x)$ иррациональны. Если ровно один из корней этого многочлена является иррациональным, то теоремы об арифметической природе значений функций вида (1) можно найти в работах [19] и [20].

2. Результат

Пусть $\mathbb{I}$ – мнимое квадратичное поле,

$$\alpha \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}\,, \tag{2}$$

$m > 1$ – натуральное число,

$$a(x) = x + (m-1)\alpha, \;\; b(x) = x \prod_{q=1}^{m-1} \Big(x + m\alpha + \frac{q}{m-1} \Big). \tag{3}$$

Рассмотрим при $j = 1, \dots, m$ функции

$$F_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \sigma_j(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}\,, \tag{4}$$

где

$$\sigma_1(\nu) = 1,\; \sigma_2(\nu) = \nu,\; \sigma_j(\nu) = \sigma_{j-1}(\nu) \Big(\nu + m\alpha + \frac{j-2}{m-1} \Big),\; j = 3, \dots, m. \tag{5}$$

При условии (2) функции (4) линейно независимы над полем $\mathbb{C}(z)$; это следует, например, из теорем, доказанных в работах [21] и [22].

Теорема 1. *Пусть выполняется условие (2), и пусть $\xi \in \mathbb{I} \setminus \{0\}$. Пусть, далее, задано положительное число ϵ и нетривиальный набор целых чисел $h_1, \dots, h_m$ из поля $\mathbb{I}$. Тогда при $H = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |h_j| \geqslant H_0$ выполняется неравенство*

$$\Big| \sum_{j=1}^{m} h_j F_j(\xi) \Big| > H^{1-2m-\epsilon}\,,$$

где H_0 зависит от ϵ, а также от α, m, ξ и от поля $\mathbb{I}$.

3. Леммы

Пусть $1 \leqslant l \leqslant m$. Рассмотрим однородную линейную функциональную приближающую форму

$$R_l(z) = \sum_{j=1}^{m} P_{lj}(z) F_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{l\nu} z^{\nu}\,. \tag{6}$$

В последнем равенстве

$$P_{lj}(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{ljs} z^s \tag{7}$$

— многочлены с неопределенными коэффициентами, n — натуральное число. Из (4) следует, что

$$C_{l\nu} = \sum_{s=0}^{\min(n,\nu)} \sum_{j=1}^{m} p_{ljs}\sigma_j(\nu - s) \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{a(x)}{b(x)}\,.$$

Таким образом, если $0 \leqslant \nu < n$, то

$$C_{l\nu} = B_l(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \prod_{x=1}^{n-\nu} \frac{1}{a(\nu - n + x)}\,, \tag{8}$$

где

$$B_l(\nu) = \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ljs}\sigma_j(\nu - s) \prod_{x=0}^{s-1} b(\nu - x) \prod_{x=1}^{n-s} a(\nu - n + x)\,, \tag{9}$$

причем в последнем выражении верхний предел ν суммирования по s заменен на n в силу условия $b(0) = 0$, которое следует из (3). Если $\nu \geqslant n$, то

$$C_{l\nu} = B_l(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \prod_{x=1}^{\nu-n} a(x)\,. \tag{10}$$

В выражения (9) и (10) входит многочлен $B_l(\nu)$. Подберем коэффициенты многочленов (7) так, чтобы при $l = 1, \ldots, m$ тождественно по ν выполнялось равенство

$$B_l(\nu) = \Phi_l(\nu), \tag{11}$$

где

$$\Phi_l(\nu) = \prod_{x=0}^{mn+l-2} (\nu - x)\,. \tag{12}$$

С этой целью определим числа $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ с помощью равенства

$$a(\zeta) = \sum_{j=1}^{m} \vartheta_j \sigma_j(\zeta - 1),$$

которое должно выполняться тождественно по ζ; очевидно, $\vartheta_1 = 1 + (m-1)\alpha$, $\vartheta_2 = 1$, $\vartheta_3 = \cdots = \vartheta_m = 0$. Пусть, далее,

$$K_{js}(\zeta) = \begin{cases} a(\zeta + 1), & \text{если } s = 0,\ j = 1, \ldots, m, \\ \sum_{q=1}^{j} \vartheta_q \sigma_q(\zeta), & \text{если } s = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Лемма 1. *Если при $l, j = 1, \ldots, m$, $s = 0, 1, \ldots, n$, положить*

$$p_{ljs} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{K_{js}(\zeta - s)\Phi_l(\zeta)}{\sigma_{j+1}(\zeta - s) \prod_{x=0}^{s-1} b(\zeta - x) \prod_{x=1}^{n-s+1} a(\zeta - n + x)}\, d\zeta\,, \tag{13}$$

то равенство (11) будет выполняться тождественно по ν. В (13) через Γ обозначен простой замкнутый кусочно гладкий положительно ориентированный контур, охватывающий все нули многочлена $\prod_{x=0}^{n} b(\zeta - x)$, и такой, что все нули многочлена $\prod_{x=1}^{n} a(\zeta - n + x)$ лежат в его внешности. Многочлен $\sigma_{m+1}(\zeta)$, входящий в правую часть (13) при $j = m$, совпадает с $b(\zeta)$.

Доказательство. Существование контура Γ обеспечивается условием (2) и определением (3) многочленов $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$. Выпишем из работы [15] тождество (2.21), с. 287; применительно к нашему случаю это тождество выглядит так:

$$\frac{1}{\zeta-\nu}\prod_{x=1}^{n}\frac{a(\nu-n+x)}{a(\zeta-n+x)}=\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{K_{js}(\zeta-s)\sigma_j(\nu-s)}{a(\zeta-s+1)\sigma_{j+1}(\zeta-s)}\times$$
$$\times\prod_{x=0}^{s-1}\frac{b(\nu-x)}{b(\zeta-x)}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{a(\nu-n+x)}{a(\zeta-n+x)}+\frac{1}{\zeta-\nu}\prod_{x=0}^{n}\frac{b(\nu-x)}{b(\zeta-x)}\,.$$

Если это тождество умножить на $\Phi_l(\zeta)$ и затем проинтегрировать по контуру Γ, считая, что внутри этого контура лежит также и точка ν, то с учетом равенств

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Phi_l(\zeta)}{\zeta-\nu}\prod_{x=1}^{n}\frac{a(\nu-n+x)}{a(\zeta-n+x)}\,d\zeta=\Phi_l(\nu)\,,$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Phi_l(\zeta)}{\zeta-\nu}\prod_{x=0}^{n}\frac{b(\nu-x)}{b(\zeta-x)}\,d\zeta=0\,,$$

мы получим требуемое. Подробности доказательства см. в [15]. Лемма доказана.

Через $\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от n (но, возможно, зависящие от α, m, ξ и от поля $\mathbb{I}$). Общим знаменателем некоторого множества чисел $X\subset\mathbb{I}$ назовем натуральное число q такое, что $qx\in\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$ для любого $x\in X$. Наименьший из таких знаменателей будем называть наименьшим общим знаменателем этого множества чисел.

Лемма 2. *Наименьший общий знаменатель множества чисел*

$$p_{ljs},\ l,j=1,\ldots,m,\ s=0,1,\ldots,n, \tag{14}$$

оценивается сверху величиной $e^{\gamma_1 n}(n!)^{1/2}$*; для модулей чисел (14) выполняется неравенство* $|p_{ljs}|\leqslant e^{\gamma_2 n}(n!/s!)^{m-1}$.

Доказательство. Через $f_{ljs}(\zeta)$ обозначим подынтегральную функцию из правой части (13). Тогда

$$p_{ljs}=-\operatorname*{Res}_{\zeta=\infty}f_{ljs}(\zeta)-\sum_{x=1}^{n-s+1}\operatorname*{Res}_{\zeta=-(m-1)\alpha+n-x}f_{ljs}(\zeta)\,. \tag{15}$$

Вычет функции $f_{ljs}(\zeta)$ относительно бесконечно удаленной точки можно вычислить без труда и убедиться, что общий наименьший знаменатель получившейся совокупности чисел при всевозможных значениях индексов l,j и s, указанных в (14), ограничен сверху величиной $e^{\gamma_3 n}$.

Оценку общего наименьшего знаменателя вычетов относительно конечных особых точек, входящих в правую часть (15), удобнее провести отдельно для различных значений индексов j и s. Пусть, например, $j=m$ и $1\leqslant s\leqslant n$. В этом случае $K_{ms}(\zeta-s)=a(\zeta-s+1)$, $\sigma_{m+1}(\zeta-s)=b(\zeta-s)$, и с учетом (3) и (12) мы получаем для вычета в точке $\zeta=-(m-1)\alpha+n-x_0$, $1\leqslant x_0\leqslant n-s$, такое выражение

$$\left.\frac{\prod_{x=0}^{mn+l-2}(\zeta-x)}{\prod_{x=0}^{s}(\zeta-x)\prod_{q=1}^{m-1}(\zeta-x+m\alpha+q/(m-1))}\right|_{\zeta=-(m-1)\alpha+n-x_0}\times$$
$$\times\lim_{\zeta\to-(m-1)\alpha+n-x_0}\frac{\zeta+(m-1)\alpha-n+x_0}{\prod_{x=1}^{n-s}(\zeta+(m-1)\alpha-n+x)}=\pm(m-1)^{(m-1)(s+1)}\cdot Q_1Q_2,$$

где

$$Q_1 = \frac{\prod_{x=1}^{n-s-x_0}((m-1)\alpha - n + s + x_0 + x)\prod_{x=1}^{x_0+l-2}((m-1)\alpha + (m-1)n + x)}{(n-s-x_0)!(x_0-1)!},$$

$$Q_2 = \frac{\prod_{x=1}^{(m-1)n}((m-1)\alpha + x)}{\prod_{x=0}^{s}\prod_{q=1}^{m-1}((m-1)\alpha + (m-1)(n-x_0-x)+q)}.$$

Легко видеть, что все множители, входящие в знаменатель дроби Q_2, сокращаются, и фактически остается лишь оценить общий наименьший знаменатель дроби Q_1. Здесь надо привлечь теорию делимости в квадратичных полях; см., например, [23, глава III, § 8]. Через D обозначим абсолютную величину дискриминанта поля $\mathbb{I}$. Тогда существует гомоморфизм χ мультипликативной группы классов вычетов по модулю D, взаимно простых с D, в мультипликативную группу, состоящую из чисел -1 и 1, такой, что если $\chi(p) = 1$, то простое число p разлагается в поле $\mathbb{I}$ в произведение двух простых идеалов, норма каждого из которых равна p. Ясно, что количество элементов в множестве $\chi^{-1}(1)$ равно $\phi(D)/2$. Далее, пусть число $u \in \mathbb{N}$, таково, что $u\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$. Тогда, рассуждая как при доказательстве леммы 3, [24, с. 196-197], мы получим, что числитель дроби Q_1 после умножения на u^{2n} делится на $p^{\left[\frac{n-s-x_0}{p}\right]+\left[\frac{x_0+l-2}{p}\right]}$, где p — простое число, не делящее D, и такое, что $\chi(p)=1$. Теперь воспользуемся соотношением

$$\sum_{p\leqslant x,\, p\equiv t \pmod D} \frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\phi(D)}\ln x + O(1), \tag{16}$$

в котором $(t, D) = 1$. По поводу доказательства см., например, [25, с. 129]. С помощью (16) нетрудно получить оценку

$$\prod_{p\leqslant n} p^{\frac{n}{p}} \geqslant (n!)^{\frac{1}{2}} e^{-\gamma_4 n}, \tag{17}$$

где произведение из левой части распространено на те простые числа p, не делящие D, для которых $\chi(p) = 1$. Суммируя все вышесказанное, получаем, что в качестве общего знаменателя дробей Q_1 при рассматриваемых значениях индексов j и s можно взять число

$$\frac{u^{\gamma_5 n} n!}{\prod\limits_{p\leqslant n} p^{[n/p]-3}}, \tag{18}$$

где произведение распространено на указанные значения p, а γ_5 – соответствующим образом подобранное натуральное число. Мы видим, что в рассматриваемом случае указанная в лемме оценка общего наименьшего знаменателя справедлива. Аналогично можно разобрать и остальные случаи. Во всех этих случаях число (18) будет знаменателем соответствующей дроби Q_1. Окончательная оценка сверху для общего наименьшего знаменателя чисел p_{ljs} следует из (17), (18) и из сделанного выше замечания по поводу вычета функции $f_{ljs}(\zeta)$ относительно $\zeta = \infty$. Оценка модулей чисел p_{ljs} вытекает непосредственно из (13). Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что если коэффициенты многочленов (7) определены равенствами (13), то линейная форма $R_l(z)$ имеет вид

$$R_l(z) = \sum_{\nu=mn+l-1}^{\infty} \Phi_l(\nu) \prod_{x=1}^{\nu-n} a(x) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)}. \tag{19}$$

Отсюда получаем такую оценку

$$|R_l(\xi)| \leqslant e^{\gamma_6 n}(n!)^{-(m-1)^2}.$$

4. Доказательство теоремы

Составим определитель из многочленов (7):

$$\Delta = \Delta(z) = \left|P_{lj}(z)\right|_{l,j=1,\dots,m}.$$

Внимательное рассмотрение правой части (13) показывает, что на главной диагонали такого определителя стоят многочлены степени n; ниже главной диагонали – многочлены степени не больше n, а выше главной диагонали – многочлены, степени которых меньше n. Непосредственное вычисление показывает, что при этом

$$p_{11n} = -\operatorname*{Res}_{\zeta=n-1-(m-1)\alpha} f_{11n}(\zeta) \neq 0\,, p_{lln} = -\operatorname*{Res}_{\zeta=\infty} f_{11n}(\zeta) \neq 0\,, l = 2,\dots,m\,.$$

С другой стороны, умножив первый столбец определителя Δ на $F_1(z)$ и прибавив к нему остальные столбцы, умноженные соответственно на $F_j(z)$ при $j = 2,\dots,m$, мы получим новый определитель, отличающийся от Δ лишь тем, что его первый столбец составлен из функций $R_l(z)$. Поскольку из (19) следует, что такой определитель имеет при $z = 0$ порядок нуля, не меньший mn, то это же верно и для определителя Δ. Отсюда, учитывая все вышесказанное, получаем равенство

$$\Delta = Cz^{mn},\ C \neq 0. \tag{20}$$

Пусть ξ – число, фигурирующее в теореме. Из (20) следует, что $\Delta(\xi) \neq 0$. Поэтому для любого нетривиального набора целых чисел $h_1,\dots,h_m$ из поля $\mathbb{I}$ одну из строк определителя $\Delta(\xi)$ можно заменить этим набором чисел так, чтобы получившийся определитель был попрежнему отличен от нуля. Пусть, для определенности такой строкой будет первая:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_m \\ P_{21}(\xi) & P_{22}(\xi) & \dots & P_{2m}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1}(\xi) & P_{m2}(\xi) & \dots & P_{mm}(\xi) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Из леммы 2 следует такая оценка модуля этого определителя снизу

$$|\Delta_1| \geqslant e^{-\gamma_7 n}(n!)^{-(m-1)/2}. \tag{21}$$

Чтобы получить оценку модуля этого же определителя сверху, заметим сначала, что хотя бы одно из чисел $F_1(\xi),\dots,F_m(\xi)$ отлично от нуля: это следует из теоремы существования и единственности из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть, для определенности, $F_1(\xi) \neq 0$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{\Delta_1}{F_1(\xi)} = \frac{1}{F_1(\xi)} \begin{vmatrix} L & h_2 & \dots & h_m \\ R_2(\xi) & P_{22}(\xi) & \dots & P_{2m}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_m(\xi) & P_{m2}(\xi) & \dots & P_{mm}(\xi) \end{vmatrix},$$

где $L = h_1F_1(\xi) + \dots + h_mF_m(\xi)$. С помощью леммы 3 получаем теперь такую оценку

$$|\Delta_1| \leqslant |L|e^{\gamma_8 n}(n!)^{(m-1)(m-2)} + He^{\gamma_8 n}(n!)^{-(m-1)}, \tag{22}$$

где H определено в условии теоремы. Из (21) и (22) можно без труда получить утверждение теоремы; см., например, окончание доказательства теоремы 1, [1, гл. 11, §2, с. 355-56].

5. Заключение

Исследование арифметических свойств значений функции (1) и ее производных, по-видимому, можно будет продолжить. Не исключено, что здесь возможно получение точных по высоте оценок линейных форм. Следует также рассмотреть совместные приближения, поскольку их применение во многих случаях дает лучшие результаты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа М.: Наука, 1987.
2. Шидловский А.Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов // ДАН СССР. 1954. Т. 96, № 4. С. 697-700.
3. Шидловский А.Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка // ДАН СССР. 1966. Т. 169, № 1. С. 42-45.
4. Шидловский А.Б. Об алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций. // Труды Московского математического общества. 1967. Т. 18. С. 55-64.
5. Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций // ДАН СССР. 1967. Т. 174, № 2. С. 267-270.
6. Чирский В.Г. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Вестник МГУ. Серия 1, математика, механика. 1978, № 5. С. 3-8.
7. Салихов В.Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций // Acta Arithm. 1990. **53**:5. P. 453-471.
8. Черепнев М.А. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций // Математические заматки. 1995. **57**:6. С. 896-912.
9. Салихов В.Х. Критерий алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций (четный случай) // Математические заматки. 1998. **64**:2. С. 273-284.
10. Горелов В.А. Об алгебраической независимости значений обобщенных гипергеометрических функций // Математические заматки. 2013. **94**:1. С. 94-108.
11. Osgood Ch. F. Some theorems on diophantine approximation // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 123, № 1. P. 64-87.
12. Галочкин А.И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Математические заметки. 1970. Т. 8, № 1. С. 19-28.
13. Галочкин А.И. Уточнение оценок некоторых линейных форм // Математические заметки. 1976. Т. 20, № 1. С. 35-45.
14. Галочкин А.И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, № 6. С. 1220-1235.
15. Иванков П.Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций // Математический сборник. 1991. Т. 182, № 2. С. 283-302.

16. Иванков П.Л. Оценки снизу линейных форм от значений функции Куммера с иррациональным параметром // Математические заметки. 1991. Т. 49, вып. 2. С. 55-63.

17. Иванков П.Л. Об оценках некоторых линейных форм // Известия вузов. Математика. 1993, № 2. С. 38-45.

18. Иванков П.Л. Об оценках мер линейной независимости некоторых чисел // Математические аметки. 1994. Т. 55, вып. 3. С. 59-67.

19. Иванков П.Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1, № 1. С. 191-206.

20. Иванков П.Л. О приближении значений некоторых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами. Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 1. С. 108-116.

21. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence theory. Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney. 1988. P. 207-215.

22. Galochkin A.I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions // Moscow journal of combinatorics and number theory. 2011. Vol. 1, iss. 2. P. 27-32.

23. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.

24. Иванков П.Л. О значениях гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 11, № 6. 2005. С. 65-72.

25. Прахар К. Распределение простых чисел М.: Мир, 1967.

REFERENCES

1. Shidlovskii, A.B. 1987, *"Transtsendentnye chisla"* , [Transcendental numbers] Nauka, Moscow, 448 pp. (Russian)

2. Shidlovskii, A.B. 1954, "On transcendentality and algebraic independence of the values of entire functions of certain class *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 96, № 4. pp. 697-700. (Russian)

3. Shidlovskii, A.B. 1954, "Transcendence and algebraic independence of values of E-functions satisfying linear nonhomogeneous differential equations of the second order *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* vol. 169, № 1. pp. 42-45. (Russian)

4. Shidlovskii, A.B. 1968, "Algebraic independence of the values of certain hypergeometric E-functions *Trudy Moskov. Mat. Obsh.*, vol. 18, № 4. pp. 55-64. (Russian)

5. Belogrivov I.I., 1967, "On transcendence and algebraic independence of values of certain hypergeometric E-functions *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 174, № 2. pp. 267-270. (Russian)

6. Chirsky V.G., 1978, "On arithmetic properties of the values of hypergeometric functions with irrational parameters *Vestnik Moskov. Univ.* Ser. 1. Mat. Meh. no. 5, pp. 3-8.

7. Salikhov V.Kh., 1990, "Irreducibility of hypergeometric equations and algebraic independence of values of E-functions 1990, *Acta Arithm.*, **53**:5, pp. 453-471.

8. Cherepnev M.A., 1995, "On algebraic independence of values of hypergeometric E-functions *Mat. Zametki*, vol. 57, no. 6, pp. 896-912.

9. Salikhov V.Kh., 1998, "Criterion for the algebraic independence of the values of hypergeometric E-functions (even case) *Mat. Zametki*, vol. 64, no. 2, pp. 273-284.

10. Gorelov V.A., 2013, "On algebraic independence of the values of hypergeometric functions *Mat. Zametki*, vol. 94, no. 1, pp. 94-108.

11. Osgood, Ch. F. 1966, "Some theorems on diophantine approximation" *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 123, no. 1, pp. 64-87.

12. Galochkin, A.I. 1970, "Lower estimates of the linear forms in the values of some hypergeometric functions *Mat. Zametki*, v. 8, no. 1, pp. 19-28. (Russian).

13. Galochkin, A.I. 1976, "Sharpening of the estimates of some linear forms *Mat. Zametki*, v. 20, no. 1, pp. 35-45. (Russian).

14. Galochkin, A.I. 1976, "On arithmetic properties of the values of some entire hypergeometric functions *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 17, no. 6, pp. 1220-1235. (Russian)

15. Ivankov, P.L., 1991 "On the arithmetic properties of the values of hypergeometric functions *Matematicheskij Sbornik*, v. 182, no. 2, pp. 283-302. (Russian).

16. Ivankov, P.L., 1991 "Lower estimates of the linear forms in the values of Kummer's function with irrational parameter *Matematicheskije Zametki*, v. 49, no. 2, pp. 55-63. (Russian).

17. Ivankov, P.L., 1993 "On the estimates of some linear forms *Izvestija vuzov. Matematika*, no. 2, pp. 38-45. (Russian).

18. Ivankov, P.L., 1994 "On the estimates of linear independence measure of some functions *Matematicheskije Zametki*, v. 55, no. 3, pp. 59-67. (Russian).

19. Ivankov, P.L., 1995 "On linear independence of the values of some functions *Fundamentalnaja i Prikladnaja Matematika*, v. 1, no. 1, pp. 191-206. (Russian).

20. Ivankov, P.L., 2016 "On approximation of the values of some hypergeometric functions with irrational parameters *Chebyshevskij Sbornik*, v. 17, no. 1, pp. 108-116. (Russian).

21. Galochkin, A.I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence theory. Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney. 1988. P. 207-215.

22. Galochkin, A.I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions // Moscow journal of combinatorics and number theory. 2011. Vol. 1, iss. 2. P. 27-32.

23. Borevich, Z.I., Shafarevich, I.R. "*Teorija Chisel* [Number Theory] Nauka, Moscow, 504 pp. (Russian).

24. Ivankov, P.L., 2005 "On the values of hypergeometric functions with different irrational parameters *Fundamentalnaja i Prikladnaja Matematika*, v. 11, no. 6, pp. 65-72. (Russian).

25. Prachar, K. 1967, "*Raspredelenije prostych chisel* [Distribution of prime numbers] Mir, Moscow, 511 pp. (Russian)

Получено 30.11.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 514.7+519.17+519.8 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-169-189

Расстояния Громова — Хаусдорфа до симплексов и некоторые приложения к дискретной оптимизации

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Иванов Александр Олегович — профессор, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; профессор, кафедра ФН-12, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su
Тужилин Алексей Августинович — профессор, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: tuz@mech.math.msu.su

Аннотация

В работе изучается взаимосвязь между расстоянием Громова — Хаусдорфа и задачами дискретной оптимизации. Расстояние Громова — Хаусдорфа до метрического пространства с одинаковыми непутевыми расстояниями используется используется для решения следующих проблем: вычисление длин ребер минимального остовного дерева для конечного метрического пространства; обобщенная пробам Борсука; вычисление хроматического числа и минимального размера клинкового покрытия для простого графа.

Ключевые слова: расстояние Громова — Хаусдорфа, минимальное остовное дерево, проблема Борсука, хроматическое число, клинковое покрытие, метрическая геометрия, дискретная оптимизация

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:
А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Расстояния Громова — Хаусдорфа до симплексов и некоторые приложения к дискретной оптимизации // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 169–189.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 514.7+519.17+519.8 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-169-189

Gromov–Hausdorff Distances to Simplexes and Some Applications to Discrete Optimisation

A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin

Ivanov Alexander Olegovich — professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; professor FN-12, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su
Tuzhilin Alexey Augustinovich — professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: tuz@mech.math.msu.su

Abstract

Relations between Gromov–Hausdorff distance and Discrete Optimisation problems are discussed. We use the Gromov–Hausdorff distances to single-distance metric space for solving the following problems: calculation of lengths of minimum spanning tree edges of a finite metric space; generalised Borsuk problem; chromatic number and clique cover number of a simple graph calculation problems.

Keywords: Gromov–Hausdorff distance, Minimum spanning tree, Borsuk problem, chromatic number, clique covering, metric geometry, discrete optimisation

Bibliography: 26 titles.

For citation:
A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, 2020, "Gromov–Hausdorff Distances to Simplexes and Some Applications to Discrete Optimisation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 169–189.

1. Introduction

The aim of the paper is to demonstrate close connections between the geometry of Gromov–Hausdorff distance and such popular Discrete Optimisation problems as minimum spanning tree problem, Borsuk conjecture, estimation of chromatic number and clique cover number of a simple graph. We start with a short informal review, all necessary formal definitions can be found below.

A general concept of distance is usually used to measure a difference between objects under consideration. Distances have applications in almost all spheres of human activity, from Geography to Linguistics, from Biology to Theology. A great number of beautiful examples can be found in [1]. A natural idea to compare subsets of a given metric space or, more generally, compare different metric spaces using appropriate distances, leads to appearance of so-called *hyperspaces*, i.e., metric spaces of some spaces, see, for example [2]. For subsets A and B of a fixed metric space X, a natural distance function d_H was defined by F. Hausdorff [4] as the infimum of positive numbers r such that A is contained in the r-neighbourhood of B, and vice-versa. It is well-known that this function, referred as the *Hausdorff distance*, is a metric on the family of all closed bounded subsets of the metric space X, see for example [3]. The Hausdorff distance was generalised to the case of two metric spaces X and Y by D. Edwards [5] and independently by M. Gromov [6]. They suggested to take the infimum of the values $d_H\big(\varphi(X),\psi(Y)\big)$ over all possible isometrical embeddings $\varphi\,X\to Z$

and $\psi Y \to Z$ into all possible metric spaces Z. Now this value is referred as the *Gromov–Hausdorff distance* between X and Y. It is well-known that this distance function a metric on the family of isometry classes of compact metric spaces. The corresponding hyperspace is usually denoted by $\mathcal{M}$ and is referred as the *Gromov–Hausdorff space*.

The geometry of the Gromov–Hausdorff space is rather tricky and is intensively investigated by many authors, see a review in [3]. Recently the technique of closed optimal correspondences permitted to prove that the space $\mathcal{M}$ is geodesic [7], to describe some local and all global isometries of $\mathcal{M}$, see [8] and [9]. Since finite metric spaces form an everywhere dense subset of $\mathcal{M}$, the distances to such spaces and between such spaces play an important role in the research of geometry of $\mathcal{M}$. Important classes of such spaces are formed by the ones all whose non-zero distances are the same (so-called *single-distance spaces* or *simplexes*) and by the spaces whose non-zero distances take only two different values (so-called *two-distance spaces*). The authors, together with S. Illiadis and D. Grigor'ev, see [10], [11], calculated distances from any metric space to any simplex, and, as a particular case, the distances between any simplex and any 2-distance space, see [12]. It turns out that the Gromov–Hausdorff distance from a metric space X to a simplex "feels" somehow a geometry of partitions of the space X. The latter explains some relations between the Gromov–Hausdorff distance and Discrete Optimisation problems.

Many Discrete Optimisation problems are related to Geometry, have a long history, and are either unsolved yet, or solved only in some particular cases. Due to many natural applications and total computerisation Discrete Optimisation is one of the most fast developing branch of modern Mathematics. Describe shortly the problems considered in the paper. Start with a problem of metric minimum spanning trees.

For a finite subset M of a metric space X, consider the complete graph $K(M)$ with the vertex set M, endowed with the weight function whose value on an edge $\{x, y\}$ equals to the distance $|xy|$ between the points x and y in the space X. A *minimum spanning tree on M* is a subtree of $K(M)$ with the same vertex set M and the least possible total weight. It is well-known that such a tree can be always constructed (even in a polynomial time) by a greedy algorithm such as the Kruskal algorithm [13]. Generally speaking, a minimum spanning tree on a fixed subset $M \subset X$ is not defined uniquely, but the ordered list of the weights of edges is the same for all such trees. This list is referred as an mst-*spectrum of M*. It is shown, see Section 4.1 and paper [25], that the mst-spectrum of M can be calculated in terms of the Gromov–Hausdorff distance from M to the simplexes consisting of $k = 2, \ldots, \#M$ points and such that there diameters are sufficiently large (they has to be at least twice greater than the diameter of M).

Now, let us pass to *Borsuk Problem.* In 1933, a Polish mathematician Karol Borsuk asked the following question: How many parts one needs to partition an arbitrary subset of the Euclidean space into, to obtain pieces of smaller diameters? He made the following famous conjecture: Any bounded non-single-point subset of $\mathbb{R}^n$ can be partitioned into at most $n+1$ subsets, each of which has smaller diameter than the initial subset. K. Borsuk himself proved it for $n = 2$ and for a ball in 3-dimensional space, [14] and [15]. Next, the conjecture was proved by J. Perkal (1947), and independently, by H. G. Eggleston (1955) for $n = 3$, then in 1946 by H. Hadwiger [18] and [19] for convex subsets with smooth boundaries, then for central symmetric bodies by A. S. Riesling (1971), and to this moment almost everybody believed that it is true. However, in 1993 the conjecture was suddenly disproved in general case by J. Kahn, and G. Kalai, see [20]. They constructed a counterexample in dimension $n = 1325$, and also proved that the conjecture is not valid for all $n > 2014$. This estimate was consistently improved by Raigorodskii, $n \geqslant 561$, Hinrichs and Richter, $n \geqslant 298$, Bondarenko, $n \geqslant 65$, and Jenrich, $n \geqslant 64$, see details in a review [21]. Notice that all the examples are finite subsets of the corresponding spaces, and the best known results of Bondarenko [22] and Jenrich [23] are the 2-distance subsets of the unit sphere.

On the other hand, Lusternik and Schnirelmann [16], and a bit later independently Borsuk [14] and [15], see also [17], have shown that the standard sphere and the standard ball in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, cannot be partitioned into $m \leqslant n$ subsets having smaller diameters. Thus, the least possible number of parts of smaller diameter, necessary to partition the sphere and the ball in $\mathbb{R}^n$ equals $n+1$.

In the present paper we consider a generalized Borsuk problem, passing to an arbitrary bounded metric space X and its partitions of an arbitrary cardinality m (not necessary finite). We give a criterion solving the Borsuk problem in terms of the Gromov–Hausdorff distance. It is shown that to verify the existence of an m-partition into subsets of smaller diameter it suffices to calculate the Gromov–Hausdorff distance from the space X to a simplex having the cardinality m and a smaller diameter than X, see Section 4.2. As a corollary, a solution to the Borsuk problem for a 2-distance space X with distances $a < b$ is obtained in terms of the clique cover number of the simple graph G with vertex set X, whose vertices x and y are connected by an edge iff $|xy| = a$.

Recall that a *clique cover* of a given simple graph is a cover of the vertex set of the graph by subsets within which every two vertices are adjacent. Each such subset is called a *clique* and is a vertex set of a complete subgraph that is also referred as a *clique*. The minimum k for which a k-element clique cover exists is called the *clique cover number* of the given graph. Further, a *graph coloring* is an assignment of labels traditionally called "colors" to vertices of a graph in such a way that no two adjacent vertices are of the same color. The smallest number of colors needed to color a graph is called its *chromatic number*. It is well-known that the clique cover can be considered as a graph coloring of the dual graph, hence the clique cover number of a graph equals to the chromatic number of the dual one. Calculation and estimation of these numbers are very hard combinatorial problems related to many other problems of Discrete Optimisation, in particular, to Borsuk conjecture, see a review in [24]. We calculate the clique cover number of a simple graph and the chromatic number of a simple graph in terms of the Gromov–Hausdorff distance from an appropriate simplex to the 2-distance spaces constructed by the graph, see Section 4.2.

The work is partly supported by RFBR, Project 19-01-00775-a, and by MGU Scientific Schools Support program.

To conclude this short Introduction, the authors use the opportunity to congratulate our Teacher, Anatoly Timofeevich Fomenko, on his 75th birthday and wish him good health, beautiful results and many birthdays ahead. He stimulated us to become professional mathematicians, and teaches us to work hard, to live in the World of Mathematics, and to be optimistic both in science and in life. We are infinitely thankful for his deep influence, kind care, permanent support and attention.

2. Preliminaries

Let X be an arbitrary nonempty set. Recall that a function on $\rho\, X\times X \to \mathbb{R}$ is called a *metric* if it is non-negative, non-degenerate, symmetric, and satisfies the triangle inequality. A set with a metric is called a *metric space*. If such a function ρ is permitted to take infinite values, then we call ρ *a generalized metric*. If we omit the non-degeneracy condition, i.e., permit $\rho(x,y) = 0$ for some distinct x and y, then we change the term "metric" to *pseudometric*. If ρ is only non-negative, symmetric, and $\rho(x,x) = 0$ for any $x \in X$, then we call such ρ *a distance function*, instead of metric or pseudometric. As a rule, if it is not ambiguous, we write $|xy|$ for $\rho(x,y)$.

In what follows all metric spaces are endowed with the corresponding metric topology. We also use the following notations. By $\#X$ we denote the cardinality of a set X. Let X be a metric space. The closure of a subset $A\subset X$ is denoted by $\bar{A}$. For its arbitrary nonempty subset $A\subset X$ and point $x \in X$ put $|xA| = |Ax| = \inf\big\{|ax| : a \in A\big\}$. Further, for $r \geqslant 0$ put

$$B_r(x) = \big\{y \in X : |xy| \leqslant r\big\}, \quad \text{and} \quad U_r(x) = \big\{y \in X : |xy| < r\big\},$$

and

$$B_r(A)=\{y\in X:|Ay|\leqslant r\},\quad \text{and}\quad U_r(A)=\{y\in X:|Ay|<r\}.$$

2.1. Hausdorff distance

Recall the basic results concerning the Hausdorff distance. The details can be found in [3]. For a set X, by $\mathcal{P}_0(X)$ we denote the collection of all nonempty subsets of X. Let X be a metric space. For any $A,B\in\mathcal{P}_0(X)$ we put

$$d_H^1(A,B)=\max\Bigl(\sup\{|aB|:a\in A\},\,\sup\{|Ab|:b\in B\}\Bigr), \tag{1}$$

$$d_H^2(A,B)=\inf\{r\in[0,\infty]:A\subset B_r(B)\ \&\ B_r(A)^B\}, \tag{2}$$

$$d_H^3(A,B)=\inf\{r\in[0,\infty]:A\subset U_r(B)\ \&\ U_r(A)^B\}. \tag{3}$$

It is well-known that these three values coincide with each other, i.e., $d_H^1(A,B)=d_H^2(AB)=$ $=d_H^3(A,B)$ for any $A,B\in\mathcal{P}_0(X)$. The value $d_H^i(A,B)$ is denoted by $d_H(A,B)$. It is easy to see that d_H is non-negative, symmetric, and $d_H(A,A)=0$ for any nonempty $A\subset X$, thus, d_H is a generalized distance on the family $\mathcal{P}_0(X)$ of all nonempty subsets of a metric space X, moreover, it is a generalized pseudometric on $\mathcal{P}_0(X)$, i.e., it satisfies the triangle inequality. The function d_H is referred as *Hausdorff distance*.

Further, by $\mathcal{H}(X)\subset\mathcal{P}_0(X)$ we denote the set of all nonempty closed bounded subsets of a metric space X. It is well-known that the Hausdorff distance d_H is a metric on $\mathcal{H}(X)$.

In what follows, speaking about the distance in $\mathcal{H}(X)$ we will always mean the Hausdorff distance. Notice that there are different notations for this hyperspace in the literature. We use the notation $\mathcal{H}(X)$ by virtue of the fact that this is the largest natural set of subsets of a metric space which the Hausdorff distance is a metric on.

Recall a few properties of the Hausdorff distance.

Proposition 1. *Let X be an arbitrary metric space.*

1. *The mapping $f\,X\to\mathcal{P}_0(X)$ given by the formula $f\,x\mapsto\{x\}$ is an isometric embedding.*

2. *For any $A,B\in\mathcal{P}_0(X)$ we have $d_H(A,B)=d_H(A,\bar B)=d_H(\bar A,B)=d_H(\bar A,\bar B)$.*

3. *For any $A,B\in\mathcal{P}_0(X)$ we have $d_H(A,B)=0$ if and only if $\bar A=\bar B$.*

4. *If $Y\subset X$ is an ε-net in $A\subset X$, then $d_H(A,Y)\leqslant\varepsilon$.*

2.2. Gromov–Hausdorff distance

Let X and Y be metric spaces. A triple (X',Y',Z) consisting of a metric space Z and its two subsets X' and Y' which are isometric respectively to X and Y is be called a *realization of the pair* (X,Y). Put

$$d_{GH}(X,Y)=\inf\{r\in\mathbb{R}:\exists\text{ a realization }(X',Y',Z)\text{ of }(X,Y)\text{ such that }d_H(X',Y')\leqslant r\}.$$

Remark 1. *The value $d_{GH}(X,Y)$ is evidently non-negative, symmetric, and $d_{GH}(X,X)=0$ for any metric space X. Thus, d_{GH} is a generalized distance function on each set of metric spaces.*

Definition 1. *The value $d_{GH}(X,Y)$ is called* the Gromov–Hausdorff distance *between the metric spaces X and Y.*

It turns out that, to define the Gromov–Hausdorff distance, it suffices to consider only metric spaces of the form $(X\sqcup Y,\rho)$, where ρ extends the original metrics of X and Y, i.e., the restrictions of ρ onto X and Y coincide with the original metrics of these metric spaces. Such ρ is called an *admissible metric for X and Y*, and the set of all admissible metrics for given X and Y is denoted by $\mathcal{D}(X,Y)$.

Proposition 2. *For any metric spaces X and Y, we have*

$$d_{GH}(X,Y)=\inf\bigl\{\rho_H(X,Y):\rho\in\mathcal{D}(X,Y)\bigr\}. \tag{4}$$

It is well-known that, on every set of metric spaces, the function d_{GH} is a generalized pseudometric. If the diameters of all spaces in the family are bounded by the same number, then d_{GH} is a pseudometric. In general, d_{GH} is not a metric, it may equal zero for distinct metric spaces. However, if we restrict ourselves to compact metric spaces considered up to an isometry, then d_{GH} is a metric.

For specific calculations of the Gromov–Hausdorff distance, other equivalent definitions of this distance are useful.

Recall that *a relation* between sets X and Y is defined as a subset of the Cartesian product $X\times Y$. Similarly to the case of mappings, for each $\sigma\in\mathcal{P}_0(X\times Y)$ and for every $x\in X$ and $y\in Y$, there are defined the *image* $\sigma(x):=\bigl\{y\in Y:(x,y)\in\sigma\bigr\}$ of any $x\in X$ and the *pre-image* $\sigma^{-1}(y)=\bigl\{x\in X:(x,y)\in\sigma\bigr\}$ of any $y\in Y$. Also, for $A\subset X$ and $B\subset Y$ their *image* and *pre-image* are defined as the union of the images and pre-images of their elements, respectively.

Let $\pi_X\ X\times Y\to X$ and $\pi_Y\ X\times Y\to Y$ be the canonical projections, i.e., $\pi_X(x,y)=x$ and $\pi_Y(x,y)=y$. The restrictions of these mappings to each relation $\sigma\subset X\times Y$ are denoted in the same way. A relation R between X and Y is called a *correspondence* if the restrictions of the canonical projections π_X and π_Y onto R are surjective. In other words, for every $x\in X$ there exists $y\in Y$, and for every $y\in Y$ there exists $x\in X$, such that $(x,y)\in R$. Thus, the correspondence can be considered as a surjective multivalued mapping. By $\mathcal{R}(X,Y)$ we denote Tthe set of all correspondences between X and Y.

If X and Y are metric spaces, then for each relation $\sigma\in\mathcal{P}_0(X\times Y)$ its *distortion* $\operatorname{dis}\sigma$ as follows

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\Bigl\{\bigl||xx'|-|yy'|\bigr|:(x,y),\ (x',y')\in\sigma\Bigr\}.$$

Remark 2. *For any $\sigma_1,\sigma_2\in\mathcal{P}_0(X\times Y)$ such that $\sigma_1\subset\sigma_2$, we have* $\operatorname{dis}\sigma_1\leqslant\operatorname{dis}\sigma_2$.

The next constructions establish a link between correspondences from $\mathcal{R}(X,Y)$ and admissible metrics on $X\sqcup Y$. At first, let $\rho\in\mathcal{D}(X,Y)$ be an arbitrary admissible metric for metric spaces X and Y, and suppose that $\rho_H(X,Y)<\infty$. Choose an arbitrary $r\geqslant\rho_H(X,Y)$ such that the set $R_r^\rho=\{(x,y):\rho(x,y)\leqslant r\}$ is a correspondence between X and Y (it is so for any $r>\rho_H(X,Y)$). Then $\operatorname{dis}R_r^\rho\leqslant 2r$.

Conversely, consider an arbitrary correspondence $R\in\mathcal{R}(X,Y)$. Suppose that $\operatorname{dis}R<\infty$. Extend the metrics of X and Y up to a symmetric function ρ^R defined on $X\sqcup Y$ as follows:

$$\rho^R(x,y)=\rho^R(y,x)=\inf\bigl\{|xx'|+|yy'|+\frac12\operatorname{dis}R:(x',y')\in R\bigr\}.$$

If $\operatorname{dis}R>0$, then ρ^R is an admissible metric, and $\rho^R_H(X,Y)=\frac12\operatorname{dis}R$.

The key well-known result on the relation between the correspondences and the Gromov–Hausdorff distance is the following Theorem.

Theorem 1. *For any metric spaces X and Y the equality*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac12\inf\bigl\{\operatorname{dis}R:R\in\mathcal{R}(X,Y)\bigr\}$$

holds.

2.3. Irreducible correspondences

For arbitrary nonempty sets X and Y, a correspondence $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ is called *irreducible* if it is a minimal element of the set $\mathcal{R}(X,Y)$ with respect to the order given by the inclusion relation. The set of all irreducible correspondences between X and Y is denoted by $\mathcal{R}^0(X,Y)$.

The following result is evident.

Proposition 3. *A correspondence $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ is irreducible if and only if for any $(x,y)\in R$ it holds*

$$\mathrm{Res}\bigl\{\#R(x),\#R^{-1}(y)\bigr\}=1.$$

Theorem 2. *Let X, Y be arbitrary nonempty sets. Then for every $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ there exists $R^0\in\mathcal{R}^0(X,Y)$ such that $R^0\subset R$. In particular, $\mathcal{R}^0(X,Y)\ne\emptyset$.*

Theorems 2 and 1, together with Remark 2, implies

Corollary 1. *For any metric spaces X and Y we have*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac12\inf\bigl\{\mathrm{dis}R\mid R\in\mathcal{R}^0(X,Y)\bigr\}.$$

Now we give another useful description of irreducible correspondences.

Proposition 4. *For any nonempty sets X, Y, and each $R\in\mathcal{R}^0(X,Y)$, there exist and unique partitions $R_X=\{X_i\}_{i\in I}$ and $R_Y=\{Y_i\}_{i\in I}$ of the sets X and Y, respectively, such that $R=\cup_{i\in I}X_i\times Y_i$. Moreover, $R_X=\cup_{y\in Y}\bigl\{R^{-1}(y)\bigr\}$, $R_Y:=\cup_{x\in X}\bigl\{R(x)\bigr\}$,*

$$\{X_i\times Y_i\}_{i\in I}=\cup_{(x,y)\in R}\{R^{-1}(y)\times R(x)\},$$

and for each i it holds $\mathrm{Res}\{\#X_i,\#Y_i\}=1$.

Conversely, each set $R=\cup_{i\in I}X_i\times Y_i$, where $\{X_i\}_{i\in I}$ and $\{Y_i\}_{i\in I}$ are partitions of nonempty sets X and Y, respectively, such that for each i it holds $\mathrm{Res}\{\#X_i,\#Y_i\}=1$, *is an irreducible correspondence between X and Y.*

Let X be an arbitrary set consisting of more than one point, and m a cardinal number, $2\leqslant m\leqslant\#X$. By $\mathcal{D}_m(X)$ we denote the family of all possible partitions of the set X into m nonempty subsets.

Now let X be a metric space. Then for each $D=\{X_i\}_{i\in I}\in\mathcal{D}_m(X)$ we put

$$\mathrm{diam}D=\sup_{i\in I}\mathrm{diam}X_i.$$

Further, for any nonempty $A,B\subset X$, we put $|AB|=\inf\bigl\{|ab|:(a,b)\in A\times B\bigr\}$, and $|AB|':=\sup\bigl\{|ab|:(a,b)\in A\times B\bigr\}$. Further, for each $D=\{X_i\}_{i\in I}\in\mathcal{D}_m(X)$ we put

$$\alpha(D)=\inf\bigl\{|X_iX_j|:i\ne j\bigr\}\quad\text{and}\quad\beta(D)=\sup\bigl\{|X_iX_j|':i\ne j\bigr\}.$$

Also notice that $|X_iX_i|=0$, $|X_iX_i|'=\mathrm{diam}X_i$, and hence, $\mathrm{diam}D=\sup_{i\in I}|X_iX_i|'$.

The next result follows easily from the definition of distortion, as well as from Proposition 4.

Proposition 5. *Let X and Y be arbitrary metric spaces, $D_X=\{X_i\}_{i\in I}$, $D_Y=\{Y_i\}_{i\in I}$, $\#I\geqslant2$, be some partitions of the spaces X and Y, respectively, and $R=\cup_{i\in I}X_i\times Y_i\in\mathcal{R}(X,Y)$. Then*

$$\begin{aligned}\mathrm{dis}R&=\sup\bigl\{|X_iX_j|'-|Y_iY_j|,\,|Y_iY_j|'-|X_iX_j|:i,j\in I\bigr\}=\\&=\sup\bigl\{\mathrm{diam}D_X,\,\mathrm{diam}D_Y,\,|X_iX_j|'-|Y_iY_j|,\,|Y_iY_j|'-|X_iX_j|:i,j\in I,\,i\ne j\bigr\}\leqslant\\&\leqslant\max\bigl\{\mathrm{diam}D_X,\mathrm{diam}D_Y,\beta(D_X)-\alpha(D_Y),\beta(D_Y)-\alpha(D_X)\bigr\}.\end{aligned}$$

It will also be convenient for us to represent a relation $\sigma\in\mathcal{P}_0(X\times Y)$ as a bipartite graph. Then the degree deg of each vertex is defined: $\deg_\sigma(x)=\#\sigma(x)$ and $\deg_\sigma(y)=\#\sigma^{-1}(y)$.

REMARK 3. *Notice that if $R\in\mathcal{R}^0(X,Y)$, $x\in X$, and $\deg_R(x)>1$, then for each $x'\in X$, $x'\ne x$, it holds $R(x)\cap R(x')=\emptyset$. Therefore, if $\#X\geqslant 2$ and $\#Y\geqslant 2$, then for any $R\in\mathcal{R}^0(X,Y)$ there is no $x\in X$ such that $\{x\}\times Y\subset R$.*

2.4. Some Examples and Estimates

Here we list several simple cases of exact calculation and estimate of the Gromov–Hausdorff distance.

EXAMPLE 1. *Let Y be an arbitrary ε-net of a metric space X. Then $d_{GH}(X,Y)\leqslant d_H(X,Y)\leqslant\varepsilon$. Thus, every compact metric space is approximated (according to the Gromov-Hausdorff metric) with any accuracy by finite metric spaces.*

By Δ_1 we denote a single-point metric space.

EXAMPLE 2. *Then for any metric space X we have*

$$d_{GH}(\Delta_1,X)=\frac{1}{2}\operatorname{diam}X.$$

EXAMPLE 3. *Let X and Y be some metric spaces, and the diameter of one of them is finite. Then*

$$d_{GH}(X,Y)\geqslant\frac{1}{2}|\operatorname{diam}X-\operatorname{diam}Y|.$$

EXAMPLE 4. *Let X and Y be some metric spaces, then*

$$d_{GH}(X,Y)\leqslant\frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam}X,\operatorname{diam}Y\},$$

in particular, if X and Y are bounded metric spaces, then $d_{GH}(X,Y)<\infty$.

For an arbitrary metric space X and a real $\lambda>0$, by λX we denote the metric space obtained from X by multiplying all distances by λ. For $\lambda=0$ we set $\lambda X=\Delta_1$.

EXAMPLE 5. *For any bounded metric space X and any $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, we have $d_{GH}(\lambda X,\mu X)=$ $=\frac{1}{2}|\lambda-\mu|\operatorname{diam}X$, in particularly, for any $0\leqslant a<b$ the curve $\gamma(t):=t\,X$, $t\in[a,b]$, is shortest.*

EXAMPLE 6. *Let X and Y be metric spaces, then for any $\lambda>0$ we have $d_{GH}(\lambda X,\lambda Y)=$ $=\lambda\,d_{GH}(X,Y)$. If, in addition, $d_{GH}(X,Y)<\infty$, then the equality holds for all $\lambda\geqslant 0$.*

3. Gromov–Hausdorff Distance to Simplexes

By *simplex* we call a metric space, all whose non-zero distances equal to each other. If m is an arbitrary cardinal number, then by Δ_m we denote a simplex containing m points and such that all its non-zero distances equal 1. Thus, $\lambda\Delta_m$, $\lambda>0$, is a simplex whose non-zero distances equal λ. Also, for arbitrary metric space X and $\lambda=0$, the space λX coincides with Δ_1 by definitoon.

3.1. The Case of Simplexes of Greater Cardinality

The next result generalizes Theorem 4.1 from [10].

THEOREM 3. *Let X be an arbitrary metric space, $m > \#X$ a cardinal number, and $\lambda \geqslant 0$, then*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \max\{\lambda, \mathrm{diam}X - \lambda\}.$$

PROOF. If X is unbounded, then $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \infty$ by Example 3, and the required equality holds.

Now, let $\mathrm{diam}X < \infty$.

If $\#X = 1$, then $\mathrm{diam}X = 0$, and, by Example 2, we have

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \mathrm{diam}\lambda\Delta = \lambda = \max\{\lambda, \mathrm{diam}X - \lambda\}.$$

If $\lambda = 0$, then, by Example 2, we have

$$2d_{GH}(\Delta_1, X) = \mathrm{diam}X = \max\{\lambda, \mathrm{diam}X - \lambda\}.$$

Let $\#X > 1$ and $\lambda > 0$. Choose an arbitrary $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_m, X)$. Since $\#X < m$ and $\lambda > 0$, then there exists $x \in X$ such that $\#R^{-1}(x) \geqslant 2$, thus, $\mathrm{dis}R \geqslant \lambda$ and $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \geqslant \lambda$.

Consider an arbitrary sequence $(x_i, y_i) \in X \times X$ such that $|x_i y_i| \to \mathrm{diam}X$. If it contains a subsequence (x_{i_k}, y_{i_k}) such that for each i_k there exists $z_k \in \lambda\Delta$, $(z_k, x_{i_k}) \in R$, $(z_k, y_{i_k}) \in R$, then $\mathrm{dis}R \geqslant \mathrm{diam}X$ and

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \geqslant \max\{\lambda, \mathrm{diam}X\} \geqslant \max\{\lambda, \mathrm{diam}X - \lambda\}.$$

If such subsequence does not exist, then there exists a subsequence (x_{i_k}, y_{i_k}) such that for any i_k there exist distinct $z_k, w_k \in \lambda\Delta_m$, $(z_k, x_{i_k}) \in R$, $(w_k, y_{i_k}) \in R$, and, therefore,

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \geqslant \max\big\{\lambda, |\mathrm{diam}X - \lambda|\big\} \geqslant \max\{\lambda, \mathrm{diam}X - \lambda\}.$$

Thus, in the both cases we have $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geqslant \max\big\{\lambda, \mathrm{diam}X - \lambda\big\}$.

Choose an arbitrary $x_0 \in X$, then, by assumption, $\#X > 1$, and, thus, the set $X \setminus \{x_0\}$ is not empty. Since $\#X < m$, then $\lambda\Delta_m$ contains a subset $\lambda\Delta'$ of the same cardinality as $X \setminus \{x_0\}$. Let $g\, \lambda\Delta' \to X \setminus \{x_0\}$ be an arbitrary bijection, and $\lambda\Delta'' = \lambda\Delta_m \setminus \lambda\Delta'$, then $\#\lambda\Delta'' > 1$. Consider the following correspondence

$$R_0 = \Big\{\big(z', g(z')\big) : z' \in \lambda\Delta'\Big\} \cup \big(\lambda\Delta'' \times \{x_0\}\big)$$

and apply Proposition 5. So, we have:

$$\mathrm{dis}R_0 = \sup\{\lambda, |x_1x_1'| - \lambda, \lambda - |x_2x_2'| : x_1, x_1', x_2, x_2' \in X,\ x_1 \neq x_1',\ x_2 \neq x_2'\} = \max\{\lambda, \mathrm{diam}X - \lambda\},$$

therefore,

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda, \mathrm{diam}X - \lambda\},$$

what is required. □

3.2. The Case of Simplexes with at most the Same Cardinality

Let X be an arbitrary set consisting of more than one point, $2 \leqslant m \leqslant \#X$ a cardinal number, and $\lambda > 0$. Under notations of Subsection 2.3, consider an arbitrary $D \in \mathcal{D}_m(X)$, any bijection $g\, \lambda\Delta_m \to D$, and construct the correspondence $R_D \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_m, X)$ in the following way:

$$R_D = \bigcup_{z \in \lambda\Delta_m} \{z\} \times g(z).$$

Clearly that the correspondence R_D is irreducible. Apply Proposition 5 to calculate its distortion.

Proposition 6. *Let $X \neq \Delta_1$ be an arbitrary metric space, $2 \leqslant m \leqslant \#X$ a cardinal number, and $\lambda > 0$. Then for any $D \in \mathcal{D}_m(X)$ it holds*

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\ \lambda - \alpha(D),\ \beta(D) - \lambda\}.$$

Proof. If X is unbounded, then $\operatorname{dis} R = \infty$ for any $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_m, X)$. Since $m \geqslant 2$, for any $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ we have either $\operatorname{diam} D = \infty$, or $\beta(D) = \infty$. Indeed, if $\operatorname{diam} D < \infty$ and $\beta(D) < \infty$ then for any $x, y \in X$ either $x, y \in X_i$, thus $|xy| \leqslant \operatorname{diam} D$, or $x \in X_i$, $y \in X_j$, $i \neq j$, and $|xy| \leqslant |X_iX_j|' \leqslant \beta(D)$, therefore X is bounded. Thus, for an unbounded X the both sides of the equality are infinite, thus we get what is required.

Now, let $\operatorname{diam} X < \infty$. By Proposition 5, we have

$$\operatorname{dis} R_D = \sup\bigl\{\operatorname{diam} D,\ \lambda - |X_iX_j|,\ |X_iX_j|' - \lambda \colon i, j \in I,\ i \neq j\bigr\} = \max\{\operatorname{diam} D,\ \lambda - \alpha(D),\ \beta(D) - \lambda\},$$

that completes the proof. $\square$

Corollary 2. *Let $X \neq \Delta_1$ be an arbitrary metric space, $2 \leqslant m \leqslant \#X$ a cardinal number, and $\lambda > 0$. Then for any $D \in \mathcal{D}_m(X)$ it holds*

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\ \lambda - \alpha(D),\ \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Proof. For unbounded X the equation evidently holds.

Consider now the case of bounded X. Notice that $\operatorname{diam} D \leqslant \operatorname{diam} X$ and $\beta(D) \leqslant \operatorname{diam} X$. In addition, if $\operatorname{diam} D < \operatorname{diam} X$, and $(x_i, y_i) \in X \times X$ is a sequence such that $|x_iy_i| \to \operatorname{diam} X$, then, starting from some i, the points x_i and y_i belong to different elements of D, therefore, in this case we have $\beta(D) = \operatorname{diam} X$, and the formula is proved.

Now, let $\operatorname{diam} D = \operatorname{diam} X$, then $\beta(D) - \lambda \leqslant \operatorname{diam} X$ and $\operatorname{diam} X - \lambda \leqslant \operatorname{diam} X$, thus

$$\max\{\operatorname{diam} D,\ \lambda - \alpha(D),\ \beta(D) - \lambda\} = \max\{\operatorname{diam} X,\ \lambda - \alpha(D)\} = \max\{\operatorname{diam} D,\ \lambda - \alpha(D),\ \operatorname{diam} X - \lambda\},$$

that completes the proof. $\square$

Proposition 7. *Let $X \neq \Delta_1$ be an arbitrary metric space, and $2 \leqslant m \leqslant \#X$ a cardinal number, and $\lambda > 0$. Then*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \operatorname{dis} R_D.$$

Proof. The case of unbounded X is trivial, so, let X be bounded. By Corollary 1,

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \inf_{R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta_m, X)} \operatorname{dis} R,$$

thus, it suffices to prove that for any irreducible correspondence $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta_m, X)$ there exists $D \in \mathcal{D}_m(X)$ such that $\operatorname{dis} R_D \leqslant \operatorname{dis} R$.

Let us choose an arbitrary $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta_m, X)$ such that it cannot be represented in the form R_D, then the partition $D^R_{\lambda\Delta_m}$ is not pointwise, i.e., there exists $x \in X$ such that $\#R^{-1}(x) \geqslant 2$, therefore, $\mathrm{dis}R \geqslant \lambda$.

Define a metric on the set $D^R_{\lambda\Delta_m}$ to be equal λ between any its distinct elements, then this metric space is isometric to a simplex $\lambda\Delta'_n$, $n \leqslant m$. The correspondence R generates naturally a correspondence $R' \in \mathcal{R}(\lambda\Delta'_n, X)$, namely, if $D^R_{\lambda\Delta_m} = \{\Delta_j\}_{j\in J}$, and $f_R\, D^R_{\lambda\Delta_m} \to D^R_X$ is the bijection generated by R, then

$$R' = \bigcup_{j\in J} \{\Delta_j\}\times f_R(\Delta_j).$$

It is easy to see that $\mathrm{dis}R = \max\{\lambda,\, \mathrm{dis}R'\}$. Moreover, R' is generated by the partition $D' = D^R_X$, i.e., $R' = R_{D'}$, thus, by Corollary 2, we have

$$\mathrm{dis}R' = \max\{\mathrm{diam}D',\, \lambda - \alpha(D'),\, \mathrm{diam}X - \lambda\},$$

and hence,

$$\mathrm{dis}R = \max\{\lambda, \mathrm{diam}D',\, \lambda - \alpha(D'),\, \mathrm{diam}X - \lambda\} = \max\{\lambda,\, \mathrm{diam}D',\, \mathrm{diam}X - \lambda\}.$$

Since $n \leqslant m$, the partition D' has a subpartition $D \in \mathcal{D}_m(X)$. Clearly, $\mathrm{diam}D \leqslant \mathrm{diam}D'$, therefore,

$$\mathrm{dis}R_D = \max\{\mathrm{diam}D,\, \lambda - \alpha(D),\, \mathrm{diam}X - \lambda\} \leqslant \max\{\mathrm{diam}D',\, \lambda,\, \mathrm{diam}X - \lambda\} = \mathrm{dis}R,$$

q.e.d. □

Considering separately the trivial case of $\lambda = 0$, we get the following result.

Corollary 3. *Let $X \neq \Delta_1$ be an arbitrary metric space, $2 \leqslant m \leqslant \#X$ a cardinal number, and $\lambda \geqslant 0$. Then*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \max\{\mathrm{diam}D,\, \lambda - \alpha(D),\, \mathrm{diam}X - \lambda\}.$$

For any metric space X put

$$\varepsilon(X) = \inf\bigl\{|xy| : x, y \in X,\, x \neq y\bigr\}.$$

Notice that $\varepsilon(X) \leqslant \mathrm{diam}X$, and for a bounded X the equality holds if and only if X is a simplex.

Corollary 3 immediately implies the following result that is proved in [10].

Theorem 4 ([10]). *Let $X \neq \Delta_1$ be a finite metric space, $m = \#X$, and $\lambda \geqslant 0$, then*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \max\bigl\{\lambda - \varepsilon(X),\, \mathrm{diam}X - \lambda\bigr\}.$$

4. Some Applications

In this section we apply the previous results to some well-known discrete optimisation problems from Metric Geometry and Graph Theory.

4.1. Calculation mst-spectrum

The first application deals with optimal graphs, so we start from some preliminaries for the Graph Theory.

4.1.1. Elements of Graph Theory

Here we consider simple graphs only, so in what follows by a *graph* we mean a pair $G = (V, E)$ consisting of two sets V and E referred as the *vertex set* and the *edge set* of the graph G , respectively; elements of V are called *vertices*, and the ones of E are called *edges* of the graph G. The set E is a subset of the family of two-element subsets of V. If V and E are finite sets then the graph G is called *finite*.

It is convenient to use the following notations:

- If $\{v, w\} \in E$ is an edge of the graph G, then we write it just as vw or wv; further one says that an edge *vw connects the vertices v and w*, and that v and w are *the vertices of the edge vw*;

- We write $V(G)$ and $E(G)$ for the vertex set and the edge set of a graph G to underline which graph is under consideration.

Graphs $G = (V, E)$ and $H = (W, F)$ are called *isomorphic* if there exists a bijective map $f V \to W$ such that $uv \in E$ if and only if $f(u)f(v) \in F$. Such a mapping f is called an *isomorphism of the graphs G and H*. Isomorphic graphs are often identified and, therefore, are not distinguished.

Two vertices $v, w \in V(G)$ are called *adjacent* if $vw \in E(G)$. Two different edges $e_1, e_2 \in E(G)$ are called *adjacent* if they have a common vertex, i.e., if $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$. Each edge $vw \in E(V)$ and its vertex, i.e., v or w, are said to be *incident* to each other. The set of vertices of a graph G adjacent to a vertex $v \in V$ is called the *neighbourhood of the vertex v* and denoted by N_v. The cardinal number of edges incident to a vertex v is called the *degree of the vertex v* and is denoted by $\deg v$, so $\deg v = \#N_v$.

A *subgraph* of a graph $G = (V, E)$ is each graph $H = (W, F)$ provided that $W \subset V$ and $F \subset E$. The fact that a graph H is a subgraph of a graph G is denoted as $H \subset G$. If $W = V$ then the subgraph $H \subset G$ is called *spanning*.

On the set of all graphs, whose vertex sets lie in a given set V, the inclusion relation $\subset$ of being a subgraph defines a partial order. The smallest element in this order is the empty graph $(\emptyset, \emptyset)$; the greatest one is called the *complete graph on V* and is denoted by $K(V)$. This partial order induces the one on the set of all subgraphs of a graph $G = (V, E)$: now the smallest element is again the empty graph $(\emptyset, \emptyset)$, but the greatest one is the graph G itself.

We also need some set-theoretical operations on graphs. They are usually defined in an intuitively clear way in terms of vertex and edge sets. For example, if $G_1 = (V_1, E_1)$ and $G_2 = (V_2, E_2)$ are graphs, then put $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Also, if $G = (V, E)$ is a graph, and e is a two-element subset of V, then $G \cup e = \big(V, E \cup \{e\}\big)$; similarly for $e \in E$ put $G \setminus e = \big(V, E \setminus \{e\}\big)$.

For each $W \subset V$ the *subgraph $G(W)$ of the graph G generated by W* is defined as the graph with the vertex set W, whose edge set consists of all $e \in E$ that connects vertices from W. In other words, $G(W)$ is maximal among subgraphs of G, whose vertex sets coincides with W.

We also need a similar construction for an edges set. Namely, for $F \subset E$ the *subgraph $G(F)$ of the graph G generated by F* is defined as the graph with the edge set F, whose vertex set is the collection of all vertices of G incident to edges from F.

A finite sequence $\gamma = (v_0 = v, v_1, \ldots, v_k = w)$ of vertices of a graph G is called a *walk of length k connecting v and w* if for every $i = 1, \ldots, k$ the vertices v_{i-1} and v_i are adjacent, and the edges $e_i = v_{i-1}v_i$ are called the *edges of the walk γ*. A walk containing at least one edge is called *non-degenerate*, and the walk containing no edges, i.e., with $k = 0$, is called *degenerate*. The walk is called *closed* if $v_0 = v_n$, and it is called *open* otherwise. A *trail* is a walk with no repeated edges, a *path* is an open trail with no repeated vertices. A *circuit* is a closed trail, and a *cycle* is a circuit with no repeated vertices.

A graph G is called *connected* if each pair of its vertices are connected by a walk. Maximal (by inclusion) connected subgraphs of a graph G are called *components* of G. A graph without cycles is called *a forest*, and a connected forest is called a *tree*.

A *weighted graph* is a graph $G = (V, E)$ equipped with a *weight function* $\omega\, E \to [0, \infty)$ (sometimes it is useful to consider more general weight functions, for instance, the ones taking negative or/and negative values also). A weighted graph is denoted by (V, E, ω) or (G, ω). The *weight* $\omega(H)$ *of a subgraph* $H \subset G$ is the sum of the weights of all the edges from this subgraph: $\omega(H) = \sum_{e \in E(H)} \omega(e)$. This definition can be extended to trails, in particular, to paths, circuits and cycles, considered as the corresponding subgraphs of G. In the case of a walk $\gamma = (v_0 = v, v_1, \ldots, v_k = w)$, its weight is defined as the sum of weights of all its consecutive edges: $\omega(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \in (v_{i-1}v_i)$. For graphs without weight functions these notions are defined as well by assigning the weight 1 to each edge by default.

Remark 4. *As in the case of metric spaces, we sometimes won't denote the weight function explicitly. Instead of that, speaking about a weighted graph G, we denote the weight of an object x just by $|x|$. For example, for $e \in E$ by $|e|$ we mean the weight of this edge, and for a subgraph $H \subset G$ by $|H|$ we denote the weight of H, etc.*

4.1.2. Minimum Spanning Tree Problem

Let M be a metric space. We consider M as a weighted complete graph $K(M)$ whose weight function equals to the distance between the corresponding edges. By $\mathcal{T}(M)$ we denote the set of all spanning trees in $K(M)$. Put

$$\mathrm{mst}(M) = \inf_{T \in \mathcal{T}(M)} |T|$$

and call this value by the *length of minimum spanning tree on M*. Each $T \in \mathcal{T}(M)$ with $|T| = \mathrm{mst}(M)$ is call a *minimum spanning tree on M*. The set of all minimum spanning trees on M is denoted by $\mathrm{MST}(M)$.

Remark 5. *If M is finite, them $\mathrm{MST}(M) \neq \emptyset$. For infinite M the situation is rather more difficult, see [26].*

Example 7. *If all nonzero distances in M are the same, then every spanning tree in $K(M)$ is minimum, so $\mathrm{MST}(M) = \mathcal{T}(M)$.*

If $\#M = 3$, then each minimum spanning tree is obtained from the complete graph $K(M)$ by deleting the longest edge (any of them if there are several).

4.1.3. The mst-spectrum

In this Section we consider only finite metric spaces M, i.e., $\#M < \infty$.

Notice that a minimum spanning tree, generally speaking, is not uniquely defined. For $G \in \mathrm{MST}(M)$, by $\sigma(G)$ we denote the vector whose elements are the lengths of the edges of the tree G sorted in descending order. The following result is well-known, however, we present its proof for completeness.

Proposition 8. *For any $G_1, G_2 \in \mathrm{MST}(M)$ the equality $\sigma(G_1) = \sigma(G_2)$ holds.*

Proof. Recall the standard algorithm for converting one minimum spanning tree to another [13].

Let $G_1 \neq G_2$, $G_i = (M, E_i)$, then $E_1 \neq E_2$ and $\#E_1 = \#E_2$, therefore, there exists $e \in E_2 \backslash E_1$. The graph $G_1 \cup e$ has a cycle C containing the edge e, and the cycle C does not contain an edge longer than e, because $G_1 \notin \mathrm{MST}(M)$ otherwise. The forest $G_2 \backslash e$ consists of two trees whose vertex sets we denote by V' and V''. Clearly, $M = V' \sqcup V''$. The cycle C contains an edge $e' \neq e$ connecting a vertex from V' with a vertex from V''. This edge does not lie in E_2, otherwise G_2 would contain a cycle. Therefore, $e' \in E_1 \backslash E_2$.

The graph $G_2 \cup e'$ also contains some cycle C'. By the choice of e', the cycle C' also has the edge e. Similarly to the above, the length of the edge e is less than or equal to the length of the edge e', otherwise $G_2 \notin \mathrm{MST}(M)$. Therefore, $|e| = |e'|$.

Replacing the edge e' in G_1 with e, we get a tree G_1' of the same length, i.e., it is a minimum spanning tree as well, and G_1' and G_2 have one common edge more than the trees G_1 and G_2. Thus, in a finite number of steps, we rebuild the tree G_1 into the tree G_2, passing through minimum spanning trees. It remains to notice that $\sigma(G_1') = \sigma(G_1)$, therefore, $\sigma(G_1) = \sigma(G_2)$. □

Proposition 8 motivates the following definition.

DEFINITION 2. *For any finite metric space M, by $\sigma(M)$ we denote $\sigma(G)$ for an arbitrary $G \in \mathrm{MST}(M)$ and call it the* mst-spectrum of the space M.

THEOREM 5. *Let M be a finite metric space and $\sigma(M) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$. Then*

$$\sigma_k = \max\bigl\{\alpha(D) : D \in \mathcal{D}_{k+1}(M)\bigr\}.$$

PROOF. Let $G = (M, E) \in \mathrm{MST}(M)$ and the set E be ordered so that $|e_i| = \sigma_i$. Denote by $D = \{M_1, \ldots, M_{k+1}\}$ the partition of the set M into the sets of vertices of the trees forming the forest $G \backslash \{e_i\}_{i=1}^k$.

LEMMA 1. *We have $\alpha(D) = |e_k|$.*

PROOF. Indeed, choose arbitrary M_i and M_j, $i \ne j$, take arbitrary points a_i and a_j in them, respectively, and let γ be the unique path in G, connecting a_i and a_j. Then γ contains some edge e_p, $1 \leqslant p \leqslant k$. However, due to the minimality of the tree G, we have

$$|a_i a_j| \geqslant |e_p| \geqslant \operatorname*{Res}_{1 \leqslant i \leqslant k} |e_i| = |e_k|,$$

thus $|M_i M_j| \geqslant |e_k|$, so $\alpha(D) \geqslant |e_k|$. On the other hand, the edge e_k connects some M_p and M_q, then we get $\alpha(D) \leqslant |M_p M_q| = |e_k|$. □

Now consider an arbitrary partition $D' = \{M_1', \ldots, M_{k+1}'\}$.

LEMMA 2. *We have $\alpha(D') \leqslant \alpha(D)$.*

PROOF. Due to Lemma 1, it suffices to show that $\alpha(D') \leqslant |e_k|$. Denote by E' the set consisting of all edges $e_p \in E$, each of which connects some M_i' and M_j', $i \ne j$. Since G is connected, then the set E' consists of at least k edges. On the other hand, if some M_i' and M_j', $i \ne j$, are connected by an edge $e' \in E'$, then $|M_i' M_j'| \leqslant |e'|$, hence $\alpha(D') = \operatorname{Res} |M_i' M_j'| \leqslant \operatorname{Res}_{e' \in E'} |e'| \leqslant |e_k|$. □

Lemma 2 completes the proof. □

4.1.4. Calculating mst-spectrum by Means of Gromov–Hausdorff Distances

In the present section we show that the mst-spectrum of an arbitrary n-point metric space X can be represented as a linear function on the Gromov–Hausdorff distances from this space to the $\lambda\Delta_2, \ldots, \lambda\Delta_n$ for $\lambda \geqslant 2\operatorname{diam} X$.

THEOREM 6. *Let X be a finite metric space, $\sigma(X) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$, $\lambda \geqslant 2\operatorname{diam} X$. Then*

$$\sigma_k = \lambda - 2 d_{GH}(\lambda\Delta_{k+1}, X).$$

Proof. Choose any $1 \leqslant k \leqslant n-1$ and arbitrary irreducible correspondence $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta_{k+1}, X)$. By Proposition 4, there exists partitions $R_{\lambda\Delta_{k+1}} = \{Z_i\}_{i=1}^p$ and $R_X = \{X_i\}_{i=1}^p$ of $\lambda\,\Delta_{k+1}$ and X, respectively, such that $R = \cup_{i=1}^p Z_i \times X_i$, and $\operatorname{Res}\{\#Z_i, \#X_i\} = 1$ for all i. By Proposition 5, it holds $\operatorname{dis}R \geqslant \max\{\operatorname{diam}R_{\lambda\Delta_{k+1}}, \operatorname{diam}R_X\}$. Thus, if for some i we have $\#Z_i > 1$, then $\operatorname{dis}R \geqslant \lambda \geqslant 2\operatorname{diam}X$. Since $k+1 \leqslant n$, there exists R such that $\#Z_i = 1$ for all i. For such R, again by Proposition 5, we have $\operatorname{dis}R \leqslant \operatorname{diam}X$. Therefore, $\inf_{R\in\mathcal{R}^0(\lambda\Delta_{k+1},X)} \operatorname{dis}R$ is achieved on a correspondences of the latter type. By $\mathcal{R}$ we denote the set of such correspondences.

Now, if $R \in \mathcal{R}$, then it consists of $p = k+1$ elements, and $R_X \in \mathcal{D}_{k+1}(X)$. By Proposition 5, we have

$$\operatorname{dis}R = \sup\bigl\{\operatorname{diam}R_X,\, |X_iX_j|' - \lambda,\, \lambda - |X_iX_j| : 1 \leqslant i < j \leqslant k+1\bigr\} = \\ = \sup\bigl\{\lambda - |X_iX_j| : 1 \leqslant i < j \leqslant k+1\bigr\} = \lambda - \alpha(R_X),$$

where the second equality holds because for λ chosen the estimate

$$\max\bigl\{|X_iX_j|' - \lambda, \operatorname{diam}R_X\bigr\} \leqslant \operatorname{diam}X \leqslant \lambda - \operatorname{diam}X \leqslant \lambda - |X_iX_j|$$

holds for any $1 \leqslant i < j \leqslant k+1$. Corollary 1, together with above considerations, gives us

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_{k+1}, X) = \operatorname*{Res}_{R\in\mathcal{R}} \operatorname{dis}R = \operatorname*{Res}_{R\in\mathcal{R}} \bigl(\lambda - \alpha(R_X)\bigr) = \lambda - \max_{D\in\mathcal{D}_{k+1}(X)} \alpha(D),$$

where the last equality holds because each D generates some $R \in \mathcal{R}$. It remains to apply Theorem 5 saying that $\max\bigl\{\alpha(D) : D \in \mathcal{D}_{k+1}(X)\bigr\} = \sigma_k$, thus, $2d_{GH}(\lambda\Delta_{k+1}, X) = \lambda - \sigma_k$. $\square$

Corollary 4. *Let X be a finite metric space and $\lambda \geqslant 2\operatorname{diam}X$, then*

$$\operatorname{mst}X = \lambda(\#X - 1) - 2\sum_{k=1}^{\#X-1} d_{GH}(\lambda\Delta_{k+1}, X).$$

4.2. Generalized Borsuk Problem

Classical Borsuk Problem deals with partitions of subsets of Euclidean space into parts having smaller diameters. We generalize the Borsuk problem to arbitrary bounded metric spaces and partitions of arbitrary cardinality. Let X be a bounded metric space, m a cardinal number such that $2 \leqslant m \leqslant \#X$, and $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$. We say that D is a partition of X into subsets having *strictly smaller diameters*, if there exists $\varepsilon > 0$ such that $\operatorname{diam}X_i \leqslant \operatorname{diam}X - \varepsilon$ for all $i \in I$.

The *Generalized Borsuk Problem*: Is it possible to partition a bounded metric space X into a given, probably infinite, number of subsets, each of which has a strictly smaller diameter than X?

We give a solution to this Problem in terms of the Gromov–Hausdorff distance.

Theorem 7. *Let X be an arbitrary bounded metric space and m a cardinal number such that $2 \leqslant m \leqslant \#X$. Choose an arbitrary number $0 < \lambda < \operatorname{diam}X$, then X can be partitioned into m subsets having strictly smaller diameters if and only if $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) < \operatorname{diam}X$. If not, then $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \operatorname{diam}X$.*

Proof. Due Corollary 3, for the λ chosen the inequality $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \leqslant \operatorname{diam}X$ is valid, and the equality holds if and only if for each $D \in \mathcal{D}_m(X)$ we have $\operatorname{diam}D = \operatorname{diam}X$. The latter means that there is no partition of the space X into m parts having strictly smaller diameters. $\square$

Corollary 5. *Let $d > 0$ be a real number, and $m \leqslant n$ cardinal numbers. By $\mathcal{M}_n$ we denote the set of isometry classes of bounded metric spaces of cardinality at most n, endowed with the Gromov–Hausdorff distance. Choose an arbitrary $0 < \lambda < d$. Then the intersection*

$$S_{d/2}(\Delta_1) \cap S_{d/2}(\lambda\Delta_m)$$

of the spheres (here the the spheres are considered as spheres in $\mathcal{M}_n$) does not contain spaces, whose cardinality is less than m, and consists exactly of all metric spaces from $\mathcal{M}_n$, whose diameters are equal to d and that cannot be partitioned into m subsets of strictly smaller diameters.

Proof. Let X belong to the intersection of the spheres, then $\operatorname{diam} X = d$ in accordance with Example 2. If $m > \#X$, then, due to Theorem 3, we have

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\} < d,$$

therefore $X \notin S_{d/2}(\lambda\Delta_m)$, that proves the first statement of Corollary.

Now let $m \leqslant \#X$. Since $\operatorname{diam} X = d$ and $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = d$, then, due to Theorem 7, the space X cannot be partitioned into m subsets of strictly smaller diameters.

Conversely, each X of the diameter d, such that $m \leqslant \#X$ and X cannot be partitioned into m subsets of strictly smaller diameter, lies in the intersection of the spheres by Theorem 7. □

4.3. Clique Cover Number and Chromatic Number of a Simple Graph

Recall that a subgraph of an arbitrary simple graph G is called *a clique*, if any its two vertices are connected by an edge, i.e., the clique is a subgraph which is a complete graph itself. Notice that each single-vertex subgraph is a single-vertex clique. For convenience, the vertex set of a clique is also referred as a *clique*.

On the set of all cliques, an ordering with respect to inclusion is naturally defined, and hence, due to the above remarks, a family of maximal cliques is uniquely defined; this family forms *a covering of the graph G* in the following sense: the union of all vertex sets of all maximal cliques coincides with the vertex set $V(G)$ of the graph G.

If one does not restrict himself by maximal cliques only, then, generally speaking, one can find other families of cliques covering the graph G. One of the classical problems of Graph Theory is to calculate the minimal possible number of cliques covering a given finite simple graph G. This number is referred as the *clique cover number* and is often denoted by $\theta(G)$. It is easy to see that the value $\theta(G)$ also equals the least number of cliques whose vertex sets form a partition of $V(G)$.

Another popular problem is to find the least possible number of colors that is necessary to color the vertices of a simple finite graph G in such a way that adjacent vertices have different colors. This number is denoted by $\gamma(G)$ and is referred as the *chromatic number of the graph G*.

For a simple graph G, by G' we denote its *dual graph*, i.e., the graph with the same vertex set and the complementary set of edges (two vertices of G' are adjacent if and only if they are not adjacent in G). It is not difficult to verify, that for any simple finite graph G it holds $\theta(G) = \gamma(G')$.

Let $G = (V, E)$ be an arbitrary finite graph. Fix two real numbers $a < b \leqslant 2a$ and define a metric on V as follows: the distance between adjacent vertices equals a, and the distance between nonadjacent vertices equals b. Then a subset $V' \subset V$ has diameter a if and only if $G(V') \subset G$ is a clique. This implies that the clique cover number of G equals the least possible cardinality of partitions of the metric space V into subsets of (strictly) smaller diameter. However, this number was calculated in Theorem 7. Thus, we get the following result.

Corollary 6. *Let $G = (V, E)$ be an arbitrary finite graph. Fix two real numbers $a < b \leqslant 2a$ and define a metric on V as follows: the distance between adjacent vertices equals a, and the distance between nonadjacent ones equals b. Let m be the greatest positive integer k such that $2d_{GH}(a\Delta_k, V) = b$ (in the case when there is no such k, we put $m = 0$). Then $\theta(G) = m + 1$.*

Because of the duality between clique cover and chromatic numbers, we get the following dual result.

Corollary 7. *Let $G=(V,E)$ be an arbitrary finite graph. Fix two real numbers $a<b\leqslant 2a$ and define a metric on V as follows: the distance between adjacent vertices equals b, and the distance between nonadjacent ones equals a. Let m be the greatest positive integer k such that $2d_{GH}(a\Delta_k,V)=b$ (in the case when there is no such k, we put $m=0$). Then $\gamma(G)=m+1$.*

4.4. Examples

In conclusion we give several examples demonstrating how the above Corollaries can be applied.

4.4.1. An Empty Graph and a Complete Graph

Let $G=(V,E)$ be an empty graph, i.e., $E=\emptyset$. Put $n=\#V$, then $\theta(G)=n$. Now, let us calculate $\theta(G)$ by means of Corollary 6.

The metric space V constructed in Corollary 6 coincides with $b\Delta_n$, then for $k<n$ we have $2d_{GH}(a\Delta_k,V)=2d_{GH}(a\Delta_k,b\Delta_n)=b$ because for any $R\in\mathcal{R}(a\Delta_k,b\Delta_n)$ there exists $x\in a\Delta_k$ such that $\#R(x)\geqslant 2$, thus $\operatorname{dis}R=b$. For $k\geqslant n$ we have $2d_{GH}(a\Delta_k,b\Delta_n)\leqslant\max\{a,b-a\}$. Indeed, for $k=n$ we can consider a bijection R with $\operatorname{dis}R=b-a$. For $k>n$ we can define R as follows: take some $x\in b\Delta_n$, and let $R^{-1}(x)$ consists of arbitrary $k-n+1$ points of $a\Delta_k$; for remaining points let R be a bijection. Then $\operatorname{dis}R=\max\{a,b-a\}$. Thus, according to Corollary 6, we also have $\theta(G)=n$.

Now, let $G=(V,E)$ be a complete graph, i.e., any two its vertices are adjacent. In this case $\theta(G)=1$. Now, let us calculate $\theta(G)$ by means of Corollary 6.

In this case the metric space V from Corollary 6 coincides with $a\Delta_n$, therefore $2d_{GH}(a\Delta_k,V)=$ $=2d_{GH}(a\Delta_k,a\Delta_n)\leqslant\max\bigl\{\operatorname{diam}(a\Delta_k),\operatorname{diam}(a\Delta_n)\bigr\}<b$, due to Example 4, therefore $\theta(G)=1$ according to Corollary 6.

4.4.2. Bipartite Graphs

Let $G=(V,E)$ be a complete bipartite graph, i.e., its vertex set is partitioned in two non-empty non-intersecting subsets V_1 and V_2, and its edge set E consists of all pairs v_1v_2, $v_i\in V_i$, $i=1,2$. In this case $\gamma(G)=2$. Now, let us calculate $\gamma(G)$ by means of Corollary 7.

The metric space V constructed in Corollary 7 is a 2-distance space such that the distances between the points belonging to the same subset V_i equals a, and the distance between the points belonging to distinct V_i equals b, where $0<a<b\leqslant 2a$. Then $\operatorname{diam}V=b$, so $d_{GH}(a\Delta_1,V)=b$. Further, for $a\Delta_k$, $k\geqslant 2$, let us partition the vertex set of Δ_k in two non-empty sets D_1 and D_2, and put $R=(D_1\times V_1)\cup(D_2\times V_2)$. Then $d_{GH}(a\Delta_k,V)\leqslant\operatorname{dist}R=\max\{a,b-a\}\leqslant a<b$. Therefore $\gamma(G)=2$ in accordance with Corollary 7.

If $G=(V,E)$ is a bipartite graph, i.e., its vertex set is partitioned in two non-empty non-intersecting subsets V_1 and V_2 again, but its edge set E is nonempty and is contained in the edge set of the corresponding complete bipartite graph, then $\gamma(G)=2$, and similar reasoning can be used to calculate it by means of Corollary 7.

4.4.3. Distance from Simplexes to Balls and Spheres

As it is mentioned in Introduction, Lusternik and Schnirelmann [16], and a bit later independently Borsuk [14] and [15], have shown that the least possible number of parts of smaller diameter necessary to partition a sphere and a ball in $\mathbb{R}^n$ equals $n+1$. Then Theorem 7 implies the following result.

Corollary 8. *Let X be either the standard unit sphere S^{n-1} or the standard unit ball B^n in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$, and $0<\lambda<2$. Then $d_{GH}(\lambda\Delta_k,X)<1$ for $k\geqslant n+1$, and $d_{GH}(\lambda\Delta_k,X)=1$ for $k\leqslant n$.*

4.4.4. Cycles and Wheel Graph

Recall that the cycle C_n with $n \geqslant 3$ vertices is a connected simple graph with n vertices and n edges, such that all the vertices have degree 2. The graphs C_{2k} are evidently bipartite, $\gamma(C_{2k}) = 2$, and $\gamma(C_{2k+1}) = 3$.

Let X be a finite 2-distance space with non-zero distances $0 < a < b$. Construct a finite graph G_X with vertex set X connecting two vertices by an edge iff the distance between them equals b. This graph is referred as the *greater distance graph of* X.

Corollary 9. *Let X be a finite n-point 2-distance metric space with non-zero distances $a < b \leqslant 2a$, such that its greater distance graph is C_{2k+1}. Then $2d_{GH}(a\Delta_m, X) = b$ for $m = 1, 2$.*

Recall that the wheel graph W_n with n vertices is obtained from the cycle C_{n-1} by adding a single vertex and $n-1$ edges connecting this vertex with all the remaining ones. It is well-known that $\gamma(W_{2k}) = 4$ and $\gamma(W_{2k+1}) = 3$.

Corollary 10. *Let X be a finite n-point 2-distance metric space with non-zero distances $a < b \leqslant 2a$, such that its greater distance graph is W_n. If $n = 2k+1$, then $2d_{GH}(a\Delta_m, X) = b$ for $m = 1, 2$, and if $n = 2k$, then $2d_{GH}(a\Delta_m, X) = b$ for $m = 1, 2, 3$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deza, M. M. & Deza, E. 2014, *Enciclopedia of Distances*, Berlin Heidelberg , Springer Verlag.
2. A. Illanes, S. Nadler, *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker Inc., New York, Basel, 1999.
3. D. Burago, Yu. Burago, S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics **33** A.M.S., Providence, RI, 2001.
4. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].
5. D. Edwards, “The Structure of Superspace”, in *Studies in Topology*, Academic Press, 1975.
6. M. Gromov, “Groups of Polynomial growth and Expanding Maps”, Publications Mathematiques I.H.E.S., **53**, 1981.
7. А. О. Иванов, Н. К. Николаева, А. А. Тужилин, “Метрика Громова–Хаусдорфа на пространстве метрических компактов – строго внутренняя”, Матем. заметки, **100** (6), pp. 947–950, 2016 (`arXiv:1504.03830`, 2015).;
8. S. Iliadis, A. Ivanov, A. Tuzhilin, “Local Structure of Gromov–Hausdorff Space, and Isometric Embeddings of Finite Metric Spaces into this Space”, Topology and its Applications, **221**, pp. 393–398, 2017 (`arXiv:1604.07615, arXiv:1611.04484`, 2016).
9. A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, “Isometry group of Gromov–Hausdorff Space”, Matematicki Vesnik, **71** (1–2), 123–154, 2019.
10. A. O. Ivanov, S. D. Iliadis, and A. A. Tuzhilin, “Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes”, ArXiv e-prints, `arXiv:1607.06655`, 2016.
11. Д. С. Григорьев, А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов”, Чебышевский сб., **20** (2), 108–122, 2019, см. также ArXiv e-prints, `arXiv: 1906.09644`, 2019.

12. A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, “The Gromov–Hausdorff Distance Between Simplexes and Two-Distance Spaces”, ArXiv e-prints, `arXiv:1907.09942`, 2019.

13. J. B. Kruskal, “On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem”, Proceedings of the American Mathematical Society, **7**, 48–50,1956.

14. K. Borsuk, “Über die Zerlegung einer n-dimensionalen Vollkugel in n-Mengen”. In: Verh. International Math. Kongress Zürich, p. 192, 1932.

15. K. Borsuk, “Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre”, Fundamenta Math., **20**, 177–190, 1933.

16. Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, *Топологические методы в вариационных задачах.* Исследовательский институт математики и механики при МГУ, Москва, 1930

17. G. M. Ziegler, “Colouring Hamming Graphs, Optimal Binary Codes, and the 0/1-Borsuk Problem in Low Dimensions”, in: *Computational Discrete Mathematics*, ed. by Helmut Alt (Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001), pp. 159–172.

18. H. Hadwiger, “Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers”, Commentarii Mathematici Helvetici, **18** (1), 73–75, 1945.

19. H. Hadwiger, “Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers”, Commentarii Mathematici Helvetici, **19**, 1946.

20. J. Kahn, G. Kalai, *A counterexample to Borsuk’s conjecture.* Bull. Amer. Math. Soc., **29** (1), 60–62, 1993.

21. A. M. Raigorodskii, “Around Borsuk’s Hypothesis”, Journal of Mathematical Sciences, **154** (4), 604–623, 2008.

22. A. V. Bondarenko, “On Borsuk’s conjecture for two-distance sets”, arXiv e-prints, `arXiv:1305.2584`, 2013.

23. T. Jenrich, “A 64-dimensional two-distance counterexample to Borsuk’s conjecture”, arXiv e-prints, `arXiv:1308.0206`, 2013.

24. R. M. R. Lewis, *A Guide to Graph Colouring*, Springer, Cham, 2016.

25. A. A. Tuzhilin, *Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov–Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, `arXiv:1605.01566`, 2016.

26. А. О. Иванов, И. М. Никонов, А. А. Тужилин, “Множества, допускающие соединение графами конечной длины”, Матем. сб., **196** (6), 71—110, 2005, см. также ArXiv e-prints, `ArXiv:1403.383`, 2014.

REFERENCES

1. Deza, M. M. & Deza, E. 2014, *Enciclopedia of Distances*, Berlin Heidelberg , Springer Verlag.

2. Illanes, A. & Nadler, S. 1999, *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker Inc., New York, Basel.

3. Burago, D., Burago, Yu. & Ivanov, S. 2001, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, A.M.S., Providence, RI.

4. Hausdorff, F. 1914, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig [reprinted by Chelsea in 1949].

5. Edwards, D. 1975, "The Structure of Superspace", in *Studies in Topology*, Academic Press, 1975.

6. Gromov, M. 1981, "Groups of Polynomial growth and Expanding Maps", *Publications Mathematiques I.H.E.S.*, vol. 53.

7. Ivanov, A. O., Nikolaeva, N. K. & Tuzhilin, A. A. 2016, "The Gromov–Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic", *Mathematical Notes*, vol. 100, no. 6, pp.171–173, (Available at: `arXiv:1504.03830`, 2015).

8. Iliadis, S., Ivanov, A. & Tuzhilin,A . 2017, "Local Structure of Gromov–Hausdorff Space, and Isometric Embeddings of Finite Metric Spaces into this Space", *Topology and its Applications*, vol. 221, pp. 393–398. (Available at: `arXiv:1604.07615, arXiv:1611.04484`, 2016).

9. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2019, "Isometry group of Gromov–Hausdorff Space", *Matematicki Vesnik*, vol. 71, no. 1–2, pp. 123–154.

10. Ivanov, A. O., Iliadis, S. D. & Tuzhilin, A. A. 2016, "Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes", Available at: ArXiv e-prints, `arXiv:1607.06655`.

11. Grigor'ev, D. S., Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2019, "Gromov–Hausdorff Distance to Simplexes", *Chebyshev. Sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 100–114 [in Russian], also Available at: ArXiv e-prints, `arXiv:1906.09644`, 2019.

12. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A. 2019, "The Gromov–Hausdorff Distance Between Simplexes and Two-Distance Spaces", Available at: ArXiv e-prints, `arXiv:1907.09942`.

13. Kruskal, J. B. 1956, "On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 7, pp. 48–50.

14. Borsuk, K. 1932, "Über die Zerlegung einer n-dimensionalen Vollkugel in n-Mengen", in: *V*erh. International Math. Kongress Zürich, p. 192.

15. Borsuk, K. 1933, "Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre", *Fundamenta Math.*, vol. 20, pp. 177–190.

16. Lusternik, L. A. & Schnirelmann, L. G. 1930, *Topological Methods in Variational Problems.* Issled. Inst. Matem. i Mekh. pri I MGU, Moscow [in Russian].

17. Ziegler, G. M. 2001, "Colouring Hamming Graphs, Optimal Binary Codes, and the 0/1-Borsuk Problem in Low Dimensions", in: *Computational Discrete Mathematics*, ed. by Helmut Alt (Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York), pp. 159–172.

18. Hadwiger, H. 1945, "Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers", *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 18, no. 1, pp. 73–75.

19. Hadwiger, H. 1946, "Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers", *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 19.

20. Kahn, J., Kalai, G. 1993, "A counterexample to Borsuk's conjecture", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 29, no. 1, pp. 60–62.

21. Raigorodskii, A. M. 2008, "Around Borsuk's Hypothesis", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 154, no. 4, pp. 604–623.

22. Bondarenko, A. V. 2013, "On Borsuk's conjecture for two-distance sets", Available at: arXiv e-prints, `arXiv:1305.2584`.

23. Jenrich, T. 2013, "A 64-dimensional two-distance counterexample to Borsuk's conjecture", Available at: arXiv e-prints, `arXiv:1308.0206`.

24. Lewis, R. M. R. 2016, *A Guide to Graph Colouring*, Springer, Cham.

25. Tuzhilin, A. A. 2016, "Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov–Hausdorff Distance". Available at: ArXiv e-prints, `arXiv:1605.01566`.

26. Ivanov,A. O., Nikonov,I. M. & Tuzhilin, A. A. 2005, "Sets Admitting Connection by Graphs of Finite Length", *Sbornik: Mathematics*, vol. 196, no. 6, pp. 845–884, see Available at: ArXiv e-prints, `ArXiv:1403.383`, 2014.

Получено 8.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 51-77, 519.24, 330.4, 339.7 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-190-206

Оценка Индекса Инклюзивного Развития на Основе Нейросетевой Модели REL-PCANet

А. А. Ирматов, Э. А. Ирматова

Ирматов Анвар Адхамович — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математической теории интеллектуальных систем, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: irmatov@intsys.msu.ru
Ирматова Эльнура Анваровна — аспирант, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).
e-mail: elnura-irmatova@mail.ru

Аннотация

В 2018 году на Всемирном экономическом форуме в Давосе была представлена новая метрика экономической эффективности стран под названием Индекс инклюзивного развития (IDI), состоящий из 12 показателей. Новая метрика подразумевает, что странам может потребоваться проведение структурных реформ для улучшения как экономического роста, так и эффективности социальной инклюзивности. Именно поэтому важно, чтобы метод расчета IDI имел сильную статистическую и математическую основу для точности и прозрачности результатов и их дальнейшего использования в общественных целях.

В данной работе мы предлагаем новый подход к оценке IDI — нейросетевую модель REL-PCANet, которая основана на принципах RELARM и RankNet и объединяет элементы PCA, методы, применяемые в распознавании изображений и механизмах обучения ранжированию. Кроме того, мы определяем новый подход к оценке матрицы целевых вероятностей T_{Rnet} для отражения динамических изменений в инклюзивном развитии стран. Эмпирическое исследование показало, что REL-PCANet обеспечивает надежные оценки и результаты ранжирования, что позволяет рекомендовать ее для использования в практической деятельности.

Ключевые слова: глубокие относительные атрибуты, индекс инклюзивного развития, RankNet, RELARM, Всемирный экономический форум

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
А. А. Ирматов, Э. А. Ирматова. Оценка Индекса Инклюзивного Развития на Основе Нейросетевой Модели REL-PCANet // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 190–206.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 51-77, 519.24, 330.4, 339.7 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-190-206

Estimation of the Inclusive Development Index Based on the REL-PCANet Neural Network Model

A. A. Irmatov, E. A. Irmatova

Irmatov Anwar A. — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, M. V. Lomonosov MSU (Moscow).
e-mail: irmatov@intsys.msu.ru
Irmatova Elnura A. — postgraduate student, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: elnura-irmatova@mail.ru

Abstract

In 2018, at the World Economic Forum in Davos it was presented a new countries' economic performance metric named the Inclusive Development Index (IDI) composed of 12 indicators. The new metric implies that countries might need to realize structural reforms for improving both economic expansion and social inclusion performance. That is why, it is vital for the IDI calculation method to have strong statistical and mathematical basis, so that results are accurate and transparent for public purposes.

In the current work, we propose a novel approach for the IDI estimation — the Ranking Relative Principal Component Attributes Network Model (REL-PCANet). The model is based on RELARM and RankNet principles and combines elements of PCA, techniques applied in image recognition and learning to rank mechanisms. Also, we define a new approach for estimation of target probabilities matrix T_{Rnet} to reflect dynamic changes in countries' inclusive development. Empirical study proved that REL-PCANet ensures reliable and robust scores and rankings, thus is recommended for practical implementation.

Keywords: Deep Relative Attributes, Inclusive Development Index, RankNet, Relative PCA Attributes Rating Model, World Economic Forum.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
A. A. Irmatov, E. A. Irmatova, 2020, "Estimation of the Inclusive Development Index Based on the REL-PCANet Neural Network Model", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 190–206.

1. Introduction

The economic growth model that worked in recent decades now changing to become socially inclusive instead of basing only on supply, export and private capital investment. Globalization and fast technological change led to strengthening inequality and almost unchanging median income. In current times GDP growth is still the key country performance indicator although the world starts to understand that the more attention should be payed to socioeconomic progress in economic policy. In 2018, at the World Economic Forum in Davos it was presented a new performance metric named the Inclusive Development Index within Shaping the Future of Economic Progress framework. WEF report showed that GDP growth is not sufficient for reaching higher levels of living standards and what is more, majority of citizens do not assess countries' economic efficiency by GDP but by group of indicators describing household's standard of living. Moreover, steady and comprehensive progress accompanied by the growth of incomes of the population and growth of its economic opportunities as well as the level of security and quality of life should be the priorities of the new economic policy and the main goal of economic development but not GDP growth. This created the prerequisites for the formation of a new assessment tool of economic development effectiveness — Inclusive Development Index (IDI) which is calculated for 107 countries and includes 3 blocks (12 indicators): Growth & development, Inclusion and Intergenerational equity & sustainability.

1.1. Problem formulation

The new economic metric implies for countries that they should implement structural reforms in order to realize changes for improving both economic expansion and social inclusion performance. Such kind of transformations might require enhancement of the overall country's ecosystem as well as restructuration of policies intended to improve living standards. That is why the calculation method of the Inclusive Development Index is very important and for its application to public purposes it should be accurate and transparent for all its possible users. At the moment, IDI calculation method is based on linear min-max transformation which can lead to significant bias or smoothing of the final results. Also, this type of computation does not take into account whole interdependencies between countries which are crucial as economic development should be assessed not in isolated system but taking into account whole countries' interactions. Here, we narrow this problem to finding an appropriate combination of rating and learning to rank models. In current work we suggest a new model for IDI estimation named the Ranking Relative Principal Component Attributes Network Model (REL-PCANet) which employs principles of the rating model based on relative PCA attributes (RELARM) [1], Deep relative attributes [2] and RankNet [3]. Overall, REL-PCANet provides the following benefits for IDI estimation:

1. Clarity of calculation methods and trustworthiness of the final results as REL-PCANet is constructed using statistical and economic modeling techniques with implementation of machine learning mechanisms. The aim of such combination is to achieve more reliable and precise ranking system.

2. Ability to take into account comprehensive interdependencies between countries;

3. Ability to build and train a model on a dataset with short time horizon.

Moreover, REL-PCANet reflects dynamic changes in countries' inclusive development due to special model of target probabilities matrix T_{Rnet} proposed in this paper. Thus, proposed REL-PCANet reflects occurred economic and social changes as well as gives a possibility to make forecast for future index movements. Additionally, empirical study shows that REL-PCANet ensures robust results.
Next, we briefly describe existing rating and learning to rank models, then present a new approach for calculation of the Inclusive Development Index followed by an empirical example and draw the conclusions.

2. Rating and Learning to Rank Models

Rating models are essential instruments intended to help government, companies and households to simplify decision making process connected with choosing the right object based on large number of its features. Generally, rating models can be conditionally divided into 3 types: models using expert judgment, models using econometric tools, models using machine learning techniques. The first type is not applicable to our problem because it contains large amount of expert component.

Econometric method for model construction is widely used for credit rating assignment. The most commonly used form of regression in that field is a logistic regression (simple one, fuzzy [4] or ordinal [5]). However econometric model requires vast database for model training and adjustment, otherwise, there might occur substantial errors in final assessments that is why it is also not suitable for IDI. Over the last decade machine-learning techniques such as neural networks and support vector machines were intensively developed. They have been widely used in image recognition systems as well as in theoretical rating modeling and learning to rank mechanisms. One can also find implementation of principal component analysis (PCA) in construction of rating models [6], [7], [8]. Learning to rank mechanisms are mainly applied in information retrieval, machine learning and natural language processing. Learning to rank can be described as implementation of machine learning methods for training model that solves ranking task. Lui in [9] divides learning to rank approaches in 3 groups: pointwise, pairwise and listwise. The point-wised method is the simplest one and practical implication showed that the other two perform better. The models using this method can be regression or ordinal regression based and classification based (ex. Pranking [10], MCRank [11]). The input to the training model for listwise method composes of a list of ranked objects so that the problem changes from ranking to optimization (ex. SoftRank [12], AdaRank [13], ListNet [14]) Finally, pairwise method uses pairs of objects where each of them has a specific label showing a relevance between them. The vivid examples of pairwise approach implementation are RankNet [3] and RankBoost [15]. Pairwise approach has similar ideas with the relative attributes principles that is why it is assumed in this paper to be compatible together.

3. A New Approach for IDI Estimation - Ranking Relative Principal Component Attributes Network Model (REL-PCANET)

In current section we propose a new model for IDI computation named the Ranking Relative Principal Component Attributes Network Model. As it was mentioned in introduction, it is based on RELARM and RankNet principles and combines elements of PCA, techniques applied in image recognition and learning to rank mechanism which contains a neural network. Also, we propose a new technique for estimation of the network's target probabilities matrix which allows to reflect dynamic changes in countries' inclusive development. In this section we describe reasons for choosing RELARM and RankNet elements for constructing a model for IDI estimation, then provide brief description of their theoretical frameworks and finally present the new approach - REL-PCANet.

3.1. Implementation of RELARM and RankNet for REL-PCANet construction

To begin with, the Relative Attributes Rating Model has the following distinctive features:

1. Application of specially defined relative PCA attributes, rating and ranking vectors and special ranking functions to rating/ranking purposes;

2. The use of minimum expert component which is limited to choice of initial model parameters;

3. Assessment of particular feature taking into account comprehensive objects' interdependencies. RELARM is based on the principle of "living organism"where each element change (even very small) causes certain reflection on the state of other analyzed system objects;

4. Simplicity of model training and calculation on small but relevant data array. RELARM can be trained on the 1-2 years data, so that it is becoming unnecessary to use large training samples.

In RELARM special role is given to the relative PCA attributes which provide the most comprehensive description of analyzed rating object characteristics. The concept of attributes is widely used in image recognition algorithms. It is most often presented in recognition using binary properties, which predict a presence or an absence of a specific attribute (e.g. smiles on photos, determination of a landscape type etc.). However, the use of such algorithms has certain restrictions and often leads to ambiguous recognition or total disregard of a characteristic. In paper [16] it is proposed an application of relative attributes providing semantically more rich method for object description, which uses objects features comparison in relation to each other. The concept of relative attributes provides a relative strength of specified features presence of an object compared to other objects. However, in the work [1] there was proposed a new way for relative attributes application combined with principal component analysis elements named Relative PCA Attributes. They are used in conjunction with the specially created rating vector along with ranking vector and function for obtaining relative PCA attribute ranking function values. Such a combination in the whole provides reliable and robust results and makes the RELARM indispensable for practical usage. RELARM applies k-means clustering algorithm [17] for final rating assignment. Although for ranking purposes it might have been more suitable to calculate projections of relative attribute ranking function values to the rating vector and form a ranking. However, such an estimation might not reflect dynamic year to year changes or lead to performing undesirable outliers which is why in current work we enhance RELARM with adding a neural network mechanism for building rankings. We found that the deep relative attributes concept [2] works well with RELARM's underlying ideas, so that RankNet algorithm elements for ranking were assumed acceptable. RankNet was firstly presented in the article [3] and it was intended to use for information retrieval. Besides, it found practical implications in various areas and especially in [2] where authors presented deep neural network with special ranking layer based on RankNet for image recognition purposes. Nevertheless, it should be noted, that REL-PCANet contains just some parts of discussed instruments and it is specified for IDI estimation.

3.2. Relative Attributes Rating Model theoretical framework

RELARM contains 3 stages:

1. Normalization of input data — unification of initial model parameters for their comparison using linear scaling method.

2. Obtaining of the relative attribute ranking functions values:

   (a) calculation of relative PCA attribute ranking functions;

   (b) mapping of normalized parameter vector in the space of relative PCA attribute ranking function values;

   (c) formation of the rating vector.

3. Application of k-means clustering algorithm for obtainment of results.

Normalization. Suppose that our model consists of N factors and M objects. We apply a linear scaling method (min-max transformation) in order to standardize rating model parameters for their comparability. Let p_{ij}, $i \in [M]$, $j \in [N]$ denote the initial value of the j-th parameter of the i-th rating object. We define a normalized value b_{ij} of p_{ij}, where $i \in [M]$, $j \in [N]$, depending on the j-th factor's influence on the model property studied.

If an increase of p_{ij} index value has a positive impact on the final analyzed property, the formula becomes:

$$b_{ij} = \frac{p_{ij} - \mathrm{Res}_i\, p_{ij}}{\max_i p_{ij} - \mathrm{Res}_i\, p_{ij}}, \quad i \in [M], j \in [N]. \tag{1}$$

If a model parameter increase has a negative effect on the final rating, then normalized value b_{ij} is calculated as:

$$b_{ij} = \frac{\max_i p_{ij} - p_{ij}}{\max_i p_{ij} - \mathrm{Res}_i\, p_{ij}}, \quad i \in [M], j \in [N]. \tag{2}$$

As a result, each object is described by a $(1\times N)$ dimension row vector of normalized parameters:

$$b_i^T = (b_{i1}, \dots, b_{iN}) \in [0,1]^N, \quad i \in [M]. \tag{3}$$

Let

$$B := \{b_i\}, \quad i \in [M]. \tag{4}$$

denote a set of normalized parameters.

Obtainment of relative attribute ranking functions values. The p-th relative PCA attribute of vector $b_i \in B$ $i = 1, 2, \dots M$ is a vector A_{ip} :

$$A_{ip} = (b_{i1}w_{1p}, b_{i2}w_{2p}, \dots, b_{iN}w_{Np}), \quad p = 1, \dots, N, \tag{5}$$

where

$$w_k = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{Nk} \end{pmatrix} \tag{6}$$

denotes l_1-normalized PCA components of the set B (4) with principal component variances $\lambda_k,\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$.

Here in accordance with the concept of relative attributes the p-th main attribute has a stronger presence in vector b_i than in vector b_j, if l_1-norm of vector A_{ip} is greater than l_1-norm of vector A_{jp}:

$$\sum_{k=1}^{N} b_{ik}|w_{kp}| \geq \sum_{k=1}^{N} b_{jk}|w_{kp}| \tag{7}$$

The ranking vector for p-th main attribute is the vector $\tilde{w}_p^T$:

$$\tilde{w}_p^T = (|w_{1p}|, \dots, |w_{Np}|)\,, \tag{8}$$

and the *ranking function* is defined by formula:

$$r_p(b_i) = b_i^T \tilde{w}_p \tag{9}$$

(see [16]).
Also the $N \times d$ matrix W is defined as:

$$W = \begin{pmatrix} |w_{11}| & \dots & |w_{1d}| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |w_{N1}| & \dots & |w_{Nd}| \end{pmatrix}, \tag{10}$$

where the number of principal components d is determined to avoid the influence of "data noise".

The *rating vector* Λ is defined as:

$$\Lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d). \tag{11}$$

Let $f : B \to \mathbf{R}^d$ be a map of the set B to the space $\mathbf{R}^d$ of relative attribute ranking functions values defined by the formula:

$$a_i^T := f(b_i^T) = b_i^T \times W. \tag{12}$$

Here:

$$a_i^T = (r_1(b_i), \ldots, r_d(b_i)) = \left(\sum_{k=1}^{N} b_{ik}|w_{k1}|, \sum_{k=1}^{N} b_{ik}|w_{k2}|, \ldots \sum_{k=1}^{N} b_{ik}|w_{kd}| \right). \tag{13}$$

For the i-th rating object each component of vector a_i^T indicates the degree of influence of object's parameter changes with respect to the corresponding principal component.

Application of k-means clustering algorithm for obtainment of results. After relative attribute ranking functions values are obtained it becomes the time for partitioning objects into classes. Classification implies the following actions:

1. Application of k-means clustering algorithm application to obtained vectors of relative PCA attribute ranking function values (13) .

2. Projection of Cluster centers on the rating vector Λ (11). The output cluster centers we denote by CC_q, $q \in (1, 2, \ldots, k)$. Module of projection of the q-th cluster center on the rating vector Λ (11) is calculated as follows:

$$PR_q = |\langle CC_q, \Lambda \rangle|, \quad q \in (1, 2, \ldots, k). \tag{14}$$

3. Ranking of centers projection on the rating vector in descending order.

Here we determine the importance of clusters by projection of their centers on the rating vector.

3.3. RankNet theoretical framework

RankNet is a pairwise approach and it applies neural network for its construction. It is a feedforward network with a single output neuron. RankNet uses objects' features as initial data and with the stochastic gradient descent back-propagation algorithm it trains the weights, bias to perform the output value. Basically, RankNet is trained on pairs of initial vectors where each of them has special label. And as the result it gives a real number out of the initial feature vector [2]. Here we briefly describe RankNet algorithm in the context of our work. Suppose we have a set of feature vectors

$$D = \{a_i\}, \tag{15}$$

where $a_i \in \mathbf{R}^d$, $i = (1, \ldots, M)$. The inputs of the network are pairs of vectors of the relative attribute ranking functions values:

$$\{a_i, a_j\}, \quad a_i, a_j \in D. \tag{16}$$

Usually the desired outputs or targets have to be presented for network training and in the case of RankNet they have to be presented by a probabilities matrix T_{Rnet}:

$$T_{Rnet} = (t_{ij}), \quad i, j = (1, \dots M), \tag{17}$$

where element t_{ij} shows the probability of feature vector a_i having higher grade than a_j. RankNet is used to find a special ranking function $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ which gives scores to feature vectors. Here $f(a_i) > f(a_j)$ means that a_i has higher ranking than a_j with posterior probability P_{ij} which is calculated using the following formula:

$$P_{ij} = \frac{1}{1 + e^{-(rank_i - rank_j)}}, \tag{18}$$

where $rank_i = f(a_i)$, $rank_j = f(a_j)$.

RankNet employs cross entropy function for network performance evaluation in the following way:

$$CE_{ij} := -t_{ij} \log(P_{ij}) - (1 - t_{ij}) \log(1 - P_{ij}). \tag{19}$$

RankNet adjusts weights in the network using gradient descent backpropagation to minimize the loss value.

3.4. Ranking Relative Principal Component Attributes Network Model (REL-PCANet)

Here we present our proposed approach for estimation of the Inclusive Development Index — the Ranking Relative Principal Component Attributes Network Model (REL-PCANet). For that purpose, we use RELARM and Deep relative attributes constructions, however adjusting them in correspondence with our needs. The REL-PCANet takes into account dynamics of countries' changes and reflects it in final ranking. The Ranking Relative Principal Component Attributes Network Model contains 3 stages:

1. Application of RELARM to initial IDI data;
2. Formation of probabilities matrix T_{Rnet} based on the new approach;
3. Application of REL-PCANet with obtainment of final rankings.

3.4.1. Application of RELARM

The main goal of this phase is to obtain relative attribute ranking functions values a_i^T (13) and the matrix T_{Rnet} (17) with elements t_{ij}. Firstly, we take 12 variables for IDI calculation used by the World Economic Forum (Table I) and normalize them based on the parameter influence on the final result using formulas (1) and (2):

TABLE 1: VARIABLES FOR IDI CALCULATION

<table>
<tr><td rowspan="4">Positive influence</td><td>GDP per capita, $</td><td>Wealth gini</td><td rowspan="4">Negative influence</td><td>Poverty rate, %</td></tr>
<tr><td>Labor productivity, $</td><td>Median income, $</td><td>Carbon intensity, kg per $ of GDP</td></tr>
<tr><td>Healthy life expectancy, yrs</td><td>Adjusted net savings, %</td><td>Public debt, %</td></tr>
<tr><td>Emloyment, %</td><td>Net income, gini</td><td>Dependency ratio, %</td></tr>
</table>

It is important to note that RELARM should be calculated separately for advanced and emerging countries as the final IDI ranking is presented for these two groups. After normalization, if some data is missing it is necessary to complement it to avoid outliers. Here it can be realized on the principle of income thresholds presented by WEF in [18]. Assuming there are 4 groups of countries (advanced economies, upper-middle income economies, lower-middle income economies and low income economies) if occurs missing data for some of country's variable then we take the average group's value for this particular parameter.

Note. We are not filling empty cells with zeros because it might cause outliers in the model's output (and also because the real value is not zero, it is just lack of resources to find it).

After the normalized set of parameters B (4) is obtained, we find the rating vector (11) and relative PCA attribute ranking function values (13) using procedure described in 3.2. For matrix W (10) we recommend to take the number of principle components d providing approximately 95% of data information. Next, we run the third stage of RELARM — application of k-means clustering algorithm. Here we apply the classifying algorithm for obtaining clusters needed for formation of matrix T_{Rnet}. Considering that there are 30 advanced countries in IDI and 77 emerging we suppose to group them in 5 clusters. The reason is that higher number of clusters can raise not desirable movements (as k-means clustering algorithm has certain downsides) which have no reasonable economic basis. Also, in order to ensure stable algorithm results, one should perform several iterations before forming final clusters, so that we suggest running 50 and more iterations. Here we applied the classifying algorithm to vectors (13) for obtaining clusters needed for the next step - formation of matrix T_{Rnet}.

3.4.2. New approach for formation of the target probabilities matrix T_{Rnet}

The special emphasis in the Ranking Relative Principal Component Attributes Network is given to the probabilities matrix T_{Rnet}. We construct it in the way to reflect countries' movements between clusters from year to year and therefore adjusting final IDI rankings according to these quality changes. Additionally, in our framework matrix T_{Rnet} is intended to catch upward and downward countries' trends. Furthermore, matrix T_{Rnet} is based on the clusters obtained after realization of RELARM. Suppose that countries are divided into 5 clusters. Here, we divide calculation principles of matrix T_{Rnet} into two categories: for the first year of IDI and the following years.

A. *Matrix T_{Rnet} for the 1^{st} year of IDI calculation.* Here we assume that element t_{ij} of matrix T_{Rnet} can take one of the following 8 values $t_{ij} \in \{0, 0.35, 0.4, 0.45, 0.55, 0.6, 0.65, 1\}$. There can be distinguished 3 cases for defining the value of t_{ij}:

   A1. Country i lies in cluster with higher value of cluster center projection on the rating vector than country j: $t_{ij} = 1$.

   A2. Country i lies in cluster with lower value of cluster center projection on the rating vector than country j: $t_{ij} = 0$.

   A3. Country i lies in the same cluster as country j then we calculate projections of countries' relative attribute ranking functions values on the rating vector Λ (11) and also find rankings of countries within every cluster. Here the higher projection value the higher ranking. Suppose that cluster L has Q countries and ranking of each country is denoted as $R_p \in \{1, \ldots, Q\}$ where $p \in \{1, \ldots, Q\}$. So, if projection of the i^{th} country's relative attribute ranking functions value a_i^T on the rating vector Λ is higher than projection of a_j^T on Λ then for $R_i = R_j - 1$, $t_{ij} = 0.55$, for $R_i = R_j - 2$, $t_{ij} = 0.6$, for $R_i \geq R_j - 3$, $t_{ij} = 0.65$. And if projection of the i^{th} country's relative attribute ranking functions value a_i^T on the rating vector Λ is lower than projection of a_j^T on Λ then for $R_i = R_j + 1$, $t_{ij} = 0.45$, for $R_i = R_j + 2$, $t_{ij} = 0.4$, for $R_i \geq R_j + 3$, $t_{ij} = 0.35$.

previous year cluster

B. *Matrix T_{Rnet} for the 2^{nd} year of IDI calculation.* Starting from the second year of the IDI estimation the goal is to take into account countries' movements between clusters if such occur. That is why t_{ij} now can take one of the 9 values $t_{ij} \in \{0, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 1\}$. Here if country i does not change its cluster category in the studied year, t_{ij} is calculated according to the algorithm described in paragraph A. However, if country upgrades or downgrades from the previous year cluster, there can be distinguished the following cases. For better understanding assume that there are clusters A (the highest), B and C (the lowest).

B1. Country j downgraded from its cluster (let's say from A to B). Then for each country i (that stayed in B) which has higher projection value of a_i^T on the rating vector Λ than a_j^T does, $t_{ij} = 0.65$. If it has lower projection value then situation is uncertain and $t_{ij} = 0.5$. Situation for when country j upgraded from its cluster is vice versa.

B2. Countries i and j both downgraded or upgraded to a particular cluster. Then $t_{ij} = 0.5$ because still their interconnections are indefinite.

B3. Country j upgraded from C to B and country i downgraded from A to B. If i has higher projection value of a_i^T on the rating vector Λ then $t_{ij} = 0.5$ and if lower - $t_{ij} = 0.65$. Situation for when country j moved down and i moved up from their clusters is vice versa.

Note. We only specified estimation of matrix T_{Rnet} for 2 years to show how it can possibly take into account changes from the previous years. However, in practice the rule for the following periods can be established in accordance with any economic reasons of assessing organization.

As the result of 2 stages of the Ranking Relative Principal Component Attributes Network we obtained feature vectors a_i^T, $i \in \{1, \ldots, M\}$ and matrix T_{Rnet} of target probabilities.

3.4.3. The REL-PCANet framework

The Ranking Relative Principal Component Attributes Network Model architecture is presented on Figure 1. It contains 4 hidden layers with a single output neuron and is divided into two sections: deep feature extraction and ranking parts. We use log-sigmoid function as transfer function for the network and crossentropy function (19) as a loss/performance function as described in 3.3.

Deep features extraction section. It starts from input vectors which are relative attribute ranking functions values (16) presented to the network in pairs like it was described in 3.3 with their target probabilities t_{ij} (17). Then there follows the deep features extraction section which contains 2 parallel hidden layers. We call this section "deep features extraction"as input vectors already went through RELARM process helped to distinguish relevant characteristics of initial IDI data in the form of relative attributes and this part of network further deepens the procedure of finding features.

Ranking section. That last layer of the REL-PCANet is based on RankNet that is why it is called the ranking section. We find $rank_i$ and $rank_j$ values within the ranking layer via formula:

$$rank_i := weight^T \cdot x_i + bias_i, \tag{20}$$

where x_i is a feature vector obtained in network, $weight$ and $bias$ are the layer's weights and bias.

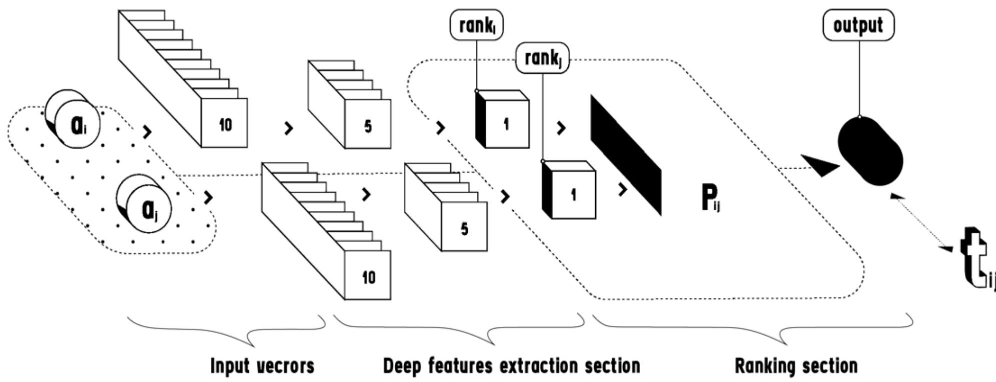


Figure 1: The REL-PCANet architecture (numbers on the figure denote the number of nodes)

As we have values of $rank_i$ and $rank_j$ it is possible to calculate P_{ij} (18) and therefore the network's loss CE_{ij} by formula (19). After the network is trained using resilient backpropagation alghorithm until its loss is minimized.

Finally, after the network is trained we receive scores for each country and normilize them using linear transformation in the scale from 1 to 7 — the World Economic Forum currently uses that range of values for IDI estimation. The rankings can be obtained by putting the normalized values in descending order — the higher the value the better ranking. We used a simple way to normalize the obtained scores just to be able to compare the results on year to year basis, however, it might be a subject for further discussions.

4. Empirical study

In this part we show results obtained by the Ranking Relative Principal Component Attributes Network Model and compare them with the Inclusive Development Index scores and rankings. For calculation we used data of 12 variables presented in the World Economic Forum reports for the years 2017 [18] and 2018 [19]. In addition, in this study we compare results for the group of 29 advanced countries (however the REL-PCANet is computed for 30 countries, including Singapore for which WEF presented data but did not calculate IDI). We performed REL-PCANet based on algorithm described in Section 3. Obtained results for the IDI estimated by the REL-PCANet are shown in Figure 2 (arrows up show that country obtained higher rating than in previous year and others vice versa). The whole changes in both scores and rankings are presented in Figure 3.

We can see that Ranking Relative Principal Component Attributes Network gives robust adequate results both for scores and rankings, especially due to specific formation of probabilities matrix T_{Rnet}. Additionally, REL-PCANet takes into account dynamic changes of countries' inclusive development which in whole does not exceed 2-3 steps from the rank of 2017 and also does not perform any dramatic changes in scores (average value of change equals to -0.2). However, it should be noted that as the Ranking Relative Principal Component Attributes Network takes into account countries' interdependencies and each period performs ranking according to the system for that specific time there might occur movements of country's score value and ranking with opposite directions. In such cases, one should analyze precisely reasons for such country changes: if the inclusive development enhanced or deteriorated because of internal country's problems or as a result of overall upward/downward trends in advanced economies. Next, we compare our results of IDI scores and rankings for 2 years presented by WEF. Figure 4 reflect s the differences. Here we

Economy	*2018* *Score*	*2018* *Rank*	*2017* *Rank*	*Economy*	*2018* *Score*	*2018* *Rank*	*2017* *Rank*
Luxemburg	7.00	1	1	Germany	3.41	⇓ 16	12
Singapore	6.75	⇑ 2	4	UK	3.08	⇑ 17	18
Norway	6.72	⇓ 3	2	France	2.68	⇑ 18	19
Switzerland	6.53	⇓ 4	3	Finland	2.68	⇓ 19	17
Denmark	5.98	5	5	Belgium	1.84	20	20
Iceland	5.68	6	6	Czech Rep.	1.80	21	21
Austria	5.45	⇑ 7	8	Spain	1.70	22	22
Sweden	5.00	⇓ 8	7	Israel	1.54	23	23
Netherlands	4.89	9	9	Italy	1.53	⇑ 24	25
New Zealand	4.53	⇑ 10	11	Estonia	1.39	⇑ 25	26
Canada	4.53	⇑ 11	13	Slovenia	1.38	⇓ 26	24
Ireland	4.52	⇓ 12	10	Portugal	1.35	27	27
Korea Rep.	3.82	⇑ 13	16	Japan	1.22	⇑ 28	29
USA	3.74	14	14	Slovak Rep.	1.08	⇓ 29	28
Australia	3.70	15	15	Greece	1.00	30	30

Figure 2: Ranking Relative Principal Component Network results for 30 advanced countries

can conclude that rankings of REL-PCANet and WEF do not look alike and in average the distance between them for 2017 values amounts to 3 points and for 2018 it is raised to almost 4 points (which also shows robustness of REL-PCANet). However, we also compared scores obtained for 2 models. In order to perform that, we took REL-PCANet scores for 2018 and normalized them according to minimum and maximum value of the IDI 2018. Results are presented on Figure 5. As is can be seen overall scores have similar values, the average difference in scores does not exceed 0.5 points and only 4 countries have 1 point higher score in WEF ranking than in REL-PCANet. Additionally, we performed another test to analyze how the probabilities matrix T_{Rnet} reflects dynamic changes. So that, we calculated matrix T_{Rnet} for 2018 based on principles for 2017 (not taking into account countries' movements between clusters), run the REL-PCANet algorithm and normalized obtained scores according to minimum and maximum values of WEF IDI 2018. After, we compared these scores with the WEF results and REL-PCANet estimations based on matrix T_{Rnet} calculated in conjunction with cluster changes. Figure 6 reflects analysis outcome. It can be noticed that REL-PCANet scores based on dynamic matrix T_{Rnet} for most countries have larger difference with the WEF results than REL-PCANet scores based on the not dynamic T_{Rnet}. That might reveal that IDI estimated by WEF does not reflect previous countries' conditions while REL-PCANet takes into account deep interdependencies as well as occurred changes.

Overall analysis showed that REL-PCANet:

- ensures robust and adequate results and probabilities matrix T_{Rnet} can work as a tool for reflection of dynamic changes of countries' inclusive development;
- assigns similar to WEF scores with a little difference;
- performs slightly different ranking results in comparison with WEF.

Therefore, the Ranking Relative Principal Component Attributes Network Model proved that it can be applied for the Inclusive Development Index estimation. It is based on reliable and transparent methods for calculation that is why obtained rankings can be assumed as more accurate.

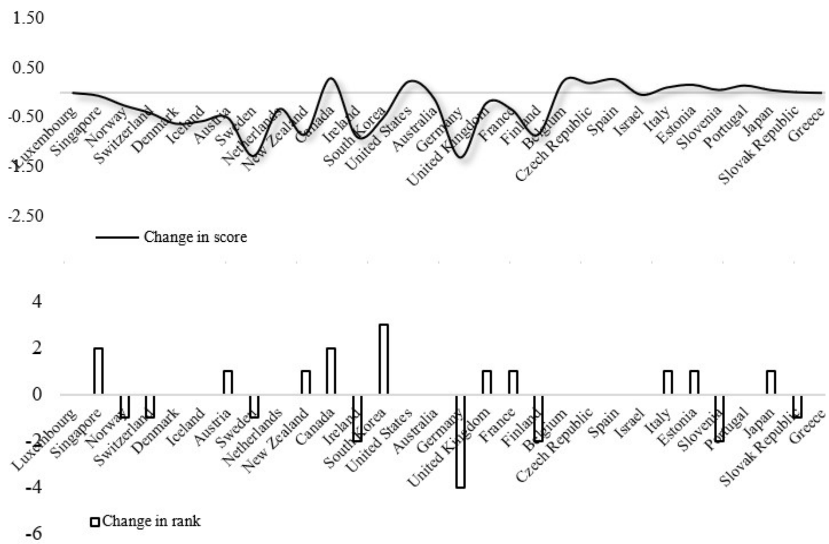


Figure 3: Change in scores and ranks REL-PCANet 2018

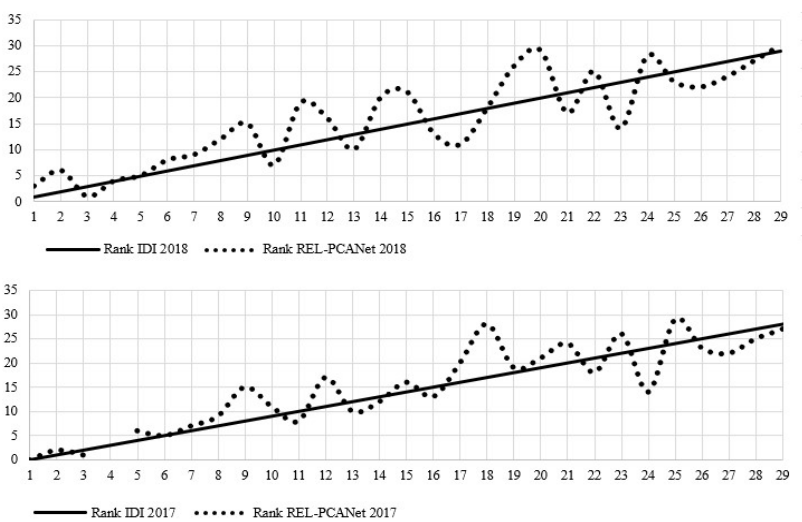


Figure 4: Comparison of ranking results IDI and REL-PCANet 2017-2018

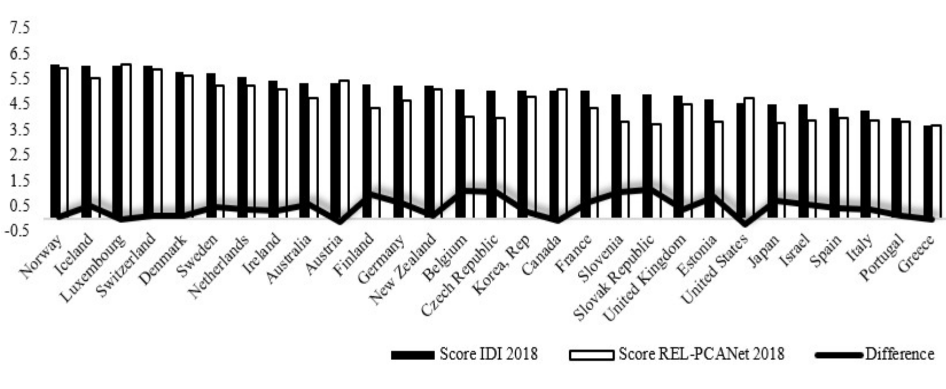


Figure 5: Comparison of score results IDI and REL-PCANet 2017-2018

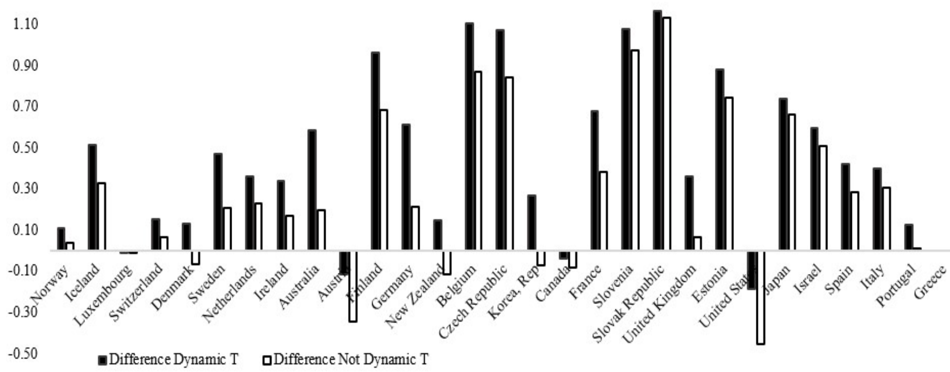


Figure 6: Difference between WEF scores and scores of REL-PCANet estimated by dynamic and not dynamic matrix T_{Rnet}.

5. Conclusion

We proposed a novel approach for estimation of the World Economic Forum's Inclusive Development Index - the Ranking Relative Principal Component Attributes Network Model (REL-PCANet). Study showed that REL-PCANet reflects of countries' year to year changes in final scores and rankings due to special construction of target probabilities matrix T_{Rnet} suggested for REL-PCANet. Model tests proved that model reflects deep countries' interdependencies as well as ensures robust results. Moreover, comparison of the REL-PCANet and WEF IDI scores and rankings revealed that REL-PCANet are just slightly different from the WEF's. Also, analysis showed great relevance of the REL-PCANet results and stressed the problem of taking into account the dynamics of country rankings over time in existing estimations. In conclusion, the Ranking Relative Principal Component Attributes Network Model proved to be a reliable, transparent and accurate ranking system for IDI estimation. It can be recommended for practical implementation in the WEF's framework. Also, it's results can be taken as a base for countries' reforms for enhancement of their inclusive development.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Irmatova, "RELARM: A rating model based on relative PCA attributes and k-means clustering," Russian Journal of Entrepreneurship, vol. 18, no. 10, pp. 1597-1614, May 2017. DOI: 10.18334/rp.18.10.37967.

2. Y. Souri, E. Nouri, E. Adeli, "Deep Relative Attributes," Asian Conference on Computer Vision. Computer Vision, pp. 118-133, ACCV 2016.

3. C. Burges, T. Shaked, E. Renshaw, A. Lazier, M. Deeds, N. Hamilton, G. Hullender, "Learning to rank using gradient descent," Proceedings of the 22nd International Conference on Machine Learning, pp.89-96, 2005.

4. S. Y. Sohn, D. H. Kim, J. H. Yoon, "Technology credit scoring model with fuzzy logistic regression," Applied Soft Computing, vol. 43, pp/150-158, Jun. 2016. DOI: 10.1016/j.asoc.2016.02.025.

5. F. Fernandez-Navarro, P. Campoy-Munoz, M. Paz-Marin, C. Hervas-Martinez, X. Yao, "Addressing the EU Sovereign Ratings Using an Ordinal Regression Approach," IEEE Transactions on Cybernetics, vol. 43, no. 6, pp. 2228-2240, Dec. 2013. DOI: 10.1109/TSMCC.2013.2247595

6. D. Xiang, "The Listed Company's Financial Evaluation Based on PCA-Logistic Regression Model," Multimedia and Information Technology (MMIT), 2010 Second International Conference, pp. 168-171. DOI: 10.1109/MMIT.2010.148.

7. X-h. Xue, X-f. Xue, "Research of electronic commercial credit rating based on Neural Network with Principal Component Analysis," Internet Technology and Applications, 2010 International Conference on, pp. 1-4, 2010. DOI: 10.1109/ITAPP.2010.5566121.

8. L. Jianfeng, M. Tianshan, "An Comprehensive Rating Model of Manufacturing Enterprise's Credit Risk Based on Logistics Finance," 2010 International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCASM 2010), vol. 15, pp. 290-293, Oct. 2010. DOI: 10.1109/ICCASM.2010.5622102.

9. T-Y. Liu, "Learning to rank for information retrieval," Foundations and Trends in Information Retrieval, vol. 3, no. 3, pp. 225–331, Mar. 2009.

10. K. Crammer, Y. Singer, "Pranking with Ranking," Proceedings of the 15th Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2001), Vancouver, BC, Canada, 2001, pp. 641-647.

11. P. Li, C.J.C. Burges, Q. Wu, "McRank: Learning to Rank Using Multiple Classification and Gradient Boosting," Proceedings of the 21st Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2007), Vancouver, BC, Canada, 2007, pp. 897-904.

12. M. Taylor, J. Guiver, S. Robertson, T. Minka, "SoftRank: Optimising Non-Smooth Rank Metrics," Proceedings of the 2008 International Conference on Web Search and Data Mining (WSDM 2008), Stanford, CA, 2008, pp. 77-86.

13. J. Xu, H. Li, "AdaRank: A Boosting Algorithm for Information Retrieval," Proceedings of the 30th Annual International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval (SIGIR 2007), Amsterdam, Netherlands, 2007, pp. 391-398.

14. Z. Cao, T. Qin, T.-Y. Liu, M.-F. Tsai, H. Li, "Learning to Rank: From Pairwise Approach to Listwise Approach," in Proceedings of the 24th International Conference on Machine Learning (ICML 2007), Corvallis, OR, 2007, pp. 129-136.

15. Y. Freund, R. Iyer, R.E. Schapire, Y. Singer, "An Efficient Boosting Algorithm for Combining Preferences," Journal of Machine Learning Research, vol. 4, no. 6, pp. 933-969, Nov. 2003.

16. D. Parikh, K. Grauman, "Relative Attributes,"Proceedings of the International Conference on Computer Vision (ICCV), Barcelona, Spain, 2011, pp. 503-510.

17. D. Arthur, S. Vassilvitskii, "K-means++: The Advantages of Careful Seeding," SODA '07: Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, New Orleans, Louisiana, USA, 2007, pp. 1027–1035.

18. R. Samans, J. Blanke, M. D. Hanouz, G. Corrigan, "The Inclusive Growth and Development Report 2017," The World Economic Forum, [Online]. Available: `http://www3.weforum.org/docs/WEF_Forum_IncGrwth_2017.pdf`

19. The World Economic Forum, "The Inclusive Development Index 2018. Summary and Data Highlights," [Online]. Available: `http://www3.weforum.org/docs/WEF_Forum_IncGrwth_2018.pdf`

REFERENCES

1. Irmatova, E. 2017, "RELARM: A rating model based on relative PCA attributes and k-means clustering," *Russian Journal of Entrepreneurship*, vol. 18, no. 10, pp. 1597-1614, May 2017. DOI: 10.18334/rp.18.10.37967.

2. Y. Souri, E. Nouri & E. Adeli, 2016, "Deep Relative Attributes," *Asian Conference on Computer Vision. Computer Vision*, pp. 118-133, ACCV 2016.

3. C. Burges, T. Shaked, E. Renshaw, A. Lazier, M. Deeds, N. Hamilton & G. Hullender, 2005, "Learning to rank using gradient descent," *Proceedings of the 22nd International Conference on Machine Learning*, pp.89-96.

4. S. Y. Sohn, D. H. Kim & J. H. Yoon, 2016, "Technology credit scoring model with fuzzy logistic regression," *Applied Soft Computing*, vol. 43, pp. 150-158, Jun. 2016. DOI: 10.1016/j.asoc.2016.02.025.

5. F. Fernandez-Navarro, P. Campoy-Munoz, M. Paz-Marin, C. Hervas-Martinez & X. Yao, 2013, "Addressing the EU Sovereign Ratings Using an Ordinal Regression Approach," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 43, no. 6, pp. 2228-2240, Dec. 2013. DOI: 10.1109/TSMCC.2013.2247595

6. D. Xiang, 2010, "The Listed Company's Financial Evaluation Based on PCA-Logistic Regression Model," *Multimedia and Information Technology (MMIT), 2010 Second International Conference*, pp. 168-171. DOI: 10.1109/MMIT.2010.148.

7. X-h. Xue & X-f. Xue, 2010, "Research of electronic commercial credit rating based on Neural Network with Principal Component Analysis," *Internet Technology and Applications, 2010 International Conference on*, pp. 1-4, 2010. DOI: 10.1109/ITAPP.2010.5566121.

8. L. Jianfeng & M. Tianshan, 2010, "An Comprehensive Rating Model of Manufacturing Enterprise's Credit Risk Based on Logistics Finance," *2010 International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCASM 2010)*, vol. 15, pp. 290-293, Oct. 2010. DOI: 10.1109/ICCASM.2010.5622102.

9. T-Y. Liu, 2009, "Learning to rank for information retrieval," *Foundations and Trends in Information Retrieval*, vol. 3, no. 3, pp. 225–331, Mar. 2009.

10. K. Crammer & Y. Singer, 2001, "Pranking with Ranking," *Proceedings of the 15th Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2001)*, Vancouver, BC, Canada, 2001, pp. 641-647.

11. P. Li, C.J.C. Burges & Q. Wu, 2007, "McRank: Learning to Rank Using Multiple Classification and Gradient Boosting," *Proceedings of the 21st Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2007)*, Vancouver, BC, Canada, 2007, pp. 897-904.

12. M. Taylor, J. Guiver, S. Robertson & T. Minka, 2008, "SoftRank: Optimising Non-Smooth Rank Metrics," *Proceedings of the 2008 International Conference on Web Search and Data Mining (WSDM 2008)*, Stanford, CA, 2008, pp. 77-86.

13. J. Xu & H. Li, 2007, "AdaRank: A Boosting Algorithm for Information Retrieval," *Proceedings of the 30th Annual International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval (SIGIR 2007)*, Amsterdam, Netherlands, 2007, pp. 391-398.

14. Z. Cao, T. Qin, T.-Y. Liu, M.-F. Tsai & H. Li, 2007, "Learning to Rank: From Pairwise Approach to Listwise Approach," in *Proceedings of the 24th International Conference on Machine Learning (ICML 2007)*, Corvallis, OR, 2007, pp. 129-136.

15. Y. Freund, R. Iyer, R.E. Schapire & Y. Singer, 2003, "An Efficient Boosting Algorithm for Combining Preferences," *Journal of Machine Learning Research*, vol. 4, no. 6, pp. 933-969, Nov. 2003.

16. D. Parikh & K. Grauman, 2011, "Relative Attributes,"*Proceedings of the International Conference on Computer Vision (ICCV)*, Barcelona, Spain, 2011, pp. 503-510.

17. D. Arthur & S. Vassilvitskii, 2007, "K-means++: The Advantages of Careful Seeding," *SODA '07: Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, New Orleans, Louisiana, USA, 2007, pp. 1027–1035.

18. R. Samans, J. Blanke, M. D. Hanouz & G. Corrigan, "The Inclusive Growth and Development Report 2017," The World Economic Forum, [Online]. Available at: `http://www3.weforum.org/docs/WEF_Forum_IncGrwth_2017.pdf`

19. The World Economic Forum, "The Inclusive Development Index 2018. Summary and Data Highlights," [Online]. Available at: `http://www3.weforum.org/docs/WEF_Forum_IncGrwth_2018.pdf`

Получено 19.01.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 515.164 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-207-227

Обобщённые шахматные комплексы и дискретная теория Морса[1]

Д. Йоич, Г. Панина, С. Т. Вречица, Р. Т. Живалевич

Йоич Душко — доктор наук, профессор, факультет математики и естественных наук, Баня-Лукский университет (г. Баня-Лука, Босния и Герцеговина).
e-mail: ducci68@teol.net
Панина Гаянэ Юрьевна — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова (г. Санкт-Петербург).
e-mail: gaiane-panina@rambler.ru
Вречица Синиша Т. — доктор наук, профессор, математический факультет, Белградский университет (г. Белград, Сербия).
e-mail: vrecica@matf.bg.ac.rs
Живалевич Раде Т. — доктор наук, профессор, математический факультет, Белградский университет, Математический институт, САНУ (г. Белград, Сербия).
e-mail: rade@mi.sanu.ac.rs

Аннотация

Шахматные комплексы и их обобщения, как объекты, и дискретная теория Морса, как инструмент, представлены в виде объединяющей темы, связывающая различные области геометрии, топологии, алгебры и комбинаторики. Теорема Эдмондса и Фулкерсона о бутылочном горлышке (минимаксе) реализуется и интерпретируется как результат о критической точке дискретной функции Морса на сфере Бира $Bier(K)$ ассоциированного симплициального комплекса K. Мы проиллюстрируем использование «стандартных дискретных функций Морса» на обобщенных шахматных комплексах, доказав результат связности для шахматных комплексов с кратностями. Приложения включают новые результаты типа Тверберга-Ван Кампена-Флореса для разбиений симплекса без j-кратных пересечений.

Ключевые слова: шахматные комплексы, дискретная теория Морса, теорема о бутылочном горлышке, теоремы Тверберга-ван Кампена-Флореса.

Библиография: 42 названия.

Для цитирования:
Д. Йоич, Г. Панина, С. Т. Вречица, Р. Т. Живалевич. Обобщенные шахматные комплексы и дискретная теория Морса // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 207–227.

[1]Это исследование было поддержано Грантами 174020 и 174034 Министерства образования, Наука и технологическое развитие Республики Сербия. Авторы отмечают гостеприимство Математического института в Обервольфахе, где была завершена эта работа.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 2.

UDC 515.164 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-207-227

Generalized chessboard complexes and discrete Morse theory

D. Jojić, G. Panina, S. T. Vrećica, R. T. Živaljević

Jojić Duško — Doctor of Sciences, Professor, Faculty of Science, University of Banja Luka (Banja Luka, Bosnia and Herzegovina).
e-mail: ducci68@teol.net
Panina Gaiane Yur'evna — doctor of physical and mathematical Sciences, Leading Researcher, St. Petersburg State University, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute (St. Petersburg).
e-mail: gaiane-panina@rambler.ru
Vrećica Siniša T. — Doctor of Sciences, Professor, Faculty of Mathematics, University of Belgrade (Belgrade, Serbia).
e-mail: vrecica@matf.bg.ac.rs
Živaljević Rade T. — Doctor of Sciences, Professor, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Mathematical Institute, SASA (Belgrade, Serbia).
e-mail: rade@mi.sanu.ac.rs

Abstract

Chessboard complexes and their generalizations, as objects, and Discrete Morse theory, as a tool, are presented as a unifying theme linking different areas of geometry, topology, algebra and combinatorics. Edmonds and Fulkerson bottleneck (minmax) theorem is proved and interpreted as a result about a critical point of a discrete Morse function on the Bier sphere $Bier(K)$ of an associated simplicial complex K. We illustrate the use of "standard discrete Morse functions" on generalized chessboard complexes by proving a connectivity result for chessboard complexes with multiplicities. Applications include new Tverberg-Van Kampen-Flores type results for j-wise disjoint partitions of a simplex.

Keywords: chessboard complexes, discrete Morse theorey, bottleneck theorem, Tverberg-Van Kampen-Flores theorems.

Bibliography: 42 titles.

For citation:
D. Jojić, G. Panina, S. T. Vrećica, R. T. Živaljević, 2020, "Generalized chessboard complexes and discrete Morse theory" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 207–227.

1. Introduction

Chessboard complexes and their relatives have been for decades an important theme of topological combinatorics. They have found numerous and often unexpected applications in group theory, representation theory, commutative algebra, Lie theory, discrete and computational geometry, algebraic topology, and geometric and topological combinatorics, see [1], [2], [3] [5], [15], [16], [26], [28], [33], [35], [36], [38], [39], [40].

The books [25] and [31], as well as the review papers [38] and [41], cover selected topics of the theory of chessboard complexes and contain a more complete list of related publications.

Chessboard complexes and their generalizations are some of the most studied *graph complexes* [25]. From this point of view chessboard complexes can be interpreted as relatives of L. Lovász *Hom*-complexes [29], matching complexes, clique complexes, and many other important classes of simplicial complexes.

More recently new classes of generalized chessboard complexes have emerged and new methods, based on novel *shelling techniques* and ideas from Forman's *discrete Morse theory*, were introduced. Examples include multiple and symmetric multiple chessboard complexes [22, 23], Bier complexes [18], and deleted joins of collectively unavoidable complexes, see [18] and [20, 21]. Among applications are the resolution of the balanced case of the "admissible/prescribable partitions conjecture" [23], general Van Kampen-Flores type theorem for balanced, collectively unavoidable complexes [20], and "balanced splitting necklace theorem" [21].

This paper is both a leisurely introduction and an invitation to this part of topological combinatorics, and a succinct overview of some of the ideas of discrete Morse theory, combinatorics and equivariant topology, used in our earlier papers.

New results are in Sections 5, 6 and 7. They include an alternative treatment of Edmonds and Fulkerson bottleneck (minmax) theorem (Section 5) and the construction of "standard discrete Morse functions" on generalized chessboard complexes with multiplicities (Section 6). This leads to a frequently optimal connectivity result for generalized chessboard complexes with multiplicities (Theorem 2 in Section 6), which is used in Section 7 for the proof of new Tverberg-Van Kampen-Flores type results for j-wise disjoint partitions of a simplex.

2. Chessboard complexes

Chessboard complexes naturally arise in the study of the geometry of *admissible rook configurations* on a general $(m \times n)$-chessboard. An admissible configuration is any non-taking placement of rooks, i.e., a placement which does not allow any two of them to be in the same row or in the same column. The collection of all these placements forms a simplicial complex which is called the chessboard complex and denoted by $\Delta_{m,n}$.

More formally, the set of vertices of $\Delta_{m,n}$ is $\mathrm{Vert}(\Delta_{m,n}) = [m] \times [n]$ and $S \subseteq [m] \times [n]$ is a simplex of $\Delta_{m,n}$ if and only if for each two distinct elements $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in S$ neither $i_1 = i_2$ nor $j_1 = j_2$.

2.1. An example

Let us take a closer look at one of the simplest chessboard complexes, the complex $\Delta_{4,3}$, based on the 4×3 chessboard (see Figure 1).

The f-vector of $\Delta_{4,3}$ is $f(\Delta_{4,3}) = (12, 36, 24)$ so its Euler characteristics is $\chi(\Delta_{4,3}) = 0$. Moreover, the geometric realization of $\Delta_{4,3}$ is an orientable 2-dimensional manifold.

Indeed, the link of each vertex is isomorphic to $\Delta_{3,2}$ (= hexagonal triangulation of the circle S^1) while the link of each edge is the circle S^0. Each 2-dimensional simplex $\sigma = \{A_i, B_j, C_k\}$ is uniquely completed to a permutation $\pi = (i, j, k, l)$ of the set $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$ and $\mathrm{Sign}(\sigma) := \mathrm{Sign}(\pi)$ defines an orientation on $\Delta_{4,3}$.

From here we immediately conclude that $\Delta_{4,3}$ is a triangulation of the 2-dimensional torus T^2. The universal covering of $\Delta_{4,3}$ is identified as the honeycomb tiling of the plane and the corresponding fundamental domain is exhibited in Figure 1. From here we can easily read off the generators of the group $H_1(\Delta_{4,3}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ as the geodesic edge-paths connecting the three copies of vertex C_3, shown in Figure 1.

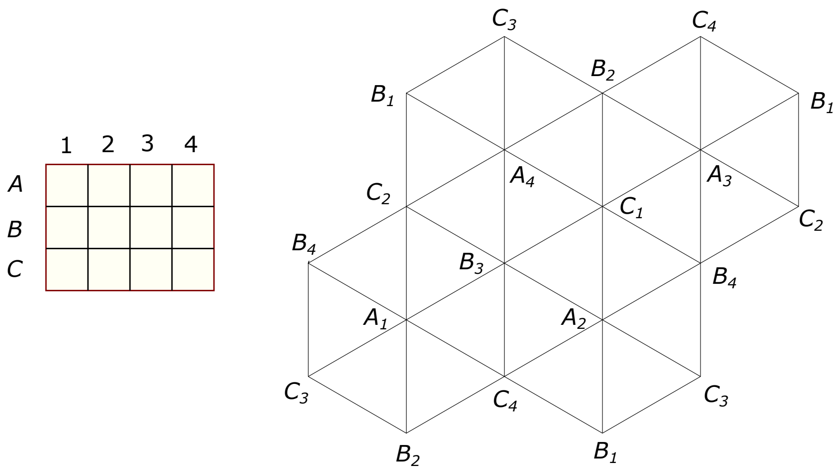


Figure 1: Chessboard complex $\Delta_{4,3}$

2.2. Graph complexes

Let G be a finite graph with vertex set $V = V_G$ and edge set $E = E_G$. A graph complex on G is an abstract simplicial complex consisting of subsets of E. We usually interpret such a complex as a family of subgraphs of G. The study of graph complexes, with the emphasis on their homology, homotopy type, connectivity degree, Cohen-Macaulayness, etc., has been an active area of study in topological combinatorics, see [25].

The chessboard complex $\Delta_{m,n}$ can be interpreted as a graph complex of the complete bipartite graph $K_{m,n}$, where the simplices $S \subset [m] \times [n]$ are interpreted as "matchings" in $K_{m,n}$. Recall that $\Gamma \subseteq E_G$ is a matching on the graph G if each $v \in V_G$ is incident to at most one edge in Γ.

All "generalized chessboard complexes", introduced in Section 3, can be also described as graph complexes of the graph $K_{m,n}$.

2.3. Chessboard complexes as Tits coset complexes

Perhaps the first appearance of chessboard complexes was in the thesis of Garst [16], as *Tits coset complexes*. Recall that a Tits coset complex $\Delta(G; G_1, \dots, G_n)$, associated to a group G and a family $\{G_1, \dots, G_n\}$ of its subgroups is the nerve $Nerve(\mathcal{F})$ of the associated family of cosets $\mathcal{F} = \{gG_i \mid g \in G, i \in [n]\}$. More explicitly vertices of $\Delta(G; G_1, \dots, G_n)$ are cosets gG_i and a colection $S = \{g_jG_i\}_{(i,j)\in I}$, for some $I \subseteq [n] \times G$, is a simplex of $\Delta(G; G_1, \dots, G_m)$ if and only if

$$\bigcap_{(i,j)\in I} g_jG_i \neq \emptyset\,.$$

If $G = S_m$ is the symmetric group and $G_i := \{\pi \in S_m \mid \pi(i) = i\}$ for $i = 1, \dots, n$, the associated Tits coset complex is the chessboard complex $\Delta_{m,n}$.

2.4. Chessboard complexes in discrete geometry

Chessboard complexes made their first appearance in discrete geometry in [40], in the context of the so called *colored Tverberg problem*.

For illustration, an instance of the *type B* colored Tverberg theorem [35, 41] claims that for each collection $C \subset \mathbb{R}^3$ of fifteen points in the 3-space, evenly colored by three colors, there exist three vertex disjoint triangles $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, formed by the points of different color, such that $\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 \neq \emptyset$.

A general form of this result was deduced in [35] from a Borsuk-Ulam type result claiming that each $\mathbb{Z}_r$-equivariant map

$$(\Delta_{r,2r-1})^{*(k+1)} \xrightarrow{\mathbb{Z}_r} W_r^{\oplus(d+1)} \tag{1}$$

must have a zero if $r \leq d/(d-k)$ (this is a necessary condition), r is a prime power, $\Delta_{r,2r-1}$ is a chessboard complex, and $W_r = \{x \in \mathbb{R}^r \mid x_1 + \cdots + x_r = 0\}$.

The reader is referred to [41] for an overview of these and more recent results, as well as for a more complete list of references.

3. Generalized chessboard complexes

Motivated primarily by applications to problems in discrete geometry, especially the problems of Tverberg and Van Kampen-Flores type, more general chessboard complexes were introduced and studied. Closely related complexes previously emerged in algebraic combinatorics [28, 38].

These complexes are also referred to as *generalized chessboard complexes*, since the set of vertices remains the $(m \times n)$-chessboard $[m] \times [n]$, but the criterion for $S \subseteq [m] \times [n]$ to be a simplex ("admissible rook placement") may be quite different and vary from problem to problem.

The following definition includes most if not all of the currently studied examples and provides a natural ecological niche for all these complexes and their relatives.

Definition 1. *Suppose that $\mathcal{K} = \{K_i\}_{i=1}^n$ and $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^m$ are two collections of simplicial complexes where* $\mathrm{Vert}(K_i) = [m]$ *for each $i \in [n]$ and* $\mathrm{Vert}(L_j) = [n]$ *for each $j \in [m]$. Define,*

$$\Delta_{m,n}^{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \Delta_{m,n}(\mathcal{K},\mathcal{L}) \tag{2}$$

as the complex of all subsets (rook-placements) $A \subset [m] \times [n]$ such that $\{i \in [m] \mid (i,j) \in A\} \in K_j$ for each $j \in [n]$ and $\{j \in [n] \mid (i,j) \in A\} \in L_i$ for each $i \in [m]$.

Definition 1 can be specialized in many ways. Again, we focus on the special cases motivated by intended applications to the generalized Tverberg problem.

Definition 2. *Suppose that $\mathbf{k} = (k_i)_{i=1}^n$ and $\mathbf{l} = (l_j)_{j=1}^m$ are two sequences of non-negative integers. Then the complex,*

$$\Delta_{m,n}^{\mathbf{k},\mathbf{l}} = \Delta_{m,n}^{k_1,\dots,k_n;l_1,\dots,l_m} \tag{3}$$

arises as the complex of all rook-placements $A \subset [m] \times [n]$ such that at most k_i rooks are allowed to be in the i-th row (for $i = 1, \dots, n$), and at most l_j rooks are allowed to be in the j-th column (for $j = 1, \dots, m$).

Remark 1. The complexes $\Delta_{m,n}^{\mathbf{k},\mathbf{l}} = \Delta_{m,n}^{k_1,\dots,k_n;l_1,\dots,l_m}$ are sometimes referred to as the *chessboard complexes with multiplicities* or *multiple chessboard complexes.* Closely related are "bounded degree graph complexes", studied in [28] and [38].

When $k_1 = \cdots = k_n = p$ and $l_1 = \cdots = l_m = q$, we obtain the complex $\Delta_{m,n}^{p,q}$. For the reasons which will become clear in the following section of the paper, in our earlier papers [22, 23] we focused to the case $l_1 = \cdots = l_m = 1$, i.e. to the complexes,

$$\Delta_{m,n}^{k_1,\dots,k_n;\mathbf{1}} := \Delta_{m,n}^{k_1,\dots,k_n;1,\dots,1}. \tag{4}$$

In Section 6 of this paper we fill this "gap" and return to the case of general chessboard complexes with multiplicities.

3.1. n-fold j-wise deleted join

Joins and deleted joins of simplicial complexes, as well as their generalizations, have found numerous applications in topological combinatorics, see [31, Section 6.3] for motivation and an introduction.

For a simplicial complex K, the n-fold j-wise deleted join of K is

$$K^{*n}_{\Delta(j)} := \{A_1 \uplus A_2 \uplus \cdots \uplus A_n \in K^* \mid (A_1, A_2, \ldots, A_n) \text{ is } j\text{-wise disjoint}\} \tag{5}$$

where an n-tuple $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ is j-wise disjoint if every sub-collection $\{A_{k_i}\}_{i=1}^{j}$, where $k_1 < k_2 < \cdots < k_j$, has an empty intersection.

It immediately follows that $K^{*n}_{\Delta(j)} \subseteq K^{*n}_{\Delta(j+1)}$ and that $K^{*n}_{\Delta(n+1)} = K^{*n}$ and $K^{*n}_{\Delta(2)} = K^{*n}_{\Delta}$ are respectively the n-fold join and the n-fold deleted join of the complex K.

A simple but very useful property of these operations is that they commute

$$(K^{*n}_{\Delta(j)})^{*m}_{\Delta(k)} \cong (K^{*m}_{\Delta(k)})^{*n}_{\Delta(j)} .$$

For example if $K = pt$ is a one-point simplicial complex we obtain the isomorphsim

$$\Delta_{m,n} = ((pt)^{*m}_{\Delta})^{*n}_{\Delta} \cong ((pt)^{*n}_{\Delta})^{*m}_{\Delta} = \Delta_{n,m} .$$

A single complex K in equation (5) can be replaced by a collection $\mathcal{K} = \{K_j\}_{j=1}^{n}$ of complexes $K_j \subseteq 2^{[m]}$ which leads to the definition of the j-wise deleted join of $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K}_{\Delta(j)} := \{A_1 \uplus \cdots \uplus A_n \in K_1 * \cdots * K_n \mid (A_1, \ldots, A_n) \text{ is } j\text{-wise disjoint}\} .$$

All simplicial complexes described in this section are generalized chessboard complexes in the sense of Definition 1. For example if $K \subseteq 2^{[m]}$ then its n-fold j-wise deleted join is the complex

$$K^{n}_{\Delta(j)} \cong \Delta^{\mathcal{K},\mathcal{L}}_{m,n}$$

where $K_1 = \cdots = K_n$ and $L_1 = \cdots = L_m = \binom{[m]}{\leq j-1}$ is the collection of all subsets of $[m]$ of cardinality strictly less than j.

3.2. Bier spheres as generalized chessboard complexes

Let $K \subsetneq 2^{[m]}$ be a simplicial complex on the ground set $[m]$ (meaning that we allow $\{j\} \notin K$ for some $j \in [m]$). The Alexander dual of K is the simplicial complex K° that consists of the complements of all nonsimplices of K

$$K^\circ := \{A^c \mid A \notin K\} .$$

By definition the *“Bier sphere”* is the deleted join $Bier(K) := K *_\Delta K^\circ$. (A face $A_1 \uplus A_2 \in Bier(K)$ is often denoted as a triple $(A_1, A_2; B)$ where $B := [m] \setminus (A_1 \cup A_2)$.)

It turns out that $Bier(K)$ is indeed a triangulation of an $(m-2)$-dimensional sphere [4], see [31] and [30] for different, very short and elegant proofs.

The Bier sphere $Bier(K)$ is also a generalized chessboard complex where $K_1 = K, K_2 = K^\circ$ and $L_1 = \cdots = L_m = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\} \subset 2^{[2]}$.

Alexander r-tuples $\mathcal{K} = \{K_i\}_{i=1}^{r}$ of simplicial complexes were introduced in [18] as a generalization of pairs (K, K°) of Alexander dual complexes. The associated *generalized Bier complexes*, defined as the r-fold deleted joins $\mathcal{K}^{*r}_{\Delta}$ of Alexander r-tuples are also generalized chessboard complexes in the sense of Definition 1.

4. Discrete Morse theory

A discrete Morse function on a simplicial complex $K \subseteq 2^V$ is, by definition, an acyclic matching on the Hasse diagram of the partially ordered set $(K, \subseteq)$. Here is a brief reminder of the basic facts and definitions of discrete Morse theory.

Let K be a simplicial complex. Its p-dimensional simplices (p-simplices for short) are denoted by $\alpha^p, \alpha_i^p, \beta^p, \sigma^p$, etc. A *discrete vector field* is a set of pairs $D = \{\dots, (\alpha^p, \beta^{p+1}), \dots\}$ (called a matching) such that:

(a) each simplex of the complex participates in at most one pair;
(b) in each pair $(\alpha^p, \beta^{p+1}) \in D$, the simplex α^p is a facet of β^{p+1};
(c) the empty set $\emptyset \in K$ is not matched, i.e. if $(\alpha^p, \beta^{p+1}) \in D$ then $p \geq 0$.

The pair (α^p, β^{p+1}) can be informally thought of as a vector in the vector field D. For this reason it is occasionally denoted by $\alpha^p \to \beta^{p+1}$ or $\alpha^p \nearrow \beta^{p+1}$ (and in this case α^p and β^{p+1} are informally referred to as the *beginning* and *the end* of the arrow $\alpha^p \to \beta^{p+1}$).

Given a discrete vector field D, a *gradient path* in D is a sequence of simplices (a zig-zag path)

$$\alpha_0^p \nearrow \beta_0^{p+1} \searrow \alpha_1^p \nearrow \beta_1^{p+1} \searrow \alpha_2^p \nearrow \beta_2^{p+1} \searrow \cdots \searrow \alpha_m^p \nearrow \beta_m^{p+1} \searrow \alpha_{m+1}^p$$

satisfying the following conditions:

1. $\left(\alpha_i^p,\ \beta_i^{p+1}\right)$ is a pair in D for each i;
2. for each $i = 0, \dots, m$ the simplex α_{i+1}^p is a facet of β_i^{p+1};
3. for each $i = 0, \dots, m-1$, $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

A path is *closed* if $\alpha_{m+1}^p = \alpha_0^p$. A *discrete Morse function* (DMF for short) is a discrete vector field without closed paths.

Assuming that a discrete Morse function is fixed, the *critical simplices* are those simplices of the complex that are not matched. The Morse inequality [13] implies that critical simplices cannot be completely avoided.

A discrete Morse function D is *perfect* if the number of critical k-simplices equals the k-th Betty number of the complex. It follows that D is a perfect Morse function if and only if the number of all critical simplices equals the sum of all Betty numbers of K.

A central idea of discrete Morse theory, as summarized in the following theorem of R. Forman, is to contract all matched pairs of simplices and to reduce the simplicial complex K to a cell complex (where critical simplices correspond to the cells).

Theorem 1. *[13] Assume that a discrete Morse function on a simplicial complex K has a single zero-dimensional critical simplex σ^0 and that all other critical simplices have the same dimension $N > 1$. Then K is homotopy equivalent to a wedge of N-dimensional spheres.*

More generally, if all critical simplices, aside from σ^0, have dimension $\geq N$, then the complex K is $(N-1)$-connected. □

4.1. Discrete vector fields on Bier spheres

It is known that all Bier spheres are shellable, see [6] and [10]. A method of Chari [9] can be used to turn this shelling into a perfect discrete Morse function (DMF). The construction of our *perfect DMF* on a Bier sphere essentially follows this path, see [18] for more details. For the reader's convenience here we reproduce this construction since it will be needed in Section 5.

A perfect DMF on $Bier(K)$

We construct a discrete vector field D_1 on the Bier sphere $Bier(K)$ in two steps:

(1) We match the simplices

$$\alpha = (A_1, A_2; B \cup i) \text{ and } \beta = (A_1, A_2 \cup i; B)$$

iff the following holds:

(i) $i < B,\ i < A_2$
(that is, i is smaller than all the entries of B and A_2).
(ii) $A_2 \cup i \in K^\circ$.

Before we pass to step 2, let us observe that the non-matched simplices are labelled by $(A_1, A_2; B \cup i)$ such that $A_2 \in K^\circ$, but $A_2 \cup i \notin K^\circ$. As a consequence, for non-matched simplices $A_1 \cup B \in K$.

(2) In the second step we match together the simplices

$$\alpha = (A_1, A_2; B \cup j) \text{ and } \beta = (A_1 \cup j, A_2; B)$$

iff the following holds:

(a) None of the simplices α and β is matched in the first step.
(b) $j > B,\ j > A_1$.
(c) $A_1 \cup j \in K$.

Observe that the condition (c) always holds (provided that the condition (a) is satisfied), except for the case $B = \emptyset$.

Lemma 1. (see [18, Lemma 6.1]) *The discrete vector field D_1 is a discrete Morse function on the Bier sphere $Bier(K)$.*

Proof. Since D_1 is (by construction) a discrete vector field, it remains to check that there are no closed gradient paths. Observe that in each pair of simplices in the discrete vector field D_1 there is exactly one *migrating element*. More precisely, in the case (1) the element i migrates to A_2, and in the case (2) the element j migrates to A_1.

The lemma follows from the observation that (along a gradient path) the values of the migrating element that move to A_2 strictly decreases. Similarly, the values of migrating elements that move to A_1 can only increase. This is certified through the following simple case analysis: (1) After a first step pairing comes a splitting of A_2. Then the gradient path terminates. (2) After a first step pairing (with migrating element i) comes a splitting of A_1. The gradient path proceeds only if the splitted element is smaller than i. (2) After a second step pairing comes a splitting of A_1. Then the gradient path terminates. (2) After a second step pairing (with migrating element i) comes a splitting of A_2. The gradient path proceeds only if the splitted element is bigger than i.

Let us illustrate this observation by an example which captures the above case analysis. Assume we have a fragment of a gradient path that contains two matchings of type 1. We have:

$$(A_1 \cup k, A_2; B \cup i) \to (A_1 \cup k, A_2 \cup i; B) \to$$
$$(A_1, A_2 \cup i; B \cup k) \to (A_1, A_2 \cup k \cup i; B)$$

The migrating elements here are i and k. The definition of the matching D_1 implies $k < i$. Otherwise $(A_1, A_2 \cup i; B \cup k)$ is matched with $(A_1, A_2; B \cup k \cup i)$, and the path would terminate after its second term. □

It is not difficult to see that there are precisely two critical simplices in D_1:

1. An $(n-2)$-dimensional simplex,

$$(A_1, A_2; i)$$

   where $A_1 < i < A_2$, (this condition describes this simplex uniquely, in light of the fact that $A_1 \in K$ and $A_2 \in K^\circ$),
2. and the 0-dimensional simplex,

$$(\emptyset, \{1\}; \{2, 3, 4, ..., n\}).$$

(Here we make a simplifying assumption that $\{1\} \in K^\circ$, which can be always achieved by a re-enumeration, except in the trivial case $K^\circ = \{\emptyset\}$.)

4.2. Discrete vector fields on generalized chessboard complexes

The construction of the discrete Morse function on the Bier sphere $Bier(K)$ illustrates the fruitful idea which can be extended and further developed to cover the case of other generalized chessboard complexes.

Examples of this construction can be found in [18] and [20], see also Section 6 for a construction of such a discrete Morse function on the multiple chessboard complex $\Delta_{m,n}^{k_1,\dots,k_n;l_1,\dots,l_m}$.

All these constructions of DMF share the same basic idea, for this reason we sometimes refer to them as *standard DMF on generalized chessboard complexes.* Note that the proofs that they indeed form an acyclic matching may vary from example to example and use some special properties of the class under investigation.

5. Edmonds-Fulkerson bottleneck extrema

In this section we connect, via discrete Morse theory, the combinatorial topology of Bier spheres with Edmonds-Fulkreson theorem on bottleneck extrema of pairs of dual clutters. We will show that there is much more than meets the eye in the standard concise treatment of this classical result of combinatorial optimization.

Abstract

Let E be a finite set. Call a family of mutually noncomparable subsets of E a clutter on E. It is shown that for any clutter $\mathscr{R}$ on E, there exists a unique clutter $\mathscr{S}$ on E such that, for any function f from E to real numbers,

$$\min_{R\in\mathscr{R}} \max_{x\in R} f(x) = \max_{S\in\mathscr{S}} \min_{x\in S} f(x).$$

Specifically, $\mathscr{S}$ consists of the minimal subsets of E that have non-empty intersection with every member of $\mathscr{R}$. The pair $(\mathscr{R}, \mathscr{S})$ is called a blocking system on E. An algorithm is described and several examples of blockings systems are discussed.

Figure 2: Edmonds-Fulkerson bottleneck theorem

Figure 2 shows the abstract of the published version of [11], which originally appeared as a RAND-corporation preprint AD 664879 in January of 1966.

This is a purely combinatorial result which is often referred to as the Edmonds-Fulkreson bottleneck lemma (theorem). Minmax theorems are ubiquitous in mathematics, notably in geometry, polyhedral combinatorics, critical point theory, game theory and other areas. One of early examples is the minimax theorem of John von Neumann (first proven and published in 1928) which gives conditions on a function $f : C \times D \to \mathbb{R}$, defined on the product of two closed, convex sets in $\mathbb{R}^n$, to satisfy the minmax equality,

$$\operatorname*{Res}_{y\in D}\max_{x\in C} f(x,y) = \max_{x\in C}\operatorname*{Res}_{y\in D} f(x,y)\,. \tag{6}$$

It is interesting to compare the Edmonds-Fulkerson minmax theorem with their geometric counterparts. For example in a vicinity of a non-degenerate critical point a Morse function has the form $f(x,y) = -|x|^2 + |y|^2 = -x_1^2 - \cdots - x_p^2 + y_1^2 + \cdots + y_q^2$. Moreover, this function satisfies the concave/convex condition of von Neumann's minmax theorem and the relation (6) is valid.

There is a formal resemblance of these results, for example the x-sections (respectively y-sections) of the convex sets $C \times D$ in (6) formally play the role of complementary clutters $\mathcal{R}$ and $\mathcal{S}$ from the result of Edmonds and Fulkerson. At first sight it appears to be naive and hard to expect a deeper connection between these results. Indeed, the clutter $\{C \times \{y\}\}_{y\in D}$ of y-sections is nowhere near to be the complementary clutter of the set $\{\{x\} \times D\}_{x\in C}$ of all x-sections, which is a consequence of the following lemma (see the property (3) on page 301 in [11]).

LEMMA 2. *The clutter $\mathcal{S} \subset 2^E$ is the complementary clutter of the clutter $\mathcal{R} \subset 2^E$, if and only if for each partition $E = E_0 \uplus E_1$ of E either an element of $\mathcal{R}$ is contained in E_0 or an element of $\mathcal{S}$ is contained in E_1, but not both.*

In the next section we show that there does exist a geometric interpretation of the Edmonds-Fulkerson bottleneck minmax equality, provided we are willing to replace the smooth by discrete Morse theory.

5.1. Edmonds-Fulkerson minmax lemma revisited

Here we use the results from Section 4.1 to give a new proof and a new interpretation of Edmonds-Fulkerson minmax lemma. As before (Figure 2) the clutters $\mathcal{R}$ and $\mathcal{S}$ are both subfamilies of 2^E.

Let $\widehat{\mathcal{R}} := \{A \subseteq E \mid (\exists X \in \mathcal{R})\, X \subseteq A\}$ be the upper closure of the clutter $\mathcal{R}$ and let $K := 2^E \setminus \widehat{\mathcal{R}}$ be the complementary simplicial complex.

LEMMA 3. *Let K° be the Alexander dual of the simplicial complex $K := 2^E \setminus \widehat{\mathcal{R}}$. Then*

$$K^\circ = 2^E \setminus \widehat{\mathcal{S}}$$

is the complementary simplicial complex of the upper closure $\widehat{\mathcal{S}}$ of the clutter $\mathcal{S}$.

PROOF. This is an immediate consequence of Lemma 2 since the pair of complexes (K, K°) is also characterized by the property that for each partition $E = E_0 \uplus E_1$ precisely one of the following two relations $E_0 \in K$, $E_1 \in K^\circ$ is satisfied. □

Let $f : E \to \mathbb{R}$ be a real function. We may assume that f is 1-1. Moreover, we may replace E by the set $[n]$ (where n is the cardinality of E) and assume that $f = id : [n] \to [n]$ is the identity function.

By construction and properties of the perfect DMF on the Bier sphere $Bier(K) = K *_\Delta K^\circ$, constructed in Section 4.1, there is a unique $(n-2)$-dimensional critical simplex $(A_1, A_2; i)$, characterized by the conditions $A_1 < i < A_2$, $A_1 \in K$, $A_2 \in K^\circ$. Let us show that

$$a := \operatorname*{Res}_{I\in\mathcal{R}}\max_{x\in I} f(x) = f(i) = \max_{J\in\mathcal{S}}\operatorname*{Res}_{x\in J} f(x) =: b\,. \tag{7}$$

Indeed, $A_1 \cup \{i\} \notin K$ implies $A_1 \cup \{i\} \in \mathcal{R}$ and from $\max_{x \in A_1 \cup \{i\}} f(x) = f(i)$ we deduce the relation $a \leq f(i)$.

For the opposite inequality observe that if $I \in \mathcal{R}$ then $I \cap (A_2 \cup \{i\}) \neq \emptyset$ (otherwise, since $A_2 \cup \{i\} \in \mathcal{S}$, Lemma 2 would be violated). Hence, $\max_{x \in I} f(x) \geq f(i)$ and $a \geq f(i)$.

The proof of the equality $b = f(i)$ is similar. □

REMARK 2. One of the consequences is that the (algorithmic) complexity of determining the critical cell $(A_1, A_2; i)$ in the Bier sphere $Bier(K)$ is at least as big as the complexity of evaluating the maxmin (minmax) of a function on a family of sets (clutter).

6. Discrete Morse theory for chessboard complexes with multiplicities

Suppose that $k_1, \dots, k_n$ and $l_1, \dots, l_m$ are two sequences of non-negative integers. The generalized chessboard complex $\Delta_{m,n}^{k_1,\dots,k_n;l_1,\dots,l_m}$ contains all rooks placements on $[n] \times [m]$ table such that at most k_i rooks are in the i-th row and at most l_j rooks are in the j-th column. We use Forman's discrete Morse theory to obtain a generalization of Theorem 3.2 from [22].

THEOREM 2. *If*

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_m \geqslant k_1 + k_2 + \cdots + k_n + n - 1 \qquad (*)$$

then $\Delta_{m,n}^{k_1,\dots,k_n;l_1,\dots,l_m}$ *is* $(k_1 + k_2 + \cdots + k_n - 2)$*-connected.*

PROOF. A column (or a row) is called *full* if it contains the maximal allowed number of rooks. Otherwise, it is called *free*.

We now define a Morse matching for $\Delta = \Delta_{m,n}^{k_1,\dots,k_n;l_1,\dots,l_m}$. For a given face R we describe a face R' that is paired with R, or we recognize that R is a critical face. Let us do it stepwise.

Step 1.

Take the minimal a_1 such that either (1) there is a rook positioned at $(1, a_1)$, or (2) the a_1 column is free.

In the first case (there is a rook at $(1, a_1)$), we match R and $R' = R \setminus \{(1, a_1)\}$.

This is always possible except for the unique exception, when R contains exactly one rook at $(1, 1)$.

In the second case we match R and $R' = R \cup \{(1, a_1)\}$ provided that R' belongs to Δ. The latter condition means that the first row in R is not full.

Clearly, after Step 1 the unmatched simplices are those with full first row, empty $(1, a_1)$, and a free column a_1.

Step 2. We match some of the simplices that are unpaired on the first step.

1. If there is a rook at $(2, a_1)$, set $a_2 := a_1$ and match R and $R' = R \setminus \{(2, a_2)\}$.
2. If

   (a) there is no rook at $(2, a_1)$, and
   (b) the number of rooks in column a_1 is smaller than $l_{a_1} - 1$,

   set $a_2 := a_1$ and match R and $R' = R \cup \{(2, a_2)\}$ provided that R' belongs to Δ. The latter condition means that the second row in R is not full.

   Introduce also $T(R) := 2$. Its meaning is "the column $a_1 = a_2$ has been used twice".

3. If none of the above cases holds, set $a_2 > a_1$ to be the minimal number such that either (1) there is a rook positioned at $(2, a_2)$, or (2) the a_2 column is free.

   The condition $(*)$ guarantees that a_2 is well-defined.

   If there is a rook at $(2, a_2)$, we match R and $R' = R \setminus \{(2, a_2)\}$.

   Otherwise, we match R and $R' = R \cup \{(2, a_2)\}$ provided that R' belongs to Δ. The latter condition means that the second row in R is free.

   In this case we set $T(R) := 1$, since the column a_2 has been used once.

Clearly, after Step 2 the unmatched simplices are those with full first and second rows, empty $(2, a_2)$, and a free column a_2.

We proceed in the same manner. During the first $k-1$ steps, some of the simplices become matched. Unmatched simplices have first $k-1$ rows full. They also have no rook at $(k-1, a_{k-1})$. Each unmatched simplex R is associated a number $T(R)$.

This is how a generic step looks like:
Step k.

1. If there is a rook at (k, a_{k-1}), then match R and $R' = R \setminus \{(k, a_k)\}$.
2. If

   (a) there is no rook at (k, a_{k-1}), and
   (b) the number of rooks in column a_{k-1} is smaller than $l_{a_{k-1}} - T(R)$,

   set $a_k := a_{k-1}$ and match R and $R' = R \cup \{(k, a_k)\}$ provided that R' belongs to Δ. The latter condition means that the k-th row in R is free.

   Set $T(R) := T(R) + 1$; this means that "now the column $a_k = a_{k-1}$ has been used $T(R)$ times".
3. Otherwise, set $a_k > a_{k-1}$ to be the minimal number such that either (1) there is a rook positioned at (k, a_k), or (2) the a_k column is free.

   Next, we match R and $R' = R \setminus \{(2, a_2)\}$ or $R' = R \cup \{(2, a_2)\}$ provided that R' belongs to Δ.

   If R is not matched, set $T(R) := 1$.

Remark. If $k < n$, then $(*)$ guarantees that a_k is well-defined. For the last row a_n is ill-defined if and only if $(*)$ is an equality and R has all the rows full.

Eventually we have all the rows full for non-matched simplices (except for the unique zero-dimensional simplex).

Now let us prove that the above defined matching is acyclic. Take a directed path

$$R_1 \nearrow Q_1 \searrow R_2 \nearrow Q_2 \searrow \cdots .$$

Recall that $R_i \nearrow Q_i$ if and only if $Q_i = R_i \cup \{(s_i, a_{s_i})\}$, the first $s_i - 1$ rows of R_i are full, and a_{s_i} is the first free column after $a_{s_i - 1}$.

Let us prove that (s_i, a_{s_i}) strictly decreases along the path wrt lexicographic order. This will imply the acyclicity.

For $Q_i \searrow R_{i+1}$, we have $R_{i+1} = Q_i \setminus \{(p_i, q_i)\}$ for some $(p_i, q_i) \in Q_i$ (there are no conditions when we remove a rook from Q_i). It suffices to consider the first two steps in our directed path:

$$R_1 \nearrow Q_1 = R_1 \cup \{(s_1, a_{s_1})\} \searrow R_2 = Q_1 \setminus \{(p_2, q_2)\}.$$

- If $p_2 > s_1$ or $p_2 = s_1$ and $a_{s_1} < q_2$ (the removed rook is below or right on (s_1, a_{s_1}), the added rook at the first step) our path stop, because R_2 is paired with $R_2 \setminus \{(s_1, a_{s_1})\}$.
- If $p_2 < s_1$ or $p_2 = s_1$ and $a_{s_1} > q_2$ (the removed rook is above or left (s_1, a_{s_1})), then we have that $s_2 < s_1$ or $s_2 = s_1$ and $a_{s_2} < a_{s_1}$.

Summarizing, all critical faces (except for the unique zero-dimensional one) have all the rows full. Therefore $\Delta_{m,n}^{k_1,\dots,k_n;l_1,\dots,l_m}$ is $(k_1 + k_2 + \cdots + k_n - 2)$-connected. □

7. Tverberg-Van Kampen-Flores type results for j-wise disjoint partitions of a simplex

Recall that a coloring of a set $S \subset \mathbb{R}^d$ is a partition $S = S_1 \uplus \cdots \uplus S_k$, where S_i are the corresponding monochromatic sets. By definition a subset $C \subseteq S$ is a *rainbow set* if it contains at most 1 point from each of the color classes S_i.

THEOREM 3. *Let r be a prime power and $j \geq 1$. Suppose that $\{S_i\}_{i=1}^k$ is a collection of k finite sets of points in $\mathbb{R}^d$ (called colors). Assume that the cardinalities $m_i = |S_i|$ satisfy the inequality $jm_i - 1 \leq r$ for each $i = 1, ..., k$. If $(r-1)(d+1) \leq (j-1)m - 1$, where $m := m_1 \cdots + m_k$, then it is possible to partition the set $S = S_1 \uplus \cdots \uplus S_k$ into r rainbow, j-wise disjoint sets $S = C_1 \uplus \cdots \uplus C_r$, so that their convex hulls intersect,*

$$\operatorname{conv}(C_1) \cap \cdots \cap \operatorname{conv}(C_r) \neq \emptyset\,.$$

PROOF. The rainbow sets span the multicolored simplices which are encoded as the simplices of the simplicial complex $([pt]^{*(m_1)}_{\Delta(2)}) * \cdots * ([pt]^{*(m_k)}_{\Delta(2)})$. Indeed these are precisely the simplices which are allowed to have at most 1 vertex in each of k different colors. The configuration space of all r-tuples of j-wise disjoint multicolored simplices is the simplicial complex,

$$K = (([pt]^{*(m_1)}_{\Delta(2)}) * \cdots * ([pt]^{*(m_k)}_{\Delta(2)}))^{*r}_{\Delta(j)}$$

Since the join and deleted join commute, this complex is isomorphic to,

$$K = ([pt]^{*(m_1)}_{\Delta(2)})^{*r}_{\Delta(j)} * \cdots * ([pt]^{*(m_k)}_{\Delta(2)})^{*r}_{\Delta(j)}$$

where pt is a one-point simplicial complex.

If we suppose, contrary to the statement of the theorem, that the intersection of images of any r, j-wise disjoint multicolored simplices is empty, the associated mapping $F : K \to (\mathbb{R}^d)^{*r}$ would miss the diagonal $D \subset (\mathbb{R}^d)^{*r}$. By composing this map with the orthogonal projection to $D^{\perp}$, and after the radial projection to the unit sphere in $D^{\perp}$, we obtain a $(\mathbb{Z}/p)^{\alpha}$-equivariant mapping,

$$\tilde{F} : K \to S^{(r-1)(d+1)-1}.$$

The complex $([pt]^{*(m_i)}_{\Delta(2)})^{*r}_{\Delta(j)}$ is a multiple chessboard complex $\Delta^{1,j-1}_{m_i,r}$. Since by assumption $jm_i - 1 \leq r$, this complex is $(m_i(j-1) - 2)$-connected by the main result from [22]. Hence the complex K is $(m(j-1) - 2)$-connected. By our assumption $m(j-1) - 2 \geq (r-1)(d+1) - 1$, so in light of Volovikov's theorem [34] such a mapping $\tilde{F}$ does not exist. □

The following obvious corollary of Theorem 2 is more suitable for applications in the rest of the section.

Corollary 1. *By interchanging the rows and the columns of the multiple chessboard complex in Theorem* 2, we obtain that the complex $\Delta_{m,n}^{k_1,\ldots,k_n;l_1,\ldots,l_m}$ is $(l_1+\cdots+l_m-2)$-connected if $l_1+\cdots+l_m \le k_1+\cdots+k_n-m+1$.

Theorem 4. *Let r be a prime power. Assume that positive integers k, r, N, j and d satisfy the inequalities $(k+1)r+r-1 \le (N+1)(j-1)$ and $(r-1)(d+1)+1 \le r(k+1)$. Then for every continuous map $f : \Delta^N \to \mathbb{R}^d$ there exist r, j-wise disjoint faces of the simplex Δ^N of dimension at most k, whose images have a nonempty intersection.*

Proof. The faces of dimension at most k form the k-skeleton $(\Delta^N)^{(k)} = [pt]^{*(N+1)}_{\Delta(k+2)}$. The configuration space of all r-tuples of j-wise disjoint k-dimensional faces of this skeleton is the simplicial complex,

$$K = ([pt]^{*(N+1)}_{\Delta(k+2)})^{*r}_{\Delta(j)}.$$

This is a generalized chessboard complex $K = \Delta_{N+1,r}^{k+1;j-1}$. Since by our assumption $(k+1)r \le$ $\le (N+1)(j-1)-r+1$, this complex K is by Corollary 1 $((k+1)r-2)$-connected.

If we suppose, contrary to the statement of the theorem, that the intersection of images of any r, j-wise disjoint k-dimensional faces is empty, the associated mapping $F : K \to (\mathbb{R}^d)^{*r}$ would miss the diagonal D.

As in the proof of the previous theorem we obtain a $(\mathbb{Z}/p)^\alpha$-equivariant mapping,

$$\tilde{F} : K \to S^{(r-1)(d+1)-1}.$$

We have already observed that K is $((k+1)r-2)$-connected, and by our assumption $r(k+1)-2 \ge (r-1)(d+1)-1$, so in light of Volovikov's theorem [34] such a mapping $\tilde{F}$ does not exist. □

Theorem 5. *Let r be a prime power. Suppose that q, r, j and d are positive integers and let $\{S_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathbb{R}^d$ is a collection of colored points where all color classes S_i are of the same cardinality m. Then if $qr \le m(j-1)-r+1$ and $(r-1)(d+1)+1 \le qrk$, then it is always possible to partition the set $S := \cup_{i=1}^k S_i$ into r j-wise disjoint sets containing at most q points of each color, so that their convex hulls* $\mathrm{conv}(S_i)$ *have a non-empty intersection.*

Proof. The sets containing at most q points of each color span the multicolored simplices which are encoded as the simplices of the simplicial complex $([pt]^{*m}_{\Delta(q+1)})^{*k}$. Indeed, these are precisely the simplices which are allowed to have at most q vertices in each of k different colors. The configuration space of all r-tuples of j-wise disjoint multicolored simplices is the simplicial complex,

$$K = (([pt]^{*m}_{\Delta(q+1)})^{*k})^{*r}_{\Delta(j)}.$$

Since the join and deleted join commute, this complex is isomorphic to,

$$K = (([pt]^{*m}_{\Delta(q+1)})^{*r}_{\Delta(j)})^{*k}.$$

If we suppose, contrary to the statement of the theorem, that the intersection of images of any r, j-wise disjoint multicolored simplices is empty, the associated mapping $F : K \to (\mathbb{R}^d)^{*r}$ would miss the diagonal D. As before, by composing this map with the orthogonal projection to $D^\perp$, and after the radial projection to the unit sphere in $D^\perp$, we obtain a $(\mathbb{Z}/p)^\alpha$-equivariant mapping,

$$\tilde{F} : K \to S^{(r-1)(d+1)-1}.$$

The complex $([pt]^{*m}_{\Delta(q+1)})^{*r}_{\Delta(j)}$ is a multiple chessboard complex $\Delta^{q,j-1}_{m,r}$. Since we assumed $qr \leq (j-1)m - r + 1$, this complex is $(qr-2)$-connected by Corollary 1. Hence the complex K is $(qrk-2)$-connected. By our assumption $qrk \geq (r-1)(d+1)+1$, so in light of Volovikov's theorem [34] such a mapping $\tilde{F}$ does not exist. □

Theorem 6. *Let r be a prime power. Suppose that q, r, j and d are positive integers and let $\{S_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathbb{R}^d$ is a collection of colored points where all color classes S_i are of the same cardinality m. If $jm-1 \leq qr$ and $(r-1)(d+1)+1 \leq (j-1)mk$, then it is possible to divide all points in r, j-wise disjoint sets containing at most q points of each color, so that their convex hulls* $\mathrm{conv}(S_i)$ *have a non-empty intersection.*

Proof. As before the sets containing at most q points of each color span the multicolored simplices which are encoded as the simplices of the simplicial complex $([pt]^{*m}_{\Delta(q+1)})^{*k}$. Indeed these are precisely the simplices which are allowed to have at most q vertices in each of k different colors. The configuration space of all r-tuples of j-wise disjoint multicolored simplices is the simplicial complex,

$$K = (([pt]^{*m}_{\Delta(q+1)})^{*k})^{*r}_{\Delta(j)}.$$

Since the join and deleted join commute, this complex is isomorphic to,

$$K = (([pt]^{*m}_{\Delta(q+1)})^{*r}_{\Delta(j)})^{*k}.$$

If we suppose, contrary to the statement of the theorem, that the intersection of images of any r, j-wise disjoint multicolored simplices is empty, the associated mapping $F : K \to (\mathbb{R}^d)^{*r}$ would miss the diagonal D. As before, from here by an equivariant deformation we obtain a $(\mathbb{Z}/p)^\alpha$-equivariant mapping,

$$\tilde{F} : K \to S^{(r-1)(d+1)-1}.$$

The complex $([pt]^{*m}_{\Delta(q+1)})^{*r}_{\Delta(j)}$ is the multiple chessboard complex $\Delta^{q,j-1}_{m,r}$. Since we assumed $(j-1)m \leq qr - m + 1$, this complex is $((j-1)m-2)$-connected by Corollary 1. Hence the complex K is $((j-1)mk-2)$-connected. By our assumption $(j-1)mk \geq (r-1)(d+1)+1$, and again this is in contradiction with Volovikov's theorem [34]. □

For illustration let us consider a very special case of this theorem $q = 1$ and $j = 2$.

Theorem 7. *Let r be a prime power. Given k finite sets of points in $\mathbb{R}^d$ (called colors), of m points each, so that $2m-1 \leq r$ and $(r-1)(d+1)+1 \leq mk$, it is possible to divide the points in r pairwise disjoint sets containing at most 1 point of each color, so that their convex hulls intersect.*

Remark 3. It is easy to see that the assumptions on the total number of points is the best possible, since the set of $(r-1)(d+1)$ points in the general position could not be divided in r disjoint sets whose convex hulls intersect.

7.1. A comparison with known results

It is interesting to compare results from the previous section with similar results from [7] (Section 9). Note that the proof methods are quite different. We use high connectivity of the multiple chessboard complex, established in Section 6, while the authors of [7] use the 'constraint method', relying on the 'optimal colored Tverberg theorem' from [8], as a 'black box' result.

For illustration, let us compare our Theorem 7 to Theorem 9.1 from [7].

Let us choose $k \geq 2(d+1)$ in Theorem 7 and select the smallest m satisfying the inequality $(r-1)(d+1)+1 \leq mk$, meaning that we are allowed to assume

$$(m-1)k < (r-1)(d+1)+1 \leq mk\,.$$

From here we immediately deduce the inequality $2m-1 \leq r$ and, as a consequence of Theorem 7, we have the following result.

Corollary 2. *Let r be a prime power. Assume $k \geq 2(d+1)$ and choose m satisfying the inequality $(r-1)(d+1)+1 \leq mk$. Suppose that $S \subset \mathbb{R}^d$ is a set of cardinality mk, evenly colored by k colors (meaning that $S = \cup_{i=1}^{k} S_i$ where $|S_i| = m$ for each i). Then it is possible to select r pairwise disjoint subsets $C_i \subset S$, containing at most 1 point of each color, so that $\cap_{i=1}^{r}\mathrm{conv}(C_i) \neq \emptyset$.*

This result clearly follows from Theorem 9.1 if we assume that r is a prime. Corollary 2 illustrates the phenomenon that there exist instances of the 'optimal colored Tverberg theorem' (Theorem 9.1 in [7]) which remain valid if the condition on r being a prime is relaxed to r is a prime power.

7.2. A remark on Tverberg A-P conjecture

In this section we briefly discuss the problem whether each admissible r-tuple is Tverberg prescribable. This problem, as formulated in [7], will be referred to as the Tverberg A-P problem or the Tverberg A-P conjecture.

Definition 3. *For $d \geq 1$ and $r \geq 2$, an r-tuple $d = (d_1, ..., d_r)$ of integers is admissible if, $[\frac{d}{2}] \leq d_i \leq d$ for all i, and $\sum_{i=1}^{r}(d-d_i) \leq d$. An admissible r-tuple is Tverberg prescribable if there is an N such that for every continuous map $f : \Delta^N \to \mathbb{R}^d$ there is a Tverberg partition $\{\sigma_1, ..., \sigma_r\}$ for f with $\dim(\sigma_i) = d_i$.*

Question. (Tverberg A-P problem; [7] (Question 6.9.)) Is every admissible r-tuple Tverberg prescribable?

As shown in [14], (Theorem 2.8.), the answer to the above question is negative. It was also demonstrated that a more realistic conjecture arises if the condition $[\frac{d}{2}] \leq d_i \leq d$, in the definition of admissible r-tuple, is replaced by a stronger requirement $\frac{(r-1)}{r}(d-1) \leq d_i \leq d$ for all i.

Here we remark that a positive answer to the modified question is quite straightforward in the case $r \geq d$. Indeed, in this case we have for all i

$$d_i \geq \frac{(r-1)}{r}(d-1) \geq d-1-\frac{(d-1)}{r} > d-2.$$

So, in this case each d_i is equal to either $d-1$ or d, and the A-P conjecture reduces to the 'balanced case', established in [23].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. C.A. Athanasiadis. Decompositions and connectivity of matching and chessboard complexes. *Discrete Comput. Geom.* 31 (2004), 395–403.

2. S. Ault, Z. Fiedorowicz. Symmetric homology of algebras. *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 10, Number 4 (2010), 2343–2408. arXiv:0708.1575v54 [math.AT] 5 Nov 2007.

3. S. Ault. Symmetric homology of algebras, *Algebr. Geom. Topol.*, Vol. 10, No 4 (2010), 2343–2408.

4. T. Bier. A remark on Alexander duality and the disjunct join. Unpublished preprint, 1992.

5. A. Björner, L. Lovász, S.T. Vrećica, and R.T. Živaljević. Chessboard complexes and matching complexes. *J. London Math. Soc. (2)* 49 (1994), 25–39.

6. A. Bjorner, A. Paffenholz, J. Sjostrand, G.M. Ziegler, Bier spheres and posets, *Discrete Comput. Geom.* 34 (2005), no. 1, 71–86.

7. P.V.M. Blagojević, F. Frick, G.M. Ziegler. Tverberg plus constraints. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 46:953–967, 2014.

8. P.V.M. Blagojević, B. Matschke, G.M. Ziegler. Optimal bounds for the colored Tverberg problem. *J. Eur. Math. Soc. 17*, 4 (2015), 739–754.

9. M.K. Chari. On discrete Morse functions and combinatorial decompositions. *Discrete Math.*, 217(1-3):101–113, 2000.

10. S.Lj. Čukić, E. Delucchi. Simplicial shellable spheres via combinatorial blowups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 135 (2007), no. 8, 2403–2414.

11. J. Edmonds, D.R. Fulkerson, Bottleneck extrema, *Journal of Combinatorial Theory* 8 (1970) 299–306.

12. Z. Fiedorowicz. Question about a simplicial complex. *Algebraic Topology Discussion List* (maintained by Don Davis), `http://www.lehigh.edu/~dmd1/zf93`.

13. R. Forman, A user's guide to discrete Morse theory, *Sém. Lothar. Combin.* 48 (2002), Article B48c.

14. F. Frick. On affine Tverberg-type results without continuous generalization. arXiv:1702.05466 [math.CO]

15. J. Friedman and P. Hanlon. On the Betti numbers of chessboard complexes. *J. Algebraic Combin.* 8 (1998), 193–203.

16. P.F. Garst. *Cohen-Macaulay complexes and group actions.* Ph.D. Thesis, Univ. of Wisconsin-Madison, 1979.

17. S. Hell. Tverberg's theorem with constraints. *J. Combinatorial Theory*, Ser. A 115:1402–1406, 2008.

18. D. Jojić, I. Nekrasov, G. Panina, R. Živaljević. Alexander r-tuples and Bier complexes, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* 104(118) (2018), 1–22.

19. D. Jojić, W. Marzantowicz, S.T. Vrećica, R.T. Živaljević. Topology of unavoidable complexes, arXiv:1603.08472 [math.AT].

20. D. Jojić, G. Panina, R. Živaljević, *A Tverberg type theorem for collectively unavoidable complexes*, *Israel J. Math.* (accepted for publication), arXiv:1812.00366 [math.CO].

21. D. Jojić, G. Panina, R. Živaljević, *Splitting necklaces, with constraints*, arXiv:1907.09740 [math.CO].

22. D. Jojić, S.T. Vrećica, R.T. Živaljević. Multiple chessboard complexes and the colored Tverberg problem. *J. Combin. Theory Ser. A*, 145:400–425, 2017.

23. D. Jojić, S.T. Vrećica, R.T. Živaljević. Symmetric multiple chessboard complexes and a new theorem of Tverberg type. *J. Algebraic Combin.*, 46:15–31, 2017.

24. D. Jojić, S.T. Vrećica, R.T. Živaljević. Topology and combinatorics of unavoidable complexes, arXiv:1603.08472v1 [math.AT], (unpublished prepreint).

25. J. Jonsson. *Simplicial Complexes of Graphs.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1928. Springer 2008.

26. J. Jonsson. Exact sequences for the homology of the matching complex. *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 115 (2008), no. 8, 1504–1526.

27. J. Jonsson. On the 3-torsion part of the homology of the chessboard complex. *Annals of Combinatorics*, 2010, (14) 4, 487–505.

28. D.B. Karaguezian, V. Reiner, M.L. Wachs. Matching Complexes, Bounded Degree Graph Complexes, and Weight Spaces of GL -Complexes. *J. Algebra* 239:77–92, 2001.

29. D. Kozlov. *Combinatorial Algebraic Topology*, Algorithms and Computation in Mathematics, Springer 2008.

30. M. de Longueville. Bier spheres and barycentric subdivision, *J. Comb. Theory Ser. A* 105 (2004), 355–357.

31. J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry.* Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003 (Corrected 2nd printing 2008).

32. V. Reiner and J. Roberts. Minimal resolutions and homology of chessboard and matching complexes. *J. Algebraic Combin.* 11 (2000), 135–154.

33. J. Shareshian and M.L. Wachs. Torsion in the matching complex and chessboard complex. *Advances in Mathematics* 212 (2007) 525–570.

34. А.Ю. Воловиков, *К теореме ван Кампена–Флореса*, Матем. заметки, 59(5):, 663–670, 1996.

35. S. Vrećica and R. Živaljević. New cases of the colored Tverberg theorem. In H. Barcelo and G. Kalai, editors, *Jerusalem Combinatorics '93*, Contemp. Math. Vol. 178, pp. 325–334, A.M.S. 1994.

36. S. Vrećica and R. Živaljević. Cycle-free chessboard complexes and symmetric homology of algebras. *European J. Combinatorics* 30 (2009) 542–554.

37. S. Vrećica and R. Živaljević. Chessboard complexes indomitable. *J. Combin. Theory Ser. A*, 118:2157–2166, 2011.

38. M.L. Wachs. Topology of matching, chessboard, and general bounded degree graph complexes, Dedicated to the memory of Gian-Carlo Rota. *Algebra Universalis* 49 (2003), 345–385.

39. G.M. Ziegler. Shellability of chessboard complexes. *Israel J. Math.* 87 (1994), 97–110.

40. R.T. Živaljević and S.T. Vrećica. The colored Tverberg's problem and complexes of injective functions. *J. Combin. Theory Ser. A* 61 (1992), 309–318.

41. R.T. Živaljević. Topological methods in discrete geometry. Chapter 21 in *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, third ed., J.E. Goodman, J. O'Rourke, and C.D. Tóth, CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 2017.

42. R. Živaljević. User's guide to equivariant methods in combinatorics, I and II. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, (I) 59(73):114–130, 1996 and (II) 64(78):107–132, 1998.

REFERENCES

1. Athanasiadis, C.A. 2004, "Decompositions and connectivity of matching and chessboard complexes", *Discrete Comput. Geom.*, vol. 31, pp. 395–403.

2. Ault, S. & Fiedorowicz, Z. 2007, "Symmetric homology of algebras", *Algebr. Geom. Topol.*, vol. 10, no 4, pp. 2343–2408. Available at: arXiv:0708.1575v54 [math.AT] 5 Nov 2007.

3. Ault, S. 2010, "Symmetric homology of algebras", *Algebr. Geom. Topol.*, vol. 10, no. 4, pp. 2343–2408.

4. Bier, T. 1992, *A remark on Alexander duality and the disjunct join*, Unpublished preprint.

5. Björner, A., Lovász, L., Vrećica, S.T. & Živaljević, R.T. 1994, "Chessboard complexes and matching complexes", *J. London Math. Soc. (2)*, vol. 49, pp. 25–39.

6. Bjorner, A., Paffenholz, A., Sjostrand, J. & Ziegler, G.M. 2005, "Bier spheres and posets", *Discrete Comput. Geom.*, vol. 34, no. 1, pp. 71–86.

7. Blagojević, P.V.M., Frick, F. & Ziegler, G.M. 2014, "Tverberg plus constraints", *Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 46, pp. 953–967.

8. Blagojević, P.V.M., Matschke, B. & Ziegler, G.M. 2015, "Optimal bounds for the colored Tverberg problem", *J. Eur. Math. Soc. 17*, vol. 4, pp. 739–754.

9. Chari, M.K. 2000, "On discrete Morse functions and combinatorial decompositions", *Discrete Math.*, vol. 217, no. 1-3, pp. 101–113.

10. Čukić, S.Lj. & Delucchi, E. 2007, "Simplicial shellable spheres via combinatorial blowups", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 135, no. 8, pp. 2403–2414.

11. Edmonds, J. & Fulkerson, D.R. 1970, "Bottleneck extrema", *Journal of Combinatorial Theory*, vol. 8, pp. 299–306.

12. Fiedorowicz, Z. 2007, "Question about a simplicial complex", *Algebraic Topology Discussion List* (maintained by Don Davis), Available at: `http://www.lehigh.edu/~dmd1/zf93`.

13. Forman, R. 2002, "A user's guide to discrete Morse theory", *Sém. Lothar. Combin.*, vol. 48, Article B48c.

14. Frick, F. 2017, "On affine Tverberg-type results without continuous generalization", Available at: arXiv:1702.05466 [math.CO]

15. Friedman, J. & Hanlon, P. 1998, "On the Betti numbers of chessboard complexes", *J. Algebraic Combin.*, vol. 8, pp. 193–203.

16. Garst, P.F. 1970, *Cohen-Macaulay complexes and group actions*. Ph.D. Thesis, Univ. of Wisconsin-Madison.

17. Hell, S. 2008, "Tverberg's theorem with constraints", *J. Combinatorial Theory*, Ser. A, vol. 115, pp. 1402–1406.

18. Jojić, D., Nekrasov, I., Panina, G. & Živaljević, R. 2018, “Alexander r-tuples and Bier complexes”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, vol. 104, no. 118, pp. 1–22.

19. Jojić, D., Marzantowicz, W., Vrećica, S.T. & Živaljević, R.T. 2016, “Topology of unavoidable complexes”, Available at: arXiv:1603.08472 [math.AT].

20. Jojić, D., Panina, G., & Živaljević, R., “A Tverberg type theorem for collectively unavoidable complexes”, *Israel J. Math.* (accepted for publication), Available at: arXiv:1812.00366 [math. CO].

21. Jojić, D., Panina, G. & Živaljević, R. 2019, “Splitting necklaces, with constraints”, Available at: arXiv:1907.09740 [math.CO].

22. Jojić, D., Vrećica, S.T. & Živaljević, R.T. 2017, “Multiple chessboard complexes and the colored Tverberg problem”, *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 145, pp. 400–425.

23. Jojić, D., Vrećica, S.T. & Živaljević, R.T. 2017, “Symmetric multiple chessboard complexes and a new theorem of Tverberg type”, *J. Algebraic Combin.*, vol. 46, pp. 15–31.

24. Jojić, D., Vrećica, S.T. & Živaljević, R.T. 2016, “Topology and combinatorics of unavoidable complexes”, Available at: arXiv:1603.08472v1 [math.AT], (unpublished prepreint).

25. Jonsson, J. 2008, *Simplicial Complexes of Graphs*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1928. Springer.

26. Jonsson, J. 2008, “Exact sequences for the homology of the matching complex”, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, vol. 115, no. 8, pp. 1504–1526.

27. Jonsson, J. 2010, “On the 3-torsion part of the homology of the chessboard complex” *Annals of Combinatorics*, vol. 4, no. 14, pp. 487–505.

28. Karaguezian, D.B., Reiner, V. & Wachs M.L. 2001, “Matching Complexes, Bounded Degree Graph Complexes, and Weight Spaces of GL -Complexes”, *J. Algebra* vol. 239, pp. 77–92.

29. Kozlov, D. 2008, *Combinatorial Algebraic Topology*, Algorithms and Computation in Mathematics, Springer.

30. Longueville, M. de 2004, “Bier spheres and barycentric subdivision”, *J. Comb. Theory Ser. A*, vol. 105, pp. 355–357.

31. Matoušek, J. 2008, *Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry.* Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003 (Corrected 2nd printing 2008).

32. Reiner, V. & Roberts, J. 2000, “Minimal resolutions and homology of chessboard and matching complexes”, *J. Algebraic Combin.*, vol. 11, pp. 135–154.

33. Shareshian, J. & Wachs, M.L. 2007, “Torsion in the matching complex and chessboard complex”, *Advances in Mathematics*, vol. 212, pp. 525–570.

34. Volovikov, A.Y. 1996, “On the van Kampen-Flores theorem”, *Math. Notes*, vol. 59, pp. 477–481.

35. Vrećica, S. & Živaljević, R. 1994, “New cases of the colored Tverberg theorem”. In H. Barcelo and G. Kalai, editors, *Jerusalem Combinatorics ’93*, Contemp. Math., vol. 178, pp. 325–334, A.M.S..

36. Vrećica, S. & Živaljević, R. 2009, “Cycle-free chessboard complexes and symmetric homology of algebras”, *European J. Combinatorics*, vol. 30, pp. 542–554.

37. Vrećica, S. & Živaljević, R. 2011, “Chessboard complexes indomitable”, *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 118, pp. 2157–2166.

38. Wachs, M.L. 2003, “Topology of matching, chessboard, and general bounded degree graph complexes”, Dedicated to the memory of Gian-Carlo Rota. *Algebra Universalis*, vol. 49, pp. 345–385.

39. Ziegler, G.M. 1994, “Shellability of chessboard complexes”, *Israel J. Math.*, vol. 87, pp. 97–110.

40. Živaljević, R.T. & Vrećica, S.T. 1992, “The colored Tverberg’s problem and complexes of injective functions”, *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 61, pp. 309–318.

41. Živaljević, R.T. 2017, “Topological methods in discrete geometry”. Chapter 21 in *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, third ed., J.E. Goodman, J. O’Rourke, and C.D. Tóth, CRC Press LLC, Boca Raton, FL.

42. Živaljević, R, “User’s guide to equivariant methods in combinatorics, I and II.” *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, (I) vol. 59, no. 73, pp. 114–130, 1996 and (II) vol. 64, no. 78, pp. 107–132, 1998.

Получено 18.01.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 2.

УДК 517.938.5+515.164.15 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-228-243

Классификация особенностей типа седло-фокус[1]

И. К. Козлов, А. А. Ошемков

Козлов Иван Константинович — кандидат физико-математических наук, доцент, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: ikozlov90@gmail.com

Ошемков Андрей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: a@oshemkov.ru

Аннотация

В работе приводится алгоритм топологической классификации невырожденных особенностей типа седло-фокус интегрируемых гамильтоновых систем с тремя степенями свободы с точностью до полулокальной эквивалентности. В частности, мы доказываем, что любую особенность типа седло-фокус можно представить в виде почти прямого произведения, в котором действующая группа циклическая. На основе построенного алгоритма получен полный список особенностей типа седло-фокус сложности 1, 2 и 3, т. е. особенностей с одной, двумя или тремя особыми точками ранга 0 на слое. Ранее обе особенности типа седло-фокус сложности 1 были также описаны Л. М. Лерманом.

Ключевые слова: интегрируемая система, слоение Лиувилля, особенность типа седло-фокус.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
И. К. Козлов, А. А. Ошемков. Классификация особенностей типа седло-фокус // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 228–243.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 2.

UDC 517.938.5+515.164.15 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-228-243

Classification of saddle-focus singularities

I. K. Kozlov, A. A. Oshemkov

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 17-11-01303).

Kozlov Ivan Konstantinovich — Candidate of physical and mathematical Sciences, Associate Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: ikozlov90@gmail.com
Oshemkov Andrey Alexandrovich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: a@oshemkov.ru

Abstract

The paper presents an algorithm for topological classification of nondegenerate saddle-focus singularities of integrable Hamiltonian systems with three degrees of freedom up to semilocal equivalence. In particular, we prove that any singularity of saddle-focus type can be represented as an almost direct product in which the acting group is cyclic. Based on constructed algorithm, a complete list of singularities of saddle-focus type of complexity 1, 2, and 3, i. e., singularities whose leaf contains one, two, or three singular points of rank 0, is obtained. Earlier, both singularities of saddle-focus type of complexity 1 were also described by L. M. Lerman.

Keywords: integrable system, Liouville foliation, saddle-focus singularity.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
I. K. Kozlov, A. A. Oshemkov, 2020, "Classification of saddle-focus singularities", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 228–243.

1. Введение

В работе исследуется топологическое устройство особенностей интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности особого слоя. Точнее, мы рассматриваем особенности типа седло-фокус для систем с тремя степенями свободы с точностью до полулокальной лиувиллевой эквивалентности (т. е. с точностью до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля в окрестности особого слоя). В частности, в работе приведен алгоритм для построения полного списка особенностей типа седло-фокус данной сложности k, т. е. с k особыми точками ранга 0 на слое (см. Раздел 3). На основе этого алгоритма получена классификация особенностей типа седло-фокус сложности $\leqslant 3$ (см. Теоремы 4, 5, 6).

Все необходимые сведения об интегрируемых системах и невырожденных особенностях можно найти в [3] или [4]. Коротко дадим лишь необходимые нам определения.

Интегрируемая гамильтонова системой с n степенями свободы — это $2n$-мерное симплектическое многообразие (M^{2n},ω) с заданными на нем n функциями $f_1,\dots,f_n$, для которых гамильтоновы векторные поля $\operatorname{sgrad} f_i$ полны, попарно коммутируют и линейно независимы почти всюду на M^{2n}. Отображение $\Phi = (f_1,\dots,f_n) : M \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением момента* интегрируемой гамильтоновой системы $(M^{2n},\omega, f_1,\dots,f_n)$.

Отметим, что обычно в определение гамильтоновой системы включается *гамильтониан* — некоторая выделенная функция H из набора $f_1,\dots,f_n$ (или функция от f_i), гамильтонов поток которой и задает динамическую систему на фазовом пространстве M^{2n}. Для нас выбор гамильтониана не важен, поскольку мы интересуемся не динамикой, а лишь топологией слоения, порожденного первыми интегралами $f_1,\dots,f_n$, которое определяется следующим образом.

Определение 1. *Разложение фазового пространства интегрируемой гамильтоновой системы на связные компоненты $\Phi^{-1}(y)$ (т. е. на связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов $f_1,\dots,f_n$) называется* слоением Лиувилля*, соответствующим этой системе.*

Определение 2. *Две интегрируемые гамильтоновы системы на U_1 и U_2 называются* топологически эквивалентными *(или* лиувиллево эквивалентными*), если существует гомеоморфизм $\Psi\colon U_1 \to U_2$, который переводит каждый слой слоения Лиувилля на U_1 в слой слоения Лиувилля на U_2.*

Обычно слоение Лиувилля не является локально тривиальным и имеет особенности. В этой работе мы рассматриваем слоения Лиувилля, у которых все особенности невырождены. Такие особенности являются для интегрируемых систем особенностями общего положения, по сути это многомерный симплектический аналог "морсовских особенностей". Мы приведем лишь характеристическое свойство невырожденных особенностей (Теорема 1), которое можно взять за определение (точное определение см. в [3] или [4]).

Есть три типа простейших "базисных" невырожденных особенностей, они задаются следующими слоениями Лиувилля:

- E — слоение Лиувилля, заданное в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ функцией $p^2 + q^2$ (эллиптический тип);
- H — слоение Лиувилля, заданное в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ функцией pq (гиперболический тип);
- F — слоение Лиувилля, заданное в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^4, dp \wedge dq)$ коммутирующими функциями $p_1q_1 + p_2q_2$ и $p_1q_2 - q_1p_2$ (тип фокус-фокус).

Если слоение Лиувилля задано функциями $f_1, \dots, f_n$, то его особые точки — это те, в которых подпространство, порожденное $\operatorname{sgrad} f_i$, имеет размерность меньше n. *Рангом* особой точки называется размерность этого подпространства. В частности, особые точки указанных слоений Лиувилля E, H и F имеют ранг 0.

Теорема 1 (Элиассон; см.[5, 3]). *Слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки ранга r локально послойно симплектоморфно прямому произведению k_e экземпляров слоения E, k_h экземпляров слоения H и k_f экземпляров слоения F, а также тривиального слоения $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r$.*

Тройка (k_e, k_h, k_f) называется *типом* невырожденной особой точки. Легко видеть, что тип точки определен однозначно.

Особенность слоения Лиувилля — это росток отображения момента на особом слое, т. е. слое, содержащем особые точки. Особенность мы будем называть *невырожденной* (в частности — эллиптической, гиперболической, фокусной), если все ее особые точки невырождены (и их тип соответственно эллиптический, гиперболический или фокус-фокус).

Ранг особенности — это минимальный ранг точек на ней. Для рассматриваемых в этой работе особенностей типа почти прямого произведение (см. Определение 3) типы всех ее точек минимального ранга совпадают. Этот тип (k_e, k_h, k_f) называется *типом особенности.*

Пусть $W_1, \dots, W_l$ — слоения без особенности или простейшие особенности: эллиптические, гиперболические или фокусные. На их произведении $W_1 \times \dots \times W_l$ естественным образом определено слоение Лиувилля с особенностью. Она называется *прямым произведением*, а особенности, лиувиллево эквивалентные ей — особенностями *типа прямого произведения.*

Определение 3. Почти прямое произведение *особенностей — это фактор прямого произведения $W_1 \times \dots \times W_l$ по действию ψ конечной группы G, которое удовлетворяет следующим условиям:*

1) *действие ψ на $W_1 \times \dots \times W_l$ покомпонентное, т.е.*

$$\psi(g)(x_1, \dots, x_l) = (\psi_1(g)(x_1), \dots, \psi_l(g)(x_l)),$$

где $\psi_1, \dots, \psi_l$ — действия группы G на особенностях $W_1, \dots, W_l$,

2) *действие на каждом сомножителе* $\psi_i(g) : W_i \to W_i$ *— это симплектоморфизм, сохраняющий функции, задающие слоение Лиувилля (и, в частности, само это слоение),*

3) *действие* ψ *на* $W_1 \times \cdots \times W_l$ *свободно.*

Особенность, лиувиллево эквивалентная почти прямому произведению $(W_1 \times \cdots \times W_l)/G$, *называется особенностью* типа почти прямого произведения.

Замечание 1. *Далее мы будем рассматривать только особенности типа почти прямого произведения, поскольку Н. Т. Зунг в [17] доказал, что любая невырожденная особенность, удовлетворяющая условию нерасщепляемости (заключающемуся в том, что для каждой особой точки минимального ранга на особом слое ее локальная бифуркационная диаграмма совпадает с бифуркационной диаграммой всей особенности), является особенностью типа почти прямого произведения. Большинство особенностей, которые встречаются в интегрируемых системах в механики и физике — нерасщепляемые (см. [3]). Тем не менее, особенности, не удовлетворяющие условию нерасщепляемости, возникают в системах, инвариантных относительно вращения (см., например, статью Е. А. Кудрявцевой и А. А. Ошемкова в этом выпуске, а также ссылки, приведенные в ней). Также можно построить "искуственные" примеры "расщепимых" особенностей (см. [4]).*

Отметим, что теорема Зунга носит топологический характер, т. е. лиувиллево эквивалентные почти прямые произведения особенностей могут не быть послойно симплектоморфными. Поскольку в данной работе мы рассматриваем особенности лишь с точностью до лиувиллевой эквивалентности, особенности типа почти прямого произведения мы иногда будем называть просто почти прямыми произведениями.

Имеется множество работ, в которых особенности интегрируемых гамильтоновых систем (или слоений Лиувилля) изучались с разных точек зрения: исследование конкретных интегрируемых систем, инварианты особенностей (топологические, гладкие, симплектические), классификация особенностей некоторого фиксированного типа. Поскольку локальная классификация невырожденных особенностей описывается теоремой Элиассона (Теорема 1), говоря здесь о классификации особенностей мы обычно имеем в виду их *полулокальную классификацию*, т. е. с точностью до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля в окрестности особого слоя.

Отметим также, что имеется хорошо развитая теория, описывающая "глобальные" свойства слоений Лиувилля (и в частности их особенностей) на изоэнергетических многообразиях интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Развитие этой теории было начато в работах А. Т. Фоменко (см. [6, 7]). Ее подробное изложение содержится в книге [3].

Перечислим основные результаты, касающиеся классификации невырожденных особенностей ранга 0 с полулокальной точки зрения.

- Особенности типа $(1,0,0)$ и $(0,1,0)$ ранга 0 хорошо известны. Их свойства подробно исследованы в [3] (см. также описание этих особенностей в терминах атомов в [2] и с помощью f-графов в [14]). В частности, существует единственный эллиптический 2-атом A, соответствующий минимаксной особенности, а все остальные 2-атомы — седловые. Например, на рис. 1 и 2 схематично изображены все 2-атомы сложности 1 и 2 с их стандартными обозначениями.

- Полный список особенностей типа седло-седло (т. е. особенностей типа $(0,2,0)$ и ранга 0) был описан и изучен в работах Л. М. Лермана, Я. Л. Уманского [10], А. В. Болсинова [1], В. С. Матвеева [12]. Оказывается, что существует 4 и 39 топологически различных особенностей типа седло-седло сложности 1 и 2 соответственно.

- Полный ответ в чисто седловом случае, т. е. для особенностей типа $(0,n,0)$ и ранга 0 был получен А. А. Ошемковым [15]. Например, существует 32 особенности ранга 0 типа $(0,3,0)$ сложности 1 (см. [16]).

- Классификация особенностей ранга 0 типа $(0,0,m)$ произвольной сложности (т. е. в чисто фокусном случае) была сделана А. М. Изосимовым [8].
- Особенности типа седло-фокус сложности 1 были описаны Л. М. Лерманом (см. [11]).

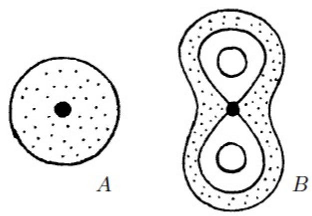


Рис. 1: Атомы сложности 1

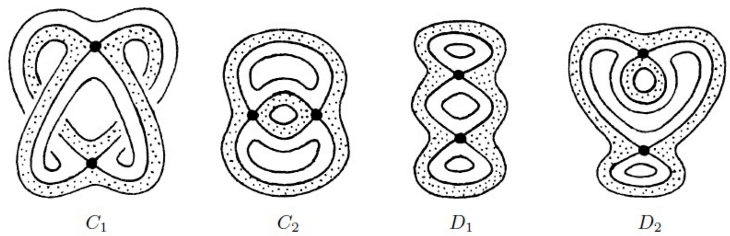


Рис. 2: Атомы сложности 2

В этой работе мы будем рассматривать особенности типа седло-фокус (т. е. типа $(0,1,1)$) ранга 0. Точнее (в соответствии с Замечанием 1) мы будем рассматривать особенности типа почти прямого произведения $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$, где $\mathcal{V}_m$ — какой-то седловой 2-атом сложности m, а $\mathcal{F}_n$ — фокусная особенность сложности n. Следуя [17], почти прямое произведение будем называть *минимальной моделью* особенности типа седло-фокус, если любой (не единичный) элемент $g \in G$ нетривиально действует на каждой компоненте произведения $\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$. Любое почти прямое произведение можно свести к его минимальной модели, заменяя сомножитель на его фактор по подгруппе, которая тривиально действует на другом сомножителе.

В статье Н. Т. Зунга [17] утверждалось, что минимальная модель для особенности типа почти прямого произведения единственна. Вообще говоря, это не верно.

Пример 2. *Рассмотрим 2-атомы B, D_1 (см. рис. 1 и 2) и регулярное слоение Лиувилля над прямой $W_{\mathrm{reg}} \approx S^1 \times \mathbb{R}$. Соответствующие этим 2-атомам 3-атомы $B \times S^1$ и $(D_1 \times S^1)/\mathbb{Z}_2$ лиувиллево эквивалентны (см. [3]). Особенности $B \times W_{\mathrm{reg}}$ и $(D_1 \times W_{\mathrm{reg}})/\mathbb{Z}_2$ тоже лиувиллево эквивалентны, хотя и являются минимальными моделями.*

Утверждение о единственности минимальной модели верно для некоторых классов особенностей (например, для эллиптических или для седловых особенностей ранга 0 (см. [15]). Однако, как показывает следующий пример, для особенностей типа седло-фокус минимальная модель также не единственна.

Пример 3. *Минимальные модели $B \times \mathcal{F}_1$ и $(D_1 \times \mathcal{F}_1)/\mathbb{Z}_2$, где группа $\mathbb{Z}_2$ действует на $\mathcal{F}_1$ как сдвиг вдоль периодического интеграла на половину периода, лиувиллево эквивалентны.*

Более общее утверждение (частным случаем которого является пример 3) доказано ниже в Лемме 1.

Мы докажем, что от подобных действий, лежащих в непрерывной компоненте группы автоморфизмов фокусной особенности, всегда можно “избавиться”. А именно, для особенностей типа седло-фокус мы введем понятие простой минимальной модели (см. Определение 4) и докажем следующее (см. Теоремы 2 и 3):

- любая особенность лиувиллево эквивалентна некоторой простой минимальной модели;
- более того, из любого почти прямого произведения $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ можно получить простую минимальную модель факторизацией по действию некоторой подгруппы $N \triangleleft G$;
- для простой минимальной модели группа G всегда циклическая;
- для простой минимальной модели ее сомножители $\mathcal{V}_m$ и $\mathcal{F}_n$, а также порядок группы G определены однозначно.

2. Простая минимальная модель особенности типа седло-фокус

2.1. Существование простой минимальная модели

Определение 4. *Почти прямое произведение* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ *мы будем называть* простой минимальной моделью, *если любой (не единичный) элемент* $g \in G$

(1) *нетривиально действует на* $\mathcal{V}_m$ *и* $\mathcal{F}_n$,

(2) *не имеет неподвижных точек ранга* 0 *на* $\mathcal{F}_n$.

Это определение простой минимальной модели отличается от определения минимальной модели в статье Н. Т. Зунга [17] добавлением условия (2).

Теорема 2. *Рассмотрим особенность типа седло-фокус, являющуюся почти прямым произведением* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$. *Пусть* $N \subset G$ *— подгруппа, порожденная элементами, которые тривиально действуют на седловой компоненте или имеют неподвижные точки на фокусной компоненте. Тогда*

1. *подгруппа* N *нормальна и* $G/N \cong \mathbb{Z}_k$,
2. $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/N$ *послойно симплектоморфно прямому произведению* $\mathcal{V}'_{m'} \times \mathcal{F}_{n'}$, *где* $V'_{m'} = V_m/N$, *а* n' *— количество орбит действия подгруппы* N *на множестве точек ранга* 0 *фокусной особенности* $\mathcal{F}_n$,
3. $(\mathcal{V}'_{m'} \times \mathcal{F}_{n'})/\mathbb{Z}_k$ *— простая минимальная модель особенности* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$.

Доказательство. [Доказательство Теоремы 2] Очевидно, что N — нормальная подгруппа в G. Покажем, что почти прямое произведение $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ можно "профакторизовать" по N, т. е. заменить $\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$ на $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/N$, а G — на G/N.

Ясно, что если в почти прямом произведении $(W_1 \times W_2)/G$ группа G действует тривиально на компоненте W_2, то $(W_1 \times W_2)/G$ послойно симплектоморфно $(W_1/G) \times W_2$. Поэтому, без ограничения общности, мы можем считать, что рассматриваемое почти прямое произведение $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ является минимальной моделью (т. е. выполнено условие (1) Определения 4).

По условию, G — подгруппа группы автоморфизмов фокусной особенности $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_n)$, т. е. группа послойных симплектоморфизмов особенности $\mathcal{F}_n$ в себя, тождественных на базе слоения. Эта группа описана в [8]. Напомним некоторые доказанные там утверждения. Пусть H_f — подгруппа гамильтоновых автоморфизмов фокусной особенности в группе $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_n)$, и пусть $x_1, \ldots, x_n$ — по порядку пронумерованные особые точки фокусной особенности.

Утверждение 4 (см. [8, Утверждение 6]). *Группа* $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_n)$ *изоморфна* $\mathbb{Z}_k \times H_f$, *где* k *— делитель* n, $\mathbb{Z}_k = \langle a \rangle$, $a(x_q) = x_{q+k \pmod n}$ *для всякой особой точки* x_q.

Следствие 1 (см. [8, Утверждение 7]). *Все элементы конечного порядка в группе* $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_n)$ *лежат в ее "компактной части"* $\mathrm{Aut}_0(\mathcal{F}_n) = \mathbb{Z}_k \times S^1$.

Следствие 2. *Для любой минимальной модели особенности типа седло-фокус группа* G *либо циклическая, либо изоморфна* $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$. *Более точно,* $G \cap H_f \cong \mathbb{Z}_l$ *и* $G/(G \cap H_f) \cong \mathbb{Z}_k$, *где* $k, l \geqslant 1$ *(здесь мы формально полагаем* $\mathbb{Z}_1 = \{0\}$*).*

Для доказательства Теоремы 2 остается профакторизовать особенность по действию группы $G \cap H_f \cong \mathbb{Z}_l$, т. е. доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Любая особенность типа седло-фокус вида* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$, *где группа* G *действует на* $\mathcal{F}_n$ *гамильтоновыми автоморфизмами (т. е. сохраняет все особые точки* $\mathcal{F}_n$*), послойно симплектоморфна особенности* $(\mathcal{V}_m/G) \times \mathcal{F}_n$.

Доказательство. [Доказательство Леммы 1] Представим 2-атом $\mathcal{V}_m$ в удобном для нас виде. Мы хотим разрезать $\mathcal{V}_m$ так, чтобы из его частей можно было склеить $\mathcal{V}_m/G$. Для этого воспользуемся следующим очевидным утверждением.

Утверждение 5. *Если группа G свободно действует на 2-атоме $\mathcal{V}_m$, то его можно разрезать на "крестики" K_i и "ленточки" L_j так, чтобы группа G свободно действовала на множествах "крестиков" и "ленточек".*

В рассматриваемом случае группа G действует на $\mathcal{V}_m$ свободно, поскольку она свободно действует на $\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$ и сохраняет все особые точки $\mathcal{F}_n$. На рис. 3 в качестве примера изображено подобное представление 2-атома D_1, на котором действует группа $\mathbb{Z}_2$ (как центральная симметрия), и выделена фундаментальная область для этого действия.

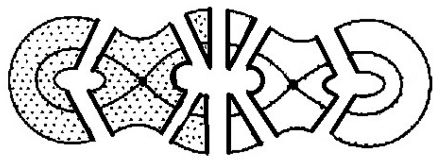


Рис. 3: Фундаментальная область для действия $\mathbb{Z}_2$ на D_1

Пусть $\mathcal{V}_m/G$ получается в результате склейки по границе некоторых "крестиков" $K_1, \dots, K_p$ и "ленточек" $L_1, \dots, L_q$. Рассмотрим произвольную граничную точку $x \in \partial\big(\big(\bigcup K_i\big) \cup \big(\bigcup L_j\big)\big)$. Обозначим через $\sigma(x)$ точку, с которой она отождествляется. Тогда $(\mathcal{V}_m/G) \times \mathcal{F}_n$ гомеоморфно фактор-пространству

$$\Big(\bigcup K_i \times \mathcal{F}_n\Big) \cup \Big(\bigcup L_j \times \mathcal{F}_n\Big)\Big/ \sim_1,$$

где $(x, y) \sim_1 (\sigma(x), y)$ для любой точки $y \in \mathcal{F}_n$. В свою очередь, $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ гомеоморфно фактор-пространству

$$\Big(\bigcup K_i \times \mathcal{F}_n\Big) \cup \Big(\bigcup L_j \times \mathcal{F}_n\Big)\Big/ \sim_2,$$

где $(x, y) \sim_2 (\sigma(x), h_x(y))$ для любой точки $y \in \mathcal{F}_n$, где h_x — некоторый гамильтонов автоморфизм особенности $\mathcal{F}_n$.

Любой гамильтонов автоморфизм h гомотопен тождественному в классе гамильтоновых автоморфизмов (если h — сдвиг на единичное время вдоль гамильтонова векторного поля v, то гомотопия — сдвиг на время t вдоль v). Поэтому $(\mathcal{V}_m/G) \times \mathcal{F}_n$ и $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ гомеоморфны, так как мы можем "раскрутить" каждое отображение h_x на "прямоугольнике" — маленькой окрестности границы. Для этого можно воспользоваться следующим утверждением, которое легко доказать, с помощью теоремы о трубчатой окрестности.

Утверждение 6. *Если разрезать многообразие M^n по подмногообразию Q^{n-1} коразмерности 1, а потом склеить полученные компоненты границы по отображению, гомотопному исходному, то получится многообразие, гомеоморфное M^n.*

Отсюда следует, что $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ и $(\mathcal{V}_m/G) \times \mathcal{F}_n$ лиувиллево эквивалентны. Остается показать, что лиувиллеву эквивалентность между ними можно сделать симплектической. Для этого достаточно заметить, что построенные гомотопии автоморфизмов h_x сохраняют симплектическую структуру. То, что гомотопию всех гамильтоновых автоморфизмов h_x можно сделать гладко зависящей от точки x, гарантируется следующим простым утверждением.

Утверждение 7. *Пусть $\mathcal{F}_n$ — фокусная особенность, f_1, f_2 — ее интегралы, причем траектории гамильтонова векторного поля* $\operatorname{sgrad} f_2$ *замкнуты с периодом 2π. Тогда функции $H_1 = H_1(f_1, f_2)$ и $H_2 = H_2(f_1, f_2)$ задают одинаковые гамильтоновы автоморфизмы* *особенности $\mathcal{F}_n$ (т. е. 1-сдвиги вдоль гамильтоновых векторных полей* $\operatorname{sgrad} H_1$ *и* $\operatorname{sgrad} H_2$ *равны) тогда и только тогда, когда*

$$H_2 - H_1 = \frac{c_1}{2\pi} f_2 + c_2,$$

где $c_1 \in \mathbb{Z}$ *и* $c_2 \in \mathbb{R}$.

Лемма 1 доказана. □

После факторизации минимальной модели по действию группы $G \cap H_f$ мы получаем простую минимальную модель с действием группы $G/(G \cap H_f)$. Тем самым выполнен пункт 3 Теоремы 2. Пункт 2 Теоремы 2 является следствием Леммы 1, пункт 1 вытекает из Следствия 2. Теорема 2 доказана. □

2.2. Однозначность простой минимальной модели

Теорема 3. *Для любой простой минимальной модели $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ особенности типа седло-фокус ее 2-атом $\mathcal{V}_m$, фокусная особенность $\mathcal{F}_n$ и группа $\mathbb{Z}_k$ однозначно определяются структурой самой особенности.*

Перечислим некоторые свойства критических точек особенности типа седло-фокус в виде следующего утверждения, доказательство которого несложно получить исходя из того, что мы знаем, как действует группа $\mathbb{Z}_k$ в простой минимальной модели (см. Теорему 2).

Утверждение 8. *Рассмотрим простую минимальную модель $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ особенности типа седло-фокус. Обозначим через K_i множество ее критических точек ранга i. Тогда для достаточно малой окрестности особого слоя выполнено следующее.*

1. *Бифуркационнная диаграмма, т. е. образ всех критических точек особенности при отображении момента — это объединение прямой l и плоскости* Π, *трансверсально пересекающихся в точке P.*

2. *Множество K_0 состоит из $\frac{mn}{k}$ точек, лежащих в прообразе точки P.*

3. *Множество $K_0 \cup K_1$ образует 2-мерное симплектическое подмногообразие M_1^2, содержащееся в прообразе прямой l. Индуцированное слоение Лиувилля на M_1^2 лиувиллево эквивалентно $\frac{n}{k}$ экземплярам 2-атома $\mathcal{V}_m$.*

4. *Множество $K_0 \cup K_2$ образует 4-мерное симплектическое подмногообразие M_2^4, содержащееся в прообразе плоскости* Π.

   (a) *Если k нечетно, то индуцированное слоение Лиувилля на M_2^4 лиувиллево эквивалентно объединению $\frac{m}{k}$ фокусных особенностей $\mathcal{F}_n$.*

   (b) *Если $k = 2k_1$ и у действия $\mathbb{Z}_k = \langle a \rangle$ на $\mathcal{V}_m$ ровно s точек ранга* 0, *имеющих стабилизатор $\mathbb{Z}_2$ (т. е. точек, неподвижных относительно действия элемента a^{k_1}), где $0 \leqslant s \leqslant m$, то индуцированное слоение Лиувилля на M_2^4 лиувиллево эквивалентно объединению $\frac{m-s}{k}$ фокусных особенностей $\mathcal{F}_n$ и $\frac{s}{k_1}$ фокусных особенностей $\mathcal{F}_{\frac{n}{2}}$.*

Отметим следующий факт, вытекающий из пункта 4 Утверждения 8.

Следствие 3. *Если для двух простых минимальных моделей вида $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ у действия $\mathbb{Z}_k$ на $\mathcal{V}_m$ разное число точек ранга* 0, *имеющих стабилизатор $\mathbb{Z}_2$, то эти особенности лиувиллево не эквивалентны.*

Доказательство. [Доказательство Теоремы 3] Пусть $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ — некоторая простая минимальная модель для данной особенности типа седло-фокус. Тогда согласно пункту 3 Утверждения 8 стуктура индуцированного слоения Лиувилля на многообразии $M_1^2 = K_0 \cup K_1$ однозначно определяет 2-атом $\mathcal{V}_m$, а также отношение $\frac{n}{k}$.

Чтобы определить n (т. е. сомножитель $\mathcal{F}_n$ в минимальной модели), рассмотрим индуцированное слоение Лиувилля на $M_2^4 = K_0 \cup K_2$. Согласно пункту 4 Утверждения 8 это слоение есть либо объединение некоторого количества c фокусных особенностей $\mathcal{F}_N$ для некоторого N, либо объединение a фокусных особенностей $\mathcal{F}_N$ и b фокусных особенностей $\mathcal{F}_{2N}$, где $a, b \geqslant 1$. Во втором случае мы сразу получаем, что $n = 2N$ (а также легко вычисляем s, зная a и b). Если же реализуется первый случай, т. е. в индуцированном слоении на M_2^4 есть лишь фокусные особенности одной сложности N, то теоретически возможны два варианта: $s = 0$ или $s = m$. Для варианта $s = 0$ будем иметь $n = N$ (и $k = \frac{m}{c}$), а для варианта $s = m$ получим $n = 2N$ (и $k = \frac{2m}{c}$). Вообще говоря, мы не можем различить эти два варианта исходя лишь из информации об индуцированных слоениях Лиувилля на подмногообразиях M_1^2 и M_2^4. Иными словами, исходя из пунктов 3 и 4 Утверждения 8, мы можем различить любые простые минимальные модели кроме пары следующего вида:

(i) $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$, где действие любого нетривиального элемента группы $\mathbb{Z}_k$ не имеет неподвижных точек ранга 0 на $\mathcal{V}_m$,

(ii) $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$, где инволюция a^k на $\mathcal{V}_m$ (здесь a — образующая группы $\mathbb{Z}_{2k}$) оставляет неподвижными все m точек ранга 0.

Оказывается, что два действия с такими условиями могут существовать лишь на 2-атомах $\mathcal{V}_m$ некоторого специального вида, описанных в следующем простом утверждении.

Утверждение 9. *Если на 2-атоме $\mathcal{V}_m$ существует инволюция, которая оставляет на месте все точки ранга 0, то такой атом принадлежит одной из двух серий атомов, изображенных на рис. 4 (также там приведены их f-графы).*

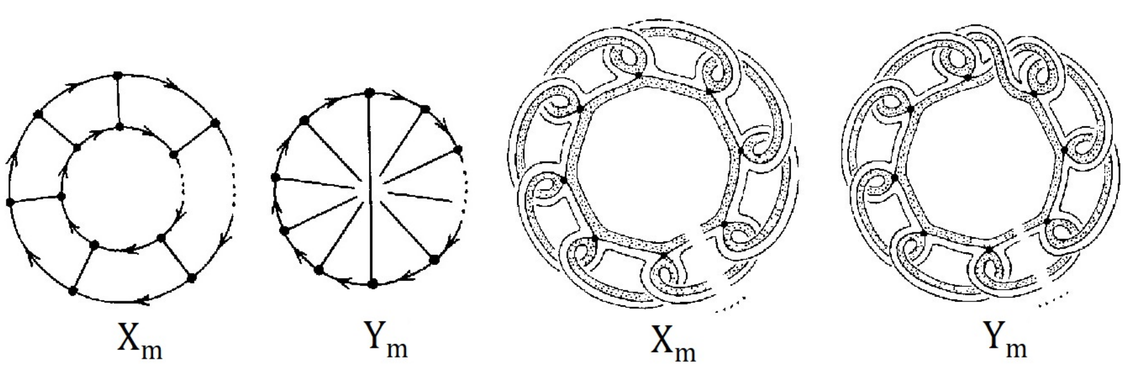


Рис. 4: Атомы X_m и Y_m с их f-графами

В книге [3] (откуда взяты рисунки 4) эти серии 2-атомов приведены в качестве примеров максимально симметричных атомов и обозначены через X_m и Y_m соответственно. Отметим, что свойства 2-атомов X_m и Y_m зависят от четности числа m, равного их сложности. В частности 2-атомы X_{2r} описывают перестройку двух окружностей в две окружности, 2-атомы Y_{2r} — перестройку одной окружности в одну окружность, а атомы X_{2r+1} и Y_{2r+1} переходят друг в друга при изменении знака функции, задающей слоение на них, и описывают перестройку соответственно двух окружностей в одну или одной в две.

Как было отмечено выше, для простых минимальных моделей вида (i) и (ii) индуцированные слоения Лиувилля на многообразиях M_1^2 и M_2^4 одинаковы. Рассмотрим другие характеристики этих особенностей, учитывая, что из Утверждения 9 мы знаем, какие 2-атомы V_m могут быть в минимальных моделях вида (i) и (ii).

Для особенности типа седло-фокус имеется следующая простая характеристика: пара чисел, равных количеству торов Лиувилля в прообразах регулярных точек каждого из полупространств, на которые плоскость Π в образе отображения момента делит пространство (см. пункт 1 Утверждения 8). Рассматривая все возможные действия групп $\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{Z}_{2k}$ на 2-атомах серий X_m и Y_m, удовлетворяющие условиям, перечисленным в (i) и (ii), получаем следующее утверждение.

Утверждение 10. *Пусть $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ и $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$ — простые минимальные модели вида* (i) *и* (ii)*, где $\mathcal{V}_m$ — 2-атом из серий X_m или Y_m. Тогда количество торов Лиувилля в прообразах регулярных точек пары полупространств, на которые плоскость* Π *из бифуркационной диаграммы делит образ отображения момента, равно*

- $(2,2)$ *для $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ и $(1,1)$ для $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$, если $\mathcal{V}_m = X_m$, где m четно,*
- $(1,1)$ *для $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ и $(1,1)$ для $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$, если $\mathcal{V}_m = Y_m$, где m четно,*
- $(2,1)$ *для $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ и $(1,1)$ для $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$, если $\mathcal{V}_m = X_m$ или $\mathcal{V}_m = Y_m$, где m нечетно.*

Таким образом, остается доказать, что особенности $(Y_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ и $(Y_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$, где m четно, лиувиллево не эквивалентны. Для этого достаточно исследовать комбинаторную структуру особого слоя L (т. е. прообраз точки пересечения прямой l и плоскости Π в бифуркационной диаграмме). А именно, нужно посмотреть на стратификацию слоя L точками различного ранга, т. е. на множества $L \cap K_i$, и на то, как они примыкают друг к другу.

Каждая трехмерная орбита в L — это полноторие $\mathbb{R}^2 \times S^1$. В его границе лежат две одномерные орбиты $\mathbb{R}^1$, две двумерные орбиты $\mathbb{R}^1 \times S^1$ и четыре нульмерные орбиты (при этом некоторые из этих орбит могут совпадать). Мы можем рассмотреть цепочки граничных трехмерных орбит и одномерных. У рассматриваемых особенностей $(Y_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ и $(Y_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$ они будут разными. Для примера рассмотрим случай $n = 1$ и $m = 2$ (отметим, что Y_2 — это 2-атом C_1, см. рис. 2). У $C_1 \times \mathcal{F}_1$ будет 4 цепочки, состоящих из 1 одномерной орбиты и 1 трехмерной, а у $(C_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$ будет 2 цепочки, в которых 2 одномерных орбиты и 2 трехмерных орбиты. В общем случае доказательство аналогично.

Теорема 3 доказана. $\square$

3. Описание алгоритма и классификация особенностей малой сложности

3.1. Группа симметрий 2-атома

Чтобы описать особенности типа седло-фокус малой сложности, кратко напомним устройство группы симметрий для 2-атомов малой сложности (подробнее см. [3]).

Пусть $\mathcal{V}_m$ — произвольный седловой 2-атом. Обозначим через $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$ группу автоморфизмов 2-атома $\mathcal{V}_m$ с точностью до изотопии. В [3] показывается, что это конечная группа, и что она изоморфна группе автоморфимов f-графа 2-атома. В Таблице 1 указаны группы $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$ для атомов сложности $m = 1, 2, 3$. Список 2-атомов сложности 3 приведен в [3]. Эти атомы схематично изображены на рис. 5.

m	1	2				3									
атом $\mathcal{V}_m$	B	C_1	C_2	D_1	D_2	E_1	E_2	E_3	F_1	F_2	G_1	G_2	G_3	H_1	H_2
$\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	e	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$	S_3	e	e	$\mathbb{Z}_2$	e	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	e

Таблица 1: Группы симметрий седловых атомов сложности 1, 2, 3

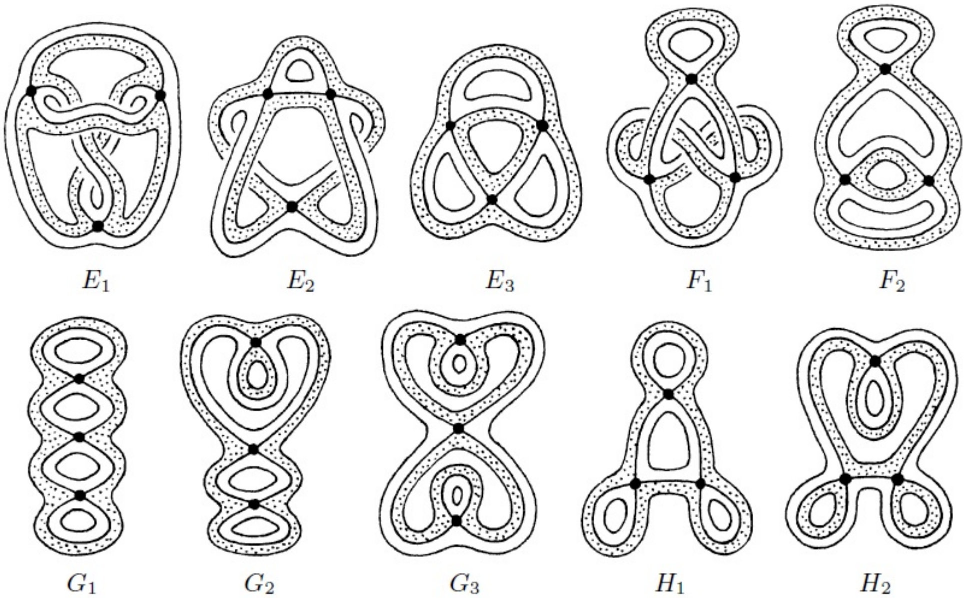


Рис. 5: Атомы сложности 3

Замечание 2. *У 2-атома C_2 группа симметрий $\mathrm{Sym}(C_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Если изобразить 2-атом C_2 симметрично, как на рис. 6, то нетривиальные элементы группы $\mathrm{Sym}(C_2)$ — это повороты на угол π вокруг осей x, y и z. У первых двух симметрий нет неподвижных точек ранга 0, последняя оставляет точки ранга 0 на месте.*

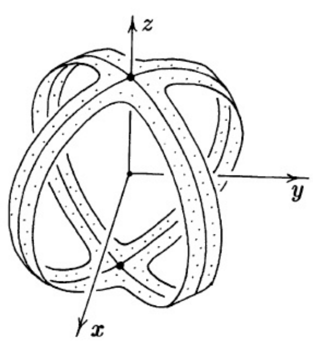


Рис. 6: Симметрии атома C_2

3.2. Алгоритм классификации особенностей типа седло-фокус

По теореме 2 для классификации особенностей типа седло-фокус достаточно рассматривать их простые минимальные модели. Все они имеют вид $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$. Заметим, что

- сложность особенности $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ равна md, где $n = kd$,

- порождающий элемент группы $\mathbb{Z}_k$ действует на $\mathcal{V}_m$ как элемент порядка k в группе симметрий $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$ атома $\mathcal{V}_m$,
- порядок группы симметрий $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$ не превосходит $2m$.

Основываясь на этих соображениях, получаем следующий алгоритм составления полного списка особенностей типа седло-фокус сложности p.

1. Перебираем всевозможные делители m числа p.
2. Для каждого седлового 2-атома $\mathcal{V}_m$ сложности m рассматриваем всевозможные k, для которых в группе $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$ содержится подгруппа $\mathbb{Z}_k$.
3. Рассматриваем всевозможные простые минимальные модели вида
$$\Big(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{\frac{kp}{m}}\Big)/\mathbb{Z}_k, \tag{1}$$
если они существуют.
4. Если получается несколько простых минимальных моделей одного и того же вида (1), то проверяется, являются ли они лиувиллево эквивалентными.

Покажем, что для особенности любой фиксированной сложности p алгоритм закончит работу за конечное число шагов. Очевидно, что количество чисел m, k и 2-атомов $\mathcal{V}_m$ (с точностью до лиувиллевой эквивалентности) конечно. Поэтому достаточно показать, что на шаге 3 достаточно рассматривать конечное особенностей. Если действия групп $\mathbb{Z}_k$ на (1) на любом из сомножителей сопряжены (автоморфизмом слоений Лиувилля), то получающиеся слоения лиувиллево эквивалентны.

Заметим, что у любой простой минимальной модели $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n/)\,\mathbb{Z}_k$ фактор $\mathcal{F}_n/\mathbb{Z}_k$ является невырожденной фокусной особенностью (т. е. типа $(0,0,1)$). При фиксированных k и n все такие особенности $\mathcal{F}_n/\mathbb{Z}_k$ лиувиллево эквивалентны (см., например, [8]). Поэтому, любые два действия группы $\mathbb{Z}_k$ на $\mathcal{F}_n$ в простых минимальных моделях можно перевести друг в друга лиувиллевой эквивалентностью $\mathcal{F}_n$ (при фиксированных k и n).

Остается доказать следующее утверждение.

Утверждение 11. *С точностью до лиувиллева автоморфизма 2-атома $\mathcal{V}_m$ существует лишь конечное число действий группы $\mathbb{Z}_k$ на 2-атоме $\mathcal{V}_m$.*

Утверждение 11 вытекает из следующего простого утверждения.

Утверждение 12. *Пусть ρ_1 и ρ_2 — два действия конечной группы G на 2-атоме $\mathcal{V}_m$, сохраняющие симплектическую структуру и функцию, задающую слоение Лиувилля (а следовательно, и само слоение Лиувилля). Тогда если ρ_1 и ρ_2 одинаково действуют на множестве одномерных ребер особого слоя 2-атома $\mathcal{V}_m$, то они совпадают с точностью до автоморфизма 2-атома $\mathcal{V}_m$. Иными словами, существует лиувиллева эквивалентность $f : \mathcal{V}_m \to \mathcal{V}_m$, такая что для любого $g \in G$ выполнено $\rho_2(g) = f^{-1} \circ \rho_1(g) \circ f$.*

По сути доказательство Утверждения 12 аналогично доказательству Утверждения 8 в [8].
Доказательство. [Доказательство Утверждения 12] Разрезая 2-атом на “крестики” и потом на более мелкие части, несложно построить гомеоморфные фундаментальные области для действий ρ_1 и ρ_2. Автоморфизм f отождествляет эти области, а потом продолжается до эквивариантного отображения. Утверждение 12 доказано. □

Замечание 3. *Не все отображения, одинаково действующие на множестве ребер, сопряжены. Например, сдвиги вдоль гамильтоновых векторных полей тождественно действуют на множестве ребер, но не сопряженны тождественному отображению. Мы использовали то, что группа G конечна. В этом случае не существует автоморфизма $\mathcal{V}_m$ конечного порядка, тождественного действующего на ребрах.*

Замечание 4. *В Утверждении 12 нельзя заменить послойный гомеоморфизм f на симплектоморфизм. У 2-атомов есть симплектические инварианты, и группа G обязана их сохранять.*

Замечание 5. *Число перестановок ребер конечно, поэтому Утверждение 11 можно обобщить. А именно, аналогично Утверждению 12 доказывается, что действия сопряжены, если они порождают одинаковые подгруппы в $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$. В частности, можно считать, что $G \subset \mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$.*

3.3. Особенности типа седло-фокус сложности 1, 2 и 3

Опишем теперь явно все невырожденные особенности типа седло-фокус (т. е. типа $(0,1,1)$) малой сложности.

Теорема 4. *Любая особенность типа седло-фокус сложности 1 лиувиллево эквивалентна ровно одному из следующих 2 почти прямых произведений:*

$$B \times \mathcal{F}_1, \qquad (B \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2. \tag{2}$$

Замечание 6. *Ранее обе эти особенности были описаны Л. М. Лерманом (см. [11]). Мы приведем другое доказательство этого утверждения.*

Доказательство. [Доказательство Теоремы 4] Применим описанный выше алгоритм.

1. Сложность $p = 1$. Единственный делитель p — это $m = 1$.
2. Единственная фокусная особенность сложности 1 — это 2-атом B. Группа симметрий $\mathrm{Sym}(B) = \mathbb{Z}_2$. Поэтому $k = 1$ или 2.
3. При $k = 1$ получаем прямое произведение $B \times \mathcal{F}_1$. Единственная простая минимальная модель при $k = 2$ — это $(B \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$.

По Теореме 3 простые минимальные модели с различными группами или сомножителями лиувиллево не эквивалентны. Мы получили требуемый список особенностей (2). Теорема 4 доказана. □

Теорема 5. *Любая особенность типа седло-фокус сложности 2 лиувиллево эквивалентна ровно одному из следующих 11 почти прямых произведений:*

$$\begin{gathered} B \times \mathcal{F}_2, \quad (B \times \mathcal{F}_4)/\mathbb{Z}_2, \quad D_1 \times \mathcal{F}_1, \quad (D_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad D_2 \times \mathcal{F}_1, \\ C_1 \times \mathcal{F}_1, \quad (C_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad (C_1 \times \mathcal{F}_4)/\mathbb{Z}_4, \quad C_2 \times \mathcal{F}_1, \\ \text{\textit{и два варианта}}\ (C_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2. \end{gathered}$$

Два варианта $(C_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$ отличаются количеством неподвижных точек ранга 0 у действия $\mathbb{Z}_2$ на C_2.

Замечание 7. *Иными словами, если представить 2-атом C_2 как на рис. 6, то в одном варианте почти прямого произведения $(C_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$ группа $\mathbb{Z}_2$ действует как поворот на угол π относительно оси z, а в другом — как повороты на угол π относительно оси x или y.*

Доказательство. [Доказательство Теоремы 5] Теорема 5 доказывается аналогично Теореме 4. Разберем только случай почти прямых произведений $(C_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$. Представим 2-атом C_2 как на рис. 6. Указанные в условии теоремы особенности лиувиллево не эквивалентны по Следствию 3. Особенности, соответствующие поворотам на угол π относительно осей x и y лиувиллево эквивалентны, потому что действия сопряжены в группе автоморфизмов 2-атома C_2. Теорема 5 доказана. □

Особенности типа седло-фокус сложности 3 классифицируются аналогично.

Теорема 6. *Любая особенность типа седло-фокус сложности* 3 *лиувиллево эквивалентна ровно одному из следующих* 21 *почти прямых произведений:*

$$B \times \mathcal{F}_3, \quad (B \times \mathcal{F}_6)/\mathbb{Z}_2, \quad E_1 \times \mathcal{F}_1, \quad (E_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad (E_1 \times \mathcal{F}_3)/\mathbb{Z}_3, \quad (E_1 \times \mathcal{F}_6)/\mathbb{Z}_6,$$
$$E_2 \times \mathcal{F}_1, \quad (E_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad E_3 \times \mathcal{F}_1, \quad (E_3 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad (E_3 \times \mathcal{F}_3)/\mathbb{Z}_3,$$
$$F_1 \times \mathcal{F}_1, \quad F_2 \times \mathcal{F}_1, \quad G_1 \times \mathcal{F}_1, \quad (G_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad G_2 \times \mathcal{F}_1,$$
$$G_3 \times \mathcal{F}_1, \quad (G_3 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad H_1 \times \mathcal{F}_1, \quad (H_1 \times \mathcal{F}_3)/\mathbb{Z}_3, \quad H_2 \times \mathcal{F}_1.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bolsinov A. V. Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant // Topological classification of integrable systems (Advances in Soviet Mathematics, Vol. 6) / ed. Fomenko A. T. — Providence: AMS, 1991 — P. 147–183.

2. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45, №2(272). С. 49–77

3. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

4. Bolsinov A. V., Oshemkov A. A. Singularities of integrable Hamiltonian systems // Topological Methods in the Theory of Integrable Systems / eds. Bolsinov A. V., Fomenko A. T., Oshemkov A. A. — Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2006 — P. 1–67.

5. Eliasson L. H. Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case // Comment. Math. Helv. 1990. V. 65, №1. P. 4–35.

6. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, №6. С. 1276–1307.

7. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. 1988. Т. 22, №4. С. 38–51.

8. Изосимов А. М. Классификация почти торических особенностей лагранжевых слоений // Матем. сб. 2011. Т. 202, №7. С. 95–116.

9. Lerman L. M., Umanskii Ya. L. Structure of the Poisson action of $\mathbb{R}^2$ on a four-dimensional symplectic manifold. I; II // Selecta Math. Sov. 1987. V. 6. P. 365–396; 1988. V. 7. P. 39–48.

10. Лерман Л. М., Уманский Я. Л. Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек. I; II; III // Матем. сб. 1992. Т. 183, №12. С. 141–176; 1993. Т. 184, №4. С. 103–138; 1995. Т. 186, №10. С. 89–102.

11. Lerman L. M. Isoenergetical Structure of Integrable Hamiltonian Systems in an Extended Neighborhood of a Simple Singular Point: Three Degrees of Freedom // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 2000. V. 200. P. 219–242.

12. Матвеев В. С. Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло // Матем. сб. 1996. Т. 187, №4. С. 29–58.

13. Матвеев В. С., Ошемков А. А. Алгоритмическая классификация инвариантных окрестностей точек типа седло-седло // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 1999. №2. С. 62–65.

14. Ошемков А. А. Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем (Тр. МИАН, Т. 205) — М.: Наука, 1994 — С. 131–140.

15. Ошемков А. А. Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2010. Т. 201, №8. С. 63–102.

16. Ошемков А. А. Седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. №2. С. 10–20.

17. Nguyen Tien Zung. Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold–Liouville with singularities // Compositio Math. 1996. V. 101. P. 179–215.

18. Nguyen Tien Zung. A note on focus-focus singularities // Diff. Geom. and Appl. 1997. V. 7. P. 123–130.

REFERENCES

1. Bolsinov, A. V. 1991, “Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant”, in Fomenko, A. T. (Ed.), Topological classification of integrable systems (Advances in Soviet Mathematics, Vol. 6), AMS, Providence, pp. 147–183.

2. Bolsinov, A. V., Matveev, S. V. & Fomenko, A. T. 1990, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small complexity”, *Russian Math. Surv.*, vol. 45, no. 2, pp. 59–94.

3. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, London, N.Y., Washington.

4. Bolsinov, A. V. & Oshemkov, A. A. 2006, “Singularities of integrable Hamiltonian systems” in Bolsinov, A. V., Fomenko, A. T. & Oshemkov, A. A. (Eds.), Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, pp. 1–67.

5. Eliasson, L. H. 1990, “Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case”, *Comment. Math. Helv.*, vol. 65, no. 1, pp. 4–35.

6. Fomenko, A. T. 1987, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 29, no. 3, pp. 629–658.

7. Fomenko, A. T. 1988, “Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, vol. 22, no. 4, pp. 286–296.

8. Izosimov, A. M. 2011, “Classification of almost toric singularities of Lagrangian foliations”, *Sb. Math.*, vol. 202, no. 7, pp. 1021–1042.

9. Lerman, L. M. & Umanskii, Ya. L. 1987; 1988, “Structure of the Poisson action of $\mathbb{R}^2$ on a four-dimensional symplectic manifold. I; II”, *Selecta Math. Sov.*, vol. 6, pp. 365–396; vol. 7, pp. 39–48.

10. Lerman, L. M. & Umanskii, Ya. L. 1994; 1994; 1995, “Classification of four-dimensional integrable Hamiltonian systems and Poisson actions of R^2 in extended neighborhoods of simple singular points. I; II; III”, *Sb. Math.*, vol. 77, no. 2, pp. 511–542; vol. 78, no. 2, pp. 479–506; vol. 186, no. 10, pp. 1477–1491.

11. Lerman, L. M. 2000, “Isoenergetical Structure of Integrable Hamiltonian Systems in an Extended Neighborhood of a Simple Singular Point: Three Degrees of Freedom”, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, vol. 200, pp. 219–242.

12. Matveev, V. S. 1996, “Integrable Hamiltonian system with two degrees of freedom. The topological structure of saturated neighbourhoods of points of focus-focus and saddle-saddle type”, *Sb. Math.*, vol. 187, no. 4, pp. 495–524.

13. Matveev, V. S. & Oshemkov, A. A. 1999, “Algorithmic classification of invariant neighborhoods for points of saddle-saddle type”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 54, no. 2, pp. 44–47.

14. Oshemkov, A. A. 1995, “Morse functions on two-dimensional surfaces. Encoding of singularities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 205, pp. 119–127.

15. Oshemkov, A. A. 2010, “Classification of hyperbolic singularities of rank zero of integrable Hamiltonian systems”, *Sb. Math.*, vol. 201, no. 8, pp. 1153–1191.

16. Oshemkov, A. A. 2011 “Saddle singularities of complexity 1 of integrable Hamiltonian systems”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 66, no. 2, pp. 60–69.

17. Nguyen Tien Zung. 1996, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold–Liouville with singularities”, *Compositio Math.*, vol. 101, pp. 179–215.

18. Nguyen Tien Zung. 1997, “A note on focus-focus singularities”, *Diff. Geom. and Appl.*, vol. 7, pp. 123–130.

Получено 1.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 514.7+514.8 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-244-265

Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения[1]

Е. А. Кудрявцева, А. А. Ошемков

Е. А. Кудрявцева — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
e-mail: eakudr@mech.math.msu.su
А. А. Ошемков — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: a@oshemkov.ru

Аннотация

На поверхности, гомеоморфной 2-мерной сфере, изучается натуральная механическая система с магнитным полем, инвариантная относительно S^1-действия. Для особых точек ранга 0 отображения момента получен критерий невырожденности, определен тип невырожденных особых точек (центр-центр и фокус-фокус), описаны бифуркации типичных вырожденных особых точек (интегрируемая гамильтонова бифуркация Хопфа двух типов). Для семейств особых окружностей ранга 1 отображения момента (состоящих из относительных положений равновесия системы) получено их параметрическое задание, доказан критерий невырожденности, определен тип невырожденных (эллиптические и гиперболические) и типичных вырожденных (параболические) особых окружностей. Получено параметрическое задание бифуркационной диаграммы отображения момента. Описаны геометрические свойства бифуркационной диаграммы и бифуркационного комплекса в случае, когда задающие систему функции находятся в общем положении. Определена топология неособых изоэнергетических 3-мерных многообразий, описана топология слоения Лиувилля на них с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности (в терминах атомов и молекул Фоменко). Описаны “расщепляющиеся” гиперболические особенности ранга 1, являющиеся топологически неустойчивыми бифуркациями слоения Лиувилля.

Ключевые слова: интегрируемая система, слоение Лиувилля, бифуркационная диаграмма, поверхность вращения, магнитное поле.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:
Е. А. Кудрявцева, А. А. Ошемков. Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 244–265.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 17-11-01303).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 514.7+514.8 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-244-265

Bifurcations of integrable mechanical systems with magnetic field on surfaces of revolution

E. A. Kudryavtseva, A. A. Oshemkov

E. A. Kudryavtseva — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: eakudr@mech.math.msu.su
A. A. Oshemkov — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: a@oshemkov.ru

Abstract

On a surface homeomorphic to 2-sphere, we study a natural mechanical system with a magnetic field that is invariant under the S^1-action. For singular points of rank 0 of the momentum mapping, a criterion for non-degeneracy is obtained, the type of non-degenerate singular points (center-center and focus-focus) is determined, bifurcations of typical degenerate singular points are described (integrable Hamiltonian Hopf bifurcation of two types). For families of singular circles of rank 1 of the momentum mapping (consisting of relative equilibriums of the system) their parametric representation is obtained, nondegeneracy criterion is proved, the type of nondegenerate (elliptic and hyperbolic) and typical degenerate (parabolic) singular circles is determined. The parametric representation of the bifurcation diagram of the momentum mapping is obtained. Geometric properties of the bifurcation diagram and the bifurcation complex are described in the case when the functions defining the system are in general position. The topology of nonsingular isoenergy 3-dimensional manifolds is determined, the topology of the Liouville foliation on them is described up to the rough Liouville equivalence (in terms of Fomenko's atoms and molecules). The "splitting" hyperbolic singularities of rank 1 are described, which are topologically unstable bifurcations of the Liouville foliation.

Keywords: integrable system, Liouville foliation, bifurcation diagram, surface of revolution, magnetic field.

Bibliography: 10 titles.

For citation:
E. A. Kudryavtseva, A. A. Oshemkov, 2020, "Bifurcations of integrable mechanical systems with magnetic field on surfaces of revolution" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 244–265.

Посвящается академику РАН
Анатолию Тимофеевичу Фоменко
в связи с его 75-летием

1. Введение

Натуральная механическая система с магнитным полем на римановом многообразии (M, g) — это гамильтонова система на T^*M, задаваемая функцией Гамильтона H и симплектической структурой ω, где

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j + V, \quad \omega = dp_i \wedge dq^i + \pi^* \beta,$$

q — локальные координаты на M, p — сопряженные им импульсы, $V = V(q)$ — гладкая функция на M (называемая *потенциалом*), $g^{ij} = g^{ij}(q)$ — матрица, обратная к матрице метрики g, β — гладкая (замкнутая) 2-форма на M (называемая *магнитным полем*), $\pi : T^*M \to M$ — естественная проекция. Такая система описывает движение заряженной частицы в электромагнитном поле на римановом многообразии (M, g), где электрическое поле задается потенциалом V, а магнитное поле — 2-формой β.

Пусть (M, g) является замкнутым двумерным многообразием вращения, т. е. метрика g инвариантна относительно эффективного гладкого S^1-действия на M. Тогда M гомеоморфно сфере, тору, проективной плоскости или бутылке Клейна. Далее в этой работе мы будем считать, что M гомеоморфно сфере.

Пусть $N, S \in M$ — неподвижные точки S^1-действия (северный и южный полюсы). Тогда в некоторых ("сферических") координатах r, φ на $M \setminus \{N, S\}$ метрика имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r) d\varphi^2, \quad (r, \varphi) \in (0, L) \times S^1, \tag{1}$$

где $f : (0, L) \to \mathbb{R}$ — некоторая положительная функция, и индуцированное S^1-действие на T^*M имеет вид $(p_r, p_\varphi, r, \varphi) \mapsto (p_r, p_\varphi, r, \varphi + t)$, $t \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Предположим, что потенциал и магнитное поле тоже S^1-инвариантны. Тогда на $M \setminus \{N, S\}$ они имеют вид

$$V = U(r), \quad \beta = B(r)\omega_0 = B(r) f(r) dr \wedge d\varphi = A'(r) dr \wedge d\varphi,$$

где $\omega_0 = f(r) dr \wedge d\varphi$ — ориентированная форма площади на M, а $U(r)$, $B(r)$, $A(r)$ — гладкие функции на $(0, L)$,

$$A(r) := \int B(r) f(r) dr.$$

В фазовых координатах $p_r, p_\varphi, r, \varphi$ на $T^*(M \setminus \{N, S\})$ имеем

$$H = \frac{p_r^2}{2} + F(r) \frac{p_\varphi^2}{2} + U(r), \quad \omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi + dA(r) \wedge d\varphi,$$

где $F(r) = 1/f^2(r)$.

Лемма 1. (a) [1, Предложение 4.6 (ii)] *Метрика* (1) *продолжается до римановой метрики класса C^∞ на M тогда и только тогда, когда $f(r)$ продолжается до C^∞-функции на $[0, L]$, удовлетворяющей условиям $f(0) = f(L) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'(L) = -1$, а также $f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(L) = 0$ для каждого целого $k \geqslant 1$.*

(b) *Функция $U(r)$ на цилиндре $M \setminus \{N, S\}$ продолжается до C^∞-функции на M тогда и только тогда, когда $U(r)$ продолжается до C^∞-функции на $[0, L]$, удовлетворяющей условиям $U^{(2k-1)}(0) = U^{(2k-1)}(L) = 0$ для каждого целого $k \geqslant 1$.*

(c) *2-Форма $dA(r) \wedge d\varphi$ на цилиндре $M \setminus \{N, S\}$ продолжается до 2-формы β класса C^∞ на M тогда и только тогда, когда $A(r)$ продолжается до C^∞-функции на $[0, L]$, удовлетворяющей условиям $A^{(2k-1)}(0) = A^{(2k-1)}(L) = 0$ для каждого целого $k \geqslant 1$.*

(d) *2-Форма β на M точна тогда и только тогда, когда $A(0) = A(L)$. Если $A(0) = A(L)$, то 1-форма $(A(r) - A(0))d\varphi$ на цилиндре $M \setminus \{N, S\}$ продолжается до 1-формы α (называемой* магнитным потенциалом*) класса C^∞ на M, удовлетворяющей условию $\beta = d\alpha$.* □

Далее будем считать, что функции $f(r)$, $U(r)$, $A(r)$ удовлетворяют условиям гладкости (a)–(c) из леммы 1. Индуцированное S^1-действие на T^*M является гамильтоновым, порожденным функцией

$$K := p_\varphi + A(r),$$

которая является гладкой на T^*M, будучи суммой двух гладких функций p_φ и $A(r)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $\omega = dp_r \wedge dr + dK \wedge d\varphi$, откуда $\omega(\cdot, \frac{\partial}{\partial\varphi}) = dK$, т. е. $\operatorname{sgrad} K = \frac{\partial}{\partial\varphi}$.

В работе изучается топология слоения Лиувилля рассматриваемой интегрируемой системы. В §2 описаны особые точки ранга 0 отображения момента, получен критерий их невырожденности, определен тип невырожденных точек (предложение 1), описаны бифуркации типичных вырожденных точек (замечание 8). В §3 изучаются особые окружности ранга 1: получено их параметрическое задание, критерий невырожденности, определены типы невырожденных и типичных вырожденных особых окружностей, дано параметрическое задание бифуркационной диаграммы отображения момента (предложение 2 (A)), описаны геометрические свойства бифуркационной диаграммы и бифуркационного комплекса, когда функции $F(r), U(r), A(r)$ находятся в общем положении (предложение 2 (B)). В §4 определена топология неособых изоэнергетических 3-мерных многообразий Q^3 системы (предложение 3), описана топология слоения Лиувилля на них с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности (§4.1), доказано несуществование циклов в молекуле (предложение 4), обнаружены "расщепляющиеся" гиперболические особенности ранга 1, известные как топологически неустойчивые бифуркации слоения Лиувилля (замечание 11). В §5 вычислены метки Фоменко–Цишанга на некоторых ребрах молекулы, нужные для вычисления инварианта Фоменко–Цишанга (меченой молекулы) — полного инварианта лиувиллевой эквивалентности систем на Q^3.

Случай натуральных механических систем без магнитного поля был изучен в [2], а системы на эллипсоиде вращения с точным магнитным полем — в [3] (случай нулевой постоянной площадей).

2. Особые точки ранга 0 отображения момента

Отображение $(H, K) : T^*M \to \mathbb{R}^2$ называется *отображением момента.*

Будем считать, что северный и южный полюсы N, S на M задаются значениями $r = 0$ и $r = L$ соответственно.

Предложение 1. *Точка $(p_0, q_0) \in T^*M$ является особой точкой ранга 0 отображения момента тогда и только тогда, когда она совпадает с точкой $(0, N)$ или $(0, S)$, где $N, S \in M$ — северный и южный полюсы. Особая точка $(0, N)$ (соответственно $(0, S)$) невырождена тогда и только тогда, когда $4U''(0) + A''(0)^2 \neq 0$ (соответственно $4U''(L) + A''(L)^2 \neq 0$). Если эта точка невырождена, то она имеет тип центр-центр или фокус-фокус в зависимости от того положительно или отрицательно выражение $4U''(0) + A''(0)^2$ (соответственно $4U''(L) + A''(L)^2$).*

Доказательство. *Шаг 1.* Докажем, что система на T^*M имеет ровно две особые точки ранга 0: точку $(p, q) = (0, N)$ и точку $(p, q) = (0, S)$.

Особые точки ранга 0 — это фазовые точки $(p_0, q_0) \in T^*M$, в которых оба векторных поля $\operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} K$ равны нулю, т. е. такие точки являются положениями равновесия для обеих гамильтоновых систем, заданных этими полями. Положения равновесия системы $v = \operatorname{sgrad} K$ — это неподвижные точки S^1-действия на T^*M.

Если точка q_0 не является полюсом, то в симплектических координатах p_r, K, r, φ дифференциал функции K в фазовой точке (p_0, q_0) имеет вид $dK = (0, 1, 0, 0) \neq 0$, т. е. такая фазовая точка не является неподвижной для S^1-действия.

Пусть теперь точка q_0 является полюсом, соответствующим $r = 0$, т. е. $q_0 = N$. Фиксируем произвольный импульс $p_0 \in T^*_{q_0}M$ в этой точке. Так как потенциалы $U(r)$ и $A(r)$ являются гладкими функциями на поверхности вращения M, то в малой окрестности точки $(p_0, N) \in T^*M$ над полюсом, где $r = 0$, имеем

$$U(r) = c_0 + \frac{c_1}{2}r^2 + o(r^2), \quad A(r) = a_0 + \frac{a_1}{2}r^2 + o(r^2), \quad r \to 0. \tag{2}$$

Рассмотрим в этой окрестности локальные координаты p_x, p_y, x, y, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ — координаты на M в окрестности полюса N, а p_x, p_y — сопряженные им импульсы. В этих координатах симплектическая структура в точке (p_0, N) (над полюсом) задается матрицей $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому в окрестности точки (p_0, N) (над полюсом) гамильтониан H и интеграл K принимают вид

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + c_0 + c_1\frac{x^2+y^2}{2} + o(x^2+y^2), \quad K = xp_y - yp_x + a_0 + a_1\frac{x^2+y^2}{2} + o(x^2+y^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} dH &= p_x dp_x + p_y dp_y + c_1(xdx + ydy) + O(x^2+y^2), \\ dK &= -ydp_x + xdp_y + p_y dx - p_x dy + a_1(xdx + ydy) + O(x^2+y^2). \end{aligned} \tag{3}$$

В частности, в любой точке вида (p_0, N) (над полюсом) имеем

$$dH = p_x dp_x + p_y dp_y, \quad dK = p_y dx - p_x dy. \tag{4}$$

Поэтому равенство $dK = 0$ в точке (p_0, N) равносильно системе равенств $p_x = p_y = 0$, т. е. равенству $p_0 = 0$.

Случай полюса S рассматривается аналогично. Получаем, что неподвижные точки S^1-действия на T^*M — это в точности точки $(0, N)$ и $(0, S)$. В обеих этих точках $dH = 0$ (в силу (4)), т. е. они являются точками ранга 0.

Шаг 2. Определим теперь тип найденных особых точек ранга 0. Приведем вычисления для точки $(0, N)$ (для точки $(0, S)$ все аналогично). Используя (3), вычисляем матрицы вторых дифференциалов в точке $(0, N)$:

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad d^2K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Затем вычисляем матрицы гамильтоновых операторов $A_H = \Omega^{-1}d^2H$ и $A_K = \Omega^{-1}d^2K$. Так как $\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & -1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, получаем

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & -c_1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что эти матрицы линейно независимы. Поэтому тип особой точки определяется собственными значениями матрицы

$$\lambda A_H + \mu A_K = \begin{pmatrix} 0 & a_1\lambda - \mu & -c_1\lambda & 0 \\ -a_1\lambda + \mu & 0 & 0 & -c_1\lambda \\ \lambda & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & \lambda & \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадраты собственных значений равны $\frac{1}{2}(-\mu^2 - 2c_1\lambda^2 - (a_1\lambda - \mu)^2 \pm (2\mu - a_1\lambda)\lambda\sqrt{a_1^2 + 4c_1})$.

Если $a_1 = 0$, то из случая с нулевым магнитным полем [2] получаем, что при $c_1 = 0$ особая точка ранга 0 вырождена, при $c_1 > 0$ невырождена и имеет тип центр-центр, а при $c_1 < 0$ невырождена и имеет тип фокус-фокус.

Если $c_1 = 0$ и $a_1 \neq 0$, то при $\lambda \neq 0$ и $\mu \notin \{0, a_1\lambda, \frac{a_1}{2}\lambda\}$ собственные значения равны $\pm i(a_1\lambda - \mu), \pm i\mu$, а значит, особая точка ранга 0 невырождена и имеет тип центр-центр.

Если $a_1^2 + 4c_1 > 0$ и $a_1c_1 \neq 0$, то при $\lambda = 1$ и $\mu = 0$ собственные значения равны $\pm i(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4c_1})/2$, а значит, особая точка ранга 0 невырождена и имеет тип центр-центр.

Если $a_1^2 + 4c_1 < 0$ и $a_1 \neq 0$, то при $\lambda = 1$ и $\mu = 0$ собственные значения равны $\pm(ia_1 \pm \sqrt{-a_1^2 - 4c_1})/2$, а значит, особая точка ранга 0 невырождена и имеет тип фокус-фокус.

В оставшемся случае ($c_1 = -a_1^2/4 < 0$) положим $\lambda = 1$ и $\mu = a_1/2$. Тогда все собственные значения оператора $\lambda A_H + \mu A_K$ равны 0. Но поскольку сам этот оператор отличен от нуля, то он не диагонализуем над полем $\mathbb{C}$ (т.е. не является полупростым и его жорданова форма содержит нетривиальную жорданову клетку). Значит, особая точка ранга 0 вырождена.

Заметим, что $a_1 = A''(0)$ и $c_1 = U''(0)$. Таким образом, тип невырожденной особой точки ранга 0 (в полюсе N) определяется знаком числа $4c_1 + a_1^2 = 4U''(0) + A''(0)^2$. $\square$

Замечание 8. *Изучим более подробно случай, когда точка ранга 0 вырождена ($c_1 = -a_1^2/4$). Будем считать, что функции $F(r), U(r), A(r)$ гладко зависят от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$, причем $\lambda = c_1 + \frac{a_1^2}{4}$.*

Так как функции $f(r)$ и $A(r)$ удовлетворяют условиям из леммы 1 (a)–(c), то они продолжаются до $2L$-периодических C^∞-функций на всей прямой, где $f(r)$ нечетная, а $A(r)$ четная. Далее под $f(r)$ и $A(r)$ будем понимать такие $2L$-периодические функции.

Проведем рассуждение для точки $(0,N)$ ранга 0 (для точки $(0,S)$ рассуждение аналогично). Представим функцию $A(r)$ в виде $A(r) = a_0 + r^2A_1(r)$. Ясно, что функция $A_1(r)$ является гладкой и четной в малой окрестности точки $r = 0$ на $\mathbb{R}$. Нелинейная замена локальных координат

$$\tilde{p}_x = p_x - A_1(r)y, \quad \tilde{p}_y = p_y + A_1(r)x$$

является регулярной и приводит симплектическую структуру к каноническому виду:

$$\omega = dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy + \frac{A'(r)}{r} dx \wedge dy = d\tilde{p}_x \wedge dx + d\tilde{p}_y \wedge dy.$$

Эта замена приводит 2π-периодический первый интеграл $\hat{K} := K - a_0$ к виду

$$\hat{K} = K - a_0 = xp_y - yp_x + A(r) - a_0 = x\tilde{p}_y - y\tilde{p}_x + A(r) - a_0 - r^2A_1(r) = x\tilde{p}_y - y\tilde{p}_x,$$

а функцию Гамильтона H, с учетом соотношений $p_r = (xp_x + yp_y)/r$, $p_\varphi = xp_y - yp_x$ и $p_r^2 + p_\varphi^2/r^2 = p_x^2 + p_y^2$, к виду

$$H = \frac{p_r^2}{2} + F(r)\frac{p_\varphi^2}{2} + U(r) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} + F_1(r)\frac{p_\varphi^2}{2} + U(r) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + F_1(r)\frac{(xp_y - yp_x)^2}{2} + U(r) =$$
$$= \frac{(\tilde{p}_x + A_1(r)y)^2 + (\tilde{p}_y - A_1(r)x)^2}{2} + F_1(r)\frac{(\hat{K} - r^2A_1(r))^2}{2} + U(r) =: \frac{\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2}{2} + \hat{U}_{\hat{K}}(r^2).$$

Здесь $F(r) = \frac{1}{r^2} + F_1(r)$, т.е. $f(r) = \frac{1}{\sqrt{F(r)}} = \frac{r}{\sqrt{1 + r^2F_1(r)}}$, откуда функция $F_1(r)$ гладкая и четная в малой окрестности точки $r = 0$, семейство функций

$$\hat{U}_k(\rho) := U(\rho^{1/2}) + F_1(\rho^{1/2})\frac{k^2}{2} - (1 + \rho F_1(\rho^{1/2}))A_1(\rho^{1/2})k + (1 + \rho F_1(\rho^{1/2}))\frac{A_1(\rho^{1/2})^2}{2}\rho$$

с параметром $k\in\mathbb{R}$ является гладким в окрестности точки $\rho=0$. Имеем

$$\tilde H := H-\hat U_{\hat K}(0)=\frac{\tilde p_x^2+\tilde p_y^2}{2}+\hat U'_{\hat K}(0)r^2+\frac12\hat U''_{\hat K}(0)r^4+o(r^4), \tag{5}$$

где

$$\hat U_{\hat K}(0)=c_0-A_1(0)\hat K+F_1(0)\frac{\hat K^2}{2}=U(0)-\frac12A''(0)\hat K-\frac16f'''(0)\hat K^2,$$
$$\hat U'_0(0)=\frac{c_1}{2}+\frac{A_1(0)^2}{2}=\frac12\Big(U''(0)+\frac14A''(0)^2\Big)=\frac{\lambda}{2},$$
$$\hat U''_0(0)=\frac{U''''(0)}{12}+F_1(0)A_1(0)^2+A_1(0)A_1''(0)=\frac1{12}\Big(U''''(0)-f'''(0)A''(0)^2+\frac12A''(0)A''''(0)\Big).$$

Предположим, что при $\lambda=0$ и $\hat K=0$ в ряде Тейлора (5) функции $\tilde H$ коэффициент при r^4 отличен от нуля, т. е. $\hat U''_0|_{\lambda=0}(0)\ne0$. Тогда при прохождении параметра $\lambda:=c_1+\frac{a_1^2}{4}$ через 0 происходит “интегрируемая гамильтонова бифуркация Хопфа”: при $\lambda<0$ точка ранга 0 имеет тип фокус-фокус, при $\lambda=0$ она вырождается, а при $\lambda>0$ имеет тип центр-центр. Если при $\lambda=0$ на совместном множестве уровня $\{H=U(0),K=A(0)\}$ нет других особых точек отображения момента, то при переходе параметра λ через 0 (т. е. при прохождении c_1 через значение $-a_1^2/4$) бифуркационная диаграмма в окрестности точки $(U(0),A(0))$ преобразуется как на рис. 1, в зависимости от знака $\eta=\operatorname{sgn}\hat U''_0|_{\lambda=0}(0)=\pm1$. Такая бифуркация типична, т. е. устойчива относительно малых интегрируемых возмущений 1-параметрического семейства интегрируемых систем [4].

Рис. 1: Бифуркационная диаграмма интегрируемой бифуркации Хопфа: (a) $\eta=+1$, (b) $\eta=-1$.

3. Особые точки ранга 1 и бифуркационная диаграмма отображения момента

Множество критических значений отображения момента называется *бифуркационной диаграммой* этого отображения. Рассмотрим *слоение Лиувилля* на T^*M, ассоциированное с данной интегрируемой системой, слоями которого являются интегральные подмножества (т. е. связные компоненты совместных множеств уровня функций H и K). База слоения Лиувилля называется *бифуркационным комплексом*. Этот комплекс был введен А.Т. Фоменко (клеточный комплекс $\mathcal K$ из [6, §5]). В работе [5] аналогичный объект был назван *разверткой образа отображения момента*; он является (разветвленным) накрытием *образа отображения момента* $F(M)$ [5]. Как отметил В.И. Арнольд, было бы интересно изучить особенности этого комплекса $\mathcal K$ [6].

В данном разделе мы покажем, что (при условии $F'(r)^2+A'(r)^2>0$) бифуркационная диаграмма состоит из пар дуг γ_i^+ и γ_i^- таких, что каждая дуга γ_i^η (для $\eta=\pm1$) параметризуется в виде $(h_\eta(r), k_\eta(r))$, где параметр r на дуге γ_i^η пробегает подмножество $I_i^\eta \subset (0, L)$ следующего вида. Подмножество I_i — это максимальный по включению промежуток на интервале $(0, L)$, заданный неравенством $D(r) \geqslant 0$, а подмножество $I_i^\eta \subset I_i$ получается из I_i выкидыванием всех "экваторов" (т.е. таких точек $\hat{r}_j \in (0, L)$, что $F'(\hat{r}_j) = 0$), в которых $\eta A'(r) > 0$:

$$I_i^\eta := I_i \setminus \{r \in (0, L) \mid F'(r) = 0,\ \eta A'(r) > 0\}, \quad \eta \in \{\pm 1\}.$$

Здесь

$$D(r) = (A'(r)F(r))^2 - 2F'(r)U'(r), \tag{6}$$

$$k_\eta(r) = \begin{cases} A(r) + \frac{A'(r)F(r) + \eta\sqrt{D(r)}}{F'(r)}, & F'(r) \neq 0, \\ A(r) + \frac{U'(r)}{A'(r)F(r)}, & F'(r) = 0, \end{cases} \qquad r \in I^\eta,$$

$$h_\eta(r) = U(r) + (k_\eta(r) - A(r))^2 \frac{F(r)}{2} = U(r) - F(r)\frac{U'(r) - (k_\eta(r) - A(r))A'(r)F(r)}{F'(r)}. \tag{7}$$

Заметим, что $k_\eta(r) \to \infty$ и $k_{-\eta}(r) \to k_{-\eta}(\hat{r}_j)$, когда r стремится к экватору $\hat{r}_j$ и $\eta A'(\hat{r}_j) > 0$. Эти же свойства верны и для функций $h_\pm(r)$ ввиду (7). Функцию

$$U_k(r) := U(r) + F(r)\frac{(k - A(r))^2}{2} \tag{8}$$

назовем *эффективным потенциалом*, где $k \in \mathbb{R}$ — параметр.

Определение 1. *Будем говорить, что функции $F(r), U(r), A(r)$ находятся* в общем положении, *если*

(i) $(4U''(r) + A''(r)^2)^2 + (2U''''(r) - 2f'''(r)A''(r)^2 + (r)A''''(r))^2 > 0$ *в каждом полюсе $r \in \{0, L\}$ (т. е. точки ранга 0 невырождены или являются типичными вырожденными, см. предложение 1 и замечание 1),*

(ii) *функция $D(r)$ на интервале $(0, L)$ имеет только простые нули r_i,*

(iii) *все критические точки функций $F(r), U(r), A(r)$ на каждом промежутке I_i попарно различны и отличны от концов r_{2i-1}, r_{2i} этого промежутка.*

Если дополнительно

(iv) $U_k'(r)^2 + U_k''(r)^2 + U_k'''(r)^2 > 0$ *и* $U_k'(r)^2 + U_k''(r)^2 + D(r)^2 > 0$, *см. (8) и (6),*

то будем говорить, что функции $F(r), U(r), A(r)$ находятся в общем положении в сильном смысле.

Предложение 2. *Пусть $F'(r)^2 + A'(r)^2 > 0$ на $(0, L)$. Тогда:*

(A) *Относительные положения равновесия системы (т. е. точки ранга 1 отображения момента) образуют 1-параметрическое семейство окружностей $\mathcal{O}_r^\eta \subset T^*(M \setminus \{N, S\})$, имеющих в координатах (p_r, K, r, φ) вид*

$$\mathcal{O}_r^\eta := \{(0, k_\eta(r), r, \varphi) \mid \varphi \in S^1\}, \quad r \in I^\eta, \quad \eta = \pm 1,$$

где

$$I^\eta := I \setminus \{r \in (0, L) \mid F'(r) = 0,\ \eta A'(r) > 0\},$$

$I \subset (0, L)$ — подмножество, задаваемое неравенством $D(r) \geqslant 0$, см. (6), (7).

Значение отображения момента $(H, K) : T^*M \to \mathbb{R}^2$ на окружности $\mathcal{O}_r^\eta$ равно

$$\gamma^\eta(r) := (h_\eta(r), k_\eta(r)),$$

см. (7)*. В частности, бифуркационная диаграмма отображения момента состоит из двух точек* $(U(0),A(0))$ *и* $(U(L),A(L))$ *и кривых* $\gamma^\eta=\gamma^\eta(r)$, $r\in I^\eta$, $\eta=\pm1$.

Окружность $\mathcal{O}_r^\eta$ *удовлетворяет соотношению* $U'_{k_\eta(r)}(r)=0$*; она невырождена тогда и только тогда, когда* $U''_{k_\eta(r)}(r)\neq0$, *см.* (8)*. Если окружность невырождена, то она имеет эллиптический или гиперболический тип в зависимости от знака* $\operatorname{sgn}U''_{k_\eta(r)}(r)=+1$ *или* -1*. Если окружность вырождена и* $U'''_{k_\eta(r)}(r)\neq0$ *и* $D(r)\neq0$*, то она имеет параболический тип [7, Definition 2.1].*

(B) *Пусть функции* $F(r),U(r),A(r)$ *находятся в общем положении (определение 1). Тогда подмножество* $I\subset(0,L)$ *состоит из конечного числа попарно непересекающихся отрезков* $I_i=[r_{2i-1},r_{2i}]$, $1\leqslant i\leqslant N$, *и, возможно, непересекающихся с ними "граничных" полуинтервалов* $I_0=(0,r_0]$ *и* $I_{N+1}=[r_{2N+1},L)$ *или интервала* $I_0=I_1=(0,L)$ *при* $N=0$*. Здесь "граничный" полуинтервал* I_0 *с концом в полюсе* $r=0$ *(соответственно* I_{N+1} *с концом в полюсе* $r=L$*) присутствует тогда и только тогда, когда отвечающее этому полюсу число в предложении 1 положительно, т. е. когда соответствующая точка ранга* 0 *имеет тип центр-центр. Каждая дуга* $\gamma_i^\eta=\gamma^\eta|_{[r_{2i-1},r_{2i}]}$ *бифуркационной диаграммы обладает следующими свойствами:*

(a) *при стремлении параметра* r *к экватору* $\hat r_j$ *(т. е. к критической точке функции* $F(r)$*) в случае* $\eta A'(\hat r_j)>0$ *дуга уходит на бесконечность обеими координатами так, что* $k_\eta(r)\operatorname{sgn}(F'(r))\to\eta\infty$ *и* $h_\eta(r)\sim\frac{F(\hat r_j)}{2}k_\eta(r)^2$ *при* $r\to\hat r_j$ *(ср. [3, Corollary 3 (2)]),*

(b) *гладкость функций* $h_\eta(r)$ *и* $k_\eta(r)$ *может нарушаться только в точках* r_i *и точках* $\hat r_j$ *из* (a)*, причем в малой окрестности любой точки* r_i *(т. е. общего конца дуг из* γ^+ *и* γ^-*) эти функции гладко зависят от параметра* $t_i=\eta\sqrt{|r-r_i|}$ *и имеют ненулевые производные по этому параметру в этой точке,*

(c) *для любого* $r\in(r_{2i-1},r_{2i})$ *вектор скорости дуги* $\gamma_i^\eta(r)$ *имеет вид*

$$(h'_\eta(r),k'_\eta(r))=-\eta\frac{U''_{k_\eta(r)}(r)}{\sqrt{D(r)}}(F(r)(k_\eta(r)-A(r)),1);$$

в частности, вырожденность окружности $\mathcal{O}_r^\eta$ *при таком* r *равносильна равенству нулю вектора скорости дуги (т. е. тому, что* r *является критической точкой функции* $k_\eta(r)$*), а параболичность окружности* $\mathcal{O}_r^\eta$ *равносильна тому, что* r *является морсовской критической точкой функции* $k_\eta(r)$*; если выполнено условие* (iv) *определения 1, то отношение* $h'_\eta(r)/k'_\eta(r)=F(r)(k_\eta(r)-A(r))$*, т. е. котангенс угла наклона касательной к дуге, имеет постоянный знак на любом интервале, в котором* $U'(r)\neq0$ *или* $\eta A'(r)>0$*; а при переходе параметра* r *через любую морсовскую критическую точку* $\check r_\ell$ *потенциала* $U(r)$ *такую, что* $\eta A'(\check r_\ell)<0$*, это отношение меняет знак (т. е. дуга касается прямой* $\{h=U(\check r_\ell)\}$ *в точке* $(U(\check r_\ell),A(\check r_\ell))$ *и малая окрестность этой точки в дуге лежит по одну сторону от касательной),*

(d) *окружность* $\mathcal{O}_{r^\circ}^\eta$ *состоит из положений равновесия системы (а потому содержащее ее изоэнергетическое* 3*-мерное многообразие является особым) тогда и только тогда, когда* r° *является критической точкой потенциала* $U(r)$ *и* $\eta A'(r^\circ)<0$*; это условие равносильно тому, что* $(h_\eta(r^\circ),k_\eta(r^\circ))=(U(r^\circ),A(r^\circ))$*, а при выполнении условия* (iv) *определения 1 также тому, что дуга* $(h_\eta(r),k_\eta(r))$ *касается прямой* $\{h=h_\eta(r^\circ)\}$ *во внутренней точке* $(h_\eta(r^\circ),k_\eta(r^\circ))$ *промежутка* I_i^η,

(e) *дуга* γ_i^η *имеет невырожденную точку возврата (т. е. точку возврата типа "полукубическая парабола") при прохождении параметра* $r\in(r_{2i-1},r_{2i})$ *через любую морсовскую критическую точку функции* $k_\eta(r)$,

(f) *если функции* $F(r),U(r),A(r)$ *находятся в общем положении в сильном смысле (определение 1), то все критические точки функции* $k_\eta(r)$ *на интервале* (r_{2i-1},r_{2i}) *являются морсовскими,* $k_\eta(r)$ *имеет лишь конечное число критических точек и любая поддуга в* $\gamma_i^+\cup\gamma_i^-$, *не* *содержащая точек из* (e) *и* (a) *(т. е. точек возврата и точек “ухода дуги на бесконечность”), является графиком* $\Gamma_{\hat{h}} = \{(\hat{h}(k), k)\}$ *некоторой морсовской функции* $\hat{h} = \hat{h}(k)$*; любая окружность* $\mathcal{O}_r^\eta$*, где* $r \in I_i^\eta$ *и* $k'_\eta(r) \neq 0$*, невырождена и имеет постоянный тип (эллиптический или гиперболический); проекция такой эллиптической (соответственно гиперболической) поддуги на ось* Ok *строго убывает (соответственно возрастает) относительно ориентации поддуги в направлении роста локального параметра* ηr*; в малой окрестности любой точки возврата* $r = r^\circ$ *дуги* γ_i^η *выполнено* $\hat{h}_{\rm ell}(k) < \hat{h}_{\rm hyp}(k)$*, где* $\hat{h}_{\rm ell}(k)$ *и* $\hat{h}_{\rm hyp}(k)$ *— морсовские функции на полуинтервале* $(k_\eta(r^\circ), k_\eta(r^\circ) + \varepsilon)$ *или* $(k_\eta(r^\circ) - \varepsilon, k_\eta(r^\circ))$ *(в зависимости от знака* $-\eta \operatorname{sgn} U'''_{k_\eta(r^\circ)}(r^\circ) = +1$ *или* -1*), задающие эллиптическую и гиперболическую поддуги, имеющие общий конец в точке возврата* $r = r^\circ$*; пересечение малой регулярной окрестности любой точки* $(h^\circ, k^\circ) \in \gamma_i^\eta$ *в бифуркационном комплексе с множеством* $\{h > h^\circ, k = k^\circ\}$ *связно.*

В частности, проекция на ось Ok *любой поддуги из* (f) *(т. е. не содержащей точек возврата) строго монотонна, однако проекция этой поддуги на ось* Oh *не всегда строго монотонна: соответствующая морсовская функция* $\hat{h}(k)$ *имеет локальные экстремумы в точности в точках* $k_\eta(\check{r}_\ell)$ *из* (c)*.*

Доказательство. Докажем (A). Предположим, что ранг отображения момента в точке $(p^\circ, q^\circ) \in T^*M$ равен 1.

Шаг 1. Покажем, что точка $q^\circ \in M$ не является полюсом. Согласно формуле (4), в точке (p°, N) (над полюсом) пропорциональность ковекторов dH и dK равносильна системе равенств $p_x^\circ = p_y^\circ = 0$, т. е. равенству $p^\circ = 0$. Значит, точка (p°, N) (над полюсом) является особой точкой отображения момента (ранга 0 или 1) тогда и только тогда, когда $p^\circ = 0$. Но по предложению 1 в точке $(0, N)$ ранг отображения момента равен 0, а потому не может быть равен 1.

Шаг 2. В симплектических координатах $(p, q) = (p_r, K, r, \varphi)$ выполнено $dK = (0, 1, 0, 0)$ и

$$H = \frac{p_r^2}{2} + U_K(r), \tag{9}$$

где $U_K(r)$ — эффективный потенциал (8). Имеем

$$dH = (p_r, F(r)(K - A(r)), U'_K(r), 0). \tag{10}$$

Но равенство ранга единице в точке $(p^\circ, q^\circ) = (p_r^\circ, k^\circ, r^\circ, \varphi^\circ)$ равносильно пропорциональности ковекторов dK и dH в этой точке, т. е. равносильно системе

$$p_r^\circ = 0, \quad U'_{k^\circ}(r^\circ),$$

где штрихом обозначена частная производная по r. Получаем $(p^\circ, q^\circ) = (0, k^\circ, r^\circ, \varphi^\circ)$, где (k°, r°) является решением уравнения

$$U'_{k^\circ}(r^\circ) = 0.$$

Запишем это уравнение:

$$F'(r^\circ)\frac{(k^\circ - A(r^\circ))^2}{2} - F(r^\circ)(k^\circ - A(r^\circ))A'(r^\circ) + U'(r^\circ) = 0. \tag{11}$$

С учетом формулы (10) ковектор dH в нашей точке $(0, k^\circ, r^\circ, \varphi^\circ)$ ранга 1 имеет вид

$$dH = (0, F(r^\circ)(k^\circ - A(r^\circ)), 0, 0) = F(r^\circ)(k^\circ - A(r^\circ))dK. \tag{12}$$

Шаг 3. Обозначим

$$h^\circ := H(p^\circ, q^\circ) = U_{k^\circ}(r^\circ).$$

Тогда образом нашей точки ранга 1 при отображении момента $(H,K):T^*M\to\mathbb{R}^2$ является точка (h°,k°). Очевидно,

$$h^\circ=F(r^\circ)\frac{(k^\circ-A(r^\circ))^2}{2}+U(r^\circ)\geqslant U(r^\circ). \tag{13}$$

Найдем явные выражения для точки (h°,k°) через r°. Уравнение (11) переписывается в виде квадратного или линейного уравнения на величину $z:=k^\circ-A(r^\circ)$:

$$F'(r^\circ)\frac{z^2}{2}-A'(r^\circ)F(r^\circ)z+U'(r^\circ)=0. \tag{14}$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $F'(r^\circ)=0$ (т. е. r° — "экватор"), поэтому $A'(r^\circ)\neq0$. Для линейного уравнения (14) находим решение $z=\frac{U'(r^\circ)}{A'(r^\circ)F(r^\circ)}$, откуда

$$k^\circ=A(r^\circ)+\frac{U'(r^\circ)}{A'(r^\circ)F(r^\circ)},\quad h^\circ=U(r^\circ)+F(r^\circ)\frac{(k^\circ-A(r^\circ))^2}{2}.$$

Случай 2: $F'(r^\circ)\neq0$. Дискриминант квадратного уравнения (14) равен $D(r^\circ)$ (см. (6)). Разрешимость уравнения эквивалентна неравенству $D(r^\circ)\geqslant0$ (т. е. $r_0\in I$), а решение имеет вид $z=\frac{A'(r^\circ)F(r^\circ)+\eta\sqrt{D(r^\circ)}}{F'(r^\circ)}$, где $\eta=\pm1$. Это сразу дает требуемое описание семейства точек ранга 1. Подставляя найденное решение в выражения

$$k^\circ=A(r^\circ)+z,\quad h^\circ=U(r^\circ)+F(r^\circ)\frac{z^2}{2},$$

получаем требуемое параметрическое представление дуг бифуркационной диаграммы в (A), а также описание подмножества $I\subset(0,L)$ из (A).

Шаг 4. Пусть окружность $\mathcal{O}=\{(0,k^\circ,r^\circ)\}\times S^1$ состоит из относительных положений равновесия, т. е. r° является критической точкой эффективного потенциала $U_{k^\circ}(r)$. По доказанному $\mathcal{O}=\mathcal{O}^\eta_{r^\circ}$ для некоторого знака $\eta=\pm1$. Изучим условие невырожденности окружности $\mathcal{O}$.

Из формулы (9) для H следует, что $\mathcal{O}$ невырождена тогда и только тогда, когда $U''_{k^\circ}(r^\circ)\neq0$, т. е. когда точка r° является невырожденной точкой локального минимума или максимума функции $U_{k^\circ}(r)$. В первом случае имеем $U''_{k^\circ}(r^\circ)>0$ и окружность $\mathcal{O}$ является эллиптической, а во втором — $U''_{k^\circ}(r^\circ)<0$ и окружность $\mathcal{O}$ является гиперболической.

Предположим, что $\mathcal{O}$ вырождена, т. е. $U''_{k^\circ}(r^\circ)=0$. Предположим также, что $U'''_{k^\circ}(r^\circ)\neq0$ и $D(r^\circ)\neq0$ (а значит, $D(r^\circ)>0$ по шагу 3). Рассмотрим семейство функций $U_k(r)$ с параметром $k\in(k^\circ-\varepsilon,k^\circ+\varepsilon)$. Нас интересует семейство критических точек (k,r) этих функций — семейство решений уравнения $U'_k(r)=0$, и множество критических значений $(U_k(r),k)$ (локальная бифуркационная диаграмма). С учетом неравенств $U'''_{k^\circ}(r^\circ)\neq0$ и

$$\frac{\partial}{\partial k}U'_{k^\circ}(r^\circ)=F'(r^\circ)(k^\circ-A(r^\circ))-F(r^\circ)A'(r^\circ)=\eta\sqrt{D(r^\circ)}\neq0 \tag{15}$$

получаем, что окружность $\mathcal{O}$ является параболической [7, Definition 2.1]. Поэтому соответствующее 1-параметрическое семейство окружностей $\mathcal{O}^\eta_r$ является гладким в малой окрестности окружности $\mathcal{O}=\mathcal{O}^\eta_{r^\circ}$ и разбивается ею на семейство эллиптических окружностей, отвечающих значениям параметра r по одну сторону от r°, и семейство гиперболических окружностей, отвечающих значениям параметра r по другую сторону от r°, и локальная бифуркационная диаграмма имеет невырожденную точку возврата при $r=r^\circ$. Действительно: в силу результатов теории особенностей существует локальная регулярная замена координат $r\to\tilde r=\tilde r(r,k)$, $k\to\tilde k=\tilde k(k)$ со свойствами $\tilde r(r^\circ,k^\circ)=0$ и $\tilde k(k^\circ)=0$, приводящая наше семейство функций к нормальной форме $U_k(r) = \tilde r^3 + \tilde k \tilde r + a(\tilde k)$, где $a(\tilde k)$ — некоторая гладкая функция с $a(0) = U_{k^\circ}(r^\circ)$ (см. [8] или [7, Proposition 2.4, Lemma 2.5]). Пусть $\tilde r \to r = r(\tilde r, \tilde k)$, $\tilde k \to k = k(\tilde k)$ — обратная замена. Тогда уравнение $U_k'(r) = 0$ переписывается в виде $3\tilde r^2 + \tilde k = 0$, и локальная бифуркационная диаграмма задается параметрически в виде $(-2\tilde r^3 + a(-3\tilde r^2), k(-3\tilde r^2))$, где $\tilde r$ пробегает малую окрестность нуля. Значит, она является полукубической параболой с вершиной (острием = каспом) в точке $(U_{k^\circ}(r^\circ), k^\circ)$.

Шаг 5. Докажем (B). Пусть функции $F(r), U(r), A(r)$ находятся в общем положении (определение 1). Конечность числа отрезков I_i в $I \subset (0, L)$ следует из разложения

$$D(r) = (A'(r)F(r))^2 - 2F'(r)U'(r) =$$
$$= (4U''(0) + A''(0)^2)\frac{1}{r^2} + \frac{2}{3}\Big(U''''(0) - f'''(0)A''(0)^2 + \frac{1}{2}A''(0)A''''(0)\Big) + O(r^2)$$

при $r \to 0$ и аналогичного разложения при $r \to L$. Действительно, первые два коэффициента в этом разложении не могут одновременно обращаться в ноль в силу условия общности положения, а значит функция $D(r)$ отделена от нуля на каждом конце интервала $(0, L)$.

Интересно отметить, что указанные два коэффициента совпадают (с точностью до положительных множителей) с первыми двумя коэффициентами в ряде Тейлора (5) первого интеграла $\tilde H$ в соответствующей точке ранга 0. В частности, если первый коэффициент отличен от нуля, то его знак отвечает за тип невырожденной точки ранга 0, согласно предложению 1. Если же первый коэффициент равен нулю, а второй отличен от нуля, то знак второго коэффициента отвечает за тип бифуркации Хопфа для любого 1-параметрического семейства систем, задаваемого функциями $F_\lambda(r)$, $U_\lambda(r)$, $A_\lambda(r)$ такими, что $F_0(r) = F(r)$, $U_0(r) = U(r)$, $A_0(r) = A(r)$ и $\lambda = U_\lambda''(r^\circ) + \frac{1}{4}A_\lambda''(r^\circ)^2$ при $r^\circ = 0$ или $r^\circ = L$ (см. замечание 8).

Осталось доказать свойства (a)–(f) из (B).

(a) Опишем поведение бифуркационных дуг, называемое “уходом на бесконечность”. Пусть $F'(r^\circ) = 0$ (т. е. r° — экватор) и $\eta A'(r^\circ) > 0$. Покажем, что $h_\eta(r)$ и $k_\eta(r)$ стремятся к бесконечности при $r \to r^\circ$. Ввиду гладкости функций $A(r)$ и $U(r)$ это свойство равносильно тому, что z (из шага 3) стремится к бесконечности при $r \to r^\circ$. Так как $\eta A'(r^\circ) > 0$, то при $r \to r^\circ$ числитель в z принимает вид

$$A'(r)F(r) + \eta\sqrt{D(r)} = A'(r)F(r)\left(1 + \sqrt{1 - 2\frac{F'(r)U'(r)}{(A'(r)F(r))^2}}\right) =$$
$$= A'(r)F(r)\left[2 - \frac{F'(r)U'(r)}{(A'(r)F(r))^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{F'(r)U'(r)}{(A'(r)F(r))^2}\right)^2 + \dots\right] =$$
$$= 2A'(r)F(r) - \frac{F'(r)U'(r)}{A'(r)F(r)} - \frac{1}{8}\frac{(F'(r)U'(r))^2}{(A'(r)F(r))^3} + \dots .$$

Отсюда

$$z = 2\frac{A'(r)F(r)}{F'(r)} - \frac{U'(r)}{A'(r)F(r)} - \frac{1}{8}\frac{F'(r)U'(r)^2}{(A'(r)F(r))^3} + \dots . \tag{16}$$

Так как в первом слагаемом $F'(r)$ стоит в знаменателе, а в остальных — только в числителе, то полученное выражение стремится к бесконечности при $r \to r^\circ$, что и требовалось.

(b) Изучим вопрос гладкости функций $h_\eta(r)$ и $k_\eta(r)$ в точке $r^\circ \in I^\eta$. Ввиду гладкости функций $A(r)$ и $U(r)$ этот вопрос равносилен гладкости зависимости решения z (из шага 3) от параметра r при $r = r^\circ$.

Если $F'(r^\circ) \neq 0$ (т. е. r° не является экватором) и $D(r^\circ) > 0$, то из явных формул (7) для функций $h_\eta(r)$ и $k_\eta(r)$ получаем их гладкость в точке r°.

Если $F'(r^\circ)=0$, то по условию $\eta A'(\hat r_j)<0$. Поэтому при $r\to r^\circ$ числитель в z принимает вид

$$A'(r)F(r)+\eta\sqrt{D(r)}=A'(r)F(r)\left(1-\sqrt{1-2\frac{F'(r)U'(r)}{(A'(r)F(r))^2}}\right)=$$
$$=A'(r)F(r)\left[\frac{F'(r)U'(r)}{(A'(r)F(r))^2}+\frac{1}{8}\left(\frac{F'(r)U'(r)}{(A'(r)F(r))^2}\right)^2+\dots\right]=\frac{F'(r)U'(r)}{A'(r)F(r)}+\frac{1}{8}\frac{(F'(r)U'(r))^2}{(A'(r)F(r))^3}+\dots.$$

Отсюда

$$z=\frac{U'(r)}{A'(r)F(r)}+\frac{1}{8}\frac{F'(r)U'(r)^2}{(A'(r)F(r))^3}+\dots. \tag{17}$$

Так как $F'(r)$ в первом слагаемом полностью сократилось, а в остальных слагаемых осталось только в числителе, то полученное выражение гладко зависит от r в малой окрестности точки r°.

Пусть теперь $D(r^\circ)=0$. Рассмотрим $r^\circ=r_{2i-1}$ — левый конец отрезка $I_i=[r_{2i-1},r_{2i}]$. Из условия общности положения (п. (iii) определения 1) имеем $F'(r^\circ)A'(r^\circ)D'(r^\circ)\neq0$. Рассмотрим в малой окрестности точки r° замену параметра $r\to d=D(r)$. Так как $D'(r^\circ)\neq0$, то эта замена регулярна. Обозначим обратную замену через $d\mapsto r=R(d)$. Положим $r^\varepsilon:=R(\varepsilon^2)$, где $\varepsilon>0$ мало. Введем параметр $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ на объединении двух дуг

$$\tilde\gamma_{2i-1}:=\gamma_i^+[r^\circ,r^\varepsilon)\cup\gamma_i^-[r^\circ,r^\varepsilon),$$

полагая $s=\eta\sqrt{D(r)}$ на дуге $\gamma_i^\eta[r^\circ,r^\varepsilon)$, $\eta=\pm1$. Получаем параметризацию дуги $\tilde\gamma_{2i-1}==(\tilde h(s),\tilde k(s))$:

$$s\mapsto(U\circ R(s^2)+\frac{1}{2}(\tilde k(s)-A\circ R(s^2))^2F\circ R(s^2),A\circ R(s^2)+(A'\circ R(s^2)F\circ R(s^2)+s)F'\circ R(s^2)^{-1}).$$

Эта параметризация гладкая, так как функция $R(d)$ гладкая. Осталось проверить регулярность этой параметризации при $s=0$. Вектор скорости дуги $\tilde\gamma_{2i-1}$ по параметру s при $s=0$ равен

$$(\tilde h'(0),\tilde k'(0))=\left(\frac{A'(r^\circ)F(r^\circ)^2}{F'(r^\circ)^2},\frac{1}{F'(r^\circ)}\right).$$

Обе координаты этого вектора конечны и ненулевые ввиду $F'(r^\circ)A'(r^\circ)\neq0$.

(c) Вычислим отношение $h'_\eta(r)/k'_\eta(r)$, т. е. котангенс угла наклона касательной к дуге γ_i^η, и исследуем вопрос о возможности изменения его знака. Предположим, что функция $k_\eta(r)$ является гладкой в окрестности точки $r^\circ\in I^\eta$. Тогда $h_\eta(r)=U_{k_\eta(r)}(r)$ — тоже гладкая функция, будучи композицией гладких функций. С учетом (12) получаем требуемую формулу

$$h'_\eta(r)=k'_\eta(r)F(r)(k_\eta(r)-A(r)).$$

Осталось изучить вопрос: при переходе параметра r через какое значение $r^\circ\in I^\eta$ может измениться знак разности $k_\eta(r)-A(r)$, которая выше обозначена через z (см. шаг 3).

Согласно (b), можно считать, что $D(r^\circ)>0$ (т. е. $r^\circ\neq r_i$) и либо $F'(r^\circ)\neq0$, либо $F'(r^\circ)=0$ и $\eta A'(\hat r_j)<0$. В силу (b), z гладко зависит от r в точке r°.

Если $A'(r^\circ)=0$, то из условия общности положения (п. (iii) определения 1) имеем $F'(r^\circ)U'(r^\circ)\neq0$. Из явной формулы для z получаем, что $\eta F'(r^\circ)z|_{r=r^\circ}>0$ и $\eta U'(r^\circ)z|_{r=r^\circ}<0$.

Если $A'(r^\circ)\neq0$ и $F'(r^\circ)=0$, то $\eta A'(r^\circ)<0$ и (в силу условия общности положения) $U'(r^\circ)\neq0$. Так как применима формула (17), то по ней получаем, что $\eta U'(r^\circ)z|_{r=r^\circ}<0$.

Если $A'(r^\circ)F'(r^\circ)\neq0$ и $\eta A'(r^\circ)>0$, то из явной формулы для z получаем, что $\eta F'(r^\circ)z|_{r=r^\circ}>0$.

Пусть теперь $A'(r^\circ)F'(r^\circ) \neq 0$ и $\eta A'(r^\circ) < 0$. Из явной формулы для z получаем, что в случае $U'(r^\circ) = 0$ выполнено $z|_{r=r^\circ} = 0$, а в случае $U'(r^\circ) \neq 0$ выполнено $\eta U'(r^\circ)z|_{r=r^\circ} < 0$. Поэтому в случае $U'(r^\circ) = 0$ и $U''(r^\circ) \neq 0$ (т.е. когда r° — морсовская критическая точка функции $U(r)$) решение z уравнения (14) зависит от r так, что при $r = r^\circ$ выполнено

$$z|_{r=r^\circ} = 0, \quad \frac{dz}{dr}\Big|_{r=r^\circ} = \frac{U''(r^\circ)}{A'(r^\circ)F(r^\circ)} \neq 0, \tag{18}$$

а потому число z меняет знак при прохождении r через r°.

(d) Изучим критические точки функции Гамильтона. В силу (12) точка $(0, k^\circ, r^\circ, \varphi)$ является критической для функции Гамильтона (т.е. в ней $dH = 0$) тогда и только тогда, когда $k^\circ = A(r^\circ)$. Последнее равносильно тому, что $z|_{r=r^\circ} = 0$ (здесь z как в шаге 3). Из доказательства пункта (c) следует, что равенство $z = 0$ при $r = r^\circ$ равносильно тому, что $U'(r^\circ) = 0$ и $\eta A'(r^\circ) < 0$, что и требовалось.

(e) Изучим точки возврата бифуркационной дуги. Пусть $r^\circ \in (r_{2i-1}, r_{2i})$ — морсовская критическая точка функции $k_\eta(r)$. Ввиду условия общности положения $F'(r_0)U'(r^\circ) \neq 0$. Отсюда и из доказательства пункта (c) получаем, что $z \neq 0$ при $r = r^\circ$. Значит, ввиду соотношения $h'_\eta(r) = k'_\eta(r)F(r)z$ из (c) и морсовости точки r° получаем, что она является морсовской критической точкой и для $h_\eta(r)$, т.е. для обеих функций $k_\eta(r)$ и $h_\eta(r)$. Поэтому эта точка является “острием”, или точкой возврата дуги. Невырожденность точки возврата следует из шага 4 и параболичности окружности $\mathcal{O}^\eta_{r^\circ}$ (действительно: в силу (c) и равенства $k'_\eta(r^\circ) = 0$ имеем $U''_{k_\eta(r^\circ)}(r^\circ) = 0$, откуда $U'''_{k_\eta(r^\circ)}(r^\circ) \neq 0$ в силу условия общности положения).

(f) Изучим вопрос “монотонности” бифуркационных дуг. Пусть r° — внутренняя точка промежутка I^η_i.

Если $k'_\eta(r^\circ) \neq 0$, то в малой окрестности точки r° функция $k'_\eta(r)$ имеет постоянный знак, что и означает строгую монотонность проекции поддуги на ось Ok.

Пусть $k'_\eta(r^\circ) = 0$, т.е. r° — критическая точка функции $k_\eta(r)$. Покажем, что она является морсовской (отсюда с учетом (e) будет следовать, что она является невырожденной точкой возврата дуги $\gamma^\eta_i(r)$). В силу (c) имеем $k'_\eta(r) = -\eta\frac{U''_{k_\eta(r)}(r)}{\sqrt{D(r)}}$. Отсюда, с учетом равенства $k'_\eta(r^\circ) = 0$, получаем $U''_{k_\eta(r^\circ)}(r^\circ) = 0$ и $k''_\eta(r^\circ) = -\eta\frac{U'''_{k_\eta(r)}(r)}{\sqrt{D(r)}}$. Последнее выражение отлично от нуля ввиду условия общности положения. Значит, $k''_\eta(r^\circ) \neq 0$, что и означает морсовость точки r°.

Исследуем подробнее первый случай — когда $k'_\eta(r^\circ) \neq 0$. По доказанному дуга $\gamma^\eta_i(r) = (h_\eta(r), k_\eta(r))$ в малой окрестности точки $r = r^\circ$ является графиком некоторой функции $\hat{h}(k)$. Покажем, что функция $\hat{h}(k)$ морсовская. Пусть $k^\circ = k_\eta(r^\circ)$ — критическая точка функции $\hat{h}(k)$, т.е. $\hat{h}'(k^\circ) = 0$. С учетом (c) имеем $\hat{h}'(k_\eta(r)) = F(r)(k_\eta(r) - A(r))$, откуда $k^\circ - A(r^\circ) = 0$, т.е. $z|_{r=r^\circ} = 0$. Из доказательства (c) получаем, что $A'(r^\circ)F'(r^\circ) \neq 0$, $\eta A'(r^\circ) < 0$ и $U'(r^\circ) = 0$; в силу (18) имеем $\hat{h}''(k^\circ) = F(r^\circ)\frac{dz}{dr}|_{r=r^\circ} = \frac{U''(r^\circ)}{A'(r^\circ)} \neq 0$, откуда k° — морсовская критическая точка функции $\hat{h}(k)$. Покажем теперь, что если поддуга эллиптическая (соответственно гиперболическая), то на ней координата k убывает (соответственно возрастает) при движении в направлении роста локального параметра ηr (ясно, что локальный параметр ηr индуцирует однозначную ориентацию на $\gamma^+_i \cup \gamma^-_i$). Пусть для определенности $\eta k'_\eta(r^\circ) < 0$ (соответственно > 0). Так как $k'_\eta(r) = -\eta\frac{U''_{k_\eta(r)}(r)}{\sqrt{D(r)}}$, то в некоторой окрестности точки r° выполнено $U'_{k_\eta(r)}(r) = 0$ и $U''_{k_\eta(r)}(r) > 0$ (соответственно < 0). Значит, точка r° является невырожденной точкой локального минимума (соответственно максимума) эффективного потенциала $U_{k_\eta(r^\circ)}(r)$. Поэтому соответствующая окружность $\mathcal{O}^\eta_{r^\circ}$, состоящая из точек ранга 1, является невырожденной и имеет эллиптический (соответственно гиперболический) тип.

Исследуем теперь второй случай — когда $k'_\eta(r^\circ) = 0$. Покажем, что в малой окрестности точки возврата r° дуги $\gamma_i^\eta(r)$ выполнено $\hat h_{\rm ell}(k) < \hat h_{\rm hyp}(k)$. Из описания дуги $\gamma_i^\eta(r)$ в окрестности точки возврата (см. конец шага 4) следует, что при $\tilde k < 0$ эффективный потенциал $U_{k(\tilde k)}(r)$ имеет две критические точки, близкие к r°: невырожденную точку $r_{\rm Res}(\tilde k)$ локального минимума и невырожденную точку $r_{\max}(\tilde k)$ локального максимума, причем локальный минимум меньше локального максимума: $U_{k(\tilde k)}(r_{\rm Res}(\tilde k)) < U_{k(\tilde k)}(r_{\max}(\tilde k))$. Так как точке (k,r) невырожденного локального минимума (соответственно максимума) эффективного потенциала отвечает эллиптическая (соответственно гиперболическая) окружность $\{(0,k,r)\}\times S^1$ в координатах (p_r, K, r, φ) на $T^*(M\setminus\{N,S\})$, то

$$\hat h_{\rm ell}(k(\tilde k)) = U_{k(\tilde k)}(r_{\rm Res}(\tilde k)) < U_{k(\tilde k)}(r_{\max}(\tilde k)) = \hat h_{\rm hyp}(k(\tilde k)).$$

Осталось показать, что пересечение малой регулярной окрестности точки $(\hat h(k^\circ), k^\circ)$ в бифуркационном комплексе с множеством $\{h > \hat h(k^\circ), k = k^\circ\}$ связно. Пусть $(\hat h(k^\circ), k^\circ) = \gamma_i^\eta(r^\circ)$. Для любого уровня энергии $h \geqslant U_k(r^\circ)$ обозначим через $L_{r^\circ,h,k}$ компоненту связности окружности $\{(0,k,r^\circ)\}\times S^1$ в множестве $\{H = h, K = k\}$ (здесь окружность задана в координатах (p_r,K,r,φ) на $T^*(M\setminus\{N,S\})$). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $D_\varepsilon := \pi(L_{r^\circ,\hat h(k^\circ)+\varepsilon,k^\circ}) \supseteq \pi(L_{r^\circ,\hat h(k^\circ),k^\circ}) =: D_0$, где $\pi : T^*M \to M$ — проекция. Но подмножества D_ε и $\pi(\{H = \hat h(k^\circ)+\varepsilon, K = k^\circ\}\setminus L_{r^\circ,\hat h(k^\circ)+\varepsilon,k^\circ}) =: D'_\varepsilon$ имеют пустое пересечение. Из условия общности положения следует, что эффективный потенциал $U_{k^\circ}(r)$ имеет лишь морсовские критические точки и вырожденные критические точки типа рождение-уничтожение. Отсюда следует, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и малая окрестность U подмножества D_0 в M такие, что для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ выполнено $D_\varepsilon \subset U$ и $D'_\varepsilon \cap U = \varnothing$, а потому $\{H = \hat h(k^\circ)+\varepsilon, K = k^\circ\}\cap\pi^{-1}(U) = L_{r^\circ,\hat h(k^\circ)+\varepsilon,k^\circ}$, а значит связно. □

4. Топология неособых изоэнергетических многообразий. Несуществование циклов в молекуле. Описание атомов и молекулы Фоменко (грубого инварианта лиувиллевой эквивалентности)

Пусть Q^3 — изоэнергетическое 3-мерное многообразие с уровнем энергии h°, т. е. $Q^3 = \{(p,q)\in T^*M \mid H(p,q) = h^\circ\}$. Назовем его *неособым*, если $dH(p,q) \neq (0,0,0,0)$ для любой точки $(p,q)\in Q^3$.

Замечание 9. *Согласно критерию неособости изоэнергетического многообразия Q^3 ([2]), Q^3 является неособым тогда и только тогда, когда $h^\circ \neq U(0)$, $h^\circ \neq U(L)$ и $h^\circ \neq U(\check r_\ell)$, где $U'(\check r_\ell) = 0$ (т. е. $\check r_\ell$ — критическая точка функции $U(r)$). Другими словами, уровень энергии h° должен быть отличен от значения энергии во всех положениях равновесия системы, а именно: в обеих точках ранга 0 (описанных в предложении 1) и в критических окружностях ранга 1, состоящих из положений равновесия (описанных в предложении 2 (B) (d)). Если функции $F(r), U(r), A(r)$ находятся в общем положении в сильном смысле (определение 1), то условие неособости Q^3 эквивалентно следующему: прямая $h = h^\circ$ не проходит через точки $(U(0), A(0))$ и $(U(L), A(L))$ и не касается дуг бифуркационной диаграммы.*

Предложение 3. *Топология неособого изоэнергетического многообразия Q^3 определяется (как и в случае без магнитного поля) образом проекции Q^3 на конфигурационное многообразие=сферу (эта проекция может быть несвязна и совпадает с множеством тех точек на поверхности вращения=сфере, где потенциал не превосходит данного уровня энергии):*

(a) *если проекция совпадает со всей сферой (т. е. уровень энергии больше, чем максимум потенциала на сфере), то $Q^3 = \mathbb{R}P^3$,*

(b) *если проекция является несвязным объединением n кусков (колец и дисков) на сфере, то Q^3 состоит из n связных компонент Q^3_i — прообразов соответствующих кусков сферы (колец и дисков, где число дисков равно $0, 1$ или 2, а число колец любое):*

(b1) *если i-й кусок проекции является кольцом (внутри которого потенциал меньше данного уровня энергии, а на границе кольца совпадает), то $Q^3_i = S^1 \times S^2$,*

(b2) *если i-й кусок проекции является диском (внутри которого потенциал меньше данного уровня энергии, а на границе диска совпадает), то $Q^3_i = S^3$.* □

Пусть Q^3 — неособое изоэнергетическое 3-мерное многообразие с уровнем энергии h° (см. замечание 9).

Замечание 10. *Согласно критерию боттовости периодического интеграла $K|_{Q^3}$ натуральной механической системы на поверхности вращения в терминах эффективного потенциала [2], интеграл $K|_{Q^3}$ является функцией Ботта с 1-мерными критическими подмногообразиями тогда и только тогда, когда в любой точке $(0, k^\circ, r^\circ, \varphi^\circ)$, лежащей на критической окружности в Q^3, имеем $U''_{k^\circ}(r^\circ) \neq 0$. Если функции $F(r), U(r), A(r)$ находятся в общем положении в сильном смысле (определение 1), то условие боттовости $K|_{Q^3}$ эквивалентно следующему: прямая $h = h^\circ$ не проходит через точки возврата бифуркационной диаграммы.*

Предположим, что $K|_{Q^3_i}$ — функция Ботта (см. замечание 10). Напомним определение *молекулы Фоменко* для функции $K|_{Q^3_i}$. Это — грубый инвариант лиувиллевой эквивалентности интегрируемой системы на Q^3_i.

Определение 2. *Пусть W — граф Кронрода–Риба функции $K|_{Q^3_i}$. Он получается из Q^3_i стягиванием в точку каждой связной компоненты в $Q^3_i \cap \{K = k^\circ\}$. ℓ-*Атомом *функции, заданной на ℓ-мерном компактном многообразии, называется регулярная окрестность связной компоненты критического множества уровня этой функции с точностью до послойного гомеоморфизма.* Молекулой Фоменко *функции Ботта $K|_{Q^3_i}$ называется граф W, каждой вершине которого сопоставлен соответствующий 3-атом с указанием соответствующей биекции между множеством граничных торов 3-атома и множеством всех ребер графа W, инцидентных данной вершине.*

Хорошо известно, что молекула Фоменко является инвариантом лиувиллевой эквивалентности системы на Q^3_i. Этот инвариант неполный. Его иногда называют *грубым*, чтобы отличать от полного инварианта лиувиллевой эквивалентности системы на Q^3_i — *меченой молекулы* Фоменко–Цишанга функции $K|_{Q^3_i}$.

Предложение 4. *У графа Кронрода–Риба (т. е. у молекулы Фоменко) функции $K|_{Q^3_i}$ нет циклов, где Q^3_i — любое неособое изоэнергетическое 3-многообразие.*

Доказательство. Если бы у молекулы был цикл, то он бы реализовал нетривиальный элемент 1-когомологий Q^3 (над кольцом $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$). Но 1-когомологии Q^3 нетривиальны только в случае (b1) предложения 3. В этом случае на Q^3_i есть глобальное сечение гамильтонова S^1-действия: это сечение задается уравнением $\varphi = 0$ (φ — неособая координата на Q^3_i, так как в случае (b1) полюса сферы не участвуют в Q^3_i). Но дополнительный интеграл $K|_{Q^3_i}$ на Q^3_i не зависит от φ, т. е. он "опускается" на сферу S^2, поэтому его граф Кронрода–Риба не имеет циклов (будучи графом Кронрода–Риба функции, заданной на сфере S^2, а у сферы 1-когомологии тривиальны). Этот граф Кронрода–Риба и есть молекула W. □

4.1. Построение молекулы Фоменко для неособого изоэнергетического многообразия

Опишем алгоритм построения молекулы Фоменко для функции $K|_{Q_i^3}$ в терминах плоской кривой ∂D_i — границы “области возможности движения” D_i. Будем предполагать, что точки $(h^\circ, A(0))$ и $(h^\circ, A(L))$ не принадлежат бифуркационной диаграмме (это выполнено для значений h° “общего положения”).

Шаг 1: описание *областей возможности движения*. Рассмотрим подмножество плоскости $\mathbb{R} \times (0, L)$ с координатами k, r, заданное неравенством $U_k(r) \leqslant h^\circ$, где $U_k(r)$ — эффективный потенциал. Обозначим его через D и назовем *областью возможности движения* для уровня энергии h°. Неравенство $U_k(r) \leqslant h^\circ$ переписывается в виде

$$U(r) \leqslant h^\circ, \quad A(r) - \sqrt{2\frac{h^\circ - U(r)}{F(r)}} \leqslant k \leqslant A(r) + \sqrt{2\frac{h^\circ - U(r)}{F(r)}}.$$

Поэтому

$$D = \left\{ (k, r) \in \mathbb{R} \times (0, L) \;\middle|\; U(r) \leqslant h^\circ,\ A(r) - \sqrt{2\frac{h^\circ - U(r)}{F(r)}} \leqslant k \leqslant A(r) + \sqrt{2\frac{h^\circ - U(r)}{F(r)}} \right\}.$$

Заметим, что D — это замкнутое подмножество полосы $\mathbb{R} \times (0, L)$ с гладкой (в силу неособости Q^3 и замечания 9) границей

$$\partial D = \left\{ (k, r) \in \mathbb{R} \times (0, L) \;\middle|\; U(r) \leqslant h^\circ,\ k = A(r) \pm \sqrt{2\frac{h^\circ - U(r)}{F(r)}} \right\}.$$

Пусть D_i — связная компонента D, отвечающая компоненте Q_i^3.

Лемма 2. *Обозначим $\tilde{Q}^3 := Q^3 \cap T^*(M \setminus \{N, S\})$, $\tilde{Q}^2 := \tilde{Q}^3 \cap \{\varphi = 0\}$, $\tilde{Q}^1 := \tilde{Q}^2 \cap \{p_r = 0\}$. Тогда*

- *в координатах (p_r, K, r, φ) на $T^*(M \setminus \{N, S\})$ выполнено $\tilde{Q}^1 = \{0\} \times (\partial D) \times \{0\}$, $\tilde{Q}^2$ — гладкая двумерная ориентируемая поверхность рода 0 в $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$, симметричная относительно плоскости $\{0\} \times \mathbb{R}^2 \times \{0\}$; S^1-действие на $\tilde{Q}^3$ совпадает со сдвигами вдоль координаты φ;*
- *$K|_{\tilde{Q}^3} = K|_{\tilde{Q}^2} \circ p$, где $p : \tilde{Q}^3 \to \tilde{Q}^2$ — проекция, являющаяся S^1-расслоением;*
- *критические точки функции $K|_{\tilde{Q}^2}$ содержатся в плоской кривой $\tilde{Q}^1$ (состоящей из неподвижных точек отражения поверхности $\tilde{Q}^2$ относительно плоскости симметрии) и совпадают с критическими точками функции $K|_{\tilde{Q}^1}$;*
- *боттовость функции $K|_{\tilde{Q}^3}$ равносильна морсовости функции $K|_{\tilde{Q}^2}$ на поверхности $\tilde{Q}^2$, а также морсовости функции $K|_{\tilde{Q}^1}$ на окружности $\tilde{Q}^1$.*

Доказательство. Из формул (9) и (8) на $T^*(M \setminus \{N, S\})$ получаем, что

$$\tilde{Q}^3 = \left\{ (p_r, k, r) \in \mathbb{R}^2 \times (0, L) \;\middle|\; 2\frac{p_r^2}{F(r)} + (k - A(r))^2 = 2\frac{h^\circ - U(r)}{F(r)} \right\} \times S^1.$$

Отсюда следуют первые два утверждения леммы.

Докажем третье утверждение. Проекция связной компоненты $\tilde{Q}_i^3 := \tilde{Q}^3 \cap Q_i^3$ на конфигурационное многообразие (сферу) является кольцом вида $I \times S^1$, где I — либо отрезок

$[r_0,r_1]\subset(0,L)$, либо полуинтервал $(0,r_1]$ или $[r_0,L)$, либо интервал $(0,L)$. В силу неособости Q^3 имеем $U'(r_i)\neq 0$. Отсюда следует, что градиент функции

$$G(p_r,k,r):=2\frac{p_r^2}{F(r)}+(k-A(r))^2-2\frac{h^\circ-U(r)}{F(r)}$$

отличен от нуля в любой точке поверхности $\tilde{Q}^2=G^{-1}(0)$, а потому является вектором нормали к этой поверхности в этой точке. С другой стороны, точка поверхности $\tilde{Q}^2=G^{-1}(0)$ является критической точкой функции $K|_{\tilde{Q}^2}$ тогда и только тогда, когда в этой точке $dK=\lambda dG$ для некоторого $\lambda\in\mathbb{R}$ (множителя Лагранжа). Значит, они задаются системой уравнений $G=0$, $\frac{\partial G}{\partial p_r}=0$, $\frac{\partial G}{\partial r}=0$ (т. е. критические точки “функции высоты” $K|_{\tilde{Q}^2}$ совпадают с теми точками, вектор нормали в которых параллелен оси Ok). Первые два из этих уравнений означают, что точка принадлежит кривой $\tilde{Q}^1$, а третье — что в этой точке вектор нормали к плоской кривой $\tilde{Q}^1\subset\{0\}\times\mathbb{R}^2\times\{0\}$ параллелен оси Ok, т. е. что эта точка является критической точкой “функции высоты” $K|_{\tilde{Q}^1}$ на этой плоской кривой.

Докажем четвертое утверждение. Из второго утверждения получаем, что боттовость функции $K|_{\tilde{Q}^3}$ равносильна боттовости функции $K|_{\tilde{Q}^2}$. Из третьего утверждения следует, что боттовость “функции высоты” $\hat{k}:=K|_{\tilde{Q}^2}$ равносильна ее морсовости, а также морсовости функции $K|_{\tilde{Q}^1}$. Здесь мы использовали, что в любой критической точке функции $K|_{\tilde{Q}^1}$ выполнено $\frac{\partial^2 G}{\partial p_r\partial r}=0$, $\frac{\partial^2 G}{\partial p_r^2}>0$ и (в силу теоремы о неявной функции)

$$\frac{\partial G}{\partial k}\,\frac{\partial\hat{k}}{\partial(p_r,r)}+\frac{\partial G}{\partial(p_r,r)}=0,\qquad \frac{\partial G}{\partial k}\,\frac{\partial^2\hat{k}}{\partial(p_r,r)^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial(p_r,r)^2}=0.$$

Лемма доказана. $\square$

Обозначим $\tilde{Q}^\ell_i:=\tilde{Q}^\ell\cap Q^3_i$, т. е. это связная компонента $\tilde{Q}^\ell$, $\ell=1,2,3$, отвечающая компоненте Q^3_i.

Шаг 2: описание графа W Кронрода–Риба для функции $K|_{Q^3_i}$.

Заметим, что функция Морса $K|_{\tilde{Q}^2_i}$ является функцией высоты на гладкой (необязательно компактной) поверхности $\tilde{Q}^2_i\subset\mathbb{R}^3(p_r,k,r)$. Пусть W — граф Кронрода–Риба функции $K|_{\tilde{Q}^2_i}$. Его можно получить из D_i стягиванием в точку каждой связной компоненты в $D_i\cap\{k=k^\circ\}$, а потому он имеет вложение в плоскость $j:W\to\mathbb{R}^2(k,r)$ такое, что $K=k\circ j\circ p_W$ и для любых точек $a,b\in W$ со свойством $k\circ j(a)=k\circ j(b)$ и $r\circ j(a)<r\circ j(b)$ выполнено $r(p_W^{-1}(a))<r(p_W^{-1}(b))$, где $p_W:\tilde{Q}^2_i\to W$ — проекция.

Рассмотрим более подробно 3 случая, определяемые типом связной компоненты Q^3_i многообразия Q^3 из предложения 3.

Случай 1: Q^3_i — связная компонента Q^3 типа (b1). Тогда функция $K|_{\tilde{Q}^2_i}$ задана на компактной поверхности $\tilde{Q}^2_i\subset\mathbb{R}^3(p_r,k,r)$. При этом связные компоненты линий уровня $\tilde{Q}^2_i\cap\{k=k^\circ\}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с отрезками (возможно вырождающимися в точку) вида $\{0\}\times\{k^\circ\}\times I_{k^\circ}\times\{0\}$, на которые распадается подмножество $D_i\cap\{k=k^\circ\}$, где $I_{k^\circ}\subset(0,L)$ и каждая компонента линии уровня имеет непустое пересечение с соответствующим отрезком. Последнее условие однозначно определяет указанное соответствие.

Случай 2: Q^3_i — связная компонента Q^3 типа (b2). Пусть для определенности $N\in\pi(Q^3)$. Функция $K|_{\tilde{Q}^2_i}$ задана на некомпактной поверхности $\tilde{Q}^2_i\subset\mathbb{R}^3(p_r,k,r)$. При этом связные компоненты линий уровня $\tilde{Q}^2_i\cap\{k=k^\circ\}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с промежутками вида $\{0\}\times\{k^\circ\}\times I_{k^\circ}\times\{0\}$, на которые распадается подмножество $D_i\cap\{k=k^\circ\}$, где $I_{k^\circ}\subset(0,L)$ — либо отрезок $[r_0,r_1]$, либо полуинтервал $(0,r_1]$.

Все связные компоненты линий уровня $\tilde{Q}^2_i\cap\{k=k^\circ\}$ являются компактными кроме одной компоненты (гомеоморфной $\mathbb{R}$) — отвечающей полуинтервалу $\{0\}\times\{A(0)\}\times(0,r_1]\times\{0\}$ из подмножества $D_i\cap\{k=A(0)\}$.

Случай 3: Q^3 имеет тип (a). В частности, Q^3 и D связны, и индекс i можно опустить. Пусть W — граф Кронрода–Риба функции $K|_{\tilde{Q}^2}$. Его построение полностью аналогично построению в случае 2. При этом все кроме одной (см. ниже) связные компоненты линий уровня $\tilde{Q}^2 \cap \{k = k^\circ\}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с промежутками $\{0\} \times \{k^\circ\} \times I_{k^\circ} \times \{0\}$, на которые распадается подмножество $D \cap \{k = k^\circ\}$, где промежуток $I_{k^\circ} \subset (0, L)$ — это либо отрезок $[r_0, r_1]$, либо полуинтервал $(0, r_1]$ или $[r_0, 1)$, либо интервал $(0, L)$. При этом интервал $(0, L)$ присутствует только в том случае, когда $\{0\} \times \{A(0)\} \times (0, L) \times \{0\} \subset D$ (откуда $A(0) = A(L)$). В последнем случае линия уровня $\tilde{Q}^2 \cap \{k = k^\circ\}$ состоит из двух связных компонент, и указанное соответствие сопоставляет интервал $\{0\} \times \{A(0)\} \times (0, L) \times \{0\}$ обеим этим компонентам. На множествах остальных компонент линий уровня и остальных промежутков указанное соответствие взаимно-однозначно.

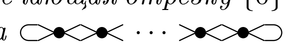
Все связные компоненты линий уровня $\tilde{Q}^2 \cap \{k = k^\circ\}$ являются компактными — кроме двух компонент (гомеоморфных $\mathbb{R}$), отвечающих одному или двум промежуткам следующего вида: либо двум полуинтервалам $\{0\} \times \{A(0)\} \times (0, r_1] \times \{0\}$ и $\{0\} \times \{A(L)\} \times [r_0, L) \times \{0\}$, либо одному интервалу $\{0\} \times \{A(0)\} \times (0, L) \times \{0\}$.

Шаг 3: описание 3-атомов для функции $K|_{Q_i^3}$. 3-Атомы функции $K|_{Q_i^3}$ получаются из 2-атомов функции $K|_{\tilde{Q}_i^2}$ взятием прямого произведения на окружность. Опишем 2-атомы функции $K|_{\tilde{Q}_i^2}$.

Согласно шагу 2, 2-атомы находятся во взаимно-однозначном соответствии с отрезками $\{0\} \times \{k^\circ\} \times I_{k^\circ} \times \{0\}$, где $I_{k^\circ} = [r_0, r_1]$, являющимися связными компонентами подмножеств $D_i \cap \{k = k^\circ\}$, содержащими точку касания прямой $\{0\} \times \{k^\circ\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ и кривой $\tilde{Q}_i^1 = \{0\} \times (\partial D_i) \times \{0\}$. Действительно: I_{k° не является ни полуинтервалом, ни интервалом, так как $k^\circ \neq A(0)$ и $k^\circ \neq A(L)$ в силу предположения (см. начало §4.1).

Обозначим через $r_1^* < \dots < r_n^*$ содержащиеся в интервале (r_0, r_1) r-координаты точек касания прямой $\{0\} \times \{k^\circ\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ и кривой $\tilde{Q}_i^1$, а через $\eta_\ell \in \{0, 1\}$ индекс Морса критической точки $v_\ell = (0, k^\circ, r_\ell^*, 0)$ функции Морса $K|_{\tilde{Q}_i^1}$, $1 \leqslant \ell \leqslant n$.

Лемма 3. *Седловой 2-атом морсовской функции высоты $K|_{\tilde{Q}_i^2}$, отвечающий отрезку $\{0\} \times \{k^\circ\} \times [r_0, r_1] \times \{0\}$, обладает следующими свойствами:*

- *критический уровень 2-атома — это связная компонента линии уровня $\tilde{Q}_i^2 \cap \{k = k^\circ\}$, отвечающая отрезку $\{0\} \times \{k^\circ\} \times [r_0, r_1] \times \{0\}$. Это — граф в плоскости $\mathbb{R} \times \{k^\circ\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ вида* *, симметричный относительно указанного отрезка, с вершинами $v_1, \dots, v_n$ на этом отрезке (упорядоченными по возрастанию r);*

- *вектор единичной внешней нормали к поверхности $\tilde{Q}_i^2$ (соответственно к кривой $\tilde{Q}_i^1 = \{0\} \times (\partial D_i) \times \{0\}$) в критической точке v_ℓ равен $(1 - 2\eta_\ell)\frac{\partial}{\partial k}$, $1 \leqslant \ell \leqslant n$;*

- *каждая окружность $\{0\} \times \{k^\circ\} \times \{r_\ell^*\} \times S^1$ состоит из относительных положений равновесия системы, и на ней $(1 - 2\eta_\ell)\frac{\partial H}{\partial K} > 0$, т. е. ориентация этой окружности фазовым потоком системы совпадает с ориентацией, задаваемой гамильтоновым S^1-действием, порожденным функцией K, в случае $\eta_\ell = 0$ и противоположна ей в случае $\eta_\ell = 1$, $1 \leqslant \ell \leqslant n$.* □

Ориентированный 2-атом с указанными свойствами однозначно определяется последовательностью индексов Морса $(\eta_1, \dots, \eta_n) \in \{0, 1\}^n$. Обозначим этот 2-атом через $V_n^{\eta_1, \dots, \eta_n}$.

Шаг 4: описание молекулы Фоменко для функции $K|_{Q_i^3}$. Молекула функции $K|_{Q_i^3}$ получается, если в каждую вершину графа W, описанного на шаге 2, поместить соответствующий 3-атом, описанный на шаге 3. □

Замечание 11. (a) *Если магнитное поле достаточно мало или уровень энергии h° достаточно большой, то в молекуле Фоменко боттовской функции $K|_{Q^3}$ возникают только* *атомы $V_n^{0,\dots,0}$ и $V_n^{1,\dots,1}$ (отличающиеся друг от друга знаком функции), как и в случае нулевого магнитного поля [2].*

(b) *В молекуле Фоменко боттовской функции $H|_{\{K=k^\circ\}}$ возникают только атомы $V_n^{0,\dots,0}$ и $V_n^{1,\dots,1}$, как и в случае нулевого магнитного поля [2].*

(c) *Предположим, что молекула Фоменко функции $K|_{Q^3_{h^\circ}}$ содержит 3-атом $V_n = V_n^{\eta_1,\dots,\eta_n}$ сложности $n \geqslant 2$. Каждая особая окружность этого 3-атома является гиперболической окружностью ранга 1 и включена в 1-параметрическое семейство таких окружностей. Образ каждого такого семейства при отображении момента является дугой бифуркационной диаграммы. Эти n дуг пересекаются в одной точке — образе особого слоя 3-атома при отображении момента, причем котангенс угла наклона каждой дуги в этой точке вычисляется по формулам из предложения 2 (B) (c) и* (7). *Если хотя бы у двух дуг наклоны различны (что выполнено в случае "общего положения"), то при варьировании уровня энергии 3-атом V_n на $Q^3_{h^\circ}$ "расщепляется" на несколько 3-атомов $V_{n_1},\dots,V_{n_k}$ на Q^3_h общей сложности $n_1+\dots+n_k=n$. В этом случае назовем особый слой 3-атома V_n* расщепляющейся гиперболической особенностью ранга 1. *В терминологии [9], [10, Definition 3.3] такому 3-атому V_n отвечает* топологически неустойчивая *бифуркация слоений Лиувилля на изоэнергетическом многообразии Q^3_h (это значит, что для любой 4-мерной окрестности U особого слоя 3-атома, слоения Лиувилля на $Q^3_h\cap U$ и $Q^3_{h^\circ}\cap U$ имеют разную топологию при $h\to h^\circ$).*

5. Вычисление некоторых меток Фоменко–Цишанга в молекуле Фоменко

Изучим топологию слоения Лиувилля на неособом изоэнергетическом многообразии Q^3, когда функция $K|_{Q^3}$ является боттовской (см. замечания 9 и 10).

Согласно лемме 3, любой седловой 3-атом функции $K|_{Q^3}$ имеет специальный вид $V_n^{\eta_1,\dots,\eta_n}$, причем ориентации его критических окружностей фазовым потоком системы согласованы между собой только в случае $\eta_1=\dots=\eta_n$. Но в теореме Фоменко–Цишанга [10, теорема 4.1], описывающей топологию слоения Лиувилля на Q^3, предполагается, что все критические окружности ориентированы фазовым потоком системы и что эти ориентации согласованы на каждом седловом атоме (т. е. порождены некоторым гамильтоновым S^1-действием в 4-мерной окрестности атома, сохраняющим функции H и K, см. [10, §3.5 перед определением 3.4, §3.3 перед предложением 3.8]). Значит, если хотя бы один седловой атом функции $K|_{Q^3}$ отличен от атомов $V_n^{0,\dots,0}$ и $V_n^{1,\dots,1}$, то теорема Фоменко–Цишанга не применима. Мы обойдем эту трудность следующим образом.

Зададим ориентации всех критических окружностей функции $K|_{Q^3}$ с помощью гамильтонова S^1-действия, порожденного функцией K (а не фазовым потоком системы, ср. [10, §3.5 перед определением 3.4]). Тогда ориентации критических окружностей станут согласованы на каждом атоме, и поэтому можно описать топологию слоения Лиувилля на Q^3 с указанными ориентациями критических окружностей в терминах соответствующего инварианта Фоменко–Цишанга [10, теорема 4.1] — меченой молекулы функции $K|_{Q^3}$.

Предложение 5. *Пусть Q^3 — неособое изоэнергетическое многообразие (см. замечание* 9). *Тогда гамильтоново S^1-действие, порожденное дополнительным первым интегралом K, является свободным на Q^3, а потому определяет структуру локально-тривиального S^1-расслоения на Q^3. Это S^1-расслоение согласовано со слоением Лиувилля на Q^3. Если функция $K|_{Q^3}$ боттовская (см. замечание* 10), *то метки Фоменко–Цишанга на ребрах с концами в седловых атомах соответствующей молекулы Фоменко имеют следующий вид: все метки r равны бесконечности, а все метки ε равны* $+1$.

Доказательство. Рассмотрим гамильтоново S^1-действие на T^*M, порожденное дополнительным первым интегралом K. Оно отвечает вращению поверхности вращения вокруг оси симметрии. Так как у гамильтонова S^1-действия на T^*M неподвижных точек ровно две, а именно точки $(p,q)=(0,N)$ и $(p,q)=(0,S)$, причем они являются точками ранга 0 отображения момента (см. доказательство предложения 1, шаг 1), то на любом неособом изоэнергетическом многообразии Q^3 это S^1-действие свободно.

На каждом граничном торе каждого седлового атома определим цикл λ — траекторию указанного S^1-действия. Дополним его до базиса группы 1-мерных гомологий тора любым циклом μ. Рассмотрим любое ребро молекулы, концы которого являются седловыми атомами. Тогда в матрице склейки, отвечающей этому ребру, первая строка равна $(\alpha,\beta)=(1,0)$, откуда находим все метки: $r=\frac{\alpha}{\beta}=\infty$, $\varepsilon=\operatorname{sgn}\alpha=+1$. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М.: Мир, 1981.

2. Кантонистова Е. О. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле // Матем. сб. 2016. Т. 207, №3. С. 47–92.

3. Kozlov I., Oshemkov A. Integrable systems with linear periodic integral for the Lie algebra $e(3)$ // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38, №6. P. 1014–1026.

4. Van der Meer J.-C. The Hamiltonian Hopf bifurcation (Volume 1160 of Lecture Notes in Mathematics). — Berlin: Springer-Verlag, 1985.

5. Efstathiou K., Giacobbe A. The topology associated with cusp singular points // Nonlinearity. 2012. V. 25. P. 3409–3422.

6. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. 1988. Т. 22, №4. С. 38–51.

7. Bolsinov A., Guglielmi L., Kudryavtseva E. Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems // Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci. V. 376. 20170424.

8. Kudryavtseva E. A., Lakshtanov E. L. Classification of singularities and bifurcations of critical points of even functions // Topological Methods in the Theory of Integrable Systems / eds. Bolsinov A. V., Fomenko A. T., Oshemkov A. A. — Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2006 — P. 173–214.

9. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45, №2(272). С. 49-–77.

10. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

REFERENCES

1. Besse, A. L. 1988, Manifolds all of whose Geodesics are Closed, Springer, Berlin.

2. Kantonistova, E. O. 2016, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems in a potential field on surfaces of revolution”, *Sb. Math.*, vol. 207, no. 3, pp. 358–399.

3. Kozlov, I. & Oshemkov, A. 2017, “Integrable systems with linear periodic integral for the Lie algebra $e(3)$”, *Lobachevskii J. Math.*, vol. 38, no. 6, pp. 1014–1026.

4. Van der Meer, J.-C. 1985, The Hamiltonian Hopf bifurcation, Springer-Verlag, Berlin.

5. Efstathiou, K. & Giacobbe, A. 2012, “The topology associated with cusp singular points”, *Nonlinearity*, vol. 25, pp. 3409–3422.

6. Fomenko, A.T. 1988, “Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, vol. 22, no. 4, pp. 286–296.

7. Bolsinov, A., Guglielmi, L. & Kudryavtseva E. 2018, “Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems”, *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 376. 20170424.

8. Kudryavtseva, E. A. & Lakshtanov, E. L. 2006, “Classification of singularities and bifurcations of critical points of even functions”, in Bolsinov, A. V., Fomenko, A. T., and Oshemkov, A. A. (Eds.), Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, pp. 173–214.

9. Bolsinov, A. V., Matveev, S. V., & Fomenko, A. T. 1990, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small complexity”, *Russian Math. Surveys*, vol. 45, no. 2, pp. 59–94.

10. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, London, N.Y., Washington.

Получено 1.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 512.772, 517.583 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-266-274

О новых примерах кривых Серре[1]

А. Т. Липковский, Ф. Ю. Попеленский

Липковский Александр Трайкович — доктор физико-математических наук, профессор, математический факультет, Белградский университет (г. Белград, Сербия).
e-mail: acal@matf.bg.ac.rs
Попеленский Федор Юрьевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: popelens@mech.math.msu.su

Аннотация

По теореме Абеля лемнискату Бернулли можно разделить циркулем и линейкой на n равных дуг, где $n = 2^k p_1 \dots p_m$ и p_j — попарно различные простые числа Ферма. Важное свойство лемнискаты, используемое в доказательстве теоремы Абеля, состоит в том, что она допускает параметризацию рациональными функциями, в которой длина дуги выражается эллиптическим интегралом первого рода. Жозеф Альфред Серре предложил способ описывать все такие кривые в работе [1]. В работах [1, 2, 3] он нашел целые серии таких кривых и описал их важные свойства. С тех пор других примеров кривых с рациональной параметризацией и длиной дуги, выражающейся эллиптическим интегралом первого рода, известно не было. В данной заметке мы строим новый пример такой кривой.

Ключевые слова: кривая Серре, эллиптический интеграл, алгебраическая кривая

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:
А. Т. Липковский, Ф. Ю. Попеленский. О новых примерах кривых Серре // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 266–274.

[1]Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие Научные Школы” (грант НШ-6399.2018.1, соглашение N 075-02-2018-867) и проекта № ОИ 174020 Министерства просвещения, науки и технологического развития Республики Сербии.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 512.772, 517.583 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-266-274

About new examples of Serre curves

A. T. Lipkovski, Th. Yu. Popelensky

Lipkovski Aleksandar — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Mathematics, University of Belgrade (Belgrade, Serbia).
e-mail: acal@matf.bg.ac.rs
Popelensky Theodore — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor at the Department of Differential Geometry and Applications of the Faculty of Mechanics and Mathematics of M. V. Lomonosov MSU (Moscow).
e-mail: popelens@mech.math.msu.su

Abstract

Abel's theorem claims that the Lemniscate can be divided into n equal arcs by ruler and compass iff $n = 2^k p_1 \dots p_m$, where p_j are pairwise distinct Fermat primes. The proof is based on the fact that the lemniscate can be parametrised by rational functions and the arc length is a first type elliptic integral of the parameter. Joseph Alfred Serret proposed a method to describe all such curves in [1]. In papers [1, 2, 3] he found series of such curves and described its important properties. Since then no new examples of curves with rational parametrisation such that arc length is a first type elliptic integral of the parameter are known. In this note we describe new example of such a curve.

Keywords: Serret curve, elliptic integral, algebraic curve

Bibliography: 4 titles.

For citation:
A. T. Lipkovski, Th. Yu. Popelensky 2020, "About new examples of Serre curves" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 266–274.

Посвящается Анатолию Тимофеевичу Фоменко
по случаю его семидесятипятилетия

1. Введение

Лемниската Бернулли помимо всего прочего известна тем, что ее дуги можно складывать циркулем и линейкой, т. е. если даны точки A_0, A_1, A_2 на лемнискате, то циркулем и линейкой можно построить точку A_3, такую что длина дуги A_0A_3 будет равна сумме длин дуг A_0A_1 и A_0A_2. Это свойство выводится из того, что в параметризации лемнискаты функциями

$$x(t) = \frac{t+t^3}{1+t^4}, \quad y(t) = \frac{t-t^3}{1+t^4} \tag{1}$$

длина дуги лемнискаты задается интегралом

$$\int \frac{\sqrt{2}dt}{\sqrt{1+t^4}},$$

для которого известна теорема сложения, открытая, по всей видимости, еще Эйлером.

Метод поиска кривых $(x(t), y(t))$, заданных параметрически рациональными функциями, с длиной дуги, выражающейся эллиптическим интегралом $C\int\frac{dt}{\sqrt{P_4(t)}}$, где $P_4(t)$ — многочлен четвертой степени без кратных корней, был предложен Ж. А. Серре в цикле работ [1, 2, 3], некоторые упрощения и обобщения сделал Ж. Лиувилль в работе [4], см. также книгу [5]. В ряде случаев Серре удалось реализовать свой подход, в частности, он нашел бесконечные серии таких кривых. Мы опишем его результаты в следующем параграфе.

В этой заметке мы

(1) покажем, что в одном классе кривых, естественным образом расширяющем результаты Серре, искомых кривых не существует;

(2) построим новые примеры кривых типа кривых Серре.

2. Предварительные сведения

Нас интересуют кривые $x = x(t), y = y(t)$, где $x(t), y(t)$ — вещественные рациональные функции, причем $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{dt^2}{P_4(t)}$, где $P_4(t)$ — вещественный многочлен четвертой степени без кратных корней. Серре показал, что без ограничения общности можно считать, что $P_4(t)$ имеет вид $(t^2-a^2)(t^2-\overline{a}^2)$, где a — комплексное число с отличными от 0 вещественной и мнимой частями. Тогда любое решение нашей задачи имеет вид

$$x(t) + iy(t) = \int \frac{q(t)}{\overline{q(t)}}\,\frac{1}{p(t)}\,dt, \tag{2}$$

где многочлен второй степени $p(t)$ выбирается так, что $P_4(t) = p(t)\,\overline{p(t)}$, $\overline{q(t)}$ взаимно прост с $p(t)$, $q(t)$ делится на $p(t)$, и кроме того, должны выполняться условия

$$\operatorname*{res}_{t=t_k} \frac{q(t)}{\overline{q(t)}\,p(t)} = 0 \tag{3}$$

для всех $t = t_k$, являющихся корнями $\overline{q(t)}$.

Сам Серре подробно исследовал случай $p(t) = (t-a)(t+a)$, $q(t) = (t-a)^{m+1}(t+a)^{n+1}$, где m, n — произвольные положительные целые числа. Он показал, предполагая без ограничения общности $m \leqslant n$, что в этом случае кривая

$$x(t) + iy(t) = \int \frac{(t-a)^m(t+a)^n}{(t-\overline{a})^{m+1}(t+\overline{a})^{n+1}}\,dt, \tag{4}$$

является алгебраической тогда и только тогда, когда число a с ненулевыми вещественной и мнимой частями является корнем уравнения

$$\frac{1}{\zeta^{n-m}}\,\frac{d^m}{d\zeta^m}\zeta^n(\zeta-1)^m = 0,$$

где $\zeta = \dfrac{(a+\overline{a})^2}{4a\overline{a}}$, см. подробное обсуждение в [2, 4]. Длина дуги такой кривой задается интегралом $\int \dfrac{C\,dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-\overline{a}^2)}}$. Например, для $m = n = 1$ параметр a должен удовлетворять уравнению $a^2 + \overline{a}^2 = 0$.

Можно показать, что для этих m, n и a кривая, заданная уравнением (4), получается из лемнискаты (1) композицией гомотетии и движения плоскости.

В этой заметке мы рассмотрим два случая, не входящие в серии, найденные Серре. А именно, в разделе 3 мы покажем, что выбор $q(t) = (t-b)^2(t-a)^2(t+a)^2$ не дает новых кривых, а в разделе 4 покажем, что для $q(t) = (t^2-b^2)^2(t-a)^2(t+a)^2$ возникают новые кривые.

3. Случай $q(t) = (t-b)^2(t-a)^2(t+a)^2$

Рассмотрим простейший случай, не входящий в число рассмотренных самим Серре, а именно $q(t) = (t-b)^2(t-a)^2(t+a)^2$. В таком случае искомая кривая задается соотношением

$$x(t) + iy(t) = \int \frac{(t-b)^2(t-a)(t+a)}{(t-\overline{b})^2(t-\overline{a})^2(t+\overline{a})^2}\,dt,$$

при выполнении условий (3), которые состоят в обращении в 0 вычетов подынтегральной функции в точках $t = \overline{b}$ и $t = \pm\overline{a}$, что можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{(t-b)^2(t-a)(t+a)}{(t-\overline{b})^2(t+\overline{a})^2}\bigg|_{t=\overline{a}} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{(t-b)^2(t-a)(t+a)}{(t-\overline{b})^2(t-\overline{a})^2}\bigg|_{t=-\overline{a}} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{(t-b)^2(t-a)(t+a)}{(t-\overline{a})^2(t+\overline{a})^2}\bigg|_{t=\overline{b}} = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения зависимы, их сумма равна 0, поскольку в бесконечности вычет подынтегральной функции равен 0. Тем не менее, нам удобно рассматривать все три уравнения. При исследовании этой системы полезно иметь в виду, что нас интересуют комплексные a и b, причем $b \neq \pm a, \pm\overline{a}$, а вещественные и мнимые части a и b отличны от 0. Элементарные вычисления с учетом этих соображений позволяют упростить уравнения этой системы:

$$\begin{cases} a^2\overline{a}^2 - 3a^2\overline{a}b + a^2\overline{a}\overline{b} + a^2b\overline{b} + \overline{a}^4 + \overline{a}^3b - 3\overline{a}^3\overline{b} + \overline{a}^2b\overline{b} = 0, \\ a^2\overline{a}^2 + 3a^2\overline{a}b - a^2\overline{a}\overline{b} + a^2b\overline{b} + \overline{a}^4 - \overline{a}^3b + 3\overline{a}^3\overline{b} + \overline{a}^2b\overline{b} = 0, \\ a^2\overline{a}^2 - 2a^2b\overline{b} + a^2\overline{b}^2 + \overline{a}^2b\overline{b} - 2\overline{a}^2\overline{b}^2 + b\overline{b}^3 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Разности первого и третьего, а также второго и третьего уравнений дают равенства

$$(\overline{a} - \overline{b})(\overline{a}^3 - 3a^2b + \overline{a}^2b + a^2\overline{b} - 2\overline{a}^2\overline{b} + \overline{a}c\overline{b} + b\overline{b}^2) = 0, \tag{6}$$

$$(\overline{a} + \overline{b})(\overline{a}^3 + 3a^2b - \overline{a}^2b - a^2\overline{b} + 2\overline{a}^2\overline{b} + \overline{a}b\overline{b} - b\overline{b}^2) = 0. \tag{7}$$

Как говорилось выше, $b \neq \pm a$, поэтому вторые множители в обоих этих соотношениях должны быть равны 0. Их полусумма дает равенство

$$\overline{a}^3 + \overline{a}b\overline{b} = 0,$$

откуда $\overline{a}^2 = -b\overline{b}$. Теперь легко видеть, что $\mathrm{R}e\,a\,\mathrm{I}m\,a = 0$, что противоречит исходным предположениям о параметре a.

4. Случай $q(t) = (t^2-b^2)^2(t-a)^2(t+a)^2$

Для многочлена вида $q(t) = (t^2-b^2)^2(t-a)^2(t+a)^2$, где $b \neq \pm a$, искомая кривая задается соотношением

$$x(t) + iy(t) = \int \frac{(t^2-b^2)^2(t-a)(t+a)}{(t^2-\overline{b}^2)^2(t-\overline{a})^2(t+\overline{a})^2}\,dt, \tag{8}$$

при выполнении условий (3), которые состоят в обращении в 0 вычетов подынтегральной функции в точках $t=\pm\overline{b}$ и $t=\pm\overline{a}$, что можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d}{dt}\dfrac{(t^2-b^2)^2(t-a)(t+a)}{(t^2-\overline{b}^2)^2(t+\overline{a})^2}\right|_{t=\overline{a}} = 0, \\ \left.\dfrac{d}{dt}\dfrac{(t^2-b^2)^2(t-a)(t+a)}{(t^2-\overline{b}^2)^2(t-\overline{a})^2}\right|_{t=-\overline{a}} = 0, \\ \left.\dfrac{d}{dt}\dfrac{(t^2-b^2)^2(t-a)(t+a)}{(t+\overline{b})^2(t-\overline{a})^2(t+\overline{a})^2}\right|_{t=\overline{b}} = 0, \\ \left.\dfrac{d}{dt}\dfrac{(t^2-b^2)^2(t-a)(t+a)}{(t-\overline{b})^2(t-\overline{a})^2(t+\overline{a})^2}\right|_{t=-\overline{b}} = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения зависимы, их сумма равна 0, поскольку в бесконечности вычет подынтегральной функции равен 0. Стоит также отметить, что при замене t на $-t$ первое уравнение переходит во второе и наоборот. То же самое верно в отношении третьего и четвертого уравнений. Также нужно иметь в виду, что нас интересуют комплексные a и b, причем $b\neq\pm a,\pm\overline{a}$, а вещественные и мнимые части a и b отличны от 0. Отсюда получаем, что вышеприведенные условия на вычеты равносильны паре уравнений

$$\begin{cases} a^2\overline{a}^4+\overline{a}^6-5a^2\overline{a}^2b^2+3\overline{a}^4b^2+3a^2\overline{a}^2\overline{b}^2-5\overline{a}^4\overline{b}^2+a^2b^2\overline{b}^2+\overline{a}^2b^2\overline{b}^2 = 0, \\ a^2\overline{a}^2b^2+3a^2\overline{a}^2\overline{b}^2-5a^2b^2\overline{b}^2+\overline{a}^2b^2\overline{b}^2+a^2\overline{b}^4-5\overline{a}^2\overline{b}^4+3b^2\overline{b}^4+\overline{b}^6 = 0. \end{cases}$$

Отметим, что уравнения однородны, поэтому вместе с решением (a,b) имеется решение $(\lambda a,\lambda b)$ для любого вещественного λ.

Как видно, эти уравнения довольно похожи друг на друга, поэтому разумной выглядит идея рассмотреть разность уравнений. Нетрудно проверить, что эта разность разлагается на множители:

$$(\overline{a}-\overline{b})(\overline{a}+\overline{b})(a^2\overline{a}^2+\overline{a}^4-6a^2b^2+3\overline{a}^2b^2+a^2\overline{b}^2-4\overline{a}^2\overline{b}^2+3b^2\overline{b}^2+\overline{b}^4)=0.$$

Это позволяет получить на a и b уравнение более низкого порядка.

Тем не менее, более перспективным оказался другой путь.

Положим $a=r+is, b=u+iv$ и разделим вещественные и мнимые части уравнений, результат нетрудно записать в виде

$$\begin{cases} 2(r-s)(r+s)(r^4-6r^2s^2+s^4-2r^2u^2+2s^2u^2+u^4+ \\ \qquad +32rsuv+2r^2v^2-2s^2v^2+2u^2v^2+v^4) = 0, \\ -8rs(r^4-2r^2s^2+s^4-r^2u^2+s^2u^2+16rsuv+r^2v^2-s^2v^2) = 0, \\ 4(u-v)(u+v)(r^4+2r^2s^2+s^4-2r^2u^2+2s^2u^2+u^4+ \\ \qquad +12rsuv+2r^2v^2-2s^2v^2-2u^2v^2+v^4) = 0, \\ -4uv(r^4+2r^2s^2+s^4-4r^2u^2+4s^2u^2+3u^4+ \\ \qquad +24rsuv+4r^2v^2-4s^2v^2-2u^2v^2+3v^4) = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что если $r=s$ или $r=-s$, то второе уравнение приводится к виду $ruv=0$, что не дает нужных решений, поэтому наша задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} r^4-6r^2s^2+s^4-2r^2u^2+2s^2u^2+u^4+ \\ \qquad +32rsuv+2r^2v^2-2s^2v^2+2u^2v^2+v^4=0, & (W1) \\ r^4-2r^2s^2+s^4-r^2u^2+s^2u^2+ \\ \qquad +16rsuv+r^2v^2-s^2v^2=0, & (W2) \\ r^4+2r^2s^2+s^4-2r^2u^2+2s^2u^2+u^4+ \\ \qquad +12rsuv+2r^2v^2-2s^2v^2-2u^2v^2+v^4=0, & (W3) \\ r^4+2r^2s^2+s^4-4r^2u^2+4s^2u^2+3u^4+ \\ \qquad +24rsuv+4r^2v^2-4s^2v^2-2u^2v^2+3v^4=0. & (W4) \end{cases}$$

Эти уравнения зависимы — разность первого и четвертого уравнений плюс удвоенная разность третьего и второго равна 0. Поэтому эта система равносильна системе состоящей из уравнений $(W1)-(W3)$, $(W1)-2(W2)$, $3(W2)-4(W3)$, которая легко приводится к виду

$$\begin{cases} 2r^2s^2-5rsuv-u^2v^2=0, & (U1) \\ (r^2+s^2-u^2-v^2)(r^2+s^2+u^2+v^2)=0, & (U2) \\ -r^4-14r^2s^2-s^4+5r^2u^2- \\ \qquad -5s^2u^2-4u^4-5r^2v^2+5s^2v^2+8u^2v^2-4v^4=0. & (U3) \end{cases}$$

Вторая скобка во втором уравнении $(U2)$ не дает интересующих нас решений, поэтому мы ее отбросим. В силу однородности второе уравнение позволяет наложить дополнительное условие

$$r^2+s^2=u^2+v^2=1.$$

Наши уравнения обладают большой группой симметрий. Если (r,s,u,v) — решение, то можно одновременно менять знак у четного числа переменных, т. е. так, чтобы не поменялся знак произведения $rsuv$, а также можно применить к переменным перестановку $r\leftrightarrow s$, $u\leftrightarrow v$. В силу $r^2+s^2=u^2+v^2=1$ сделаем подстановку

$$r=\sin\theta, s=\cos\theta, u=\cos\omega, v=\sin\omega.$$

Тогда первое уравнение $(U1)$ приводится к виду

$$2\sin^2 2\theta-5\sin 2\theta\sin 2\omega-\sin^2 2\omega=0,$$

откуда

$$\sin 2\theta=M\sin 2\omega,\ \text{где}\ M=\frac{5\pm\sqrt{33}}{4}. \tag{9}$$

С помощью соотношений $r^2+s^2=u^2+v^2=1$ уравнение $(U3)$ приводится к виду

$$6r^4+3u^2-8u^4+r^2(-11+10u^2)=0.$$

В силу указанной тригонометрической подстановки $r^2=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$ и $u^2=\frac{1-\cos 2\omega}{2}$, откуда получаем уравнение

$$-4-4\cos^2 2\omega+5\cos 2\omega\cos 2\theta+3\cos^2 2\theta=0.$$

Перепишем его в виде

$$5\cos 2\omega\cos 2\theta=4+4\cos^2 2\omega-3\cos^2 2\theta, \tag{10}$$

возведем в квадрат, заменим квадраты косинусов с помощью основного тригонометрического тождества и используем соотношение (9):

$$25(1-\sin^2 2\omega)(1-M^2\sin^2 2\omega) = (4+4(1-\sin^2 2\omega)-3(1-M^2\sin^2 2\omega))^2,$$

откуда получаем уравнение

$$\sin^2 2\omega(15-55M^2+(16-9M^4+49M^2)\sin^2 2\omega) = 0.$$

Заметим, что если $\sin^2 2\omega = 0$, то $rs = 0$, что не дает решения нашей задачи. Отсюда

$$\sin^2 2\omega = \frac{15-55M^2}{9M^4-49M^2+16}.$$

При $M = \frac{5-\sqrt{33}}{4}$ получаем

$$\sin^2 2\omega = \sqrt{\frac{11}{3}} - 1,$$

тем самым,

$$\sin 2\omega = \pm\sqrt{\sqrt{\frac{11}{3}}-1}, \quad \sin 2\theta = M\sin 2\omega = \mp\sqrt{\frac{11\sqrt{33}-63}{6}}.$$

а при $M = \frac{5+\sqrt{33}}{4}$ получаем уравнение

$$\sin^2 2\omega = -\sqrt{\frac{11}{3}} - 1,$$

которое не имеет решений.

Итак, нам осталось найти решения уравнений

$$2uv = \pm\sqrt{\sqrt{\frac{11}{3}}-1}$$
$$2rs = \mp\sqrt{\frac{11\sqrt{33}-63}{6}}$$

с учетом условий $u^2+v^2=1$ и $r^2+s^2=1$.

Отсюда легко получить, что u и v — это числа

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3\left(6-\sqrt{33}\right)}\right)} \text{ и } \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{33}-3}{6-2\sqrt{18-3\sqrt{33}}}},$$

а r и s — числа

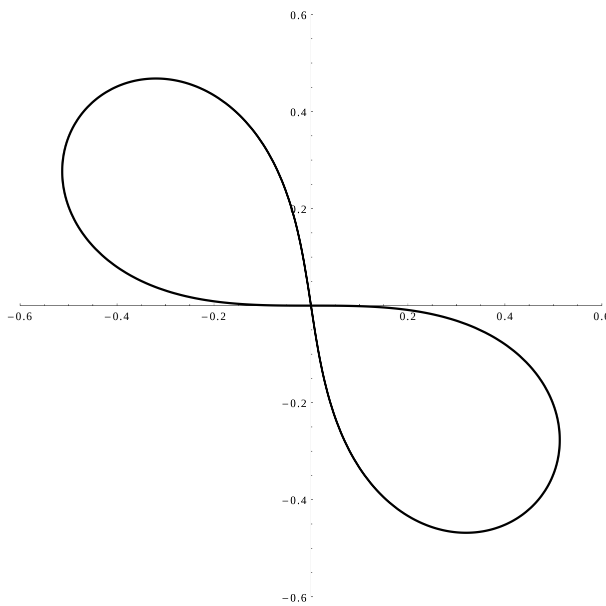
$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(6-\sqrt{6\left(69-11\sqrt{33}\right)}\right)} \text{ и } \delta = \sqrt{\frac{11\sqrt{33}-63}{12-2\sqrt{6\left(69-11\sqrt{33}\right)}}}.$$

Знаки перед радикалами выбираются так, что если в паре u, v знаки одинаковые, то в паре r, s — различные, и наоборот. Далее, эти значения для u, v, r, s были получены при возведении в квадрат уравнения (10), поэтому не все комбинации выборов соответствий u, v с α, β и r, s с γ, δ реализуются. С учетом этого имеем 16 вариантов (u, v, r, s):

$$\begin{array}{ll}
(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma, \mp\delta), & (\pm\beta, \pm\alpha, \pm\delta, \mp\gamma), \\
(\pm\alpha, \pm\beta, \mp\gamma, \pm\delta), & (\pm\beta, \pm\alpha, \mp\delta, \pm\gamma), \\
(\pm\alpha, \mp\beta, \pm\gamma, \pm\delta), & (\pm\beta, \mp\alpha, \pm\delta, \pm\gamma), \\
(\mp\alpha, \pm\beta, \pm\gamma, \pm\delta), & (\mp\beta, \pm\alpha, \pm\delta, \pm\gamma).
\end{array}$$

Таким образом, для $a = r + is$ и $b = u + iv$ соотношение (8) задает кривую $(x(t), y(t))$ с параметризацией рациональными функциями и длиной дуги, равной $C \int \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - \overline{a}^2)}}$.

Одна из таких кривых показана на следующем рисунке, остальные получаются из нее движением.



СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. A. Serret *Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques and ultra-elliptiques*, Journal de mathématiques pures et appliquées, T. 10 (1845) p. 257—285

2. J. A. Serret *Développements sur une classe d'équations relatives a la représentation géométrique des fonctions elliptiques*, Journal de mathématiques pures et appliquées, T. 10 (1845) p. 351—363

3. J. A. Serret *Note sur les courbes elliptiques de la première espèce*, Journal de mathématiques pures et appliquées, T. 10 (1845) p. 421—429

4. J. Liouville *Sur un Mémoire de M. Serret, relatif à la representation des fonctions elliptiques*, Journal de mathématiques pures et appliquées, T. 10 (1845) p. 456—465

5. В. В. Прасолов, Ю. П. Соловьев *Эллиптические функции и алгебраические уравнения*, Москва, 2020

REFERENCES

1. Serret J. A., “Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques and ultra-elliptiques”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **10** (1845), 257—285.

2. Serret J. A., “Développements sur une classe d’équations relatives a la représentation géométrique des fonctions elliptiques”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **10** (1845), 351—363.

3. Serret J. A., “Note sur les courbes elliptiques de la première espèce”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **10** (1845), 421—429.

4. Liouville J., “Sur un Mémoire de M. Serret, relatif à la representation des fonctions elliptiques”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **10** (1845), 456—465.

5. Prasolov V. V., Soloviev Y. P., “Elliptic Functions and Algebraic Equations”, Moscow, 2020.

Получено 28.11.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 514.7, 514.8 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-275-289

Квантовая интегрируемость операторов Бельтрами — Лапласа проективно эквивалентных метрик произвольных сигнатур.

В. С. Матвеев

Матвеев Владимир Сергеевич — кандидат физико-математических наук, профессор, Йенский университет имени Фридриха Шиллера (г. Йена, Германия).
e-mail: vladimir.matveev@uni-jena.de

Аннотация

Мы обобщаем результат [31] на все сигнатуры.

Ключевые слова: интегрируемые системы, тензоры Киллинга, квантовые интегрируемые системы, коммутирующие операторы, квантование по Кантеру, проективно эквивалентные метрики, геодезически эквивалентные метрики, разделение переменных, нормальные формы, геометрическая теория УрЧП, голоморфно-проективно эквивалентные метрики

Библиография: 51 название.

Для цитирования:
В. С. Матвеев. Квантовая интегрируемость операторов Бельтрами — Лапласа проективно эквивалентных метрик произвольных сигнатур // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 275–289.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 514.7, 514.8 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-275-289

Quantum integrability for the Beltrami–Laplace operators of projectively equivalent metrics of arbitrary signatures

V. S. Matveev

Matveev Vladimir Sergeevich — candidate of physical and mathematical Sciences, Professor, Friedrich-Schiller-Universität Jena, (Jena, Germany).
e-mail: vladimir.matveev@uni-jena.de

Abstract

We generalize the result of [31] to all signatures.

Keywords: integrable systems, Killing tensors, quantum integrable systems, Carter quantisation, commutative operators, projectively equivalent metrics, geodesically equivalent metrics, separation of variables, normal forms, geometric theory of PDE, c-projectively equivalent metrics

Bibliography: 51 titles.

For citation:
V. S. Matveev, 2020, "Quantum integrability for the Beltrami–Laplace operators of projectively equivalent metrics of arbitrary signatures", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 275–289.

Dedicated to Anatoly Timofeevich Fomenko on his 75th birthday.

1. Introduction

Let M be a smooth manifold of dimension $n \geqslant 2$. We say that two metrics g and $\bar g$ on this manifold are *projectively equivalent*, if each g-geodesic, after a proper reparameterization, is a $\bar g$-geodesic. Theory of projectively equivalent metrics is a classical topic in differential geometry, already E. Beltrami [1] and T. Levi-Civita [26] did important contributions there. In the last two decades a group of new methods coming from integrable systems, see e.g. [27, 28, 29, 32, 33], and from Cartan geometry, see e.g. [19, 39, 44], appeared to be useful in this theory, and made it possible to solve important open problems and named conjectures, see e.g. [37, 34, 12, 40, 38].

By [27, 35] the existence of $\bar g$ projectively equivalent to g allows one to construct a family $K^{(t)}_{ij}$ of Killing tensors of second degree for the metric g (we will recall the formula and the definition later, in §2.1, following later publications, e.g. [3, 34, 36]. The family $K^{(t)}_{ij}$ is polynomial in t of degree $n-1$ so it contains at most n linearly independent Killing tensors).

In this paper we answer in Theorem 1 the following natural 'quantization' question: *do the corresponding second order differential operators commute?*

There are of course many possible constructions of differential operators of second order by (0,2)-tensors, and, more generally, many different quantization approaches, see e.g. [9, §6]. We use the quantization procedure of B. Carter [15, Equation (6.15)] and refer to [15] and also to [2, 18] for an explanation why it is natural in many aspects. The construction is as follows: to a tensor K_{ij}, we associate an operator

$$\widehat{K} : C^\infty(M) \to C^\infty(M), \quad \widehat{K}(f) = \nabla_i K^{ij} \nabla_j f. \tag{1}$$

Above and everywhere in the paper ∇ is the Levi-Civita connection of g, we sum with respect to repeating indexes and raise the indexes of K by the metric g.

Theorem 1. *Assume g and $\bar g$ are projectively equivalent, let $K^{(t)}$ be the family of Killing tensors of second degree for g constructed with the help of $\bar g$. Then, for any $t, s \in \mathbb{R}$, the operators $\widehat{K}^{(t)}, \widehat{K}^{(s)}$ commute, that is*

$$\widehat{K}^{(t)}\widehat{K}^{(s)} - \widehat{K}^{(s)}\widehat{K}^{(t)} = 0.$$

Note that the Beltrami-Laplace operator $\Delta_g := \nabla_i g^{ij} \nabla_j$ is a linear combination of the operators of the family $\widehat{K}^{(t)}$, so all the operators $\widehat{K}^{(t)}$ commute also with Δ_g. In fact, in the proof we go in the opposite direction: we show first (combining [15, 18] and [22]) that the operators $\widehat{K}^{(t)}$ commute with Δ_g and then use this to show that the operators $\widehat{K}^{(t)}, \widehat{K}^{(s)}$ also commute mutually.

For Riemannian manifolds, Theorem 1 is known, it was announced in [30] and the proof appeared in [31]. The proof in the Riemannian case is based on direct calculations in the coordinates in which the metrics admit the so-called Levi-Civita normal form. These coordinates exist (locally, in a neighborhood of almost every point), if the (1,1)-tensor $G^i_j := g^{is}\bar g_{sj}$ is semi-simple (at almost every point). This is always the case, for example, if one of the metrics is Riemannian. The proof from [31] can be directly generalized to the pseudo-Riemannian metrics under the additional assumption that G is semi-simple.

There are (many) examples of projectively equivalent metrics such that G has nontivial Jordan blocks; in this situation the proof and ideas of [31] are not sufficient. Indeed, though also in this case there exists a local description of projectively equivalent metrics [6], direct calculation of the commutators of the operators $\widehat{K}^{(t)}$ and $\widehat{K}^{(s)}$ is a complicated task because of different combinatoric possibilities for the number and the sizes of Jordan blocks and also because the description of [6] uses a description of symmetric parallel (0,2)-tensors from [11] which is quite nontrivial. For small dimensions it is possible though to prove Theorem 1 by direct calculations, in particual in dimension 2 it was done in [4, §2.2.3].

Our proof is based on another circle of ideas, it still uses the local description of [6] but replaces local calculations by a trick which is based on quite nontrivial results of different papers. We recall the necessary results in §2.

All objects in our paper are assumed to be sufficiently smooth.

We thank C. Chanu and V. Kiosak for useful discussions.

2. Basic facts about projectively equivalent metrics and Killing tensors used in the proof

2.1. Killing tensors for projectively equivalent metrics and corresponding integrals.

Let g and $\bar g$ be two projectively equivalent metrics on the manifold M. Let us recall the construction of Killing tensors $K^{(t)}_{ij}$ of second degree for the metric g by using the metric $\bar g$. We consider the (1,1)-tensor L given by the formula

$$L^i_j \ := \ \left|\frac{\det(\bar g)}{\det(g)}\right|^{\frac{1}{n+1}} \bar g^{i\ell} g_{\ell j}. \tag{2}$$

Here $\bar g^{ij}$ is the contravariant metric dual (= inverse, i.e., $\bar g^{is}\bar g_{sj} = \delta^i_j$) to $\bar g$.

Next, consider the family $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, of the $(1,1)$-tensors, where Id is the (1,1)-tensor corresponding to the identity endomorphism, its components in the standard tensor notation are δ^i_j.

$$S(t) := \mathrm{Comatrix}\,(t\ \mathrm{Id} - L)\,. \tag{3}$$

Recall that the comatrix (or the adjugate matrix) of a (1,1)-tensor is also a (1,1)-tensor. Indeed, at points where $t \notin \mathrm{Spectrum}(L)$, it is given by

$$\mathrm{Comatrix}\,(t\ \mathrm{Id} - L) = \det\,(t\ \mathrm{Id} - L)\,(t\ \mathrm{Id} - L)^{-1}$$

and evidently corresponds to a (1,1)-tensor, and for each point the set of t not lying in the spectrum of L is everywhere dense on the real line. From the formula for the comatrix we see that the family (3) is polynomial in t of degree $n-1$.

Theorem 2 (Essentially, [27]). *Let g and $\bar g$ be projectively equivalent. Then, for every $t \in \mathbb{R}$ the tensor*

$$K^{(t)}_{ij} := g_{ir} S(t)^r_j \tag{4}$$

is a Killing tensor for g.

In the coordinate-free notation the Killing tensor $K^{(t)}$ is given by $K^{(t)}(\xi,\nu) = g(\xi, S(t)\nu)$. Since L is g-selfadjoint, $S(t)$ is also self-adjoint so $K^{(t)}$ is symmetric with respect to the lower indexes. Recall that a (symmetric with respect to the lower indexes) tensor K_{ij} is Killing, if

$$\nabla_{(i} K_{jk)} = 0, \tag{5}$$

where the round brackets denote the symmetrization. In our paper we do not use this equation, but use the geometric definition which we recall now: a (0,2) symmetric tensor $K = K_{ij}$ is Killing, if and only if the function $\tau \mapsto K(\gamma'(\tau), \gamma'(\tau))$ is constant along every naturally parameterized g-geodesic $\gamma(\tau)$. In other words, if the function $K(\gamma'(\tau), \gamma'(\tau))$ is an integral of the geodesic flow of g. It is known, that the integrals corresponding to the Killing tensors $K^{(t)}$ constructed above commute, let us recall this statement:

Theorem 3. *Let g and $\bar g$ be projectively equivalent and $K^{(t)}$ be the Killing tensors for g constructed by (4). Consider, for each $t \in \mathbb{R}$, the function $I_t : T^*M \to \mathbb{R}$ given by formula*

$$I_t(x,p) = K^{(t)}_{rq} g^{iq} g^{ir} p_i p_j. \tag{6}$$

Here $(x,p) = (x^1, ..., x^n, p_1, ..., p_n)$ are local coordinates on T^*M: x^i are local coordinates on M and p_i are, for each x, the coordinates on T^*_xM corresponding to the basis $\frac{\partial}{\partial x^i}$ on T_xM.

Then, for any $t, s \in \mathbb{R}$ the functions I_t, I_s Poisson-commute with respect to the standard Poisson bracket on T^*M, that is:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial I_t}{\partial p_i}\frac{\partial I_s}{\partial x^i} - \frac{\partial I_t}{\partial x^i}\frac{\partial I_s}{\partial p_i} = 0.$$

In the Riemannian signature, Theorem 3 is due to [27]. In all signatures, it was independently proved in [3, 49].

2.2. Difference between connections of projectively equivalent metrics

We consider the (1,1)-tensor L constructed by projectively equivalent metrics g and $\bar g$ by (2). As it was observed in [46], see also [3, Theorem 2], it satisfies, for a certain 1-form λ_i, the following equation:

$$\nabla_k L_{ij} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}. \tag{7}$$

Here and later we use g for the covariant differentiations and for the tensor manipulations with indexes. By contracting (7) with g^{ij}, we see that the 1-form λ_i is the differential of the function $\lambda := \frac{1}{2}\operatorname{trace}(L) = \frac{1}{2}L^s_s$.

Remark 1. *The projectively-invariant form of this equation is due to [19], see also the survey [44] (and [12] for its two-dimensional version). It played essential role in many recent developments in the theory of projectively equivalent metrics including the solutions of two problems explicitly stated by Sophus Lie [12, 40], the proof of the discrete version of the projective Lichnerowciz conjecture [43, 51] and the proof of the Lichnerowicz conjecture for metrics of Lorenzian signature [8].*

The 1-form λ_i is closely related to the difference between the Levi-Civita connections of $\nabla = \left(\Gamma^i_{jk}\right)$ and $\bar\nabla = \left(\bar\Gamma^i_{jk}\right)$ (see e.g. [46] or [22, §2.2]): for the 1-form

$$\phi_i := -L^s_i \lambda_s \tag{8}$$

we have

$$\bar\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} = \delta^i_k \phi_j + \delta^i_j \phi_k. \tag{9}$$

From formulas (8,9) we see that if $\lambda = \operatorname{trace}(L)$ has zero of order k at a point $p \in M$, then at this point the connections coincide up to the order $k-1$. In particular, for any tensor field T the $(k-1)$st, and also lower order, covariant derivatives of T in ∇ and $\bar\nabla$ coincide in p:

$$\nabla_{i_1}\nabla_{i_2}...\nabla_{i_{k-1}} T \overset{\text{at } p}{=} \bar\nabla_{i_1}\bar\nabla_{i_2}...\bar\nabla_{i_{k-1}} T.$$

Let us recall one more important property of projectively equivalent metrics:

Theorem 4 (Folklore, e.g. Lemma 1 in [22] or (12) in [23]). *Let g and $\bar g$ be projectively equivalent metrics and L is as in* (2)*. Then, the Ricci curvature tensor R_{ij} of g commutes with L, in the sense*

$$R^i_s L^s_j - L^i_s R^s_j = 0. \tag{10}$$

(For each $x \in M$ the formula (10) is just the formula of the commutators of two endomorphisms of T_xM: the first is given by the Ricci tensor with one index raised, and the other it given by L).

2.3. Perturbing the metrics in the class of projectively equivalent metrics.

Let us now show that (for any k) one can perturb the metrics g and $\bar g$ in the class of projectively equivalent metrics such that at a point they remain the same up to order k and at another point the function λ is constant up to order k.

We say that two tensors or affine connections *coincide at a point p up to order k*, if their difference is zero at p and in a local coordinate system all partial derivatives up to the order k of the components of their difference are zero at the point p. This property does not depend on the choice of a coordinate system.

In particular, a function is *constant at p up to order k* if all its partial derivatives up to order k are zero at p.

Theorem 5. *Let g and $\bar g$ be projectively equivalent metrics and L is as in* (2)*. Then, for each $k \in \mathbb{N}$ and for almost any point $p \in M$ there exists an arbitrary small neighborhood U containing p, a point $q \in U$ and a pair of projectively equivalent metrics g' and $\bar g'$ on U (whose tensor* (2) *will be denoted by L' and the function $\frac{1}{2}\operatorname{trace}(L')$ will be denoted by λ') such that the following holds:*

(A) At the point p, g coincides with g' and $\bar g$ coincides with $\bar g'$ up to order k.

(B) At the point q, λ' is constant up to order k.

"Almost every point" means that the set of such points contains an open everywhere dense subset.

Theorem 5 essentially follows from [5, 6], let us explain this. We consider the points p which are algebraically generic in the sense of [10, Def. 2.7]: that is, there exists a neighborhood $U \ni p$ such that at every point of the neighborhood the number of different eigenvalues of L and the number and the sizes of the Jordan blocks are the same (of course the eigenvalues are not necessary constant and usually depend on the point; by the implicit function theorem they are smooth functions near p).

Take such a point. Note that λ is the half of the sum of eigenvalues of L, counted with algebraic multiplicities. We need to find projectively equivalent metrics g' and $\bar g'$ such that they coincide to order k at p with g and $\bar g$ and such that all eigenvalues of L' are constant up to order k in some point q.

By the Splitting-Gluing construction [5, §§1.1, 1.2], it is sufficient to do this under the assumption that L has one eigenvalue, or one pair of complex-conjugated eigenvalues. If the geometric multiplicity of an eigenvalue is greater than one, by [6, Proposition 1], the eigenvalue is already a constant, so we are done since $g' = g$ and $\bar g = \bar g'$ are already as we want.

Let us now consider the case when L has one real eigenvalue of geometric multiplicity 1, or a pair of nonreal complex-conjugate eigenvalues of geometric multiplicity 1. In this case, the local structure of g and L near the point p are described in some coordinate system. There are 4 possible cases, the description was done in different papers, let us give the precise references where it can be found.

If eigenvalue is real and its geometric multiplicity is one (so the "splitted out" manifold is one-dimensional), then the description is trivial and was discussed e.g. in [5, Example in §2.1] or [39, Example 3 in §3.2.1].

If L has a pair of nonreal complex-conjugate eigenvalues of geometric multiplicity 1, then the description was done in [4, Theorem 2], see also [40, Theorem A].

If L, at each point of U, is conjugate to a Jordan block with real eigenvalue, the description is in [6, Theorem 4].

If L, at each point of U, is conjugate to a pair of Jordan blocks with complex-conjugated eigenvalues, the description is done in [6, Theorem 5].

In each of the above references, one sees that description is given by a formula and the only object we can choose is the eigenvalue(s) of L: in the 'real' case, it is a function of one variable; this function can be chosen arbitrary (with exception that one may not make it zero; though also this is allowed if we discuss not projectively equivalent metrics but 'compatible' in the terminology of [6], pairs (g, L)).

In the 'nonreal' case, the eigenvalue is a holomorphic function of one variable, again it can be chosen arbitrary (again with exception that it is never zero) in the class of holomphic functions.

In order to prove Theorem 5, one modifies the eigenvalue such that at p is coincides with the initial eigenvalue up to order k, and is constant up to order k in some other point q. One can clearly do it for any function of one variable and for any holomorphic function of one complex variable.

2.4. Carter's condition.

We will need the following result:

THEOREM 6. *Assume K_{ij} is a Killing tensor for g and R_{ij} is the Ricci curvature tensor. Suppose, at the point $p \in M$, we have that up to order k*

$$\nabla_i \left(R^i_s K^s_j - K^i_s R^s_j\right) = 0. \tag{11}$$

Then, the Beltrami-Lapalce operator Δ_g and the operator $\widehat{K}$ commute at the point p up to order k, that is, for every function f we have

$$\left(\Delta_g \widehat{K} - \widehat{K} \Delta_g\right) f = 0 \quad \text{at } p \text{ up to order } k$$

Theorem above is essentially due to B. Carter. Indeed, from [15, Equation (6.16)] it follows that if $\nabla_i \left(R^i_s K^s_j - K^i_s R^s_j\right)$ is zero <u>at all points</u>, then Δ_g and $\widehat{K}$ commute <u>at all points</u>. Careful analysis of the arguments shows that the proof of Carter is valid also pointwise. Note that only a sketch of the proof is given in [15], and we recommend [18, §III(A)] of C. Duval and G. Valent, from which a more detailed proof can be extracted. More precisely, combining [18, Equations (3.11) and (3.16)] we obtain the above mentioned result of Carter.

2.5. If a Killing tensor vanishes up to a sufficiently high order at one point, then it is identically zero

THEOREM 7. *Let M be a connected manifold and g be a metric of any signature on it. Assume K is a Killing tensor of order k (i.e., K is a symmetric $(0, k)$ tensor satisfying the equation $\nabla_{(i} K_{i_1 \dots i_k)} = 0$). If K vanishes up to order k at one point, then it vanishes identically on the whole manifold.*

This theorem follows from [48] (see also [25, §3]). We will need this theorem for first and second degree Killing tensors. Note that for the first degree Killing tensors (= Killing vectors, after raising the index), Theorem 7 can be obtained by the following geometric argument: if a Killing vector field vanishes at a point q up to order 1, then the flow of this vector field acts trivially on the tangent space to q. Since it commutes with the exponential mapping, the Killing vector field must be identically zero. For second degree Killing tensors, the proof is based on the prolongation of the Killing equation which was essentially done in [50]. For all degree Killing tensors, the prolongation of Killing equation was essentially done in [48], though formally this paper discusses special case of constant curvature metrics. Indeed, for our goal the higher order terms of the prolongation are sufficient, and they do not depend on the curvature of the metric, see e.g. the discussion in [25, §3]).

3. Proof of Theorem 1.

We assume that g and $\bar g$ are projectively equivalent metrics of any signature on M^n, $n \geqslant 2$. We consider L given by (2), the family $K^{(t)}$ of Killing tensors given by (4) and the corresponding differential operators $\widehat{K}^{(t)}$. Combining Theorems 4 and 6, we see that the operators commute with Δ_g.

Let us take any $t, s \in \mathbb{R}$ and consider the commutator

$$\widehat{Q} := \widehat{K}^{(t)}\widehat{K}^{(s)} - \widehat{K}^{(s)}\widehat{K}^{(t)}.$$

Our goal is to show that it vanishes; we will first show that it is (linear) differential operator of order at most 2, i.e., that when we apply $\widehat{Q}$ to a function f the higher derivatives of f vanish. This step is well-known, see e.g. [15] or [18], let us shortly recall the arguments.

Clearly, $\widehat{Q}$ is a differential operator of order at most 4, since both $\widehat{K}^{(t)}$ and $\widehat{K}^{(s)}$ have order 2. One immediately sees though, that the operators $\widehat{K}^{(t)}\widehat{K}^{(s)}$ and $\widehat{K}^{(s)}\widehat{K}^{(t)}$ have the same symbols, so the 4th order terms cancel when we subtract one from the other. Thus, the order of $\widehat{Q}$ is at most 3. The third order terms vanish because the integrals corresponding to $K^{(s)}$ and $K^{(t)}$ commute by Theorem 3. Indeed, direct calculations show that the symbol of the commutator of two differential operators is the Poisson bracket of their symbols.

The proof that the first and the second order terms vanish is based on another (new) argument which will use all the results recalled in §2.

First observe that there exist a symmetric (2,0) tensor Q^{ij} and the vector field V^ℓ such that

$$\widehat{Q} = \nabla_i Q^{ij} \nabla_j + V^\ell \nabla_\ell.$$

Indeed, the operator $\widehat{Q}$ does not have terms of zero order, since neither $\widehat{K}^{(t)}$ nor $\widehat{K}^{(s)}$ have such. One can collect all second order terms in $\nabla_i Q^{ij} \nabla_j$ and declare the rest as $V^\ell \nabla_\ell$.

Since Δ_g commutes with $\widehat{K}^{(t)}$ and $\widehat{K}^{(s)}$, it commutes with $\widehat{Q}$. Then, Q_{ij} is a Killing (0,2) tensor for g.

It is sufficient to show, that Q_{ij} vanishes at almost every point. It is sufficient to show this for almost every t and s. We take s and t such that the tensors $K^{(t)}, K^{(s)}$ are nondegenerate at some point. We will work in a small neighborhood of this point, in each point of which the tensors $K^{(t)}, K^{(s)}$ are nondegenerate. Now we use Theorem 5: we first take a sufficiently big k and then, for almost every point of p of this neighborhood consider the projectively equivalent metrics g' and $\bar g'$ satisfying conditions (A,B) from Theorem 5.

At the point p, the metrics g and $\bar g$ coincide with the metrics g' and $\bar g'$, which implies that the Killing tensor Q'_{ij} (i.e., the analog of the Killing tensor Q_{ij} constructed by g' and $\bar g'$) coincides with Q_{ij} in p. Let us show that, if k is high enough, at the point q the Killing tensor Q'_{ij} vanishes up to order 2.

At the point q, the 1-form λ_i and therefore the 1-form ϕ_i (recalled in §2.2) vanishes up to (sufficiently high) order k. Then, at the point q, the difference between Levi-Civita connections ∇' of g' and of $\bar g'$ vanishes up to order $k-1$, see (9). Since the Killing tensors $K'^{(s)}$, $K'^{(t)}$ are constructed by $g', \bar g'$ using algebraic formulas, the covariant derivative in ∇' of $K'^{(s)}$, $K'^{(t)}$ vanishes at the point

q up to order $k-1$. Then, up to the order $k-1$, at the point q, the Levi-Civita connection of the (contravariant) metrics[1] $\left(K'^{(s)}\right)^{ij}$, $\left(K'^{(t)}\right)^{ij}$ coincide with ∇'.

Then, at the point q, the Betrami-Laplace operators of the the metrics $K'^{(s)}$, $K'^{(t)}$ coincide with $\widehat{K}'^{(s)}$, $\widehat{K}'^{(t)}$ up to order $k-2$. From the other side the Ricci tensor corresponding to the metric $K'^{(s)}$ commutes (in the sense of (10)) with $K'^{(t)}$, up to the terms of order $k-3$, since it coincides up to the terms of order $k-3$ with the Ricci tensor of g' and it commutes with L' and therefore with $S'(t)$. Then, the Carter condition (11) is fulfilled up to order $k-4$. Then, the operators $\hat{K}^{(t)}$ and $\hat{K}^{(s)}$ commute at q up to order $k-4$, which means that at q we have $Q'_{ij}=0$ up to order $k-5$. If $k>7$, then this implies by Theorem 5 that Q'_{ij} is identically zero, which means it vanishes at p, where it coincides with Q_{ij}. Finally, $Q_{ij}=0$ at p and since p was almost every point $Q_{ij}\equiv 0$ on the whole manifold.

Remark 2. *In fact the reader does not need to follow the precise calculations of the necessary order above: it is clear that if k is high enough then at the point q the Levi-Civita connection of the contravariant metric corresponding to $K'^{(s)}$ (with upper indexes) coincides with that of g up to a sufficiently high order and $K'^{(t)}$ is parallel with respect to any of this connections up to a high order which means that the operators $\hat{K}^{(t)}$ and $\hat{K}^{(s)}$ commute at p up to some high order and Q' is zero up to a high order and is therefore identically zero.*

But then $\widehat{Q}=V^\ell\nabla_\ell$, since it commutes with Δ_g, V^ℓ is a Killing vector field. Using the same arguments, one shows that (for a perturbed metrics g', $\bar{g}'$), $V'^\ell\equiv 0$, which implies that $V^\ell=0$ at p. Since this is fulfilled for almost all points p, we obtain $V^\ell\equiv 0$. Theorem 1 is proved.

4. Open problems

4.1. Introducing potential

We assume that g and $\bar{g}$ are projectively equivalent metrics of any signature on M^n. We consider the Killing tensors $K^{(t)}$ and the corresponding integrals I_t from Theorem 3 and ask the following questions:

Can one add functions $U^{(t)}: M\to\mathbb{R}$ to the integrals I_t such that the results still Poisson-commute? Do the corresponding differential operators, i.e., $\widehat{K}^{(t)}+U^{(t)}$, still commute?

Of course it is interesting to get not one example of such functions (the trivial example $U^{(t)}=\text{const}$ always exists) but construct all such examples, at least locally.

If L is semi-simple at almost every point (which is always the case if g is Riemannian), the answer is positive, which follows from the combination of results of [24, 17], see also [16].

4.2. Generalize the result for c-projectively equivalent metrics.

Theory of projectively equivalent metrics has a natural analogue on Kähler manifolds: theory of c-projectively equivalent metrics. Let us recall the basic definition:

Let (M,g,J) be a Kähler manifold of arbitrary signature of real dimension $2n\geqslant 4$. A regular curve $\gamma:\mathbb{R}\supseteq I\to M$ is called *J-planar* if there exist functions $\alpha,\beta: I\to\mathbb{R}$ such that

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t)=\alpha\dot\gamma(t)+\beta J(\dot\gamma(t)) \text{ for all } t\in I, \tag{12}$$

where $\dot\gamma=\frac{d}{dt}\gamma$.

[1] As explicitly indicated, we view now the Killing tensors as metrics: we first raise the indexes in (4) by g'. The result is a nondegenerate symmetric $(2,0)$ tensor, we view it as a contravariant metric. In order to obtain an usual metric, with lower indexes, one needs to invert the matrix of $\left(K'^{(t)}\right)^{ij}$.

From the definition we see immediately that the property of J-planarity is independent of the parameterization of the curve, and that geodesics are J-planar curves. We also see that J-planar curves form a much bigger family than the family of geodesics; at every point and in every direction there exist infinitely many geometrically different J-planar curves.

Two metrics g and $\hat{g}$ of arbitrary signature that are Kähler w.r.t the same complex structure J are *c-projectively equivalent* if any J-planar curve of g is a J-planar curve of $\hat{g}$. Actually, the condition that the metrics are Kähler with respect to the same complex structure is not essential; it is an easy exercise to show that if any J-planar curve of a Kähler structure (g, J) is a $\hat{J}$-planar curve of another Kähler structure $(\hat{g}, \hat{J})$, then $\hat{J} = \pm J$.

C-projective equivalence was introduced (under the name "h-projective equivalence"or "holomorphically projective correspondence") by T. Otsuki and Y. Tashiro in [45, 47]. Their motivation was to generalize the notion of projective equivalence to the Kähler situation. Otsuki and Tashiro, see also [21, §6.2], have shown that projective equivalence is not interesting in the Kähler situation, since only simple examples are possible, and suggested c-projective equivalence as an interesting object of study instead. This suggestion appeared to be very fruitful and between the 1960s and the 1970s, the theory of c-projectively equivalent metrics and c-projective transformations was one of the main research topics in Japanese and Soviet (mostly Odessa and Kazan) differential geometry schools. Geometric structures that are equivalent to the existence of a c-projective equivalent metric were suggested independently in different branches of mathematics, see e.g. the introductions of [42] for a list and [14] for more detailed explanation on the relation to Hamiltonian 2-forms.

It appears that many ideas and many results in the theory of projectively equivalent metrics have their counterparts in the c-projective setting. For example, the use of integrable systems in the proof of the Yano-Obata conjecture [41] about c-projective transformations is very similar to that of in the Lichnerowicz conjecture [37] for projective transformations. Compare also [7, 40]. See e.g. [8, §1.2.] for one of the explanations. In particular, Theorems 2 and 3 have clear analogs: by a c-projectively equivalent metric $\bar{g}$ one can construct second degree Killing tensors for g, and the corresponding integrals commute: see e.g. [13, Proposition 5.14], the result was initially obtained in [49, Theorem 2]. We ask the following question: can one generalize the result of the present paper to c-projectively equivalent metrics?

Do the differential operators corresponding to the Killing tensors from [13, Proposition 5.14], [49, Theorem 2] commute?

Also in the c-projective case, the Ricci tensor commutes with the analog of the tensor L. One can do it by the following tensor calculations which are similar to that of the proof of Theorem 4: take [20, Equation (7)] (which is the c-projective analog of [23, Equation (11)]), perturb the indexes by the trivial permutation and by the permutations $ik\ell \mapsto k\ell i$ and $ik\ell \mapsto \ell ik$ and sum the results. We obtain [23, Equation (13)] (where a_{ij} corresponds to L_{ij} in our notation). Contracting the obtained equation with g^{jk}, we obtain an analog of (10), which implies by Theorem 6 that the operators commute with the Beltrami-Laplace operator. Unfortunately, the rest of the proof can not be directly generalized to the c-projective case, since the analog of the function λ can not be a constant up to high order by [20, Corollary 3]. One can try to employ [18, Equation (3.11)] for it, but we did not manage to overcome the technical difficulties.

We do not have clear expectation how the answer would look: we tip that the operators do commute, but will not be suprised if their commutators are first order differential operators corresponding to Killing vector fields. We would like to recall here that a c-projectively equivalent metric allows one to construct Killing vector fields, see e.g. [8, §2] and [13, §5.2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Beltrami, *Resoluzione del problema: riportari i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetische vengano rappresentante da linee rette*, Ann. Mat., **1**, 1865, no. 7.

2. S. Benenti, C. Chanu, G. Rastelli, *Remarks on the connection between the additive separation of the Hamilton-Jacobi equation and the multiplicative separation of the Schrödinger equation. II. First integrals and symmetry operators,* J. Math. Phys. **43**, 2002, no. 11, 5223–5253.

3. A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, *Geometrical interpretation of Benenti systems*, Journal of Geometry and Physics, **44**, 2003, 489–506.

4. A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, G. Pucacco, *Normal forms for pseudo-Riemannian 2-dimensional metrics whose geodesic flows admit integrals quadratic in momenta,* J. Geom. Phys. **59**, 2009, no. 7, 1048–1062.

5. A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, *Splitting and gluing lemmas for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics,* Trans. Amer. Math. Soc. **363**, 2011, no 8, 4081–4107.

6. A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, *Local normal forms for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics,* Trans. Amer. Math. Soc. **367**, 2015, 6719–6749.

7. A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, Th. Mettler, S. Rosemann, *Four-dimensional Kähler metrics admitting c-projective vector fields,* J. Math. Pures Appl. (9) **103**, 2015, no. 3, 619–657.

8. A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, S. Rosemann, *Local normal forms for c-projectively equivalent metrics and proof of the Yano-Obata conjecture in arbitrary signature. Proof of the projective Lichnerowicz conjecture for Lorentzian metrics,* `arXiv:1510.00275`

9. A. Bolsinov, V. S. Matveev, E. Miranda, S. Tabachnikov, *Open Problems, Questions, and Challenges in Finite-Dimensional Integrable Systems*, Philosophical Transactions A. **376**, 2018, 20170430.

10. A. V. Bolsinov, A. Yu. Konyaev, V. S. Matveev, *Nijenhuis Geometry,* `arXiv:1903.04603`

11. Ch. Boubel, *On the algebra of parallel endomorphisms of a pseudo-Riemannian metric,* J. Differential Geom. **99**, 2015, no. 1, 77–123.

12. R. Bryant, G. Manno, V. S. Matveev, *A solution of S. Lie Problem: Normal forms of 2-dim metrics admitting two projective vector fields,* Math. Ann. **340**, 2008, no. 2, 437–463.

13. D. Calderbank, M. Eastwood, V. S. Matveev, K. Neusser, *C-projective geometry,* accepted to Mem. AMS, preprint `arXiv:1512.04516`.

14. D. Calderbank, V. S. Matveev, S. Rosemann, *Curvature and the c-projective mobility of Kaehler metrics with hamiltonian 2-forms,* Compositio Math. **152**, 2016, 1555–1575.

15. B. Carter, *Killing tensor quantum numbers and conserved currents in curved space,* Phys. Rev. D (3) **16**, 1977, no. 12, 3395–3414.

16. C. Chanu, L. Degiovanni, G. Rastelli, *Modified Laplace-Beltrami quantization of natural Hamiltonian systems with quadratic constants of motion* J. Math. Phys. **58**, 2017, no. 3, 033509.

17. Th. Daudé, N. Kamran, F. Nicolea, *Separability and Symmetry Operators for Painlevé Metrics and their Conformal Deformations*, SIGMA 15 (2019), 069, 42 pages. `arXiv:1903.10573`.

18. C. Duval, G. Valent, *Quantum integrability of quadratic Killing tensors,* J. Math. Phys. **46**, 2005, no. 5, 053516, 22 pp.

19. M. Eastwood, V. S. Matveev, *Metric connections in projective differential geometry,* Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations (Minneapolis, MN, 2006, 339–351, IMA Vol. Math. Appl., **144**, 2007, Springer, New York.

20. A. Fedorova, V. Kiosak, V. Matveev, S. Rosemann, *The only closed Kähler manifold with degree of mobility > 2 is $(CP(n)g_{Fubini-Study})$*, Proc. London Math. Soc. **105**, 2012, no. 1, 153–188.

21. A. R. Gover, V. S. Matveev, *Projectively related metrics, Weyl nullity and metric projectively invariant equations,* Proc. Lond. Math. Soc. (3) **114**, 2017, no. 2, 242–292.

22. V. Kiosak, V. S. Matveev, *Complete Einstein metrics are geodesically rigid,* Comm. Math. Phys. **289**, 2009, no. 1, 383–400.

23. V. Kiosak, V. S. Matveev, *Proof Of The Projective Lichnerowicz Conjecture For Pseudo-Riemannian Metrics With Degree Of Mobility Greater Than Two*, Comm. Mat. Phys. **297**, 2010, no. 2, 401–426.

24. B. Kruglikov, V. S. Matveev, *On vanishing of topological entropy for certain integrable systems,* Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **12**, 2006, 19–28

25. B. Kruglikov, V. S. Matveev, *The geodesic flow of a generic metric does not admit nontrivial integrals polynomial in momenta*, Nonlinearity **29**, 2016, 1755–1768

26. T. Levi-Civita, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, Ann. di Mat., serie 2^a, **24**, 1896, 255–300.

27. V. S. Matveev, P. Topalov, *Trajectory equivalence and corresponding integrals*, Regular and Chaotic Dynamics, **3**, 1998, 30–45.

28. V. S. Matveev, P. Topalov, *Metric with ergodic geodesic flow is completely determined by unparameterized geodesics,* Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **6**, 2000, 98–104.

29. V. S. Matveev, P. Topalov, *Integrability in the theory of geodesically equivalent metrics,* Kowalevski Workshop on Mathematical Methods of Regular Dynamics (Leeds, 2000). J. Phys. A **34**, 2001, no. 11, 2415–2433.

30. V. S. Matveev, *Commuting operators and separation of variables for Laplacians of projectively equivalent metrics*, Let. Math. Phys., **54**, 2000, 193–201.

31. V. S. Matveev, P. Topalov, *Quantum integrability for the Beltrami-Laplace operator as geodesic equivalence*, Math. Z. **238**, 2001, no. 4, 833–866.

32. V. S. Matveev, *Three-dimensional manifolds having metrics with the same geodesics,* Topology **42**, 2003, no. 6, 1371–1395.

33. V. S. Matveev, *Beltrami problem, Lichnerowicz-Obata conjecture and applications of integrable systems in differential geometry,* Tr. Semin. Vektorn. Tenzorn. Anal, **26**, 2005, 214–238.

34. V. S. Matveev, *Hyperbolic manifolds are geodesically rigid*, Invent. math. **151**, 2003, 579–609.

35. V. S. Matveev, P. Topalov, *Geodesic equivalence via integrability*, Geometriae Dedicata **96**, 2003, 91–115.

36. В. С. Матвеев, *Собственные значения отображения Синюкова для геодезически эквивалентных метрик глобально упорядочены*, Матем. заметки, **77** , 2005, no.3, pp. 412–423

37. V. S. Matveev, *Proof of the projective Lichnerowicz-Obata conjecture,* J. Differential Geom. **75**, 2007, no. 3, 459–502.

38. V. S. Matveev, P. Mounoud, *Gallot-Tanno theorem for closed incomplete pseudo-Riemannian manifolds and applications,* Ann. Global Anal. Geom. **38**, 2010, no. 3, 259–271.

39. V. S. Matveev, *Geodesically equivalent metrics in general relativity,* J. Geom. Phys. **62**, 2012, 675–691.

40. V. S. Matveev, *Two-dimensional metrics admitting precisely one projective vector field. This paper has an Appendix Dini theorem for pseudoriemannian metrics (joint with A. Bolsinov and G. Pucacco)*, Math. Ann. **352**, 2012, no. 4, 865–909.

41. V. S. Matveev, S. Rosemann, *Proof of the Yano-Obata Conjecture for holomorph-projective transformations,* J. Diff. Geom. **92**, 2012, 221–261.

42. V. S. Matveev, S. Rosemann, *Conification construction for Kähler manifolds and its application in c-projective geometry,* Adv. Math. **274**, 2015, 1–38.

43. В. С. Матвеев, *О числе нетривиальных проективных преобразований замкнутых многообразий*, Фундамент. и прикл. матем., **20**, 2015, no.2, 125–131.

44. V. S. Matveev, *Projectively invariant objects and the index of the group of affine transformations in the group of projective transformations*, Bull. Iran. Math. Soc. **44**, 2018, 341–375.

45. T. Otsuki, Y. Tashiro, *On curves in Kaehlerian spaces*, Math. J. Okayama Univ. **4**, 1954, 57–78.

46. Н. С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств*, “Наука”, Москва, 1979, MR0552022, Zbl 0637.53020.

47. Y. Tashiro, *On a holomorphically projective correspondence in an almost complex space*, Math. J. Okayama Univ. **6**, 1957, 147–152.

48. G. Thompson, *Killing tensors in spaces of constant curvature,* J. Math. Phys. **27**, 1986, no. 11, 2693–2699.

49. P. Topalov, *Geodesic hierarchies and involutivity,* J. Math. Phys. **42**, 2001, no. 8, 3898–3914.

50. Th. Wolf, *Structural equations for Killing tensors of arbitrary rank,* Comput. Phys. Comm. **115**, 1998, 316–329.

51. A. Zeghib, *On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds*, Adv. Math. **297**, 2016, 26–53.

REFERENCES

1. Beltrami, E. 1865, “Resoluzione del problema: riportari i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetische vengano rappresentante da linee rette”, *Ann. Mat.*, vol. 1, no. 7.

2. Benenti, S., Chanu, C. & Rastelli, G. 2002, “Remarks on the connection between the additive separation of the Hamilton-Jacobi equation and the multiplicative separation of the Schrödinger equation. II. First integrals and symmetry operators”, *J. Math. Phys.*, vol. 43, no. 11, pp. 5223–5253.

3. Bolsinov, A. V. & Matveev, V. S., 2003 “Geometrical interpretation of Benenti systems”, *Journal of Geometry and Physics*, vol. 44, pp. 489–506.

4. Bolsinov, A. V., Matveev, V. S., & Pucacco,G. 2009, “Normal forms for pseudo-Riemannian 2-dimensional metrics whose geodesic flows admit integrals quadratic in momenta”, *J. Geom. Phys.*, vol. 59, no. 7, pp. 1048–1062.

5. Bolsinov, A. V. & Matveev, V. S., 2011, “Splitting and gluing lemmas for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 363, no. 8, pp. 4081–4107.

6. Bolsinov, A. V. & Matveev, V. S., 2015, “Local normal forms for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 367, pp. 6719–6749.

7. Bolsinov, A. V., Matveev, V. S., Mettler, Th. & Rosemann,S. 2015, “Four-dimensional Kähler metrics admitting c-projective vector fields”, *J. Math. Pures Appl.* vol. 103, no. 3, pp. 619–657.

8. Bolsinov, A. V. Matveev, V. S., & Rosemann, S. “Local normal forms for c-projectively equivalent metrics and proof of the Yano-Obata conjecture in arbitrary signature. Proof of the projective Lichnerowicz conjecture for Lorentzian metrics”, Available at: `arXiv:1510.00275`

9. Bolsinov, A. V., Matveev, V. S., Miranda, E. & Tabachnikov, S. 2018, “Open Problems, Questions, and Challenges in Finite-Dimensional Integrable Systems”, *Philosophical Transactions A.*, vol. 376, 20170430.

10. Bolsinov, A. V., Konyaev, A. Yu. & Matveev, V. S. 2019, “Nijenhuis Geometry”, Available at: `arXiv:1903.04603`

11. Boubel, Ch. 2015, “On the algebra of parallel endomorphisms of a pseudo-Riemannian metric”, *J. Differential Geom.*, vol. 99, no. 1, pp. 77–123.

12. Bryant, R., Manno, G. & Matveev, V. S. 2008, “A solution of S. Lie Problem: Normal forms of 2-dim metrics admitting two projective vector fields”, *Math. Ann.*, vol. 340, no. 2, pp. 437–463.

13. Calderbank, D., Eastwood, M., Matveev, V. S. & Neusser, K. “C-projective geometry”, accepted to Mem. AMS, preprint Available at: `arXiv:1512.04516`.

14. Calderbank, D. Matveev, V. S. & Rosemann, S. 2016, “Curvature and the c-projective mobility of Kaehler metrics with hamiltonian 2-forms”, *Compositio Math.*, vol.152, pp. 1555–1575.

15. Carter, B. 1977, “Killing tensor quantum numbers and conserved currents in curved space”, *Phys. Rev. D* (3) vol. 16, no. 12, pp. 3395–3414.

16. Chanu, C., Degiovanni, L. & Rastelli, G. 2017, “Modified Laplace-Beltrami quantization of natural Hamiltonian systems with quadratic constants of motion”, *J. Math. Phys.*, vol. 58, no. 3, 033509.

17. Daudé, Th., Kamran, N. & Nicolea, F. 2019, “Separability and Symmetry Operators for Painlevé Metrics and their Conformal Deformations”, SIGMA 15, 069, 42 pages. Available at: `arXiv:1903.10573`.

18. Duval, C. & Valent,G. 2005, “Quantum integrability of quadratic Killing tensors”, *J. Math. Phys.*, vol. 46, no. 5, 053516, 22 pp.

19. Eastwood, M. & Matveev, V. S. 2007, “Metric connections in projective differential geometry”, *Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations* (Minneapolis, MN, 2006, pp. 339–351, *IMA Vol. Math. Appl.*, vol. 144, Springer, New York.

20. Fedorova, A., Kiosak, V., Matveev, V. & Rosemann, S. 2012, “The only closed Kähler manifold with degree of mobility > 2 is $(CP(n), g_{Fubini-Study})$”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 105, no. 1, pp. 153–188.

21. Gover,A. R. & Matveev, V. S. 2017, “Projectively related metrics, Weyl nullity and metric projectively invariant equations”, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) vol. 114, no. 2, pp. 242–292.

22. Kiosak, V. & Matveev, V. S. 2009, “Complete Einstein metrics are geodesically rigid”, *Comm. Math. Phys.*, vol. 289, no. 1, pp. 383–400.

23. Kiosak, V. & Matveev, V. S. 2010, “Proof Of The Projective Lichnerowicz Conjecture For Pseudo-Riemannian Metrics With Degree Of Mobility Greater Than Two”, *Comm. Mat. Phys.*, vol. 297, no. 2, pp. 401–426.

24. Kruglikov, B. & Matveev, V. S. 2006, “On vanishing of topological entropy for certain integrable systems”, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* vol. 12, pp. 19–28

25. Kruglikov, B. & Matveev, V. S. 2016, “The geodesic flow of a generic metric does not admit nontrivial integrals polynomial in momenta”, *Nonlinearity*, vol. 29, pp. 1755–1768

26. Levi-Civita, T. 1896, “Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche”, *Ann. di Mat.*, serie 2^a, vol. 24, pp. 255–300.

27. Matveev, V. S. & Topalov, P. 1998, “Trajectory equivalence and corresponding integrals”, *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 3, pp. 30–45.

28. Matveev, V. S. & Topalov, P. 2000, “Metric with ergodic geodesic flow is completely determined by unparameterized geodesics”, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* vol. 6, pp. 98–104.

29. Matveev, V. S. & Topalov,P. 2001, “Integrability in the theory of geodesically equivalent metrics”, Kowalevski Workshop on Mathematical Methods of Regular Dynamics (Leeds, 2000). *J. Phys. A*, vol. 34, no. 11, pp. 2415–2433.

30. Matveev, V. S. 2000, “Commuting operators and separation of variables for Laplacians of projectively equivalent metrics”, *Let. Math. Phys.*, vol. 54, pp. 193–201.

31. Matveev, V. S. & Topalov, P. 2001, “Quantum integrability for the Beltrami-Laplace operator as geodesic equivalence”, *Math. Z.*, vol. 238, no. 4, pp. 833–866.

32. Matveev, V. S. 2003, “Three-dimensional manifolds having metrics with the same geodesics”, *Topology* vol. 42, no. 6, pp. 1371–1395.

33. Matveev, V. S. 2005, “Beltrami problem, Lichnerowicz-Obata conjecture and applications of integrable systems in differential geometry”, *Tr. Semin. Vektorn. Tenzorn. Anal*, vol. 26, pp. 214–238.

34. Matveev, V. S. 2003, “Hyperbolic manifolds are geodesically rigid”, *Invent. math.*, vol. 151, pp. 579–609.

35. Matveev, V. S. & Topalov, P. 2003, “Geodesic equivalence via integrability”, *Geometriae Dedicata*, vol. 96, pp. 91–115.

36. Matveev, V. S., 2005 “The eigenvalues of the Sinjukov mapping are globally ordered”, *Math. Notes*, vol.77, no. 3-4, pp. 380–390.

37. Matveev, V. S. 2007, “Proof of the projective Lichnerowicz-Obata conjecture”, *J. Differential Geom.*, vol. 75, no. 3, pp. 459–502.

38. Matveev, V. S. & Mounoud, P. 2010, “Gallot-Tanno theorem for closed incomplete pseudo-Riemannian manifolds and applications”, *Ann. Global Anal. Geom.*, vol. 38, no. 3,pp. 259–271.

39. Matveev, V. S. 2012, “Geodesically equivalent metrics in general relativity”, *J. Geom. Phys.*, vol. 62, pp. 675–691.

40. Matveev, V. S. 2012, “Two-dimensional metrics admitting precisely one projective vector field. This paper has an Appendix Dini theorem for pseudoriemannian metrics (joint with A. Bolsinov and G. Pucacco)”, *Math. Ann.*, vol. 352, no. 4, pp. 865–909.

41. Matveev, V. S. & Rosemann, S. 2012, “Proof of the Yano-Obata Conjecture for holomorph-projective transformations”, *J. Diff. Geom.*, vol. 92, pp. 221–261.

42. Matveev,V. S. & Rosemann,S. 2015, “Conification construction for Kähler manifolds and its application in c-projective geometry”, *Adv. Math.*, vol.274, pp. 1–38.

43. Matveev, V. S. 2015, “On the number of nontrivial projective transformations of closed manifolds”, Russian version in *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 20, pp. 125–131, English translation in *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 223, 2017, pp. 734–738.

44. Matveev, V. S. 2018, “Projectively invariant objects and the index of the group of affine transformations in the group of projective transformations”, *Bull. Iran. Math. Soc.*, vol. 44, pp. 341–375.

45. Otsuki, T. & Tashiro, Y. 1954, “On curves in Kaehlerian spaces”, *Math. J. Okayama Univ.*, vol.4, pp. 57–78.

46. Sinjukov, N. S. 1979, *Geodesic mappings of Riemannian spaces*, (in Russian) “Nauka”, Moscow, MR0552022, Zbl 0637.53020.

47. Tashiro, Y. 1957, “On a holomorphically projective correspondence in an almost complex space”, *Math. J. Okayama Univ.*, vol. 6, pp. 147–152.

48. Thompson, G. 1986, “Killing tensors in spaces of constant curvature”, *J. Math. Phys.*, vol. 27, no. 11, pp. 2693–2699.

49. Topalov, P. 2001, “Geodesic hierarchies and involutivity”, *J. Math. Phys.*, vol. 42, no. 8, pp. 3898–3914.

50. Wolf, Th. 1998, “Structural equations for Killing tensors of arbitrary rank”, *Comput. Phys. Comm.*, vol. 115, pp. 316–329.

51. Zeghib, A. 2016, “On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds”, *Adv. Math.*, vol. 297, pp. 26–53.

Получено 11.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 515.162.32 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-290-300

Распознавание и табулирование 3-многообразий до сложности 13[1]

С. В. Матвеев, В. В. Таркаев

Матвеев Сергей Владимирович — академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Челябинский государственный университет, ведущий научный сотрудник, Томский государственный университет (г. Челябинск).
e-mail: matveev@csu.ru
Таркаев Владимир Викторович — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Челябинский государственный университет, Институт математики и механики УрО РАН (г. Челябинск).
e-mail: trk@csu.ru

Аннотация

В работе кратко описывается полная таблица ориентируемых замкнутых неприводимых 3-многообразий сложности $\leqslant 13$, методы ее построения и проверки, кроме того, формулируется ряд гипотез касающихся роста числа многообразий различных типов. В приложении дается сжатое объяснение использованных понятий.

Ключевые слова: трехмерное многобразие, сложность многообразия, специальные спайны , табулирование трехмерных многообразий.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:
С. В. Матвеев, В. В. Таркаев. Распознавание и табулирование 3-многообразий до сложности 13 // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 290–300.

[1]Части 1 и 2 данной работы поддержаны грантом Российского научного фонда (проект №19-41-02005).Части 3 и 4 данной работы поддержаны грантом РФФИ (проект 19-01-00741).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 515.162.32 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-290-300

Recognition and tabulation of 3-manifolds up to complexity 13

S. V. Matveev, V. V. Tarkaev

Matveev Sergei Vladimirovich — Academician of RAS, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Leading Researcher, National Research Tomsk State University, Tomsk (Chelyabinsk).
e-mail: matveev@csu.ru
Tarkaev Vladimir Viktorovich — Candidate of Physics and Mathematics, researcher, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg (Chelyabinsk).
e-mail: trk@csu.ru

Abstract

We describe in breaf the complete table of closed irreducible orientable 3-manifolds of complexity $\leqslant 13$, and method of its creation and verification. Also we formulate a conjectures concerning the growth of the number of some kinds of manifolds. The appendix contains a short explanation of used terminology.

Keywords: three-dimensional manifolds, complexity of manifold, special spines, tabulation of three-dimensional manifolds.

Bibliography: 25 titles.

For citation:
S. V. Matveev, V. V. Tarkaev, 2020, "Recognition and tabulation of 3-manifolds up to complexity 13", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 290–300.

Dedicated to Anatoly Timofeevich Fomenko on his 75th birthday.

1. Statement and history of the problem

By *manifold*, we understand a compact connected 3-dimensional manifold with boundary (the boundary may be empty, in this case we speak about *closed* manifolds). Our project is related to the following goals.

(A) *Algorithmic recognition of manifolds.* Given two manifolds (given by combinatorial data; say by decomposition into simplexes), to understand whether they are homeomorphic[2].

(B) *Efficient tabulation of manifolds.* To create a table (=list equipped with additional information such as Thurston geometry type, some algebraic-topological information and the values of Turaev-Viro invariants [23]) of all manifolds up to a certain complexity[3] c together with an effective comparing method of any two manifolds of complexity $\leqslant c$.

[2]Recall that in dimension 3, the topological, smooth and PL categories are equivalent
[3]we will recall the definition of complexity in the appendix below; complexity of a manifold is a non-negative integer and for each $c \geq 0$ the number of closed irreducible manifolds of complexity c is finite

Of course, both goals are fundamental, they stay in the center of modern three-dimensional topology and were studied from different perspectives. Clearly, these two goals are closely related. Indeed, having an effective and fast algorithm for the goal (A), one can list all manifolds up to certain complexity allowing having homeomorphic manifolds in the list (there are naive and more sophisticated ways to do it), compare the manifolds from the list pairwisely with the help of the algorithm and kill the duplicates. A natural modification of this naive procedure will also label each manifold with its complexity.

In the other direction, the goal (B) explicitly includes the goal (A) restricted to the manifolds of complexity $\leqslant c$.

In theory, the goal (A) can be considered to be solved: there exists an algorithm that, given two manifolds, decides whether they are homeomorphic. It is explained in the book [17, §6]. The goal (A) was formulated at least in 1962 by W. Haken [5]. Nontrivial steps in the solution of this problem are due in particular to G. Hemion [6] and as a consequence the goal (A) was announced to be solved [8, 26]. Later, a crucial gap in the proof of [6] was found, see the discussion in [17, §6.1]. The problem was finally solved in [17, Theorem 6.6.1].

Unfortunately, using this algorithm to compare two even relatively simple manifolds would exceed the abilities of the modern computers. In simple words, in theory the algorithm exists, in practice it does not help, i.e., the situation in general recognition problem is similar to the situation in its following important special case. Given a closed manifold, how to understand whether it is homeomorphic to the sphere. There is an algorithm of doing it, it is based on the ideas/works of A. Thompson [20], and is is explained in details in [14]. The algorithm, at least in its initial version, is so slow though that there is no sense to realize it on the computer. From the other hand now, because of Perelmann's proof of the Poincare conjecture, there exists a much faster algorithm that answers whether a manifold is the sphere: one needs to check whether the fundamental group of the manifold is trivial, and the operation is a relatively "cheap" from the calculation point of view.

The results which we report in this note are related to the goal (B). In the last 15 years [16, §2] we (together with other mathematicians, see the list of coauthors in the references below) actively worked on the table of manifolds. The new result of this note is the table of all closed orientable irreducible manifolds of complexity 13. The result related to complexity $\leqslant$ 12 is published, for example, in [25].

2. On the table of 3-manifolds of complexity $\leqslant 13$

2.1. The exact numbers of pairwise nonhomeomorphic closed orientable irreducible 3-manifolds of complexity $\leqslant 13$

Here $n(c)$ denotes the number of closed orientable irreducible 3-manifolds of complexity c.

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
$N(c)$	3	2	4	7	14	31	74	175	436	1154	3078	8421	23448	66197	103041

The definition of complexity of a manifold is given in appendix below. Additionally we list there the manifolds of complexity 0.

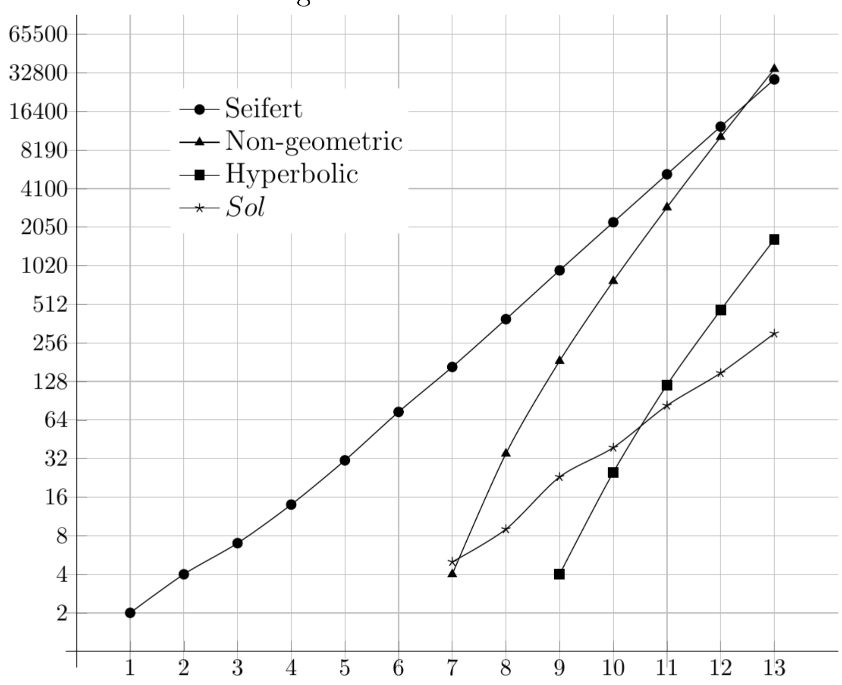
2.2. An information about manifolds of complexity $\leqslant 13$ from the point of view of Thurston's classification

Recall that Thurston proved that there are 8 geometries: $E^3, S^3, S^2\times R, H^2\times R, \widetilde{SL_2R}, Nil, Sol$ and H^3, [22]. A 3-manifold allows not more than 1 of them. Following table gives an information about manifolds of complexity $\leqslant$ 13 according to the classification of Thurston.

c	$S^2 \times R$	E^3	$H^2 \times R$	S^3	Nil	$\widetilde{SL_2R}$	Sol	H^3	Non-geometric
0	0	0	0	3	0	0	0	0	0
1	0	0	0	2	0	0	0	0	0
2	0	0	0	4	0	0	0	0	0
3	0	0	0	7	0	0	0	0	0
4	0	0	0	14	0	0	0	0	0
5	0	0	0	31	0	0	0	0	0
6	0	6	0	61	7	0	0	0	0
7	0	0	0	117	10	39	5	0	4
8	0	0	2	214	14	162	9	0	35
9	0	0	0	414	15	513	23	4	185
10	0	0	8	798	15	1416	39	25	777
11	0	0	4	1582	15	3696	83	120	2921
12	0	0	24	3118	15	9324	149	461	10357
13	0	0	9	6222	15	22916	303	1641	35091

The first column of the table above contains zeros only because, as it well known, there exist exactly 2 closed orientable 3-manifolds having $S^2 \times R$ geometry and both these manifolds are reducible. Therefore, they do not involve in our table.

Below we visualize the same information as in the table above. The diagram contains not 9 but 4 graphs. Here we use the fact that a manifold having a geometry of the first 6 types is a seifert manifold. All values are shown on a logarithmic scale.



2.3. An information about manifolds of complexity $\leqslant 13$ from the point of view of another classification

Now we consider manifolds in the table from the other point of view, we partition the manifolds into 4 types depending on the type (seifert or hyperbolic) of blocks which are involved in the JSJ-decomposition of a manifold under consideration:

1. S — seifert manifolds,

2. h — hyperbolic manifolds,

3. C_S — manifolds which are not seifert but can be glued from seifert blocks only,

4. C_h — non-hyperbolic manifolds of which JSJ-decomposition involves a hyperbolic block.

The classification above do not coincide with classical Thurston's classification, at the same time it is clear that our classification is closely related to Thurston's one. The fact that a manifold is of the type S is equivalent to the fact that the manifold has a geometry of the first 6 types. The h-manifolds are exactly the hyperbolic manifolds. The main difference concerns the other manifolds. We separate out C_h-manifolds from all other non-geometric manifolds. C_S-manifolds are manifolds having geometry Sol together with non-geometric manifolds which are not C_h. The partition of composite manifolds into two different types C_S and C_h, in particular, is motivated by a consideration below (see 3.4). Note also following relationship with knot theory. a satellite knot is a knot which can be placed in a regular neighborhood of some other knot. One can expand the classification to the manifolds which are the complement of prime knots. Then a satellite knots (and probably no other) would give C_h-manifolds.

The table below shows how the numbers of manifolds of 4 types defined above increase depending on the complexity.

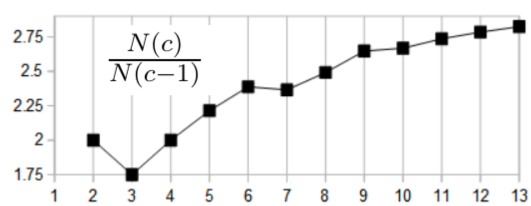
c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
S	3	2	4	7	14	31	74	166	392	942	2237	5297	12481	29162	50812
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	25	120	461	1641	2251
C_S	0	0	0	0	0	0	0	9	44	208	816	3001	10482	35177	49737
C_h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	24	217	244

3. On the growth of the number of some types of manifolds

3.1. On the growth of the total number of manifolds

Recall that if a manifold is glued from n tetrahedra then its complexity is at most n [25, Theorem 2.2.5]. In fact for most manifolds their complexity is precisely the minimal number of tetrahedra the manifold can be glued from, see [25, Theorems 2.2.6 and 2.2.7] and the discussion around and also [11]. The number of distinct gluings of n tetrahedra increases (depending on n) very fast. A theoretical consideration and computing experiments show the the growth is faster than exponential. We list exact numbers of distinct gluings of $1, 2, 3$ and 4 tetrahedra: $11, 169, 5959, 405607$ ([19]). However, our results shows that if we consider not all gluings but gluings which gives close orientable irreducible manifolds only then the growth is exponential.

Here we visualize the value $\frac{N(c)}{N(c-1)}$, i.e., the ratio of next member of the sequence by previous one. The value is informative in the case we concern a sequence like geometric progression.



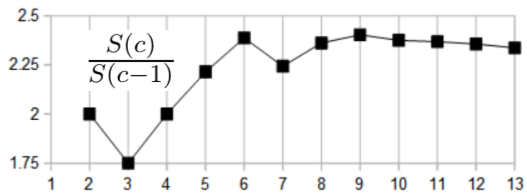
The graph above allows us to formulate the following conjecture concerning the growth of the number of closed orientable irreducible manifolds:

$$\lim_{c\to\infty} \frac{N(c)}{2.5^c} > 0, \quad \lim_{c\to\infty} \frac{N(c)}{3^c} < \infty.$$

3.2. On the growth of the number of seifert manifolds

We see that most manifolds of low complexity are Seifert (which was expected and even proved for very low complexity [1, 12, 15]). Our table allows to conjecture that the growth of the number of seifert manifolds is not so fast as the growth of the total number of manifolds, but it is exponential also.

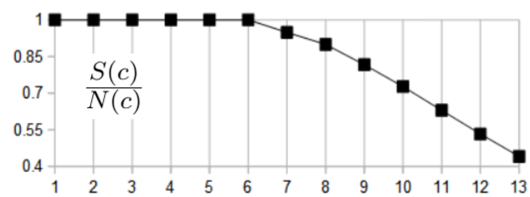
The graph on the right illustrates the supposition. Here we visualize the value $\frac{S(c)}{S(c-1)}$, where $S(c)$ denotes the number of seifert manifolds of complexity c. For sufficiently large c the ratio is closed to 2.3 and decreases slowly.



We congecture that

$$\lim_{c\to\infty}\frac{S(c)}{2^c} > 0, \quad \lim_{c\to\infty}\frac{S(c)}{2.5^c} < \infty.$$

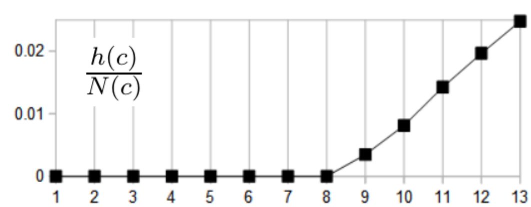
At the same time the proportion between the number of seifert manifolds of a complexity and the total number of manifolds of the complexity (i.e., the value $\frac{S(c)}{N(c)}$) monotonously decreases starting at $c = 6$. Probably this is a consequence of the facts that $\frac{S(c)}{2.5^c}$ approaches to 0 while $\frac{N(c)}{2.5^c}$ approaches to infinity.



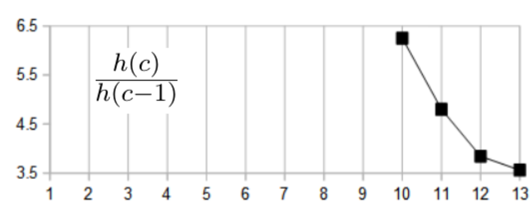
3.3. On the growth of the number of hyperbolic manifolds

We also see that relatively few manifolds in our table are hyperbolic, which was actually not expected: recall that there it is generally believed that “most” manifolds are hyperbolic. In folklore, this statement is attributed to M. Gromov (rather as a conjecture or a general direction of research that as a claim) and is possibly nowhere published. Partial results include [2, 7], see also discussion in [9, §2].

In our table hyperbolic manifolds appear at $c = 9$. The proportion between hyperbolic and all manifolds (i.e., the value $\frac{h(c)}{N(c)}$ where $h(c)$ denotes the number of hyperbolic manifolds of complexity c) is not large but increases monotonously.



At the same time the speed of the growth (we mean the value $\frac{h(c)}{h(c-1)}$) decreases monotonously and very fast.



Now we know not much about the complexity of hyperbolic manifolds, but we conjecture that the proportion between hyperbolic manifolds and all manifolds (contrary to the opinion mentioned above) approaches not to 1 but to 0:

$$\lim_{c\to\infty}\frac{h(c)}{N(c)} = 0.$$

3.4. On the growth of the number of C_S and C_h manifolds

It is understood, that we do not have enough information to formulate a well-grounded conjectures, however, we think that for sufficiently large values of complexity the dominating kind of manifolds is not hyperbolic manifolds but the union $C_S \cup C_h$, and probably C_h will dominate C_S, i.e.,

$$\lim_{c\to\infty} \frac{C_S(c) + C_h(c)}{N(c)} = 1, \quad \lim_{c\to\infty} \frac{C_S(c)}{C_h(c)} = 0.$$

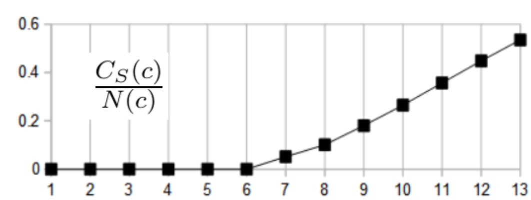
Here $C_S(c)$ and $C_h(c)$ denote, respectively, the numbers of C_S and C_h manifolds having complexity c.

These suppositions are based on following consideration.

A manifold of these two types (C_S and C_h), by definition, can be glued from seifert and hyperbolic manifolds with toric (maybe disconnected) boundary. The number of such manifolds of a complexity is much more and increases faster than the number of closed manifolds of the same complexity. The complexity of glued manifold usually is greater than the sum of complexities of parts of which it is glued from (it is necessary to take into account a "complexity" of the gluings). However, seemingly the growth of the number of blocks which one can use for gluing (more precisely, the growth of the number of combinations of blocks) determinates the growth of the number of closed manifolds composed from these blocks. Our supposition that C_h dominates C_S for $c \to \infty$ is based on the observation that the number of hyperbolic blocks increases faster than the number of seifert blocks. A closed seifert manifold also can be glued from seifert blocks. It takes place if very specific gluings are used. The proportion between such gluing and all possible gluings decreases for $c \to \infty$. The fact explains the decreasing of the proportion of seifert manifolds which was mentioned above.

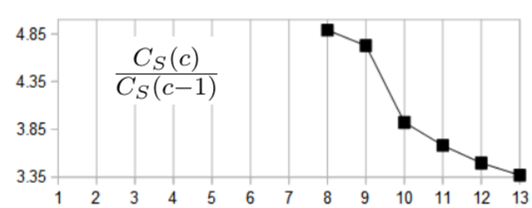
Additionally we note the following information from our table which, as we think, corroborates the congecture above.

C_S-manifolds appear at complexity 7. Then the proportion $\frac{C_S(c)}{N(c)}$ increases monotonously. At $c =$ $= 13$ the value is already more than a half. The total number (the sum over all values of complexity) of C_S manifolds is almost equal to the total number of seifert manifolds (see the table in § 2.3).



Taking into account trends which were mentioned above we can think that at complexity 14 C_S-manifolds will leave seifert manifolds behind.

The speed of the growth of $C_S(c)$ (we mean the value $\frac{C_S(c)}{C_S(c-1)}$) decreases but within our table it remains greater than the corresponding value for the total number of manifolds.



The proportion of hyperbolic manifolds also increases monotonously and fast but it is essentially less and the speed decreases faster than it takes place for C_S-manifolds. Additionally at $c = 11$ the C_h-manifolds appear. The proportion of C_h-manifolds is very little but the number of the manifolds increases very fast (3 at $c = 11$, 24 at $c = 12$, 217 at $c = 13$). Also note that the speed of the growth increases: $\frac{217}{24} > \frac{24}{3}$, while if we denote by $n(c)$ the number of manifolds of any other type (S, C_S or h) then the ratio decreases, i.e., $\frac{n(c+1)}{n(c)} < \frac{n(c)}{n(c-1)}$ for any c for C_S and h manifolds and for $c \geq 9$ for S-manifolds.

4. On the way of obtaining of our table

Our table was created in three steps.

Firstly we have enumerated all manifolds of complexity $\leqslant$ 13. More precisely, we have enumerated their special spines with $\leqslant 13$ real vertices (we recall the definitions of special spine in appendix below). The obtained list contained many duplicates. The step was much more longer than two other steps. It was necessary to use supercomputer.

Then each manifold was recognized using the method described in [17, §7]. As a result each manifold was labeled with a "name" which contains an information about the structure of the manifold. The name of a seifert manifold is its base surface and parameters of its exceptional fibers. The name of a manifold having non-trivial JSJ-decomposition is composed from the names of blocks involved in the decomposition and a description of their gluings. The name of a hyperbolic manifold is a representation of the manifold as a Dehn filling of a hyperbolic manifold with toric (not necessary connected) boundary.

Finally we have removed all duplicates. The ways we do it are different for manifolds of different types. Seifert manifolds and composite manifolds gluing from seifert blocks only (S and C_S manifolds) can be labeled with canonical names which are uniquely defined and can be obtained starting with any of admissible name of the manifold. Hence for manifolds of these types it is possible to find duplicates by comparing of names only. For hyperbolic manifolds and composite manifolds gluing from seifert and hyperbolic blocks (h and C_h manifolds) our methods do not give canonical names. So to prove that two manifolds of these types are nonhomeomorphic we compare their first homology groups and the values of Turaev-Viro invariants. It is interesting to note that the invariants of relatively low order were enough. Almost all pairs were distinguished by invariants of order $\leqslant 8$. 42 pairs were distinguished by invariants of order 9. And only one pair was distinguished by invariants of order 10.

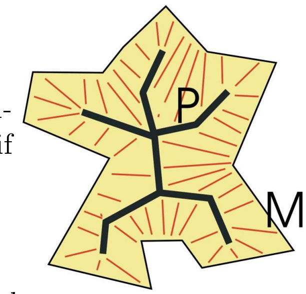
Of course, if the numbers of the order 100000 appear, it is necessary to double-check the result. There are an "internal" methods to check the table, but the most convincing was the comparison of our list with the lists independently obtained by other groups. There are at least two more scientific groups successfully working in the tabulation/recognition problem of 3-dimensional manifolds. The group lead by B. Burton (initially University of Melbourne, now University of Queensland) created a program called Regine. It is available at `https://regina-normal.github.io/`. "Regine" is very powerful and very useful tool for a research in the area of 3-dimensional topology. In 2012 using the program the Burton's group has created a table of manifolds of complexity $\leqslant 12$ (the result seemingly is not properly published). The other group is at ENS Pisa lead by C. Petronio. B. Martelli and C. Petronio went [10] up to complexity 9. Tables obtained by these two groups coincide with corresponding subsets of our table. Till now we do not know about some other list of manifolds of complexity > 12. So we have nothing to compare our list with.

Our table and the program which we used are available online `http://www.matlas.math.csu.ru/`.

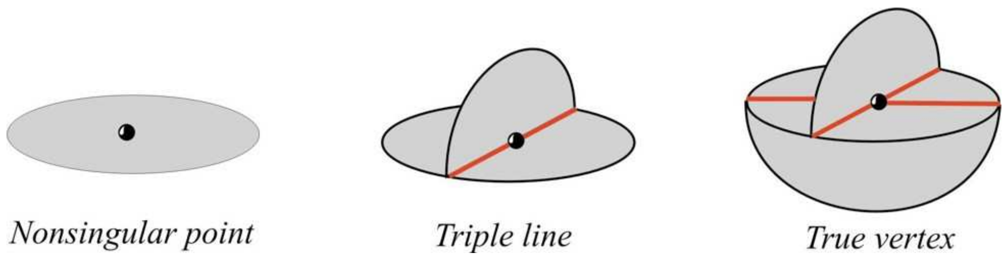
The "inner" language of our algorithm and of our computer program is based on the theory of special spines, but of course our program understands also many other popular combinatorial ways of describing the manifolds (for example, surgery presentation and singular triangulation) automatically translating them to the language of special spines.

Appendix: informal explanation of terminology of 3-dimensional topology used above

Let M be a connected compact 3-dimensional manifold with boundary. An imbedded 2-dimensional CV-complex P is a spine of M, if $M \setminus P = \partial M \times (0, 1]$. A two-dimensional analog is on the picture.



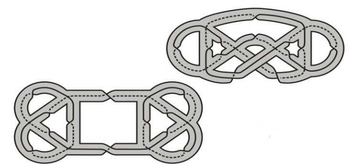
A spine is *simple*, if it has a nice local structure as on the picture below.



A *True Vertex* of a spine is a point having a neighborhood like in the figure above on the right. A simple spine allows a natural stratification. Strata are of dimension 0, 1 and 2. A spine is *special* if each its 1-stratum is a 1-cell and each its 2-stratum is a 2-cell.

Each closed connected 3-manifold with non-empty boundary has a special spine [17, Theorem 1.1.13]. If the boundary is empty, we remove a 3-dimensional ball from the manifold and obtain a manifold with the boundary. A special spine allows one to reconstruct the manifold [17, Theorem 1.1.17].

A graphical presentation of two special spines are on the picture. It is clearly a combinatorial object, the information necessary to reconstruct the special spine is the vertices, the 1-dimensional edges between the vertices (i.e., the 1-skeleton), and also the information how the 2-cells are glued near the vertices. One can give it as a word in a certain alphabet consisting of the number of vertices plus 3 symbols.



Note that not every special polyhedron corresponds to a manifold — there exist so-called *unthickenable* special polyhedra that can not be special spines of 3-manifolds. It is quite easy to understand whether a special polyhedron is unthickenable, see the discussion in [25, §2.2] and [17, discussion starting from page 9].

The *complexity* of a manifold is the minimal numbers of true vertices in its simple spine. It is a finite number. In this notes we concern with closed irreducible manifolds only. Within the class of manifolds for each complexity c there exists finitely many pairwise nonhomeomorphic manifolds of complexity c. Note that the class contains exactly 3 manifolds of complexity 0 (i.e., having a simple spines with no vertex). They are $S^3, \mathbb{R}p^3$ and lens space $L(3, 1)$. Of course, the manifolds have special spines (with non-zero number of true vertices) also, but in the case of these three manifolds the minimum of the number of true vertices in a spine reaches on a simple spines with no vertices.

One of the first spectacular applications of the theory of complexity is due to A.T. Fomenko. and the first author ([12], see also [13] and [17, 2.5.1]). They have found all closed hyperbolic manifolds of the lowest complexity 9 (there are precisely four such) and calculated their volumes. The result of the calculation were the numbers ≈ 0.94272, ≈ 0.98139, ≈ 1.01494 and ≈ 1.26370. Recall that by the Mostow Rigidity Theorem [18] the Riemannian metric of constant negative sectional curvature is unique on every closed 3-manifold on which it exists, which makes the notion “volume of closed hyperbolic manifold” well-defined. The manifold with the volume ≈ 0.98139 was previously studied by W. Thurston [21] and he suggested it as a candidate for the hyperbolic manifold of the smallest volume. Since $0.94272 < 0.98139$ (even taking into account the numerical error of calculations), this our result proved that the conjecture of Thurston is wrong. We conjectured [12, Conjecture 1] that the hyperbolic manifold with volume ≈ 0.94139 is the one with the smallest volume. The conjecture was proved in [3, Corollary 1.3], see also the discussion in [4].

REFERENCES

1. Amendola G.; Martelli B., *Non-orientable 3-manifolds of complexity up to 7.* Topology Appl., **150**(2005), 179–195.

2. Dunfield, N. M.; Thurston, W. P., *Finite covers of random 3-manifolds.* Invent. Math. **166**(2006), no. 3, 457–521.

3. Gabai, D.; Meyerhoff, R.; Milley, P., *Minimum volume cusped hyperbolic 3-manifolds.* J. Amer. Math. Soc. **22**(2009), no. 4, 1157–1215.

4. Gabai, D.; Meyerhoff, R.; Milley, P., *Mom technology and volumes of hyperbolic 3-manifolds.* Comment. Math. Helv. **86**(2011), 145–188

5. Haken, W., *Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten.I.* (German) Math. Z., **80**(1962), 89–120.

6. Hemion, G., *On the classification of homeomorphisms of 2-manifolds and the classification of 3-manifolds.* Acta Math., **142**(1979), 123–155.

7. Ito, T., *On a structure of random open books and closed braids.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **91**(2015), 160–162.

8. Johannson, K., *Topologie und Geometrie von 3-Mannigfaltigkeiten.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., **86**(1984), no. 2, 37–68.

9. Malyutin, A. V., *On the Question of Genericity of Hyperbolic Knots.* IMRN, in print, `https://doi.org/10.1093/imrn/rny220`

10. Martelli, B.; Petronio, C., *Three-manifolds having complexity at most 9.* Experiment. Math. **10**(2001), no. 2, 207–236.

11. Matveev, S. V.; Savvateev V.V., *Three-dimensional manifolds having simple special spines.* Colloq. Math. **32**(1974), 83–97.

12. Matveev, S. V.; Fomenko, A. T., *Constant energy surfaces of Hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic manifolds.* Russian Math. Surveys **43**(1988), no. 1, 3–24.

13. Matveev, S. V.; Fomenko, A. T., *Algorithmic and computer methods in three-dimensional topology.* (Russian) Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1991. 303 pp. Translated from the 1991 Russian original by M. Tsaplina and Michiel Hazewinkel and revised by the authors. Mathematics and its Applications, 425. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

14. Matveev, S. V., *Algorithms for the recognition of the three-dimensional sphere (after A. Thompson).* (Russian) Mat. Sb. **186** (1995), no. 5, 69–84; translation in Sb. Math. **186** (1995), no. 5, 695–710

15. Matveev, S. V.; Pervova, E. L., *Lower bounds for the complexity of three-dimensional manifolds.* (Russian) Dokl. Akad. Nauk **378**(2001), no. 2, 151–152.

16. Matveev, S. V., *Tabulation of three-dimensional manifolds.* Russian Mathematical Surveys, **60**(2005), 673–698.

17. Matveev, S. V., *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds.* Algorithms and Computation in Mathematics, **9**. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xii+478 pp. ISBN: 3-540-44171-9

18. Mostow, G. D., *Strong rigidity of locally symmetric spaces.* Ann. Math. Studies, No. 78, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1973

19. Sbrodova, E.A.; Tarkaev, V.V.; Fominykh, E.A.; Shumakova, E.V., *Virtual 3-Manifolds of Complexity 1 and 2.* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2019, Vol. 304, Suppl. 1, 154–160.

20. Thompson, A., *Thin position and the recognition problem for S^3.* Math. Res. Lett. **1**(1994), no. 5, 613–630.

21. Thurston, W., *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry.* Bull. Amer. Math. Soc. **6**(1982), 357–381.

22. Thurston, W.P., *The geometry and topology of three-manifolds*, Princeton Math. Dept., 1979.

23. Turaev, V. G., *Quantum invariants of knots and 3-manifolds.* De Gruyter Studies in Mathematics, **18**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

24. Vesnin, A. Yu.; Matveev, S. V.; Fominykh, E. A., *Complexity of three-dimensional manifolds: exact values and estimates.* (Russian. English summary) Sib. Elektron. Mat. Izv. **8**(2011), 341–364.

25. Vesnin, A. Yu.; Matveev, S. V.; Fominykh, E. A., *New aspects of the complexity theory of three-dimensional manifolds.* (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **73**(2018), no. 4(442), 53–102; translation in Russian Math. Surveys **73**(2018), no. 4, 615–660

26. Waldhausen, F., *Recent results on sufficiently large 3-manifolds.* Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, pp. 21–38, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1978)

Получено 29.11.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 515.126.4 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-301-319

О топологических характеристиках для некоторых классов многозначных отображений

В. В. Обуховский, С. В. Корнев, Е. Н. Гетманова

Обуховский Валерий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет (г. Воронеж).
e-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Корнев Сергей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет (г. Воронеж).
e-mail: kornev_vrn@rambler.ru
Гетманова Екатерина Николаевна — аспирант, кафедра высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет (г. Воронеж).
e-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru

Аннотация

В работе рассматриваются топологические характеристики многозначных отображений, которые могут быть представлены в виде конечной композиции отображений с асферичными значениями. Для такого рода случайных отображений, уплотняющих относительно некоторой абстрактной меры некомпактности, вводится случайный индекс неподвижных точек, описываются его свойства и даются применения к теоремам о неподвижной точке. Определяется топологическая степень совпадения для уплотняющей пары, состоящей из линейного фредгольмова оператора нулевого индекса и многозначного отображения указанного выше класса. В последнем разделе указаны возможности распространения этой теории на случайные уплотняющие пары.

Ключевые слова: топологическая степень, многозначное отображение, случайное отображение, случайная неподвижная точка, случайная точка совпадения, случайный индекс неподвижных точек, степень совпадения, мера некомпактности, уплотняющий оператор.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
В. В. Обуховский, С. В. Корнев, Е. Н. Гетманова. О топологических характеристиках для некоторых классов многозначных отображений // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 301–319.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 515.126.4 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-301-319

On topological characteristics for some classes of multivalued mappings

V. V. Obukhovskii, S. V. Kornev, E. N. Getmanova

Obukhovskii Valeri Vladimirovich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University (Voronezh).
e-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Kornev Sergey Viktorovich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University (Voronezh).
e-mail: kornev_vrn@rambler.ru
Getmanova Ekaterina Nikolaevna — postgraduate student, Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University (Voronezh).
e-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru

Abstract

In the paper the topological characteristics of multivalued mappings that can be represented as a finite composition of mappings with aspherical values are considered. For such random mappings, condensing with respect to some abstract measure of noncompactness, a random index of fixed points is introduced, its properties are described and applications to fixed-point theorems are given. The topological coincidence degree is defined for a condensing pair consisting of a linear Fredholm operator of zero index and a multivalued mapping of the above class. In the last section possibilities of extending this theory to random condensing pairs are shown.

Keywords: topological degree, multivalued mapping, random mapping, random fixed point, random coincidence point, random index of fixed points, degree of coincidence, measure of noncompactness, condensing operator.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
V. V. Obukhovskii, S. V. Kornev, E. N. Getmanova, 2020, "On topological characteristics for some classes of multivalued mappings", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 301–319.

Посвящается юбилею академика Анатолия Тимофеевича Фоменко

1. Введение

Характеристики типа топологической степени для многозначных отображений находят широкие применения не только внутри многозначного анализа и теории неподвижных точек, но и в теории дифференциальных включений, теории колебаний, устойчивости и ветвления траекторий обобщенных динамических систем, теории игр, математической экономике и других разделах современной математики. За последние десятилетия такие характеристики были описаны и изучены для различных классов многозначных отображений, включая отображения с выпуклыми и невыпуклыми значениями, компактные и удовлетворяющие различным условиям типа уплотняемости, а также случайные многозначные отображения (см, например, [1] - [3], [5], [8], [10] - [11], [13] - [16] и имеющуюся там библиографию).

Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении. В ней рассматриваются многозначные отображения, которые могут быть представлены в виде конечной композиции отображений с асферичными значениями. Для такого рода случайных отображений, уплотняющих относительно некоторой абстрактной меры некомпактности, вводится случайный индекс неподвижных точек, описываются его свойства и даются применения к теоремам о неподвижной точке. На этой основе далее определяется топологическая степень совпадения для уплотняющей пары, состоящей из линейного фредгольмова оператора нулевого индекса и многозначного отображения указанного выше класса. В последнем разделе указано как эта теория может быть распространена на случайные уплотняющие пары.

2. Предварительные сведения

2.1. Многозначные отображения

Напомним некоторые понятия теории многозначных отображений, используемые в дальнейшем (см., например, [1], [3], [10], [11], [13]).

Пусть X и Y — метрические пространства. Символами $C(Y)$ $[K(Y)]$ мы будем обозначать совокупности всех непустых замкнутых [соответственно, компактных] подмножеств Y.

Определение 1. *Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \to C(Y)$ называется полунепрерывным сверху (п.н.св.) [полунепрерывным снизу (п.н.сн.)] , если для любого открытого [соответственно, замкнутого] множества $W \subset Y$*

$$\mathcal{F}^{-1}(W) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset W\}$$

- открытое [соответственно, замкнутое] подмножество X. Если мультиотображение $\mathcal{F}$ полунепрерывно и сверху и снизу, то оно называется непрерывным.

Отметим следующие свойства.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ — п.н.св. мультиотображение. Если $A \subset X$ — компактное множество, то его образ $\mathcal{F}(A)$ — компактное подмножество Y.*

Предложение 2. *Пусть X, Y и Z — метрические пространства; $\mathcal{F}_0 : X \to K(Y)$ и $\mathcal{F}_1 : Y \to K(Z)$ — п.н.св. [п.н.сн.] мультиотображения. Тогда композиция $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_0 : X \to K(Z)$ — п.н.св. [соответственно, п.н.сн.] мультиотображение.*

Определение 2. *Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ называется компактным, если его область значений $\mathcal{F}(X)$ — относительно компактное подмножество Y.*

Пусть (Ω, Σ) — полное измеримое пространство.

Определение 3. *Мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \to C(Y)$ называется измеримым, если $\mathcal{F}^{-1}(V) \in \Sigma$ для любого открытого множества $V \subset Y$.*

Пусть X, Y — сепарабельные метрические пространства.

Определение 4. *Мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times X \to C(Y)$ называется случайным и-мультиотображением, если*

(*i*) *$\mathcal{F}$ измеримо относительно минимальной σ-алгебры, порожденной $\Sigma \times B(X)$, где $B(X)$ — совокупность всех борелевских подмножеств X;*

(*ii*) *для любого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : X \to C(Y)$ п.н.св.*

Определение 5. *Мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times X \to C(Y)$ называется мультиотображением Каратеодори, если*

(i) для любого $x \in X$ мультиотображение $\mathcal{F}(\cdot, x) : \Omega \to C(Y)$ измеримо;

(ii) для любого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : X \to C(Y)$ непрерывно.

Справедливо следующее утверждение (см. [11], Proposition 7.9).

Предложение 3. *Если $\mathcal{F} : \Omega \times X \to C(Y)$ — мультиотображение Каратеодори, то оно измеримо.*

Это утверждение означает, в частности, что всякое мультиотображение Каратеодори является случайным u-мультиотображением.

Определение 6. *Пусть $A \subseteq X$ — замкнутое множество. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to A$ называется случайной неподвижной точкой мультиотображения $\mathcal{F} : \Omega \times A \to$ $\to C(X)$, если*

$$\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$$

для всех $\omega \in \Omega$.

Предложение 4. *([10], Proposition 31.3). Пусть $\mathcal{F} : \Omega \times A \to C(X)$ — случайное u-мультиотображение такое, что для каждого $\omega \in \Omega$ множество неподвижных точек*

$$Fix\mathcal{F}(\omega, \cdot) = \{x \in X : x \in \mathcal{F}(\omega, x)\}$$

непусто. Тогда $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.

2.2. J^c-мультиотображения

Для описания класса мультиотображений, который мы будем рассматривать, напомним некоторые понятия.

Для заданного подмножества A метрического пространства Y и $\varepsilon > 0$ символом $O_\varepsilon(A)$ обозначим ε-окрестность A.

Определение 7. *(см., например [6], [1], [10]) Непустое компактное подмножество A метрического пространства Y называется асферичным (или UV^∞-множеством), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta, 0 < \delta < \varepsilon$ такое, что для всякого $n = 0, 1, 2, \ldots$ каждое непрерывное отображение $g : S^n \to O_\delta(A)$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\widetilde{g} : B^{n+1} \to O_\varepsilon(A)$, где $S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\right\}$ и $B^{n+1} = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1\right\}$.*

Определение 8. *(см. [12]) Непустое компактное пространство A называется R_δ-множеством, если оно может быть представлено как пересечение убывающей последовательности компактных стягиваемых пространств.*

Определение 9. *П.н.св. мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ называется J-мультиотображением ($\mathcal{F} \in J(X, Y)$), если каждое значение $\mathcal{F}(x)$, $x \in X$ является асферичным множеством.*

Напомним (см., например, [4], [10]), что метрическое пространство Z называаестся абсолютным ретрактом (AR-пространством) [соответственно, абсолютным окрестностным ретрактом (ANR-пространством)], если для каждого гомеоморфизма h, отображающего его на замкнутое подмножество метрического пространства Z', множество $h(Z)$ является ретрактом Z' [соответственно, некоторой своей открытой окрестности в Z']. Отметим, что класс ANR-пространств достаточно широк: в частности, компактное подмножество конечномерного пространства является ANR-пространством тогда и только тогда, когда оно локально стягиваемо. В свою очередь, это означает, что компактные полиэдры и компактные конечномерные многообразия являются ANR-пространствами. Объединение конечного числа выпуклых замкнутых подмножеств нормированного пространства также является ANR-пространством.

Предложение 5. *(см. [10]) Пусть Z — ANR-пространство. В каждом из следующих случаев п.н.св. мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(Z)$ является J-мультиотображением:*
для каждого $x \in X$ значение $\mathcal{F}(x)$ является
a) выпуклым множеством;
b) стягиваемым множеством;
c)R_δ-множеством;
d)AR-пространством.
В частности, каждое непрерывное отображение $\sigma : X \to Z$ является J-мультиотображением.

Определение 10. *Символом $J^c(X,Y)$ мы будем обозначать совокупность всех мультиотображений $\mathcal{F} : X \to K(Y)$, которые могут быть представлены в виде композиции $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n \circ ... \circ \mathcal{F}_1$, $n \geq 1$, где $\mathcal{F}_i \in J(X_{i-1}, X_i)$, $i = 1,...,n$, $X_0 = X$, $X_n = Y$, и X_i для $0 < i < n$ являются открытыми подмножествами нормированных пространств. Композиция $\mathcal{F}_n \circ ... \circ \mathcal{F}_1$ называется разложением $\mathcal{F}$. Мы будем обозначать $D_{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_n \circ ... \circ \mathcal{F}_1)$ и называть $\mathcal{F}$ J^c-мультиотображением.*

Следует отметить, что мультиотображение может допускать различные разложения (см. [10]).

Пусть теперь U — открытое подмножество нормированного пространства E и $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(E)$ — компактное мультиотображение класса $J^c\left(\overline{U}, E\right)$, допускающее разложение

$$D_{\mathcal{F}} : \overline{U} = X_0 \overset{\mathcal{F}_1}{\multimap} X_1 \overset{\mathcal{F}_2}{\multimap} ... \overset{\mathcal{F}_n}{\multimap} X_n = E$$

и такое, что $x \notin \mathcal{F}(x)$ для всех $x \in \partial U$. При этих условиях определена топологическая характеристика — индекс неподвижных точек $ind(D_{\mathcal{F}}, \overline{U})$ разложения $D_{\mathcal{F}}$ на $\overline{U}$ (см. [8]).

Отметим некоторые свойства индекса неподвижных точек.

Предложение 6. *(Свойство неподвижной точки) Если $ind(D_{\mathcal{F}}, \overline{U}) \neq 0$, то $\emptyset \neq Fix\mathcal{F} \subset U$.*

Для описания свойства гомотопической инвариантности нам нужно следующее понятие.

Определение 11. *Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in J^c\left(\overline{U}, E\right)$ — два компактных мультиотображения с разложениями*

$$D_{\mathcal{F}} : \overline{U} = X_0 \overset{\mathcal{F}_1}{\multimap} X_1 \overset{\mathcal{F}_2}{\multimap} ... \overset{\mathcal{F}_n}{\multimap} X_n = E,$$

$$D_{\mathcal{G}} : \overline{U} = X_0 \overset{\mathcal{G}_1}{\multimap} X_1 \overset{\mathcal{G}_2}{\multimap} ... \overset{\mathcal{G}_n}{\multimap} X_n = E,$$

такие, что $x \notin \mathcal{F}(x)$ и $x \notin \mathcal{G}(x)$ для всех $x \in \partial U$. Будем говорить, что разложения $D_{\mathcal{F}}$ и $D_{\mathcal{G}}$ гомотопны,

$$D_{\mathcal{F}} \sim D_{\mathcal{G}},$$

если существуют мультиотображения

$$\mathcal{H}_i \in J(X_{i-1} \times [0,1], X_i), \quad i = 1, ...n$$

такие, что $\mathcal{H}_i(\cdot,0)=\mathcal{F}_i$, $\mathcal{H}_i(\cdot,1)=\mathcal{G}_i$, $i=1,...,n$ *и мультиотображение* $\mathcal{H}\colon \overline{U}\times[0,1]\multimap E$, *допускающее разложение*

$$\overline{U}\times[0,1]=X_0\times[0,1]\overset{\widetilde{\mathcal{H}}_1}{\multimap}X_1\times[0,1]\overset{\widetilde{\mathcal{H}}_2}{\multimap}...\overset{\widetilde{\mathcal{H}}_{n-1}}{\multimap}X_{n-1}\times[0,1]\overset{\mathcal{H}_n}{\multimap}X_n=E$$

где $\widetilde{\mathcal{H}}_i(x,\lambda)=\mathcal{H}_i(x,\lambda)\times\{\lambda\}$ *для* $x\in X_{i-1}$, $\lambda\in[0,1]$, $i=1,...,n-1$ *компактно и не имеет неподвижных точек на* $\partial U\times[0,1]$, *т.е.* $x\notin\mathcal{H}(x,\lambda)$ *для* $x\in\partial U$, $\lambda\in[0,1]$.

Отметим, что $\mathcal{H}(\cdot,0)=\mathcal{F}$, $\mathcal{H}(\cdot,1)=\mathcal{G}$.

Предложение 7. *(Гомотопическая инвариантность) Если разложения* $D_{\mathcal{F}}$ *и* $D_{\mathcal{G}}$ *гомотопны,* $D_{\mathcal{F}}\sim D_{\mathcal{G}}$, *то*

$$ind(D_{\mathcal{F}},\overline{U})=ind(D_{\mathcal{G}},\overline{U}).$$

Предложение 8. *(Аддитивное свойство) Если* $Fix\mathcal{F}\cap U\subset\bigcup_{j=1}^{k}U_j$, *где* U_j, $j=1,...,k$ *— открытые попарно не пересекающиеся подмножества* U, *то*

$$ind(D_{\mathcal{F}},\overline{U})=\sum_{j=1}^{k}ind(D_{\mathcal{F}},\overline{U}_j).$$

Отметим, что, вообще говоря, указанная характеристика зависит не только от $\mathcal{F}$, но также и от используемого разложения $D_{\mathcal{F}}$.

2.3. Уплотняющие мультиотображения

Напомним некоторые понятия (см., например, [1], [13]). Пусть E — банахово пространство. Обозначим $P(E)$ совокупность всех непустых подмножеств E. Пусть $(\mathcal{A},\geq)$ — частично упорядоченное множество.

Определение 12. *Отображение* $\beta : P(E)\to\mathcal{A}$ *называется мерой некомпактности (МНК) в* E, *если*

$$\beta(\overline{co}\,\mathcal{D})=\beta(\mathcal{D})\quad \textit{для любого } \mathcal{D}\in P(E).$$

МНК β *называется:*

(i) монотонной, если $\mathcal{D}_0,\mathcal{D}_1\in P(E)$, $\mathcal{D}_0\subseteq\mathcal{D}_1$ *влечет* $\beta(\mathcal{D}_0)\leq\beta(\mathcal{D}_1)$;

(ii) несингулярной, если $\beta(\{a\}\cup\mathcal{D})=\beta(\mathcal{D})$ *для любых* $a\in E$, $\mathcal{D}\in P(E)$;

(iii) вещественной, если $\mathcal{A}=\overline{\mathbb{R}_+}=[0,+\infty]$ *с естественным упорядочением и* $\beta(\mathcal{D})<+\infty$ *для любого ограниченного множества* $\mathcal{D}\in P(E)$.

Среди известных примеров МНК, удовлетворяющих указанным выше свойствам, отметим *МНК Хаусдорфа*

$$\chi(\mathcal{D})=\inf\{\varepsilon>0:\mathcal{D}\text{ имеет конечную }\varepsilon\text{-сеть}\}\ .$$

и *МНК Куратовского*

$$\alpha(\mathcal{D})=\inf\{\delta>0:\ \mathcal{D}\text{ допускает конечное разбиение на множества диаметра меньше }\delta\}\,.$$

Мы можем рассмотреть также пример МНК, заданной на ограниченных подмножествах пространства непрерывных функций $C([a,b];\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — банахово пространство. Для ограниченного $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ положим

$$\nu(\mathcal{D}) = \max_{\mathcal{D}' \in \Delta(\mathcal{D})} \Big(\sup_{t\in[a,b]} \chi(\mathcal{D}'(t)), mod_C(\mathcal{D}') \Big),$$

где $\Delta(\mathcal{D})$ обозначает набор всех счетных подмножеств $\mathcal{D}$, χ — МНК Хаусдорфа в $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}'(t) = \{d(t) \colon d \in \mathcal{D}'\}$ и

$$mod_C(\mathcal{D}') = \lim_{\delta\to 0} \sup_{d\in\mathcal{D}'} \max_{|t_1-t_2|\le\delta} \|d(t_1) - d(t_2)\|$$

— модуль равностепенной непрерывности множества $\mathcal{D}'$ (см. [13]). Областью значений МНК ν является конус $\mathbb{R}^2_+$ и max берется в смысле упорядоченности, индуцируемой конусом.

Пусть теперь U — открытое подмножество E, β — МНК в E.

Определение 13. *П.н.св. мультиотображение $\mathcal{F}\colon \overline{U} \to K(E)$ или п.н.св. семейство мультиотображений $\mathcal{H}\colon \overline{U}\times[0,1] \to K(E)$ называется β-уплотняющим, если для любого $\mathcal{D} \subseteq \overline{U}$, не являющегося относительно компактным, мы имеем, соответственно,*

$$\beta\left(\mathcal{F}\left(\mathcal{D}\right)\right) \ngeq \beta\left(\mathcal{D}\right)$$

или

$$\beta\left(\mathcal{H}\left(\mathcal{D}\times[0,1]\right)\right) \ngeq \beta\left(\mathcal{D}\right).$$

Определение 14. *Замкнутое выпуклое подмножество $T \subset E$ называется фундаментальным для мультиотображения $\mathcal{F}\colon \overline{U} \to K(E)$, если*

(1) *$\mathcal{F}(\overline{U}\cap T) \subseteq T$;*

(2) *$x \in \overline{co}\left(\mathcal{F}(x) \cup T\right)$ влечет $x \in T$.*

Отметим следующие свойства фундаментальных множеств (см. [1], [13]).

Предложение 9. (*i*) *Множество неподвижных точек $Fix\mathcal{F}$ содержится в каждом фундаментальном множестве мультиотображения $\mathcal{F}$.*

(*ii*) *Если $\{T_\alpha\}$ — некоторый набор фундаментальных множеств мультиотображения $\mathcal{F}$, то множество $\cap_\alpha T_\alpha$ также фундаментально.*

Предложение 10. *Каждое β-уплотняющее мультиотображение $\mathcal{F}\colon \overline{U} \to K(E)$, где β — монотонная несингулярная МНК, обладает непустым компактным фундаментальным множеством.*

2.4. Линейные фредгольмовы опрераторы

Пусть E_1 и E_2 — линейные пространства; $L : Dom\, L \subseteq E_1 \to E_2$ — линейный оператор. Напомним следующие факты (см., например, [9]).

Предложение 11. *Пусть $P : E_1 \to E_1$ — линейный оператор проектирования такой, что $Im\,P = Ker\,L$. Тогда*

(*i*) *оператор $L_P : Dom\,L \cap Ker\,P \to Im\,L$ заданный как сужение*

$$L_P(x) = L(x) \quad \text{для всех } \ x \in Dom\,L \cap Ker\,P$$

является линейным изоморфизмом;

(*ii*) *Оператор* $K_P : Im\, L \to Dom\, L \cap Ker\, P$ *заданный как*

$$K_P = L_P^{-1},$$

удовлетворяет соотношению

$$K_P \circ Lx = x - Px \quad \textit{для всех } x \in Dom\, L.$$

Пусть теперь E_1 — банахово пространство, E_2 — нормированное пространство.

Определение 15. *Линейный оператор* $L : Dom\, L \subset E_1 \to E_2$ *называется линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса, если пространство* $Im\, L$ *замкнуто, пространства* $Ker\, L$ *и* $Coker\, L = E_2/Im\, L$ *конечномерны и*

$$dim\, Ker\, L = dim\, Coker\, L.$$

Предложение 12. *Пусть* $L : Dom\, L \subset E_1 \to E_2$ *— линейный фредгольмов оператор нулевого индекса. Тогда*

(*i*) *существуют линейные непрерывные проекционные операторы* $P : E_1 \to E_1$ *и* $Q : E_2 \to E_2$ *такие, что* $Im\, P = Ker\, L$ *и* $Im\, L = Ker\, Q$;

(*ii*) *каноническая проекция* $\Pi : E_2 \to Coker\, L$, *заданная как*

$$\Pi y = y + Im\, L,$$

является непрерывным линейным оператором;

(*iii*) *существует непрерывный линейный изоморфизм* $\Lambda : Coker\, L \to Ker\, L$;

(*iv*) *уравнение*

$$Lx = y, \quad y \in E_2$$

равносильно уравнению

$$(I - P)x = (\Lambda\Pi + K_{P,Q})(y),$$

где I *— тождественный оператор в* E_1 *и оператор* $K_{P,Q} : E_2 \to E_1$ *задан как*

$$K_{P,Q} = K_P(I - Q).$$

Пара проекций (P, Q) называется *точной* относительно L.

3. Случайный индекс неподвижных точек для уплотняющих мультиотображений

Пусть E — банахово пространство, U — открытое подмножество E, β — монотонная несингулярная МНК в E и Ω — полное измеримое пространство. Нашей целью является определение индекса неподвижных точек для мультиотображения $\mathcal{F} : \Omega \times \overline{U} \to K(E)$, удовлетворяющего следующим условиям:

($\mathcal{F}1$) $\mathcal{F}$ — случайное u-мультиотображение;

($\mathcal{F}2$) для каждого $\omega \in \Omega$, $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : \overline{U} \to K(E)$ — β-уплотняющее J^c-мультиотображение;

($\mathcal{F}3$) $x \notin \mathcal{F}(\omega, x)$ для всех $(\omega, x) \in \Omega \times \partial U$.

В дальнейшем класс мультиотображений $\mathcal{F}$, удовлетворяющих условиям $(\mathcal{F}1)$ – $(\mathcal{F}3)$ будет обозначаться $J^c_\beta(\Omega, \overline{U}; E)$. Соответственно, символом $\widetilde{J}^c_\beta(\Omega, \overline{U}; E)$ будет обозначаться совокупность мультиотображений, удовлетворяющих $(\mathcal{F}1)$ – $(\mathcal{F}2)$.

Пусть $\mathcal{F} \in J^c_\beta(\Omega, \overline{U}; E)$. Для фиксированного $\omega \in \Omega$, пусть T^ω — непустое компактное фундаментальное множество мультиотображения $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ с разложением $D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)} = (\mathcal{F}_n \circ ... \circ \mathcal{F}_1)$. Выберем ретракцию $\varrho\colon E \to T^\omega$ и рассмотрим мультиотображение

$$\varrho \circ \mathcal{F}(\omega, \cdot)\colon \overline{U} \to K(E).$$

Ясно, что $\varrho \circ \mathcal{F}(\omega, \cdot)$ является компактным J^c-мультиотображением с разложением

$$D_{\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)} = (\varrho \circ \mathcal{F}_n \circ ... \circ \mathcal{F}_1).$$

Более того, из Предложения 9 (i) следует, что

$$Fix(\varrho \circ \mathcal{F}(\omega, \cdot)) = Fix\mathcal{F}(\omega, \cdot)$$

и, таким образом, определен индекс неподвижных точек $ind(D_{\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)}, \overline{U})$.

Лемма 1. *Индекс неподвижных точек $ind(D_{\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)}, \overline{U})$ не зависит от выбора фундаментального множества T^ω и ретракции ϱ.*

Доказательство. Рассмотрим два непустых компактных фундаментальных множества T^ω_0 и T^ω_1 для $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ с ретракциями $\varrho_0\colon E \to T^\omega_0$ и $\varrho_1\colon E \to T^\omega_1$ соответственно.

Если $T^\omega_0 \cap T^\omega_1 = \emptyset$, то

$$Fix(\varrho_0 \circ \mathcal{F}(\omega, \cdot)) = Fix(\varrho_1 \circ \mathcal{F}(\omega, \cdot)) = Fix\mathcal{F}(\omega, \cdot) = \emptyset$$

и тогда, согласно Предложению 6

$$ind(D_{\varrho_0\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)}, \overline{U}) = ind(D_{\varrho_1\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)}, \overline{U}) = 0.$$

Пусть теперь $T^\omega_0 \cap T^\omega_1 \neq \emptyset$, тогда, согласно Предложению 9 (ii) мы можем предположить, без ущерба для общности, что $T^\omega_0 \subseteq T^\omega_1$.

Определим отображение $h\colon E \times [0, 1] \to E$,

$$h(y, \lambda) = \varrho_1(\lambda y + (1 - \lambda)\varrho_0 y)$$

и рассмотрим мультиотображение $\mathcal{H}\colon \overline{U} \times [0, 1] \to K(E)$ заданное как

$$\mathcal{H}(x, \lambda) = h(\mathcal{F}(\omega, x), \lambda).$$

Нетрудно видеть, что компактное мультиотображение $\mathcal{H}$ принадлежит классу $J^c(\overline{U} \times [0, 1], E)$ и, более того, оно задает гомотопию разложений $D_{\varrho_0\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)}$ и $D_{\varrho_1\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)}$. Действительно, необходимо проверить только, что

$$x \notin \mathcal{H}(x, \lambda), \quad \forall (x, \lambda) \in \partial U \times [0, 1].$$

В предположении противного, пусть найдется $(x, \lambda) \in \partial U \times [0, 1]$ такое, что

$$x = \varrho_1(\lambda y + (1 - \lambda)\varrho_0 y)$$

для некоторого $y \in \mathcal{F}(\omega, x)$.

Тогда $x \in T^\omega_1$ и следовательно $y \in T^\omega_1$. Поскольку также $\varrho_0 y \in T^\omega_1$, мы получаем

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)\varrho_0 y,$$

откуда вытекает, что $x \in \overline{co}\,(\mathcal{F}(\omega, x) \cup T^\omega_0)$ и таким образом $x \in T^\omega_0$, $y \in T^\omega_0$ и $x = y$ в противоречие с условием $(\mathcal{F}3)$.

Теперь утверждение вытекает из Предложения 7.

□

Доказанная лемма дает возможность обосновать следующие понятия.

Определение 16. *Для данного $\omega \in \Omega$, индекс неподвижных точек разложения $\mathcal{F}(\omega,\cdot)$ определяется следующим образом:*

$$ind(D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U}) := ind(D_{\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U}),$$

где ϱ — ретракция на произвольное непустое компактное фундаментальное множество мультиотображения $\mathcal{F}(\omega,\cdot)$.

Определение 17. *Для данного $\mathcal{F} \in J^c_\beta(\Omega,\overline{U};E)$, индекс неподвижных точек определяется как следующий набор чисел:*

$$Ind(\mathcal{F},\overline{U}) = \{ind(D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U}) :\ \omega \in \Omega\}.$$

По определению полагаем $Ind(\mathcal{F},\overline{U})\neq 0$ при условии, что $ind(D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U})\neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Опишем основные свойства введенной характеристики. Из Предложений 4 и 6 вытекают следующие утверждения.

Предложение 13. *(Свойство неподвижной точки) Если $Ind(\mathcal{F},\overline{U}) \neq 0$, то $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.*

Определение 18. *Два мультиотображения $\mathcal{F},\mathcal{G} \in J^c_\beta(\Omega,\overline{U};E)$ называются гомотопными,*

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$$

если существует семейство $\mathcal{H}\colon \Omega \times \overline{U} \times [0,1] \to K(E)$ такое, что:

($\mathcal{H}1$) *для каждого $\lambda \in [0,1]$, $\mathcal{H}(\cdot,\cdot,\lambda)\colon \Omega \times \overline{U} \to K(E)$ — случайное и-мультиотображение;*

($\mathcal{H}2$) *для каждого $\omega \in \Omega$, семейство $\mathcal{H}(\omega,\cdot,\cdot) : \overline{U} \times [0,1] \to K(E)$ является β-уплотняющим;*

($\mathcal{H}3$) *для каждого $\omega \in \Omega$, разложения $D_{\mathcal{H}(\omega,\cdot,0)} = D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)}$ и $D_{\mathcal{H}(\omega,\cdot,1)} = D_{\mathcal{G}(\omega,\cdot)}$ гомотопны в смысле Определения 11.*

Предложение 14. *(Гомотопическая инвариантность) Если $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$ то*

$$Ind(\mathcal{F},\overline{U}) = Ind(\mathcal{G},\overline{U}).$$

Доказательство. Для данного $\omega \in \Omega$, существует непустое компактное выпуклое множество $T \subset E$, которое является фундаментальным для каждого мультиотображения $\mathcal{H}(\omega,\cdot,\lambda)$, $\lambda \in [0,1]$ ([13], Теорема 2.2.1). Пусть $\varrho\colon E \to T$ — некоторая ретракция. Тогда нетрудно видеть, что компактные разложения $D_{\varrho\circ\mathcal{H}(\omega,\cdot,0)} = D_{\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)}$ и $D_{\varrho\circ\mathcal{H}(\omega,\cdot,1)} = D_{\varrho\circ\mathcal{G}(\omega,\cdot)}$ гомотопны и следовательно, согласно Предложению 7,

$$ind(D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U}) = ind(D_{\mathcal{G}(\omega,\cdot)},\overline{U}),$$

завершая доказательство. □

Следующее свойство вытекает из Предложения 8.

Предложение 15. *(Аддитивное свойство) Для данного $\mathcal{F} \in J^c_\beta(\Omega,\overline{U};E)$, пусть для каждого $\omega \in \Omega$*

$$Fix\mathcal{F}(\omega,\cdot) \cap U \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_j,$$

где U_j, $j = 1,...,k$ — открытые попарно непрерсекающиеся подмножества U, тогда

$$Ind(\mathcal{F},\overline{U}) = \Big\{ \sum_{j=1}^{k} ind(D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U}_j) :\ \omega \in \Omega\Big\}$$

В качестве приложения свойства неподвижной точки рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{F} \in J^c_\beta(\Omega, \overline{U}; E)$, *где* U *— выпуклая окрестность нуля и*

$$x \notin \lambda F(\omega, x), \quad \forall \omega \in \Omega,\ x \in \partial U,\ 0 \le \lambda < 1.$$

тогда $\mathcal{F}$ *имеет случайную неподвижную точку.*

Доказательство. Зададим семейство $\mathcal{H}\colon \Omega \times \overline{U} \times [0,1] \to K(E)$ следующим образом. Для данного $\omega \in \Omega$, пусть $D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)} = (\mathcal{F}_n \circ ... \circ \mathcal{F}_1)$ — некоторое разложение $\mathcal{F}(\omega,\cdot)$. Определим

$$\mathcal{H}(\omega, x, \lambda) = (\psi \circ \mathcal{F}^\star_n \circ ... \circ \mathcal{F}^\star_1),$$

где для $1 \le i \le n$,

$$\mathcal{F}^\star_i(\cdot, \lambda) = \mathcal{F}_i \times \{\lambda\}, \quad \lambda \in [0,1]$$

и

$$\psi(z, \lambda) = \lambda x, \quad \lambda \in [0,1].$$

Ясно, что семейство $\mathcal{H}$ удовлетворяет условиям ($\mathcal{H}1$) и ($\mathcal{H}3$) Определения 18.

Для проверки условия ($\mathcal{H}2$) обозначим. для $\omega \in \Omega$, $\mathcal{H}_\omega = \mathcal{H}(\omega,\cdot,\cdot)$ и предположим, что

$$\beta(\mathcal{H}_\omega(\mathcal{D} \times [0,1]))) \ge \beta(\mathcal{D})$$

для некоторого $\mathcal{D} \subset \overline{U}$.

Поскольку

$$\mathcal{H}_\omega(\mathcal{D} \times [0,1])) = \overline{co}\,(\mathcal{F}(\omega, \mathcal{D}) \cup \{0\}),$$

получаем

$$\beta(\mathcal{F}(\omega, \mathcal{D})) \ge \beta(\mathcal{D})$$

откуда вытекает, что $\mathcal{D}$ относительно компактно.

Таким образом, семейство $\mathcal{H}$ задает гомотопию, связывающую исходное мультиотображение $\mathcal{F}$ и нулевое отображение. Это означает, согласно свойству нормализации топологической степени, что $ind(D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)}, \overline{U}) = 1$ для всех $\omega \in \Omega$ и следовательно

$$Ind(\mathcal{F}, \overline{U}) \ne 0,$$

и мы можем применить Предложение 13. □

Аналогичными методами можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{F} \in \widetilde{J}^c_\beta(\Omega, \overline{U}; E)$, *где открытое множество* U *выпукло и*

$$\mathcal{F}(\Omega \times \partial U) \subset \overline{U}.$$

Тогда $\mathcal{F}$ *имеет случайную неподвижную точку.*

4. Степень совпадения для уплотняющего возмущения линейного фредгольмова оператора

Нашей целью теперь является описать топологическую характеристику — степень совпадения для пары, состоящей из линейного фредгольмова оператора нулевого индекса и J^c-мультиотображения уплотняющего типа.

Пусть E_1 — банахово пространство; E_2 — нормированное пространство; $U \subset E_1$ — открытое ограниченное множество. Пусть, далее, $L\colon Dom\ L \subset E_1 \to E_2$ -линейный фредгольмов оператор нулевого индекса; $\mathcal{F}$ — мультиотображение класса $J^c(\overline{U}, E_2)$.

Пусть β — монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная и правильная МНК в E_1.

Скажем, что точная пара проекций (P, Q) относительно L допустима, если оператор K_P непрерывен.

Определение 19. *Будем говорить, что $(L, \mathcal{F})$ является β-уплотняющей парой, если выполнены следующие условия:*

$(L\mathcal{F}1)$ *Множество $\mathcal{F}(\overline{U})$ ограничено в E_2;*

$(L\mathcal{F}2)$ *Существует допустимая пара проекций (P, Q) относительно L такая, что мультиотображение $K_{P,Q}\mathcal{F}\colon \overline{U} \to K(E_1)$ является β-уплотняющим.*

Лемма 2. *Определение β-уплотняющей пары $(L, \mathcal{F})$ не зависит от выбора допустимой пары проекций (P, Q).*

Доказательство. Прежде всего отметим, что если точная пара проекций (P, Q) относительно L допустима, то и любая другая точная пара (P', Q') относительно L будет допустимой. Это вытекает из равенства $K_{P'} = (I - P')K_P$ (см. [9]).

Далее, пусть множество $\mathcal{D} \subset \overline{U}$ таково, что для некоторой точной пары (P', Q') имеем

$$\beta(K_{P',Q'}\mathcal{F}(\mathcal{D})) \geq \beta(\mathcal{D}). \tag{1}$$

Используя операторное равенство

$$K_{P',Q'} = (I - P')K_{P,Q} + (I - P')K_P(Q - Q')$$

(см. [9]), свойства МНК β, а также тот факт, что $P'K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})$ и $(Q-Q')\mathcal{F}(\mathcal{D})$ являются ограниченными подмножествами конечномерных подпространств $Ker\, L$ и $(Q-Q')E_2$ соответственно, получаем

$$\beta(K_{P',Q'}\mathcal{F}(\mathcal{D})) = \beta(K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})) \geq \beta(\mathcal{D}),$$

откуда вытекает относительная компактность множества $\mathcal{D}$, что и доказывает утверждение. □

Множество всех β-уплотняющих пар $(L, \mathcal{F})$ будем обозначать $\mathcal{J}^\beta(\overline{U}, E_2)$.

Определение 20. *Точка $x \in Dom\, L \cap \overline{U}$ называется точкой совпадения оператора L и мультиотображения $\mathcal{F}$, если*

$$Lx \in \mathcal{F}(x).$$

Множество всех точек совпадения L и $\mathcal{F}$ будем обозначать $Coin\,(L, \mathcal{F})$.

Будем теперь предполагать выполненным следующее условие.

$(L\mathcal{F}3)$ Пусть

$$Coin\,(L, \mathcal{F}) \cap \partial U = \emptyset,$$

то есть $Lx \notin \mathcal{F}(x)$ для всех $x \in Dom\, L \cap \partial U$.

Множество всех β-уплотняющих пар $(L,\mathcal{F})$, удовлетворяющих условию $(L\mathcal{F}3)$ будем обозначать $\mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U},E_2)$.

Для пары $(L,\mathcal{F})\in\mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U},E_2)$, и произвольной допустимой пары (P,Q) оператора L рассмотрим мультиотображение $\mathcal{G}\colon\overline{U}\to K(E_1)$ вида

$$\mathcal{G}(x)=Px+(\Lambda\Pi+K_{P,Q})\mathcal{F}(x),\quad x\in\overline{U}. \tag{2}$$

Из Предложения 12 (iv) вытекает, что $Fix\,\mathcal{G}$ совпадает с $Coin\,(L,\mathcal{F})$ и таким образом, согласно условию $(L\mathcal{F}3)$

$$Fix\,\mathcal{G}\cap\partial U=\emptyset.$$

Лемма 3. *Мультиотображение $\mathcal{G}$, определенное формулой* (2)*, является β-уплотняющим J^c-мультиотображением.*

Доказательство. Тот факт, что мультиотображение $\mathcal{G}$ является β-уплотняющим вытекает из свойств МНК β, условий $(L\mathcal{F}1)$ - $(L\mathcal{F}2)$ и конечномерности операторов P и Λ.

Пусть теперь

$$D_{\mathcal{F}}:\overline{U}=X_0\overset{\mathcal{F}_1}{\multimap}X_1\overset{\mathcal{F}_2}{\multimap}\ldots\overset{\mathcal{F}_n}{\multimap}X_n=E_2 \tag{3}$$

— некоторое разложение мультиотображения $\mathcal{F}$. Рассмотрим мультиотображения $\widetilde{\mathcal{F}}_1\colon\overline{U}\multimap E_1\times X_1$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_i\colon E_1\times X_{i-1}\multimap E_1\times X_i$, $i=2,...,n$, заданные следующим образом:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1(x)=\{x\}\times\mathcal{F}_1(x),$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}_i(x,z)=\{x\}\times\mathcal{F}_i(z)$$

и непрерывное отображение $\Psi\colon E_1\times X_n\to E_1$,

$$\Psi(x,z)=Px+(\Lambda\Pi+K_{P,Q})(z).$$

Ясно, что тогда

$$D_{\mathcal{G}}=(\Psi\circ\widetilde{\mathcal{F}}_n\circ\ldots\circ\widetilde{\mathcal{F}}_1) \tag{4}$$

— разложение $\mathcal{G}$. $\square$

Доказанное утверждение дает возможность ввести следующее понятие.

Определение 21. *Степенью совпадения* $\deg(L,\mathcal{F},\overline{U})$ *пары* $(L,\mathcal{F})\in\mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U},E_2)$ *называется индекс неподвижных точек разложения* (4)*:*

$$\deg(L,\mathcal{F},\overline{U}):=ind(D_{\mathcal{G}},\overline{U}).$$

Известно (см., например, [9]), что множество всех непрерывных линейных изоморфизмов $\Lambda\colon Coker\ L\to Ker\ L$ разбивается на два гомотопических класса (если $Coker\ L$ и $Ker\ L$ ориентированы, то два изоморфизма принадлежат одному классу, если они задают одинаковую ориентацию образа $Coker\ L$).

Корректность Определения 21 обосновывает следующее утверждение.

Лемма 4. *При заданном разложении* (3) *степень совпадения* $\deg(L,\mathcal{F},\overline{U})$ *зависит только от гомотопического класса* Λ.

Доказательство. Пусть (P,Q) и (P',Q') — две допустимых пары относительно L и Λ, Λ' — два изоморфизма между $Coker\ L$ и $Ker\ L$, которые принадлежат к одному гомотопическому классу. Пусть $\widetilde{\Lambda}\colon Coker\ L\times[0,1]\to Ker\ L$ — связывающая их гомотопия. Известно (см., [9]), что для каждого $\lambda \in [0,1]$ операторы $P(\lambda) = (1-\lambda)P + \lambda P'$ и $Q(\lambda) = (1-\lambda)Q + \lambda Q'$ образуют допустимую пару относительно L и, более того,

$$K_{P(\lambda)} = (1-\lambda)K_P + \lambda K_{P'}.$$

Далее, обозначив $\widetilde{\Lambda}_\lambda = \widetilde{\Lambda}(\cdot,\lambda)$, рассмотрим семейство $\widetilde{\mathcal{G}}\colon \overline{U} \times [0,1] \to K(E_1)$ вида

$$\widetilde{\mathcal{G}}(x,\lambda) = P(\lambda)x + (\widetilde{\Lambda}_\lambda \Pi + K_{P(\lambda),Q(\lambda)})\mathcal{F}(x). \tag{5}$$

Ясно, что при любом $\lambda \in [0,1]$ множество неподвижных точек $Fix\ \widetilde{\mathcal{G}}(\cdot,\lambda)$ совпадает с $Coin\,(L,\mathcal{F})$ и, таким образом,

$$Fix\ \widetilde{\mathcal{G}}(\cdot,\lambda) \cap \partial U = \emptyset, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Следовательно, для того, чтобы убедиться, что семейство $\widetilde{\mathcal{G}}$ порождает гомотопию мультиотображений $\mathcal{G}_0 = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}_1 = P'x + (\Lambda'\Pi + K_{P',Q'})\mathcal{F}$ нужно проверить только, что семейство $\widetilde{\mathcal{G}}$ является β-уплотняющим.

Пусть множество $\mathcal{D} \subset \overline{U}$ таково, что

$$\beta(\widetilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D} \times [0,1])) \geq \beta(\mathcal{D}).$$

Из представления (5) вытекает

$$\widetilde{\mathcal{G}}(x,\lambda) \subset (1-\lambda)Px + \lambda P'x + \widetilde{\Lambda}_\lambda \Pi \mathcal{F}(x) + [(1-\lambda)K_P + \lambda K_{P'}]\,[I - (1-\lambda)Q - \lambda Q']\mathcal{F}(x) =$$

$$= (1-\lambda)Px + \lambda P'x + \widetilde{\Lambda}_\lambda \Pi \mathcal{F}(x) + [(I-\lambda P')K_{P,Q} + \lambda(I-\lambda P')K_P(Q-Q')]\mathcal{F}(x).$$

Первые три слагаемых в последней сумме конечномерны, множество $\cup_{\lambda\in[0,1]}\lambda P'K_{P.Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})$ — ограниченное подмножество конечномерного пространства $Ker\ L$, множество $(Q-Q')\mathcal{F}(\mathcal{D})$ — ограниченное подмножество конечномерного пространства $(Q-Q')E_2$, в силу чего $\cup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(I-\lambda P')K_P(Q-Q')\mathcal{F}(\mathcal{D})$ — относительно компактное подмножество E_1. В силу свойств МНК β это означает, что

$$\beta(\widetilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D} \times [0,1])) \leq \beta(K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})),$$

откуда и следует относительная компактность множества $\mathcal{D}$.

Применяя теперь (при фиксированном ω) свойство гомотопической инвариантности (см. Предложение 14), получаем

$$ind(D_{\mathcal{G}_0}, \overline{U}) = ind(D_{\mathcal{G}_1}, \overline{U}),$$

что и доказывает утверждение. □

Непосредственно из Определения 21 и соответствующих свойств индекса неподвижной точки, описанных в Разделе 3, вытекают следующие утверждения.

Предложение 16. *(Свойство точки совпадения) Пусть* $(L,\mathcal{F}) \in \mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$ *и*

$$\deg(L,\mathcal{F},\overline{U}) \neq 0.$$

Тогда $\emptyset \neq Coin(L,\mathcal{F},\overline{U}) \subset (U \cap Dom\,L)$.

Определение 22. *Пусть* $(L,\mathcal{F})$, $(L,\mathcal{G}) \in \mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$, *и мультиотображения* $\mathcal{F}$ *и* $\mathcal{G}$ *допускают разложения*

$$D_{\mathcal{F}} : \overline{U} = X_0 \overset{\mathcal{F}_1}{\multimap} X_1 \overset{\mathcal{F}_2}{\multimap} \dots \overset{\mathcal{F}_n}{\multimap} X_n = E_2,$$

$$D_{\mathcal{G}} : \overline{U} = X_0 \overset{\mathcal{G}_1}{\multimap} X_1 \overset{\mathcal{G}_2}{\multimap} \dots \overset{\mathcal{G}_n}{\multimap} X_n = E_2,$$

Будем говорить, что разложения $D_{\mathcal{F}}$ и $D_{\mathcal{G}}$ L-гомотопны,

$$D_{\mathcal{F}} \overset{L}{\sim} D_{\mathcal{G}},$$

если существуют мультиотображения

$$\mathcal{H}_i \in J(X_{i-1} \times [0,1], X_i), \quad i = 1, ...n$$

такие, что $\mathcal{H}_i(\cdot, 0) = \mathcal{F}_i$, $\mathcal{H}_i(\cdot, 1) = \mathcal{G}_i$, $i = 1, ..., n$ и мультиотображение $\mathcal{H}\colon \overline{U} \times [0,1] \multimap E_2$, допускающее разложение

$$\overline{U} \times [0,1] = X_0 \times [0,1] \overset{\widetilde{\mathcal{H}}_1}{\multimap} X_1 \times [0,1] \overset{\widetilde{\mathcal{H}}_2}{\multimap} ... \overset{\widetilde{\mathcal{H}}_{n-1}}{\multimap} X_{n-1} \times [0,1] \overset{\mathcal{H}_n}{\multimap} X_n = E_2$$

где $\widetilde{\mathcal{H}}_i(x, \lambda) = \mathcal{H}_i(x, \lambda) \times \{\lambda\}$ для $x \in X_{i-1}$, $\lambda \in [0,1]$, $i = 1, ..., n-1$ таково, что

(*i*) *множество $\mathcal{H}(\overline{U} \times [0,1])$ ограничено в E_2;*

(*ii*) *семейство $K_{P,Q}\mathcal{H}(x, \lambda)$ является β-уплотняющим для некоторой допустимой пары (P, Q) оператора L ;*

(*iii*) *$Lx \notin \mathcal{H}(x, \lambda)$ для $x \in Dom\ L \cap \partial U$, $\lambda \in [0,1]$.*

Предложение 17. *(Гомотопическая инвариантность) Если $(L, \mathcal{F})$, $(L, \mathcal{G}) \in \mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$ и*

$$D_{\mathcal{F}} \overset{L}{\sim} D_{\mathcal{G}},$$

то

$$\deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) = \deg(L, \mathcal{G}, \overline{U}).$$

Предложение 18. *(Аддитивное свойство) Пусть $\{U_j\}_{j=1}^k$ — семейство открытых попарно непересекающихся подмножеств U и пара $(L, \mathcal{F})$, $(L, \mathcal{G}) \in \mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$ такова, что*

$$Coin(L, \mathcal{F}) \bigcap \big((\overline{U} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} U_j) \cap Dom\, L\big) = \emptyset.$$

Тогда

$$\deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) = \sum_{j=1}^{k} \deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}_j).$$

В качестве примера приложения общего принципа существования точки совпадения рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для пары $(L, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$ выполнены следующие условия:*

(i) *$Lx \notin \lambda\mathcal{F}(x)$ для всех $\lambda \in (0,1]$, $x \in Dom\, L \cap \partial U$;*

(ii) *$0 \notin \Pi\mathcal{F}(x)$ для всех $x \in Ker\, L \cap \partial U$;*

(iii)

$$ind_{Ker\, L}(\Lambda\Pi\mathcal{F}|_{\overline{U}_{Ker\, L}}, \overline{U}_{Ker\, L}) \neq 0,$$

где символ $ind_{Ker\, L}$ обозначает индекс неподвижных точек, вычисляемый в пространстве $Ker\, L$, и $\overline{U}_{Ker\, L} = \overline{U} \cap Ker\, L$.

Тогда $\emptyset \neq Coin(L, \mathcal{F}, \overline{U}) \subset (U \cap Dom\, L)$.

Доказательство. Рассмотрим деформацию $\Psi : \overline{U} \times [0,1] \to K(E_1)$, заданную следующим образом:

$$\Psi(x,\lambda) = Px + (\Lambda\Pi + \lambda K_{P,Q})\mathcal{F}(x), \quad (x,\lambda) \in \overline{U} \times [0,1].$$

Для $\lambda \in (0,1]$ и $x \in Dom\, L \cap \partial U$, из условия (i) вытекает

$$x \notin \Psi(x,\lambda).$$

С другой стороны, условие (ii) влечет

$$x \notin \Psi(x,0)$$

для всех $x \in Dom\, L \cap \partial U$.

Кроме того, семейство Ψ является β-уплотняющим. Действительно, если $\mathcal{D} \subset \overline{U}$ — некоторое подмножество такое, что

$$\beta\left(\cup_{\lambda\in[0,1]}\lambda K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})\right) \geq \beta(\mathcal{D}),$$

то

$$\beta\left(\cup_{\lambda\in[0,1]}\lambda K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})\right) = \beta\left(\overline{co}(\{0\} \cup K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})\right) = \beta\left(K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})\right),$$

откуда вытекает относительная компактность $\mathcal{D}$.

Таким образом, Ψ порождает гомотопию, откуда следует

$$\deg(L,\mathcal{F},\overline{U}) = ind(P + \Lambda\Pi\mathcal{F},\overline{U}).$$

Мультиотображение $P + \Lambda\Pi\mathcal{F}$ принимает значения в конечномерном пространстве $Ker\ L$. Применяя принцип сужения отображения (см., например, [8]), получаем

$$ind(P + \Lambda\Pi\mathcal{F},\overline{U}) = ind_{Ker\,L}(\Lambda\Pi\mathcal{F}|_{\overline{U}_{Ker\,L}},\overline{U}_{Ker\,L}).$$

Остается использовать условие (iii) и Предложение 16. □

5. О случайной степени совпадения

Пусть, как ранее, E_1 — банахово пространство; E_2 — нормированное пространство; $U \subset E_1$ — открытое ограниченное множество; $L\colon Dom\ L \subset E_1 \to E_2$ -линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и β — монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная и правильная МНК в E_1.

Для полного измеримого пространства Ω, пусть мультиотображение $\mathcal{F}\colon \Omega \times \overline{U} \to K(E_2)$ удовлетворяет условиям:

($\mathcal{F}\omega1$) $\mathcal{F}$ — мультиотображение Каратеодори;

($\mathcal{F}\omega2$) для каждого $\omega \in \Omega$, $\mathcal{F}(\omega,\cdot)$ - J^c-мультиотображение;

($\mathcal{F}\omega3$) для каждого $\omega \in \Omega$, $(L,\mathcal{F}(\omega,\cdot))$ является β-уплотняющей парой.

Если теперь выполнено условие

($\mathcal{F}\omega4$) для каждого $\omega \in \Omega$,

$$Lx \notin \mathcal{F}(\omega,x) \quad \text{для всех} \quad x \in Dom\ L \cap \partial U,$$

то случайная степень совпадения пары $(L, \mathcal{F})$ может быть определена как

$$Deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) = \{deg(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}) \colon \omega \in \Omega\}.$$

По определению полагаем, что $Deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$, если $deg(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}) \neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Если $Deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$, то пара $(L, \mathcal{F})$ имеет случайную точку совпадения, то есть существует такое измеримое отображение $\xi \colon \Omega \to U$, что*

$$L\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega)) \quad \textit{для всех } \omega \in \Omega.$$

Доказательство. Согласно Предложению 16 при каждом $\omega \in \Omega$ множество точек совпадения пары $(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot))$ непусто, а следовательно непусто и множество неподвижных точек мультиотображения $\mathcal{G} \colon \Omega \times \overline{U} \to K(E_1)$ вида

$$\mathcal{G}(\omega, x) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})\mathcal{F}(\omega, x), \quad x \in \overline{U},$$

где (P, Q) — некоторая допустимая пара оператора L. Нетрудно видеть, что $\mathcal{G}(\omega, x)$ является мультиотображением Каратеодори, а значит, согласно Предложению 3, оно измеримо и таким образом, в частности, является случайным u-мультиотображением. Согласно Предложению 4 $\mathcal{G}(\omega, x)$ имеет случайную неподвижную точку, которая и является искомой случайной точкой совпадения. □

Благодарности

Работа В. В. Обуховского и С. В. Корнева поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках проектной части госзадания (Проект № 1.3464.2017/4.6) и грантом РФФИ — MOST 17-51-52022.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений, Успехи мат. наук 35(1980), № 1, 59-126.

2. Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, Многозначные отображения. Итоги науки и техники. Матем. анализ Т. 19, ВИНИТИ, М., 1982, 127-231.

3. Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений, ЛИБРОКОМ, М., 2016.

4. К. Борсук, Теория ретрактов, Мир, М., 1971.

5. С. В. Корнев, В. В. Обуховский, О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений, Труды матем. ф-та (новая серия), Воронеж, ВГУ, 8 (2004), 56-74.

6. А. Д. Мышкис, Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории, Матем. сборник 34 (1954), № 3, 525-540.

7. J. Andres, L. Górniewicz, Random topological degree and random differential inclusions, Topol. Methods Nonlin. Anal. 40 (2012), 337-358

8. R. Bader, W. Kryszewski, Fixed-point index for compositions of set-valued maps with proximally ∞-connected values on arbitrary ANR's, Set-Valued Anal. 2 (1994), 459-480.

9. R. E. Gaines, J. L. Mawhin, Coincidence degree and and nonlinear differential equations, Lect. Notes Math. 568, Springer, Berlin, 1977.

10. L. Górniewicz, Topological fixed point theory of multivalued mappings, 2nd ed., Springer, Dordrecht, 2006.

11. S. Hu, N. Papageorgiou, Handbook of multivalued analysis, Vol. I, Theory, Kluwer, Dordrecht, 1997.

12. D. M. Hyman, On decreasing sequences of compact absolute retracts, Fund Math. 64 (1969), 91-97.

13. M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces, Walter de Gruyter, Berlin — New York, 2001.

14. V. Obukhovskii, P. Zecca, N. V. Loi, S. Kornev, Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis, Lect. Notes Math. 2076, Springer, Berlin — Heidelberg, 2013.

15. E. Tarafdar, S. K. Teo, On the existence of solutions of the equation $Lx \in Nx$ and a coincidence degree theory, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 28(1979), 139-173.

16. E. Tarafdar, P. Watson, X.-Z. Yuan, Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusions, Comment. Math. Univ. Carolinae 37 (1996), 725-748.

REFERENCES

1. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, "Topological methods in the fixed-point theory of multi-valued maps", Russian Math. Surveys, 35:1 (1980), 65–143.

2. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, "Multivalued mappings", J. Soviet Math., 24:6 (1984), 719–791

3. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, "Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions", LIBROKOM, Moscow 2011.

4. K. Borsuk, Theory of retracts, PWN, Warsaw, 1967.

5. S. V.Kornev, V. V. Obukhovskii, "On some versions of the topological degree theory for nonconvex-valued multimaps", Trudy Mat. Fac. Voronezh Univ. (N.S.), Voronezh, VGU, 8 (2004), 56-74.

6. A. D. Myshkis, "Generalizations of the theorem on a fixed point of a dynamical system inside of a closed trajectory", Mat. Sb. (N.S.), 34(76):3 (1954), 525–540

7. J. Andres, L. Górniewicz, "Random topological degree and random differential inclusions", Topol. Methods Nonlin. Anal. 40 (2012), 337-358

8. R. Bader, W. Kryszewski, "Fixed-point index for compositions of set-valued maps with proximally ∞-connected values on arbitrary ANR's", Set-Valued Anal. 2 (1994), 459-480.

9. R.E. Gaines, J. L. Mawhin, "Coincidence degree and and nonlinear differential equations", Lect. Notes Math. 568, Springer, Berlin, 1977.

10. L. Górniewicz, “Topological fixed point theory of multivalued mappings”, 2nd ed., Springer, Dordrecht, 2006.

11. S. Hu, N. Papageorgiou, “Handbook of multivalued analysis Vol. I”, Theory, Kluwer, Dordrecht, 1997.

12. D. M. Hyman, “On decreasing sequences of compact absolute retracts”, Fund Math. 64 (1969), 91-97.

13. M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, “Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces”, Walter de Gruyter, Berlin — New York, 2001.

14. V. Obukhovskii, P. Zecca, N. V. Loi, S. Kornev, “Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis”, Lect. Notes Math. 2076, Springer, Berlin — Heidelberg, 2013.

15. E. Tarafdar, S. K. Teo, “On the existence of solutions of the equation $Lx \in Nx$ and a coincidence degree theory”, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 28(1979), 139-173.

16. E. Tarafdar, P. Watson, X.-Z. Yuan, “Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusions”, Comment. Math. Univ. Carolinae 37 (1996), 725-748.

Получено 22.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 514.85+531.2+531.012 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-320-340

Интегрируемые системы в планарной робототехнике[1]

Т. С. Ратью, Нгуен Тьен Зунг

Ратью Тюдор Стефан — доктор наук, профессор, Школа математических наук, Шанхайский университет Цзяотун; Отдел математики, Университет Женевы; Федеральная политехническая школа Лозанны (г. Шангхай, Китай; г. Женева, Швейцария; г. Лозанна, Швейцария).
e-mail: ratiu@sjtu.edu.cn
Зунг Нгуен Тьен — доктор наук, профессор, Математический институт Тулузы (г. Тулуза, Франция).
e-mail: tienzung@math.univ-toulouse.fr

Аннотация

Основная цель данной статьи — исследовать коммутирующие потоки и интегрируемые системы на конфигурационом пространстве плоских шарнирных многоугольников. Наше исследование приводит к определению естественной формы объема на каждом конфигурационном пространтве плоских шарнирных многоугольников, понятию перекрестных произведений интегрируемых систем, а также к понятию мульти-намбу интегрируемых систем. Первые интегралы наших систем являются функциями типа Ботта-Морса, которые могут быть использованы для изучения топологии конфигурационных пространств.

Посвящается Анатолию Т. Фоменко по случаю его 75-летия

Ключевые слова: плоские шарнирные многоугольники, коммутирующие потоки, негамильтонова интегрируемость, форма объема, структура Намбу, перекрестное произведение интегрируемых систем

Библиография: 28 названия.

Для цитирования:
Т. С. Ратью, Нгуен Тьен Зунг. Интегрируемые системы в планарной робототехнике // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 320–340.

[1]Работа Т.С. Ратью частично поддержана грантом Национального фонда естественных наук Китая номер 11871334 и NCCR SwissMAP грантом Национального научного фонда Швейцарии, работа Нгуен Тьен Зунга частично поддержана программой сотрудничества "High-End Foreign Experts"Шанхайского университета Цзяотун.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 514.85+531.2+531.012 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-320-340

Integrable systems in planar robotics

T. S. Ratiu, Nguyen Tien Zung

Ratiu Tudor Stefan — Doctor of Sciences, Professor, School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University Section de Mathématiques, Université de Genève, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (Shanghai, China; Genève, Switzerland; Lausanne, Switzerland).
e-mail: ratiu@sjtu.edu.cn
Zung Nguyen Tien — Doctor of Sciences, Professor, Institut de Mathématiques de Toulouse (Toulouse, France).
e-mail: tienzung@math.univ-toulouse.fr

Abstract

The main purpose of this paper is to investigate commuting flows and integrable systems on the configuration spaces of planar linkages. Our study leads to the definition of a natural volume form on each configuration space of planar linkages, the notion of cross products of integrable systems, and also the notion of multi-Nambu integrable systems. The first integrals of our systems are functions of Bott-Morse type, which may be used to study the topology of configuration spaces.

Dedicated to Anatoly T. Fomenko on the occasion of his 75th birthday

Keywords: planar linkage, commuting flows, non-Hamiltonian integrability, volume form, Nambu structure, cross-product of integrable systems

Bibliography: 28 titles.

For citation:
T. S. Ratiu, Nguyen Tien Zung, 2020, "Integrable systems in planar robotics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 320–340.

1. Introduction

This paper is a preliminary investigation of natural commuting flows and integrable systems on the configuration spaces of linkages in geometry, machinery and robotics, especially planar linkages. Our motivation is manifold:

• Firstly, linkages appear everywhere in mechanical systems (see, e. g., [18, 26]). Moreover, commuting flows may be viewed as “independent components” in a mechanical system and play an important role in robotics and motion control: the commutativity makes it easier to compute and control the motions. In fact, one may observe many commuting flows in practice. For example, the excavator in Figure 1 (left), borrowed from Servatius et al. [23] with permission, has two sliding mechanisms, which commute with each other. This excavator may be represented by a planar linkage in Figure 1 (right), where each sliding mechanism is replaced by two connecting edges. The configuration space of this linkage admits an integrable system having two commuting vector fields. If one allows some of the lengths of the edges to be variable, then the configuration space has higher dimension, and those adjustable lengths are first integrals of the integrable system in question.

• Secondly, for 3-dimensional (3D) polygonal linkages, there are now famous bending flows (around diagonals) found by Kapovich and Millson [15], which are a special class of integrable

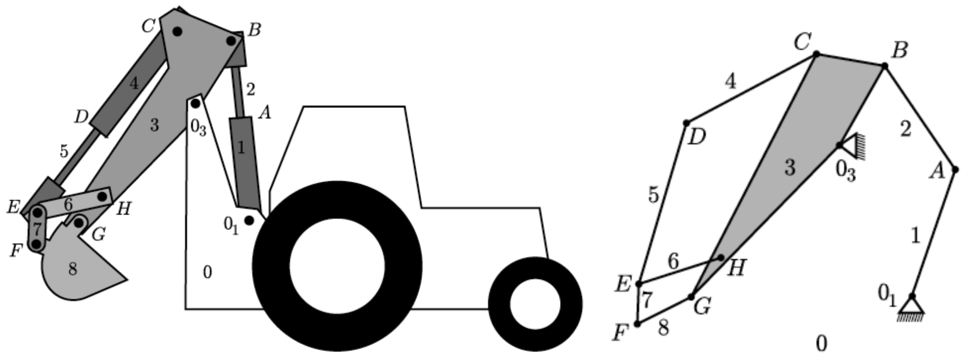


Figure 1: The excavator and its planar linkage representation, after [23].

Hamiltonian systems, and the singularities of these systems have been described in a recent paper by Bouloc [3]. We want to see to what extent these results can be generalized to other situations, especially planar linkages, and also 3D linkages which are more general than just polygons. It turns out that, for 2-dimensional (2D) polygons, we have a simple construction which may be viewed as an analogue of Kapovich-Millson systems: given a 2D n-gonal linkage ($n \geq 4$), just choose arbitrary $[(n-3)/2]$ ($[\cdot]$ denotes the integer part of a real number) non-crossing diagonals which decomposes it into $[n/2]-1$ quadrangles and at most one triangle (one if n is odd and zero if n is even). Then we get a non-Hamiltonian integrable system on the configuration space of type $([n/2]-1, [(n-3)/2])$, i.e., with $[n/2]-1$ commuting vector fields and $[(n-3)/2]$ common first integrals; ($[(n-3)/2]+[n/2]-1 = n-3$ is the dimension of the configuration space). Each diagonal gives one first integral (its length, or rather its length squared to be smooth), each quadrangle has one degree of freedom and gives rise to one vector field, and they all commute with each other (see the rest of this paper for details). For example, when $n = 7$, the configuration space of a generic planar heptagonal linkage is a 4-dimensional manifold, on which we have integrable systems of type (2,2), i.e., with two commuting vector fields and two common first integrals, by this construction.

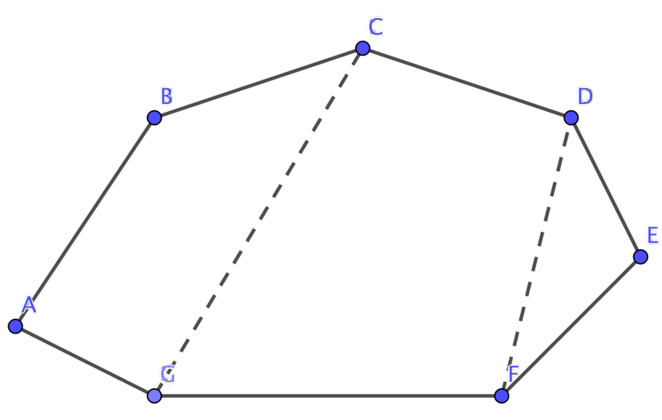


Figure 2: An integrable system on a the 4-dimensional configuration space of a 7-gon linkage: the two “4-bar mechanisms” $ABCG$ and $CGFD$ provide two commuting vector fields and the square lengths $|CG|^2$ and $|DF|^2$ are their smooth common first integrals.

Recall that the configuration space of 3D linkages admits a natural symplectic structure [19, 15, 10]. However, for 2D linkages, a priori, we have neither a natural symplectic structure, nor Hamiltonian systems; however, we have Nambu structures and so our vector fields can be constructed in the spirit of Nambu mechanics [22]. Recall that a Nambu structure of order q on a manifold is a q-vector field which spans a (singular) integrable q-dimensional distribution and which may be viewed as a leaf-wise contravariant volume element on the corresponding singular q-dimensional foliation; see, e.g., [4, 20]. Contravariant volume elements are particular cases of Nambu structures and they were used by Nambu in [22] as a way to generalize Hamiltonian mechanics, whence the name.

• Our third motivation is given by the universality theorem of Kapovich and Millson [16], which was announced many years before by Thurston [24] but without a full proof. This theorem states that, given any closed (compact without boundary) smooth manifold, there is a planar linkage whose configuration space is diffeomorphic to a disjoint union of a finite number of copies of that manifold. Thus, by studying natural integrable systems on configuration spaces of planar linkages, we can obtain interesting integrable non-Hamiltonian systems on *any* closed manifold. The theory of integrable non-Hamiltonian systems (in the sense of Bogoyavlensky [2]) is relatively new compared to integrable Hamiltonian systems, especially when it comes to their topological and geometric properties (see [27] and references therein), so this huge class of integrable non-Hamiltonian systems coming from planar linkages will be very useful for the development of the theory. We summarize below the main results of the paper.

The first result of this paper, presented in Section 2, is that every configuration space of planar linkages admits a natural volume form. This volume form, together with a choice of diagonals in the linkage, gives rise to Nambu structures on the configuration space.

In Section 3 we give a simple general method for constructing integrable systems on configuration spaces of planar linkages, by decomposing such spaces into cross products of smaller configuration spaces, and lifting integrable systems from these smaller spaces. In particular, we introduce the notion of *cross products of integrable systems* in this section and, as a special case of this cross product construction, we find, what we call, *multi-Nambu integrable systems*.

In Section 4, the last section of this paper, we list some open questions and final remarks. In particular, we mention that our first integrals are Bott-Morse functions on many configuration spaces, which are helpful in topology. For example, in the case of hexagons, by using these Bott-Morse functions, one immediately gets the fact that the corresponding configuration spaces belong to a special class of very well-studied 3-manifolds named graph-manifolds by Waldhausen [25]; this fact also fits well with Fomenko's topological theory of integrable systems on 3-manifolds [7].

2. Configuration spaces of planar linkages

2.1. Definition of the orbit and configuration spaces

In this paper, a ***planar linkage*** $\mathcal{L}$ consists of:

- A finite graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, where $\mathcal{V}$ denotes the set of ***vertices*** and $\mathcal{E}$ denotes the set of ***edges*** of $\mathcal{G}$. For any two vertices $A, B \in \mathcal{V}$ there is at most one edge connecting them, denoted AB or BA. An edge is also called a ***bar*** in $\mathcal{L}$.
- Each edge has an associated positive length, i.e., there is a length function
$$\ell : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+ :=]0, \infty[$$
which specifies the length $\ell(AB)$ of each edge $AB \in \mathcal{E}$.
- A subset $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ of vertices, which may be empty, called the set of ***fixed vertices*** or ***based points***, which comes together with a ***fixing map***
$$\beta : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$$

that attaches $\mathcal{L}$ to the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$. The vertices in $\mathcal{V} \setminus \mathcal{B}$ are called ***movable***.

The pair $(\mathcal{G}, \mathcal{B})$, where the lengths and the fixing are not specified, is called the ***linkage type*** of $\mathcal{L}$.

A ***realization*** of a planar linkage $\mathcal{L} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \ell, \mathcal{B}, \beta)$ is a map

$$\mathbf{r} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^2$$

which respects the based points and the bar lengths. In other words,

$$|\mathbf{r}(A)\mathbf{r}(B)| = \ell(AB),$$

for any $A, B \in \mathcal{V}$, and the restriction of $\mathbf{r}$ to the set $\mathcal{B}$ of base vertices coincides with β. Of course, the length condition means that $\mathbf{r}$ can be extended to a map from the whole graph $\mathcal{G}$ to $\mathbb{R}^2$, that maps each edge of $\mathcal{G}$ to a straight line segment of the same length. In a planar realization of a linkage, the bars can cross each other, i.e., we do not require the map from the graph to $\mathbb{R}^2$ to be injective. The crossing of bars may be realized in practice by laying them on parallel planes.

The space of all realizations of a planar linkage $\mathcal{L}$ is denoted by $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$; it is also called the ***orbit space*** of $\mathcal{L}$. Two different realizations $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ of $\mathcal{L}$ are said to be ***isometric*** if there is an orientation and length preserving map $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (i.e., $\phi \in SE(2)$, the Euclidean group) such that $\phi \circ \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. The set of all realizations of $\mathcal{L}$ modulo isometries is called the ***configuration space*** and is denoted by $M_{\mathcal{L}}$.

If $\mathcal{B} = \emptyset$ is empty then the realizations of $\mathcal{L}$ can move freely in $\mathbb{R}^2$; in this case $SE(2)$ acts on $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$, the action is free if $\mathcal{L}$ has at least one bar, and we have

$$M_{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}}/SE(2).$$

If $\mathcal{B}$ consists of exactly one base point B, then the configurations cannot be translated freely in $\mathbb{R}^2$ but can turn around B; in this case we have

$$M_{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}}/SO(2).$$

If, however, $\mathcal{B}$ consists of at least two distinct base vertices, then two realizations of $\mathcal{L}$ are isometric if and only if they coincide; in this case we have

$$M_{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}}.$$

Let $G_{\mathcal{L}}$ be the group $\{e\}$, $SO(2)$, or $SE(2)$, depending on whether $\mathcal{B}$ has at least two, one, or zero fixed vertices. With this notation, in view of the considerations above, we have $M_{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}}/G_{\mathcal{L}}$.

Note that when studying the configuration space of a linkage, we can choose between the version with at least 2 base points and the version without any base point. Indeed, if $\mathcal{L} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \ell, \mathcal{B}, \beta)$, where $\mathcal{B}$ has at least 2 points, then we can add all edges BC with vertices $B, C \in \mathcal{B}$, together with their lengths $\ell(BC) = |\beta(B)\beta(C)|$, then forget these base vertices, and we get a linkage with empty base. This new linkage, now without any base vertices, has the same configuration space as the old linkage. Conversely, if $\mathcal{L}$ does not have any base points, then we can choose an arbitrary bar in $\mathcal{L}$ and fix it to $\mathbb{R}^2$, so that its vertices become base points, without changing the configuration space of $\mathcal{L}$.

For example, consider a ***quadrangle*** linkage $\mathcal{L}$ (also called a ***4-bar mechanism***) consisting of four vertices A, B, C, D and four edges with four fixed lengths $\ell_1 = |AB|$, $\ell_2 = |BC|$, $\ell_3 = |CD|, \ell_4 = |DA|$, and no base point. Consider the same quadrangle, but now with two base points A and D, and only three free edges AB, BC, CD (the edge DA can be removed because A and D are already fixed). We get a new linkage $\mathcal{L}_2$, whose configuration space is exactly the same as the configuration space of $\mathcal{L}_1$ (see Figure 3).

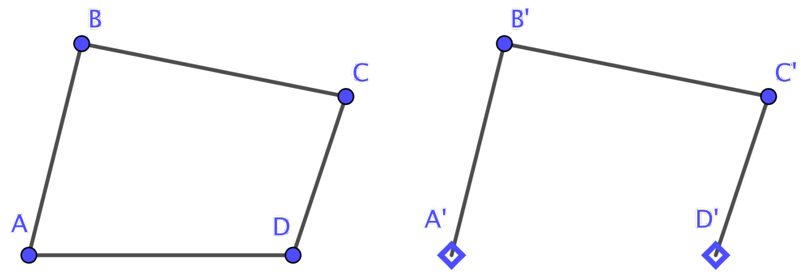


Figure 3: Two versions of a quadrangle (with and without base points), also called a 4-bar mechanism, with the same configuration space.

Remark 1. When talking about a linkage $\mathcal{L}$, one often assumes that it is connected (i.e., the corresponding graph is connected). However, for our study, it is convenient to allow linkages which are disconnected. It is clear that if $\mathcal{L}$ is a disjoint union of two linkages $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$, then its base is also the disjoint union of $\mathcal{B}_1$ and $\mathcal{B}_2$ and its orbit space is simply the direct product of the two corresponding orbit spaces:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{L}_1 \sqcup \mathcal{L}_2} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}_1} \times \mathcal{O}_{\mathcal{L}_2}.$$

The formula for the configuration space of $\mathcal{L}_1 \sqcup \mathcal{L}_2$ is more complicated. Namely, we have six cases:

(i) If both $\mathcal{B}_1$ and $\mathcal{B}_2$ have at least two vertices, then $\mathcal{O}_\mathcal{L} = M_\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}_1} \times \mathcal{O}_{\mathcal{L}_2} = M_{\mathcal{L}_1} \times M_{\mathcal{L}_2}$.

(ii) If $\mathcal{B}_1$ has at least two vertices and $\mathcal{B}_2$ consists of exactly one vertex, then $\mathcal{O}_\mathcal{L} = M_\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}_1} \times \mathcal{O}_{\mathcal{L}_2}$ but $M_{\mathcal{L}_1} \times M_{\mathcal{L}_2} = M_\mathcal{L}/SO(2)$, the $SO(2)$-action being on the second factor.

(iii) If $\mathcal{B}_1$ has at least two vertices and $\mathcal{B}_2 = \emptyset$, then $\mathcal{O}_\mathcal{L} = M_\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}_1} \times \mathcal{O}_{\mathcal{L}_2}$ but $M_{\mathcal{L}_1} \times M_{\mathcal{L}_2} = M_\mathcal{L}/SE(2)$, the $SE(2)$-action being on the second factor.

(iv) If both $\mathcal{B}_1$ and $\mathcal{B}_2$ have each exactly one vertex, then $\mathcal{O}_\mathcal{L} = M_\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}_1} \times \mathcal{O}_{\mathcal{L}_2}$ but $M_{\mathcal{L}_1} \times M_{\mathcal{L}_2} = M_\mathcal{L}/(SO(2) \times SO(2))$, each $SO(2)$ acting separately on its corresponding factor.

(v) If $\mathcal{B}_1$ consists of one vertex and $\mathcal{B}_2 = \emptyset$, then $M_\mathcal{L} = \mathcal{O}_\mathcal{L}/SE(2) = \mathcal{O}_{\mathcal{L}_1} \times_{SO(2)} \mathcal{O}_{\mathcal{L}_2}$, so we get fibrations $M_\mathcal{L} \to \mathcal{O}_{\mathcal{L}_1}$, $M_\mathcal{L} \to \mathcal{O}_{\mathcal{L}_2}$ whose fibers are $\mathcal{O}_{\mathcal{L}_2}$ and $\mathcal{O}_{\mathcal{L}_1}$, respectively. Thus we get an $SE(2)$-principal fiber bundle $M_\mathcal{L} \to M_{\mathcal{L}_1} \times M_{\mathcal{L}_2}$. The $SE(2)$-action is induced from the following $SE(2)$-action on the linkage: fix a second vertex on $\mathcal{L}_1$ and let $SE(2)$ act on $\mathcal{L}_2$. The resulting action on $M_\mathcal{L}$ is free and the quotient $M_\mathcal{L}/SE(2)$ is $M_{\mathcal{L}_1} \times M_{\mathcal{L}_2}$.

(vi) If $\mathcal{B}_1 = \emptyset$ and $\mathcal{B}_2 = \emptyset$, we proceed as in the previous case, except that we now fix two vertices in $\mathcal{L}_1$. We get an $SE(2)$-principal fiber bundle $M_\mathcal{L} \to M_{\mathcal{L}_1} \times M_{\mathcal{L}_2}$.

2.2. The dimension

Consider a linkage $\mathcal{L}$ with s fixed vertices $B_1, \ldots, B_s$ and n movable vertices $A_1, \ldots, A_n$. If there are no bars, then each A_i can take any position in $\mathbb{R}^2$ and we have

$$\mathcal{O}_{(\mathcal{E},\mathcal{B},\beta)} \cong \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^{2n};$$

$\mathcal{O}_{(\mathcal{E},\mathcal{B},\beta)}$ denotes the set of all realizations of the planar linkage $\mathcal{L}$ but with variable lengths of the bars. If the linkage has q bars, then we have a ***joint length map***

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_q) : \mathcal{O}_{(\mathcal{E},\mathcal{B},\beta)} \to \mathbb{R}^q_+,$$

where μ_i is half the length square of bar number i in $\mathcal{L}$. (We take the square to have smooth functions.) Clearly this map descends to the quotient $M_{(\mathcal{E},\mathcal{B},\beta)} = \mathcal{O}_{(\mathcal{E},\mathcal{B},\beta)}/G_\mathcal{L}$; we denote it by the same symbol $\boldsymbol{\mu}$, because there is no danger of confusion.

For each fixed value of a q-tuple of lengths $(\ell_1, \ldots, \ell_q)$ we have

$$\mathcal{O}_{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\mu}^{-1}(\ell_1^2/2, \ldots, \ell_q^2/2) = \{L \in \mathcal{O}_{(\mathcal{E},\mathcal{B},\beta)} \mid \mu_i(L) = \ell_i^2/2,\ \forall 1 \le i \le q\},$$

and a similar formula for $M_{\mathcal{L}}$.

A bar in a linkage type $(\mathcal{G}, \mathcal{B})$ is called ***redundant*** if its length is dependent on the lengths of the other bars. In other words, edge i is redundant if the function μ_i is functionally dependent on the functions $\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_q$. For example, consider a complete link of 4 vertices and 6 edges. Then one of the edges (it does not matter which one) is redundant. Eliminating a redundant edge does not change the dimension of the configuration space. So, to compute the dimension of the configuration space of a linkage $\mathcal{L}$, we may assume that its linkage type $(\mathcal{G}, \mathcal{B})$ has all bars non-redundant. In this case, we have

$$\dim M_{\mathcal{L}} = 2n - q$$

for any regular (generic) value of the q-tuple of edge lengths. (This formula is essentially the classical so-called Chebychev–Grübler–Kutzbach criterion for the degree of freedom of a kinematic chain; see, e.g., [18].) In particular,

$$q \le 2n$$

in a linkage all of whose edges are non-redundant, i.e., the number of edges (bars) is at most twice the number of movable vertices. A linkage all of whose bars are non-redundant is called a ***non-redundant linkage***.

2.3. The contravariant volume element

We want to define a natural volume multivector field on $M_{\mathcal{L}}$ (a "contravariant volume also called a Nambu structure of top order). The strategy is to construct it from a volume multivector field on $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ and on $G_{\mathcal{L}}$ (recall that $M_{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}}/G_{\mathcal{L}}$).

First, recall that on any orientable manifold M, any choice of volume form Ω_M uniquely defines a top degree nowhere vanishing multi-vector field Λ_M by requiring it to satisfy $\Lambda_M \lrcorner \Omega_M = 1$. We call such a top degree multi-vector field a ***contravariant volume***.

Second, we note that on any Lie group G there always is a left-invariant contravariant volume. Indeed, if $\{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ is a basis of its Lie algebra $\mathfrak{g}$, extend these vectors to left invariant vector fields $\xi_1^L, \ldots, \xi_p^L$ and form the contravariant volume $\xi_1^L \wedge \ldots \wedge \xi_p^L$.

Third, if the Lie group G acts locally freely on a dense set of the manifold M (i.e., all its isotropy subgroups at the points on this dense sent are discrete), there is always a Nambu structure of degree $p = \dim G$ on M. Indeed, if $\{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ is a basis of $\mathfrak{g}$, form the corresponding infinitesimal generator vector fields $X_1, \ldots, X_p$; then $\Pi_{\mathcal{L}} := X_1 \wedge \ldots \wedge X_p$ is a Nambu structure on M tangent to the generic G-orbits.

We return now to our problem of constructing a contravariant volume on $M_{\mathcal{L}}$. The Lie group $G_{\mathcal{L}}$ equals $\{e\}$, $SO(2)$, or $SE(2)$, depending on whether $\mathcal{B}$ contains more than two, one, or zero vertices. Let $\Lambda_{G_{\mathcal{L}}}$ be the contravariant volume on $G_{\mathcal{L}}$ which equals hence

- $\Lambda_{G_{\mathcal{L}}} = 1$ if $G_{\mathcal{L}} = \{e\}$,
- $\Lambda_{G_{\mathcal{L}}} = Z = a\frac{\partial}{\partial b} - b\frac{\partial}{\partial a}$, the infinitesimal generator of counterclockwise rotation in the plane $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, if $G_{\mathcal{L}} = SO(2)$,
- $\Lambda_{G_{\mathcal{L}}} = Z \wedge \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$, where (x, y) are the coordinates of $\mathbb{R}^2$ in $SE(2) = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$.

This contravariant volume is given in terms of the obvious basis elements of the Lie algebra of $G_{\mathcal{L}}$ and, in view of the previous discussion, since $G_{\mathcal{L}}$ acts freely on a dense subset of $\mathcal{O}_{\mathcal{L},\ell}$, produces a Nambu multivecor field $\Pi_{\mathcal{L}}$ on $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$, tangent to the generic $G_{\mathcal{L}}$-orbits on $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$.

Next, we construct a contravariant volume on $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$. Let $\mu_1, \ldots, \mu_q : \mathcal{O}_{\mathcal{L}} \to]0, \infty[$ be the collection of the squared length maps given by $\mu_i(\mathbf{x}) := \ell_i^2/2$, where ℓ_i is the length of the edge i and $\mathbf{x} = ((x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)) \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}}$. Define

$$\Lambda_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}} := (\mathrm{d}\mu_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\mu_q) \lrcorner \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_n} \right).$$

This contravariant volume is unique up to the ordering of the bars in the linkage. Note that $\Lambda_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}}$ is invariant under the $G_{\mathcal{L}}$-action.

Finally, let $\Omega_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}}$ be the volume form on $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ dual to $\Lambda_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}}$, i.e., $\Lambda_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}} \lrcorner \Omega_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}} = 1$. Then $\Pi_{\mathcal{L}} \lrcorner \Omega_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}}$ is a basic form because of $G_{\mathcal{L}}$-invariance of the objects in this expression. So this form projects to a form $\Omega_{M_{\mathcal{L}}}$ on $M_{\mathcal{L}}$. Let $\Lambda_{M_{\mathcal{L}}}$ be its dual multivector field, i.e., $\Lambda_{M_{\mathcal{L}}} \lrcorner \Omega_{M_{\mathcal{L}}} = 1$. This is the volume multivector field on $M_{\mathcal{L}}$. We have proved the first part of the following statement.

Theorem 1. (i) *For each non-redundant linkage $\mathcal{L}$, its orbit $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ and configuration $M_{\mathcal{L}}$ spaces admit natural canonical contravariant volumes $\Lambda_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}}$ and $\Lambda_{\mathcal{L}}$, respectively. These canonical contravariant volumes are uniquely determined by a choice of ordering of the edges of of $\mathcal{L}$: if we change the ordering by a permutation σ of parity $|\sigma|$ then these volume multivector fields are multiplied by $(-1)^{|\sigma|}$.*

(ii) *Consider two vertices C, D of a non-redundant linkage $\mathcal{L}$. Denote by $\mu_1 = |CD|^2/2$ the half squared CD-length function on $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ and $M_{\mathcal{L}}$. Assume that μ_1 is not a constant function, so that the linkage $\mathcal{L}_1$ obtained from $\mathcal{L}$ by attaching to it an additional bar CD with the given length $\ell(CD) = c$ is non-redundant. Then $\mathcal{O}_{\mathcal{L}_1}$ (resp., $M_{\mathcal{L}_1}$) is the level set given by $\mu_1 = c^2/2$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ (resp., $M_{\mathcal{L}}$) and we have $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{L}_1} = \dim \mathcal{O}_{\mathcal{L}} - 1$, $\dim M_{\mathcal{L}_1} = \dim M_{\mathcal{L}} - 1$, and*

$$\Lambda_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}_1}} = \mathrm{d}\mu_1 \lrcorner \Lambda_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}} \quad \text{and} \quad \Lambda_{\mathcal{L}_1} = \mathrm{d}\mu_1 \lrcorner \Lambda_{\mathcal{L}}$$

restricted to these level sets.

The proof of (ii) is a direct verification.

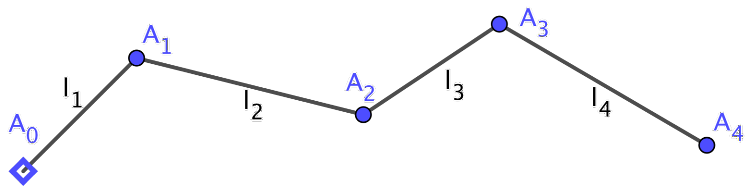


Figure 4: The snake: the canonical contravariant volume elements on its orbit space and configuration space are independent of its lengths.

Example 8. *(The snake).* Consider the linkage $\mathcal{L}$ which consists of one base vertex A_0 fixed at the origin of $\mathbb{R}^2$ ($A_0 = (0,0)$), k movable vertices $A_1 = (x_1, y_1), \ldots, A_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, and k fixed lengths $|A_{i-1}A_i| = c_i > 0$ ($i = 1, \ldots, k$). Then it is easy to check that $\mathcal{O}_{\mathcal{L}} \cong \mathbb{T}^k$ with periodic coordinates $\theta_i = \arctan((y_i - y_{i-1})/(x_i - x_{i-1})) \pmod{2\pi}$, and the canonical contravariant volume element on $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ is

$$\Lambda_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial \theta_k},$$

which does not depend on the lengths $c_1, \ldots, c_k$. The configuration space $M_{\mathcal{L}}$ is isomorphic to $\mathbb{T}^{k-1}$ with periodic coordinates $\tilde{\theta}_i = \theta_{i+1} - \theta_i \pmod{2\pi}$, and its canonical contravariant volume element is (up to a sign)

$$\Lambda_{\mathcal{L}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}_{k-1}}.$$

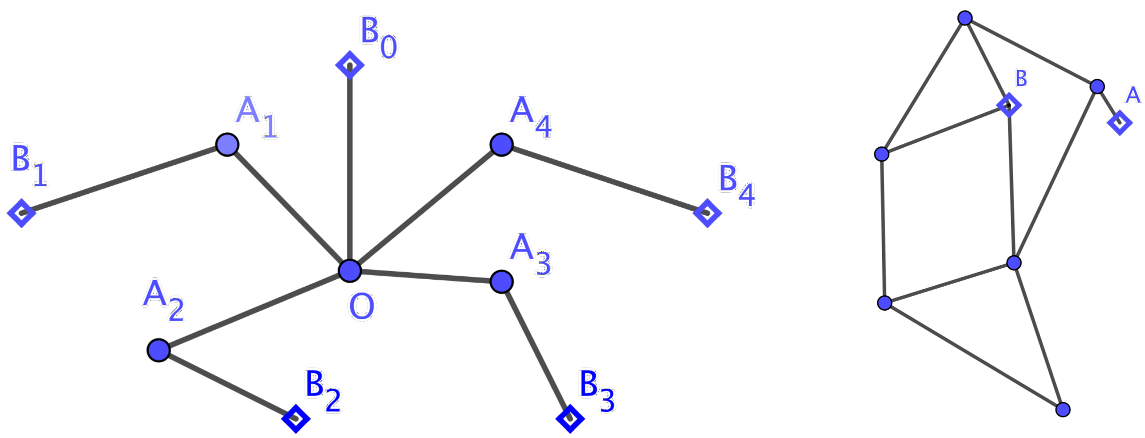


Figure 5: Left: An 1DOF spider, with a fixed "head" B_0, fixed "feet" $B_1, \ldots, B_n$, "body" O, and "legs" A_iB_i $(i = 1, \ldots, n)$. Right: "Strandbeest", invented by the artist Theodorus Jansen in 1990s, which can be used as legs in mechanical animals.

Example 9. *(Curve-drawing linkages)* Linkages with one degree of freedom (1DOF for short) are those whose configuration spaces have dimension 1: generically, such configuration spaces are a finite union of closed curves. A planar 1DOF linkage is also called ***curve-drawing linkage*** because, after attaching it to a plane at the fixed vertices (if there are no fixed vertices then one can choose a bar and fix its two ends without changing the configuration space of the linkage), a movable vertex on the linkage will draw an algebraic curve when the linkage moves. By a famous en the linkage moves. By a famous 1876 theorem of Kempe [17], any algebraic curve can be obtained this way by some 1DOF planar linkage. Simple modern proofs of this theorem can be found in many places; see, for example, [5, 12]. Well-known examples of 1DOF linkages include quadrangles, spiders, the Strandbeest (Figure 5), and so on. A contravariant volume element on a manifold of dimension 1 is simply a vector field. Thus, our construction shows that on the configuration space of each curve-drawing linkage there is a unique (up to orientation) natural canonical vector field. Such vector fields will be important in our construction of integrable systems on general configuration spaces of planar linkages.

Example 10. *(Zero-dimensional space).* Consider a linkage $\mathcal{L}_{ABC}$ formed by a triangle ABC with 3 fixed lengths (i.e., 3 bars) $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, without base points. This linkage is, of course, rigid, so its configuration space is just two points (corresponding to two possible orientations of the triangle on the plane). The contravariant volume element is just a number for each point on the configuration space. One of the numbers is twice the area of the triangle ABC and the other is its opposite (the same absolute value, but with negative sign). In particular, in the degenerate case, when the three points A, B, C are aligned, the contravariant volume element vanishes. If we fix A, B and erase the bar AB from $\mathcal{L}_{ABC}$, then it becomes another rigid linkage $\mathcal{L}'_{ABC}$, with the same configuration space and the same contravariant volume element up to a natural isomorphism. Now add to $\mathcal{L}_{ABC}$ or $\mathcal{L}'_{ABC}$ a vertex D and a bar CD with some length $|CD| = d > 0$. The configuration space of the new linkage is now two circles, and the corresponding contravariant volume element is $\pm 2S\dfrac{\partial}{\partial\theta}$, where $\theta \pmod{2\pi}$ is the angle formed by the vector $\overrightarrow{CD}$ with $\overrightarrow{CA}$, and S is the area of the triangle ABC.

The above simple example illustrates the following two phenomena:

• (*Effect of fixing a base*) If $\mathcal{L}'$ is obtained from $\mathcal{L}$ by fixing two vertices A, B of a bar AB and then removing that bar, where $\mathcal{L}$ is a connected linkage without base points, then not only are $M_{\mathcal{L}}$

and $M_{\mathcal{L}'}$ naturally isomorphic, but under this isomorphism we also have $\Lambda_{\mathcal{L}} = \Lambda_{\mathcal{L}'}$. (This fact is not surprising, because fixing A, B amounts to contracting with the volume element of $SE(2)$ in the formula for $\Lambda_{\mathcal{L}}$).

• (*Effect of homothety*) If we multiply the length of every edge of a linkage $\mathcal{L}$ by a positive constant c, then we get a linkage $c\mathcal{L}$ homothetic to $\mathcal{L}$, and $M_{c\mathcal{L}}$ is naturally isomorphic to $M_{\mathcal{L}}$. However, under this natural isomorphism we have the following homothety formula, whose proof is a straightforward verification:

$$\Lambda_{c\mathcal{L}} = c^{2(|\mathcal{E}|-(|\mathcal{V}|+|\mathcal{B}|))}\Lambda_{\mathcal{L}} \tag{1}$$

where $|\mathcal{V}| - |\mathcal{B}|$ is the number of movable vertices and $|\mathcal{E}|$ is the number of edges, in the case when $|\mathcal{B}| \geq 2$ (i.e., when $M_{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_{\mathcal{L}}$) and $\mathcal{L}$ is connected. In the case when $\mathcal{B} = \emptyset$ and $\mathcal{L}$ is connected, the above formula must be modified as follows:

$$\Lambda_{c\mathcal{L}} = c^{2(|\mathcal{E}|-|\mathcal{V}|+1)}\Lambda_{\mathcal{L}} \tag{2}$$

2.4. Nambu structures for linkages with marked diagonals

Consider a linkage $\mathcal{L}$. If two vertices A, B of $\mathcal{L}$ are not connected by a bar of $\mathcal{L}$, then we say that AB is a ***diagonal*** in $\mathcal{L}$. Choose a set $\mathcal{D}$ of diagonals of $\mathcal{L}$ (which may be empty) and mark the elements of $\mathcal{D}$; in this case we say that they are ***marked diagonals***.

Given a linkage $\mathcal{L}$ with marked diagonals $\mathcal{D} = \{A_1B_1, \ldots, A_kB_k\}$ $(k \geq 0)$, we can define the following Nambu structure on the configuration space $M_{\mathcal{L}}$:

$$\Lambda_{\mathcal{L},\mathcal{D}} = (\mathrm{d}\mu_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\mu_k) \lrcorner \Lambda_{\mathcal{L}}, \tag{3}$$

where $\mu_i = |A_iB_i|^2/2$. (When $\mathcal{D} = \emptyset$ is empty then, of course, $\Lambda_{\mathcal{L},\emptyset} = \Lambda_{\mathcal{L}}$). We will use such Nambu structures for the construction of our integrable systems.

3. Integrable systems on linkage spaces

3.1. Cross products of integrable systems

In this subsection, we present a general method for constructing new integrable systems from other integrable systems. We call this technique the ***cross product*** construction.

We begin by recalling the notion of non-Hamiltonian integrable systems ([1, 27]; for an Action-Angle Theorem in this setting, see [28]). A vector field X on an n-dimensional manifold M is called ***integrable*** if there exist p vector fields $X_1 = X$, $X_2, \ldots, X_p$ and q functions $F_1, \ldots, F_q$ on M, $p + q = n$, such that $[X_i, X_j] = 0$ for all $i, j = 1, \ldots, p$, $X_1 \wedge \cdots \wedge X_p \neq 0$ almost everywhere, $\mathrm{d}F_\ell(X_i) = 0$ for all $i = 1, \ldots, p$ and $\ell = 1, \ldots, q$, and $\mathrm{d}F_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}F_q \neq 0$ almost everywhere. Such an n-tuple $(X_1, \ldots, X_p, F_1, \ldots, F_q)$ is called an ***integrable system of type*** (p, q).

Consider a family of smooth manifolds M_i of dimensions n_i, where i belongs to some finite index set I. We assume that there is another finite index set K disjoint from I, such that for each $k \in K$ there is a nonempty subset $S_k \subset I$, and for each $i \in S_k$ there is a given smooth function $f_{i,k} : M_i \to \mathbb{R}$ on M_i. Moreover, we also assume that for each $i \in I$ there is an integrable non-Hamiltonian system whose functionally independent first integrals are $f_{i,k}$ for $k \in K_i$, where $K_i = \{k \in K \mid i \in S_k\}$, and whose linearly independent commuting vector fields are $X_{i,1}, \ldots, X_{i,p_i}$. (By definition, we have $p_i + |K_i| = n_i$).

Consider now the ***diagonal manifold***

$$M = \Big\{ \mathbf{x} = (x_i) \in \prod_{i\in I} M_i \;\Big|\; f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)\ \forall i,j \in I,\ \forall k \in S_i \cap S_j \subset K \Big\}. \tag{4}$$

Denote by $\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ the projection maps. By abuse of notation, we denote the restriction of π_j to M again by π_j, $j \in I$. We assume that the functions $\pi_i^* f_{ik} - \pi_j^* f_{jk}$ $(k \in S_i \cap S_j)$ have linearly independent differentials on M, except at the points satisfying the obvious relations of the type $\pi_i^* f_{ik} - \pi_j^* f_{jk} = (\pi_i^* f_{ik} - \pi_\ell^* f_{\ell k}) + (\pi_\ell^* f_{\ell k} - \pi_j^* f_{jk})$; therefore, M is a smooth manifold of dimension $\dim M = \sum_{i\in I} n_i - \sum_{k\in K}(|S_k| - 1) = \sum_{i\in I} n_i - \sum_{k\in K}|S_k| + |K|$ (because each index $k \in K$ creates $|S_k| - 1$ independent equations). Notice that $\sum_{k\in K}|S_k|$ is the total number of functions f_{ik} and that this number equals $\sum_{i\in I}(n_i - p_i)$, because for each i we have exactly $|K_i| = n_i - p_i$ functions. Therefore,

$$\dim M = |K| + \sum_{i\in I} p_i. \tag{5}$$

Denote by $\widehat{X}_{i,j}$ the horizontal lift of $X_{i,j}$ to $\prod_{i\in I} M_i$ (for each $i \in I$ and each $j \le p_i$). In other words, $\widehat{X}_{i,j}$ is the unique vector field on $\prod_i M_i$ whose projections by π_j $(j \ne i)$ are trivial and whose projection by π_i is $X_{i,j}$. Obviously, the vector fields $\widehat{X}_{i,j}$ commute on $\prod_{i\in I} M_i$. Moreover, they admit the pull-backs of the functions f_{ik} as common first integrals. Hence, they also admit the functions $\pi_i^* f_{ik} - \pi_j^* f_{jk}$ as first integrals and are, therefore, tangent to M.

For each $k \in K$, define $F_k : M \to \mathbb{R}$ by

$$F_k(\mathbf{x}) = f_{ik}(\pi(x_i)) \quad \text{for some} \quad i \in S_k. \tag{6}$$

It is immediate from the definition of M that F_k is well-defined. Moreover, these functions F_k are common first integrals of the commuting vector fields $X_{i,j}$ $(i \in I, j \le p_i)$. Notice that the number of vector fields $X_{i,j}$ is $\sum_{i\in I} p_i$, the number of functions F_k is $|K|$, and $|K| + \sum_{i\in I} p_i$ is exactly the dimension of M (see (5)). Thus, we immediately obtain the following result.

Theorem 2. *With the above notations and assumptions, on the diagonal manifold M of dimension $|K| + \sum_{i\in I} p_i$ we have an integrable system of type $\big(\sum_{i\in I} p_i, |K|\big)$, consisting of $\sum_{i\in I} p_i$ commuting vector fields $\widehat{X}_{i,j}$ $(i \in I, j \le p_i)$ and $|K|$ first integrals F_k $(k \in K)$ given by* (6).

The above constructed integrable system on M is called the ***cross product*** of the corresponding integrable systems on $M_i, i \in I$.

3.2. Multi-Nambu integrable systems

Consider now the following special case of the general cross product construction in the previous subsection.

Assume that for each $i \in I$, the set $\{f_{i,k} \mid k \in K_i\}$ $(K_i = \{k \in K \mid i \in S_k\})$, of functionally independent functions on M_i has exactly $n_i - 1$ elements, where $n_i = \dim M_i$ and, moreover, each M_i admits a Nambu structure Λ_i of top order, i.e., a n_i-vector field on M_i. (In practice, Λ_i is often the dual of a volume form on M_i, though the construction still works if Λ_i has singular points.) Then, for each $i \in I$, define the ***Nambu vector field*** X_i on M_i by the following contraction formula:

$$X_i = (\wedge_{k\in K_i} \mathrm{d} f_{i,k}) \lrcorner \Lambda_i. \tag{7}$$

(Choose an ordering on $K_i = \{k \in K \mid i \in S_k\}$ to fix the sign of $\wedge_{k\in K_i} \mathrm{d} f_{i,k}$). Clearly, X_i admits $n_i - 1$ first integrals $f_{i,k}$ $(k \in K_i)$, since $|K_i| = n_i - 1$, and hence X_i is a completely integrable vector field on M_i. In other words, on each M_i we have an integrable system $(X_i, f_{i,k})$ of type $(1, n_i - 1)$. So, in the notation of the previous subsection, we have $p_i = 1$ and $\sum_{i\in I} p_i = |I|$. Thus we get:

Corollary 1. *With the above notations and assumptions of this subsection, on the diagonal manifold M of dimension $|I|+|K|$ we have an integrable system of type $(|I|,|K|)$, consisting of $|I|$ commuting vector fields $\widehat{X}_i$ $(i \in I)$ and $|K|$ first integrals F_k $(k \in K)$.*

In view of this construction, we call the systems obtained in the corollary above ***multi-Nambu integrable systems***.

Remark 1. *(Separation of variables and symplectization).*

i) The construction above not only gives integrable systems, but also a kind of separation of variables for such systems: the separated variables are on the different spaces M_i $(i \in I)$. In classical mechanics, a Hamiltonian system admitting a complete separation of variables, in the sense of Hamilton-Jacobi theory, is automatically integrable. Our systems are a special case of this general idea, even though, a priori, there is no natural (pre)symplectic or Poisson structure which turns them into Hamiltonian systems.

ii) An exception is the case when $\dim M_i = 2$, for every $i \in I$, and the Nambu structure Λ_i on M_i is non-degenerate, i.e., it is dual to a volume form ω_i on M_i. In dimension 2, a volume form is the same as a symplectic form. In this situation we can pull back every ω_i and take their sum to form a *presymplectic* form

$$\omega = \sum_{i \in I} \pi_i^* \omega_i$$

on the diagonal manifold M. Thus we obtain a presymplectic manifold (M,ω) together with an integrable Hamiltonian system $(\widehat{X}_i\ (i \in I), F_k\ (k \in K))$. Each vector field $\widehat{X}_i$ is Hamiltonian: $\widehat{X}_i \lrcorner \omega = -\mathrm{d}F_k$, where $k \in K$ is the only index in S_i (i.e, there is only one function f_{ik} on M_i). The rank of ω at a generic point on M is $2|K|$ in this case.

iii) If $\dim M_i \geq 3$, then even if $|I| = 1$, there is no natural way to turn the Nambu vector field X_i on M_i into a Hamiltonian vector field (with respect to a presymplectic, Poisson, or Dirac structure). The problem is that, in Nambu mechanics, we have $n-1$ functions which play equally important roles in the definition of the Nambu vector field, while in Hamiltonian mechanics we have just one function (the energy function). In order to turn a Nambu vector field into a Hamiltonian vector field, one needs to treat these functions differently and declare that among the $n-1$ function there is a special one which is more important than the other functions. Of course, this can be done. For example, a Nambu vector field $X = (\mathrm{d}F_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}F_{n-1}) \lrcorner \Lambda$, where Λ is a Nambu structure of order n on a manifold, may be viewed as a Hamiltonian vector field given by F_1 with respect to the Poisson structure $\Pi = (\mathrm{d}F_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}F_{n-1}) \lrcorner \Lambda$ of rank 2. Nevertheless, this is not very natural, especially in view of the diagonal construction.

iv) Moreover, there is no natural way to lift multi-vector fields from M_i to the diagonal manifold M (the horizontal lifting that we used for our vector fields does not work here because the result is not tangent to M). Thus, even if the M_i are equipped with Poisson structures, M is still not Poisson. We cannot even lift Nambu structures Λ_i from M_i to M. So the Nambu structures in a multi-Nambu integrable system are not Nambu structures on the ambient manifold, only on its projected components.

3.3. Decomposition of linkages and integrable systems

We apply now the constructions in the previous subsections to the configuration spaces of planar linkages.

Consider a planar linkage $\mathcal{L} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \ell)$ without base points. (Recall that any non-trivial linkage with base points is equivalent to some linkage without base points, configuration-wise). Choose a set $\mathcal{D}$ of diagonals of $\mathcal{L}$ such that $\mathcal{D}$ decomposes $\mathcal{L}$ into an *acyclic semi-rigid connected sum* of a family of non-empty sublinkages $\mathcal{L}_i = (\mathcal{V}_i, \mathcal{E}_i, \ell_i)$ $(i \in I)$ with their corresponding sets $\mathcal{D}_i$ of marked diagonals. This means that the following conditions are satisfied:

- For each $i \in I$, denote by $\mathcal{V}_i$ the set of vertices of $\mathcal{L}_i$. Then $\mathcal{L}_i = (\mathcal{V}_i, \mathcal{E}_i, \ell_i)$ is the sublinkage of $\mathcal{L}$ generated by $\mathcal{V}_i$. This means that $\mathcal{E}_i$ is the subset of $\mathcal{E}$ consisting of all edges of $\mathcal{L}$ such that all of their vertices belong to $\mathcal{V}_i$; likewise, ℓ_i and $\mathcal{D}_i$ are also defined in a natural way. (The diagonals in the family $\mathcal{D}_i$ are the elements of $\mathcal{D}$ whose vertices belong to $\mathcal{V}_i$.)

- $\mathcal{V} = \cup_{i \in I} \mathcal{V}_i$, $\mathcal{E} = \cup_{i \in I} \mathcal{E}_i$, and $\mathcal{D} = \cup_{i \in I} \mathcal{D}_i$.

- There is a family $\mathcal{J}_k$ $(k \in K)$ of sublinkages of $\mathcal{L}$, which are called ***joints*** for the sublinkages $\mathcal{L}_i$, in the following sense: if $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j \neq \emptyset$ for $i, j \in I$, then there is a $k \in K$ such that $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j = \mathcal{J}_k$. (It may happen that more than two sublinkges in the family $\mathcal{L}_i$ $(i \in I)$ share the same joint; see Figure 6).

- Every marked diagonal is a diagonal of a joint: for any $VW \in \mathcal{D}$ there is a joint $\mathcal{J}_k$ such that V, W are vertices of $\mathcal{J}_k$.

- The joints are disjoint: if $k_1 \neq k_2$ then $\mathcal{J}_{k_1}$ and $\mathcal{J}_{k_2}$ don't have any common vertex.

- *Semi-rigidity*: For each $k \in K$, $\mathcal{J}_k$ has at least 2 vertices. If we fix the lengths of the marked diagonals (from the family $\mathcal{D}$) whose vertices lie in $\mathcal{J}_k$ then $\mathcal{J}_k$ becomes rigid, i.e., its configuration space becomes just one point (if not empty) once these diagonal lengths are fixed.

- *Acyclicity*: Consider the graph whose vertices are the elements of the index sets I and K (of course, these two index sets are assumed to be disjoint) and whose edges are the couples $(i, k) \in I \times K$ (connecting the vertex i to the vertex k) such that the sublinkage $\mathcal{L}_i$ contains the joint $\mathcal{J}_k$. Then this graph is a tree (i.e., it has no cycles).

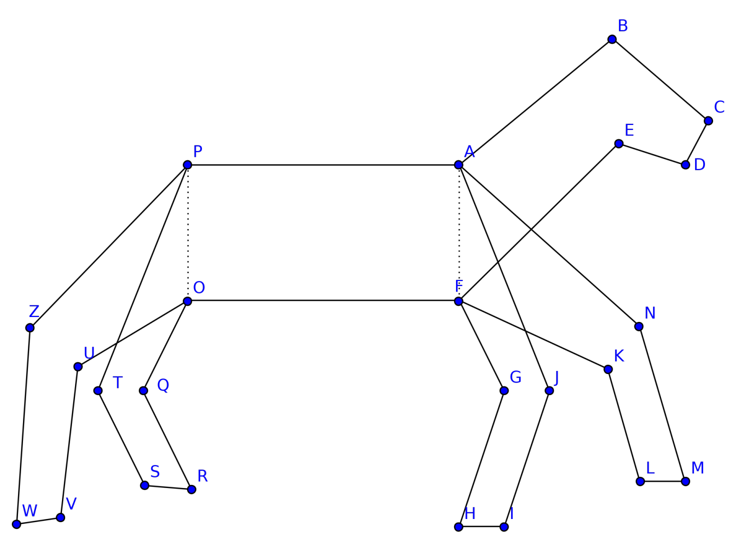


Figure 6: Example of a connected sum with two joints and two marked diagonals AF and OP: four sublinkages share the same joint $\{A, F\}$ and three sublinkages share the same joint $\{O, P\}$.

Definition 1. *With the above notations and under the above conditions, we say that* $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ *is the* ***acyclic semi-rigid connected sum*** *of its sublinkages with marked diagonals* $(\mathcal{L}_i, \mathcal{D}_i)$ $(i \in I)$.

THEOREM 3. (i) *With the above notations, assume that* $(\mathcal{L},\mathcal{D})$ *is the acyclic semi-rigid connected sum of the family* $(\mathcal{L}_i,\mathcal{D}_i)$ $(i \in I)$. *Assume that the diagonal square length functions* $\mu_{VW} = \ell(VW)^2/2$ $(VW \in \mathcal{D})$ *are functionally independent almost everywhere on the configuration space* $M_{\mathcal{L}}$, *and that for every* $i \in I$ *the number of elements in* $\mathcal{D}_i$ *is strictly less than the dimension* $\dim M_{\mathcal{L}_i}$ *of the configuration space of* $\mathcal{L}_i$. *Then* $M_{\mathcal{L}}$ *is the cross product of the family* $M_{\mathcal{L}_i}$ *with respect to the marked square length functions:*

$$M_{\mathcal{L}} \cong \Big\{\mathbf{x} = (x_i) \in \prod_{i\in I} M_{\mathcal{L}_i} \mid \mu_d(x_i) = \mu_d(x_j)\ \forall i,j \in I,\ \forall d \in \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j\Big\}.$$

In particular, we have

$$\dim M_{\mathcal{L}} = \sum_{i\in I}(\dim M_{\mathcal{L}_i} - |\mathcal{D}_i|) + |\mathcal{D}|.$$

(ii) *Assume, moreover, that on each configuration space* $M_{\mathcal{L}_i}$ *we have an integrable system of type* (p_i, q_i), *where* $q_i = |\mathcal{D}_i|$ *and* $p_i = \dim M_{\mathcal{L}_i} - q_i$, *given by* p_i *commuting vector fields* $X_{i,1},\ldots,X_{i,p_i}$ *and* $|\mathcal{D}_i|$ *diagonal squared length functions* μ_d $(d \in \mathcal{D}_i)$ *which serve as first integrals for the system. Then by the method of cross product construction we get an integrable system of type* $\big(\sum_{i\in I} p_i, |\mathcal{D}|\big)$ *on* $M_{\mathcal{L}}$ *given by the vector fields* $\widehat{X}_{i,j}$ *(which are horizontal liftings of the vector fields* $X_{i,j}$, $i \in I$, $j \le p_i$*) and diagonal squared length functions* μ_d $(d \in \mathcal{D})$.

(iii) *In particular, if* $\dim M_{\mathcal{L}_i} - |\mathcal{D}_i| = 1$ *for every* $i \in I$, *then on each* $\dim M_{\mathcal{L}_i}$ *we have an integrable system of type* $(1, |\mathcal{D}_i|)$ *given by* $|\mathcal{D}_i|$ *marked diagonal square length functions and the Nambu vector field* X_i *given by formula* (7) *with respect to these functions and the natural contravariant volume element on* $\dim M_{\mathcal{L}_i}$. *Consequently, in this case on* $M_{\mathcal{L}}$ *we have a multi-Nambu integrable system of type* $(|I|, |\mathcal{D}|)$.

The proof of the above theorem is straightforward. In assertion (i), the semi-rigidity and the acyclicity conditions ensure that, for each point $(x_i) \in \prod_i M_{\mathcal{L}_i}$ satisfying the “equal common lengths” constraints, we can glue the configurations x_i together along the joints to create a configuration $x \in M_{\mathcal{L}}$, in a unique way up to isometries. Assertions (ii) and (iii) follow immediately from of assertion (i), Theorem 2, and Corollary 1.

EXAMPLE 11. The case of n-gons. Denote by $(A_1, ..., A_n)$ the consecutive vertices of an n-gon. The configuration space $M_{\mathcal{L}}$ in this case has $2(n-2)-(n-1) = n-3$ dimensions.

If n is even, we can divide the n-gon $(A_1 \ldots A_n)$ into $(n/2)-1$ quadrangles by adding $(n/2)-2$ diagonals to the linkage; for example, $A_1A_3, A_1A_5, \ldots, A_1A_{2n-1}$. Each quadrangle may be viewed as a curve-drawing linkage and thus produces one vector field. So we have an integrable system of type $\big((n/2)-1, (n/2)-2\big)$, i.e., with $(n/2)-1$ commuting vector fields and $(n/2)-2$ common first integrals.

If n is odd, divide the n-gon $(A_1 \ldots A_n)$ into $(n-3)/2-1$ quadrangles plus one triangle by adding $(n-3)/2$ diagonals to the linkage; for example, $A_1A_3, A_1A_5, \ldots, A_1A_{2n-1}$. So we get an integrable system of type $((n-3)/2, (n-3)/2)$.

REMARK 2. i) In assertion (iii) of Theorem 3, once the lengths of the marked diagonals are fixed, the sublinkages $\mathcal{L}_i$ become curve-drawing linkages (i.e, linkages whose configuration spaces are 1-dimensional). This shows that curve-drawing linkages play an important role in the construction of integrable systems on the configuration spaces of more general planar linkages.

ii) In a sense, the above construction is quite similar to the construction of bending flows by Kapovich and Millson [15] for obtaining integrable systems on configuration spaces of 3D polygons.

iii) The case when then dimension of $M_{\mathcal{L}_i}$ is equal to (instead of being greater than) the number of marked diagonals in $\mathcal{L}_i$ for some $i \in I$ is excluded in Theorem 3 for simplicity. However, this case can, in fact, be treated similarly. In order to address this case, we have to work on the level of orbit spaces instead of configuration spaces, so it is a bit more complicated. Some components $\mathcal{L}_i$ for which the number of marked diagonals is equal to $\dim \mathcal{L}_i$ still give rise to a non-trivial (and periodic) vector field in the final integrable system on $M_{\mathcal{L}}$. For example, see the case of the snake (Example 8), which is cut into pieces. Each piece has 0-dimensional configuration space, but the configuration space of the snake is a torus with natural rotational commuting vector fields.

The case when a joint J_k consists of just one point is also excluded in Theorem 3 for simplicity. However, this case can also be treated similarly. Such a J_k increases the difference $M_{\mathcal{L}} - \sum_i \dim M_{\mathcal{L}_i}$ and creates additional rotational vector fields on $M_{\mathcal{L}}$.

Likewise, the case with base points, also excluded in Theorem 3, can also be treated similarly; just put all the base points in one component.

iv) There is an obvious method to create integrable systems on configuration spaces, which works for any planar linkage. If the dimension of the configuration space $M_{\mathcal{L}}$ is n, then just mark $n-1$ diagonals whose length functions are independent on $M_{\mathcal{L}}$. Then, together with the contravariant volume element on $M_{\mathcal{L}}$, we immediately get a Nambu integrable system of type $(1, n-1)$ whose first integrals are squared length functions of the marked diagonals and whose vector field is given by formula (7). However, such “obvious” systems have just one vector field each, so if we want to obtain systems with more vector fields using the cross product method, we have to decompose the linkage $\mathcal{L}$ into many components $\mathcal{L}_i$, the more, the better.

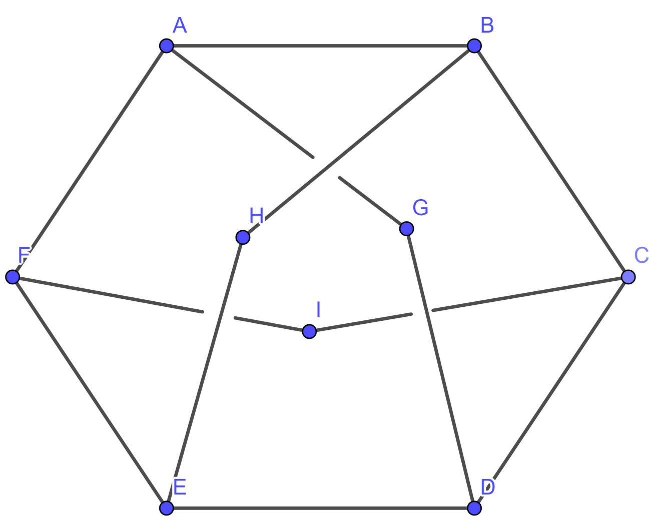


Figure 7: Example of an indecomposable 3DOF linkage.

v) A natural question arises: given a planar linkage $\mathcal{L}$, what is the maximal number $|I|$ of components $\mathcal{L}_i$ $(i \in I)$ in a decomposition of $\mathcal{L}$ into acyclic semi-rigid connected sums (with any choice of marked diagonals, such that the dimension of the configuration space of each $\mathcal{L}_i$ is strictly greater than the number of marked diagonals in it)? If this maximal number is 1, then we say that $\mathcal{L}$ is ***indecomposable***. Figure 7 is an example of a 3DOF indecomposable linkage (i.e., the configuration space has dimension 3).

vi) In general, it is clear that the number of components in a “valid” acyclic semi-rigid connected sum (“valid” means that $\dim M_{\mathcal{L}_i}$ is strictly greater than the number of marked diagonals in $\mathcal{L}_i$) cannot be greater than $(|\mathcal{V}| - 1)/2$, where $|\mathcal{V}|$ is the number of vertices of the linkage $\mathcal{L}$, because each time one adds a new component to such an acyclic semi-rigid connected sum, one needs to add at least 2 new vertices, and the first component has at least 3 vertices. An example where the maximal number $(|\mathcal{V}| - 1)/2$ of components is achieved is shown in Figure 8. The linkage $\mathcal{L}$ has 7 vertices, the configuration space has 4 dimensions, and the following decomposition of $\mathcal{L}$ into 3 components is valid: $\mathcal{L}_1$ is generated by $\{A, B, G\}$, $\mathcal{L}_2$ is generated by $\{B, C, F, G\}$, $\mathcal{L}_3$ is generated by $\{C, D, E, F\}$, and the only marked diagonal is CF. So, on this 4-dimensional configuration space, we have an integrable system of type $(3, 1)$, with three commuting vector fields and one common first integral.

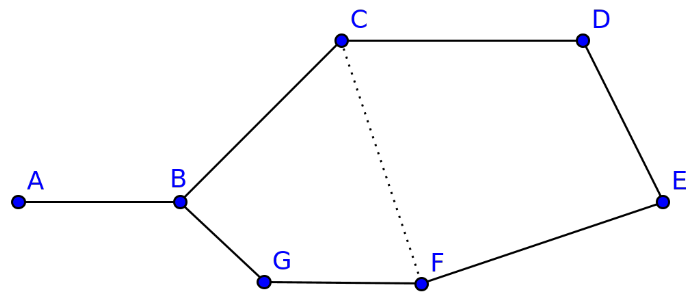


Figure 8: A linkage which can be decomposed into 3 “elementary” components.

4. Some final remarks and open problems

4.1. Bott-Morse theory and graph-manifolds

The topology of configuration spaces of planar linkages has been extensively studied using mostly Morse theory, see, e.g., [5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14] and references therein. However, in general, the square length functions that we use in this paper are not Morse functions, but rather Bott-Morse functions: their singular points are not isolated but form submanifolds and are transversally non-degenerate with respect to these submanifolds. So the idea of using Bott-Morse functions (instead of just Morse functions) for the study of the topology of linkage spaces is very natural.

At least in the case of linkages with 3-dimensional spaces which admit integrable systems of type (2,1), this idea works very well: the situation is then very similar to Fomenko's topological theory of 2-degree-of-freedom integrable Hamiltonian systems restricted to 3-dimensional isoenergy manifolds [7]. One of the main observations made by Fomenko is that, due to the Bott-Morse nature of the first integral, the 3-dimensional manifolds in question must be *graph-manifolds*, i.e., they can be cut into pieces which are direct products of S^1 with 2-dimensional surfaces with boundary. The class of graph-manifolds has been introduced by Waldhausen [25] in 1967 and is a very well-understood class of 3-manifolds. (Incidentally, according to the Thurston-Perelman geometrization program, this class coincides with the class of 3-manifolds whose Gromov norm vanishes).

For example, consider the configuration space M_ℓ of hexagons $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ with fixed edge lengths $|A_iA_{i+1}| = \ell_i$ $(i = 1, \ldots, 6,\ A_7 = A_1)$. We assume that the lenghths are generic and that M_ℓ is not empty. Denote by $d = A_1A_4$ the length of the diagonal A_1A_4. Then d is a function on M_ℓ, which is not smooth; however, $\mu = d^2/2$ is smooth and is a Bott-Morse function on M_ℓ, whose singular points form circles. It follows immediately that M_ℓ is a graph-manifold. To study the topology of M_ℓ more carefully, one needs to investigate in detail the singularities of μ. For example, assume (without loss of generality for the topology of M_ℓ) that $\ell_1 \le \ell_2 \le \ell_3 \le \ell_4 \le \ell_5 \le \ell_6$. Then the possible critical values of d are:

- the maximal value: $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$,
- possible saddle values: $\ell_1 + \ell_2 - \ell_3$ (if this value is positive), $\ell_3 + \ell_2 - \ell_1$, $\ell_3 + \ell_1 - \ell_2$, $\ell_4 + \ell_5 - \ell_6$ (if this value is positive), $\ell_6 + \ell_5 - \ell_4$, $\ell_6 + \ell_4 - \ell_5$;

- the minimal value is either 0 (if both $\ell_1 + \ell_1 - \ell_3$ and $\ell_4 + \ell_5 - \ell_6$ are positive) or $\max(\ell_3 - \ell_1 - \ell_2, \ell_6 - \ell_4 - \ell_5)$ (if this value is positive).

Then one describes the level sets at and near these critical values, the 1-cycles on them, and so on, to recover a long list of all possibilities (see [14]). This would be an interesting exercise for graduate students.

4.2. Integrable systems on more general linkage spaces

In this paper, we used our decomposition and the cross product method to construct integrable systems on the configuration spaces of planar linkages. It it clear that our method can be applied, in a straightforward way, to other classes of linkages, including spherical linkages, 3D linkages, and higher-dimensional linkages. (See [18] for a general theory of linkage designs, including spherical linkages and spatial linkages). In particular, according to our method, the class of configuration spaces of 3D linkages admitting interesting natural integrable systems is much bigger than the class of 3D polygon spaces studied by Kapovich-Millson [15] and others. As far as we know, this bigger class has not yet been explored and it is an interesting subject of study, with potential applications in robotics.

4.3. Singularities of integrable systems on linkage spaces

Singularities of integrable Hamiltonian systems have been studied by many authors. More recently, there has been interest in formulating a theory of singularities of integrable *non-Hamiltonian* systems (see [27] and references therein). A detailed study of singularities of concrete integrable systems on configuration spaces of planar linkages would help the development of this theory.

4.4. Commuting flows for 2DOF components

In this paper, in the construction of integrable systems on configuration spaces, we only used components which are 1DOF (i.e., curve-drawing), once the lengths of the marked diagonals are fixed. What about 2DOF components? Can they be used effectively? In particular, is there any natural way to construct a pair of independent commuting vector fields on the configuration spaces of pentagons, for example? These configuration spaces are closed surfaces and it is known that on such surfaces there exist $\mathbb{R}^2$-actions with nondegenerate singularities (see, e.g., [21]). The question is hence how to construct such $\mathbb{R}^2$-actions in a natural way on 2-dimensional moduli spaces of planar linkages. What about components with more degrees of freedom (once the lengths of the marked diagonals are fixed).

Acknowledgements

We thank Marc Troyanov for some interesting discussions on the subject of this paper. We also thank B. Servatius, O. Shai, and W. Whiteley for their permission to copy a picture from their paper [23]. Most of this work was carried out while the second author visited the first author at Shanghai Jiao Tong University for a month in 2019, under its “High-End Foreign Experts"cooperation program; he thanks SJTU and the members of the School of Mathematical Sciences, especially Xiang Zhang and Jie Hu, for the invitation and their warm hospitality.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. O.I. Bogoyavlenskij, A concept of integrability of dynamical systems, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **18** (1996), 163–168.

2. O.I. Bogoyavlenskij, Extended integrability and bi-hamiltonian systems, *Comm. Math. Phys.*, **196**(1) (1998), 19–51.

3. D. Bouloc, Singular fibers of the bending flows on the moduli space of 3D polygons, *Journal of Symplectic Geometry*, **16**(3) (2018), 585–629.

4. J.-P. Dufour, N.T Zung, *Poisson Structures and Their Normal Forms*, Progress in Mathematics Vol. 242, Birkhäuser, 2015.

5. M. Farber, *An Invitation to Topological Robotics*, Zürich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society Publishing House, 2008.

6. M. Farber, D. Schütz, Homology of planar polygon spaces, *Geom. Dedicata*, **125** (2007), 75–92.

7. А. Т. Фоменко, Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем, *УМН*, **44**:1 (1989), 145-–173.

8. C.G. Gibson, J.M. Selig, Movable hinged spherical quadrilaterals, I Über sphärische Gelenkenvierecke: the configuraion space, II singularities and reduction, *Mechanism and Machine Theory*, **23**(1) (1988), 13–18; 19–24.

9. C.G. Gibson, D. Marsh, On the linkage varieties of Watt 6-bar mechanisms, I Basic geometry, II The possible reductions, III Topology of the real varieties, *Mechanism and Machine Theory*, **24** (1989), 106–113; 115–121; 123–126.

10. J.-C. Hausmann, A. Knutson, Polygon spaces and Grassmannians, *Enseign. Math.(2)*, **43**(1-2) (1997), 173–198.

11. J.-C. Hausmann, A. Knutson, Cohomology rings of polygon spaces, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **48** (1988), 281–321.

12. D. Jordan, M. Steiner, Configuration spaces of mechanical linkages, *Discrete Comput. Geom.*, **22** (1999), 297–315.

13. Y. Kamiyama, S. Tsukuda, The Euler characteristic of the configuration space of planar spidery linkages, *Algebr. Geom. Topol.*, **14**(6) (2014), 3659–3688.

14. M. Kapovich, J. Millson, On the moduli space of polygons in the Euclidean plane, *J. Diff. Geom.*, **42**(2) (1995), 430–464.

15. M. Kapovich, J. Millson, The symplectic geometry of polygons in Euclidean space, *J. Diff. Geom.*, **44**(3) (1996), 479–513.

16. M. Kapovich, J. Millson, Universality theorems for configuration spaces of planar linkages, *Topology*, **41** (2002), 1051–1107.

17. A.B. Kempe, On a general method of describing plane curves of the nth degree by linkwork, *Proc. London Math. Soc.*, **VII**, 102 (1876), 213–216.

18. J.M. McCarthy, G.S. Soh, *Geometric Design of Linkages*, second edition, Springer, 2011.

19. A. Klyachko, Spatial polygons and stable configurations of points on the projective line, in *Algebraic Geometry and Its Applications*, Proceedings of the 8th Algebraic Geometry Conference, Yaroslavl' 1992, (A. Tikhomirov and A. Tyurin, eds.), Vieweg, Braunschweig, 1994, pp. 67–84.

20. T.H. Minh, N.T. Zung, Commuting foliations, *Regular and Chaotic Dynamics*, **18**(6) (2013), 608–622.

21. N.V. Minh, N.T. Zung, Geometry of nondegenerate $\mathbb{R}^n$-actions on n-manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, **66**(3) (2014), 839–894.

22. Y. Nambu, Generalized Hamiltonian dynamics, *Phys. Rev. D.*, **7**(8) (1973), 5405–5412.

23. B. Servatius, O. Shai, W. Whiteley, Combinatorial characterization of the Assur graphs from engineering, *European J. Combin.*, **31**(4) (2010), 1091–1104.

24. W. Thurston, Shapes of polyhedra, Preprint 1987.

25. F. Waldhausen, Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, I & II. *Inventiones Mathematicae*, **3** (4): 308–333 and **4** (2): 87–117 (1967).

26. J. Zhao, Z. Feng, N. Ma, F. Chu, Design of special planar linkages, Springer Tracks in Mechanical Engineering, 2014.

27. N.T. Zung, Geometry of integrable non-Hamiltonian systems, in *Geometry and Dynamics of Integrable Systems*, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, pp. 85–140. Birkhäuser/Springer, 2016.

28. N.T. Zung, A conceptual approach to the problem of action-angle variables, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **229**(2) (2018), 789–833.

REFERENCES

1. Bogoyavlenskij, O.I. 1996, "A concept of integrability of dynamical systems", *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, vol. 18, pp. 163–168.

2. Bogoyavlenskij, O.I. 1998, "Extended integrability and bi-hamiltonian systems", *Comm. Math. Phys.*, vol. 196, no. 1, pp. 19–51.

3. Bouloc, D. 2018, "Singular fibers of the bending flows on the moduli space of 3D polygons", *Journal of Symplectic Geometry*, vol.16, no. 3, pp. 585–629.

4. Dufour, J.-P.& Zung, N.T. 2015, *Poisson Structures and Their Normal Forms*, Progress in Mathematics Vol. 242, Birkhäuser.

5. Farber, M. 2008, *An Invitation to Topological Robotics*, Zürich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society Publishing House.

6. Farber, M. & Schütz, D. 2007, "Homology of planar polygon spaces", *Geom. Dedicata*, vol. 125, pp. 75–92.

7. Fomenko, A.T. 1989, "Symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems", *Russian Math. Surveys*, vol. 44, no. 1, pp. 181–219.

8. Gibson, C.G. & Selig, J.M. 1988, “Movable hinged spherical quadrilaterals, I Über sphärische Gelenkenvierecke: the configuraion space, II singularities and reduction”, *Mechanism and Machine Theory*, vol.23, no.1, pp. 13–18; pp. 19–24.

9. Gibson,C.G. & Marsh, D. 1989, “On the linkage varieties of Watt 6-bar mechanisms, I Basic geometry, II The possible reductions, III Topology of the real varieties”, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 24, pp. 106–113; pp. 115–121; pp. 123–126.

10. Hausmann, J.-C. & Knutson, A. 1997 “Polygon spaces and Grassmannians”, *Enseign. Math.(2)*, vol.43, no. 1-2, pp. 173–198.

11. Hausmann, J.-C. & Knutson, A. 1988, “Cohomology rings of polygon spaces”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 48, pp. 281–321.

12. Jordan, D. & Steiner, M. 1999, “Configuration spaces of mechanical linkages”, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 22, pp. 297–315.

13. Kamiyama, Y. & Tsukuda, S. 2014, “The Euler characteristic of the configuration space of planar spidery linkages”, *Algebr. Geom. Topol.*, vol. 14, no. 6, pp. 3659–3688.

14. Kapovich, M. & Millson, J. 1995, “On the moduli space of polygons in the Euclidean plane”, *J. Diff. Geom.*, vol. 42, no. 2, pp. 430–464.

15. Kapovich, M. & Millson, J. 1996, “The symplectic geometry of polygons in Euclidean space”, *J. Diff. Geom.*, vol. 44, no. 3, pp. 479–513.

16. Kapovich, M. & Millson, J. 2002, “Universality theorems for configuration spaces of planar linkages”, *Topology*, vol. 41, pp. 1051–1107.

17. Kempe, A.B. 1876, “On a general method of describing plane curves of the nth degree by linkwork”, *Proc. London Math. Soc.*, **VII**, vol. 102, pp. 213–216.

18. McCarthy, J.M. & Soh, G.S. 2011, *Geometric Design of Linkages*, second edition, Springer.

19. Klyachko, A. 1994, “Spatial polygons and stable configurations of points on the projective line”, in *Algebraic Geometry and Its Applications*, Proceedings of the 8th Algebraic Geometry Conference, Yaroslavl’ 1992, (A. Tikhomirov and A. Tyurin, eds.), Vieweg, Braunschweig, pp. 67–84.

20. Minh, T.H. & Zung, N.T. 2013, “Commuting foliations”, *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 18, no. 6, pp. 608–622.

21. Minh, N.V.& Zung, N.T. 2014, “Geometry of nondegenerate $\mathbb{R}^n$-actions on n-manifolds”, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 66, no.3, pp. 839–894.

22. Nambu, Y. 1973, “Generalized Hamiltonian dynamics”, *Phys. Rev. D.*, vol. 7, no. 8, pp. 5405–5412.

23. Servatius, B., Shai, O. & Whiteley, W. 2010, “Combinatorial characterization of the Assur graphs from engineering”, *European J. Combin.*, vol. 31, no. 4, pp. 1091–1104.

24. Thurston, W. 1987, “Shapes of polyhedra”, Preprint.

25. Waldhausen, F. 1967, “Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, I & II.” *Inventiones Mathematicae*, vol. 3, no. 4, pp. 308–333 and vol. 4, no. 2, pp. 87–117.

26. Zhao, J., Feng, Z., Ma, N. & Chu, F. 2014, *Design of special planar linkages*, Springer Tracks in Mechanical Engineering.

27. Zung, N.T. 2016, “Geometry of integrable non-Hamiltonian systems”, in *Geometry and Dynamics of Integrable Systems*, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, pp. 85–140. Birkhäuser/Springer.

28. Zung, N.T. 2018, “A conceptual approach to the problem of action-angle variables”, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 229, no. 2, pp. 789–833.

Получено 9.01.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 514.853 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-341-361

О бегущих волнах в системах абсолютно упругих частиц на прямой[1]

С. М. Саулин

Саулин Сергей Михайлович — аспирант кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; младший научный сотрудник, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: serega-saulin@mail.ru

Аннотация

Рассматривается система из бесконечного числа абсолютно упругих частиц на прямой, массы и начальные расстояния между которыми периодически повторяются. Изучаются условия, при которых в таких системах могут существовать решения типа бегущих волн.

Ключевые слова: абсолютно упругий удар, бегущая волна, бильярд.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
С. М. Саулин. О бегущих волнах в системах абсолютно упругих частиц на прямой // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 341–361.

[1]Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (№ 18-01-00887), а также гранта Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 514.853 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-341-361

On traveling waves in systems of absolutely elastic particles on a straight line

S. M. Saulin

Saulin Sergey Mikhaylovich — postgraduate student at the Department of Theoretical Mechanics and Mechatronics of the Faculty of Mechanics and Mathematics of M. V. Lomonosov MSU; Junior Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: serega-saulin@mail.ru

Abstract

We consider a system of an infinite number of absolutely elastic particles on a straight line, the masses and initial distances between which are periodically repeated. We study the conditions under which solutions such as traveling waves can exist in such systems.

Keywords: absolutely elastic blow, traveling wave, billiards.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
S. M. Saulin, 2020, "On traveling waves in systems of absolutely elastic particles on a straight line", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 341–361.

1. Введение

Рассмотрим систему из бесконечного числа одинаковых абсолютно упругих частиц на прямой. Так как массы частиц равны, то из законов сохранения энергии и импульса следует, что в момент удара двух частиц происходит обмен скоростями. Поэтому в системе из бесконечного числа одинаковых частиц существует решение, при котором в каждый момент времени движется лишь одна частица. Такое решение естественно называть решением типа бегущей волны. В этом случае полная энергия системы последовательно передается от одной частицы к другой.

Известно, что в системах из бесконечного числа одинаковых частиц на прямой, взаимодействующих с помощью потенциала $V : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ $(V(0) = +\infty)$ и имеющих большую энергию, существуют локализованные бегущие волны [15]. Они получаются как возмущения описанного выше решения в системе из бесконечного числа абсолютно упругих одинаковых частиц на прямой. В частности, в работе [15] даны количественные оценки на скорость распространения бегущей волны, а также близость исходного и возмущенного решений. В работах [1, 2, 8] также доказываются теоремы существования локализованных бегущих волн в системах частиц на прямой в случае больших энергий, однако для этого используются вариационные методы, а на потенциал V накладываются более жесткие условия. Используя метод центральных многообразий, авторы статей [9, 10] строят бегущие волны при малых энергиях со скоростями распространения, близкими к некоторым критическим значениям. Заинтересованного читателя отсылаем к книге [12], в которой подробно обсуждаются нелинейные эффекты в системах взаимодействующих частиц на прямой.

В случае, если массы $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ абсолютно упругих частиц различны, то даже вопрос о существовании решения типа бегущей волны оказывается нетривиальным. Мы полностью ответим на этот вопрос, когда число N различных масс на прямой равно 2, и частично, если $N = 3$. В обоих случаях массы частиц и начальные расстояния между соседними частицами периодически повторяются.

Под решением типа простейшей бегущей волны (п. б. в.) будем понимать частное решение, описываемое следующей конструкцией. Разобьем все частицы $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, кроме частицы $\#1$, на непересекающиеся группы, состоящие из N частиц: в каждой группе находятся частицы с массами $m_2, \ldots, m_N$, $m_{N+1} = m_1$, последовательно расположенные на прямой (см. рис. 1).

В начальный момент времени частицы расположены так, что каждая следующая группа частиц получается из предыдущей сдвигом на один и тот же вектор. Предположим, что в начальный момент времени все частицы на прямой, кроме частицы $\#1$, покоились, а частица $\#1$ двигалась в направлении первой группы со скоростью 1. Пусть после некоторого числа κ столкновений частиц первой группы вся энергия частицы $\#1$ полностью передалась частице $\#(N+1)$. Таким образом, первые N частиц остановились, а частица $\#(N+1)$ продолжила движение.

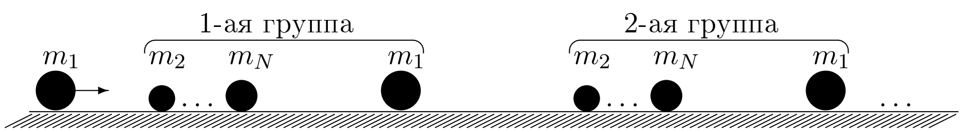


Рис. 1: расположение частиц на прямой.

Предположим, что начальные расстояния между частицами можно выбрать так, чтобы после полной передачи энергии частица $\#(N+1)$ не соударяется с частицей $\#N$. Так как начальные расстояния между соседними частицами и массы частиц не меняются при замене одной группы на другую, то частицы второй группы совершают такую же последовательность столкновений, что и частицы первой группы.

Ясно, что описанная конструкция накладывает ограничения на массы частиц, а также на начальные расстояния между частицами. Однако она позволяет свести изучение решений типа бегущей волны в системе, состоящей из бесконечного числа частиц на прямой, к изучению динамики первых $N+1$ частиц с массами $m_1, m_2, \ldots, m_N, m_1$.

Для реализации описанной конструкции необходимо ответить на следующие вопросы.

В1. Каким соотношениям удовлетворяют массы $m_1, m_2, \ldots, m_N$?

Пусть ρ_j — расстояние между частицами с номерами j и $j+1$ в начальный момент времени $1 \leqslant j \leqslant N$, а S — расстояние между группами частиц.

В2. Какими могут быть расстояния $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$ и S?

Ответам на эти вопросы и посвящена настоящая работа. Следует отметить, что мы не изучаем решения типа бегущих волн, при которых одновременно происходят удары внутри нескольких групп. Также мы ищем решения, в которых отсутствуют кратные удары: в каждый момент времени сталкиваются не более двух частиц. Известно, что в этом случае полное число ударов κ частиц $\#1, \#2, \ldots, \#N$ до полной передачи энергии частице $\#(N+1)$ всегда конечно и оценивается константой, зависящей только от масс частиц и их количества [4, 6, 13, 14].

Заметим, что начальная величина скорости частицы $\#1$ не важна: изменив масштаб времени, можно сделать скорость равной 1. Полученные ниже соотношения на массы и расстояния не зависят от масштаба времени.

Интересен также ответ на следующий вопрос. Верно ли, что для любых начальных расстояний $\{\rho_k\}_{k=1}^N$ между соседними частицами существует набор масс $\{m_k\}_{k=1}^N$, такой, что $m_i \neq m_j$

для некоторой пары индексов $1 \leqslant i, j \leqslant N$ и в соответствующей системе частиц существует решение типа п. б. в? Очевидно, что в случае $N = 1$ ответ на этот вопрос положительный. Ниже мы показываем (см. §3), что в случае $N = 2$ это утверждение также верно.

Опишем схему дальнейшего изложения. В §2 задача о движении $(N+1)$-ой частицы на прямой сводится к бильярдной задаче в N-гранном угле в $\mathbb{R}^{N+1}$ и $\mathbb{R}^N$ соответственно. В этом же параграфе производится редукция к бильярду в сферическом многограннике на $\mathbb{S}^{N-1}$. Эти конструкции хорошо известны и могут быть найдены, например, в книгах [7, 11]. В конце параграфа доказываются утверждения о геометрии конфигурационного пространства системы точек на прямой.

В §3 изучается случай трех частиц с массами m_1, m_2 и m_1. Теоремы 1 и 2 дают полные ответы на вопросы **B1** и **B2** для $N = 2$. Утверждение теоремы 3 означает, что симметрия расположения масс на прямой влечет за собой симметрию последовательности расстояний между частицами в моменты соударений.

В §4 подробно рассматривается случай четырех частиц на прямой. Используя результаты §2, мы сводим изучение существования решения типа п. б. в. к поиску условий на прямоугольные сферические треугольники, в которых существуют бильярдная траектория с началом и концом в разных острых углах, имеющая длину, равную π. В частных случаях получены достаточные условия на параметры таких треугольников.

В §5 доказывается теорема 4, справедливая для произвольного $N > 2$, в которой оцениваются расстояния каждой из частиц, участвующих в решении типа п. б. в., пройденные до момента полной остановки. В частности, из нее следует, что если система из $(N+1)$-ой частицы на прямой имеет решение типа п. б. в., то система из бесконечного набора частиц в описанной выше конструкции также имеет решение типа п. б. в.

2. Общие конструкции

2.1. Бильярд в N-гранном угле в $\mathbb{R}^{N+1}$

Пусть на горизонтальной прямой имеется $N+1$ материальная точка с массами $m_1, m_2, \ldots, m_{N+1}$, которые взаимодействуют между собой по абсолютно упругому закону. Это означает, что скорости частиц при столкновениях преобразуются согласно законам сохранения энергии и импульса. Обозначим через x_i и v_i координату и скорость i-ой точки, $1 \leqslant i \leqslant N+1$. Далее предполагаем, что кратных ударов не происходит: в каждый момент времени любая частица соударяется не более, чем с одной соседней частицей.

Рассмотрим конфигурационное пространство $\mathbb{R}^{N+1} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_{N+1})\}$ этой динамической системы и N-гранный угол $Q = \{x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{N+1}\}$, ограниченный гиперплоскостями $\Pi_j = \{x_j = x_{j+1}\}, 1 \leqslant j \leqslant N$. Точки, принадлежащие $\Pi_j \cap Q$ соответствуют положениям частиц на прямой, при которых частицы $\#j$ и $\#(j+1)$ столкнулись; точки прямой $l = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \ldots \cap \Pi_N$ пересечения всех плоскостей соответствуют столкновению всех частиц в одной точке.

Пока частицы на прямой движутся без столкновений, конфигурационная точка $M(t) = x(t)$ движется внутри угла Q равномерно и прямолинейно по направлению вектора $v = (v_1, v_2, \ldots, v_{N+1})$. В момент столкновения $t = \tau$ частиц $\#j$ и $\#(j+1)$ точка $M(\tau)$ находится на плоскости Π_j. После столкновения частицы расходятся, а точка $M(t), t > \tau$ продолжает движение внутри угла Q до очередного столкновения частиц. Направление движения точки $M(t)$ определяется из законов сохранения.

Далее удобно использовать другие координаты: $\tilde{x}_i = \sqrt{m_i} x_i, 1 \leqslant i \leqslant N+1$. Пусть $(\cdot, \cdot)$ — стандартное евклидово произведение в $\mathbb{R}^{N+1}$ в координатах $\tilde{x}$, а $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Точка $\tilde{M}(t) = \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ все время движения находится в угле

$$\tilde{Q} = \left\{ \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} \leqslant \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\tilde{x}_{N+1}}{\sqrt{m_{N+1}}} \right\}$$

и движется по направлению вектора $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_{N+1}), \tilde{v}_i = \sqrt{m_i} v_i, 1 \leqslant i \leqslant N+1$. Граница $\tilde{Q}$ лежит в объединении гиперплоскостей

$$\tilde{\Pi}_j = \left\{ \frac{\tilde{x}_j}{\sqrt{m_j}} = \frac{\tilde{x}_{j+1}}{\sqrt{m_{j+1}}} \right\},$$

нормалями к которым являются вектора

$$n_j = \frac{1}{\sqrt{m_j^{-1} + m_{j+1}^{-1}}} \Big(0, \ldots, 0, -\frac{1}{\sqrt{m_j}}, \frac{1}{\sqrt{m_{j+1}}}, 0, \ldots, 0 \Big), \qquad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{1}$$

с ненулевыми компонентами только на позициях j и $j+1$. Направляющий вектор m прямой пересечения $\tilde{l}$ плоскостей $\tilde{\Pi}_j$ равен

$$m = (\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \ldots, \sqrt{m_{N+1}}). \tag{2}$$

Заметим, что вектор m ортогонален n_j относительно $(\cdot,\cdot), 1 \leqslant j \leqslant N$. Введем обозначение $M = \|m\|^2$. Из (2) следует, что

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_{N+1}. \tag{3}$$

Обозначим через $\tilde{v}$ и $\tilde{v}'$ мгновенные скорости до и после столкновения точки $\tilde{M}$ с плоскостью $\tilde{\Pi}_j$.

Определение 1. *Будем говорить, что удар точки $\tilde{M}$ о плоскость $\tilde{\Pi}_j$ абсолютно упругий, если выполнены следующие условия:*

1. *векторы $\tilde{v}, \tilde{v}'$ и n_j лежат в одной двумерной плоскости;*
2. *$\|\tilde{v}\| = \|\tilde{v}'\|$;*
3. *$(\tilde{v}, n_j) = -(\tilde{v}', n_j)$.*

Определение 2. *Точка $\tilde{M}$ подчиняется бильярдному закону в угле $\tilde{Q}$, если каждый ее удар является абсолютно упругим.*

Предложение 1. *Траектория точки $\tilde{M}(t)$ в угле $\tilde{Q}$ подчиняется бильярдному закону относительно $(\cdot,\cdot)$ в $\mathbb{R}^{N+1}$.*

Доказательство этого и более общего утверждения, относящегося к системе движущихся в пространстве упруго-взаимодействующих частиц, можно найти в [5], [7].

Замечание 1. *Предложение 1 можно сформулировать иначе: траектория точки $M(t)$ в угле Q подчиняется бильярдному закону относительно метрики, порожденной удвоенной кинетической энергией $2T = \sum_{i=1}^{N+1} m_i v_i^2$ частиц на прямой.*

Таким образом, задача о движении $(N+1)$-ой абсолютно упругой частицы на прямой свелась к изучению бильярдной траектории точки $\tilde{M}$ в N-гранном угле $\tilde{Q}$ в $\mathbb{R}^{N+1}$. Как будет показано далее, размерность бильярдной задачи можно понизить.

2.2. Бильярд в N-гранном угле в $\mathbb{R}^N$

Пусть p — полный импульс системы частиц на прямой. Рассмотрим аффинную плоскость $\Pi = \{\tilde{v} \in \mathbb{R}^{N+1} : (m, \tilde{v}) = p\}$. Так как импульс p системы сохраняется, то плоскость Π неподвижна в $\mathbb{R}^{N+1}$. Обозначим через $\hat{M}(t)$ ортогональную проекцию точки $\tilde{M}(t)$ на плоскость Π, то есть проекцию вдоль вектора m.

Предложение 2. *Траектория точки $\hat{M}(t)$ в угле $\hat{Q} = \tilde{Q} \cap \Pi$ подчиняется бильярдному закону относительно метрики, индуцированной из $\mathbb{R}^{N+1}$.*

Доказательство. Будем обозначать ортогональную проекцию вектора $\tilde{w} \in \mathbb{R}^{N+1}$ на Π через $\hat{w}$. Пусть, $\tilde{v}$ и $\tilde{v}'$ — скорости точки $\tilde{M}(t)$ до и после удара соответственно. Без ограничения общности можем считать, что удар точки $\tilde{M}$ пришелся о плоскость $\tilde{\Pi}_1$. Вектор m — нормаль к плоскости Π, поэтому

$$\hat{v} = \tilde{v} - \frac{p}{M} \cdot m, \qquad \hat{v}' = \tilde{v}' - \frac{p}{M} \cdot m. \tag{4}$$

Теперь воспользуемся предложением 1: так как $\|\tilde{v}\| = \|\tilde{v}'\|$, то $\|\hat{v}\| = \|\hat{v}'\|$.

Вектор m ортогонален n_j, поэтому плоскость

$$\hat{\Pi}_j = \tilde{\Pi}_j \cap \Pi \tag{5}$$

ортогональна m и $n_j, 1 \leqslant j \leqslant N$. Из предложения 1 имеем: $\tilde{v} - \tilde{v}' = \lambda \cdot n_1$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Используя (4), получаем $\hat{v} - \hat{v}' = \lambda \cdot n_1$, то есть вектора $\hat{v}, \hat{v}'$ и n_1 также лежат в одной двумерной плоскости, лежащей в Π.

Осталось доказать, что $(\hat{v}, n_1) = -(\hat{v}', n_1)$. Действительно, воспользуемся (4) и предложением 1:

$$(\hat{v}, n_1) = (\tilde{v} - \frac{p}{M} \cdot m, n_1) = (\tilde{v}, n_1) = -(\tilde{v}', n_1) = -(\tilde{v}' - \frac{p}{M} \cdot m, n_1) = -(\hat{v}', n_1).$$

□

Из предложения 2 следует, что бильярдная задача о движении точки $\tilde{M}$ в N-гранном угле $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ эквивалентна бильярдной задаче о движении точки $\hat{M}$ в N-гранном угле $\hat{Q} \subset \mathbb{R}^N$. Действительно, зная направление $\hat{v}$ движения точки $\hat{M}$ по формулам (4) восстанавливается направление $\tilde{v}$ движения точки $\tilde{M}$.

Таким образом, задача о движении абсолютно упругих частиц на прямой свелась к изучению бильярдной траектории точки $\hat{M}(t)$ в угле $\hat{Q}$. Угол $\hat{Q}$ ограничен плоскостями $\hat{\Pi}_j = \operatorname{span}(m, n_j)^{\perp}, 1 \leqslant j \leqslant N$. Знак $\perp$ означает ортогональное дополнение относительно стандартного евклидова произведения.

Замечание 2. *Из определения (5) плоскости $\hat{\Pi}_j$ следует, что n_j — нормаль к $\hat{\Pi}_j$, поэтому угол между плоскостями $\hat{\Pi}_k$ и $\hat{\Pi}_s$ равен углу между плоскостями $\tilde{\Pi}_k$ и $\tilde{\Pi}_s$.*

Нам удалось понизить размерность бильярдной задачи за счет закона сохранения импульса. Оказывается, ее можно понизить еще на единицу.

2.3. Сведение к бильярду на сфере $\mathbb{S}^{N-1}$

Рассмотрим N-мерный N-гранный угол $\hat{Q}$ в $\mathbb{R}^N$. Из предложения 2 следует, что траектория точки $\hat{M}(t)$ в угле $\hat{Q}$ является бильярдной. Опишем сферу $\mathbb{S}^{N-1}$ радиуса 1 с центром в вершине O угла $\hat{Q}$. Тогда грани угла $\hat{Q}$ высекут на сфере некоторый $(N-1)$-мерный сферический многогранник $\mathcal{A}$.

Замечание 3. *Если $N = 3$, то $\mathcal{A}$ — сферический треугольник. Длины его сторон равны плоским углам трехгранного угла $\hat{Q}$, а углы $\mathcal{A}$ равны соответствующим двугранным углам трехгранного угла $\hat{Q}$.*

Предложение 3. *Центральная проекция $M'(t)$ траектории точки $\hat{M}(t)$ на сферу $\mathbb{S}^{N-1}$ подчиняется бильярдному закону*[2] *в сферическом многограннике $\mathcal{A}$.*

Таким образом, точка M' движется по большим окружностям на $\mathbb{S}^{N-1}$, ударяясь о сферы $\hat{\Pi}_j \cap \mathbb{S}^{N-1} \cong \mathbb{S}_j^{N-2}, 1 \leqslant j \leqslant N$. Векторы скорости $\check{v}$ и $\check{v}'$ точки M' до и после удара о сферу $\mathbb{S}_j^{N-2}$ в точке удара $M'(\tau)$ должны удовлетворять бильярдному закону (ср. с определением 1): векторы $\check{v}$, $\check{v}'$ и n_j лежат в одной двумерной плоскости; длины векторов $\check{v}$ и $\check{v}'$ равны; угол между $\check{v}$ и n_j равен углу между $\check{v}'$ и n_j.

Частный случай предложения 3 для $N = 3$ доказан в [7]. Общий случай доказывается аналогично.

Бильярдные задачи о движении точки $\hat{M}(t)$ в угле $\hat{Q}$ и точки $M'(t)$ в сферическом многоугольнике $\mathcal{A}$ не являются эквивалентными. Действительно, в дугу окружности на сфере $\mathbb{S}^{N-1}$ проецируется целая двумерная плоскость, поэтому по начальным данным $(M'(0), v'(0)) \in \in T\mathbb{S}^{N-1}$ нельзя определить $(\hat{M}(0), \hat{v}(0)) \in \mathbb{R}^{2N}$. Однако в случае, когда нас интересуют траектории точки $\hat{M}$, соответствующие решению типа п. б. в., неопределенности нет: координаты точки $\hat{M}(0)$ определяются начальным расположением частиц, а вектор $\hat{v}(0)$ находится из первого условия пункта 2 леммы 2 (см. ниже).

Из предложения 3 следует, что исходная задача о поиске решений типа п. б. в. в системе абсолютно упругих частиц на прямой сводится к некоторой задаче о бильярде на сфере. Для случая $N = 3$ это сведение подробно описано в §4.

Замечание 4. *Длина проекции $M'(t)$ любой неограниченной (в обе стороны) бильярдной траектории $\hat{M}(t)$ на сферу $\mathbb{S}^{N-1}$ равна π.*

Для доказательства этого утверждения выпрямим траекторию точки $\hat{M}(t)$, последовательно отражая угол $\hat{Q}$ относительно тех граней, по которым происходит удар. Полученная прямая спроецируется в полуокружность на сфере $\mathbb{S}^{N-1}$, то есть ее длина равна π. С другой стороны, эта полуокружность — отраженная относительно граней многоугольника $\mathcal{A}$ траектория точки $M'(t)$ (последовательности отражений для угла $\hat{Q}$ и многоугольника $\mathcal{A}$ совпадают).

2.4. Геометрические леммы

В этом параграфе докажем несколько вспомогательных утверждений о геометрии конфигурационного пространства системы точек на прямой, а также свойствах бильярдной траектории точки $\tilde{M}(t)$ в угле $\tilde{Q}$.

Лемма 1. *Пусть $\alpha_{k,s}$ — двугранные углы между плоскостями $\tilde{\Pi}_k$ и $\tilde{\Pi}_s$. Тогда $\alpha_{k,s} = \pi/2$ при $|k-s| > 1$, а углы $\alpha_k := \alpha_{k,k+1}$ при $1 \leqslant k \leqslant N-1$ находятся из соотношений*

$$\cos\alpha_k = \sqrt{\frac{m_k m_{k+2}}{(m_k + m_{k+1})(m_{k+1} + m_{k+2})}}. \tag{6}$$

Доказательство. Действительно, так как n_k и n_s — нормали к $\tilde{\Pi}_k$ и $\tilde{\Pi}_s$ соответственно, то угол $\alpha_{k,s}$ равен углу между векторами n_k и n_s. Из (1) следует, что $(n_k, n_s) = 0$ при $|k-s| > 1$, поэтому $\alpha_{k,s} = \pi/2$. Теперь рассмотрим две последовательные плоскости $\tilde{\Pi}_k$ и $\tilde{\Pi}_{k+1}$. Так как $\|n_k\| = \|n_{k+1}\| = 1$, то $\cos\alpha_k = (n_k, n_{k+1})$. Записывая это скалярное произведение и используя (1), получаем (6). □

Согласно замечанию 2, аналогичное утверждение верно для двугранных углов между плоскостями $\hat{\Pi}_k$ и $\hat{\Pi}_s$.

Пусть $v(0) = (1, 0, \ldots, 0)$ и $v(T) = (0, \ldots, 0, 1)$ — начальная и конечная скорости конфигурационной точки $M(t)$. Здесь T — момент времени последнего столкновения частиц с массами

[2] Относительно скалярного произведения, индуцированного из $\mathbb{R}^N$.

m_N и m_{N+1}. Тогда $\tilde v(0)=\sqrt{m_1}v(0)$, а $\tilde v(T)=\sqrt{m_1}v(T)$ — начальная и конечная скорости точки $\tilde M(t)$, а скорости $\hat v(0),\hat v(T)$ точки $\hat M(t)$ определяются с помощью (4) и $\tilde v(0),\tilde v(T)$. Определим двумерные пространства $\tilde l_k$ и одномерные пространства $\hat l_k$:

$$\tilde l_k=\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\tilde\Pi_j,\qquad \hat l_k=\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\hat\Pi_j,\qquad k=1,2,\dots,N.$$

Лемма 2. 1) $\tilde v(0)\,||\,\tilde l_1$, $\tilde v(T)\,||\,\tilde l_N$; 2) $\hat v(0)\,||\,\hat l_1$, $\hat v(T)\,||\,\hat l_N$.

Доказательство. 1) Так как $\tilde v(0)=(\sqrt{m_1},0,\dots,0)$, то, используя (1), получаем, что $(\tilde v(0),n_j)=0$ для $2\leqslant j\leqslant N$. Таким образом, $\tilde v(0)$ параллелен плоскости $\tilde l_1$. Аналогично доказывается, что $\tilde v(T)$ параллелен плоскости $\tilde l_N$.

2) Согласно замечанию 2, вектор n_j является нормалью к плоскости $\hat\Pi_j$. Так как векторы $\hat v(0)$ и $\tilde v(0)$ связаны равенством (4), то $(\hat v(0),n_j)=0$ при всех $2\leqslant j\leqslant N$. Следовательно, $\hat v(0)$ параллелен прямой $\hat l_1$. Абсолютно аналогично доказывается, что вектор $\hat v(T)$ параллелен прямой $\hat l_N$. □

Из леммы 2, в частности, следует, что последний удар точки $\hat M$ приходится о плоскость $\hat\Pi_N$. Это в свою очередь означает, что в решении типа п. б. в. последний удар всегда происходит между частицами $\#N$ и $\#(N+1)$.

Лемма 3. *Если $\hat e_k=(a_1,a_2,\dots,a_{N+1})$ — направляющий вектор прямой $\hat l_k$, а*

$$M_k:=m_1+m_2+\,\dots\,+m_k,\qquad k=1,2,\dots,N,$$

то

$$a_s=\sqrt{\frac{(M-M_k)m_s}{MM_k}},\qquad 1\leqslant s\leqslant k,\qquad a_{s'}=-\sqrt{\frac{M_km_{s'}}{M(M-M_k)}},\qquad k+1\leqslant s'\leqslant N+1.$$

Доказательство. По определению $\hat l_k$, при $j\neq k$ $\hat l_k\perp n_j$, поэтому $(\hat e_k,n_j)=0$. Воспользовавшись (1), запишем эту систему уравнений в виде

$$\frac{a_j}{\sqrt{m_j}}-\frac{a_{j+1}}{\sqrt{m_{j+1}}}=0,\qquad j\neq k.$$

Пусть $a_k=\lambda\sqrt{m_k}$, $a_{N+1}=\mu\sqrt{m_{N+1}}$, $\lambda>0$. Тогда

$$a_s=\lambda\sqrt{m_s},\qquad 1\leqslant s\leqslant k,\qquad a_{s'}=\mu\sqrt{m_{s'}},\qquad k+1\leqslant s'\leqslant N+1. \tag{7}$$

Так как $\hat l_k\perp m$, то $(\hat e_k,m)=0$. Записывая это равенство и используя (7), находим, что

$$\lambda M_k+\mu(M-M_k)=0. \tag{8}$$

Подставляя (7) в условие нормировки $(\hat e_k,\hat e_k)=1$, получаем

$$\lambda^2M_k+\mu^2(M-M_k)=1. \tag{9}$$

Решая систему уравнений (8)-(9) относительно λ и μ, а затем подставляя их в (7), получаем требуемое. □

Лемма 4. *Пусть $\beta_{p,q}$ — угол между прямыми $\hat l_p$ и $\hat l_q$, $1\leqslant p<q\leqslant N$. Тогда*

$$\cos\beta_{p,q}=\sqrt{\frac{M_p(M-M_q)}{M_q(M-M_p)}}.$$

Доказательство. Если $p < q$, то используя лемму 3, находим, что

$$(\hat{e}_p, \hat{e}_q) = \sqrt{\frac{M - M_p}{MM_p}}\sqrt{\frac{M - M_q}{MM_q}}\sum_{s=1}^{p} m_s - \sqrt{\frac{M_p}{M(M - M_p)}}\sqrt{\frac{M - M_q}{MM_q}}\sum_{s=p+1}^{q} m_s +$$

$$+\sqrt{\frac{M_p}{M(M - M_p)}}\sqrt{\frac{M_q}{M(M - M_q)}}\sum_{s=q+1}^{N+1} m_s = \frac{\sqrt{M_p(M - M_p)(M - M_q)}}{M\sqrt{M_q}} +$$

$$-\frac{\sqrt{M_p(M - M_q)}}{M\sqrt{M_q(M - M_p)}}(M_q - M_p) + \frac{\sqrt{M_p M_q(M - M_q)}}{M\sqrt{M - M_q}} =$$

$$= \sqrt{\frac{M_p(M - M_p)}{M_q(M - M_p)}}\frac{M - M_p + M_q}{M} - \sqrt{\frac{M_p(M - M_q)}{M_q(M - M_p)}}\frac{M_q - M_p}{M} =$$

$$= \sqrt{\frac{M_p(M - M_q)}{M_q(M - M_p)}}.$$

Так как $\|\hat{e}_p\| = \|\hat{e}_q\| = 1$, то лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Пусть φ_k — угол между $\hat{l}_k$ и $\hat{\Pi}_k$. Тогда*

$$\sin\varphi_k = \sqrt{\frac{Mm_k m_{k+1}}{M_k(M - M_k)(m_k + m_{k+1})}}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Доказательство. Из леммы 3, замечания 2 и (1) находим

$$\sqrt{m_k^{-1} + m_{k+1}^{-1}} \cdot (\hat{e}_k, n_k) = \sqrt{\frac{M - M_k}{MM_k}} + \sqrt{\frac{M_k}{M(M - M_k)}} = \sqrt{\frac{M}{M_k(M - M_k)}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Так как $\|\hat{e}_k\| = \|n_k\| = 1$ и угол между $\hat{l}_k$ и n_k равен $\pi/2 - \varphi_k$, то получаем требуемое. □

3. Случай $N = 2$

3.1. Соотношения на массы

Пусть на прямой последовательно располагаются три абсолютно упругих частицы с массами m_1, m_2 и $m_3 = m_1$. Очевидно, что решение типа п. б. в. для трех частиц может существовать только в том случае, когда полное число ударов κ в системе чётно.

Теорема 1. *В системе трёх частиц на прямой с массами m_1, m_2 и m_1 соответственно существует решение типа бегущей волны с числом ударов $\kappa \in 2\mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда*

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \cos\frac{\pi}{\kappa + 1}. \tag{10}$$

Доказательство. Воспользовавшись предложением 2, сведем изучение динамики точек на прямой к исследованию движения точки $\hat{M}(t)$ в плоском угле $\hat{Q}$ с раствором α и вершиной O (см. рис. 2). Стороны угла $\hat{Q}$ обозначим, как и в лемме 2, через $\hat{l}_1$ и $\hat{l}_2$.

Из леммы 1 и замечания 2 следует, что

$$\cos\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \tag{11}$$

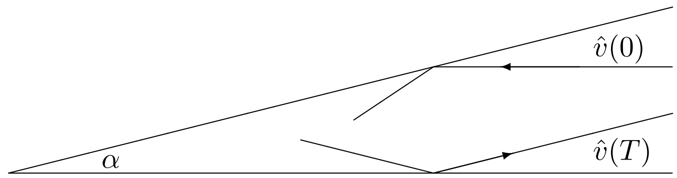


Рис. 2: угол $\hat{Q}$.

Теперь найдем угол α иначе. Построим развертку угла $\hat{Q}$ вместе с бильярдной траекторией точки $\hat{M}(t)$ внутри него. Для этого отразим угол относительно его сторон и рассмотрим образ траектории при этих отражениях. Образ траектории представляет собой прямую $\hat{l}$, которая пересекается с каждым из отраженных углов.

Нас интересуют решения типа п. б. в., поэтому в начальный и конечный моменты времени скорости частиц на прямой такие: $v_1(0) = 1$, $v_2(0) = 0$, $v_3(0) = 0$ и $v_1(T) = 0$, $v_2(T) = 0$, $v_3(T) = 1$, где T — момент последнего столкновения частиц #2 и #3. Из леммы 2 следует, что векторы $\hat{v}(0)$ и $\hat{v}(T)$ параллельны сторонам угла $\hat{Q}$. Таким образом, прямая $\hat{l}$ параллельна стороне $\hat{l}_1$ угла $\hat{Q}$ (см. рис. 3).

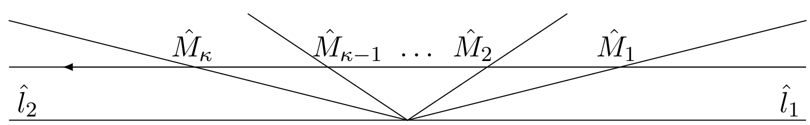


Рис. 3: выпрямление траектории.

Так как первый удар точки $\hat{M}(t)$ приходится о прямую $\hat{l}_2$, а последний — о прямую $\hat{l}_1$, то образ $\hat{l}_2$ под действием отражений совпадает с продолжением прямой $\hat{l}_1$. Это возможно только тогда, когда число копий угла $\hat{Q}$ нечетно. Заметим, что число копий угла $\hat{Q}$ на 1 больше числа отражений траектории $\hat{M}(t)$ от сторон исходного угла, что в свою очередь равно числу ударов κ между частицами на прямой, поэтому $(\kappa+1)\alpha = \pi$ и $\kappa \in 2\mathbb{N}$. Из этого и равенства (11) следует (10). $\square$

Таким образом, теорема 1 отвечает на вопрос **В1** введения для случая, когда на прямой расположено бесконечно много частиц с периодически повторяющимися массами m_1 и m_2. В частности, из теоремы 1 получаем следствие: $m_2/m_1 = O(1/\kappa^2)$ при $\kappa \to \infty$.

Заметим, что при подстановке в формулу (10) $\kappa = 2$ получаем, что $m_1 = m_2$. В этом случае существование решения типа бегущей волны очевидно.

Если $\kappa > 2$, то из (10) следует, что $m_1 > m_2$. Действительно, используя (10), находим, что

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{1-\cos\alpha} - 1, \qquad \alpha = \frac{\pi}{\kappa+1}, \qquad \kappa \in 2\mathbb{N}.$$

При $\kappa > 2$ угол $\alpha < \pi/3$, поэтому $\cos\alpha > 1/2$, то есть $m_1/m_2 > 1$.

Пусть $\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_\kappa$ — последовательные точки пересечения прямой $\hat{l}$ со сторонами отраженных углов (см. рис. 3). Заметим, что $\angle \hat{M}_j O \hat{M}_{\kappa+1-j} = \pi - 2\pi j/(\kappa+1)$, $\; j = 1, 2, \dots, \kappa/2$. Непосредственно из приведенного нами доказательства теоремы 1 получаем

Следствие 1. *$\triangle \hat{M}_j O \hat{M}_{\kappa+1-j}$ — равнобедренный ($\|O\hat{M}_j\| = \|O\hat{M}_{\kappa+1-j}\|$), с углами при основании, равными $\pi j/(\kappa+1)$, $\; j = 1, 2, \dots, \kappa/2$.*

3.2. Соотношения на расстояние

Для случая трех частиц на прямой удается явно найти расстояние S, которое пройдет частица #3 с момента первого столкновения до момента последнего столкновения с частицей #2. Очевидно, что S не зависит от начального расстояния ρ_1 между частицами #1 и #2, а зависит только лишь от начального расстояния ρ_2 между частицами #2, #3 и отношения масс частиц.

Теорема 2. *Если массы m_1 и m_2 удовлетворяют равенству (10), то*

$$S = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\rho_2. \tag{12}$$

Из теорем 1 и 2 следует, что в системах из бесконечного числа абсолютно упругих частиц на прямой, массы которых чередуются и удовлетворяют соотношению (10), существуют решения типа п. б. в.

Действительно, если расположить частицы, массы которых связаны равенством (10), так, чтобы начальные расстояния между двумя последовательными частицами с массами m_1 и m_2 были больше S из (12), а между частицами с массами m_2 и m_1 не больше ρ_2, то каждая группа последовательных частиц с массами m_1, m_2 и m_1 за κ ударов полностью передает энергию следующей группе частиц. В частности, все частицы можем расположить на одинаковом расстоянии друг от друга.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $t = 0$ соответствует моменту первого столкновения частиц #1 и #2. Пусть T — момент последнего столкновения частиц #2 и #3, а S_c — расстояние, пройденное центром масс C системы трех точек за время T. Обозначим через $\rho_2(0)$ и $\rho_2(T)$ расстояния между частицами #2, #3 и частицами #1, #2 в моменты времени $t = 0$ и $t = T$ соответственно, а через $d_c(0)$ и $d_c(T)$ — расстояния между частицей #1 и центром масс и центром масс и частицей #3 при $t = 0$ и $t = T$ (см. рис. 4). Скорость центра масс обозначим через v_c.

Рис. 4: положение частиц в момент времени $t = 0$ и $t = T$.

Так как на систему частиц внешние силы не действуют, то центр масс движется равномерно и прямолинейно. Из закона сохранения импульса и начальных условий на скорости частиц $(v_1(0) = 1, v_2(0) = 0, v_3(0))$ следует, что

$$v_c = \frac{m_1}{2m_1 + m_2}, \qquad S_c = \frac{m_1 T}{2m_1 + m_2}. \tag{13}$$

Из определения центра масс находим, что

$$d_c(0) = \frac{m_1\rho_2(0)}{2m_1 + m_2}, \qquad d_c(T) = \frac{m_1\rho_2(T)}{2m_1 + m_2}. \tag{14}$$

Заметим, что $S = S_c + d_c(0) + d_c(T) - \rho_2(0)$ (см. рис. 4). Подставим (13)-(14) в это выражение:

$$S = \frac{m_1 T + m_1\rho_2(T) - (m_1 + m_2)\rho_2(0)}{2m_1 + m_2}. \tag{15}$$

Дальнейшая часть доказательства посвящена вычислению T и $\rho_2(T)$. Для этого, воспользовавшись предложением 1, сведем изучение динамики частиц на прямой к расммотрению бильярдного движения точки $\tilde{M}(t)$. Заметим, что точка $\tilde{M}(t)$ движется с постоянной по модулю скоростью $\|\tilde{v}\| = \sqrt{m_1}$ в угле $\tilde{Q}$. Таким образом, время T равно длине $\tilde{L}$ ломаной $\tilde{M}_1\tilde{M}_2 \ldots \tilde{M}_\kappa$, деленной на $\sqrt{m_1}$. Здесь, как и раньше, $\{\tilde{M}_k\}$ — последовательные точки удара точки $\tilde{M}(t)$ об угол $\tilde{Q}$, а $\kappa \in 2\mathbb{N}$ — число ударов в системе.

Подставляя $M_1 = m_1, M_2 = m_1 + m_2$ и $M = 2m_1 + m_2$ в равенства леммы 3, получаем формулы для направляющих векторов $\hat{e}_1$ и $\hat{e}_2$ прямых $\hat{l}_1$ и $\hat{l}_2$ соответственно:

$$\hat{e}_1 = \Big(-\sqrt{\frac{m_1+m_2}{2m_1+m_2}}, \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)(2m_1+m_2)}}, \frac{m_1}{\sqrt{(m_1+m_2)(2m_1+m_2)}} \Big), \tag{16}$$

$$\hat{e}_2 = \Big(-\frac{m_1}{\sqrt{(m_1+m_2)(2m_1+m_2)}}, -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)(2m_1+m_2)}}, \sqrt{\frac{m_1+m_2}{2m_1+m_2}} \Big). \tag{17}$$

Теперь рассмотрим бильярдную траекторию точки $\hat{M}(t)$ в угле $\hat{Q}$. Его стороны параллельны векторам $\hat{e}_1$ и $\hat{e}_2$. Точкам $\{\tilde{M}_k\}$ на границе $\tilde{Q}$ соответствуют точки $\{\hat{M}_k\}$ на границе $\hat{Q}$. Так как $\hat{M}_k$ — ортогональная проекция $\tilde{M}_k$ на плоскость Π с вектором нормали m, то длины $\hat{L}, \tilde{L}$ ломаных $\hat{M}_1\hat{M}_2 \ldots \hat{M}_\kappa$ и $\tilde{M}_1\tilde{M}_2 \ldots \hat{M}_\kappa$ связаны равенством

$$\hat{L} = \tilde{L} \sin\gamma, \tag{18}$$

где γ — угол между m и $\tilde{v} = (\sqrt{m_1}, 0, 0)$. Так как $(\tilde{v}, m) = m_1, \|\tilde{v}\| = \sqrt{m_1}, \|m\| = \sqrt{2m_1+m_2}$, то

$$\cos\gamma = \sqrt{\frac{m_1}{2m_1+m_2}}, \qquad \sin\gamma = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{2m_1+m_2}}. \tag{19}$$

Заметим, что $OM_1 = (0, 0, \rho_2(0))$, поэтому

$$O\tilde{M}_1 = (0, 0, \rho_2(0)\sqrt{m_1}). \tag{20}$$

Таким образом, используя (17), имеем

$$\|O\hat{M}_1\| = (O\tilde{M}_1, \hat{e}_2) = \rho_2(0)\sqrt{\frac{m_1(m_1+m_2)}{2m_1+m_2}}. \tag{21}$$

Для подсчета длины $\hat{L}$ ломаной $\hat{M}_1\hat{M}_2 \ldots \hat{M}_\kappa$ отразим угол $\hat{Q}$ относительно его сторон. Образ траектории $\hat{M}(t)$ при таких отражениия будет являться прямой, последовательно проходящей через образы точек $\{\hat{M}_k\}$ (см. рис. 3). Сохраним для них те же обозначения.

По следствию 1, $\triangle\hat{M}_1 O\hat{M}_\kappa$ — равнобедренный:

$$\angle\hat{M}_1 O\hat{M}_\kappa = (\kappa-1)\alpha, \qquad \angle O\hat{M}_1\hat{M}_\kappa = \angle O\hat{M}_\kappa\hat{M}_1 = \alpha, \qquad \alpha = \pi/(\kappa+1).$$

По теореме синусов для $\triangle\hat{M}_1 O\hat{M}_\kappa$, имеем

$$\|\hat{M}_1\hat{M}_\kappa\| = \|O\hat{M}_1\| \cdot \frac{\sin(\kappa-1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

Так как

$$\frac{\sin(\kappa-1)\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\frac{\pi(\kappa-1)}{\kappa+1})}{\sin(\frac{\pi}{\kappa+1})} = \frac{\sin(\pi - \frac{2\pi}{\kappa+1})}{\sin(\frac{\pi}{\kappa+1})} = 2\cos\frac{\pi}{\kappa+1},$$

то

$$\hat{L} = \|\hat{M}_1\hat{M}_\kappa\| = 2\|O\hat{M}_1\|\cos\alpha. \tag{22}$$

Окончательно, используя (18)-(22) и (10), имеем

$$T = \frac{\tilde{L}}{\sqrt{m_1}} = \frac{\hat{L}}{\sqrt{m_1}\sin\gamma} = \frac{2\|O\hat{M}_1\|\cos\alpha}{\sqrt{m_1}\sin\gamma} = \frac{2\rho_2(0)m_1}{m_1+m_2}. \tag{23}$$

Воспользовавшись теоремой 3, подставим $\rho_2(T) = \rho_2(0)$ и (23) в (15):

$$S = \frac{2m_1^2}{(m_1+m_2)(2m_1+m_2)}\rho_2(0) - \frac{m_2}{2m_1+m_2}\rho_2(0) = \frac{2m_1^2 - m_1m_2 - m_2^2}{(m_1+m_2)(2m_1+m_2)}\rho_2(0) =$$
$$= \frac{2m_1(m_1-m_2)+m_2(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)(2m_1+m_2)}\rho_2(0) = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\rho_2(0).$$

Теорема 2 доказана. □

3.3. Симметрия ударов

Пусть $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{\kappa-1} < t_\kappa = T$ — последовательные моменты времени, соответствующие ударам частиц на прямой, $\kappa \in 2\mathbb{N}$ — число ударов. Моменты $t_1, t_3, \ldots, t_{\kappa-1}$ соответствуют ударам частиц #1 и #2, а $t_2, t_4, \ldots, t_\kappa$ — ударам частиц #2 и #3. Обозначим через $\rho(t_j) > 0$ — расстояние в момент времени t_j между частицами #1 и #2 при четном j и между #2 и #3 при нечетном j, $j = 1, 2, \ldots, \kappa$.

Если $N = 2$, то массы m_1 и m_2 чередуются. Геометрическим отражением этого факта, в частности, является следствие 1. Так как исходная динамическая система обратима, а массы крайних частиц равны, то последовательность расстояний $\{\rho(t_j)\}_{j=1}^{\kappa}$ между частицами в моменты ударов является симметричной.

Теорема 3. *$\rho(t_j) = \rho(t_{\kappa+1-j})$ при $j = 1, 2, \ldots, \kappa/2$.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, введенными в доказательстве теоремы 2. Предположим, что j нечетно. Случай четного j рассматривается аналогично. Без ограничения общности можем считать, что $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Тогда

$$x_1(t_j) = x_2(t_j), \qquad x_3(t_j) = x_2(t_j) + \rho(t_j),$$

поэтому

$$O\tilde{M}_j = x_1(t_j)m + (0, 0, \sqrt{m_1}\rho(t_j)). \tag{24}$$

В момент времени $t_{\kappa+1-j}$ имеем:

$$x_1(t_{\kappa+1-j}) = x_2(t_{\kappa+1-j}) - \rho(t_{\kappa+1-j}), \qquad x_2(t_{\kappa+1-j}) = x_3(t_{\kappa+1-j}).$$

Таким образом,

$$O\tilde{M}_{\kappa+1-j} = x_2(t_{\kappa+1-j})m - (\sqrt{m_1}\rho(t_{\kappa+1-j}), 0, 0). \tag{25}$$

Из следствия 1, $\|O\hat{M}_j\| = \|O\hat{M}_{\kappa+1-j}\|$, поэтому $(\hat{e}_2, O\tilde{M}_j) = (\hat{e}_1, O\tilde{M}_{\kappa+1-j})$. Записывая это равенство и используя (16)-(17) и (24)-(25), а также условия ортогональности векторов $\hat{e}_1$ и $\hat{e}_2$ вектору m, получаем, что $\rho(t_j) = \rho(t_{\kappa+1-j})$. □

В качестве следствия теоремы 3 и обратимости рассматриваемой системы получаем, что последовательность промежутков времени между двумя последовательными ударами является симметричной: $t_{j+1} - t_j = t_{\kappa+1-j} - t_{\kappa-j}$. Поэтому, складывая первые j равенств, получим $t_{j+1} = T - t_{\kappa-j}$, $0 \leqslant j \leqslant \kappa - 1$.

4. Случай $N = 3$

4.1. Коды траекторий

Пусть на прямой последовательно расположены четыре абсолютно упругие частицы с массами m_1, m_2, m_3 и $m_4 = m_1$. Используя предложение 3, сведем изучение динамики частиц на прямой к изучению бильярдной траектории точки M' в треугольнике $\mathcal{A} = \Delta ABC$ на сфере $\mathbb{S}^2$ единичного радиуса с центром в точке O. Будем считать, что дуги AC, AB и BC соответствуют пересечениям сферы $\mathbb{S}^2$ с плоскостями $\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \hat{\Pi}_3$ и лежат на больших окружностях ω_1, ω_2 и ω_3 соответственно. Далее для краткости используем следующие обозначения: $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$, длины сторон BC, AC, AB равны a, b и c соответственно. Из замечания 3 и леммы 1 следует, что $\gamma = \pi/2$, углы α и β определяются с помощью формул (6), а a, b, c определяются из леммы 4.

Замечание 5. *Из (6) следует, что $\alpha = \beta$ тогда и только тогда, когда $m_2 = m_3$. Углы α и β при всех значениях m_1, m_2 и m_3 являются острыми.*

В силу леммы 2, неограниченная траектория[3] точки $\hat{M}$ в $\mathbb{R}^3$ при проекции на $\mathbb{S}^2$ даст сферическую ломаную Γ, вписанную в треугольник $\mathcal{A}$, начинающуюся в вершине B и заканчивающуюся в вершине A — траекторию точки M' (см. рис. 5). Из замечания 4 следует, что длина Γ равна π. Обозначим через φ_- и φ_+ углы наклона первого и последнего звена ломаной Γ к AB.

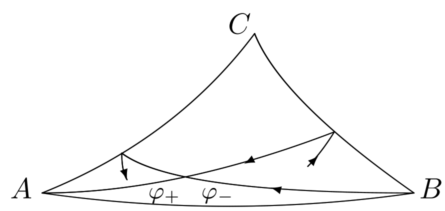


Рис. 5: сферический треугольник $\mathcal{A}$.

Будем двигаться вдоль Γ и записывать последовательность соударений в виде слова: в начальный момент времени мы имеем пустое слово; если удар произошел о сторону $i \in \{a, b, c\}$, то справа дописываем букву i. Таким образом, каждой траектории точки M' соответствует некоторое слово $w = i_1 i_2 \ldots i_\kappa$, $\quad i_s \in \{a, b, c\}$, $\quad 1 \leqslant s \leqslant \kappa$, где κ — число ударов в системе четырех частиц на прямой.

Нас интересуют решения типа п. б. в., поэтому структура множества возможных слов w не может быть произвольной. В частности, всегда $i_1 = b, i_2 = c, i_\kappa = a$ и любые две соседние буквы слова w различны. Из физических соображений следует, что в w не может быть участков bab и aba, которые соответствуют последовательным сериям ударов частиц #1 и #2, #3 и #4, #1 и #2 в случае bab и #3 и #4, #1 и #2, #3 и #4 в случае aba. Далее будут сформулированы достаточные условия на множество $W(\kappa)$ слов длины κ, которые кодируют траектории точки M', соответствующие решениям типа бегущих волн.

Обозначим через $R_i : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ отражение относительно большого круга, граница которого содержит дугу $i \subset \mathbb{S}^2$. По каждому слову $w = i_1 i_2 \ldots i_\kappa$ определим последовательность треугольников: $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, $\quad \mathcal{A}_s = R_{i_s} \mathcal{A}_{s-1}$, $\quad 1 \leqslant s \leqslant \kappa$.

После κ отражений траектория точки M' «выпрямится», то есть станет половиной большой окружности, начинающейся в точке B и заканчивающейся в диаметрально противоположной

[3]В терминах частиц на прямой это означает, что частица #1 начинает движение из $-\infty$, а частица #4 заканчивает движение на $+\infty$.

точке $B^* \in \omega_2 \cap \omega_3$. Обозначим получившуюся дугу также через Г. Из замечаний, сделанных выше, следует, что образ точки A после всех отражений должен совпасть с B^*.

4.2. Достаточные условия

В этом разделе рассматриваются частные случаи треугольников, для которых удается доказать существование описанной выше бильярдной траектории Г.

I. Сферические треугольники Кокстера

Предположим, что исходный сферический треугольник $\mathcal{A}$ является треугольником Кокстера. Тогда известно (см. [3]), что тройка его углов совпадает с одной из следующих

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \qquad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right), \qquad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right), \qquad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{k}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \quad k > 1.$$

Из замечания 5 следует, что бесконечная серия в нашем случае не реализуется. Легко убедиться, что вторая и третья тройки нам также не подходят: в обоих случаях B^* совпадает с образом точки B под действием соответствующих отражений, а не с образом точки A.

Первая тройка подходит. Действительно, слово $w = bca$ задает соответствующую последовательность отражений. В этом случае массы всех частиц равны. Таким образом, треугольники Кокстера никаких решений, кроме тривиального, не дают.

II. Однопараметрическое семейство решений

Рассмотрим отражения треугольника $\mathcal{A}$, заданные словами $w = (bc)^n a, \quad n \in \mathbb{N}$. Несложно заметить (см. рис. 6), что, если вершина A под действием отображения $R_a \circ (R_c \circ R_b)^n$ совпадает с B^*, то

$$(2n+1)\alpha = \pi, \qquad c + 2b = \pi, \qquad \varphi_- = \varphi_+, \qquad \kappa = 2n.$$

Из второго равенства имеем $\cos c = 1 - 2\cos^2 b$. Подставляя выражения для $\cos c$ и $\cos b$ из леммы 4, получаем[4], что $m_1 = m_3$. Используя это и формулу (6) для угла $\alpha = \pi/(2n+1)$, находим, что массы m_1 и m_2 связаны соотношением (11).

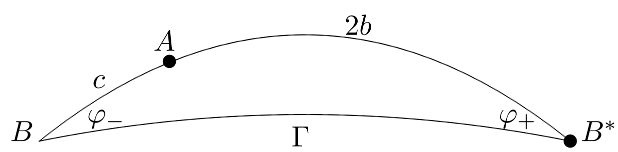


Рис. 6: отражения $\mathcal{A}$, соответствующие слову $w = (bc)^n a$.

Этот результат уже был получен нами ранее при рассмотрении трех частиц на прямой (см. §3). Естественно, аналогичный результат справедлив, если рассмотреть отражения, заданные словами $w = b(ca)^n, \quad n \in \mathbb{N}$: в этом случае $m_1 = m_2$, а m_1 и m_3 связаны равенством (11).

III. Двухпараметрическое семейство решений

Рассмотрим последовательность отражений треугольника $\mathcal{A}$, которая задается словом $w = (bc)^p a (bc)^q a, \quad (p, q) \in \mathbb{N}^2$. Тогда $\kappa = 2p + 2q + 2$. Далее мы ищем такие натуральные p и q, для которых соответствующее слово w кодирует бегущую волну в системе частиц с массами m_1, m_2 и m_3.

Предположим, что w кодирует решение типа п. б. в. Совершая $2p$ отражений, соответствующих слову $(bc)^p$, получим $2p + 1$ копий $\{\mathcal{A}_s\}_{s=0}^{2p}$ треугольника $\mathcal{A}$ с общей вершиной A. Обозначим вершины треугольника $\mathcal{A}_{2p}$ через A, B' и C'. Следующее отражение происходит

[4] В обозначениях леммы 4, $c = \beta_{1,3}, \quad b = \beta_{2,3}$.

относительно стороны a: так как $\angle C' = \pi/2$, то сторона $C'A'$ получившегося при этом отражении треугольника $\mathcal{A}_{2p+1}$ является продолжением стороны AC' треугольника $\mathcal{A}_{2p}$. Совершая $2q$ отражений треугольника $\mathcal{A}_{2p+1}$, соответствующих слову $(bc)^q$, получим треугольники $\mathcal{A}_{2p+2}, \ldots, \mathcal{A}_{\kappa-1}$ с общей вершиной A'. Обозначим вершины треугольника $\mathcal{A}_{\kappa-1}$ через A', B'' и C''. Отражая $\mathcal{A}_{\kappa-1}$ относительно стороны a, получим треугольник $\mathcal{A}_\kappa$ с вершинами A'', B'' и C''. Так как w кодирует п. б. в., то A'' совпадает с B^*. При этом, так как $\angle C'' = \pi/2$, то сторона $C''A''$ является продолжением $A'C''$.

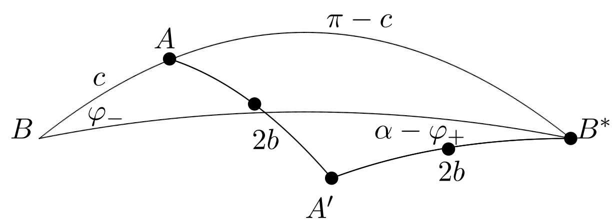


Рис. 7: отражения $\mathcal{A}$, соответствующие слову $w = (bc)^p a (bc)^q a$.

Сотрем треугольники $\{\mathcal{A}_s\}_{s=0}^{\kappa}$, оставляя лишь стороны $AB, AC', C'A', A'C'', C''A''$, проведем Γ — дугу BB^*, а также соединим дугой большого круга точки A и B^*. На рисунке 7 изображено то, что будет на сфере после этого. Заметим, что

$$\smile AA' = \smile A'B^* = 2b, \qquad \smile AB = c, \qquad \smile BB^* = \pi \tag{26}$$

$$\angle BAA' = (2p+1)\alpha, \qquad \angle AA'B^* = 2q\alpha, \qquad \angle ABB^* = \varphi_-, \qquad \angle BB^*A' = \alpha - \varphi_+.$$

Так как $\Delta AA'B^*$ — равнобедренный, то $\varphi_- - \varphi_+ = \pi - 2(p+1)\alpha$. Записывая теоремы синусов и косинусов для $\Delta AA'B^*$ и пользуясь (26), получаем

$$\sin(2p+1)\alpha = \frac{\sin 2q\alpha \sin 2b}{\sin c}, \qquad \sin^2(2p+1)\alpha = \frac{1+\cos 2q\alpha}{1-\cos c}. \tag{27}$$

Выражения в правых частях определены, так как $c \neq 0, \pi$, иначе ΔABC вырождается в отрезок или двуугольник. Отметим также, что $\cos 2q\alpha \neq -1$, так как в противном случае $2q\alpha = \pi$, то есть A' лежит на дуге AB^*. Тогда $(2p+1)\alpha = \pi$, и поэтому $2q\alpha = (2p+1)\alpha$, но это уравнение не имеет решений в целых числах p и q для $\alpha > 0$.

Возводя первое уравнение (27) в квадрат и приравнивая его со вторым уравнением, производя простые преобразования, пользуясь тригонометрическими формулами и сокращая на $(1+\cos 2q\alpha)/(1-\cos c)$, имеем

$$\sin^2 q\alpha = \frac{\cos^2 \frac{c}{2}}{\sin^2 2b}. \tag{28}$$

Подставляя (28) во второе уравнение (27), получаем

$$\sin^2(2p+1)\alpha = \frac{\sin^2 2b - \cos^2 \frac{c}{2}}{\sin^2 2b \sin^2 \frac{c}{2}}. \tag{29}$$

Добавим к уравнениям (28)-(29) следствие теорем косинусов и синусов для треугольника ΔABC:

$$\cos^2\alpha = \operatorname{tg}^2 b \operatorname{ctg}^2 c. \tag{30}$$

Таким образом, при фиксированных $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ система уравнений (28)-(30) замкнута относительно α, b и c. Разрешая уравнения (28)-(29) относительно $\cos 2b$ и $\sin\frac{c}{2}$, а также опуская простые вычисления, получаем, что

$$\cos^2 2b = \operatorname{ctg}^2(2p+1)\alpha \operatorname{ctg}^2 q\alpha, \qquad \sin^2\frac{c}{2} = \frac{\cos^2 q\alpha}{\sin^2(2p+1)\alpha}. \tag{31}$$

Подставляя уравнения (31) в (30), получим уравнение, которому должен удовлетворять угол α. Здесь мы это уравнение не приводим в силу громоздкости. Если у получившегося уравнения есть решение $\alpha = \alpha(p, q)$, то после подстановки в (31) находим оставшиеся параметры, определяющие ΔABC.

Отметим, что у системы (28)-(30) есть решение при $p = q = 1$: $\alpha = \pi/6$, $b = \pi/4$, $c = 2\pi/3$. Оно соответствует случаю, когда $m_2 = m_3 = (\sqrt{5}-2)m_1$, а $\kappa = 6$.

Численный счет показывает, что при $p = 1, q = 2$ у системы (28)-(29) также есть решение. В этом случае $0.109 < m_2/m_1 < 0.111$, $0.383 < m_3/m_1 < 0.385$, а $\kappa = 8$.

Гипотеза. *Для любого* $\kappa \in 2\mathbb{N}, \kappa > 4$ *найдется пара* $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $2p+2q+2 = \kappa$*, при которой система уравнений (28)-(30) имеет решение* $0 < \alpha < \pi/2, 0 < b \leqslant \pi/4, 0 < c < \pi$.

Из физических соображений следует, что если система уравнений (28)-(30) имеет решение для пары (p, q), то тогда система, которая получена из исходной заменой p на q, а q на p также должна иметь решение (вообще говоря, другое): это решение соответствует системе частиц на прямой, отличающейся от первоначальной системы взаимной заменой частиц #2 и #3.

Гипотеза. *Любое решение* $0 < \alpha < \pi/2, 0 < b \leqslant \pi/4, 0 < c < \pi$ *уравнений (28)-(30) соответствует некоторой системе частиц на прямой с массами* m_1, m_2, m_3 $(m_2, m_3 < m_1)$*, для которой существует решение типа п. б. в.*

5. Оценка пройденных расстояний

Оценим пройденные расстояния каждой из частиц группы в случае произвольного $N > 2$, если система частиц допускает решение типа п. б. в. В частности, получим оценку сверху на расстояние, пройденное частицей $\#(N+1)$.

Пусть момент времени $t = 0$ соответствует первому столкновению частиц в системе, а момент времени $t = T$ — последнему. Обозначим через $R_k = \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_{k-1}$ расстояние между частицами #2 и #k, $3 \leqslant k \leqslant N+1$ при $t = 0$, а через $S_j = x_j(T) - x_j(0)$ — расстояние, пройденное частицей #j за время T, $1 \leqslant j \leqslant N+1$. Введем обозначения: $m_* = \min\{m_2, m_N\}$, $m_{\max} = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\{m_j\}$.

Теорема 4. *Для решения типа п. б. в. в системе частиц с массами* $\{m_j\}_{j=1}^{N+1}$, $N > 2$ *выполнены неравенства*

$$S_j < 2(N-2)R_{N+1}\sqrt{\frac{m_1 m_{\max}(M - m_1 - m_*)}{m_j m_*(M - m_1)}}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N+1. \tag{32}$$

Таким образом, если в системе из $(N+1)$-ой частицы существует решение типа п. б. в., то в соответствующей системе из бесконечного числа частиц оно тоже существует. Действительно, если группы частиц расположить на одинаковом друг от друга расстоянии, равном $2(N-2)R_{N+1}m_{\max}/m_{\min}$, то, какая бы ни была последовательность ударов частиц внутри группы, полная энергия группы успеет полностью передаться последней частице этой же группы до столкновения с 1-ой частицей следующей группы.

Доказательство. Воспользовавшись предложением 1, сведем изучение динамики частиц на прямой к рассмотрению бильярдной траектории точки $\tilde{M}$ в угле $\tilde{Q}$. Последовательные точки удара бильярдной траектории о грани угла $\tilde{Q}$ обозначим, как в доказательстве теоремы 2, через $\{\tilde{M}_s\}_{s=1}^{\kappa}$, где κ — число ударов в системе частиц на прямой.

Без ограничения общности будем считать, что первая точка столкновения частиц #1 и #2 совпадает с точкой $x = 0$. В этом случае

$$O\tilde{M}_1 = \big(0, 0, \sqrt{m_3}R_3, \sqrt{m_4}R_4, \dots, \sqrt{m_{N+1}}R_{N+1}\big), \tag{33}$$

$$O\tilde{M}_\kappa = O\tilde{M}_1 + (\sqrt{m_1}S_1, \sqrt{m_2}S_2, \dots, \sqrt{m_{N+1}}S_{N+1}),$$

поэтому

$$\tilde{M}_1\tilde{M}_\kappa = (\sqrt{m_1}S_1, \sqrt{m_2}S_2, \dots, \sqrt{m_{N+1}}S_{N+1}), \qquad \|\tilde{M}_1\tilde{M}_\kappa\|^2 = \sum_{j=1}^{N+1} m_j S_j^2. \tag{34}$$

Обозначая через $\hat{M}_s$ проекцию точки $\tilde{M}_s$ на плоскость Π с вектором нормали m, получаем, что длины $\hat{L}, \tilde{L}$ ломаных $\hat{M}_1\hat{M}_2\dots\hat{M}_\kappa$ и $\tilde{M}_1\tilde{M}_2\dots\tilde{M}_\kappa$ связаны равенством

$$\hat{L} = \tilde{L}\cos(\pi/2 - \gamma), \qquad \cos\gamma = \sqrt{\frac{m_1}{M}}, \tag{35}$$

где γ — угол между векторами m и $\tilde{v} = (\sqrt{m_1}, 0, \dots, 0)$, а M определено в (3). Дальнейшая часть доказательства посвящена оценке длины $\hat{L}$.

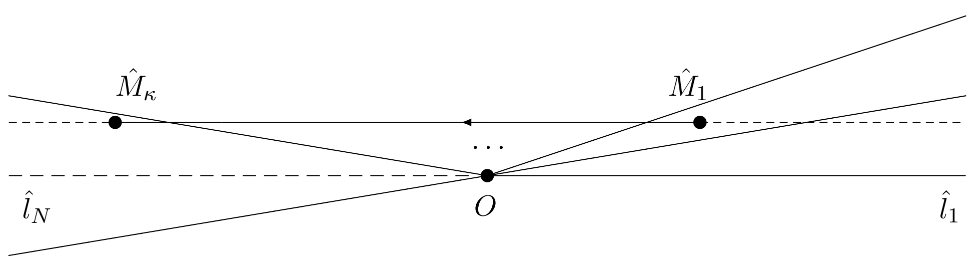


Рис. 8: выпрямление траектории в $\mathbb{R}^N$.

Согласно предложению 2, траектория точки $\hat{M}$ в угле $\hat{Q}$ является бильярдной. Выпрямим ломаную $\hat{M}_1\hat{M}_2\dots\hat{M}_\kappa$, последовательно отражая угол $\hat{Q}$ относительно тех граней, по которым происходит удар. Из леммы 2 следует, что выпрямленная траектория параллельна $\hat{l}_1$ и $\hat{l}_N$, поэтому образ $\hat{l}_N$ под действием соответствующих отражений совпадет с $\hat{l}_1$ (см. рис. 8).

Вычислим расстояние d от точки $\hat{M}_1$ до прямой $\hat{l}_1$ по формуле

$$d^2 = \|O\hat{M}_1\|^2 - \Big(O\hat{M}_1, \frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|}\Big)^2. \tag{36}$$

Так как

$$O\hat{M}_1 = O\tilde{M}_1 - \Big(O\tilde{M}_1, m\Big)\frac{m}{M}, \qquad \hat{v} = \tilde{v} - m_1\frac{m}{M},$$

то, используя (33), получаем, что

$$\|O\hat{M}_1\|^2 = \frac{1}{M^2}\sum_{k=3}^{N+1} m_k(M - m_k)^2 R_k^2, \qquad \|\hat{v}\|^2 = \frac{m_1(M - m_1)}{M}, \tag{37}$$

$$\left(O\hat{M}_1, \hat{v}\right) = -\frac{m_1}{M^2} \sum_{k=3}^{N+1} m_k(M - m_k)R_k. \tag{38}$$

Подставим (37) и (38) в (36):

$$d^2 = \frac{1}{M^2} \sum_{k=3}^{N+1} m_k(M - m_k)^2 R_k^2 + \frac{m_1}{(M - m_1)M^3} \Big(\sum_{k=3}^{N+1} m_k(M - m_k)R_k \Big)^2. \tag{39}$$

Используя очевидные неравенства

$$m_k \leqslant m_{\max}, \qquad m_1 < M - m_k < M, \qquad R_k \leqslant R_{N+1}, \qquad 3 \leqslant k \leqslant N+1,$$

а также раскрывая скобки и группируя слагаемые, несложно получить грубую оценку на правую часть (39):

$$d^2 < m_{\max}(N-2)^2 R_{N+1}^2. \tag{40}$$

Угол ψ_1 между вектором $O\hat{M}_1$ и прямой $\hat{l}_1$ находится из (37)-(38). Ясно, что ψ_1 не меньше угла φ_1 между $\hat{l}_1$ и плоскостью $\hat{\Pi}_1$ (см. (5)). Абсолютно аналогично, угол ψ_κ между вектором $O\hat{M}_\kappa$ и прямой $\hat{l}_N$ не меньше угла φ_N между $\hat{l}_N$ и плоскостью $\hat{\Pi}_N$. Из леммы 5 находим, что

$$\sin\varphi_1 = \sqrt{\frac{Mm_2}{(m_1 + m_2)(M - m_1)}}, \qquad \sin\varphi_N = \sqrt{\frac{Mm_N}{(m_1 + m_N)(M - m_1)}}.$$

Положим $\varphi = \min\{\varphi_1, \varphi_2\}, 0 < \varphi < \pi/2$, $m_\star = \min\{m_2, m_N\}$. Так как $f(x) = x/(m_1 + x)$ — монотонно возрастающая функция на $\mathbb{R}_+$, то

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{Mm_\star}{(m_1 + m_\star)(M - m_1)}} \tag{41}$$

и $\hat{L} \leqslant 2d \operatorname{ctg}\varphi$. Таким образом, используя (34), (35), (40) и (41), окончательно получаем

$$\sqrt{m_j} S_j \leqslant \tilde{L} \leqslant \frac{2d \operatorname{ctg}\varphi}{\sin\gamma} < 2\sqrt{m_{\max}}(N-2)R_{N+1} \cdot \sqrt{\frac{M}{M - m_1}} \cdot \sqrt{\frac{m_1(M - m_1 - m_*)}{Mm_*}}.$$

Производя сокращения, получаем (32). Теорема 4 доказана. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Friesecke G., Wattis J., Existence theorem for solitary waves on lattices. Commun. Math. Phys. 161, 391-418 (1994).

2. Friesecke G., Matthies K., Atomic-scale localization of high-energy solitary waves on lattices. Physica D 171, (2002) 211-220.

3. Э. Б. Винберг. Калейдоскопы и группы отражений. Матем. просв., 7, МЦНМО, М., 2003, 45-63.

4. Г. А. Гальперин. Упругие столкновения частиц на прямой. УМН, 33:1(199)(1978), 211-212

5. Г. А. Гальперин. О системах локально взаимодействующих и отталкивающихся частиц, движущихся в пространстве. Тр. ММО, 43, Издательство Московского университета, М., 1981, 142–196.

6. Г. А. Гальперин. Биллиарды и упругие столкновения частиц и шаров. Матем. просв., сер. 3, 5, МЦНМО, М., 2001, 65–99.

7. Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков. Математические бильярды. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.—228 с.— (Б-чка «Квант». Вып. 77)

8. Herrmann M., Matthies K., Uniqueness of solitary waves in the high-energy limit of FPU-type chains. arXiv:1611.03514v1

9. Iooss G., Travelling waves in the Fermi-Pasta-Ulam lattice, Nonlinearity 13 (2000) 849-866.

10. Iooss G., Kirchgässner K., Travelling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators, Comm. Math. Phys. (2000) 439-464.

11. В. В. Козлов, Д. В. Трещёв. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами, Изд-во Моск. ун-та, М., 1991, 168 с.

12. Pankov A., Travelling waves and periodic oscillations in Fermi-Pasta-Ulam lattices, The Imperial College Press, London, 2005, 194 p.

13. Я. Г. Синай. Биллиардные траектории в многогранном угле. УМН, 33:1(199)(1978), 229-230.

14. М. Б. Севрюк. К оценке числа столкновений n упругих частиц на прямой. ТМФ, 96:1 (1993), 64–78.

15. Treschev D., Travelling waves in FPU lattices. Discrete Contin. Dyn. Syst., 11:4 (2004), 867–880.

REFERENCES

1. Friesecke G., Wattis J., Existence theorem for solitary waves on lattices. Commun. Math. Phys. 161, 391-418 (1994).

2. Friesecke G., Matthies K., Atomic-scale localization of high-energy solitary waves on lattices. Physica D 171, (2002) 211-220.

3. É. B. Vinberg, Kaleidoscopes and reflection groups, Mat. Prosveshchenie, 7, MCCME, Moscow, 2003, 45-63.

4. G. A. Galperin. Elastic collisions of particles on a line. Russian Math. Surveys, 33:1 (1978), 199–200

5. G. A. Galperin. Systems of locally interacting and repelling particles that are moving in space. Tr. Mosk. Mat. Obs., 43, MSU, M., 1981, 142–196

6. G. A. Galperin. Billiards and elastic collisions of particles and balls. Mat. Pros., Ser. 3, 5, MCCME, Moscow, 2001, 65–99

7. G. A. Galperin, A. N. Zemlyakov. Mathematical billiards. — M.: Nauka, 1990. pp. 228.

8. Herrmann M., Matthies K., Uniqueness of solitary waves in the high-energy limit of FPU-type chains. arXiv:1611.03514v1

9. Iooss G., Travelling waves in the Fermi-Pasta-Ulam lattice, Nonlinearity 13 (2000) 849-866.

10. Iooss G., Kirchgässner K., Travelling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators, Comm. Math. Phys. (2000) 439-464.

11. V. V. Kozlov and D. V. Treshchev, Billiards: A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts. Translations of Mathematical Monographs, vol. 89. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991.

12. Pankov A., Travelling waves and periodic oscillations in Fermi-Pasta-Ulam lattices, The Imperial College Press, London, 2005, 194 p.

13. Ya. G. Sinai. Billiard trajectories in a polyhedral angle. Russian Math. Surveys, 33:1 (1978), 219–220

14. M. B. Sevryuk. Estimate of the number of collisions of n elastic particles on a line. Theoret. and Math. Phys., 96:1 (1993), 818–826

15. Treschev D., Travelling waves in FPU lattices. Discrete Contin. Dyn. Syst., 11:4 (2004), 867–880.

Получено 23.11.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 512.64+514.745 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-362-382

Классификация k-форм на $\mathbb{R}^n$ и существование ассоциированной геометрии на многообразиях[1]

Хонг Ван Ле, И. Ванжура

Ле Хонг Ван — доктор наук, профессор, Институт математики Чешской академии наук, (г. Прага, Чехия).
e-mail: hvle@math.cas.cz
Ванжура Иржи — доктор наук, профессор, Институт математики Чешской академии наук, (г. Прага, Чехия).
vanzura@math.cas.cz

Аннотация

В этой статье мы рассмотрим методы и результаты классификации k-форм (соотв. k-векторов на $\mathbb{R}^n$), понимаемых как описание пространства орбит стандартного $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-действие на $\Lambda^k \mathbb{R}^{n*}$ (соотв. на $\Lambda^k \mathbb{R}^n$). Мы обсудим существование связанной геометрии, определяемой дифференциальными формами на гладких многообразиях. Эта статья также содержит Приложение, написанное Михаил Боровым, о методах когомологии Галуа для нахождения вещественных форм комплексных орбит.

Ключевые слова: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-орбиты в $\Lambda^k \mathbb{R}^{n*}$; θ-группа; геометрия, определяемая дифференциальными формами; когомологии Галуа

Библиография: 68 названий.

Для цитирования:
Хонг Ван Ле, И. Ванжура. Классификация k-форм на $\mathbb{R}^n$ и существование ассоциированной геометрии на многообразиях // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 2, с. 362–382.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 512.64+514.745 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-362-382

Classification of k-forms on $\mathbb{R}^n$ and the existence of associated geometry on manifolds[2]

Hông Vân Lê, J. Vanžura

Lê Hông Vân — Doctor of Sciences, Professor, Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, (Praha, Czech Republic).
e-mail: hvle@math.cas.cz
Vanžura Jiří — Doctor of Sciences, Professor, Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, (Praha, Czech Republic).
vanzura@math.cas.cz

[1]Исследование ХВЛ было поддержано GAČR-project 18-00496S и RVO:67985840.
[2]The research of HVL was supported by the GAČR-project 18-00496S and RVO:67985840.

Abstract

In this paper we survey methods and results of classification of k-forms (resp. k-vectors on $\mathbb{R}^n$), understood as description of the orbit space of the standard $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-action on $\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$ (resp. on $\Lambda^k\mathbb{R}^n$). We discuss the existence of related geometry defined by differential forms on smooth manifolds. This paper also contains an Appendix by Mikhail Borovoi on Galois cohomology methods for finding real forms of complex orbits.

Keywords: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-orbits in $\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$; θ-group; geometry defined by differential forms; Galois cohomology

Bibliography: 68 titles.

For citation:

Hông Vân Lê, J. Vanžura, 2019, "Classification of k-forms on $\mathbb{R}^n$ and the existence of associated geometry on manifolds" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 362–382.

Preface

Hamiltonian systems were one of research topics of Hông Vân Lê in her undergraduate study and calibrated geometry was the topic of her Ph.D. Thesis under guidance of Professor Anatoly Timofeevich Fomenko. Hamiltonian systems are defined on symplectic manifolds and calibrated geometry is defined by closed differential forms of comass one on Riemannian manifolds. Since that time she works frequently on geometry defined by differential forms, some of her papers were written in collaboration with Jiři Vanžura, [38, 39, 40]. We dedicate this survey on algebra and geometry of k-forms on $\mathbb{R}^n$ as well as on smooth manifolds to Anatoly Timofeevich Fomenko on the occasion of his 75th birthday and we wish him good health, happiness and much success for the coming years.

1. Introduction

Differential forms are excellent tools for the study of geometry and topology of manifolds and their submanifolds as well as dynamical systems on them. Kähler manifolds, and more generally, Riemannian manifolds (M,g) with non-trivial holonomy group admit parallel differential forms and hence calibrations on (M,g) [27], [55], [40], [17]. In the study of Riemannian manifolds with non-trivial holonomy groups these parallel differential forms are extremely important [7], [29]. In their seminal paper [27] Harvey-Lawson used calibrations as powerful tool for the study of geometry of calibrated submanifolds, which are volume minimizing. Their paper opened a new field of calibrated geometry [30] where one finds more and more tools for the study of calibrated submanifolds using differential forms, see e.g., [17]. In 2000 Hitchin initiated the study of geometry defined by a differential 3-form [25], and in a subsequent paper he analyzed beautiful geometry defined by differential forms in low dimensions [26]. One starts investigation of a differential form φ^k of degree k on a manifold M^n of dimension n by finding a *normal form* of φ^k at a point $x\in M^n$ and, if possible, to find a normal form of φ^k up to certain order in a small neighborhood $U(x)\subset M^n$. Finding a normal form of φ^k at a point $x\in M^n$ is the same as finding a canonical representative of the equivalence class of $\varphi^k(x)$ in $\Lambda^k(T^*_xM^n)$, where two k-forms on T_xM^n are *equivalent* if they are in the same orbit of the standard $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-action on $\Lambda^k(T^*_xM^n)=\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$. We say that a manifold M^n is endowed by a differential form $\varphi\in\Omega^*(M^n)$ of type $\varphi_0\in\Lambda^*\mathbb{R}^{n*}$, if for all $x\in M^n$ the equivalence class of $\varphi(x)\in\Lambda^*T^*_xM^n$ can be identified with the equivalent class of $\varphi_0\in\Lambda^*\mathbb{R}^{n*}$ via a linear isomorphism $T_xM^n=\mathbb{R}^n$. Instead of investigation of a normal form of a concrete form φ^k, we may be also interested in a classification of (equivalent) k-forms on $\mathbb{R}^n$, understood as a description of the moduli space of equivalent k-forms on $\mathbb{R}^n$, which could give us insight on a normal form of φ^k and could also suggest interesting candidates for the geometry defined by differential forms.

Classification of k-forms on $\mathbb{R}^n$ is a part of algebraic invariant theory. Recall that *an invariant* of an equivalence relation on a set S, e.g., defined by orbits of an action of a group G on S, is a mapping from S to another set Q that is constant on the equivalence classes. A system of invariants is called *complete* if it separates any two equivalent classes. If a complete system of invariants consists of one element, we call this invariant complete. In the classical algebraic invariant theory one deals mainly with actions of classical or algebraic groups on some space of tensors of a fixed type over a vector space over a field $\mathbb{F}$ [23], see [48] for a survey of modern invariant theory and source of algebraic invariant theory. From a geometric point of view, the most important invariants of a form φ^k on $\mathbb{R}^n$ are *the rank of* φ^k and *the stabilizer* of φ^k under the action of $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Recall that the rank of φ^k, denoted by $\operatorname{rk}\varphi^k$, is the dimension of the image of the linear operator $L_{\varphi^k} : \mathbb{R}^n \to \Lambda^{k-1}\mathbb{R}^{n*}$, $v \mapsto i_v\varphi^k$. We denote the stabilizer of φ^k by $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(\varphi^k)$, and in general, we denote by $\mathrm{St}_G(x)$ the stabilizer of a point x in a set S where a group G acts. A form $\varphi^k \in \Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$ is called *non-degenerate*, or *multisymplectic*, if $\operatorname{rk}\varphi^k = n$. Furthermore, it is important to study the topology of the orbit $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cdot \varphi^k = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{St}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(\varphi^k)$, for example, the connectedness, see Proposition 2 below, the openness, the closure of the orbit $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cdot \varphi^k \subset \Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$. It turns out that understanding these questions helps us to understand the structure of the orbit space of $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-action on $\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$. These invariants of k-forms shall be highlighted in our survey.

Let us outline the plan of our paper. In the first part of Section 2 we make several observations on the duality between $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-orbits of k-forms on $\mathbb{R}^n$ and $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-orbits of k-vectors as well as the duality between $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$-orbits of k-forms on $\mathbb{R}^n$ and $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$-orbits of $(n-k)$-forms on $\mathbb{R}^n$. Then we recall the classification of 2-forms on $\mathbb{R}^n$ (Theorem 2) and present the Martinet's classification of $(n-2)$-forms on $\mathbb{R}^n$ (Theorem 3).

In contrast to the classification of 2-forms on $\mathbb{R}^n$, the classification of 3-forms on $\mathbb{R}^n$ depends on the dimension n. Since $\dim\Lambda^3\mathbb{R}^{n*} \geqslant \dim\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) + 1$, if $n \geqslant 9$, there are infinite numbers of inequivalent 3-forms in $\mathbb{R}^n$. Till now there is no classification of the $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-action on $\Lambda^3\mathbb{R}^{n*}$, if $n \geqslant 10$.

In the dimension $n = 9$ the classification of the $\mathrm{SL}(9,\mathbb{C})$-orbits on $\Lambda^3\mathbb{C}^9$ has been obtained by Vinberg-Elashvili [65]. In the second part of Section 2 we survey Vinberg-Elashvili's result and some further developments by Le [34] and Dietrich-Facin-de Graaf [12], which give partial information on $\mathrm{GL}(9,\mathbb{R})$-orbits on $\Lambda^3\mathbb{R}^9$. Then we review Djokovic' classification of 3-vectors in $\mathbb{R}^8$ and present a classification of 5-forms on $\mathbb{R}^8$ (Corollary 1). Djokovic's classification method combines some ideas from Vinberg-Elashvili's work and Galois cohomology method for classifying real forms of a complex orbit. Note that the classification of 3-vectors in $\mathbb{R}^8$ implies the classification of 3-forms in $\mathbb{R}^8$ (Proposition 1) as well as the classifications of 3-forms in $\mathbb{R}^n$ for $n \leqslant 7$ (Theorem 1, Remark 5). Then we review a classification of $\mathrm{GL}(8,\mathbb{C})$-action on $\Lambda^4\mathbb{C}^8$ by Antonyan [1], which is important for classification of 4-forms on $\mathbb{R}^8$. At the end of Section 2 we review a scheme of classification of 4-forms on $\mathbb{R}^8$ proposed by Lê in 2011 [34] and Dietrich-Facin-de Graaf's method of classification of 3-forms on $\mathbb{R}^8$ in [12].

In Section 3, for $k = 2, 3, 4$, we compile known results and discuss some open problems on necessary and sufficient topological conditions for the existence of a differential k-form φ of given type $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(\varphi(x))$ on manifolds M^n (in these cases the equivalence class of $\varphi(x)$ is defined uniquely by the type of the stablizer of $\varphi(x)$, i.e., the conjugation class of $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(\varphi(x))$ in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$). In dimension $n = 8$ (and hence also for $n = 6, 7$) we observe that the stabilizer $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(\varphi)$ of a 3-form $\varphi \in \Lambda^3\mathbb{R}^{n*}$ forms a complete system of invariants of the action of $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ on $\mathbb{R}^n$ (Remark 6).

We include two appendices in this paper. The first appendix contains a result due to Hông Vân Lê concerning the existence of 3-form of type $\tilde{G}_2$ on a smooth 7-manifold, which has been posted in arxiv in 2007 [33]. The second appendix outlines the Galois cohomology method for classification of real forms of a complex orbit. This appendix is taken from a private note by Mikhail Borovoi with his kind permission.

Finally we would like to emphasize that our paper is not a bibliographical survey. Some important papers may have been missed if they are not directly related to the main lines of our narrative. We also don't mention in this survey the relations of geometry defined by differential forms to physics and instead refer the reader to [30], [15], [14], [60].

2. Classification of $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-orbits of k-forms on $\mathbb{R}^n$

2.1. General theorems

We begin the classification of $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-orbits on $\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$ with the following observation that the orbit of the standard action of $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ on $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ can be identified with the orbit of the standard action of $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ on $\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$ by using an isomorphism $\mu \in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n*}) = \mathbb{R}^{n*}\otimes\mathbb{R}^{n*} \supset S^2\mathbb{R}^{n*}$. Note that there are several papers and books devoted to the classification of k-vectors on $\mathbb{R}^n$ [23, Chapter VII] [3], [11], [65]. Hence we have the following well-known fact, see e.g., [45],

Proposition 1. *There exists a bijection between the* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-orbits in* $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ *and* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-orbits in* $\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$.

Next we shall compare $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$-orbits on $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ with $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$-orbits on $\Lambda^{n-k}\mathbb{R}^{n*}$. We take a volume form $\Omega\in\Lambda^n\mathbb{R}^{n*}\setminus\{0\}$ and define the Poincaré isomorphism $P_\Omega : \Lambda^k\mathbb{R}^n \to \Lambda^{n-k}\mathbb{R}^{n*}, \xi\mapsto i_\xi\Omega$. Since $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ is a direct product of its center $Z(\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})) = \mathbb{R}^+$ with its semisimple subgroup $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, for any $\lambda\in\mathbb{R}$ the group $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ admits a λ-twisted action on $\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$ defined as follows: $g_{[\lambda]}(\varphi) := (\det g)^\lambda\cdot g(\varphi)$ for $g\in\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$, $\varphi\in\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$, where $g(\varphi)$ denotes the standard action of g on φ.

Denote also by μ the isomorphism $\Lambda^k\mathbb{R}^n\to\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$ induced from a scalar product μ on $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1. *The composition* $P_\Omega\circ\mu^{-1} : \Lambda^k\mathbb{R}^{n*}\to\Lambda^{n-k}\mathbb{R}^{n*}$ *is a* $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$*-equivariant map where* $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ *acts on* $\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$ *by the standard action and on* $\Lambda^{n-k}\mathbb{R}^{n*}$ *by the* (-1)*-twisted action.*

Proof. Let $\varphi = \mu(X)\in\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$ and $g\in\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$. Then

$$P_\Omega\circ\mu^{-1}(g^*\varphi) = P_\Omega(g^{-1}\circ\mu^{-1}(\varphi)) = i_{g^{-1}\mu^{-1}(\varphi)}\Omega$$

$$= (\det g)^{-1}\cdot g(i_{\mu^{-1}(\varphi)}\Omega) = g_{[-1]}(P_\Omega\circ\mu^{-1}(\varphi)),$$

which proves the first assertion of Lemma 1. □

Proposition 2. *(1) There is a 1-1 correspondence between* $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$*-orbits of k-forms on* $\mathbb{R}^n$ *and* $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$*-orbits of* $(n-k)$*-forms on* $\mathbb{R}^n$*. This correspondence preserves the openness of* $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$*-orbits (and hence the openness of* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-orbits).*

(2) The $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-orbit of* $\varphi^k\in\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$ *has two connected components if and only if* $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(\varphi^k)\subset\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$*. In other cases the* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-orbit of* φ^k *is connected.*

(3) Assume that $\varphi^k\in\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$ *is degenerate. Then the* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-orbit of* φ^k *is connected.*

Proof. 1. The first assertion of Proposition 2 is a consequence of Lemma 1.

2. The second assertion of Proposition 2 follows from the fact that $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ has two connected components.

3. Assume that φ is degenerate. Then $W := \ker L_\varphi$ is non-empty. Let $W^\perp$ be any complement to W in $\mathbb{R}^n$ i.e., $\mathbb{R}^n = W\oplus W^\perp$. Then $\mathrm{GL}(W)\oplus Id_{W^\perp}$ is a subgroup of $St(\varphi)$. Since this subgroup has non-trivial intersection with $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$, this implies the last assertion of Proposition 2 follows from the second one. This completes the proof of Proposition 2. □

[3] under "polyvectors"Gurevich meant both covariant and contravariant polyvectors

The following theorem due to Vinberg-Elashvili reduces a classification of (degenerate) k-forms of rank r in $\mathbb{R}^n$ to a classification of k-forms on $\mathbb{R}^r$. (Vinberg-Elashvili considered only the case $k = 3$ and the $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$-action on $\Lambda^3\mathbb{C}^n$ but their argument works for any k and for $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-action on $\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$.)

Theorem 1. *(cf. [65, §4.4], [53, Lemma 3.2]) There is a 1-1 correspondence between* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-orbits of k-forms of rank less or equal to r on $\mathbb{R}^n$ and* $\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$*-orbits of k-forms on $\mathbb{R}^r$.*

2.2. Classification of 2-forms and $(n-2)$-forms on $\mathbb{R}^n$

From Proposition 2 we obtain immediately the following known theorem [10], cf. [23, Theorem 34.9].

Theorem 2. *(1) The rank of a 2-form $\varphi \in \Lambda^2\mathbb{R}^{n*}$ is a complete invariant of the standard* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-action on $\Lambda^2\mathbb{R}^{n*}$. Hence $\Lambda^2\mathbb{R}^{n*}$ decomposes into $[n/2]+1$* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-orbits.*

(2) The $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-orbit of a 2-form $\varphi \in \Lambda^2\mathbb{R}^{n*}$ has two connected components if and only if $n = 2k$ and φ has maximal rank.*

(3) If φ is of maximal rank, then the $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-orbit of φ is open and its closure contains the* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-orbit of any degenerate 2-form on $\mathbb{R}^n$.*

The classification of $(n-2)$-forms on $\mathbb{R}^n$ has been done by Martinet [41]. Martinet used the inverse Poincaré isomorphism $P_\Omega^{-1} : \Lambda^{n-2}\mathbb{R}^{n*} \to \Lambda^2\mathbb{R}^n$ to define *the length of* $\varphi \in \Lambda^{n-2}\mathbb{R}^n$, denoted by $l(\varphi)$, to be the half of the rank of the bi-vector $P_\Omega^{-1}(\varphi)$ [4]. By Proposition 2 and Theorem 2 the map P_Ω^{-1} induces an isomorphism between the $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-orbits of degenerate $(n-2)$-forms φ on $\mathbb{R}^n$ and degenerate bivectors $P_\Omega^{-1}(\varphi)$ on $\mathbb{R}^n$.

• If $2l(\varphi) < n$ then φ has the following canonical form

$$\varphi = \sum_{i=1}^{l(\varphi)} \alpha_1 \wedge \cdots \alpha_{2i-2} \wedge \alpha_{2i+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_n. \tag{1}$$

By Theorem 2 (2) the orbit $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cdot P_\Omega^{-1}(\varphi)$ is connected, and hence by Proposition 2 the orbit $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cdot \varphi$ is connected.

• If $2l(\varphi) = n$, and $l(\varphi)$ is odd, then using Lemma 1 and Theorem 2(2) we conclude that the set of $(n-2)$-forms of length l consists of two open connected $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-orbits that correspond to the sign of $\lambda = \lambda_\Omega(\varphi)$ where

$$P_\Omega^{-1}(\varphi) = e_1 \wedge e_2 + \cdots + e_{2k-1} \wedge e_{2k},$$

$$\Omega = \lambda\, \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n,$$

$$\varphi = \lambda \sum_{i=1}^{l(\varphi)} \alpha_1 \wedge \cdots \alpha_{2i-2} \wedge \alpha_{2i+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_n \text{ and } \lambda = \pm 1. \tag{2}$$

• If $2l(\varphi) = n$ and $l(\varphi)$ is even, using the same argument as in the previous case, we conclude that the set of (n-2)-forms of length l consists of one open $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-orbit, which has two connected components.

To summarize Martinet's result, we assign the sign $s_\Omega(\varphi)$ of a (n-2)-form $\varphi \in \Lambda^{n-2}\mathbb{R}^n$ to be the number $\lambda_\Omega(\varphi)^{l(\varphi)}$ if $2l(\varphi) = n$, and to be 1, if $2l(\varphi) < n$.

Theorem 3. *(cf. [41, §5]) (1) The length $l(\varphi)$ and the sign $s_\Omega(\varphi)$ of a (n-2)-form $\varphi \in \Lambda^{n-2}\mathbb{R}^{n*}$ form a complete system of invariants of the standard* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-action on $\Lambda^{n-2}\mathbb{R}^{n*}$.*

(2) The $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-orbit of a (n-2)-form $\varphi \in \Lambda^2\mathbb{R}^{n*}$ has two connected components if and only if $n = 2k$, $l(\varphi) = n/2$ and l is even.*

[4] the rank of a k-vector is defined similarly as the rank of a k-form.

2.3. Classification of 3-forms and 6-forms on $\mathbb{R}^9$

We observe that the vector space $\Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$ is a real form of the complex vector space $\Lambda^k\mathbb{C}^{n*}$. Hence, for any $\varphi \in \Lambda^k\mathbb{R}^{n*}$ the orbit $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\cdot\varphi$ lies in the orbit $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\cdot\varphi$. We shall say that $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\cdot\varphi$ is a *real form of the complex orbit* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\cdot\varphi$. It is known that every complex orbit has only finitely many real forms [3, Proposition 2.3]. Thus, the problem of classifying of the $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-orbits in $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ can be reduced to the problem of classifying the real forms of the $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-orbits on $\Lambda^k\mathbb{C}^n$. The classification of $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-orbits on $\Lambda^3\mathbb{C}^n$ is trivial, if $n \leqslant 5$, cf. Proposition 2. For $n=6$ it was solved by W. Reichel [50]; for $n=7$ it was solved by J. A. Schouten [57]; for $n=8$ it was solved by Gurevich in 1935, see also [23]; and for $n=9$ it was solved by Vinberg-Elashvili [65]. In fact Vinberg-Elashvili classified $\mathrm{SL}(9,\mathbb{C})$-orbits on $\Lambda^3\mathbb{C}^9$, which are in 1-1 correspondence with $\mathrm{SL}(9,\mathbb{C})$-orbits in $\Lambda^3\mathbb{C}^{9*}$ and $\mathrm{SL}(9,\mathbb{C})$-orbits on $\Lambda^6\mathbb{C}^{9*}$. Since the center of $\mathrm{GL}(9,\mathbb{C})$ acts on $\Lambda^3\mathbb{C}^9\setminus\{0\}$ with the kernel $\mathbb{Z}_3$, it is not hard to obtain a classification of $\mathrm{GL}(9,\mathbb{C})$-orbits on $\Lambda^3\mathbb{C}^9$, and hence on $\Lambda^3\mathbb{C}^{9*}$ and on $\Lambda^6\mathbb{C}^{9*}$ from the classification of the $\mathrm{SL}(9,\mathbb{C})$-orbits on $\Lambda^3\mathbb{C}^9$.

As we have remarked before, there are infinitely many $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-orbits on $\Lambda^3\mathbb{C}^9$, and to solve this complicated classification problem Vinberg-Elashvili made an important observation that the standard $\mathrm{SL}(9,\mathbb{C})$-action on $\Lambda^3\mathbb{C}^9$ is equivalent to the action of the adjoint group $G_0^{\mathbb{C}}$ (also called the θ-group) of the $\mathbb{Z}_3$-graded complex simple Lie algebra

$$\mathfrak{e}_8 = \mathfrak{g}_{-1}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} \tag{3}$$

where $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(9,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} = \Lambda^3\mathbb{C}^3$, $\mathfrak{g}_{-1}^{\mathbb{C}} = \Lambda^3\mathbb{C}^{9*}$ and $G_0^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(9,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_3$ is the connected subgroup, corresponding to the Lie subalgebra $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$, of the simply connected Lie group $E_8^{\mathbb{C}}$ whose Lie algebra is $\mathfrak{e}_8$.

Remark 1. *Let $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ be a complex Lie algebra. Any $\mathbb{Z}_m$-grading $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \oplus_{i\in\mathbb{Z}_m}\mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}}$ on $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ defines an automorphism $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ of order m by setting $\sigma(x) := \epsilon^i x$ where $\epsilon = \exp(2\sqrt{-1}\pi/m)$ and $x \in \mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}}$. Conversely, any $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ of order m defines a $\mathbb{Z}_m$-grading $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \oplus_{i\in\mathbb{Z}_m}\mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}}$ by setting $\mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}} := \{x \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid \sigma(x) = \epsilon^i x\}$.*

In [65, §2.2] Vinberg and Elashvili considered the automorphism $\theta^{\mathbb{C}}$ of order 3 on $\mathfrak{e}_8$ associated to the $\mathbb{Z}_3$-gradation in (6) [5]. To describe $\theta^{\mathbb{C}}$ we recall the root system Σ of $\mathfrak{e}_8$:

$$\Sigma = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, \pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k)\},\ (i,j,k \text{ distinct}), \sum_{i=1}^{9}\varepsilon_i = 0\}.$$

Remark 2. *Given a complex semisimple Lie algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ let us choose a Cartan subalgebra $\mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$ of $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Let Σ be the root system of $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Denote by $\{H_\alpha, E_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$ the Chevalley system in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ i.e., $H_\alpha \in \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$ and E_α is the root vector corresponding to α such that for any $H \in \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$ we have $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$, $[H_\alpha, E_\alpha] = 2E_\alpha$ and $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$ [28, §32.2]. Then*

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \oplus_{\alpha\in\Sigma_s^+}\langle H_\alpha\rangle_{\mathbb{C}} \oplus_{\alpha\in\Sigma^+}\langle E_\alpha\rangle_{\mathbb{C}} \oplus_{\alpha\in\Sigma^+}\langle E_{-\alpha}\rangle_{\mathbb{C}} \tag{4}$$

where $\Sigma^+ \subset \Sigma$ denote the system of positive roots, and Σ_s^+ - the subset of simple roots.

The automorphism $\theta^{\mathbb{C}}$ of order 3 on $\mathfrak{e}_8$ is defined as follows

$$\theta^{\mathbb{C}}_{|\langle H_\alpha, E_\alpha,\ \alpha=\varepsilon_i-\varepsilon_j\rangle_{\mathbb{C}}} = Id,$$

$$\theta^{\mathbb{C}}_{|\langle E_\alpha, \alpha=(\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k)\rangle_{\mathbb{C}}} = \exp(i2\pi/3)\cdot Id,$$

$$\theta^{\mathbb{C}}_{|\langle E_\alpha, \alpha=-(\varepsilon_i+\varepsilon_j+\varepsilon_k)\rangle_{\mathbb{C}}} = \exp(-i2\pi/3)\cdot Id.$$

[5] Automorphisms of finite order of semisimple Lie algebras have been classified earlier independently by Wolf-Gray [66] and Kac [31].

Remark 3. *Let* $\{H_\alpha, E_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$ *be the Chevalley system of a complex semisimple Lie algebra* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$*. Then* $\{H_\beta, E_\alpha | \alpha \in \Sigma,\ \beta \in \Sigma_s^+\}$ *is a basis of the normal form* $\mathfrak{g}$*, also called split real form, of* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$*. The normal form of the complex simple Lie algebra* $\mathfrak{e}_8$ *is denoted by* $\mathfrak{e}_{8(8)}$*, and the normal form of* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ *is the real simple Lie algebra* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$*. Clearly the Lie subalgebra* $\mathfrak{e}_{8(8)}$ *has the induced* $\mathbb{Z}_3$*-grading from the one on* $\mathfrak{e}_8$ *defined in (3) (note that* $\mathfrak{e}_{8(8)}$ *is not invariant under* $\theta^{\mathbb{C}}$*), i.e., we have*

$$\mathfrak{e}_{8(8)} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \tag{5}$$

where $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{e}_{8(8)} \cap \mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}}$ *is a real form of* $\mathfrak{g}_i^{\mathbb{C}}$ *for* $i \in \{-1, 0, 1\}$*. Hence there is a 1-1 correspondence between* $\mathrm{SL}(9, \mathbb{R})$*-orbits on* $\Lambda^3\mathbb{R}^{9*}$ *and the adjoint action of the subgroup* G_0*, corresponding to the Lie subalgebra* $\mathfrak{g}_0$*, of the Lie group* $G_0^{\mathbb{C}}$*.*

Now let $\mathbb{F}$ be the field $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Based on (5), (3), Remark 3, and following [65, §1], [34, Lemma 2.5], we shall call a nonzero element $x \in \Lambda^3\mathbb{F}^9$ *semisimple*, if its orbit $\mathrm{SL}(9, \mathbb{F}) \cdot x$ is closed in $\Lambda^3\mathbb{F}^9$, and *nilpotent*, if the closure of its orbit $\mathrm{SL}(9, \mathbb{F}) \cdot x$ contains the zero 3-vector. Our notion of semisimple and nilpotent elements agrees with the notion of semisimple and nilpotent elements in semisimple Lie algebras [65], [34], see also [11] for an equivalent definition of semisimple and nilpotent elements in homogeneous components of graded semisimple Lie algebras.

Example 12. *([65, §4.4]) Let* $x \in \Lambda^3\mathbb{F}^9$ *be a degenerate vector of rank* $r \leqslant 8$*, where* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *or* $\mathbb{C}$*. (The definition of the rank of a k-vector can be defined in the same way as the definition of the rank of a k-form). Then for any* $\lambda \in \mathbb{R}$ *there exists an element* $g \in \mathrm{SL}(9, \mathbb{F})$ *such that* $g \cdot x = \lambda \cdot x$*. Hence the closure of the orbit* $\mathrm{SL}(9, \mathbb{F}) \cdot x$ *contains* $0 \in \Lambda^3\mathbb{F}^9$ *and therefore x is a nilpotent element.*

Proposition 3. *Every nonzero* 3*-vector* x *in* $\Lambda^3\mathbb{F}^9$ *can be uniquely written as* $x = p + e$*, where* p *is a semisimple* 3*-vector,* e *- a nilpotent 3-vector, and* $p \wedge e = 0$*.*

Proposition 3 has been obtained by Vinberg-Elashvili in [65] for the case $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. To prove Proposition 3 for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, we use the Jordan decomposition of a homogeneous element in a real $\mathbb{Z}_m$-graded Lie semisimple algebra and a version of the Jacobson-Morozov-Vinberg theorem for real graded semisimple Lie algebras [34, Theorem 2.1].

Using Proposition 3, Vinberg-Elashvili proposed the following scheme for their classification of 3-vectors on $\mathbb{C}^9$. First they classified semisimple 3-vectors p. The $\mathrm{SL}(9, \mathbb{C})$-equivalence class of semisimple 3-vectors p has dimension 4 - the dimension of a maximal subspace consisting of commuting semisimple elements in $\mathfrak{g}_1$. Then the equivalence classes of semisimple elements p are divided into seven types according to the type of the stabilizer subgroup $\mathrm{St}(p)$ and the subspace $E(p) := \{x \in \Lambda^3\mathbb{C}^9 | p \wedge x = 0\}$. We assign a 3-vector on $\mathbb{F}^9$ to the same family as its semisimple part. Then Vinberg-Elashvili described all possible nilpotent parts for each family of 3-vectors. When the semisimple part is p, the latter are all the nilpotent 3-vectors e of the space $E(p)$. The classification is made modulo the action of $\mathrm{St}_{\mathrm{SL}(9,\mathbb{C})}(p)$. Note that there is only finite number of nilpotent orbits in $E(p)$ for any semisimple 3-vector p. Therefore the dimension of the orbit space $\Lambda^3\mathbb{C}^9/\mathrm{SL}(9, \mathbb{C})$ is 4, which is the dimension of the space of all semisimple 3-vectors.

To classify semisimple elements $p \in \Lambda^3\mathbb{C}^9$ and nilpotent elements in $E(p)$ Vinberg-Elashvili developed further the general method invented by Vinberg [61, 62, 63, 64] for the study of the orbits of the adjoint action of the θ-group on $\mathbb{Z}_m$-graded semisimple complex Lie algebras.

Vinberg's method has been developed by Antonyan for classification of 4-forms in $\mathbb{C}^8$, which we shall describe in more detail in Subsection 2.5, by Lê [34] and Dietrich-Faccin-de Graaf [12] for real graded semisimple Lie algebras. As a result, we have partial results concerning the orbit space of the standard $\mathrm{SL}(9, \mathbb{R})$-action on $\Lambda^3\mathbb{R}^{9*}$ (as well as partial results concerning the orbit space of the standard action of $\mathrm{SL}(8, \mathbb{R})$ on $\Lambda^4\mathbb{R}^{8*}$ we mentioned above). By Proposition 3, and following Vinberg-Elashvili scheme, the classification of the orbits of $\mathrm{SL}(9, \mathbb{R})$-action on $\Lambda^3\mathbb{R}^9$ can be reduced to the classification of semisimple elements p in $\Lambda^3\mathbb{R}^9$, which is the same as the classification of real forms of $\mathrm{SL}(9,\mathbb{C})$-orbits of semisimple elements p in $\Lambda^3\mathbb{C}^9$ (the classification of the $\mathrm{SL}(9,\mathbb{C})$-orbits has been given in [65]) and the classification of nilpotent elements $e \in \Lambda^3\mathbb{R}^9$ such that $e \wedge p = 0$. Note that e is a nilpotent element in the semisimple component $Z(p)'$ of the zentralizer $Z(p)$ of the semisimple element p. Thus the latter problem is reduced to the classification of real forms of complex nilpotent orbits in $\mathbb{Z}(p)'_{\otimes\mathbb{C}}$, and the classification of the latter orbits has been done in [65]. Lê's method [34] and Dietrich-Faccin-de Graaf's method of classification of nilpotent orbits of real graded Lie algebras [12] give partial information on the real forms of these nilpotent orbits. We shall discuss a similar scheme of classification of 4-forms on $\mathbb{R}^8$ in Subsection 2.5. Currently we consider the Galois cohomology method for classification of 3-forms on $\mathbb{R}^9$ promising [4], and therefore we include an appendix outlining the Galois cohomology method in this paper.

2.4. Classification of 3-forms and 5-forms on $\mathbb{R}^8$

The classification of 3-vectors (and hence 3-forms) on $\mathbb{R}^8$ has been given by Djokovic in [11]. Similar to [65], see (3), Djokovic made an important observation that for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (resp. for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) the standard $\mathrm{GL}(8,\mathbb{F})$-action on $\Lambda^3\mathbb{F}^8$ is equivalent to the action of the adjoint group $\mathrm{Ad}\, G_0$ of the $\mathbb{Z}$-graded Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{8(8)}$ (resp. $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_8$) on the homogeneous component $\mathfrak{g}_1$ of degree 1, where

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-3} \oplus \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3. \tag{6}$$

Here $\mathrm{Ad}\, G_0 = \mathrm{GL}(8,\mathbb{F})/\mathbb{Z}_3$ [11, Proposition 3.2], $\mathfrak{g}_{-3} = \mathbb{F}^{8*}$, $\mathfrak{g}_{-2} = \Lambda^2\mathbb{F}^8$, $\mathfrak{g}_{-1} = \Lambda^3\mathbb{F}^{8*}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(8,\mathbb{F})$, $\mathfrak{g}_1 = \Lambda^3\mathbb{F}^8$, $\mathfrak{g}_2 = \Lambda^2\mathbb{F}^{8*}$, $\mathfrak{g}_3 = \mathbb{F}^8$.

Since there is only finite number of $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$-orbits in $\mathfrak{g}_1$, any element in $\mathfrak{g}_1$ is nilpotent. To study nilpotent elements in $\mathfrak{g}_1 = \Lambda^3\mathbb{R}^8$, as Vinberg-Elashvili did for complex nilpotent 3-vectors on $\Lambda^3\mathbb{C}^9$, Djokovic used a real version of Jacobson-Morozov-Vinberg's theorem that associates with each nilpotent element $e \in \mathfrak{g}_1$ a semisimple element $h(e) \in \mathfrak{g}_0$ and a nilpotent element $f \in \mathfrak{g}_{-1}$ that satisfy the following condition [11, Lemma 6.1]

$$[h,e] = 2e,\ [h,f] = -2f,\ [e,f] = h. \tag{7}$$

Element h is defined by e uniquely up to conjugation and $h = h(e)$ is called *a characteristic* of e [11, Lemma 6.2], see also [34, Theorem 2.1] for a general statement. Given e and h, element f is defined uniquely. A triple (h,e,f) in (7) is called *an $\mathfrak{sl}_2$-triple*, which we shall denote by $\mathfrak{sl}_2(e)$. With help of $\mathfrak{sl}_2(e)$-triples Djokovic classified real forms of nilpotent orbits $\mathrm{GL}(8,\mathbb{C}) \cdot e$, where $e \in \mathfrak{g}_1 = \Lambda^3\mathbb{C}^8$, as follows. Denote by $Z_{\mathrm{GL}(8,\mathbb{C})}(\mathfrak{sl}_2(e))$ the centralizer of $\mathfrak{sl}_2(e)$ in $\mathrm{GL}(8,\mathbb{C})$. Let $\Phi = \mathbb{Z}_2$ be the Galois group of the field extension of $\mathbb{C}$ over $\mathbb{R}$. Then Djokovic proved that there is a bijection from the Galois cohomology $(\Phi, Z_{\mathrm{GL}(8,\mathbb{C})}(\mathfrak{sl}_2(e)))$ to the set of $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})$-orbits contained in $\mathrm{GL}(8,\mathbb{C}) \cdot e$ [11, Theorem 8.2]. A similar argument has been first used by Revoy [51] and later by Midoune and Noui for classification of alternating forms in dimension 8 over a finite field [43]. Recall that classification of $\mathrm{GL}(8,\mathbb{C})$-orbits has been obtained by Gurevich and later this classification is also re-obtained by Vinberg-Elashvili in their classification of 3-vectors on $\mathbb{C}^9$. There are altogether 23 $\mathrm{GL}(8,\mathbb{C})$-orbits on $\Lambda^3\mathbb{C}^8$. In [11] Djokovic gave another proof of this classification using the $\mathbb{Z}$-graded Lie algebra $\mathfrak{e}_8$ in (6). Finally Djokovic computed the related Galois cohomology to obtain the number of real forms of each complex orbit and he also found a canonical representation of each $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})$-orbit on $\Lambda^3\mathbb{R}^8$. The space $\Lambda^3\mathbb{R}^8$ decomposes into 35 $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})$-orbits.

Remark 4. *Since there is only finite number of* $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})$*-orbits on* $\Lambda^3\mathbb{R}^{8*}$*, there exists* $\varphi \in \Lambda^3\mathbb{R}^{8*}$ *such that the orbit* $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R}) \cdot \varphi$ *is open in* $\Lambda^3\mathbb{R}^{8*}$*. Such a 3-form* φ *is called stable. Clearly any stable 3-form* φ *is nondegenerate, i.e.,* $\mathrm{rk}\varphi = 8$*. In general, a k-form* φ *on* $\mathbb{R}^n$ *is called stable, if the orbit* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cdot \varphi$ *is open in* $\Lambda^k\mathbb{R}^n$*. Clearly any symplectic form is stable. It is not hard to see that if* $\varphi \in \Lambda^k\mathbb{R}^n$ *is open, and* $k \geqslant 2$*, then either* $k = 3$ *and* $n = 5, 6, 7, 8$*, or* $k = 4$ *and*

$n = 6, 7$, or $k = 5$ and $n = 8$. Stable forms on $\mathbb{R}^8$ have been studied in deep by Hitchin [26], Witt [68] and later by Lê-Panak-Vanžura in [38], where they classified all stable forms on $\mathbb{R}^n$ (they proved that stable k-forms exist on $\mathbb{R}^n$ only in dimensions $n = 6, 7, 8$ if $3 \leqslant k \leqslant n-k$), and determined their stabilizer groups [38, Theorem 4.1].

Remark 5. *Djokovic's classification of 3-vectors on $\mathbb{R}^8$ contains the classification of 3-vectors on $\mathbb{R}^6$ and the classification of 3-vectors on $\mathbb{R}^7$ by Theorem* 1. The classification of 3-forms on $\mathbb{R}^7$ has been first obtained by Westwick [67] by adhoc method. There are 8 equivalence classes of multisymplectic 3-forms on $\mathbb{R}^7$, which are the real forms of 5 equivalent classes of multisymplectic 3-forms on $\mathbb{C}^7$, and there are 6 equivalence classes of 3-forms on $\mathbb{R}^6$, which are the real forms of 5 equivalence classes of 3-forms on $\mathbb{C}^6$. The stabilizer of 3-forms in $\mathbb{R}^6$ has been determined in [25] and the stabilizer of multisymplectic 3-forms in $\mathbb{R}^7$ has been defined in [6]. The stabilizer of 3-forms on $\mathbb{F}^7$ has been described by Cohen-Helminck in [8, Theorem 2.1] for any algebraically closed field $\mathbb{F}$.

Remark 6. *There are 21 equivalence classes of multisymplectic 3-forms on $\mathbb{R}^8$ which are the real forms of 13 equivalence classes of multisymplectic 3-forms on $\mathbb{C}^8$ [11, §9]. A complete list of the stabilizer groups $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})}(\varphi)$ of each multi-symplectic 3-form φ on $\mathbb{R}^8$ has not been obtained till now according to our knowledge. The stabilizer $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}(8,\mathbb{C})}(\varphi)$ has been obtained by Midoune in his PhD Thesis [42], see also [43]. In [11] Djokovic computed the dimension of each $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})$-orbit in $\Lambda^3\mathbb{R}^8$ and the centralizer $Z_{\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})}(\mathfrak{sl}_2(e))$ for each nilpotent element $e \in \mathfrak{e}_{8(8)}$. It follows that the stabilizer algebra $Z_{\mathfrak{gl}(8,\mathbb{R})}(\varphi)$ of 3-forms $\varphi \in \Lambda^3\mathbb{R}^8$ forms a complete system of invariants of the $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})$-action on $\Lambda^3\mathbb{R}^8$. In Proposition 4 below we show that the stabilizer of any multisymplectic 3-form φ on $\mathbb{R}^8$ is not connected.*

Proposition 4. *For any multisymplectic 3-form $\varphi \in \Lambda^3\mathbb{R}^{8*}$ we have $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})}(\varphi)\cap\mathrm{GL}^-(8,\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Hence the $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})$-orbit of any 3-form on $\mathbb{R}^8$ is connected.*

Proof. For each equivalence class of a 3-form φ of rank 8 we choose a canonical element φ_0 in the Djokovic's list [11, p. 36-37]. Then we find an element $g \in \mathrm{St}_{\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})}(\varphi_0) \cap \mathrm{GL}^-(8,\mathbb{R})$. Hence the $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-orbit of each multisymplectic 3-form on $\mathbb{R}^8$ is connected. If φ is not multisymplectic, the orbit $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R}) \cdot \varphi$ is connected by Proposition 2. This completes the proof of Proposition 4. □

Proposition 4 and Proposition 2 imply immediately the following

Corollary 1. *(cf. [53, Proposition 4.1]) The Poincaré map P_Ω induces an isomorphism between $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})$-orbits on $\Lambda^3\mathbb{R}^8$ and $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})$-orbit on $\Lambda^5\mathbb{R}^{8*}$. Each $\mathrm{GL}(8,\mathbb{R})$-orbit on $\Lambda^5\mathbb{R}^8$ is connected.*

2.5. Classification of 4-forms on $\mathbb{R}^8$

Classification of 4-forms on $\mathbb{C}^8$, whose equivalence is defined via the standard action of $\mathrm{SL}(8,\mathbb{C})$, has been given by Antonyan [1], following the scheme proposed by Vinberg-Elashvili for the classification of 3-vectors on $\mathbb{C}^9$. In [34] Lê proposed a scheme of classification of 4-forms on $\mathbb{R}^8$ as application of her study of the adjoint orbits in $\mathbb{Z}_m$-graded real semisimple Lie algebras. In this subsection we outline Antonyan's method and Lê's method.

Let $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$). Denote by $\mathfrak{g}$ the exceptional complex simple Lie algebra $\mathfrak{e}_7$ (rep. $\mathfrak{e}_{7(7)}$ - the split form of $\mathfrak{e}_7$). The starting point of Antonyan's work on the classification on 4-vectors on $\mathbb{C}^8$ (resp. the starting point of Lê's scheme of classification of 4-forms on $\mathbb{R}^8$) is the following observation, cf. (3), (5). The standard $\mathrm{GL}(8,\mathbb{F})$-action on $\Lambda^4\mathbb{F}^8$ is equivalent to the action of the θ-group of the $\mathbb{Z}_2$-graded simple Lie algebra

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \tag{8}$$

on its homogeneous component $\mathfrak{g}_1$, which is isomorphic to $\Lambda^4\mathbb{F}^8$. Here $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(8, \mathbb{F})$.

Let us describe the components $\mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}_1$ in (8) for the case $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ using the root decomposition of $\mathfrak{e}_7$. Recall that $\mathfrak{e}_7$ has the following root system:

$$\Sigma = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_p + \varepsilon_q + \varepsilon_r + \varepsilon_s, \,|\, i \neq j, (p, q, r, s \text{ distinct}), \sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i = 0\}.$$

By Remark 1, the $\mathbb{Z}_2$-grading on $\mathfrak{e}_7$ is defined uniquely by an involution $\theta^{\mathbb{C}}$ of $\mathfrak{e}_7$. In terms of the Chevalley system of $\mathfrak{e}_7$, see Remark 2, the involution $\theta^{\mathbb{C}}$ is defined as follows:

$$\theta^{\mathbb{C}}{}_{|\mathfrak{h}_0} = Id,$$

$$\theta^{\mathbb{C}}(E_\alpha) = E_\alpha, \text{ if } \alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j,$$
$$\theta^{\mathbb{C}}(E_\alpha) = -E_\alpha, \text{ if } \alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon_l.$$

Note that $\theta := \theta^{\mathbb{C}}_{|\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(7)}}$ is an involution of $e_{7(7)}$ and it defines the induced $\mathbb{Z}_2$-gradation from $\mathfrak{e}_7$ on $\mathfrak{e}_{7(7)}$.

Following the Vinberg-Eliashivili scheme of the classification of 3-vectors on $\mathbb{C}^9$, Antonyan classified $\mathrm{SL}(8, \mathbb{C})$-equivalent 4-vectors on $\mathbb{C}^8$ by using the Jordan decomposition (Proposition 3). First he classified all semisimple 4-vectors on $\mathbb{C}^8$ using Vinberg's theory on finite automorphisms of semisimple algebraic groups [61], which has been employed by Vinberg-Elashvili for the classification of semisimple 3-vectors as we mentioned above. Next we include each semisimple element $x \in \mathfrak{g}_1$ of the $\mathbb{Z}_2$-graded complex Lie algebra $\mathfrak{e}_7$ into a Cartan subalgebra of $\mathfrak{g}_1$, which is defined as a maximal subspace in $\mathfrak{g}_1$ consisting of commuting semisimple elements [63] (this definition is also applied to real or complex $\mathbb{Z}_m$-graded semisimple Lie algebras $\mathfrak{g}$). If $\mathfrak{g}$ is a complex $\mathbb{Z}_m$-graded sesmisimple Lie algebra, then all the (complex) Cartan subalgebras in $\mathfrak{g}_1$ are conjugate under the action of the adjoint group $G_0^{\mathbb{C}}$. To reduce the classification of semisimple elements in $\mathfrak{g}_1$ further we introduce the notion of the Weyl group $W(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ of a complex $\mathbb{Z}_m$-graded semisimple Lie algebra $\mathfrak{g}$ w.r.t. to a Cartan subalgebra $\mathcal{C} \subset \mathfrak{g}_1$ as follows. Let $G^{\mathbb{C}}$ be the connected semisimple Lie algebra having the Lie algebra $\mathfrak{g}$ and $G_0^{\mathbb{C}}$ the Lie subgroup of the $G^{\mathbb{C}}$ having the Lie algebra $\mathfrak{g}_0$. We define

$$N_0(\mathcal{C}) := \{g \in G_0 | \,\forall x \in \mathcal{C}\; g(x) \in \mathcal{C}\},$$

$$Z_0(\mathcal{C}) := \{g \in G_0 | \,\forall x \in \mathcal{C}\; g(x) = x\}.$$

Then $W(\mathfrak{g}, \mathcal{C}) := N_0(\mathcal{C})/Z_0(\mathcal{C})$. The Weyl group $W(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ is finite, moreover $W(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ is generated by complex reflections, which implies that the algebra of $W(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$-invariants on $\mathcal{C}$ is free [61]. Furthermore, two semisimple elements in $\mathcal{C}$ belong to the same $G_0^{\mathbb{C}}$-orbit if and only if they are in the same orbit of the $W(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$-action on $\mathcal{C}$. Antonyan showed that the Weyl group $W(\mathfrak{e}_7, \mathcal{C})$ has order 2903040 and the generic semisimple element has trivial stabilizer. He also found a basis of a Cartan algebra $\mathcal{C} \subset \mathfrak{g}_1$, which is also a Cartan subalgebra of the Lie algebra $\mathfrak{e}_7$. Thus the set of $\mathrm{SL}(8, \mathbb{C})$-equivalent semisimple 4-vectors on $\mathbb{C}^8$ has dimension 7. This set is divided into 32 families depending on the type of the stabilizer of the action of the Weyl group $W(\mathfrak{e}_7, \mathcal{C})$ on the Cartan algebra $\mathcal{C}$. For the classification of nilpotent elements and mixed 4-vectors on $\mathbb{C}^8$ Antonyan used the Vinberg method of support [64].

Lê suggested the following scheme of classification of the $\mathrm{SL}(8, \mathbb{R})$-orbits on $\Lambda^4\mathbb{R}^8$ [34]. Observe that we also have the Jordan decomposition of each element in $\Lambda^4\mathbb{R}^8$ into a sum of a semisimple element and a nilpotent element [34, Theorem 2.1], as in Proposition 3. First, we classify semisimple elements, using the fact that every Cartan subspace $\mathcal{C} \subset \mathfrak{g}_1$ is conjugated to a standard Cartan subspace $\mathcal{C}_0$ that is invariant under the action of a Cartan involution $\tau_{\mathfrak{u}}$ of the $\mathbb{Z}_2$-graded Lie algebra $\mathfrak{e}_{7(7)}$ [47]. The set of all standard Cartan subspaces $\mathcal{C}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(7)}$, and more generally, the set of all standard Cartan subspaces $\mathcal{C} \subset \mathfrak{g}_1$ in any $\mathbb{Z}_2$-graded real semisimple Lie algebra $\mathfrak{g}$, has been classified by Matsuki and Oshima in [47]. Lê decomposed each semisimple element into a sum of an elliptic semisimple element, i.e., a semisimple element whose adjoint action on $\mathfrak{g}_{\otimes\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_7$ has purely imaginary eigenvalues, and a real semisimple element, i.e., a semisimple element whose adjoint action on $\mathfrak{g}_{\otimes\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_7$ has real eigenvalues, cf. [52] for a similar decomposition of semisimple elements in a real sesimsimple Lie algebra. The classification of real semisimple elements and commuting elliptic semisimple elements in $\mathcal{C}_0 \subset \mathfrak{g}_1$ is then reduced to the classification of the orbits of the Weyl groups of associated $\mathbb{Z}_2$-graded symmetric Lie algebras on their Cartan subalgebras [34, Corollary 5.3]. As in [65] and [1], the classification of mixed 4-vectors on $\mathbb{R}^8$ is reduced to the classification of their semisimple parts and the corresponding nilpotent parts. The classification of nilpotent parts can be done using algorithms in real algebraic geometry based on Lê's theory of nilpotent orbits in graded semisimple Lie algebras [34], that develops further Vinberg's method of support also called carrier algebra. In [12] Dietrich-Faccin-de Graaf developed Vinberg's method further and applied their method to classification of the orbits of homogeneous nilpotent elements in certain graded real semisimple Lie algebras. In particular, they have a new proof for Djokovic's classification of 3-vectors on $\mathbb{R}^8$.

Remark 7. *(1) The method of θ-group has been extended by Antonyan and Elashvili for classifications of spinors in dimension 16 [2].*

(2) Many results of classifications of k-vectors over the fields $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ have their analogues over other fields $\mathbb{F}$ and their closures $\overline{\mathbb{F}}$ [43]. Over the field $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ the classification of 3-vectors in $\mathbb{F}^n$ is related to some open problems in the theory of self-dual codes [49]. Till now there is no classification of 3-vectors in $\mathbb{F}^n$ if $n \geqslant 9$ and $\mathbb{F} \neq \mathbb{C}$.

3. Geometry defined by differential forms

In this section we briefly discuss several results and open questions on the existence of differential k-forms of given type on a smooth manifold, where $k = 2, 3, 4$.

• Assume that $k = 2$ and φ is a closed 2-form with constant rank on M^n, then φ is called *a pre-symplectic form* [60]. Till now there is no general necessary and sufficient condition for the existence of a pre-symplectic form φ on a manifold M^n except the case that φ is a symplectic form. Necessary conditions for the existence of a symplectic form φ on M^{2n} are the existence of an almost complex structure on M^{2n} and if M^{2n} is closed, the existence of a cohomology class $a \in H^2(M^{2n};\mathbb{R})$ with $a^n > 0$. If M^{2n} is open, a theorem of Gromov [18, 19] asserts that the existence of an almost complex structure is also sufficient, his argument has been generalized in [13] and used in the proof of Theorem 4(2) below. Taubes using Seiberg-Witten theory proved that there exist a closed 4-manifold M^4 admitting an almost complex structure and $a \in H^2(M,\mathbb{R})$ such that $a^2 \neq 0$ but M^4 has no symplectic structure [59]. Note that for any symplectic form ω on M^{2n} there exists uniquely up to homotopy an almost complex structure J on M^{2n} that is compatible with ω, i.e., $g(X,Y) := \omega(X,JY)$ is a Riemannian metric on M^{2n}. Connolly-Lê-Ono using the Seiberg-Witten theory showed that a half of all homotopy classes of almost complex structures on a certain class of oriented compact 4-manifolds is not compatible with any symplectic structure [9].

• Manifolds M^{2n} endowed with a nondegenerate conformally closed 2-form ω, i.e., $d\omega = \theta \wedge \omega$ for some closed 1-form θ on M^{2n}, are called *conformally symplectic manifolds*. A necessary condition for the existence of nondegenerate 2-form ω on M^{2n} is the existence of an almost complex structure on TM^{2n}, which is equivalent to the existence of a section J of the associated bundle $\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$, see [56] where a necessary condition for the existence of a section J has been determined in terms of the Whitney-Stiefel characteristic classes. We don't have necessary and sufficient conditions for the existence of a general conformally symplectic form on M^{2n}, except the existence of an almost complex structure on M^{2n}. In [39] Lê-Vanžura proposed new cohomology theories of locally conformal symplectic manifolds.

• Assume that $k = 3$ and φ is a stable 3-form on M^8. In [46] Noui and Revoy proved that the Lie algebra of the stabilizer of φ is a real form of the Lie algebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Hence stable 3-forms on $\mathbb{R}^8$ are equivalent to the Cartan 3-forms on the real forms $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, $\mathfrak{s}u(1, 2)$ and $\mathfrak{s}u(3)$ of the complex Lie algebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Later in [38] Lê-Panak-Vanžura reproved the Noui-Revoy result by associating to each 3-form on $\mathbb{R}^8$ various bilinear forms, which are invariants of the $\mathrm{GL}(8, \mathbb{R})$-action on $\Lambda^3\mathbb{R}^{8*}$, and studied properties of these forms. They computed the stabilizer group of a stable form $\varphi \in \Lambda^3\mathbb{R}^{8*}$ and found a necessary and sufficient condition for a closed orientable manifold M^8 to admit a stable 3-form [38, Proposition 7.1]. In [36] Lê initiated the study of geometry and topology of manifolds admitting a Cartan 3-form associated with a simple compact Lie algebra.

• Necessary and sufficient conditions for a closed connected 7-manifold M^7 to admit a multisymplectic 3-form has been determined in [54], see also Appendix 4 below. There are two equivalence classes of stable 3-forms on $\mathbb{R}^7$ with the stablizer groups G_2 and $\tilde{G}_2$ respectively. Since G_2 and $\tilde{G}_2$ are exceptional Riemannian and pseudo Riemannian holonomy groups, manifolds M^7 admitting stable 3-form of G_2-type (resp. of $\tilde{G}_2$-type) are in focus of research in Riemannian geometry (respectively in pseudo Riemannian geometry) [30], [35], [32]. As we have mentioned, the study of geometries of stable forms in dimension 6,7, 8 have been initiated by Hitchin [25, 26].

• It is worth noting that the algebra of parallel forms on a quaternion Kähler manifold is generated by the quaternionic 4-form, the algebra of parallel forms on a Spin(7)-manifold is generated by the self-dual Cayley 4-form. Riemannian manifolds admitting parallel 2-forms of maximal rank are Kähler manifolds, which are the most studied subjects in geometry, in particular in the theory of minimal submanifolds, see e.g., [37].

4. Manifolds admitting a $\tilde{G}_2$-structure

In 2000 Hitchin initiated the study of geometries defined by differential forms [25], and subsequently in [26] he initiated the study of geometries defined by stable forms. The latter geometries have been investigated further in [68], [38]. A necessary and sufficient condition for a manifold M to admit a stable form φ of G_2-type, i.e., the stabilizer of φ is isomorphic to the group G_2, has been found by Gray [20]. In this Appendix we state and prove a necessary and sufficient condition for a manifold M to admit a stable form φ of $\tilde{G}_2$-type. We recall that a 3-form φ on $\mathbb{R}^7$ is called of $\tilde{G}_2$-type, if it lies on the $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^7)$-orbit of a 3-form

$$\varphi_0 = \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 + \alpha_1 \wedge \theta_1 + \alpha_2 \wedge \theta_2 + \alpha_3 \wedge \theta_3.$$

Here α_1, α_2 are 2-forms on $\mathbb{R}^7$ which can be written as

$$\alpha_1 = y_1 \wedge y_2 + y_3 \wedge y_4,\ \alpha_2 = y_1 \wedge y_3 - y_2 \wedge y_4,\ \alpha_3 = y_1 \wedge y_4 + y_2 \wedge y_3$$

and $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, y_1, y_2, y_3, y_4)$ is an oriented basis of $\mathbb{R}^{7*}$.

Bryant showed that $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}(7,\mathbb{R})}(\varphi_0) = \tilde{G}_2$ [7]. He also proved that $\tilde{G}_2$ coincides with the automorphism group of the split octonians [7].

Theorem 4. *(1) Suppose that M^7 is a compact 7-manifold. Then M^7 admits a 3-form of $\tilde{G}_2$-type, if and only if M^7 is orientable and spinnable. Equivalently the first and second Stiefel-Whitney classes of M^7 vanish.*

(2) Suppose that M^7 is an open manifold which admits an embedding to a compact orientable and spinnable 7-manifold. Then M^7 admits a closed 3-form φ of $\tilde{G}_2$-type.

Proof. First we recall that the maximal compact Lie subgroup of $\tilde{G}_2$ is SO(4). This follows from the Cartan theory on symmetric spaces. We refer to [27, p. 115] for an explicit embedding of SO(4) into G_2. The reader can also check that the image of this group is also a subgroup of $\tilde{G}_2 \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^7)$. We shall denote this image by $SO(4)_{3,4}$.

Now assume that a smooth manifold M^7 admits a $\tilde{G}_2$-structure. Then it must be orientable and spinnable, since the maximal compact Lie subgroup $\mathrm{SO}(4)_{3,4}$ of G_2 is also a compact subgroup of the group G_2.

Lemma 2. *Assume that M^7 is compact, orientable and spinnable. Then M^7 admits a $\tilde{G}_2$-structure.*

Proof. Since M^7 is compact, orientable and spinable, M^7 admits a SU(2)-structure [16]. Since $SU(2)$ is a subgroup of $SO(4)_{3,4}$, M^7 admits a $SO(4)_{3,4}$-structure. Hence M^7 admits a $\tilde{G}_2$-structure. □

This completes the proof of the first assertion of Theorem 4.

Let us prove the last statement of Theorem 4. Assume that M^7 is a smooth open manifold which admits an embedding into a compact orientable and spinnable 7-manifold. Taking into account the first assertion of Theorem 4, there exists a 3-form φ on M^7 of $\tilde{G}_2$-type. We shall use the following theorem due to Eliashberg-Mishachev to deform the 3-form φ to a closed 3-form $\bar{\varphi}$ of $\tilde{G}_2$-type on M^7.

Let M be a smooth manifold and $a \in H^p(M,\mathbb{R})$. For a subspace $\mathcal{R} \subset \Lambda^p M$ we denote by $Clo_a\mathcal{R}$ the subspace of the space $\Gamma(M,\mathcal{R})$ of smooth sections $M \to \mathcal{R}$ that consists of closed p-forms $\omega \in \Gamma(M,\mathcal{R}) \subset \Omega^p(M)$ such that $[\omega] = a \in H^p(M,\mathbb{R})$. Denote by $\mathrm{Diff}(M)$ the diffeomorphism group of M.

Proposition 5 (Eliashberg-Mishashev Theorem). *([13, 10.2.1]) Let M be an open manifold, $a \in H^p(M,\mathbb{R})$ and $\mathcal{R} \subset \Lambda^p M$ an open* $\mathrm{Diff}(M)$*-invariant subset. Then the inclusion*

$$Clo_a\mathcal{R} \hookrightarrow \Gamma(M,\mathcal{R})$$

is a homotopy equivalence. In particular,

- any p-form $\omega \in \Gamma(M,\mathcal{R})$ is homotopic in $\mathcal{R}$ to a closed form $\bar{\omega}$;

- any homotopy $\omega_t \in \Gamma(M,\mathcal{R})$ of p-forms which connects two closed forms ω_0, ω_1 such that $[\omega_0] = [\omega_1] = a \in H^p(M,\mathbb{R})$ can be deformed in $\mathcal{R}$ into a homotopy of closed forms $\bar{\omega}_t$ connecting ω_0 and ω_1 such that $[\omega_t] = a$ for all t.

Let $\mathcal{R}$ be the space of all 3-forms of $\tilde{G}_2$-type on M^7. Clearly this space is an open $\mathrm{Diff}(M^7)$-invariant subset of $\Lambda^3 M^7$. Now we apply the Eliashberg-Mishashev theorem to the 3-form φ^3 of $\tilde{G}_2$-type whose existence has been proved above. This completes the proof of Theorem 4. □

5. Classification of orbits over a nonclosed field of characteristic 0

by Mikhail Borovoi

We consider a linear algebraic group G with group of k-points $G(k)$ over an algebraically closed field k of characteristic 0. Assume that G acts on a k-variety X with set of k-points $X(k)$, and assume that we know the classification of $G(k)$-orbits in $X(k)$, e.g., $k = \mathbb{C}$, $G = \mathrm{GL}(9,\mathbb{C})$, $X = \Lambda^3\mathbb{C}^9$. Let k_0 be a subfield of k such that k is an algebraic closure of k_0. We write $\Gamma = \mathrm{Gal}(k/k_0)$ for the Galois group of the extension k over k_0. If $k_0 = \mathbb{R}$, then $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, \gamma\}$, where γ is the complex conjugation. Assume that we have compatible k_0-forms G_0 of G and X_0 of X. We wish to classify $G_0(k_0)$-orbits in $X_0(k_0)$. We start with one G-orbit Y in X. We check whether Y is Γ-stable. If not, then Y has no k_0-points. Assume that Y is Γ-stable. Then the Γ-action on Y defines a k_0-model Y_0 of Y. Now G_0 acts on Y_0 over k_0. We say that Y_0 is (a twisted form of) a homogeneous space of G_0. We ask

(1) whether Y_0 has k_0-points;

(2) if the answer to (1) is positive, we wish to classify $G(k_0)$-orbits in $Y_0(k_0)$.

Question (1) is treated in [5]. Assume that for our Y, the answer to question (1) is Yes. Let $y_0 \in Y_0(k_0)$, and let $H_0 = \mathrm{St}_{G_0}(y_0)$. Then we may write $Y_0 = G_0/H_0$. The Galois group $\Gamma = \mathrm{Gal}(k/k_0)$ acts compatibly on $G_0(k) = G(k)$, $H_0(k) = H(k)$, and $Y_0(k) = Y(k) = G(k)/H(k)$.

Theorem 5 ([58], Section I.5.4, Corollary 1 of Proposition 36). *There is a canonical bijection between the set of orbits* $Y_0(k_0)/G_0(k_0)$ *and the kernel* $\ker[H^1(k_0, H_0) \to H^1(k_0, G_0)]$.

Here $H^1(k_0, H_0) := H^1(\Gamma, H_0(k))$.

6. Acknowledgement

The authors would like to thank Professor Alexander Elashvili and Professor Andrea Santi for their interest in this subjects and for their suggestions of references, Professor Lemnouar Noui for sending us a copy of the PhD Thesis of Midoune [42] and Professor Mahir Can for his helpful comments on a preliminary version of this paper. We are grateful to Professor Mikhail Borovoi for his help in literature and for his writing up an explanation of the Galois cohomology method for finding real forms of complex orbits, which we put as an Appendix to this paper.

REFERENCES

1. Л. В. Антонян, Классификация четырех векторов восьмимерного пространства, Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— Изд-во МГУ 1981 — 20.— С. 144—161

2. Л. В. Антонян, А. Г. Элашвили, Классификация спиноров размерности шестнадцать, Тр. Тбил. матем. ин-та.— 1982.— 70,— С. 4—23.

3. A. Borel and Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, Annals of Math., 75(1962), 485-535.

4. M. Borovoi, W.A. de Graaf and H. V. Lê, Classification of 3-vectors on $\mathbb{R}^9$, in preparation.

5. M. Borovoi, Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology, Duke Math. Journal, 72(1993), 217-239.

6. J. Bureš and J. Vanžura, Multisymplectic forms of degree three in dimension seven, Proceedings of the 22nd Winter School “Geometry and Physics”. Circolo Matematico di Palermo, Palermo. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Supplemento No. 71 (2003), p. 73-91.

7. R. Bryant, Metrics with exceptional holonomy, Ann. of Math. (2), 126 (1987), 525-576.

8. A. Cohen and A. Helminck, Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7, Commun. Algebra 16 (1988), pp. 1-25.

9. F. Connolly, H. V. Lê and K. Ono, Almost complex structures which are compatible with Kähler or symplectic structures, Annals of Global Analysis and Geometry, 15(1997), 325-334.

10. J. Dieudonné, La géométrie des grouppes classiques, Springer, 1955.

11. D. J. Djokovic, Classification of Trivectors of an Eight-dimensional Real Vector Space, Linear and Multilinear Algebra, 13 (1983), 3-39.

12. H. Dietrich, P. Faccin and W. A. de Graaf, Regular subalgebras and nilpotent orbits of real graded Lie algebras, Journal of algebra, 423(2015), 1044-1079.

13. Y. Eliashberg and N. Mishachev, Introduction to the h-Principle, AMS 2002.

14. J. J. Figueroa-O'Farrill and A. Santi, Spencer Cohomology and 11-Dimensional Supergravity, Commun. Math. Phys. 349 (2017), 627-660.

15. J. J. Figueroa-O'Farrill and A. Santi, On the algebraic structure of Killing suprealgebras, arXiv:1608.05915.

16. Th. Friedrich, I. Kath, A. Moroianu, U. Semmelmann, On nearly parallel G_2-manifolds, Journal Geom. Phys. 23 (1997), 259-286.

17. D. Fiorenza, H. V. Lê, L. Schwachhöfer and L.Vitagliano, Strongly homotopy Lie algebras and deformation of claibrated submanifolds, arXiv:1804.05732.

18. M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. Invent. Math. 82 (1985), 307–347.

19. M. Gromov, Partial differential relations. Springer, Berlin, 1986.

20. A. Gray, Vector cross products on manifolds, TAMS 141, (1969), 465-504, (Errata in TAMS 148 (1970), 625).

21. Г. Б. Гуревич, Классификация тривекторов восьмого ранга, ДАН 2, (1935), 353—357,

22. Г. Б. Гуревич, Алгебра тривектора, часть I, Труды семинара по векторному и тензорному анализу 2—3, (1935), 51—118.

23. G. B. Gurevich, Основы теории алгебраических инвариантов.— М.: Гостехиздат, 1948.

24. S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press 1978.

25. N. Hitchin, The geometry of three-forms in 6 and 7 dimensions, J.D.G. 55 (2000), 547-576.

26. N. Hitchin, Stable forms and special metrics, Contemporary math., (2001), 288, 70-89.

27. R. Harvey and H. B. Lawson, Calibrated geometries, Acta Math. (182), 47-157.

28. N. Jacobson, Lie algebras, Dover, New York, 1979.

29. D. D. Joyce, Compact manifolds with Special Holonomy, Oxford University Press, 2000.

30. D. Joyce, Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry, Oxford, 2007.

31. В. Г. Кац, Автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли, Функц. анализ и его прил.— 1969.— 3, № 3.— С. 94—96

32. K. Kawai, H. V. Lê and L. Schwachhöfer, The Frölicher-Nijenhuis bracket and the geometry of G_2 -and Spin(7)-manifolds, Ann. Math. Pur. Appl. 197 (2018), 411-432.

33. H. V. Lê, Manifolds admitting a $\tilde{G}_2$-structure, arXiv:0704.0503.

34. H. V. Lê, Orbits in real $\mathbb{Z}_m$-graded semisimple Lie algebras, J. Lie Theory, 21(2):285-305, 2011.

35. H.V. Lê and M. Munir, Classification of compact homogeneous spaces with invariant G_2-structures, Advances in Geometry, 12(2012), 303-328.

36. H. V. Lê, Geometric structures associated with a simple Cartan 3-form, Journal of Geometry and Physics 70 (2013), 205-223.

37. Ле Хонг Ван, А. Т. Фоменко, Критерий минимальности лагранжевых подмногообразий в кэлеровых многообразиях, Матем. заметки 42 (1987), no. 4, 559-571

38. H. V. Lê, M. Panak, J. Vanžura, Manifolds admitting stable forms, Comm. Math. Carolinae, vol 49, N1, (2008), 101-117.

39. H. V. Lê and J. Vanžura, Cohomology theories on locally conformal symplectic manifolds, Asian J. of Math., 19(2015), 045-082.

40. H. V. Lê and J. Vanžura, McLean's second variation formula revisited, Journal of Geometry and Physics 113 (2017) 188-196.

41. J. Matinet, Sur les singularités des formes différentielles, Annales de l'institut Fourier, 20(1970), p. 95-178.

42. N. Midoune, Classification des formes trilineaires alternees de rang 8 sur les corps finis, PhD Thesis , Université de Batna, 2009.

43. N. Midoune a and L. Noui, Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 8 over a finite field, Linear and Multilinear Algebra Vol. 61(2013), 15-21.

44. L. Noui, Transvecteurs de rang 8 sur un corps alge briquement clos, C. R. Acad. Sci. Paris, Srie I: Algbre 324 (1997), 611-614.

45. L. Noui and Ph. Revoy, Formes multilinaires alternes, Ann. Math. Plaise Pascal, Vol. 1, N2, 1994, 43 - 69.

46. L. Noui and Ph. Revoy, Algebres de lie orthogonales et formes trilineaires alternees, Communications in algebra, 25(1997), 617-622.

47. T. Oshima and T. Matsuki: Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups, J. Math. Soc. Japan Vol. 32, No. 2, 1980, 399-414.

48. Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, "Теория инвариантов", Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 55, ВИНИТИ, М., 1989, 137–309

49. E.M. Rains and J.A. Sloane, Self-dual codes, in Handbook of Coding Theory, V.S. Pless and W.C. Huffman, eds., Elsevier, Amsterdam, 1998, pp. 177–294.

50. W. Reichel, Über die trilinearen alternierenden Formen in 6 und 7 Veränderlichen, Dissertation, Greiswald, 1907.

51. Ph. Revoy, Trivecteurs de rang 6, Bull. Soc. Math. France Memoire 59, (1979), 141-155.

52. L. P. Rothschild, Orbits in a real Reductive Lie algebra, Trans. AMS, 168 (1972), 403-421.

53. L. Ryvkin, Linear orbits of alternating forms on real vector spaces, arXiv:1609.02184.

54. T. Salac, Multisyplectic forms on 7-dimensional manifolds, Differential Geometry and its Applications, 58(2018), 120-140.

55. S.M. Salamon, Riemannian geometry and holonomy groups, Pitman Res. Notes in Math. 201, Longman, Harlow, 1989.

56. N. E. Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton University Press, 1951.

57. J. A. Schouten, Klassifizierung der alternierdenen Grössen dritten Grades in 7 Dimensionen, Rend. Circ. mat. Palermo, 55(1931), 137-156.

58. J. P. Serre, Galois cohomology, corrected 2.nd printing, Springer, 1997.

59. C.H. Taubes, More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten invariants. Math. Res. Lett. 2 (1995), 9-14.

60. I. Vaisman, Geometric quantization on presymplectic manifolds, Monatshefte für Mathematik. 96(1983), 293-310.

61. Э.Б. Винберг, О линейных группах, связанных с периодическими автоморфизмами полупростых алгебраических групп, ДАН, 221:4 (1975), 767–770.

62. Э. Б. Винберг, О классификации нильпотентных элементов градуированных алгебр Ли, ДАН, 225:4 (1975), 745–748

63. Э. Б. Винберг, Группа Вейля градуированной алгебры Ли, Изв. АН СССР. Сер. матем., 40:3 (1976), 488–52

64. Э. Б. Винберг, Классификация однородных нильпотентных элементов полупростой градуированной алгебры Ли, Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, 19 (1979), 155–177

65. Э. Б. Винберг, А. Г. Элашвили, Классификация тривекторов 9-мерного пространства, Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, 18 (1978), 197–233

66. J. A. Wolf and A. Grey, Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, I, II, JDG 2(168), 77-114, 115-159.

67. R. Westwick, Real trivectors of rank seven, Lin. and multilin. Algebra, 10 (3), 1981, p. 183-204.

68. F. Witt, Special metric structures and closed forms, Ph.D. Thesis, University Oxford 2004, arxiv:math.DG/0502443.

REFERENCES

1. Antonyan L. V. 1981, “Classification of 4-vectors on eight-dimensional space”, *Proc. Seminar Vekt. and tensor. Analysis*, vol. 20, pp. 144–161.

2. Antonyan, L. V. & Elashvili, A. G. 1982, “Classification of spinors in dimension 16”, *Proceedings of the Tbilisi institute of mathematics*, v. LXX, pp. 5–23.

3. Borel A.& Harish-Chandra 1962, “Arithmetic subgroups of algebraic groups”, *Annals of Math.*, vol. 75, pp. 485-535.

4. Borovoi, M., de Graaf, W.A. & Lê, H. V. 2019, “Classification of 3-vectors on $\mathbb{R}^9$”, in preparation.

5. Borovoi, M. 1993, "Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology", *Duke Math. Journal*, vol. 72, pp. 217–239.

6. Bureš, J. & Vanžura, J. 2003, "Multisymplectic forms of degree three in dimension seven", *Proceedings of the 22nd Winter School "Geometry and Physics". Circolo Matematico di Palermo, Palermo. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Serie II, Supplemento No. 71, pp. 73–91.

7. Bryant, R. 1987, "Metrics with exceptional holonomy", *Ann. of Math.* (2), vol. 126, pp. 525–576.

8. Cohen, A. & Helminck, A. 1988, "Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7", *Commun. Algebra*, vol. 16, pp. 1–25.

9. Connolly, F., Lê H. V. & Ono, K. 1997, "Almost complex structures which are compatible with Kähler or symplectic structures", *Annals of Global Analysis and Geometry*, vol. 15, pp. 325-334.

10. Dieudonné, J. 1955, *La géométrie des grouppes classiques*, Springer.

11. Djokovic, D. J., 1983, "Classification of Trivectors of an Eight-dimensional Real Vector Space", *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 13, pp. 3–39.

12. Dietrich, H., Faccin, P. & de Graaf, W. A. 2015, "Regular subalgebras and nilpotent orbits of real graded Lie algebras", *Journal of algebra*, vol. 423, pp. 1044–1079.

13. Eliashberg, Y. & Mishachev, N. 2022, *Introduction to the h-Principle*, AMS.

14. Figueroa-O'Farrill, J. J. & Santi, A. 2017, "Spencer Cohomology and 11-Dimensional Supergravity", *Commun. Math. Phys.* vol. 349, pp. 627–660.

15. Figueroa-O'Farrill, J. J. & Santi, A. 2016, *On the algebraic structure of Killing suprealgebras*, Available at: arXiv:1608.05915.

16. Friedrich,Th., Kath, I., Moroianu, A.& Semmelmann, U., 1997 "On nearly parallel G_2-manifolds", *Journal Geom. Phys.*, vol. 23, pp. 259–286.

17. Fiorenza, D., Lê, H. V., Schwachhöfer, L. & Vitagliano, L. 2018, "Strongly homotopy Lie algebras and deformation of claibrated submanifolds", Available at: arXiv:1804.05732.

18. Gromov, M. 1985, "Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds". *Invent. Math.*, vol. 82, pp. 307–347.

19. Gromov, M. 1986, *Partial differential relations*, Springer, Berlin.

20. Gray, A. 1969, "Vector cross products on manifolds", *TAMS*, vol. 141, pp. 465–504, (Errata in *TAMS* vol. 148 (1970), pp. 625).

21. Gurevich, G. B. 1935, "Classification des trivecteurs ayant le rang huit", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, II, Nr. 5-6, pp. 51-113.

22. Gurevich, G. B. 1935, "L'algebre du trivecteur", *Trudy Sem. Vekt. Tenz. Analizu*, no. II-II, pp. 355-356.

23. Gurevich, G. B. 1964, *Foundations of the theory of algebraic invariants*, Noordhoff Ltd. Groningen, The Netherlands.

24. Helgason, S. 1978, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press.

25. Hitchin, N. 2000, "The geometry of three-forms in 6 and 7 dimensions", *J.D.G.*, vol. 55, pp. 547–576.

26. Hitchin, N. 2001, "Stable forms and special metrics", *Contemporary math.*, vol. 288, pp. 70–89.

27. Harvey, R. & Lawson, H. B. 1982, "Calibrated geometries", *Acta Math.* vol. 182, pp. 47–157.

28. Jacobson, N. 1979, *Lie algebras*, Dover, New York.

29. Joyce, D. D. 2000, *Compact manifolds with Special Holonomy*, Oxford University Press.

30. Joyce, D. 2007, *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*, Oxford.

31. Kac,V.G. 1969, "Automorphisms of finite order of semisimple Lie algebras", *Funct. Anal. Appl.*, vol 3, pp. 252–254.

32. Kawai, K., Lê, H. V. & Schwachhöfer, L. 2018, "The Frölicher-Nijenhuis bracket and the geometry of G_2 -and Spin(7)-manifolds", *Ann. Math. Pur. Appl.*, vol. 197, pp. 411–432.

33. Lê, H. V. 2007, "Manifolds admitting a $\tilde{G}_2$-structure", Available at: arXiv:0704.0503.

34. Lê, H. V. 2011, "Orbits in real $\mathbb{Z}_m$-graded semisimple Lie algebras", *J. Lie Theory*, vol. 21, no.2, pp. 285–305.

35. Lê, H.V. & Munir, M. 2012, "Classification of compact homogeneous spaces with invariant G_2-structures", *Advances in Geometry*, vol. 12, pp. 303–328.

36. Lê, H. V. 2013, "Geometric structures associated with a simple Cartan 3-form", *Journal of Geometry and Physics*, vol. 70, pp. 205–223.

37. Lê, H.V. & Fomenko, A.T. 1987, "A criterion for the minimality of Lagrangian submanifolds in Kählerian manifolds" (in Russian), *Mat. Zametki*, vol. 42, no. 4, pp. 559–571, p. 623; translation in *Math. Notes*, 1987, vol.42, pp. 810–816.

38. Lê, H. V., Panak, M. & Vanžura J. 2008, "Manifolds admitting stable forms", *Comm. Math. Carolinae*, vol. 49, no. 1, pp. 101–117.

39. Lê, H. V. & Vanžura, J. 2015, "Cohomology theories on locally conformal symplectic manifolds", *Asian J. of Math.*, vol. 19, pp. 045–082.

40. Lê, H. V. & Vanžura, J. 2017, "McLean's second variation formula revisited", *Journal of Geometry and Physics*, vol. 113, pp. 188–196.

41. Matinet, J. 1970, "Sur les singularités des formes différentielles", *Annales de l'institut Fourier*, vol. 20, pp. 95–178.

42. Midoune, N. 2009, "Classification des formes trilineaires alternees de rang 8 sur les corps finis", PhD Thesis , Université de Batna.

43. Midoune, N. & Noui, L. 2013, "Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 8 over a finite field", *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 61, pp. 15-21.

44. Noui, L. 1997, "Transvecteurs de rang 8 sur un corps alge briquement clos", *C. R. Acad. Sci. Paris*, , Srie I: Algbre, vol. 324, pp. 611-614.

45. Noui, L. & Revoy, Ph. 1994, "Formes multilinaires alternes", *Ann. Math. Plaise Pascal*, vol. 1, no. 2, pp. 43 – 69.

46. Noui, L. & Revoy, Ph. 1997, "Algebres de lie orthogonales et formes trilineaires alternees", *Communications in algebra*, vol. 25, pp. 617–622.

47. Oshima, T. & Matsuki, T. 1980, "Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups", *J. Math. Soc. Japan*, vol. 32, no. 2, pp. 399–414.

48. Popov, V. L. & Vinberg, E. B. 1994, *Invariant theory*, in Algebraic geometry. IV. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 55 (translated from 1989 Russian edition) Springer-Verlag, Berlin.

49. Rains, E.M. & Sloane, J.A. 1998, "Self-dual codes", in *Handbook of Coding Theory*, V.S. Pless and W.C. Huffman, eds., Elsevier, Amsterdam, pp. 177–294.

50. Reichel, W. 1907, *Über die trilinearen alternierenden Formen in 6 und 7 Veränderlichen*, Dissertation, Greiswald.

51. Revoy, Ph. 1979, "Trivecteurs de rang 6", *Bull. Soc. Math. France Memoire*, vol. 59, pp. 141–155.

52. Rothschild, L. P. 1972, "Orbits in a real Reductive Lie algebra", *Trans. AMS*, vol. 168, pp. 403–421.

53. Ryvkin, L. 2016, "Linear orbits of alternating forms on real vector spaces", Available at: arXiv:1609.02184.

54. Salac, T. 2018, "Multisyplectic forms on 7-dimensional manifolds", *Differential Geometry and its Applications*, vol. 58, pp. 120–140.

55. Salamon, S.M. 1989, *Riemannian geometry and holonomy groups*, Pitman Res. Notes in Math. 201, Longman, Harlow.

56. Steenrod, N. E. 1951, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press.

57. Schouten, J. A. 1931, "Klassifizierung der alternierdenen Grössen dritten Grades in 7 Dimensionen", *Rend. Circ. mat. Palermo*, vol. 55, pp. 137–156.

58. Serre, J. P. 1997, *Galois cohomology*, corrected 2.nd printing, Springer.

59. Taubes, C.H. 1995, "More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten invariants", *Math. Res. Lett.*, vol. 2, pp. 9–14.

60. Vaisman, I. 1983, "Geometric quantization on presymplectic manifolds", *Monatshefte für Mathematik*, vol. 96, pp. 293–310.

61. Vinberg, E. B. 1975, "On linear groups connected with periodic automorphisms of semisimple algebraic groups", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 221, no. 4, pp. 767–770, English transl.: *Sov. Math., Dokl.*, vol. 16, pp. 406–409.

62. Vinberg, E. B. 1975, "On the classification of nilpotent elements of a semisimple graded Lie algebras", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 225, no. 4, pp. 745–748, English trasl.: *Sov. Math., Dokl.*, vol. 16, pp. 1517–1520 (1976).

63. Vinberg, E. B. 1976, "The Weyl group of a graded Lie algebra", (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 40, no. 3, pp. 488–526, English translation: *Math. USSR-Izv.*, vol. 10, pp. 463–495 (1977).

64. Vinberg, E. B. 1979, "A classification of homogeneous elements of a semisimple graded Lie algebra", *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.*, vol. 19, pp. 155–177, English transl.: *Selecta Math. Sov.*, vol. 6, pp. 15-35 (1987).

65. Vinberg, E. B. & Elashvili, A. G. 1978, “A classification of the trivectors of nine-dimensional space”, (Russian) *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.*, vol. 18, pp. 197–233, English translation: *Selecta Math. Sov.*, vol. 7(1988), pp. 63–98.

66. Wolf, J. A. & Gray, A. 1968, “Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, I, II”, *JDG*, vol. 2, no. 168, pp. 77–114, pp. 115–159.

67. Westwick, R. 1981, “Real trivectors of rank seven”, *Lin. and multilin. Algebra*, vol. 10, no. 3, pp. 183–204.

68. Witt, F. 2005, “Special metric structures and closed forms”, Ph.D. Thesis, University Oxford 2004, Available at: arxiv:math.DG/0502443.

Получено 9.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 514.85; 531.011 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-383-402

О гипотезе Мищенко — Фоменко для обобщённого осциллятора и системы Кеплера

А. В. Цыганов

Цыганов Андрей Владимирович — доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: andrey.tsiganov@gmail.com

Аннотация

Рассматриваются деформации задачи Кеплера и гармонического осциллятора, для которых дополнительные интегралы движения являются координатами приведённого дивизора, согласно теореме Римана — Роха. Для этого семейства некоммутативно интегрируемых систем обсуждается справедливость гипотезы Мищенко — Фоменко о существовании интегралов движения из единого функционального класса, в данном случае полиномиальных интегралов движения.

Ключевые слова: суперинтегрируемые системы, некоммутативно интегрируемые системы, гипотеза Мищенко — Фоменко.

Библиография: 34 названий.

Для цитирования:
А. В. Цыганов. О гипотезе Мищенко — Фоменко для обобщённого осциллятора и системы Кеплера // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 383–402.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 514.85; 531.011 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-383-402

On the Mishchenko–Fomenko hypothesis for a generalized oscillator and Kepler system

A. V. Tsiganov

Tsiganov Andrey Vladimirovich — Doctor of Physics and Mathematics, Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: andrey.tsiganov@gmail.com

Abstract

Deformations of the Kepler problem and the harmonic oscillator are considered for which additional integrals of motion are the coordinates of the reduced divisor, according to the Riemann–Roch theorem. For this family of non-commutative integrable systems the validity of the Mishchenko–Fomenko hypothesis about the existence of integrals of motion from a single functional class, in this case polynomial integrals of motion, is discussed.

Keywords: superintegrable systems, noncommutative integrable systems, Mishchenko–Fomenko conjecture.

Bibliography: 34 titles.

For citation:

A. V. Tsiganov, 2020, "On the Mishchenko–Fomenko hypothesis for a generalized oscillator and Kepler system", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 383–402.

Посвящается Анатолию Тимофеевичу Фоменко по случаю 75-летия

1. Введение

Согласно гипотезе Мищенко-Фоменко некоммутативная интегрируемость влечёт за собой интегрируемость по Лиувиллю, а соответствующие коммутирующие друг с другом интегралы движения принадлежат тому же функциональному классу, что и некоммутативные интегралы движения [2, 3, 4, 7, 10, 11, 12, 17, 18, 20].

В методе Якоби, переменные разделения в уравнениях Гамильтона-Якоби отождествляются с точками на алгебраических кривых и, тем самым, движение в фазовом пространстве заменяется на движение точек на алгебраических кривых [22, 24]. В этом случае интегралы движения естественным образом делятся на два семейства. Одна часть интегралов движения входит в разделённые уравнения, определяющие алгебраические кривые на проективной плоскости. Вторая часть интегралов движения является координатами фиксированных точек на этих кривых, вокруг которых и происходит движение.

Для построения интегралов движения на фазовом пространстве можно использовать теорему Нётер, которая формулирует достаточное условие существования законов сохранения. Для построения интегралов движения, возникающих при изучении движения точек на алгебраических кривых, можно использовать теоремы Абеля и Римана-Роха, которые формулируют достаточные условия для существования таких фиксированных точек и отвечающих им законов сохранения [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33].

Одним из простейших примеров некоммутативных интегрируемых систем является гармонический осциллятор с двумя степенями свободы. В этом случае гамильтоновы уравнения движения

$$\dot q_i=\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}\,,\qquad \dot p_i=-\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}\,,$$

где

$$H(q,p)=\frac{p_1^2+q_1^2+p_2^2+q_2^2}{2}\,,$$

обладают полиномиальными интегралами движения

$$F_1(q,p)=q_1q_2+p_1p_2\,,\quad F_2(q,p)=p_1q_2-p_2q_1\,,\quad F_3(q,p)=\frac{p_1^2+q_1^2-p_2^2-q_2^2}{2}\,,$$

скобка Пуассона между которыми может быть задана с помощью бивектора Пуассона

$$\Pi=2\begin{pmatrix}0 & F_3 & -F_2\\ -F_3 & 0 & F_1\\ F_2 & -F_1 & 0\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Таким образом линейное пространство интегралов движения F_k образует алгебру Ли относительно стандартной скобки Пуассона $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ и $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$.

Вторым примером, обобщение которого мы будем рассматривать ниже, является система Кеплера. В этом случае гамильтониан равен

$$H(q,p) = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2} + \frac{1}{||q||}, \qquad ||q|| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2},$$

Согласно теореме Нётер сохранение вектора углового момента и вектора Лапласа-Рунге-Ленца

$$J = p \times q, \qquad A = p \times (q \times p) - \frac{q}{||q||}$$

следует из инвариантности действия относительно вращений и инфинитезимальных вариаций обобщённых координат. Для движения на плоскости $q_3 = 0$ в качестве независимых интегралов движения можно выбрать ортогональную плоскости движения компоненту вектора углового момента $J_3 = p_1 q_2 - p_2 q_1$ и две компоненты $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ перенормированного вектора Лапласа

$$\tilde{A} = \frac{A}{\sqrt{-H}},$$

лежащие в плоскости движения. Полагая $F_1 = \tilde{A}_1$, $F_2 = \tilde{A}_2$ и $F_3 = J$, мы можем задать скобку Пуассона между данными интегралами движения с помощью все того же бивектора Пуассона

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & F_3 & -F_2 \\ -F_3 & 0 & F_1 \\ F_2 & -F_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом линейное пространство интегралов движения F_i по прежнему образует алгебру Ли относительно стандартной скобки Пуассона. Основное отличие системы Кеплера от гармонического осциллятора в том, что в этом случае интегралы движения $F_{1,2}$ являются алгебраическими функциями на фазовом пространстве, которые однозначно определены только при отрицательных значениях энергии.

В данном обзоре мы обсудим обобщения этих двух гамильтоновых систем, которые были получены в работах [31, 32, 34] с помощью изогений эллиптических кривых. Напомним, что наиболее известными изогениями эллиптических кривых являются преобразования Ландена, Гаусса и Лежандра, которые широко используются при различных численных вычислениях.

2. Суперинтегрируемые системы в методе Якоби

В методе Якоби интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

сводится к нахождению полного интеграла дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$H\left(u, \frac{\partial S}{\partial u}\right) = E \tag{1}$$

относительно функции S вида

$$S(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} S_i(u_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где i-тое слагаемое S_i зависит только от i-той переменной u_i и от n параметров $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Здесь $u=(u_1,\ldots,u_n)$ - переменные разделения, которые связаны каноническим преобразованием с исходными физическими переменными $u_j=u_j(q,p)$ и, поэтому, они также удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\frac{du_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{u_i}},\qquad \frac{dp_{u_i}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial u_i},\qquad i=1,\ldots,n, \tag{2}$$

где p_{u_i} канонически сопряжённые импульсы

$$\{u_i,p_{u_j}\}=\delta_{ij}\,,\qquad \{u_i,u_j\}=\{p_{u_i},p_{u_j}\}=0\,.$$

Решение $S(q,\alpha)$ стационарного уравнения Гамильтона-Якоби (1) зависящее от n произвольных постоянных $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и удовлетворяющее условию

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_i\partial\alpha_j}\right)\neq 0\,.$$

называется полным интегралом, нахождение которого позволяет найти решение исходных уравнений движения согласно теореме Якоби, см. детали в [23].

Теорема 1. *Для любого полного интеграла уравнения (1) решения $u_j=u_j(t,\alpha,\beta)$ и $p_{u_j}=p_{u_j}(t,\alpha,\beta)$ уравнений Гамильтона (2), зависящие от $2n$ произвольных постоянных α_i и β_i, находятся из уравнений*

$$\beta_j=-\frac{\partial S}{\partial\alpha_j}\qquad и\qquad p_{u_j}=\frac{\partial S}{\partial u_j}\,,\qquad j=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Первые уравнения в системе (3) дают решение задачи Лагранжа, т.е. определяют форму траекторий в конфигурационном пространстве. Вторые уравнения называют разделёнными уравнениями

$$p_{u_j}=\frac{\partial S}{\partial u_j}\equiv\frac{\partial S_j(u_j,\alpha)}{\partial u_j}\,,$$

так как в них входит только одна пара переменных u_j и p_{u_j}, и обычно их переписывают в более общем виде

$$\Phi_j(u_j,p_{u_j},\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0\,,\qquad j=1,\ldots,n.$$

Каждое из разделённых уравнений определяет кривую X_j плоскости и, тем самым, лагранжево подмногообразие, отвечающее полному интегралу S, представимо в виде произведения алгебраических кривых $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$. В этом и заключается основная идея Якоби - вместо движения в фазовом пространстве изучается движение точек P_j с абсциссами $x_j=u_j(t)$ и ординатами $y_j=p_{u_j}(t)$ вдоль алгебраических кривых X_j с помощью различных методов алгебраической геометрии.

Если ограничится рассмотрением систем типа Штеккеля [22], когда все кривые X_j являются гиперэллиптическими кривыми, можно ввести переменные действие $\alpha_j=I_j(u,p_u)$, разрешая разделённые уравнения относительно α_j, и переменные угол

$$\Omega_j=-\sum_{i=1}^{n}\int^{P_i}\frac{\partial\Phi_i(x,y)/\partial I_j}{\partial\Phi_i(x,y)/\partial y}\,dx$$

удовлетворяющие стандартным уравнениям движения

$$\dot I_j=0\qquad и\qquad \dot\Omega_j=\partial H/\partial I_j\,. \tag{4}$$

Так как переменные угол являются суммой абелевых интегралов, то решение этих уравнений сводится к обращению Якоби отображения Абеля. Аналогичные переменные угол для систем типа Хитчина обсуждаются в работе [9].

2.1. Движение дивизоров на гиперэллиптической кривой

В частном случае, когда лагранжево подмногообразие, отвечающее интегралам движения $I_j = \alpha_j$, представимо в виде симметризованного произведения одной алгебраической кривой X, движение точек $P_j(t)$ порождает движение их формальной суммы, т.е. дивизора

$$D(t) = P_1(t) + P_2(t) + \cdots + P_n(t)\,. \tag{5}$$

Напомним, что дивизором называют формальную конечную сумму точек на на алгебраической кривой X

$$D = \sum_{i=1} m_i P_i\,.$$

Дивизор называют эффективным или положительным, если $m_i \geq 0$ для всех i. Если для всех $i \neq j$ справедливо $P_i \neq -P_j$, то положительный дивизор называют полу-приведённым (semi-reduced). Если степень положительного дивизора $\sum m_i \leq g$ меньше или равна роду кривой X, то дивизор называют приведённым (reduced). Согласно теореме Римана-Роха любой полу-приведённый дивизор D на гиперэллиптической кривой X рода g

$$X: \quad y^2 + h(x)y + f(x) = 0\,, \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{2g+2} a_i x^i$$

представим в виде суммы

$$D = D' + D_\infty\,, \tag{6}$$

приведённого дивизора D' степени g и некоторой линейной комбинации D_∞ точек на бесконечности, которая зависит от рода кривой, от числа точек на бесконечности и степени дивизора.

Современные алгоритмы приведения полу-приведённых дивизоров описаны в [8]. Например, в алгоритме Кантора,

---

Input $D = (U, V)$ **Output** $D' = (U', V')$

---

while $\deg(U) > g$ do

$U' \leftarrow \frac{f - hV - V^2}{U}, \quad V' \leftarrow -h - V \bmod U'$

$U \leftarrow \mathrm{MakeMonic}(U'), \qquad V \leftarrow V' \bmod U$

return $(U' = U, V' = V)$

используются координаты Мамфорда дивизора $D = (U(x), V(x))$, где $U(x) = \prod_i (x - x_i)^{m_i}$, а полином $V(x)$ степени $deg\,V(x) < deg\,U(x)$ такой, что $V(x_i) = y_i$ [16].

При рассмотрении движения дивизоров, уравнение (6) примет вид

$$D(t) = D'(t) + D_\infty,$$

где D_∞ - некоторая константа, которая не зависит от времени. Так как эволюция и полу приведённого дивизора $D(t)$ (5) степени $n > g$ и приведённого дивизора D' степени g задаётся одними и теми же уравнениями (4), то мы можем выделить семейство систем для которых приведённый дивизор является неподвижным

$$D(t) = D' + D_\infty\,, \qquad D' = const.$$

Координаты неподвижных точек дивизора $D'=P_{n+1}+\cdots+P_{n+g}$ и будут искомыми дополнительными интегралами движения, которые коммутируют с гамильтонианом и не коммутируют с остальными интегралами движения.

Аналогичным образом, вместо дивизора (5) можно рассмотреть полу-приведённый дивизор с кратными точками

$$D(t)=m_1P_1(t)+m_2P_2(t)+\cdots+m_nP_n(t)\,,\qquad m_i\in\mathbb{Z}_+\,,$$

который приводится к неподвижному приведённому дивизору $D'=const$, если в уравнениях движения (2) провести не каноническое преобразование фазового пространства

$$p_{u_j}\to\frac{p_{u_j}}{m_j}$$

отвечающее преобразованию

$$\Omega_j\to\Omega_j=-m_j\sum_{i=1}^n\int^{P_i}\frac{\partial\Phi_i(x,y)/\partial I_j}{\partial\Phi_i(x,y)/\partial y}\,dx$$

переменных угол, задающих эволюцию (4) приведённого дивизора D', см. детали в работах [31, 32, 34].

Теорема 2. *Если уравнения движения интегрируемой системы приводятся к квадратурам, которые описывают движение полу-приведённого дивизора на гиперэллиптической кривой приводимого к постоянному дивизору, то данная система является некоммутативно интегрируемой системой.*

Для описанного выше множества некоммутативно интегрируемых систем гипотеза Мищенко-Фоменко справедлива в классе алгебраических функций.

Доказательство. Согласно теореме Лиувилля для любой интегрируемой системы уравнения движения приводятся к квадратурам. Если эти квадратуры описывают динамику полу-приведённого дивизора D, то согласно теореме Римана-Роха, существует единственный приведённый дивизор D' отвечающий D. Если приведённый дивизор D' неподвижен, то его координаты являются интегралами движения, которые функционально независимы от интегралов движения, входящих в определение гиперэллиптической кривой, согласно теореме Абеля. Эта же теорема гарантирует, что координаты приведённого дивизора, то есть интегралы движения, будут алгебраическими функциями от координат полу-приведённого дивизора, то есть переменных на фазовом пространстве.

Для полного описания этого множества некоммутативно интегрируемых систем можно использовать теорию Бриль-Нетера о классификации дивизоров на алгебраических кривых и выделении подмножеств специальных дивизоров, например дивизоров Вейерштрасса или дивизоров голономных дифференциалов. В данной работе мы ограничимся рассмотрением ряда примеров интегрируемых систем отвечающих полу-приведённым дивизорам и обсудим системы отвечающие дивизорам с простыми и кратными точками на гиперэллиптической кривой. В этом случае имеется возможность возможность уточнить функциональный класс интегралов движения, входящий в гипотезу Мищенко-Фоменко, до полиномиальных и рациональных функций.

Пример 4. *Эллиптические координаты u_j в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и* *отвечающие им импульсы* p_{u_j} *определяются с помощью полиномов Якоби* U *и* V

$$\begin{aligned} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{x-e_i} &= \frac{U(x)}{\prod_{i=1}^{n} x-e_i}, \qquad & U(x) &= \prod_{i=1}^{n}(x-u_i) \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{p_iq_i}{x-e_i} &= \frac{V(x)}{\prod_{i=1}^{n} x-e_i}, \qquad & V(u_j) &= \prod_{i=1}^{n}(u_j-e_i)\cdot p_{u_j} \end{aligned} \tag{7}$$

В эти уравнения входит набор параметров $e_1 < e_2 \cdots < e_n$*, которые задают область определения эллиптических координат*

$$u_1 < e_1 < u_2 < e_2 < \cdots < u_n < e_n.$$

Координатные поверхности геометрически представляют собой эллипсоид ($u_1 = const$)*, однополостный гиперболоид гиперболоид* ($u_2 = const$)*, двухполостный гиперболоид* ($u_3 = const$) *и т.д., для которых параметры* e_i *определяют эксцентриситеты этих поверхностей.*

Полиномы Якоби $U(x)$ *и* $V(x)$ *можно отождествить с координатами Мамфорда [16] эффективного дивизора степени* n

$$D(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\,, \qquad P_j = \Big(x_i = u_i, y_j = V(u_j)\Big) \tag{8}$$

на некоторой гиперэллиптической кривой X *рода* g*. В зависимости от соотношения между числом степеней свободы* n *и родом кривой* g *данный эффективный дивизор может быть:*

1. *вырожденным* $n < g$,
2. *приведённым* $n = g$,
3. *полу-приведённым* $n > g$,

так как согласно определению эллиптических координат $u_i \neq u_j$ *и, поэтому* $P_i \neq -P_j$ *для всех точек дивизора.*

Рассмотрим движение полу-приведённого дивизора $D(t)$ *(8) на гиперэллиптической кривой* X *рода* $g = n-1$ *вида*

$$X: \qquad \Phi(x,y) = y^2 - \prod_{i=1}^{n}(x-e_i)\cdot(\alpha x^n + I_1x^{n-1} + I_2x^{n-2} + \cdots + I_n) = 0 \tag{9}$$

и

$$X: \qquad \Phi(x,y) = y^2 - \prod_{i=1}^{n}(x-e_i)\cdot(I_1x^n + \alpha x^{n-1} + I_2x^{n-2} + \cdots + I_n) = 0\,, \tag{10}$$

отвечающее движению в фазовом пространстве с гамильтонианом $H = I_1$*. В этом случае* $D(t)$ *(8) является полу-приведённым дивизором степени* n *на кривой рода* $g = n-1$*, который приводится к неподвижному дивизору* D' *степени* g

$$D(t) = D' + D_\infty,$$

так как система из g *уравнений движения*

$$\dot\Omega_j = \partial H/\partial I_j = 0\,, \qquad j = 2,\ldots,n$$

легко интегрируется

$$\Omega_j = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int \frac{x_i^{j-1}\,dx_i}{y_i} = const\,, \qquad j = 2,\dots,n$$

и содержат полный набор из g регулярных дифференциалов на гиперэллиптической кривой X рода g. Тем самым, координаты неподвижных точек дивизора $D' = P_{n+1} + \cdots + P_{2n-1}$ являются дополнительными интегралами движения, которые коммутируют с гамильтонианом $H = I_1$ и не коммутируют с остальными переменными действие $I_2,\dots,I_n$.

Подставляя эллиптические координаты u_i и импульсы p_{u_i} в определение координат дивизора с кратными точками

$$U(x) = \prod_{i}^{n}(x-u_i)^{m_i}\,, \qquad V(u_i) = \prod_{j=1}^{n}(u_i - e_j)\cdot\frac{p_{u_i}}{m_i}\,, \tag{11}$$

мы получим полу-приведённый дивизор на гиперэллиптических кривых (9) и (10), который приводится к постоянному приведённому дивизору D'. Как и ранее, координаты неподвижных точек дивизора $D' = P_{n+1} + \cdots + P_{2n-1}$ являются дополнительными интегралами движения.

Следуя [19], мы будем называть некоммутативно интегрируемые системы, отвечающие гиперэллиптическим кривым (9) и (10), системами типа гармонического осциллятора и системами типа Кеплера.

Пример 5. *Подставим в определение эллиптических координат (7) декартовы координаты q_i', которые связаны с исходными декартовыми координатами соотношениями*

$$q_i = q_i'/\sqrt{e_n}\,, \quad i = 1,\dots,n-1, \qquad q_n = (q_n' - e_n)/\sqrt{e_n}$$

и перейдем к пределу $e_n \to \infty$. Заменив q_i' на q_i в полученном выражении мы получим определение параболических координат u_j в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$x - 2q_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{q_i^2}{x-e_i} = \frac{U(x)}{\prod_{i=1}^{n-1} x - e_i}\,, \qquad U(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-u_i)\,,$$

Аналогичным образом мы можем получить и второй полином Якоби $V(x)$ такой, что

$$V(u_j) = \prod_{i=1}^{n-1}(u_j - e_i)\,p_{u_j}\,.$$

Как и ранее, набор параметров $e_1 < e_2 \cdots < e_n$ задаёт область определения параболических координат

$$u_1 < e_1 < u_2 < e_2 < \cdots < u_n$$

такую, что дивизор $D(t) = (U,V)$ является эффективным дивизором. Для гиперэллиптических кривых X рода $g = n-1$

$$X: \qquad \Phi(x,y) = y^2 - \textstyle\prod_{i=1}^{n-1}(x-e_i)\cdot(\alpha x^{n+1} + \beta x_n + I_1 x^{n-1} + I_2 x^{n-2} + \cdots + I_n) = 0\,,$$

$$X: \qquad \Phi(x,y) = y^2 - \textstyle\prod_{i=1}^{n-1}(x-e_i)\cdot(\alpha x^{n+1} + I_1 x^{n} + \beta x^{n-1} + I_2 x^{n-2} + \cdots + I_n) = 0\,,$$

$$X: \qquad \Phi(x,y) = y^2 - \textstyle\prod_{i=1}^{n-1}(x-e_i)\cdot(I_1 x^{n+1} + \alpha x^{n} + \beta x^{n-1} + I_2 x^{n-2} + \cdots + I_n) = 0$$

полу-приведённый дивизор $D(t)$ приводится к дивизору D' степени g, который неподвижен согласно g уравнениям движения $\dot{\Omega}_j = 0$ (4), которые содержат в себе полный набор голоморфных дифференциалов на гиперэллиптической кривой рода g.

Подставляя параболические координаты u_i и импульсы p_{u_i} в определение координат дивизора с кратными точками (11), мы получим полу-приведённый дивизор на одной из трёх гиперэллиптических кривых, который так же приводится к постоянному приведённому дивизору D', координаты которого являются дополнительными интегралами движения.

Таким образом, используя параболические координаты, мы получим три семейства некоммутативно интегрируемых систем, для которых дополнительными интегралами движения будут координаты точек неподвижного дивизора D'.

Все остальные системы криволинейных ортогональных координат в евклидовом пространстве так же могут быть построены из эллиптических координат и, поэтому, мы можем использовать теорему Римана-Роха для построения различных семейств некоммутативно интегрируемых систем, связанных с гиперэллиптическими кривыми рода $g \geq= 1$. Построение аналогичных систем на рациональных кривых обсуждается в работах [13, 30].

В следующем разделе мы обсудим алгебру полученных выше интегралов движения и их форму в простейшем случае $n = 2$ для того, чтобы обсудить применимость гипотезы Мищенко-Фоменко к данным некоммутативно интегрируемым системам.

3. Задача Кеплера и её обобщения

Следуя [32, 34] рассмотрим сначала задачу двух центров, так как именно при рассмотрении этой задачи впервые появились и эллиптические координаты, и соответствующие эллиптические кривые [5]. Детальное описание редукции исходной задачи в трёхмерном пространстве к задаче на плоскости орбиты может быть найдено в учебнике Лагранжа [14].

Согласно Эйлеру, если r и r' расстояния до двух центров на плоскости, то эллиптические координаты $u_{1,2}$ имеют вид

$$r + r' = 2u_1\,, \qquad r - r' = 2u_2\,.$$

Выбирая декартову систему координат так, что центры располагаются в точках с координатами $-\kappa$ и κ на OX-оси получим стандартные выражения

$$q_1 = \frac{u_1 u_2}{\kappa}\,, \qquad \text{и} \qquad q_2 = \frac{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(\kappa^2-u_2^2)}}{\kappa}\,. \tag{1}$$

Координаты $u_{1,2}$ являются криволинейными ортогональными координатами на плоскости, которые имеют смысл только на интервале

$$u_2 < \kappa < u_1\,,$$

Соответствующие импульсы $p_{u_{1,2}}$ находятся из соотношений

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{u_1u_2(p_{u_1}u_1 - p_{u_2}u_2) - \kappa^2(p_{u_1}u_2 - p_{u_2}u_1)}{\kappa(u_1^2-u_2^2)}\,, \\ p_2 &= \frac{(p_{u_1}u_1 - p_{u_2}u_2)\sqrt{u_1^2-\kappa^2}\sqrt{\kappa^2-u_2^2}}{\kappa(u_1^2-u_2^2)}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь задачу Кеплера, в которой отсутствует один из центров притяжения, а функция Гамильтона и соответствующий интеграл движения равны

$$2H = I_1 = p_1^2 + p_2^2 + \frac{\alpha}{r}\,, \qquad I_2 = \frac{\alpha(r^2 - r'^2)}{4r} - (\kappa^2 + q_2^2)p_1^2 - 2q_1q_2p_1p_2 - q_1^2p_2^2\,. \tag{3}$$

Эти функции в терминах эллиптических координат имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}^2}{u_1^2-u_2^2}+\frac{(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}^2}{u_2^2-u_1^2}+\frac{\alpha}{u_1+u_2} \\ I_2 &= \frac{u_2^2(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1^2}}{u_2^2-u_1^2}+\frac{u_1^2(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}^2}{u_1^2-u_2^2}+\frac{\alpha u_1u_2}{u_1+u_2}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Следуя Эйлеру и Лагранжу, подставляя решения этих уравнений относительно p_{u_1} и p_{u_2} в уравнения движения

$$\frac{du_1}{dt}=\{u_1,H\}=\frac{(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}}{u_1^2-u_2^2}\,,\qquad \frac{du_2}{dt}=\{u_2,H\}=\frac{(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}}{u_2^2-u_1^2}\,,$$

получим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(I_1u_1^2-\alpha u_1+I_2)}} &= \frac{dt}{u_1^2-u_2^2}\,, \\ \frac{du_2}{\sqrt{(u_2^2-\kappa^2)(I_1u_2^2-\alpha u_2+I_2)}} &= -\frac{dt}{u_1^2-u_2^2}\,, \end{aligned} \tag{5}$$

Интегрирование суммы данных уравнений приводит к стандартной сумме абелевых интегралов

$$\int\frac{du_1}{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(I_1u_1^2-\alpha u_1+I_2)}}+\int\frac{du_2}{\sqrt{(u_2^2-\kappa^2)(I_1u_2^2-\alpha u_2+I_2)}}=const \tag{6}$$

в которую входит голоморфные дифференциалы на эллиптической кривой X, определяемой уравнением

$$X:\quad \Phi(x,y)=y^2-f(x)=0\,,\qquad f(x)=I_1x^4-\alpha x^3+(I_2-I_1\kappa^2)x^2+\kappa^2\alpha x-I_2\kappa^2 \tag{7}$$

в которое входят значения интегралов движения $I_{1,2}$ [14].

Аналогичным образом, умножая уравнения (5) на $u_{1,2}^2$, мы получим вторую сумму абелевых интегралов

$$\int\frac{u_1^2du_1}{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(I_1u_1^2-\alpha u_1+I_2)}}+\int\frac{u_2^2du_2}{\sqrt{(u_2^2-\kappa^2)(I_1u_2^2-\alpha u_2+I_2)}}=4t \tag{8}$$

Тем самым, решение исходных уравнений движения на фазовом пространстве сведены к квадратурам.

3.1. Движение на проективной плоскости

Абелевы интегралы (6-8) описывают не только движение в задаче Кеплера, но и движение дивизоров на эллиптической кривой. Действительно, введем две точки $P_{1,2}(t)$ на кривой X с координатами

$$x_1=u_1,\quad y_1=(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}\qquad\text{and}\qquad x_2=u_2\,,\quad y_2=(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}\,.$$

Сумма точек $P_{1,2}$ является полу-приведённым дивизором на эллиптической кривой X, который приводится к приведённому дивизору, состоящему из одной точки

$$P_1(t)+P_2(t)=P_3+D_\infty. \tag{9}$$

В нашем случае, складывая две точки $P_{1,2}(t)$ на эллиптической кривой мы получим третью точку P_3, которая неподвижна, согласно уравнению (6). В области определения эллиптических координат

$$u_2 < \kappa < u_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad (x_3, y_3) \neq (\infty, \infty)\,,$$

и, поэтому, абсцисса x_3 и ордината y_3 неподвижной точки P_3 являются однозначно определёнными конечными функциями.

Для нахождения координат точки P_3 мы используем метод Абеля [1] и рассмотрим пересечение эллиптической кривой X

$$X: \qquad \Phi(x,y) = y^2 - f(x) = 0\,, \qquad f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{10}$$

и параболы Y

$$Y: \qquad y = \mathcal{P}(x)\,, \qquad \mathcal{P}(x) = \sqrt{a_4}x^2 + b_1x + b_0\,.$$

Входящие в уравнение параболы коэффициенты находятся из уравнений

$$y_1 = \sqrt{a_4}x_1^2 + b_1x_1 + b_0 \qquad \text{and} \qquad y_2 = \sqrt{a_4}x_2^2 + b_1x_2 + b_0\,,$$

т.е. парабола определяется с помощью интерполяции по Лагранжу

$$\mathcal{P}(x) = \sqrt{a_4}x^2 + b_1x + b_0 = \sqrt{a_4}(x_1 - x)(x_2 - x) + \frac{(x - x_2)y_1}{x_1 - x_2} + \frac{(x - x_1)y_2}{x_2 - x_1}\,. \tag{11}$$

Подставляя $y = \mathcal{P}(x)$ в уравнение эллиптической кривой $f(x) - y^2 = 0$ мы получим полином Абеля

$$\begin{aligned}
\psi &= f(x) - \mathcal{P}^2(x) \\
&= (a_3 - 2b_1\sqrt{a_4})x^3 + (a_2 - 2b_0\sqrt{a_4} - b_1^2)x^2 + (a_1 - 2b_0b_1)x + a_0 - b_0^2 \\
&= (a_3 - 2b_1\sqrt{a_4})(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)
\end{aligned}$$

и абсциссу третьей точки P_3 в уравнении (9)

$$x_3 = -x_1 - x_2 - \frac{2b_0\sqrt{a_4} + b_1^2 - a_2}{2b_1\sqrt{a_4} - a_3} \tag{12}$$

и её ординату

$$y_3 = -\mathcal{P}(x_3) = -\sqrt{a_4}x_3^2 - b_1x_3 - b_0\,, \tag{13}$$

где b_1 и b_0 являются функциями от координат подвижных точек x_1, x_2 и y_1, y_2 (11).

Для задачи Кеплера

$$a_4 = I_1, \quad a_3 = -\alpha\,, \quad a_2 = (I_2 - \kappa^2 I_1)\,, \quad a_1 = \kappa^2\alpha\,, \quad a_0 = -\kappa^2 I_2\,,$$

так что абсцисса неподвижной точки P_3 равна

$$x_3 = \frac{2\Big(\kappa^2(p_{u_1}u_2 - p_{u_2}u_1) - u_1u_2(p_{u_1}u_1 + p_{u_2}u_2)\Big)\Big(\sqrt{I_1}(u_1^2 - u_2^2) - \kappa^2(p_{u_1} - p_{u_2}) + p_{u_1}u_1^2 - p_{u_2}u_2^2\Big) - \alpha(u_1 - u_2)^2(\kappa^2 + u_1u_2)}{\Big(u_1^2 - u_2^2\Big)\Big(2\sqrt{I_1}\Big(\kappa^2(p_{u_1} - p_{u_2}) - p_{u_1}u_1^2 + p_{u_2}u_2^2\Big) + 2\kappa^2(p_{u_1}^2 - p_{u_2}^2) - 2p_{u_1}^2u_1^2 + 2p_{u_2}^2u_2^2 - \alpha(u_1 - u_2)\Big)}\,.$$

Соответствующая ордината y_3 (11) имеет вид

$$y_3 = -\sqrt{I_1}(u_1 - x_3)(u_2 - x_3) - \frac{(x_3 - u_2)(\kappa^2 - u_1^2)p_{u_1}}{u_1 - u_2} - \frac{(x_3 - u_1)(\kappa^2 - u_2^2)p_{u_2}}{u_2 - u_1}\,,$$

Здесь I_1 полиномиальная функция от эллиптических координат (4) и, поэтому, x_3 и y_3 являются алгебраическими функциями от переменных $u_{1,2}$ и $p_{u_{1,2}}$.

В работе [5] Эйлер доказал, что для уравнений Абеля, отвечающих сложению простых точек на эллиптических кривых (9), существует полиномиальный интеграл

$$\begin{aligned} C &= 2a_4x_3^2 + a_3x_3 + a_2 - 2\sqrt{a_4}y_3 = \frac{(u_1^2-\kappa^2)(u_2^2-\kappa^2)(p_{u_1}-p_{u_2})^2}{(u_1-u_2)^2} = \\ &= -\left(p_1q_2 - (q_1-\kappa)p_2\right)^2, \end{aligned}$$

который в задаче Кеплера совпадает с квадратом компоненты вектора углового момента. Опираясь на результаты Эйлера можно сказать, что гипотеза Мищенко-Фоменко справедлива для некоммутативно интегрируемых систем связанных со сложением простых точек на эллиптической кривой.

Существование полиномиального первого интеграла C связано с инвариантностью действия относительно вращений орбитальной плоскости вокруг центра притяжения. Алгебраические первые интегралы x_3 и y_3 не имеют столь простого физического смысла, тем не менее их геометрическое описание тривиально - это координаты неподвижного приведённого дивизора на эллиптической кривой X.

3.2. Нарушение симметрии

В данном разделе мы рассмотрим не канонические преобразования фазового пространства, которые нарушают симметрии действия относительно вращений орбитальной плоскости, но сохраняют неподвижные точки на эллиптической кривой на проективной плоскости [13, 26, 27, 28, 29, 30, 31].

Преобразование импульсов

$$p_{u_1} \to \frac{p_{u_1}}{m} \qquad \text{and} \qquad p_{u_2} \to \frac{p_{u_2}}{n}, \tag{14}$$

где m и n рациональные числа, сохраняет симметрию потенциала относительно вращений и нарушает симметрию кинетической части исходных интегралов движения (3), которые в данном случае примут вид

$$\begin{aligned} 2H = I_1 &= \frac{u_1^2-\kappa^2}{u_1^2-u_2^2}\left(\frac{p_{u_1}}{m}\right)^2 + \frac{u_2^2-\kappa^2}{u_2^2-u_1^2}\left(\frac{p_{u_2}}{n}\right)^2 + \frac{\alpha}{u_1+u_2} \\ I_2 &= \frac{u_2^2(u_1^2-\kappa^2)}{u_2^2-u_1^2}\left(\frac{p_{u_1}}{m}\right)^2 + \frac{u_1^2(u_2^2-\kappa^2)}{u_1^2-u_2^2}\left(\frac{p_{u_2}}{n}\right)^2 + \frac{\alpha u_1u_2}{u_1+u_2}. \end{aligned} \tag{15}$$

В декартовых координатах соответствующая функция Гамильтона (15) имеет вид

$$H = \frac{(m^2+n^2)(p_1^2+p_2^2)}{4m^2n^2} + \frac{(m^2-n^2)\Big((\kappa^2-q_1^2+q_2^2)(p_1^2-p_2^2)+4q_1q_2p_1p_2\Big)}{4m^2n^2rr'} + \frac{\alpha}{2r}.$$

Как и для исходной задачи Кеплера, уравнения движения приводятся к квадратурам. Например, квадратура (6) после не канонического преобразования импульсов (14) примет вид

$$m\int\frac{du_1}{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(I_1u_1^2-\alpha u_1+I_2)}} + n\int\frac{du_2}{\sqrt{(u_2^2-\kappa^2)(I_1u_2^2-\alpha u_2+I_2)}} = const. \tag{16}$$

Подставляя рациональные числа $m = m_1/m_2$ и $n = n_1/n_2$ в это выражение, мы получим сумму эллиптических интегралов с целочисленными коэффициентами

$$m_1n_2\int\frac{du_1}{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(I_1u_1^2-\alpha u_1+I_2)}} + n_1m_2\int\frac{du_2}{\sqrt{(u_2^2-\kappa^2)(I_1u_2^2-\alpha u_2+I_2)}} = const,$$

которая отвечает сложению кратных точек на эллиптической кривой

Для краткости мы предположим, что m и n положительные целые числа. В этом случае сумма эллиптических интегралов (16) отвечает приведению полу-приведённого дивизора, состоящего из двух точек кратности m и n

$$[m]P_1(t) + [n]P_2(t) = P_3 + D_\infty \,. \tag{17}$$

Здесь $[k]P$ обозначает скалярное умножение точки на эллиптической кривой на целое число $k \in \mathbb{Z}$, аффинные координаты этой точки $[k]P = [k](x, y)$ мы будем обозначать $([k]x, [k]y)$, тогда как обозначения приведённого дивизора P_3 в уравнении (17) остаются прежними x_3 и y_3.

Координаты неподвижной точки P_3 в уравнении (17) равны

$$x_3 = -[m]x_1 - [n]x_2 - \frac{2b_0\sqrt{a_4} + b_1^2 - a_2}{2b_1\sqrt{a_4} - a_3}\,, \qquad y_3 = -\sqrt{a_4}x_3^2 - b_1x_3 - b_0\,. \tag{18}$$

В эти уравнения входят функции $b_{1,0}$ которые как и ранее, находятся из уравнений

$$[m]y_1 = \sqrt{a_4}\cdot([m]x_1)^2 + b_1\cdot[m]x_1 + b_0 \qquad \text{and} \qquad [n]y_2 = \sqrt{a_4}\cdot([n]x_2)^2 + b_1\cdot[n]x_2 + b_0\,.$$

в которые входят координаты кратных точек $[m]P_1$ и $[n]P_2$. Для умножения точек на эллиптических кривых можно использовать стандартные алгоритмы [15, 21].

Кроме координат неподвижной точки P_3 в уравнении (17) можно ввести и аналог интеграла Эйлера

$$\begin{aligned} C_{mn} &= 2a_4x_3 + a_3x_3 + a_2 - 2\sqrt{a_4}y_3 = \\ &= \left(\frac{[m]y_1 - [n]y_2}{[m]x_1 - [n]x_2}\right)^2 - a_4\big([m]x_1 + [n]x_2\big)^2 - a_3\big([m]x_1 + [n]x_2\big)\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Данные интегралы движения кратных точек на эллиптической кривой порождают первые интегралы обобщённой задачи Кеплера с полиномиальными интегралами движения (15), если отождествить аффинные координаты на проективной плоскости с координатами на фазовом пространстве:

$$x_1 = u_1, \quad y_1 = (u_1^2 - \kappa^2)\frac{p_{u_1}}{m} \qquad \text{and} \qquad x_2 = u_2\,, \quad y_2 = (u_2^2 - \kappa^2)\frac{p_{u_2}}{n} \tag{20}$$

При $m = n$ интеграл Эйлера C_{mn} (19) равен квадрату компоненты углового момента, сохранение которого связанно с пространственной симметрией задачи. Для произвольных $m \neq n$ интегралы движения x_3, y_3 (18) и C_{mn} (19) будут алгебраическими функциями на фазовом пространстве. Явные выражения для некоторых из этих интегралов могут быть найдены в [31, 32].

Нам не удалось найти полиномиальную комбинацию этих интегралов движения, в отличии от случая сложения простых точек на эллиптической кривой. Тем самым, нам не удалось доказать справедливость гипотезы Мищенко-Фоменко в классе полиномиальных функций для обобщения задачи Кеплера , связанной со сложением кратных точек на эллиптической кривой. Однако, в классе рациональных функций данная гипотеза справедлива.

Согласно [34], функции I_1, I_2 (15) и x_3, y_3 (18) на фазовом пространстве $T^*\mathbb{R}^2$ описывают реализации следующей алгебры первых интегралов

$$\begin{aligned} &\{I_1, I_2\} = 0\,, && \{I_1, x_3\} = 0\,, && \{I_1, y_3\} = 0\,, \\ &\{I_2, x_3\} = \Phi_y(x_3, y_3)\,, && \{I_2, y_3\} = -\Phi_x(x_3, y_3)\,, && \{x_3, y_3\} = \kappa^2 - x_3^2 \end{aligned} \tag{21}$$

отвечающие различным целым числам m и n. Здесь

$$\Phi_y(x,y)=\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}=2y \quad \text{and} \quad \Phi_x(x,y)=\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}=-(4I_1x^3-3\alpha x^2+2(I_2-\kappa I_1)x+\alpha\kappa^2)$$

являются производными функции $\Phi(x,y)$, которая задаёт эллиптическую кривую X (7), а $\{.,.\}$ обозначают стандартные скобки Пуассона

$$\{u_1,u_2\}=0\,,\quad \{p_{u_1},p_{u_2}\}=0\,,\quad \{u_i,p_{u_j}\}=\delta_{ij}\,. \tag{22}$$

При $m=n$ эти полиномиальные скобки Пуассона между алгебраическими интегралами движения приводится к линейной скобке Пуассона с бивектором (2).

4. Гармонический осциллятор и его обобщения

Начнём с рассмотрения функции Гамильтона и первого интеграла, который, как и ранее, является квадратом компоненты углового момента, для гармонического осциллятора на плоскости

$$2H=I_1=p_1^2+p_2^2-\alpha^2(q_1^2+q_2^2)\,,\qquad I_2=(p_1^2-\alpha^2q_1^2)\kappa^2-(p_1q_2+p_2q_1)^2\,,$$

Поставляя в эти функции выражения для координат (1) и импульсов (2) через эллиптические координаты на плоскости, мы получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}^2}{u_1^2-u_2^2}+\frac{(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}^2}{u_2^2-u_1^2}+\alpha^2(\kappa^2-u_1^2-u_2^2)\\ I_2 &= -\frac{u_2^2(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}^2}{u_1^2-u_2^2}-\frac{u_1^2(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}^2}{u_2^2-u_1^2}+\alpha^2u_1^2u_2^2\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Используя эти выражения и скобки Пуассона (22) перепишем уравнения движения

$$\frac{du_1}{dt}=\{u_1,H\}=\frac{(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}}{u_1^2-u_2^2}\,,\qquad \frac{du_2}{dt}=\{u_2,H\}=\frac{(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}}{u_2^2-u_1^2}\,,$$

в виде

$$\frac{du_1}{p_{u_1}}=\frac{dt}{u_1^2-u_2^2}\,,\qquad \frac{du_2}{p_{u_2}}=-\frac{dt}{u_1^2-u_2^2}\,.$$

Исключая время, мы получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{du_1}{(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}}+\frac{du_2}{(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}}=0\,.$$

Подставляя решения уравнений (23) относительно $p_{u_{1,2}}$ в это уравнение и интегрируя, мы получим квадратуру определяющую форму траекторий [14]:

$$\int\frac{du_1}{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(\alpha^2u_1^4+(I_1-\alpha^2\kappa^2)u_1^2+I_2)}}+\int\frac{du_2}{\sqrt{(u_2^2-\kappa^2)(\alpha^2u_2^4+(I_1-\alpha^2\kappa^2)u_2^2+I_2)}}=const$$

Используя подстановку Эйлера $u_i^2=x_i$, приведем это уравнение к сумме эллиптических интегралов на эллиптической кривой X

$$X:\quad \Phi(x,y)=y^2-f(x)=0\,,\quad f(x)=\alpha^2x^4+(I_1-2\alpha^2\kappa^2)x^3+(\alpha^2\kappa^4-I_1\kappa^2+I_2)x^2-\kappa^2I_2x\,. \tag{24}$$

С точки зрения Якоби это стандартное приведение уравнений движения к квадратурам означает, что мы переходим от рассмотрения движения на фазовом пространстве $T^*\mathbb{R}^2$ к рассмотрению движения точек $P_{1,2}(t)$ вдоль эллиптической кривой X. При этом уравнения Гамильтона заменяются на уравнение (9)

$$P_1(t)+P_2(t)=P_3+D_\infty\,.$$

Для осциллятора аффинные координаты подвижных точек $P_{1,2}(t)$ выражаются через эллиптические координаты следующим образом

$$x_1=u_1^2,\quad y_1=(u_1^2-\kappa^2)u_1p_{u_1}\qquad\text{и}\qquad x_2=u_2^2\,,\quad y_2=(u_2^2-\kappa^2)u_2p_{u_2}\,.$$

При этом абсцисса неподвижной точки x_3 (12) равна

$$x_3=-\frac{\Big((u_1^2-\kappa^2)u_2p_{u_1}-(u_2^2-\kappa^2)u_1p_{u_2}+\alpha u_1u_2(u_1^2-u_2^2)\Big)^2}{(u_1^2-u_2^2)\Big((\kappa^2-u_1^2)p_{u_1}^2-(\kappa^2-u_2^2)p_{u_2}^2+2\alpha(u_1(\kappa^2-u_1^2)p_{u_1}-u_2(\kappa^2-u_2^2)p_{u_2})+\alpha^2(\kappa^2-u_1^2-u_2^2)(u_1^2-u_2^2)\Big)}\,,$$

Ордината y_3 (13) является более громоздкой рациональной функцией, которую может быть найдена в [31]. Комбинация рациональных первых интегралов x_3, y_3 , предложенная в общем случае Эйлером, является полиномиальным интегралом движения

$$C=2a_4x_3+a_3x_3+a_2-2\sqrt{a_4}y_3=-(p_1q_2+p_2q_1)^2-\kappa^2I_1+\alpha^2\kappa^4\,,$$

существование которого связано с симметриями конфигурационного пространства.

Аналогичным образом можно доказать существование полиномиальный не коммутативных интегралов для n-мерного осциллятора, задачи Кеплера и ряда других систем, связанных с динамикой полу-приведённых дивизоров состоящих из простых точек на гиперэллиптических кривых. Это позволяет нам предположить справедливость следующего Предложения.

Предложение 1. *Для некоммутативно интегрируемых систем, связанных со сложением простых точек на гиперэллиптической кривой и голоморфными дифференциалами, гипотеза Мищенко-Фоменко справедлива в классе полиномиальных интегралов движения.*

Для всех известных нам примеров данное Предложение справедливо, но общего доказательства у нас нет.

Рассмотрим теперь случай сложения кратных точек. Не каноническое преобразование (14), нарушающее инвариантность действия относительно вращений, порождает следующие интегралы движения

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{u_1^2-\kappa^2}{u_1^2-u_2^2}\left(\frac{p_{u_1}}{m}\right)^2+\frac{u_2^2-\kappa^2}{u_2^2-u_1^2}\left(\frac{p_{u_2}}{n}\right)^2+\alpha^2(\kappa^2-u_1^2-u_2^2)\\ I_2 &= \frac{u_2^2(u_1^2-\kappa^2)}{u_2^2-u_1^2}\left(\frac{p_{u_1}}{m}\right)^2+\frac{u_1^2(u_2^2-\kappa^2)}{u_1^2-u_2^2}\left(\frac{p_{u_2}}{n}\right)^2+\alpha^2u_1^2u_2^2\,, \end{aligned}\tag{25}$$

В декартовых координатах на плоскости соответствующая функция Гамильтона $H=2I_1$ имеет вид

$$H=\frac{(m^2+n^2)(p_1^2+p_2^2)}{4m^2n^2}+\frac{(m^2-n^2)\Big((\kappa^2-q_1^2+q_2^2)(p_1^2-p_2^2)+4q_1q_2p_1p_2\Big)}{4m^2n^2rr'}-\frac{\alpha^2(q_1^2+q_2^2)}{2}\,.$$

где r, r' и κ входят в определение эллиптических координат на плоскости. Соответствующие уравнения Гамильтона приводятся к квадратурам, которые эквивалентны уравнению (17)

$$[m]P_1(t)+[n]P_2(t)=P_3+D_\infty\,,$$

описывающему движение кратных точек на эллиптической кривой X. Для обобщённого гармонического осциллятора функцией Гамильтона (25) координаты неподвижной точки x_3, y_3 (18) и аналог интеграла Эйлера C_{mn} (19) будут рациональными функциями на фазовом пространстве при $m \neq n$. Несколько частных явных выражений для этих рациональных функций могут быть найдены в [31, 32].

В отличии от случая сложения простых точек на эллиптической кривой нам не удалось найти полиномиальную комбинацию полиномиальных $I_{1,2}$ и рациональный интегралов движения x_3, y_3, которая являлась бы дополнительным к $I_)1,2$ интегралом движения. Тем самым, нам не удалось доказать справедливость гипотезы Мищенко-Фоменко для обобщения гармонического осциллятора, связанного со сложением кратных точек на эллиптической кривой. Полученные для обобщённого осциллятора и задачи Кеплера результаты можно сформулировать в виде следующего Предложения.

Предложение 2. *Для некоммутативно интегрируемых систем, связанных со сложением кратных точек на гиперэллиптической кривой и голоморфными дифференциалами, гипотеза Мищенко-Фоменко справедлива в классе рациональных функций.*

Для всех известных нам примеров данное Предложение справедливо, но, как и ранее, общего доказательства у нас нет.

Согласно [34] функции I_1, I_2 (25) и x_3, y_3 (18) на фазовом пространстве $T^*\mathbb{R}^2$ реализуют представления следующей алгебры первых интегралов

$$\begin{aligned} &\{I_1, I_2\} = 0\,, &&\{I_1, x_3\} = 0\,, &&\{I_1, y_3\} = 0\,,\\ &\{I_2, x_3\} = 2\Phi_y(x_3, y_3)\,, &&\{I_2, y_3\} = -2\Phi_x(x_3, y_3)\,, &&\{x_3, y_3\} = 2x_3(\kappa^2 - x_3^2)\,, \end{aligned} \tag{26}$$

зависящие от пары целых чисел m и n. Как и для задачи Кеплера

$$\Phi_y(x, y) = 2y\,, \qquad -\Phi_x(x, y) = 4\alpha^2 x^3 + 3(I_1 - 2\alpha^2\kappa^2)x^2 + 2(\alpha^2\kappa^4 - \kappa^2 I_1 + I_2)x - \kappa^2 I_2$$

являются производными от функции $\Phi(x, y)$ на проективной плоскости, которая определяет эллиптическую кривую X (24), а $\{.,.\}$ обозначают стандартные скобки Пуассона (22). При $m = n$ эти полиномиальные скобки Пуассона между алгебраическими интегралами движения приводится к линейной скобке Пуассона с бивектором (1).

5. Заключение

В данной работы обсуждается справедливость гипотезы Мищенко-Фоменко о существовании интегралов движения из единого функционального класса для некоммутативно интегрируемых систем. Для динамических систем, уравнения движения которых приводятся к абелевым квадратурам, а существование дополнительных интегралов движения связано с приведением полу-приведённого дивизора к неподвижному дивизору на эллиптической или гиперэллиптической кривой X, интегралы движения делятся на два семейства:

- интегралы движения, задающие кривую X на проективной плоскости, являются полиномиальными функциями;
- интегралами движения, задающие координаты неподвижного приведённого дивизора, являются алгебраическими или рациональными функциями.

Используя результаты Эйлера, можно доказать, что для полу-привёденных дивизоров, состоящих из простых точек на кривой X, можно построить полиномиальную комбинацию координат неподвижного дивизора и, тем самым, доказать справедливость гипотезы Мищенко-Фоменко.

Для полу-привёденных дивизоров, состоящих из кратных точек на кривой X, нам не удалось найти комбинацию координат неподвижного дивизора которая была бы полиномом на исходном фазовом пространстве, даже в простейшем случае. Тем самым, нам пока не удалось доказать справедливость гипотезы Мищенко-Фоменко для некоммутативно интегрируемых систем связанных со сложением кратных точек на эллиптической кривой.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-30012).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abel N. H., Mémoire sure une propriété générale d'une classe très éntendue de fonctions transcendantes, Oeuvres complétes, Tome I, Grondahl Son, Christiania (1881), pages 145-211.

2. Bogoyavlenskij O., *Extended integrability and bi-Hamiltonian systems*, // Commun. Math. Phys., 1998, v.196, pp.19-51.

3. Болсинов А. В., *Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгеб- рах: доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко* // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.-2005.-Вып. 26.-с. 87-109.

4. Bolsinov A.V., Jovanović B., *Noncommutative integrability, moment map and geodesic flows* // Annals of Global Analysis and Geometry.-2003.-Vol. 23, p.305-322.

5. Euler L., *Probleme un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver les cas oú la courbe décrite par ce corps sera algébrique*, Mémoires de l'academie des sciences de Berlin v.16, pp. 228-249, (1767).

6. Euler L., Institutionum calculi integralis, v.1, Acta Petropolitana, (1761).

7. Jovanović, B., *Noncommutative integrability and action-angle variables in contact geometry* // J. Symplectic Geom.-2012., v.10, no. 4, pp.535-561.

8. Handbook of Elliptic and Hyperelliptic Curve Cryptography, ed. H. Cohen and G. Frey, Chapman and Hall/CRC, 2006.

9. Hurtubise J.C., Kjiri M., *Separating coordinates for the generalized Hitchin systems and the classical r-matrices* // Commun. Math. Phys., 2000, v.210, pp.521- 540.

10. Fassó F., Ratiu T., *Compatibility of symplectic structures adapted to noncommutatively integrable systems* // J. Geom. Phys., 1998, v.27, pp.199-220.

11. Fassó F., *Superintegrable Hamiltonian systems: geometry and applications* // Acta Appl. Math. 205, v.87,pp.93–121.

12. Fiorani E., Sardanashvily G., *Noncommutative integrability on noncompact invariant manifolds* // J. Phys. A: Math. and Gen., 2006, v.39, n.45, pp. 14035-14042.,

13. Grigoriev Yu. A., Tsiganov A.V., *On superintegrable systems separable in Cartesian coordinates* // Phys. Lett. A, v. 382(32), pp.2092-2096, (2018).

14. Lagrange J.L., Mécanique analytique, v.2, (1789), Œuvres complètes, tome 12.

15. Lang S., Elliptic Curves: Diophantine Analysis, Springer-Verlag, A Series of Comprehensive Studies in Math, v. 231,(1978).

16. Mumford D., Tata Lectures on Theta II, Birkhäuser, 1984.

17. Мищенко А. С., Фоменко А. Т., *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли* // Изв. АН СССР. Сер. матем.-1978.-т. 42, № 2.-с. 396-415.

18. Мищенко А. С., Фоменко А. Т., *Обобщённый метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем* // Функц. анализ и его прил.-1978.-т. 12, № 2.- с. 46-56.

19. Onofri E., Pauri, M., *Search for periodic hamiltonian flows: A generalized Bertrand's theorem* // J. Math. Phys., 1978, v. 19(9), pp. 1850-1858.

20. Садэтов С. Т. Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко // Докл. РАН, 2004, т. 397, № 6.-с. 751-754.

21. Silverman J.H., The Arithmetic of Elliptic Curves, Springer-Verlag New York, 2009.

22. Stäckel P., Über die Integration der Hamilton–Jacobischen Differential Gleichung Mittelst Separation der Variabeln, Habilitationsschrift, Halle, 26pp., 1891.

23. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых систем дифференциальных уравнений.-М.: Факториал, 1995.

24. Tsiganov A. V., *The Stäckel systems and algebraic curves* // J. Math. Phys., 1999, v.40, pp.279-298.

25. Tsiganov A.V., *The Drach superintegrable systems* // J. Phys. A: Math. Gen., 2000, v.33, n.41, pp.7407-7422.

26. Tsiganov A.V., *On maximally superintegrable systems* // Reg. Chaot. Dyn., 2008, v.13(3), pp.178-190.

27. Tsiganov A.V., *Addition theorems and the Drach superintegrable systems* // J. Phys. A: Math. Theor., 2008, v. 41, 335204.

28. Tsiganov A.V., *Leonard Euler: addition theorems and superintegrable systems* // Reg. Chaot. Dyn., 2009, v.14(3), pp.389-406.

29. Tsiganov A.V., *On the superintegrable Richelot systems* // J. Phys. A: Math. Theor., 2010, v. 43, 055201.

30. Tsiganov A.V., *Transformation of the Stäckel matrices preserving superintegrability* // J. Math. Phys., 2019, v. 60, 042701.

31. Tsiganov A.V., *Elliptic curve arithmetic and superintegrable systems* // Phys. Scripta, 2019, v.94, 085207.

32. А. В. Цыганов, *О суперинтегрируемых системах с алгебраическими и рациональными интегралами движения* // ТМФ, 2019, т.199, стр. 218-234.

33. Tsiganov A.V., *Discretization and superintegrability all rolled into one* // arXiv:1902.03884, 2019.

34. Tsiganov A.V., *The Kepler problem: polynomial algebra of non-polynomial first integrals* // Regul. Chaotic Dyn., 2019, v.24, pp.353-369.

REFERENCES

1. Abel N. H., Mémoire sure une propriété générale d'une classe très éntendue de fonctions transcendantes, Oeuvres complétes, Tome I, Grondahl Son, Christiania (1881), pages 145-211.
2. Bogoyavlenskij O., *Extended integrability and bi-Hamiltonian systems*, // Commun. Math. Phys., 1998, v.196, pp.19-51.
3. Bolsinov A. V., *Complete commutative families of polynomials in Poisson-Lie algebras: A proof of the Mischenko-Fomenko conjecture* // In book: Tensor and Vector Analysis, 2005, Vol. 26, pp. 87-109.
4. Bolsinov A.V., Jovanović B., *Noncommutative integrability, moment map and geodesic flows* // Annals of Global Analysis and Geometry.-2003.-Vol. 23, p.305-322.
5. Euler L., *Probleme un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver les cas oú la courbe décrite par ce corps sera algébrique*, Mémoires de l'academie des sciences de Berlin v.16, pp. 228-249, (1767).
6. Euler L., Institutionum calculi integralis, v.1, Acta Petropolitana, (1761).
7. Jovanović, B., *Noncommutative integrability and action-angle variables in contact geometry* // J. Symplectic Geom.-2012., v.10, no. 4, pp.535-561.
8. Handbook of Elliptic and Hyperelliptic Curve Cryptography, ed. H. Cohen and G. Frey, Chapman and Hall/CRC, 2006.
9. Hurtubise J.C., Kjiri M., *Separating coordinates for the generalized Hitchin systems and the classical r-matrices* // Commun. Math. Phys., 2000, v.210, pp.521- 540.
10. Fassó F., Ratiu T., *Compatibility of symplectic structures adapted to noncommutatively integrable systems* // J. Geom. Phys., 1998, v.27, pp.199-220.
11. Fassó F., *Superintegrable Hamiltonian systems: geometry and applications* // Acta Appl. Math. 205, v.87,pp.93–121.
12. Fiorani E., Sardanashvily G., *Noncommutative integrability on noncompact invariant manifolds* // J. Phys. A: Math. and Gen., 2006, v.39, n.45, pp. 14035-14042.,
13. Grigoriev Yu. A., Tsiganov A.V., *On superintegrable systems separable in Cartesian coordinates* // Phys. Lett. A, v. 382(32), pp.2092-2096, (2018).
14. Lagrange J.L., Mécanique analytique, v.2, (1789), Œuvres complètes, tome 12.
15. Lang S., Elliptic Curves: Diophantine Analysis, Springer-Verlag, A Series of Comprehensive Studies in Math, v. 231,(1978).
16. Mumford D., Tata Lectures on Theta II, Birkhäuser, 1984.
17. Mishchenko A. S., Fomenko A. T., *Euler equations on finite-dimensional Lie groups* // Math. USSR-Izv.-1978.-v. 12, n.2, pp. 371–389.
18. Mishchenko A. S., Fomenko A. T., *Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systemsОбобщённый метод Лиувилля интегрирования* // Funct. Anal. Appl., -1978.-v. 12, n. 2, pp. 46-56.

19. Onofri E., Pauri, M., *Search for periodic hamiltonian flows: A generalized Bertrand's theorem* // J. Math. Phys., 1978, v. 19(9), pp. 1850-1858.

20. Sadetov S. T., *A proof of the Mishchenko-Fomenko conjecture* // Dokl. Akad. Nauk, 2004, v. 397, n. 6, pp.751-754.

21. Silverman J.H., The Arithmetic of Elliptic Curves, Springer-Verlag New York, 2009.

22. Stäckel P., Über die Integration der Hamilton–Jacobischen Differential Gleichung Mittelst Separation der Variabeln, Habilitationsschrift, Halle, 26pp., 1891.

23. Trofimov V. V., Fomenko A. T. Algebra and Geometry of the Integrable Hamiltonian Differential Equations. -M.:Factorial, 1995.

24. Tsiganov A. V., *The Stäckel systems and algebraic curves* // J. Math. Phys., 1999, v.40, pp.279-298.

25. Tsiganov A.V., *The Drach superintegrable systems* // J. Phys. A: Math. Gen., 2000, v.33, n.41, pp.7407-7422.

26. Tsiganov A.V., *On maximally superintegrable systems* // Reg. Chaot. Dyn., 2008, v.13(3), pp.178-190.

27. Tsiganov A.V., *Addition theorems and the Drach superintegrable systems* // J. Phys. A: Math. Theor., 2008, v. 41, 335204.

28. Tsiganov A.V., *Leonard Euler: addition theorems and superintegrable systems* // Reg. Chaot. Dyn., 2009, v.14(3), pp.389-406.

29. Tsiganov A.V., *On the superintegrable Richelot systems* // J. Phys. A: Math. Theor., 2010, v. 43, 055201.

30. Tsiganov A.V., *Transformation of the Stäckel matrices preserving superintegrability* // J. Math. Phys., 2019, v. 60, 042701.

31. Tsiganov A.V., *Elliptic curve arithmetic and superintegrable systems* // Phys. Scripta, 2019, v.94, 085207.

32. Tsiganov A. V., *Superintegrable systems with algebraic and rational integrals of motion* // Theoret. and Math. Phys., 2019, v.199, n. 2, pp. 659–674.

33. Tsiganov A.V., *Discretization and superintegrability all rolled into one* // arXiv:1902.03884, 2019.

34. Tsiganov A.V., *The Kepler problem: polynomial algebra of non-polynomial first integrals* // Regul. Chaotic Dyn., 2019, v.24, pp.353-369.

Получено 25.11.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-403-416

Теорема о среднем значении тригонометрических сумм на последовательности многочленов биномиального типа

В. Н. Чубариков

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Аннотация

Доказана теорема о среднем для тригонометрических сумм на последовательности многочленов биномиального типа. Как известно, классическая теорема И. М. Виноградова о среднем [10] относится к последовательности многочленов вида $\{x^n, n \geq 0\}$. Важным приложением найденной теоремы о среднем являются оценки сумм вида

$$\sum_{m \leq P} e^{2\pi i f(m)}, f(m) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p_k(m),$$

где $p_k(x)$ — последовательность целозначных многочленов биномиального типа, а набор чисел $(\alpha_1 \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ представляет собой точку n-мерного единичного куба $\Omega : 0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_n < 1$.

Ключевые слова: теорема И. М. Виноградова о среднем, последовательность многочленов биномиального типа, многочлены Абеля, Лагерра, нижние и верхние факториалы, экспоненциальные многочлены.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков. Теорема о среднем значении тригонометрических сумм на последовательности многочленов биномиального типа // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 403–416.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-403-416

The mean-value theorem for trigonometric sums on the sequence of binomial type polynomials

V. N. Chubarikov

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, president of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Abstract

The mean-value theorem for trigonometric sums on the sequence of binomial type polynomials was proved. As known, the classical I. M. Vinogradov mean-value theorem belong to the sequence of polynomials of the form $\{x^n, n \geq 0\}$. Estimates of sums of the kind

$$\sum_{m \leq P} e^{2\pi i f(m)}, f(m) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p_k(m),$$

are the important application of the finding mean-value theorem. Here $p_k(x)$ is the sequence integer-valued polynomials of the binomial type, but a set of numbers $(\alpha_1 \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ represents a point of the n-fold unit cube $\Omega : 0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_n < 1$.

Keywords: the mean-value I. M. Vinogradov theorem, the sequence of polynomials of the binomial type, polynomials of Abel, Laguerre, lowers and upper factorials, exponential polynomials.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, 2020, "On a mean-value theorem for multiple trigonometric sums" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 403–416.

1. Введение

Предметом настоящей статьи, с одной стороны, являются последовательности многочленов, возникающих из перечислительных задач комбинаторики и классического исчисления конечных разностей в численном анализе (интерполяция, квадратурные формулы) [6, 9]. С другой стороны, в основе статьи лежат аддитивные задачи теории чисел, в современном изложении которых выдающуюся роль играет "круговой метод Г. Харди — Дж. Литтлвуда — С. Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова". В центре метода тригонометрических сумм находится теорема И. М. Виноградова о среднем [10].

Пусть задана последовательность многочленов $\{p_n(x)\}$, удовлетворяющая при $n \geq 0$ равенствам

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y),$$

причём точная степень $p_n(x)$ равна n, а коэффициент при старшей степени равен 1. Такую последовательность $\{p_n(x)\}$ называют последовательностью многочленов биномиального типа [9, 1, 3, 4, 7].

Приведём примеры. Последовательности точных степеней

$$p_n(x) = x^n, n \geq 0,$$

имеем бином Ньютона (см., например, [14], теорема 1, с. 33)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k};$$

нижних факториалов

$$p_n(x) = (x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1), n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

по индукции находим формулу Вандермонда (см., например, [6], с. 18)

$$p_{n+1}(x+y) = (x+y-n)p_n(x+y) = (x+y-n)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-k)p_k(x)p_{n-k}(y) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)(y-n+k)p_{n-k}(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_{k+1}(x)p_{n-k}(y) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k+1}(y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} p_k(x)p_{n-k+1}(y) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k+1}(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p_k(x)p_{n-k+1}(y);$$

верхних факториалов

$$p_n(x) = (x)^n = x(x+1)\dots(x+n-1), n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

аналогично предыдущему доказывается, что эта последовательность многочленов относится к биномиальному типу;

многочленов Абеля [2, 7]

$$p_n(x) = x(x-an)^{n-1}, n \geq 1, a \in \mathbf{R}, p_0(x) = 1;$$

экспоненциальных многочленов [5]

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k, n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

где $s(n,k)$ — числа Стирлинга второго рода, определяемые соотношением

$$(t)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^k, n \geq 1, (t)_0 = t^0 = s(0,0) = 1;$$

многочленов Лагерра

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} (-x)^k, n \geq 0;$$

являются последовательностями многочленов биномиального типа.

Теорема. *Пусть $p_n(x)$ — последовательность многочленов биномиального типа, пусть $J = J(P; n, k, \Lambda)$ — число решений системы диофантовых уравнений вида*

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j p_k(x_j) = \lambda_k, 1 \leq k \leq n, \tag{1}$$

где неизвестные $x_j, 1 \leq j \leq 2k$, пробегают целые значения в пределах от 1 до P, а правые части уравнений $\lambda(k)$ являются постоянными и могут принимать любые целые значения.

Тогда при $k \geq n\tau, \tau \geq 0$, справедлива оценка

$$J \leq D(\tau) P^{2k-\Delta(\tau)}, \Delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\tau}\right).$$

2. Общие леммы

Лемма 1. *Имеем*

$$1) J(P; n, k, \Lambda) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |S(A)|^{2k} e^{-2\pi i(\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n)} \, d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

где

$$S(A) = \sum_{x \leq P} e^{2\pi i f(x)}, f(x) = \alpha_1 p_1(x) + \cdots + \alpha_n p_n(x);$$

$$2) J(P; n, k, \Lambda) \leq J(P; n, k, \mathbf{0}) = J; \quad J \leq P^{2k_1} J(P; n, k - k_1, \mathbf{0});$$

$$3) \sum_{\Lambda} J(P; n, k, \Lambda) = P^{2k}; |\lambda_1| \leq kP(1 + o(1)), \dots, |\lambda_n| \leq kP^n(1 + o(1));$$

$$4) |S(A)|^{2k} = \sum_{\Lambda} J(P; n, k, \Lambda) e^{2\pi i(\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n)};$$

$$5) J(P; n, k, \mathbf{0}) \geq (2k)^{-n} P^{2k - 0{,}5n(n+1)} (1 + o(1)).$$

Доказательство [15], с. 139-140.

Далее набор чисел $x_1, x_3, \dots, x_{2k-1}$ называют регулярным по модулю q, если ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_1(x_{2k-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_n(x_1) & \dots & p_n(x_{2k-1}) \end{pmatrix},$$

рассматриваемой по модулю q, является максимальным. В противном случае набор называют сингулярным.

Лемма 2. *а) Пусть $x_1, \dots, x_{2k}$ — решение системы уравнений (1). Тогда для любого целого числа a набор чисел $x_1 + a, \dots, x_{2k} + a$, также является решением системы уравнений (1).*

б) Пусть набор чисел $x_1, x_3, \dots, x_{2k-1}$ является регулярным (сингулярным) по простому модулю q. Тогда для любого целого числа a набор чисел $x_1 + a, x_3 + a \dots, x_{2k-1} + a$, также является регулярным (сингулярным) по модулю q.

Доказательство. Имеем

$$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j p_l(x_j+a)=\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}p_s(x_j)p_s(a)=\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}p_s(a)\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j p_s(x_j)=0.$$

Тем самым доказано утверждение а).

Утверждение б) следует из того, что после вычитания линейной комбинации строк матрица

$$\begin{pmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_1(x_{2k-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_n(x_1) & \dots & p_n(x_{2k-1}) \end{pmatrix}$$

приводится к матрице Вандермонда.

3. Лемма о числе решений полной системы сравнений

Лемма 3. *Пусть p — простое число, $\{p_n(x)\}$ — последовательность многочленов биномиального типа, T — число решений системы сравнений вида*

$$\begin{cases} p_1(x_1)+\dots+p_(x_n)\equiv p_1(y_1)+\dots+p_1(y_n) \pmod p, \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots \\ p_1(x_1)+\dots+p_(x_n)\equiv p_n(y_1)+\dots+p_n(y_n) \pmod{p^n}, \end{cases} \tag{2}$$

где неизвестные $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ пробегают полную систему вычетов по модулю p^n и набор чисел $x_1,\dots,x_n$ удовлетворяет условию регулярности по модулю p. Тогда имеет место следующее неравенство

$$T\le n!p^{2n^2-0{,}5n(n+1)}.$$

В частности, та же оценка справедлива для последовательности многочленов $p_n(x)=x^n, n\ge 0$, биномиального типа. *Доказательство.* Будем считать, что $p>n$, так как в противном случае нет наборов $x_1,\dots,x_n$, удовлетворяющих условию регулярности по модулю p. Рассмотрим $0\le x_s,y_s<p^n, 1\le s\le n$. Запишем каждое неизвестное в p-адической форме

$$x_s=\sum_{\mu=0}^{n-1}x_{s,\mu}p^\mu, y_s=\sum_{\mu=0}^{n-1}y_{s,\mu}p^\mu, 0\le x_{s,\mu},y_{s,\mu}<p, s=1,\dots,n.$$

Оценим сверху число решений T_0 системы сравнений

$$\begin{cases} p_1(x_{1,0})+\dots+p_1(x_{n,0})\equiv p_1(y_{1,0})+\dots+p_1(y_{n,0}) \pmod p, \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots \\ p_n(x_{1,0})+\dots+p_n(x_{n,0})\equiv p_n(y_{1,0})+\dots+p_n(y_{n,0}) \pmod p, \end{cases}$$

для чего опустим условие регулярности по модулю p на переменные $x_s, 1\le s\le n$.

Имеем $T_0\le n!p^n$. Действительно, зафиксируем любой набор $0\le y_{1,0},\dots,y_{n,0}<p$. Тогда при некоторых $\lambda_s, 1\le s\le n$ набор $0\le x_1,\dots,x_n<p$ является решением системы сравнений

$$\begin{cases} p_1(x_{1,0})+\dots+p_1(x_{n,0})\equiv \lambda_1 \pmod p, \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots \\ p_n(x_{1,0})+\dots+p_n(x_{n,0})\equiv \lambda_n \pmod p, \\ . \end{cases}$$

Число решений этой системы не превосходит $n!$.

Далее при $n-1 \geq \nu \geq 1$ положим

$$u_{s,\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} p^{\mu} x_{s,\mu} = u_{s,\nu-1} + p^{\nu} x_{s,\nu}, 1 \leq s \leq n.$$

Из системы сравнений (2) следует, что любое её решение $x_s, 1 \leq s \leq n$, с условием регулярности по модулю p при любых фиксированных $y_s, 1 \leq s \leq n$, и при некоторых $\lambda_s, 1 \leq s \leq n$, удовлетворяет следующей системе сравнений W_ν вида

$$\begin{cases} p_\nu(u_{1,\nu}) + \dots + p_\nu(u_{n,\nu}) \equiv \lambda_\nu \pmod{p^{\nu+1}}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ p_n(u_{1,\nu}) + \dots + p_n(u_{n,\nu}) \equiv \lambda_n \pmod{p^{\nu+1}}, \\ . \end{cases}$$

Обозначим число её решений символом $T(W_\nu)$.

Зафиксируем любое решение $u_{s,\nu-1}, 1 \leq s \leq n$ системы сравнений $W_{\nu-1}$. Получим условия, которым должны удовлетворять p-адические координаты $x_{s,\nu}, 1 \leq s \leq n$. Находим

$$p_t(u_{s,\nu}) \equiv p_t(u_{s,\nu-1}) + p^{\nu} p_t'(u_{s,\nu-1}) x_{s,\nu} \pmod{p^{\nu+1}}, \nu+1 \leq s \leq n.$$

Таким образом при некоторых $\lambda_t', \nu+1 \leq t \leq n$, приходим к системе сравнений

$$\sum_{s=1}^{n} p_t'(u_{s,\nu-1}) x_{s,\nu} \equiv \lambda_t', \nu+1 \leq t \leq n, \tag{3}$$

при условии, что $u_{s,\nu-1}, 1 \leq s \leq n$, удовлетворяют условию регулярности по модулю p.

Пусть T_ν обозначает число её решений. Тогда $T(W_\nu) \leq T_\nu T(W_{\nu-1})$. Система сравнений (3) эквивалентна следующей системе сравнений

$$\sum_{s=1}^{n} p_t'(x_{s,0}) x_{s,\nu} \equiv \lambda_t' \pmod{p}, \nu+1 \leq t \leq n, \qquad (3).$$

Поскольку строки матрицы

$$\begin{pmatrix} p_{\nu+1}'(x_{1,0}) & \dots & p_{\nu+1}'(x_{n,0}) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_n'(x_{1,0)} & \dots & p_n'(x_{n,0}) \end{pmatrix}$$

линейно независимы по модулю p (условие регулярности), имеем следующую оценку $T_\nu \leq p^\nu$.

Следовательно,

$$T \leq p^{n^2} T_0 \dots T_{n-1} \leq n! \prod_{\nu=0}^{n-1} p^{\nu} = n! p^{2n^2 - 0{,}5n(n+1)}.$$

Лемма доказана.

4. Рекуррентное неравенство

Лемма 4. *Пусть $n \geq 2, k \geq 2n, P \geq 1, J(P;n,k)$ — число решений системы диофантовых уравнений (1). Тогда существует число p такое, что $P^{1/n} \leq p \leq 2P^{1/n}$, и справедливо неравенство*

$$J(P;n,k) \leq 2k^{2n} p^{2(k-n)+2n^2-0{,}5n(n+1)} J(P_1;n,k-n) + 2^{2n^2+1} n^{2k} P^{2(n-1)},$$

где $P_1 = Pp^{-1} + 1$.

Доказательство. Теорема очевидно справедлива при $P \le 2^n n^{2n}$, поскольку второе слагаемое в неравенстве утверждения леммы превосходит P^{2k}. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $P > 2^n n^2$. Тогда на отрезке $[P^{1/n}, 2P^{1/n}]$ будет находиться не менее n различных простых чисел: $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$.

Запишем величину $J(P; n, k)$ в следующем виде

$$J(P;n,k) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x \le P} e^{2\pi i \alpha_1 p_1(x) + \cdots + \alpha_n p_n(x)} \right|^{2k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x_1 \le P} \sum_{x_3 \le P} \cdots \sum_{x_{2k-1} \le P} e^{2\pi i (F(x_1) + F(x_3) \cdots + F(x_{2k-1}))} \right|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

где

$$F(x) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s p_s(x).$$

Все наборы $x_1, x_3, \dots, x_{2k-1}$ разобьём на две совокупности A и B. В первую совокупность A отнесём те из них, которые хотя бы при одном $p_s, 1 \le s \le n$, удовлетворяют условию регулярности по модулю $p_s = p$. Остальные наборы отнесём ко второй совокупности B. Тогда в понятной символической записи имеем

$$J(P;n,k) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_A + \sum_B \right|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \le 2J_1 + 2J_2,$$

где

$$J_1 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_A \right|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n, \quad J_2 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_B \right|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

Перейдём к оценке J_1. Совокупность A наборов $x_1, x_3, \dots, x_{2k-1}$ разобьём на n непересекающихся подсовокупностей $A_1, \dots, A_n$ в соответствии с числом $p_s, 1 \le s \le n$, по которому набор $x_1, x_3, \dots, x_{2k-1}$ является регулярным по модулю p_s. Если набор является регулярным для нескольких p_s, то отнесём его в подсовокупность с наименьшим из таких s. Имеем

$$J_1 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{s=1}^{n} \sum_{A_s} \right|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \le n \sum_{s=1}^{n} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{A_s} \right|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \le n^2 J_0,$$

где J_0 обозначает наибольшее из значений интегралов

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{A_s} \right|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n, p = p_s, A_s = A_0.$$

Поскольку набор $x_1, x_3, \dots, x_{2k-1}$ является регулярным по модулю p, найдутся в этом наборе n чисел $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}$, таких, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} p_1(x_{j_1}) & p_1(x_{j_2}) & \dots & p_1(x_{j_n}) \\ p_2(x_{j_1}) & p_2(x_{j_2}) & \dots & p_2(x_{j_n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n(x_{j_1}) & p_n(x_{j_2}) & \dots & p_n(x_{j_n}) \end{pmatrix}$$

отличен от нуля по модулю p. Без ограничения общности можно считать, что $j_1 = 1, j_2 = 3, \dots, j_n = 2n-1$, так как перестановка столбцов матрицы не влияет на справедливость условия регулярности по модулю p. Следовательно,

$$J_0 \le \binom{k}{n}^2 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \{\sum_{x_1}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_{2n-1}}\}' \sum_{x_{2n+1}}\cdots\sum_{x_{2k-1}} \right|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

где штрих в знаке суммы означает, что суммирование по соответствующим переменным отвечает условию регулярности по модулю p, а суммирование по переменным $x_{2n+1}, \dots, x_{2k-1}$ ведётся по сплошным промежуткам от 1 до P.

Представим $x_j, j = 2n+1, \dots, 2k-1$, в виде

$$x_j = y_j + pz_j, 1 \le y_j \le p, 0 \le z_j \le Pp^{-1}.$$

Тогда

$$\left|\sum_{A_0}{}' \right|^2 = \left| \{\sum_{x_1}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_{2n-1}}\}' \sum_{x_{2n+1}}\cdots\sum_{x_{2k-1}} \right|^2 = \left| \{\sum_{x_1}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_{2n-1}}\}' \right|^2 \left| \sum_{y=1}^{p}\sum_{z\le Pp^{-1}} \right|^{2(k-n)}.$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера. Находим

$$\left|\sum_{A_0}{}' \right|^2 \le p^{2(k-m)-1} \sum_{y=1}^{p} \left| \{\sum_{x_1}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_{2n-1}}\}' \right|^2 \left| \sum_{z\le Pp^{-1}} \right|^{2(k-n)}.$$

Отсюда имеем

$$J_0 \le \binom{k}{n}^2 p^{2(k-n)} \max_y J_{00}, J_{00} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \{\sum_{x_1}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_{2n-1}}\}' \right|^2 \left| \sum_{z} \right|^{2(k-n)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

Величина интеграла J_{00} равна при некотором $y = y_0$ числу решений следующей системы диофантовых уравнений

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j p_t(x_j) = \sum_{j=2n+1}^{2k} (-1)^j p_t(y_0 + pz_j), \quad 0 \le t \le n,$$

где неизвестные $x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}$ удовлетворяют условию регулярности по модулю p, а неизвестные $z_j, 2n+1 \le j \le 2k$ пробегают сплошные промежутки целых чисел от нуля до Pp^{-1}. По лемме 2 с сохранением условия регулярности решения предыдущей системы уравнений являются решениями следующей системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j p_t(x_j - y_0) = \sum_{j=2n+1}^{2k} (-1)^j p_t(pz_j), \quad 0 \le t \le n,$$

Отсюда имеем эквивалентную систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j (x_j - y_0)^t = p^t \sum_{j=2n+1}^{2k} (-1)^j z_j^t, \quad 0 \le t \le n, \tag{4}$$

Пусть $J^*(Pp^{-1}; n, k-m, \Lambda)$ обозначает число решений системы уравнений вида

$$\sum_{j=2n+1}^{2k} (-1)^j z_j^t = \lambda_t, \quad 0 \le t \le n,$$

где Λ — набор фиксированных целых чисел $\lambda_t, 0 \le t \le n$, а неизвестные z_j изменяются в пределах $0 \le z_j \le Pp^{-1}, 2n+1 \le j \le 2k$. Тогда из леммы 1 получим

$$J^*(Pp^{-1}; n, k-m, \Lambda) \le J^*(Pp^{-1}; n, k-m, \mathbf{0}) = J_1^*(P_1; n, k-m, \mathbf{0}) =$$

$$= J(P_1; n, k-m, \mathbf{0}) = J(P_1; n, k-m),$$

где $J_1^*(P_1; n, k-m, \mathbf{0})$ — число решений предыдущей системы уравнений, но неизвестные z_j в ней пробегают целые значения от 1 до P_1.

Следовательно, из системы уравнений (4) имеем

$$J_{00} \le TJ(P_1; n, k-m).$$

Далее, поскольку

$$T \le n! p^{2n^2 - 0{,}5n(n+1)},$$

находим

$$J_1 \le n^2 n! \binom{k}{n}^2 p^{2(k-n)+2n^2-0{,}5n(n+1)} J(P_1; n, k-n) \le k^{2n} p^{2(k-n)+2n^2-0{,}5n(n+1)} J(P_1; n, k-n).$$

Перейдём к оценке J_2. Оценим число U элементов в совокупности B. Набор чисел $x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}$ относится к совокупности B, если при $k \ge n$ матрица

$$\begin{pmatrix} p_1(x_1) & p_1(x_3) & \ldots & p_1(x_{2k-1}) \\ p_2(x_1) & p_2(x_3) & \ldots & p_2(x_{2k-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_n(x_1) & p_n(x_3) & \ldots & p_n(x_{2k-1}) \end{pmatrix}$$

имеет для всякого $s, 1 \le s \le n$, ранг по модулю p_s меньший, чем n. Другими словами, для всякого s найдётся свой набор чисел $c_1^{(s)}, \ldots, c_n^{(s)}$ из полной системы вычетов по модулю p_s такой, что имеют место сравнения

$$\sum_{t=1}^{n} c_t^{(s)} p_t(x_j) \equiv 0 \pmod{p_s}, x_j \equiv x_j(p_s) \pmod{p_s}, j = 1, 3, \ldots, 2k-1,$$

причём не все $c_t^{(s)}$ сравнимы с 0 по модулю $p_s, c_1^{(s)} = 0$ или 1. При фиксированных наборах $c_t^{(s)}, 1 \le t \le n$, каждое из сравнений имеет не более n решений. Отсюда, используя китайскую теорему об остатках, находим

$$U \le \prod_{s=1}^{n} \left(2p_s^{n-1} n^k\right) \le 2^{n^2} n^k P^{n-1}, \quad J_2 \le U^2 \le 2^{2n^2} n^{2k} P^{2(n-1)}.$$

Лемма 4 доказана.

5. Доказательство теоремы 1

Проведём ндукцию по параметру τ. Очевидно, что утверждение справедливо при $\tau = 0$. Предположим, что утверждение теоремы имеет место при $\tau = m$. Докажем его при $\tau = m+1$. Так как $k \geq n(m+1)$, то из леммы 1 находим

$$J(P;n,k) \leq P^{2(k-n(m+1))}J(P;n,n(m+1)).$$

Воспользуемся рекуррентным неравенством из леммы 4. Получим

$$J(P;n,n(m+1)) \leq 2(n(m+1))^{2n}p^{2nm+2n^2-0,5n(n+1)}J(P_1;n,nm) + 2^{2n^2+1}n^{2n(m+1)}P^{2(n-1)},$$

где $P_1 = Pp^{-1}+1$.

По предположению индукции имеем

$$J(P_1;n,nm) \leq D(m)P_1^{2nm-0,5n(n+1)+0,5n(n+1)(1-1/n)^m}.$$

Следовательно,

$$J(P;n,n(m+1)) \leq I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = 2(n(m+1))^{2n}D(m)p^{2nm+2n^2-0,5n(n+1)}P_1^{2nm-0,5n(n+1)+\delta(m)}, \delta(m) = 0,5n(n+1)(1-1/n)^m,$$

$$I_2 = 2^{2n^2+1}n^{2n(m+1)}P^{2(n-1)}.$$

Оценим I_1. Считаем, что $P \geq (2nm)^2$, так как в противном случае утверждение теоремы тривиально. Преобразуя I_1, находим

$$I_1 = 2(n(m+1))^{2n}D(m)p^{2nm+2n^2-0,5n(n+1)-2nm+0,5n(n+1)-\delta(m)}\times$$

$$\times P^{2nm-0,5n(n+1)+0,5n(n+1)(1-1/n)^m}(1+pP^{-1})^{2nm-0,5n(n+1)+0,5n(n+1)(1-1/n)^m}.$$

Поскольку

$$(1+pP^{-1})^{2nm-0,5n(n+1)+0,5n(n+1)(1-1/n)^m} < e < 3,$$

получим

$$I_1 \leq 6(n(m+1))^{2n}D(m)p^{2n^2-\delta(m)}P^{2nm-0,5n(n+1)+0,5n(n+1)(1-1/n)^m} \leq$$

$$\leq 8(n(m+1))^{2n}2^{2n^2}D(m)P^{2n(m+1)-0,5n(n+1)+0,5n(n+1)(1-1/n)^{m+1}} \leq 0,5D(m+1)P^{2n(m+1)-\Delta(m+1)}.$$

Оценим I_2. Имеем

$$I_2 = 2^{2n^2+1}n^{2n(m+1)}P^{2(n-1)} \leq 0,5D(m+1)P^{2n(m+1)-\Delta(m+1)}.$$

Теорема доказана.

6. Вывод оценки суммы по последовательности многочленов биномиального типа

Пусть $\alpha_s, 1 \leq s \leq n,$ — произвольные действительные числа, $p_s(x), s \geq 0,$ — последовательность многочленов биномиального типа, $P > 1$. Рассмотрим тригонометрическую сумму вида

$$S = \sum_{x \leq P} e^{2\pi i f(x)}, f(x) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s p_s(x).$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть n, k_1, k_2 — натуральные числа, $P > 1, Y > 1$ — действительные числа, Λ, M — целочисленные наборы вида $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, причём $|\lambda_r| \le k_1 P^r$, $|\mu_r| \le k_2 Y^r$, $1 \le r \le n$. Тогда*

$$|S|^{4k_1k_2} \le 2^{4k_1k_2} P^{2k_1(2k_2-1)} Y^{2k_1(2k_2-1)} J(P; n, k_1) J(Y; n, k_2) W_0 + (2Y)^{4k_1k_2},$$

где

$$W_0 = \sum_M \left| \sum_\Lambda e^{2\pi i g(M,\Lambda)} \right|, g(M, \Lambda) = \sum_{s=1}^n \alpha_s \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} \lambda_{s-t} \mu_t.$$

Доказательство. В сумме S произведём сдвиг промежутка суммирования. Получим

$$S = Y^{-1} W + 2\theta Y, W = \sum_{y=1}^Y \sum_{x \le P} e^{2\pi i f(x+y)}, |\theta| \le 1.$$

Далее, используя неравенство Гёльдера, находим

$$|W|^{2k_1} \le Y^{2k_1 - 1} \sum_{y=1}^Y \left| \sum_{x \le P} e^{2\pi i f(x+y)} \right|^{2k_1} = Y^{2k_1-1} W_1.$$

$$f(x+y) = \sum_{s=1}^n \alpha_s \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} p_t(y) p_{s-t}(x).$$

Преобразуем сумму W_1. Имеем

$$W_1 \le \sum_{y=1}^Y \sum_{x_1, \ldots, x_{2k_1} \le P} e^{2\pi i g(y,\Lambda)} = \sum_\Lambda J(p; n, k_1) \left| \sum_{y=1}^Y e^{2\pi i g(y,\Lambda)} \right| = W_2,$$

$$g(y, \Lambda) = \sum_{s=1}^n \alpha_s \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} p_t(y) \lambda_{s-t},$$

$$\lambda_r = \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j p_r(x_j), 0 \le r \le n.$$

Вновь, используя неравенство Гёльдера, приходим к оценке

$$|W_2|^{2k_2} \le \left(\sum_\Lambda J(P; n, k_1, \Lambda) \right)^{2k_2 - 1} \sum_\Lambda J(P; n, k_1, \Lambda) \left| \sum_{y=1}^Y e^{2\pi i g(y,\Lambda)} \right|^{2k_2} \le$$

$$\le P^{2k_1(2k_2-1)} J(P; n, k_1) \sum_\Lambda \left| \sum_{y=1}^Y e^{2\pi i g(y,\Lambda)} \right|^{2k_2} = W_3,$$

Собирая вместе соответствующие слагаемые в W_3, окончательно получим

$$W_3 \le J(Y; n, k_2) \sum_M \left| \sum_\Lambda e^{2\pi i g(M,\Lambda)} \right|,$$

$$g(M,\Lambda)=\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\lambda_{s-t}\mu_t.$$

Теорема 2 доказана.

В частности, если положить $\alpha_1=\dots=\alpha_{n-1}=0,\alpha_n=\alpha$, в теореме 2 будем иметь

$$W_0\le\sum_{\mu_1,\dots,\mu_n}\prod_{t=0}^{n}\min\left(2k_1P^t,\frac{1}{2\|\binom{n}{t}\alpha\mu_{n-t}\|}\right),$$

где функция $\|x\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого числа x.

Применение теоремы 1 в этом случае приводит к оценке

$$|S|\ll P^{1-\rho},\rho=\frac{\gamma}{n^2\ln n},$$

где $\gamma>0$ — некоторая постоянная.

7. Заключение

В настоящей работе дано обобщение теоремы И.М.Виноградова о среднем на последовательность многочленов $p_n(x),n\ge0$, биномиального типа, т.е. многочлены имеют представление в виде

$$p_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(x)p_{n-k}(y),$$

Заметим, что теорема И.М.Виноградова имеет дело с последовательностью $x^n,n\ge0$, биномиального типа. Представляется интересным получение нетривиальных оценок тригонометрических сумм вида

$$S=\sum_{x\le P}e^{2\pi i(\alpha_1F_1(x)+\dots+\alpha_nF_n(x))},$$

где $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ — произвольные действительные числа, а $F_n(x)$ — последовательность целозначных многочленов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pincherle S., Amaldi. Le Operazioni Distributive // Zanichelli, Bologna, 1900.
2. Hurwitz A. Über Abel's Verallgemeinerung der binomischen Formel // Acta Math., 1902, **26,** 199–203.
3. Sheffer I. M. Some properties of polynomials of type zero // Duke Math., 1939, **5,** 590–622.
4. Stefensen J. F. The Poweroid, an Extension of the Mathematical of Power // Acta Math., 1941, **73,** 333–366.
5. Touchard J. Nombres Exponentiels et Nombres de Bernuolli // Canad.J.Math., 1956, **8** 305–320.
6. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М: Изд-во ин. лит., 1963.
7. Riordan J. Inverse Relations and Combinatorial Identities // Amer.Math.Monthly, 1964, **71** 485–498.
8. Riordan J. Combinatorial Identities. — New York: Wiley, 1968.

9. Mullin R., Rota G.-C. On the Foundations of Combinatorial Theory: III. Theory of Binomial Enumeration // Graph Theory and its Applications, 1970, 168–213.

10. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное — М.: Физматлит. 1980, 144 с.

11. Карацуба А. А., Коробов Н. М. О теореме о среднем // Докл. АН СССР, 1963, **149,** № 2.

12. Карацуба А. А. Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР, сер.матем., 1966, **30,** № 1.

13. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.

14. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 640 с.

15. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. Гл. ред.физ.-мат. лит. 1987, 368 с.

16. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004, pp. 554.

17. Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН СССР, 1984, **278,** № 2, 302–304.

18. Чубариков В. Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР, сер.матем., 1985, **49,** № 5, 1031–1067.

REFERENCES

1. Pincherle S., Amaldi. 1900. Le Operazioni Distributive // Zanichelli, Bologna.

2. Hurwitz A. 1902. Über Abel's Verallgemeinerung der binomischen Formel // Acta Math., **26,** 199–203.

3. Sheffer I. M. 1939. Some properties of polynomials of type zero // Duke Math., **5,** 590–622.

4. Stefensen J. F. 1941. The Poweroid, an Extension of the Mathematical of Power // Acta Math., 1941, **73,** 333–366.

5. Touchard J. 1956. Nombres Exponentiels et Nombres de Bernuolli // Canad.J.Math., **8** 305–320.

6. Riordan J. 1963. An introduction to combinatorial analysis. — Moscow: Publ.House of a foreign literature.

7. Riordan J. 1964. Inverse Relations and Combinatorial Identities // Amer.Math.Monthly, **71** 485–498.

8. Riordan J. 1968. Combinatorial Identities. — New York: Wiley.

9. Mullin R., Rota G.-C. 1970. On the Foundations of Combinatorial Theory: III. Theory of Binomial Enumeration // Graph Theory and its Applications, 168–213.

10. Vinogradov I. M. 1980. The method of trigonometric sums in the theory of numbers. 2nd Edition., correct.and supplement. — Moscow.: Fizmatlit. pp. 144.

11. Karatsuba A. A., Korobov N. M. 1963. On the mean-value theorem // Doklady AN SSSR„ **149,** № 2.

12. Karatsuba A. A. 1966. Mean-value theorem and complete trigonometric sums // Izvestija. AN SSSR, Ser.Mathem., **30,** № 1.

13. Arkhipov G. I., 1974. Multiple trigonometric sums // Doklady AN SSSR„ **219,** № 5.

14. Arkhipov G. I., 2013. Selected papers. — Orjol: Publ.House of the Orjol University, pp. 464.

15. Arkhipov G. I.„ Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. 1987. The theory of multiple trigonometric sums. — Moscow.: Nauka. Fizmatlit. 368 c.

16. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 2004. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, pp. 554.

17. Chubarikov V. N. 1984. Multiple trigonometric sums with primes // Doklady AN SSSR„ **278,** № 2, 302–304.

18. Chubarikov V. N. 1985. Estimates of multiple trigonometric sums with primes // Izvestija. AN SSSR, Ser.Matem., **49,** № 5, 1031–1067.

Получено 11.01.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 21 Выпуск 2

Попеленский Федор Юрьевич — кандидат физико-математических наук, доцент, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
e-mail: popelens@gmail.com

Тужилин Алексей Августинович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
e-mail: tuz@mech.math.msu.su

Шафаревич Андрей Игоревич — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
e-mail: shafarev@yahoo.com

THE EDITORIAL BOARD

Volume 21 Issue 2

TABLE OF CONTENTS

Volume 21 Issue 2