

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 4 раза в год

Свидетельство о регистрации

СМИ: ПИ № ФС77-47855

ISSN 2226-8383

Том XX

Выпуск 1 (69)

Тула

2019

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,

г. Тула, пр. Ленина, 125,
каб. 310

Тел: +79156812638,
8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL:
<http://www.chebsbornik.ru>

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др.

Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшей школы Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор

В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственный секретарь

Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула),

А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

В. А. Артамонов (Россия, г. Москва)

Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)

В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)

С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)

С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)

Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)

А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)

В. А. Панин (Россия, г. Тула)

Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)

У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)

С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)

А. А. Фомин (Россия, г. Москва)

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)

В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)

В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)

А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)

А. М. Зубков (Россия, г. Москва)

В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)

В. И. Иванов (Россия, г. Тула)

П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)

В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)

М. А. Королёв (Россия, г. Москва)

Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)

М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)

В. Н. Латышев (Россия, г. Москва)

З. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

Х. М. Салиба (Ливан)

А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)

От редакции

Данный выпуск Чебышевского сборника посвящен семидесятилетию выдающегося советского и литовского математика, действительного члена АН Литвы, доктора физико-математических наук, профессора Антанаса Лауринчикаса.

Сборник открывается статьёй о жизни и научной деятельности Антанаса Лауринчикаса.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 20 Выпуск 1

От редакции	3
А. Дубицкас, Р. Мацайтене. Некоторые моменты из жизни Антанаса Лауринчикаса: в поисках Универсальности	6
А. Бальчюнас, Р. Мацайтене, Д. Шяучюнас. Совместная дискретная универсальность для L -функций из класса Сельберга и периодических дзета-функций Гурвица	46
Ю. А. Басалов. Оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$	66
А. Вайгините. Расширение теоремы Лауринчикаса — Матсумото	82
А. Д. Гвишиани, С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов. Исследование систем действительных функций на двумерных сетках с использованием нечетких множеств	94
Н. М. Глазунов. p -адические L -функции и p -адические кратные дзета значения	112
Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса	131
Н. Н. Добровольский. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел	148
Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе	164
Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел	180
А. Дубицкас. О многочленах Ньюмена без корней на единичном круге	197
Е. И. Компанцева, Т. К. Ч. Нгуен. Алгебраически компактные абелевы TI -группы	204
Е. И. Компанцева. Умножения на смешанных абелевых группах	214
М. Б. Левин. О множествах ограниченных остатков для (t, s) -последовательностей I	224
В. П. Платонов, Г. В. Федоров. Критерий периодичности непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей	248
А. Римкявичене. Обобщённая предельная теорема для периодической дзета-функции Гурвица	261
Л. А. Толоконников. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе	272
В. Н. Чубариков. Обобщённые суммы Гаусса и многочлены Бернулли	284
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ	
А. Гияси. Об одном применении интеграла Дирихле	294

А. Н. Кормачева. О неполных частных одной цепной дроби	298
А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток	307
ДОКЛАДЫ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ	
А. Н. Благовисная. Классические радикалы и центроид Мартиндейла артиновых и нётеровых алгебр Ли	313
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЙ	
А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, А. Н. Чуканов, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий, Е. В. Цой, А. А. Калинин. Из истории состояния сверхпластичности металлических систем	354
Р. А. Жуков. Некоторые задачи оптимизации управления социо-эколого-экономическими системами	372
И. О. Лютер. Религиозно-правовой аспект алгебры ал-Хорезми и её статус в иерархии наук ал-Фараби	391
А. Н. Чуканов, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, П. Н. Медведев, Д. В. Малий, А. А. Яковенко, И. Ф. Широкий. Исторические аспекты математического анализа диаграмм деформации металлических материалов	405
ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ	
Виктор Николаевич Латышев: к 85-летию	424
Ю. А. Неретин, А. М. Стёпин. К 80-летию Раиса Сальмановича Исмагилова	425
Михаил Михайлович Глухов (некролог)	431
Борис Анатольевич Дубровин (некролог)	432
Альберт Рубенович Есаян (некролог)	433
Н. М. Добровольский, И. В. Денисов. Жизнь и научная деятельность Альберта Рубеновича Есаяна	434
РЕДКОЛЛЕГИЯ	439
THE EDITORIAL BOARD	443
TABLE OF CONTENTS	447

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-6-45

**Некоторые моменты из жизни Антанаса Лауринчикаса:
в поисках Универсальности**

А. Дубицкас, Р. Мацайтене

Артурас Дубицкас — доктор математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт Математики Вильнюсского университета, Литва.

e-mail: arturas.dubickas@mif.vu.lt

Рената Мацайтене — доктор математических наук, ведущий научный сотрудник, Научный Институт Шяуляйского университета, Литва.

e-mail: renata.macaitiene@su.lt

Аннотация

Эта статья посвящена литовскому теоретико-числовику профессору Антанасу Лауринчикасу по случаю его 70-летия. Очерчиваются основные этапы развития его научной карьеры. Хотя А. Лауринчикас начал с вероятностной теории чисел, впоследствии он стал одним из ведущих мировых ученых в области теории дзета-функций, особенно в отношении их универсальности. Приводится краткий обзор его довузовской жизни и описывается развитие его карьеры математика с момента поступления в Вильнюсский университет.

Мы рассмотрим некоторые результаты Антанаса, начиная с ранних, а затем осветим основные результаты.

В конце представлен список научных публикаций А. Лауринчикаса.

Ключевые слова: Антанас Лауринчикас, Вильнюсский университет, дзета-функция, предельные теоремы, универсальность, моменты дзета-функции.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

А. Дубицкас, Р. Мацайтене Некоторые моменты из жизни Антанаса Лауринчикаса: в поисках Универсальности // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 6–45.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-6-45

**Some Moments in the Life of Antanas Laurinčikas:
the Search for Universality**

A. Dubickas, R. Macaitienė

Artūras Dubickas — habilitated doctor of mathematics, research professor, Institute of Mathematics, Vilnius University, Lithuania.

e-mail: arturas.dubickas@mif.vu.lt

Renata Macaitienė — doctor of mathematics, research professor, Research Institute, Šiauliai University, Lithuania.

e-mail: renata.macaitiene@su.lt

Abstract

This article is dedicated to Lithuanian number theorist Professor Antanas Laurinčikas on the occasion of his 70th birthday. We sketch the main stages in the development of his scientific career. Although A. Laurinčikas started with probabilistic number theory, later on he became one of the leading world scientists in the theory of zeta-functions, especially concerning their universality. In the review we give a brief account of his pre-university life and the development of his career as a mathematician from the time he entered Vilnius University. We review some results of Antanas starting with early ones and then highlight the main results. At the end a list of scientific publications of A. Laurinčikas is presented.

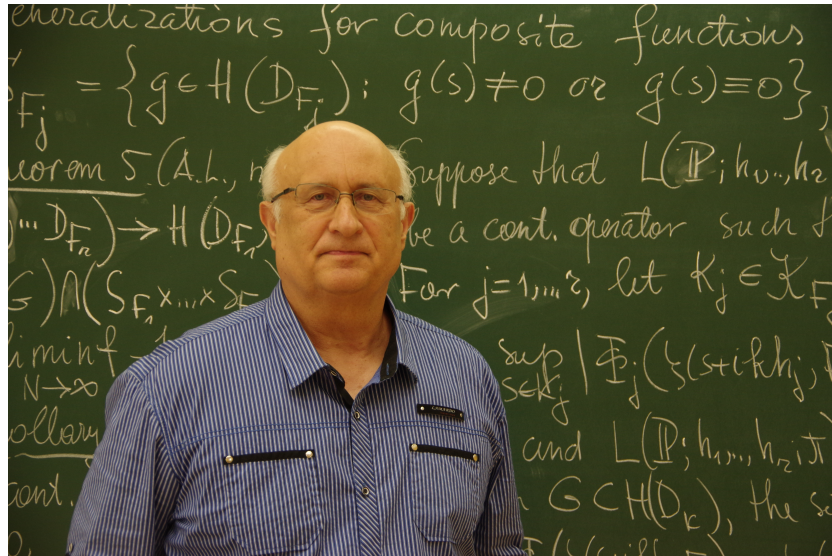
Keywords: Antanas Laurinčikas, Vilnius University, zeta-functions, limit theorems, universality, moments of zeta-functions.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

A. Dubickas, R. Macaitienė, 2019, "Some Moments in the Life of Antanas Laurinčikas: the Search for Universality", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 6–45.

In honor of Professor Antanas Laurinčikas on the occasion of his 70th birthday



1. Short Biography with Some Scientific and Academic Activities

One of the outstanding specialists in the theory zeta functions and the developer of the analytical number theory Antanas Laurinčikas was born in Lithuania on the 17th of February 1948 in the family of Antanina Laurinčikienė and Pranas Laurinčikas. His childhood passed in a small village of Skatikai in Panevėžys district. In 1966, he graduated from Panevėžys Secondary School No. 1, was awarded the Cum Laude diploma and started his studies at the Faculty of Mathematics and Mechanics of Vilnius University.

In 1971, A. Laurinčikas graduated from Vilnius University, awarded with the diploma Cum Laude, and became a postgraduate student under supervision of Professor Kubilius, who was the leading number theorist in Lithuania at that time. In the same year, he started working in the Department of Probability Theory and Number Theory of Vilnius University.



Fig. 1: With parents and sisters Palmyra and Leontina (1948). Fig. 2-3: School year (1961, 1965).



Fig. 4: After lectures of the day are over... (1971).

Antanas Laurinčikas completed his PhD studies in three years and in 1975 defended the thesis (Candidate of Science in Physics and Mathematics) “Value Distribution of Arithmetic Functions” at Minsk University in Belarus. The opponents of his thesis were Professors Vladimir Gennadievich Sprindzuk and Aleksei Georgievich Postnikov.

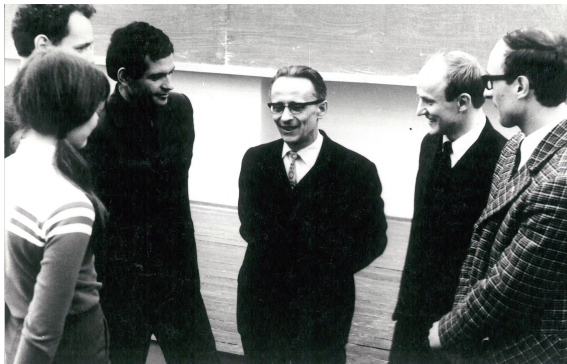


Fig. 5-6: With Professor Jonas Kubilius and colleagues (1975, 1980).

During postgraduate studies, in 1972, he got married. His wife Marytė Kopūstaitė was the last year student at the same Faculty. It is very likely that the interest in mathematics in particular has made the largest impact on occurrence of other common interests and determination to seek them further. In 1976, their family shared a great joy, since the son Laurynas was born at the end of that spring.



Fig. 7: With wife Marytė and son Laurynas (1977).

The enthusiastic and gifted young mathematician has actively pursued his research: he could not limit himself within the borders of his country, and in 1978 he went to the internship at Paris VI University under supervision of Professor Jacques Neveu. This one year long visit determined his scientific career for many years to come: the theory of zeta and L -functions has become his passion, and only from time to time he returned to the classical probabilistic number theory. During this visit, A. Laurinčikas prepared his first paper on the universality of zeta-functions which was presented for publication by the Fields medalist Professor Jean-Pierre Serre. The second internship of A. Laurinčikas took place at V. A. Steklov Mathematical Institute in Moscow in 1986. A famous mathematician Sergei Mikhailovich Voronin who proved his remarkable universality theorem for the Riemann zeta-function was his supervisor during this internship. Both the internship and the acquaintance with Voronin became crucial to Laurinčikas' further carrier.

Investigations of various problems concerning the universality property of zeta-functions became the main field of his intensive research from then and it remains up to now. Nowadays, A. Laurinčikas is one of the leading specialists in this subject worldwide and his remarkable methods are used to prove universality property for various zeta-functions and for some classes or composite zeta-functions.

In 1990, A. Laurinčikas defended his second thesis (Doctor of Science in Physics and Mathematics) "Application of Probabilistic Methods in the Theory of Value Distribution of Dirichlet Series" at Vilnius University. The thesis contains limit theorems for the Riemann zeta-function in the spaces $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$, limit theorems for Dirichlet L -functions, value-distribution of Dirichlet series with multiplicative coefficients, zero-distribution of certain Dirichlet series, etc. Professors Sergei Mikhailovich Voronin, Aleksandr Vasilyevich Malyshev and Bronius Grigelionis were the opponents of the thesis.

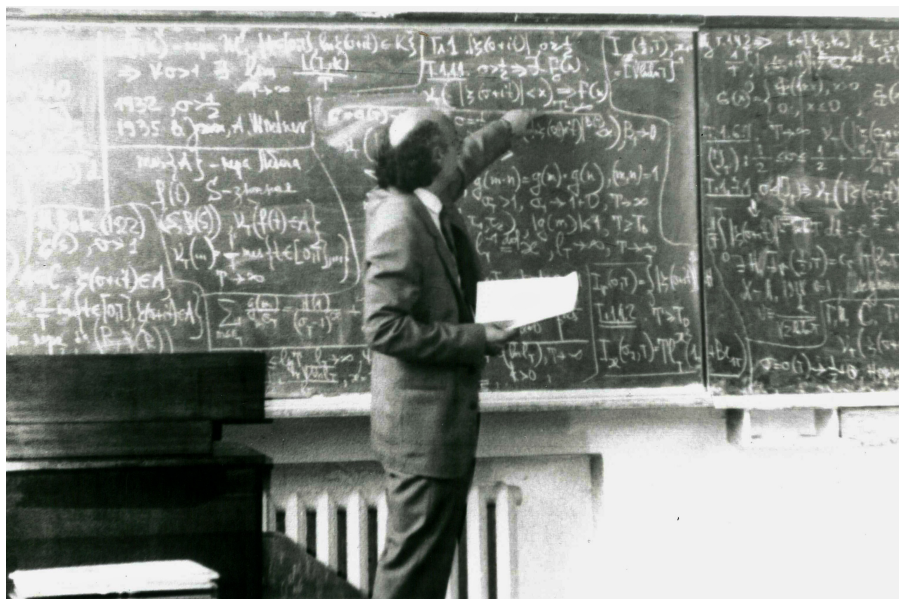


Fig. 8: Defense of the doctoral thesis (1990).

In the same year, the Doctor's Degree in Physics and Mathematics was awarded to him by the Chief Accreditation Commission, and, in 1991, Vilnius University Senate awarded him the title of Professor. Since 1994, Antanas Laurinćikas was an elected member-expert and since 2012 he is a full member of the Lithuanian Academy of Sciences.

Professor ceaselessly continued investigating analytic behaviour of zeta functions given by Dirichlet series. In 1996, he published his first monograph “Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function” which became a standard reference in probabilistic number theory in just a decade. In some sense, this important monograph was the first textbook which is mainly devoted to the theory of universality and related topics. According to Mathematical Reviews, this monograph is already quoted 150 times. The second monograph “The Lerch Zeta-Function” was prepared by him jointly with his former PhD student Ramūnas Garunkštis and published in 2002. In general, the number of results that Antanas managed to publish is very impressive: overall, A. Laurinćikas has published almost 400 papers. Most of them by himself, but many in collaboration with some of his 41 coauthors. Most of the papers of Antanas are related to various problems in zeta-function theory. (The list of main publications is given in Section 3). They deal with limit theorems, the phenomenon of universality and its consequences, such as the functional independence and zero distribution. Other papers are related to problems of integral moments on vertical lines, the Lindelof hypothesis, Mellin transforms and other aspects of zeta-functions.

Besides the above mentioned visits, A. Laurinćikas was constantly improving his qualification and sharing his experience while participating in internships or scientific visits at various universities throughout the world, such as Bordeaux I University (1993), J. W. Goethe University in Frankfurt (2001, 2004), I. Newton Institute in Cambridge (2002), Nagoya University (1998, 2007), Research Institute of Mathematical Sciences in Kyoto (2010–2011). The subject-based relationships built during the internships resulted in the implementation of joint international projects (e.g. Limit Theorems of the Riemann Zeta Function and Its Applications; Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects) and published joint papers written in cooperation with several well-known number theorists Wolfgang Schwarz, Jörn Steuding, Kohji Matsumoto and others.



Fig. 9–10: With co-authors K. Matsumoto (Nagoya, 1998), W. Schwarz and J. Steuding (Frankfurt, 2001).

A. Laurinčikas has periodically delivered his research results at the International (Zurich, 1994; Berlin, 1998; Beijing, 2002) and European (Paris, 1992; Budapest, 1996) Congresses of Mathematicians and various other conferences. In total, he gave talks at more than 100 international conferences.

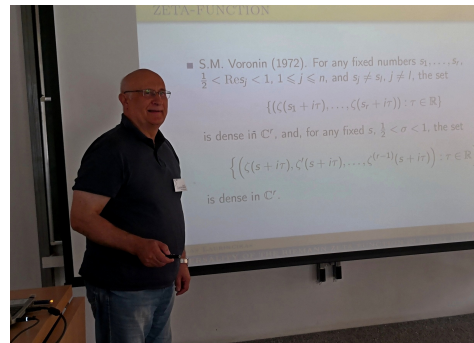
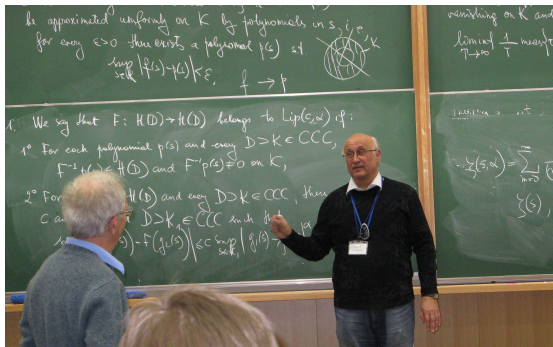


Fig. 11–12: Talks at Conferences (Kyoto, 2010; Będlewo, 2018).

In Lithuania, the results obtained by A. Laurinčikas are highly appreciated and attributed to the scientific works which greatly contributed to the development of science. Twice (which happens



Fig. 13: With President of Lithuanian Academy of Sciences B. Juodka (1999).

Fig. 14: With former PhD student R. Garunkštis (during the award of the Lithuanian Science Prize, 2015).

very rarely) Professor Laurinčikas was awarded the Lithuanian Science Prize. The first was for the cycle of papers “Investigations of Value Distribution of the Riemann Zeta-Function and Other Dirichlet Series (1979–1993)”, whereas the second (jointly with his former student R. Garunkštis) was for the cycle “Zeta Functions. Universality, Zeros and Moments (1999–2013)”. In particular, during the ceremony of awarding the prize he said the following: “The awarded prizes mean the acknowledgement of the entire community of Lithuanian mathematicians. Successful scientific work requires a specific microclimate, traditions, communication with colleagues. We have all this.”

A. Laurinčikas is well known not only in scientific research but also in other academic activities. He is a member (since 2000, a member of the Board) of the Lithuanian Mathematical Society. Since 1992, he is a member of the American Mathematical Society. For many years he has been a member of Vilnius University Council (1991–2001), Šiauliai University Senate (1996–2005), the head of the Department of Probability Theory and Number Theory in Vilnius University (2005–2015). He takes an active part in editorial boards of several journals, like Lithuanian Mathematical Journal, Mathematical Modelling and Analysis, Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, Chebyshevskii Sbornik, Research in Mathematics and Mechanics, is an editor-in-chief of Šiauliai Mathematical Seminar. He is the Reviewer of International Data Bases like Mathematical Reviews, Zentralblatt MATH and the Review Journal (in Russian). A. Laurinčikas is one of the main organizers of the international conferences “Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory” arranged in honour of Jonas Kubilius and co-editor of the proceedings of those conferences. He is also a member of the Organizing or Programme Committees of IV, V and VI international conferences “Algebra and Number Theory: Modern Problems and Applications” (Russia), “Voronoi Conferences on Analytic Number Theory and Space Tilings” (Ukraine), V, VI and VII “International Algebraic Conferences in Ukraine”. For many years he was in charge of scientific seminars in Number Theory in Vilnius and Šiauliai Universities. Professor is often invited to participate in the doctoral dissertation defences as a member of the Council, opponent and expert both in Lithuania and abroad (Russia, Belarus, Ukraine, Germany, Finland).

Pedagogical work is the activity that A. Laurinčikas has been closely involved into too. He has supervised several young researchers to their graduation and formed a strong Lithuanian school. In total Antanas was a scientific advisor of 28 PhDs in Mathematics and currently is an advisor of 5 new PhD students. Professor continuously cooperates with his former PhD students, prepares not only papers but also textbooks for students: “Basics of the Theory of Riemann Zeta-Function”, “The Lerch Zeta-Function”, “Distribution of Prime Numbers”, “Introduction to the Theory of Dirichlet Series”. We hope that this kind of cooperation will continue in the future.



Fig. 15: With Chairman of Šiauliai University Senate A. Gudavičius and Rector V. Laurutis (Doctor Honoris Causa Inauguration, 2007).



Fig. 16: The Rector of Vilnius University, A. Žukauskas, congratulates on the occasion of the jubilee (2018).

Apart from the Lithuanian Science Prizes, Antanas Laurinčikas has been honored for various scientific achievements and other academic and pedagogical activities. He was awarded the Medal of Zigmas Žemaitis by the Lithuanian Mathematical Society for his contributions to science, culture and education (2005), he received Vilnius University Rector's award for outstanding scientific achievements (2004, 2009), Vilnius University Rector's acknowledgement (2003, 2006, 2018), Šiauliai University Rector's acknowledgement (2017), Šiauliai University Science Award for a Group of Scientists (leader A. Laurinčikas) for the scientific progress in Šiauliai University (2015). In 2007, Professor Laurinčikas was inaugurated as the Doctor Honoris Causa of Šiauliai University.

To honor Professor A. Laurinčikas, the International Conferences on Number Theory are organised in Lithuania every five years since 2008. Moreover, on the occasion of the 60th jubilee, a book with the bibliographical index of the works by A. Laurinčikas over the period 1972–2008 has been published [6]. It indexes all his research papers, conference presentations and abstracts, preprints, feature articles for public, edited collections of papers and reviewed articles, presented a list of his membership in conference committees as well a list of his works cited by other authors etc.



Fig. 17–18: Conferences on Number Theory dedicated to the 60th and 65th birthdays of Antanas.

At the end of this section, we would like to emphasize the most important thing, i.e. Antanas' personal humanity. Everyone who knows him will agree that this Personality is not only a wise and diligent mathematician, but also an example of decency, devotion and tolerance.

2. The Main Problems Considered by A. Laurinćikas

Professor Antanas Laurinćikas has been working on various and quite different topics of number theory for almost fifty years now. It is quite difficult to give a detailed report about every topic. However, ten years ago Professor Jörn Steuding wrote a comprehensive and deep survey on A. Laurinćikas' scientific work *The Mathematical Work of Antanas Laurinćikas – an Interim Report* – [23]. Therefore, in the forthcoming sections we will highlight some of the most representative, significant and possibly important results of his oeuvre. Of course, this choice is very subjective, but we believe that these themes are the most important ones to him too.

2.1. Probabilistic Limit Theorems for Real Multiplicative Arithmetic Functions

The first scientific steps of Antanas Laurinćikas were matching the traditional trajectories of investigation of the Lithuanian school of number theory at that time. They were related mainly with some topics in the theory of arithmetical functions and probabilistic number theory.

A. Laurinćikas prepared his first scientific work jointly with Professor J. Kubilius in the last year of his university studies (1972). Under some additional hypotheses, they obtained a theorem of large deviations for some class $\mathfrak{M}$ of multiplicative functions.

Denote by $N(\dots)$ the number of $m \in \mathbb{N}$ satisfying the hypotheses written in place of dots.

THEOREM 1. *Suppose that $g(m) \in \mathfrak{M}$, $n \rightarrow \infty$ and $x = o(\sqrt{\log \log n})$. Then, for the numbers*

$$N\left(m \leq n, 0 < g(m) < \exp\left\{\lambda \log \log n + x|\lambda|\sqrt{\log \log n}\right\}\right) \quad \text{if } x \leq 0,$$

$$N\left(m \leq n, g(m) > \exp\left\{\lambda \log \log n + x|\lambda|\sqrt{\log \log n}\right\}\right) \quad \text{if } x \geq 0,$$

the formula

$$n\beta_0\Phi(-|x|)e^{Q_n(x)}\left(1 + \frac{O(|x|+1)}{\sqrt{\log \log n}}\right)$$

is true, while, for the numbers

$$N\left(m \leq n, -\exp\left\{\lambda \log \log n + x|\lambda|\sqrt{\log \log n}\right\} < g(m) < 0\right) \quad \text{if } x \leq 0,$$

$$N\left(m \leq n, g(m) < -\exp\left\{\lambda \log \log n + x|\lambda|\sqrt{\log \log n}\right\}\right) \quad \text{if } x \geq 0,$$

the formula

$$n\beta_1\Phi(-|x|)e^{Q_n(x)}\left(1 + \frac{O(|x|+1)}{\sqrt{\log \log n}}\right)$$

is true. Here

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

$$\beta_k = \frac{\omega_0 + (-1)^k \omega_1}{2}, \quad \omega_k = \prod_p \sum_{\substack{\alpha=0 \\ g(p^\alpha) \neq 0}}^{\infty} \frac{\text{sgn}^k g(p^\alpha)}{p^\alpha}, \quad k = 0, 1,$$

$$Q_n(x) = \frac{x^2}{2} + \xi - (1 + \xi) \log(1 + \xi) \log \log n, \quad \xi = \frac{x \text{sgn} \lambda}{\sqrt{\log \log n}}.$$

During his postgraduate studies, A. Laurinćikas created the theory of multidimensional characteristic transforms and, using them, obtained the multidimensional asymptotic distribution laws for real multiplicative functions. Also, he developed the theory of characteristic transforms of probability measures on the complex plane and obtained the asymptotic distribution laws for complex-valued multiplicative functions.

Let P be a probability measure on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. The characteristic transform $\varphi(t, k)$ of P is defined by the formula

$$\varphi(t, k) = \int_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} |z|^{it} e^{ik \arg z} dP, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In 1975, he proved several continuity theorems for probability measures on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ in terms of characteristic transforms and applied this to prove limit theorems for the complex-valued function

$$(A'_n g(m))^{\frac{1}{B'_n}} e^{i \frac{f(m) - A''_n}{B''_n}},$$

where $g(m)$ and $f(m)$ are real multiplicative and additive arithmetic functions, respectively, and A' , A'' and $B'_n > 0$, $B''_n > 0$ are certain normalising constants. The distribution laws obtained generalized those of the famous paper of H. Delange [5]. Also, A. Laurinćikas under influence of Professor I. Kátai, considered multiplicative functions defined on the set of values of polynomials. For them he obtained asymptotic distribution laws with estimates of the rate of convergence.

Since 1980, A. Laurinćikas focuses on the theory of zeta-functions, but from time to time he returns to classical probabilistic number theory.

2.2. Moment Problem

For the zeta-function $Z(s)$ with critical line $\sigma = \sigma_c$, the moment problem consists of finding the asymptotics or estimates for

$$I_k(\sigma, T; Z) = \int_0^T |Z(\sigma + it)|^{2k} dt, \quad \sigma \geq \sigma_c, \quad k \geq 0,$$

as $T \rightarrow \infty$. In various problems the results of such kind replace the individual values of zeta-functions. For example, the Lindelöf conjecture states that

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll_{\epsilon} t^{\epsilon}, \quad t \geq t_0 > 0,$$

with every $\epsilon > 0$ is equivalent to the estimate

$$I_k\left(\frac{1}{2}, T; \zeta\right) \ll_{\epsilon, k} T^{1+\epsilon}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Also, there is a conjecture [24] asserting that

$$I_k\left(\frac{1}{2}, T; \zeta\right) \sim c(k) T (\log T)^{k^2}$$

as $T \rightarrow \infty$. However, the progress in this problem is very slow. For example, G. H. Hardy and J. E. Littlewood (1918) proved that $c(1) = 1$, A. E. Ingham (1926) evaluated $c(2) = \frac{1}{2\pi^2}$ and A. Laurinćikas (1996) showed that $c(u(\sqrt{2 \log \log T})^{-1}) = 1$, $u > 0$.

Let $\sigma_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_T}$ with $l_T > 0$, $l_T \nearrow \infty$,

$$\kappa_T = \begin{cases} (2^{-1} \log l_T)^{-\frac{1}{2}} & \text{if } l_T \leq \log T, \\ (2^{-1} \log \log T)^{-\frac{1}{2}} & \text{if } l_T \geq \log T, \end{cases}$$

and $L_T = \min(l_T, \log T)$. Similarly to the case $\sigma = \frac{1}{2}$, there is a conjecture asserting that

$$I_k(\sigma_T, T; \zeta) \sim a(k) L_T^{k^2}$$

as $T \rightarrow \infty$. J. B. Conrey and A. Ghosh proved the following [4]: under assumption of the Riemann hypothesis, one has

$$I_k\left(\frac{1}{2}, T; \zeta\right) \geq (c_k + o(1))T(\log T)^{k^2}.$$

A. Laurinćikas (1995) generalized it and proved the estimate

$$I_k(\sigma_T, T; \zeta) \geq a_k T L_T^{k^2}$$

with some explicit a_k . Also, various unconditional and conditional estimates were obtained for $I_k(\sigma_T, T; \zeta)$ with fractional k .

Let

$$E(\sigma, T) = I_1(\sigma, T; \zeta) - \zeta(2\sigma)T - (2\pi)^{2\sigma-1}(2-2\sigma)^{-1}\zeta(2-2\sigma)T^{2-2\sigma}.$$

The Atkinson type formula estimates and the mean square estimates were obtained for $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, by K. Matsumoto and T. Meurman [19], and by A. Ivić and K. Matsumoto [11]. A. Laurinćikas (1992, 1993) considered their versions for $\sigma = \sigma_T$ and uniformly with respect to σ .

Jointly with his students A. Laurinćikas investigated moments of various other zeta-functions and obtained some asymptotical formulas. In 2001, jointly with D. Šiaučiūnas he proved an asymptotical formula for $I_1(\sigma, T; \zeta(s; \mathbf{a}))$, $1/2 \leq \sigma < 1$, where $\zeta(s; \mathbf{a})$ is classical periodic zeta-function. D. Klusch [15] obtained asymptotical formula for $I_1(\sigma, T; L(\lambda, \alpha, s))$, $1/2 \leq \sigma \leq 1$, where $L(\lambda, \alpha, s)$ is the Lerch zeta-function. A. Laurinćikas jointly with R. Garunkštis and J. Steuding (2003) proved an approximate functional equation for $L(\lambda, \alpha, s)$ and estimated the error term in Klusch's formulae. Some results were obtained for the functions

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{m^s}, \quad \sigma > 1.$$

In this case, with D. Šiaučiūnas he obtained (2007, 2009) the asymptotics for $I_2(\sigma, T; \zeta_\lambda)$ with irrational and rational λ . Also, jointly with J. Karaliūnaitė (2007) he proved an average version of the Atkinson type formula for $\zeta_\lambda(s)$ on the critical line.

A lot of attention has been paid to zeta function

$$\zeta(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}, \quad \sigma > \frac{\kappa+1}{2},$$

where F is a normalized Hecke eigen cusp form of weight κ with respect to the full modular group with coefficients $c(m)$, $m \in \mathbb{N}$, of the Fourier series expansion at ∞ . A. Laurinćikas jointly with R. Ivanauskaitė (2005), under an analogue of Riemann hypothesis for $\zeta(s, F)$, obtained the following asymptotical formula

$$I_{2u\kappa_T}(\sigma_T, T; \zeta(s, F)) = T e^{\frac{\kappa^2}{2}} (1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty,$$

uniformly in $u > 0$ in every bounded interval, where

$$\sigma_T = \frac{\kappa}{2} + \frac{\phi_T \sqrt{\log \log T}}{\log T},$$

$\phi_T > 0$, $\phi_T \rightarrow \infty$ and $\log \phi_T = o(\log \log T)$. Moreover, jointly with J. Steuding (2007) he proved that, for $k = \frac{1}{n}$,

$$I_{2k} \left(\frac{\kappa}{2}, T; \zeta(s, F) \right) \gg T(\log T)^{k^2},$$

and, under an analogue of the Riemann hypothesis,

$$I_{2k} \left(\frac{\kappa}{2}, T; \zeta(s, F) \right) \ll T(\log T)^{k^2}.$$

Many authors investigated moments of Dirichlet L -functions $L(s, \chi)$, where χ is a Dirichlet character modulo q . A. Laurinćikas jointly with A. Kačėnas and S. Zamařys (2005) obtained the estimates, for $k = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$c_1(q)T(\log T)^{k^2} \ll I_k \left(\frac{1}{2}, T; L(s, \chi) \right) \leq c_2(q)T(\log T)^{k^2},$$

where $c_1(q) \leq c_2(q)$ are positive constants.

2.3. Limit Theorems

An idea of application of probabilistic methods in the theory of zeta-functions belongs to H. Bohr. This idea was realized in joint work with B. Jessen [2]. They proved that, for $\sigma > 1$, the limit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{J\{t \in [0, T] : \log \zeta(\sigma + it) \in R\}}{T}$$

exists, where $J\{A\}$ denotes the Jordan measure of a measurable set $A \in \mathbb{R}$, and R is a rectangle on $\mathbb{C}$ with edges parallel to the axis. Two years later, they extended the above result to the region $\sigma > \frac{1}{2}$. In their proof Bohr and Jessen created and used the theory of sums of convex curves. The rate of convergence in Bohr-Jessen's theorems was estimated by K. Matsumoto in [16] and [17], and jointly with G. Harman in [9]. A generalization of Bohr-Jessen's results for more general zeta-functions was given by K. Matsumoto for zeta-functions of cusp forms, Dedekind zeta-functions, zeta-functions of algebraic number fields, zeta-functions given by polynomial Euler product (1989, 1990, 1991, 1992).

New versions of Bohr-Jessen's theorems were given by B. Jessen and A. Wintner [13]. More precisely, they developed a method of infinite convolutions of probability measures. Later V. Borchsenius and B. Jessen [3] gave a method of almost periodic functions.

In the fifth decade of 20th century, the theory of the weak convergence of probability measures was created and developed by A. N. Kolmogorov, P. Erdős, M. Kac, J. L. Doob, M. Donsker, Yu. V. Prokhorov, L. LeCam, V. S. Varadarajan.

Let $\mathcal{B}(X)$ denote the Borel σ -field of the metric (or topological) space X , and P and P_n , $n \in \mathbb{N}$, be probability measure on $(X, \mathcal{B}(X))$. We recall that P_n , as $n \rightarrow \infty$, converges weakly to P if, for every real continuous bounded function f on X ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f dP_n \rightarrow \int_X f dP.$$

It turned out to be convenient to state Bohr-Jessen's type results in the form of limit theorems on the weak convergence of probability measures.

At that time, A. Laurinćikas had already a good knowledge in probability theory because his advisor Professor J. Kubilius was not only a number theorist but also a probabilist, and the advisor in Paris VI Professor J. Neveu was an expert in probability theory too. Thus, Antanas started to use the classical probabilistic theory and application of probabilistic methods in the theory of zeta-functions. As we have mentioned above, this was realized in the thesis of doctor of sciences, and some years later, in his monograph devoted to limit theorems not only for the Riemann zeta-function but also for Dirichlet L -functions and more general Dirichlet series.

For example, the Bohr-Jessen theorem can be stated in the following form.

THEOREM 2. *Suppose that $\sigma > \frac{1}{2}$ is fixed. Then, on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, there exists a probability measure P_σ such that*

$$\frac{1}{T} \text{meas} \{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

converges weakly to P_σ as $T \rightarrow \infty$.

The behaviour of $\zeta(s)$ on the critical line $\sigma = \frac{1}{2}$ is more complicated, since in this case a certain normalization is needed. Probably in 1945, A. Selberg (unpublished) obtained the following limit theorem in this case: for any measurable set $A \subset \mathbb{C}$ having a positive Jordan content,

$$\frac{1}{T} \text{meas} \left\{ t \in [0, T] : \frac{\log \zeta(\frac{1}{2} + it)}{\sqrt{\log \log t}} \in A \right\} = \frac{1}{\pi} \int_A e^{-x^2 - y^2} dx dy.$$

This was generalized in the monograph of D. Joyner [14], for more general zeta-functions.

A. Laurinćikas considered $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ itself but not the logarithm $\log \zeta(\frac{1}{2} + it)$. Let

$$G(x) = \begin{cases} \Phi(\log x) & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x \leq 0, \end{cases} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

With this notation, in 1996, A. Laurinćikas proved the following:

THEOREM 3. *Let $l_T \leq \log T$ and $\sigma_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_T}$. Then the distribution function*

$$\frac{1}{T} \text{meas} \left\{ t \in [0, T] : |\zeta(\sigma_T + it)|^{\frac{1}{\sqrt{2^{-1} \log l_T}}} < x \right\}$$

converges pointwise to $G(x)$ as $T \rightarrow \infty$.

Let $\phi_T \nearrow \infty$ and $\phi_T = o(\log \log T)$ as $T \rightarrow \infty$. Then, for $\sigma \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\phi_T \sqrt{\log \log T}}{\log T} \right]$, the distribution function

$$\frac{1}{T} \text{meas} \left\{ t \in [0, T] : |\zeta(\sigma + it)|^{\frac{1}{\sqrt{2^{-1} \log \log T}}} < x \right\}$$

converges pointwise to $G(x)$ as $T \rightarrow \infty$.

Similar results also hold in the complex plane. For example, the probability measure

$$\frac{1}{T} \text{meas} \left\{ t \in [0, T] : \left(\zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right)^{\frac{1}{\sqrt{2^{-1} \log \log T}}} \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

converges weakly to the lognormal probability measure on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ as $T \rightarrow \infty$. Some results near the critical line $\sigma = \frac{\kappa}{2}$ were obtained by A. Laurinćikas jointly with his student R. Ivanauskaitė

(2005) for zeta-functions of normalized Hecke eigen cusp forms of weight κ for the full modular group.

Also, limit theorems in various spaces were obtained by A. Laurinčikas for Matsumoto zeta-functions (class of zeta-functions defined by polynomial Euler product), Hurwitz zeta-functions, Lerch zeta-functions, periodic Hurwitz zeta-functions, periodic zeta-functions, Esterman zeta-functions, zeta-functions of cusp forms, zeta-functions of newforms, Dirichlet L -functions, zeta-functions of finite Abelian groups, zeta-functions of elliptic curves, general Dirichlet series, some classes or subclasses of zeta-functions (e.g. for zeta-functions from a subclass of the Selberg class) and for various composite functions of zeta-functions. A. Laurinčikas began to consider weighted limit theorems for zeta-functions too. For example, he proved weighted limit theorems for general Dirichlet series, for twists with Dirichlet character of zeta-functions of cusp forms, for zeta-functions of elliptic curves, etc. A lot of mentioned results are given jointly with his former PhD students R. Kačinskaitė, J. Ignatavičiūtė, R. Šleževičienė, I. Belovas, J. Genys, V. Balinskaitė, A. Javtokas, A. Kolupayeva and others.

In principle, in such problems one can investigate continuous and discrete cases. In the continuous case, the weak convergence of the measure

$$\frac{1}{T} \text{meas} \{t \in [0, T] : Z(s + i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(X),$$

as $T \rightarrow \infty$, can be investigated, where the shifts τ can take arbitrary real values. While, in discrete case, the shift τ takes values from certain discrete set, and the weak convergence of the measure

$$\frac{1}{N+1} \# \{0 \leq m \leq N : Z(s + imh) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(X),$$

as $N \rightarrow \infty$, $h > 0$ is a fixed number, is analyzed. Here, X can be $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, the space of analytic functions $H(G)$ or meromorphic functions $M(G)$, where G is a region in $\mathbb{C}$.

Limit theorems in the space $H(G)$ are important themselves and have applications in the theory of universality. Theorems of such a kind were proposed by B. Bagchi in his PhD thesis [1]. A. Laurinčikas developed and simplified Bagchi's method and applied it for many other classes of zeta-functions. J. Steuding extended [22] this theory for L -functions from the Selberg class.

2.4. Universality

Universality of zeta-functions is the main field of investigations of A. Laurinčikas. Most of his results are described in detail in a very extensive survey on the universality for zeta and L -functions [18] prepared by Professor Kohji Matsumoto.

In 1975, S. M. Voronin discovered the universality of the Riemann zeta-function [25]. Let $0 < r < \frac{1}{4}$. Voronin proved that, for any continuous non-vanishing function $f(s)$ in the disc $|s| \leq r$ which is analytic in the open disc $|s| < r$, and every $\varepsilon > 0$, there exists a real number $\tau = \tau(\varepsilon)$ such that

$$\max_{|s| \leq r} \left| \zeta \left(s + \frac{3}{4} + i\tau \right) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

This interesting result has been noticed and further developed by many mathematicians.

S. M. Gonek [8] in his PhD thesis developed Voronin's method and obtained the joint universality (hybrid) for Dirichlet L -functions. He also proved universality of Hurwitz zeta-functions with rational parameter. As we have already mentioned above, in 1979, A. Laurinčikas obtained the universality for a class of Dirichlet series with multiplicative coefficients. In fact, he likes very much a probabilistic approach in the proof of universality that is based on limit theorems in the space $H(D)$, where D is the right-hand side of the critical strip. A. Reich, B. Bagchi and A. Laurinčikas improved Voronin's theorem to the following more general statement.

Let $\mathcal{K}$ be a class of compact subsets of $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ with connected complements, and let $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, be the class of continuous non-vanishing functions on K which are analytic in the interior of K . Then, the following is true:

THEOREM 4. *Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\epsilon > 0$,*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \epsilon \right\} > 0.$$

Universality of other zeta and L -functions, including the functions approximating all analytic not necessary non-vanishing functions defined on the strip D , has been considered by A. Laurinćikas too. For example, universality for the Lerch zeta-function (1997, 2000, 2010), for the Matsumoto zeta-function (1998), for zeta-functions of cusp forms (with K. Matsumoto, 2001), for zeta-functions attached to finite Abelian groups (2001), for zeta-functions with multiplicative coefficients (with R. Šleževičienė, 2002), for Estermann zeta-functions (with R. Garunkštis, R. Šleževičienė and J. Steuding, 2002), for general Dirichlet series (with W. Schwarz and J. Steuding, 2003), for zeta-functions of elliptic curves (with V. Garbaliuskienė, 2005), for zeta-functions of new forms (with K. Matsumoto and J. Steuding, 2003, 2005), for periodic Hurwitz zeta-functions (with A. Javtokas, 2006; R. Macaitienė, 2009), for periodic zeta-functions (with D. Šiaučiūnas, 2007, 2010), for some functions related to zeta-functions of certain cusp forms (with K. Matsumoto and J. Steuding, 2013; with D. Šiaučiūnas, 2018), for the Hurwitz zeta-function (with E. Buivydas, R. Macaitienė and J. Rašytė, 2012, 2014), for the functions from the Selberg class (with R. Macaitienė, 2017), etc.

Moreover, A. Laurinćikas gave a generalization of Theorem 4 to composite functions, e.g. $F(\zeta(s))$, $F(\zeta(s, \alpha))$, where $F : H(D) \rightarrow H(D)$ is a certain operator (2011, 2012; with K. Janulis, D. Jurgaitis and R. Macaitienė, 2016), and an interesting hybrid universality of certain composite functions involving Dirichlet L -functions (with K. Matsumoto and J. Steuding, 2013). From general theorems, one can derive the universality of elementary functions, for example, of $\sin \zeta(s)$, $\sinh \zeta(s)$, $e^{\zeta(s)}$, $\zeta^k(s)$.

For zeta-functions the joint universality is also known. In this case, a collection of analytic functions is approximated simultaneously by shifts of zeta-functions. The first results in this direction were obtained independently by S. M. Voronin (1975), S. M. Gonek (1979) and B. Bagchi (1981) for Dirichlet L -functions $L(s, \chi)$. The last version of such a universality was given by A. Laurinćikas in 2011.

THEOREM 5. *Let $\chi_1, \dots, \chi_r$ be pairwise non-equivalent Dirichlet characters. For $j = 1, \dots, r$, let $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j(s) \in H_0(K_j)$. Then, for every ϵ , one has*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \epsilon \right\} > 0.$$

Note that zeta-functions having a joint universality property must be independent in a certain sense. Therefore, for the joint universality of zeta functions some additional hypotheses are needed. In the case of Dirichlet L -functions, the independence is ensured by non-equivalence of characters. Therefore, the joint universality for zeta-functions is a more complicated problem than that of ordinary universality.

A. Laurinćikas considered the question of joint universality in detail. He has obtained various results for the Lerch zeta-functions (with K. Matsumoto, 2006), Hurwitz zeta-functions (2008, 2013) and periodic Hurwitz zeta-functions (with A. Javtokas, 2008; with S. Skerstonaitė, 2009; with J. Rašytė, 2012, 2014), periodic zeta-functions (2006, 2007; with R. Macaitienė, 2009; 2016), twists of automorphic L -functions (with K. Matsumoto, 2004), zeta-functions with periodic coefficients (2010), Dirichlet L -functions (with A. Dubickas, 2015), Lerch zeta-functions (with A. Mincevič, 2018), etc.

Furthermore, A. Laurinčikas investigated a so-called mixed joint universality initiated by H. Mishou (2007) who obtained the joint universality for the Riemann zeta and Hurwitz zeta-functions [20]. In a wide sense, the mixed joint universality is understood as a joint universality for zeta or L -functions having and not having Euler product. So, a lot of interesting results on mixed joint universality for some zeta and L -functions have been obtained by A. Laurinčikas too. For example, for periodic zeta-function with multiplicative coefficients and periodic Hurwitz zeta-functions (2010; with R. Kačinskaitė, 2011), for zeta functions of normalized Hecke cusp forms and Hurwitz zeta-functions (with D. Šiaučiūnas, 2012), for the Riemann and Lerch zeta-functions (with R. Macaitienė, 2013), for Dirichlet L -functions and Lerch zeta-functions (with R. Macaitienė, 2014), for the Riemann and Hurwitz zeta-functions (with E. Buivydas, 2015), for Dirichlet L -functions and Hurwitz zeta-functions (with K. Janulis, 2013; with J. Karaliūnaitė and V. Garbaliusienė, 2017), for the Riemann and periodic Hurwitz zeta-functions (with R. Macaitienė, 2018).

J.-L. Mauclore and A. Laurinčikas introduced independently a modified version of universality for zeta-functions when the positivity of a lower density of the set of approximating shifts is replaced by that of the density. For example, in the case of the Riemann zeta-function, he obtained with L. Meška (2014) that if $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$, then the limit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$. The latter result was extended to other zeta-functions as well.

We recall that a sequence $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ is called uniformly distributed modulo 1 if, for every interval $[a, b) \subset [0, 1)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{[a,b)}(\{x_k\}) = b - a,$$

where $\chi_{[a,b)}$ is the indicator function of $[a, b)$, and $\{x_k\}$ denotes the fractional part of x_k . A. Dubickas and A. Laurinčikas (2016) proposed an application of sequences that are uniformly distributed modulo 1 to discrete universality. This idea was successfully implemented in some later papers by Antanas and his students.

A. Laurinčikas with his former students R. Garunkštis and R. Macaitienė (2017, 2018) began to use imaginary parts γ_k of non-trivial zeros of the Riemann zeta-function in discrete shifts $Z(s + i\gamma_k h)$, $h > 0$, of zeta-functions Z approximating analytic functions. Moreover, jointly with D. Šiaučiūnas and A. Vaiginytė (2018) he extended universality theorems for shifts $Z(s + i\varphi(\tau))$ with a certain differentiable function $\varphi(\tau)$.

Universality of zeta-functions contains one very important problem – all universality theorems are not effective in the sense that, although the set of shifts $Z(s + i\tau)$ approximating a given analytic function is infinite, we do not know any concrete value τ with approximating property. For applications, it suffices to know an interval for τ . However, this seems to be a very complicated problem too.

A. Laurinčikas observed (1997) that the universality effectivization problem for the Riemann zeta-function can be reduced to the estimate of rate of convergence in a limit theorem in the space of analytic functions. Let f be a function which we want to approximate, and

$$A(\epsilon, f) = \{g \in H(D) : \rho(f, g) < \epsilon\}.$$

Suppose that $A(\epsilon, f)$ is a continuity set of the limit measure P_ζ in a limit theorem for $\zeta(s)$, i.e.,

$$\frac{1}{T} \text{meas} \{ \tau \in [0, T] : \zeta(s + i\tau) \in A(\epsilon, f) \} = P_\zeta(A(\epsilon, f)) + R_T(\epsilon, f),$$

where

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_T(\epsilon, f) = 0.$$

Now let $T > 0$ be such that

$$|R_T(\epsilon, f)| < P_\zeta(A(\epsilon, f)).$$

Then, there exists $\tau \in [0, T]$ such that, for a given $K \in \mathcal{K}$,

$$\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \epsilon.$$

Unfortunately, the estimate for the error term $R_T(\epsilon, f)$ in the limit theorem above seems to be a difficult problem.

An important result in the effectivization problem has been obtained by R. Garunkštis [7]. Suppose that the function $f(s)$ is analytic in the disc $|s| \leq 0.05$ with $\max_{|s| \leq 0.05} |f(s)| \leq 1$. Then R. Garunkštis proved that, for every $\epsilon > 0$, there exists $\tau \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \tau \leq \exp\{\exp\{10\epsilon^{-13}\}\},$$

such that

$$\max_{|s| \leq 0.00001} \left| \log \zeta \left(s + \frac{3}{4} + i\tau \right) - f(s) \right| < \epsilon.$$

Moreover,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \max_{|s| \leq 0.00001} \left| \log \zeta \left(s + \frac{3}{4} + i\tau \right) - f(s) \right| < \epsilon \right\} \geq \exp\{-\epsilon^{-13}\}.$$

The most important results are given by A. Laurinćikas jointly with R. Garunkštis, K. Matsumoto, J. Steuding and R. Steuding (2010). They solved the effectivization problem for discs. Let, for $\underline{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$,

$$\|\underline{b}\| = \sum_{0 \leq k < n} |b_k| \quad \text{and} \quad A(n, \underline{b}, \epsilon) = |\log |b_0|| + \left(\frac{\|\underline{b}\|}{\epsilon} \right)^{n^2}.$$

Moreover, let

$$M(\tau) = \max_{|s-s_0|=r} |\zeta(s + i\tau)|.$$

THEOREM 6. *Let $\sigma_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, $s_0 = \sigma_0 + it$, $K = \{s \in \mathbb{C} : |s - s_0| \leq r\}$ and $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ be a continuous function, $f(s_0) \neq 0$, analytic in $|s - s_0| < r$. Then, for any $\epsilon \in (0, |f(s_0)|)$, there exist real numbers $\tau \in [T, 2T]$ and $\delta = \delta(\epsilon, f, \tau) > 0$ defined by*

$$M(\tau) \frac{\delta^n}{1 - \delta} = \frac{\epsilon}{3} (2 - e^{\delta r})$$

such that

$$\max_{|s-s_0| \leq \delta r} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \epsilon.$$

Here $T = T(f, \epsilon, \sigma_0) > r$ satisfies

$$T \geq C(n, \sigma_0) \exp \left\{ \exp \left\{ \delta A \left(n, \underline{f}, \frac{\epsilon}{3} \right)^{\frac{8}{1-\sigma_0} + \frac{8}{\sigma_0 - \frac{1}{2}}} \right\} \right\}$$

with a positive effectively computable constant $C(n, \sigma_0)$, δ is effectively computable, and

$$\underline{f} = (f(s_0), f'(s_0), \dots, f^{(n-1)}(s_0)).$$

Some interesting results, including universality of zeta-functions from the Selberg class, can be found in the monograph [22].

2.5. Consequences and Applications of the Universality Phenomenon

Universality property has a lot of important applications. For example, it is used for the investigation of functional independence of zeta-functions, for zero-distribution and for solving some questions in algebraic number theory. In this subsection, we will discuss some topics investigated by A. Laurinčikas.

Functional independence. In 1887, O. Hölder proved an algebraic-differential independence for the Euler gamma-function $\Gamma(s)$ [10]. More precisely, there is no polynomial $p \not\equiv 0$ for which

$$p(s, \Gamma(s), \Gamma'(s), \dots, \Gamma^r(s)) \equiv 0.$$

In 1960, during the second International Congress of Mathematicians, D. Hilbert observed in the statement of his 18th problem that Hölder's result implies the algebraic-differential independence of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, and conjectured that the function

$$\zeta(s, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m^s}$$

also has the same property. This was proved by A. Ostrowski [21]. Further progress in this field was given by S. M. Voronin who proved the functional independence of the function $\zeta(s)$: the function $\zeta(s)$ does not satisfy any differential equation of the form

$$\sum_{k=0}^m s^k F_k \left(y(s), y'(s), \dots, y^{(n-1)}(s) \right) = 0,$$

where $F_0, \dots, F_m$ are continuous functions not all of which $\equiv 0$.

It turned out that the universality implies the functional independence of zeta-functions. Using this, A. Laurinčikas obtained the functional independence for various collections of Lerch zeta-functions (with K. Matsumoto, 2000), collections of twists of automorphic L -functions (with K. Matsumoto, 2004), universal shifts of zeta-functions (with J. Kaczorowski and J. Steuding, 2006), periodic Hurwitz zeta-functions (2008), zeta-functions of elliptic curves (with V. Garbaliuskienė, 2011), zeta-functions of cusp forms (with K. Matsumoto and J. Steuding, 2013) and other functions.

Zero-distribution. A. Laurinčikas (jointly with R. Garunkštis) created the theory of zero-distribution for the Lerch zeta-function. They described zero-free regions, introduced the definition of trivial zeros, proved an asymptotic formula for the total number of zeros. Also, they obtained some estimates for the number of zeros in various regions. For example, jointly with R. Garunkštis, R. Šleževičienė and J. Steuding, he obtained estimates for the number of zeros of the Estermann zeta-function (2002), with D. Šiaučiūnas for the Hurwitz zeta-function (2012) and for periodic zeta-functions (2013).

Moreover, using the universality theorems, A. Laurinčikas obtained the estimates for the number of zeros of linear combinations of Matsumoto zeta-functions (1998), linear combinations of twisted automorphic L -functions (with K. Matsumoto, 2004), derivatives of zeta-functions of cusp forms (2005), composite functions $F(\zeta(s))$ (2013), etc.

2.6. Mellin Transforms of the Riemann Zeta-function

In 1995, Y. Motohashi observed that the modified Mellin transforms

$$\mathcal{Z}_k \left(s, \frac{1}{2} \right) = \int_1^{\infty} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + ix \right) \right|^{2k} x^{-s} dx$$

can be applied to the investigation of the moments

$$\int_0^T \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^{2k} dt.$$

For this, one needs to investigate the properties of $\mathcal{Z}_k(s, \frac{1}{2})$. This was done by A. Laurinćikas together with A. Ivić and M. Jutila [12].

Let $\frac{1}{2} < \rho < 1$ be a fixed number. A. Laurinćikas (2008–2011) investigated the Mellin transform $\mathcal{Z}_1(s, \rho)$, obtained a meromorphic continuation for it and gave some mean value estimates.

3. List of Scientific Works

The present section will display the list of scientific works published by A. Laurinćikas. It is quite possible that we have accidentally left out a few publications. Nevertheless, we hope that this long list is quite complete. It not only repeatedly reveals the extent of the mathematical problems dealt with by Antanas, but also proves his devotion to mathematics and immeasurable diligence.

The list does not include the abstracts of conference communications.

3.1. Articles

1. Kubilius, J., Laurinćikas, A. 1972, "On large deviations of multiplicative functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 12 (2), pp. 77–85 (in Russian).
2. Laurinćikas, A. 1974, "The distribution of the values of arithmetic functions defined on a polynomial set", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 14 (1), pp. 85–97 (in Russian) $\equiv$ 1975, *Lith. Math. J.*, vol. 14, pp. 62–71.
3. Laurinćikas, A. 1975, "Multidimensional distribution of values of multiplicative functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 15 (2), pp. 13–24 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 15 (2), pp. 207–216.
4. Laurinćikas, A. 1975, "Distribution of values of complex functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 15 (2), pp. 25–39 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 15 (2), pp. 217–227.
5. Laurinćikas, A. 1975, "On value-distribution of complex arithmetic functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 15 (2), pp. 136–137 (in Russian).
6. Laurinćikas, A. 1976, "Large deviations of arithmetic functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 16 (1), pp. 159–171 (in Russian).
7. Laurinćikas, A. 1976, "The limiting distribution of the values of multiplicative functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 16 (2), pp. 121–131 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 16 (2), pp. 229–235.
8. Laurinćikas, A. 1976, "On joint value-distribution of additive and multiplicative functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 16 (2), pp. 190–192 (in Russian).
9. Laurinćikas, A. 1977, "Value-distribution of additive function $f(p+1)$ ", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 17 (3), pp. 114–116 (in Russian).
10. Laurinćikas, A. 1977, "Distribution of multiplicative functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 17 (4), pp. 139–148 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 17 (4), pp. 531–538.
11. Laurinćikas, A. 1978, "Vertical distribution of the Dirichlet series with multiplicative coefficients", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 18 (2), pp. 152–153 (in Russian).
12. Laurinćikas, A. 1979, "Distribution des valeurs de certaines séries de Dirichlet", *C.R. Acad. Sc. Paris, série A*, vol. 289 (2), pp. 43–45.
13. Laurinćikas, A. 1979, "Sur les séries de Dirichlet et les polynômes trigonométriques", *Séminaire de Théorie des Nombres, 1978–1979*, Exp. 24, CNRS, Talence, p. 13.
14. Laurinćikas, A. 1979, "A limit theorem for Dirichlet L -series", *Mat. Zametki*, vol. 25 (4), pp. 481–485 (in Russian) $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 25, pp. 251–253.

15. Laurinčikas, A. 1979, “Large deviations of Dirichlet L -functions“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 19 (2), pp. 123–134 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 19 (2), pp. 243–250.
16. Laurinčikas, A. 1979, “Asymptotic independence of the Dirichlet series“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 19 (3), pp. 109–110 (in Russian).
17. Laurinčikas, A. 1981, “Distribution of trigonometric polynomials“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 21 (2), pp. 127–135 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 21 (2), pp. 162–168.
18. Laurinčikas, A. 1981, “Large deviations of the trigonometric polynomials“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 21 (3), pp. 53–61 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 21 (3), pp. 240–245.
19. Laurinčikas, A. 1982, “Distribution of values of generating Dirichlet series of multiplicative functions“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 22 (1), pp. 101–111 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 22 (1), pp. 56–63.
20. Laurinčikas, A. 1982, “On large deviations in Hooley’s theorem“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 22 (4), pp. 90–97 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 22 (4), pp. 403–408.
21. Laurinčikas, A. 1982, “Probabilistic equivalents of the Lindelöf hypothesis“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 22 (4), pp. 119–120 (in Russian).
22. Laurinčikas, A. 1983, “On the universality theorem“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 23 (3), pp. 53–62 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 23 (3), pp. 283–289.
23. Laurinčikas, A. 1983, “Universality of the powers of the Riemann ζ -series“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 23 (4), pp. 86–87 (in Russian).
24. Laurinčikas, A. 1984, “The universality theorem. II“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 24 (2), pp. 113–121 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 24 (2), pp. 143–149.
25. Laurinčikas, A. 1984, “Zeros of certain Dirichlet series“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 24 (4), pp. 116–126 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 24 (4), pp. 358–365.
26. Laurinčikas, A. 1985, “On the Riemann zeta-function on the critical line“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 25 (2), pp. 114–118 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 25 (2), pp. 145–148.
27. Laurinčikas, A. 1985, “Zeros of the derivative of the Riemann zeta-function“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 25 (3), pp. 111–118 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 25 (3), pp. 255–260.
28. Laurinčikas, A. 1986, “Moments of the Riemann zeta-function on the critical line“ (in Russian) $\equiv$ *Mat. Zametki*, vol. 39 (4), pp. 483–493 (in Russian) $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 39, pp. 267–272.
29. Laurinčikas, A. 1986, “Zeros of linear combinations of Dirichlet series“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 26 (3), pp. 468–477 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 26, pp. 244–251.
30. Laurinčikas, A. 1987, “Limit theorem for the Riemann zeta-function on the critical line. I“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 27 (1), pp. 113–132 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 27 (1), pp. 63–75.
31. Laurinčikas, A. 1987, “Limit theorem for the Riemann zeta-function on the critical line. II“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 27 (3), pp. 489–500 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 27 (3), pp. 236–243.
32. Laurinčikas, A. 1987, “Limit theorem for Dirichlet L -functions on the critical line“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 27 (4), pp. 699–710 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 27 (4), pp. 316–324.
33. Laurinčikas, A. 1988, “A limit theorem for the Riemann zeta-function near the critical line“, *Mat. Sbornik, Nov. Ser.*, vol. 135 (177), pp. 3–11 (in Russian) $\equiv$ 1989, *Math. USSR-Sbornik*, vol. 63 (1), pp. 1–9.
34. Laurinčikas, A. 1989, “A limit theorem for the Riemann zeta-function close the critical line. II“, *Mat. Sbornik*, vol. 180 (6), pp. 733–749 (in Russian) $\equiv$ 1990, *Math. USSR-Sbornik*, vol. 67 (1), 177–193.
35. Laurinčikas, A. 1989, “Limit theorem for the Riemann zeta-function on the critical line. III“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 29 (1), pp. 83–89 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 29 (1), pp. 30–34.
36. Laurinčikas, A. 1989, “Mathematical description of manipulation by rotation“, *Sbornik Prednašok z Celoštátnej Konf. Mladež a Robotizacia, 9–10 November 1989*, Košice Zbornik, vol. 2, Košice, pp. 13–17 (in Russian).

37. Laurinćikas, A. 1990, "A limit theorem for the Riemann zeta-function in the complex space", *Acta Arith.*, vol. 53 (5), pp. 421–432.
38. Laurinćikas, A. 1990, "Limit theorems for the Riemann zeta-function in the complex space", *Probab. Theory and Math. Statistics. Proc. Fifth Int. Vilnius Conf., 1998*. Vol. 2, B. Grigelionis, Yu. V. Prohorov (Eds.). Vilnius: Mokslas, pp. 59–69.
39. Laurinćikas, A. 1991, "A limit theorem for the Riemann zeta function near the critical line in the complex space", *Acta Arith.*, vol. 59 (1), pp. 1–9.
40. Laurinćikas, A. 1991, "On the joint distribution of the values of arithmetic functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 31 (3), pp. 433–454 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 31 (3), pp. 300–315.
41. Laurinćikas, A. 1992, "The Atkinson formula near the critical line", in: *New Trends in Probability and Statistics, Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. Int. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 24–28 September 1991*. F. Schweiger and E. Manstavičius (Eds.). Vilnius: TEV; Utrecht: VSP, pp. 335–354.
42. Laurinćikas, A. 1992, "Once again on the function $\sigma_a(m)$ ", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 32 (1), pp. 105–121 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 32 (1), pp. 81–93.
43. Laurinćikas, A. 1992, "A limit theorem with a weight for the Riemann zeta function", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 32 (3), pp. 369–376 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 32 (3), pp. 291–296.
44. Laurinćikas, A. 1993, "The Atkinson formula near the critical line. II", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 33 (3), pp. 302–313 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 33 (3), pp. 234–242.
45. Laurinćikas, A. 1993, "The Atkinson formula for L -functions near the critical line", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 33 (4), pp. 435–454 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 33 (4), pp. 337–351.
46. Laurinćikas, A. 1994, "On limit theorems for the Riemann zeta-function in some spaces", *Probab. Theory and Math. Statistics. Proc. Sixth Int. Vilnius Conf. 1993*. B. Grigelionis (Eds.). Vilnius: TEV, pp. 457–483.
47. Laurinćikas, A. 1994, "Limit theorems for Dirichlet L -functions", *Tr. Mat. Inst. Steklova ANR*, vol. 6 (207), pp. 235–249 (in Russian) $\equiv$ *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 6 (207), pp. 215–226.
48. Laurinćikas, A. 1994, "Limit theorems for a product of the Hurwitz zeta-functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 34 (2), pp. 197–210 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 34 (2), pp. 160–170.
49. Laurinćikas, A. 1994, "On probability measures on the multidimensional complex plane", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 34 (3), pp. 331–346 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 34 (3), pp. 262–274.
50. Laurinćikas, A. 1994, "A multidimensional limit theorem for the Dirichlet L -functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 34 (4), pp. 495–508 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 34 (4), pp. 393–403.
51. Laurinćikas, A., Misevičius, G. 1994, "Limit theorem with a weight for the Riemann zeta-function in the space of analytic functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 34 (2), pp. 211–225 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 34 (2), pp. 171–182.
52. Laurinćikas, A. 1995, "A remark on the Conrey-Ghosh theorem", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 35 (1), pp. 91–98 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 35 (1), pp. 73–78.
53. Laurinćikas, A. 1995, "On moments of the Riemann zeta-function near the critical line", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 35 (3), pp. 332–359 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 35 (3), pp. 262–283.
54. Laurinćikas, A. 1995, "On the universality of the Riemann zeta-function", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 35 (4), pp. 502–507 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 35 (4), pp. 399–402.
55. Laurinćikas, A. 1995, "An uniform estimate of the error term in the mean square of the Riemann zeta-function", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 35 (4), pp. 508–517 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 35 (4), pp. 403–410.
56. Laurinćikas, A. 1996, "Limit theorems for the Matsumoto zeta-function", *J. Théor. Nombres Bordeaux*, vol. 8 (1), pp. 143–158.
57. Laurinćikas, A. 1996, "On the distribution of complex-valued multiplicative functions", *J. Théor. Nombres Bordeaux*, vol. 8 (1), pp. 183–203.
58. Laurinćikas, A. 1996, "Limit theorem in the space of continuous functions for the Dirichlet

polynomial related with the Riemann zeta-function“, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, vol. 8 (2), pp. 315–329.

59. Laurinčikas, A. 1996, “Number theory in Lithuania“, *LMD konf. darbai. Plenariniai pranešimai (Vilnius, 1995)*. Vilnius: VU leidykla, pp. 87–171.

60. Laurinčikas, A., Misevičius, G. 1996, “On limit distribution of the Riemann zeta-function“, *Acta Arith.*, vol. 76 (4), pp. 317–334.

61. Garunkštis, R., Laurinčikas, A. 1996, “On the Lerch zeta-function“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 36 (4), pp. 423–434 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 36 (4), pp. 337–346.

62. Laurinčikas, A. 1996, “On the mean square of the Riemann zeta function“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 36 (3), pp. 354–364 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 36 (3), pp. 282–290.

63. Laurinčikas, A. 1996, “On limit distribution of the Matsumoto zeta-function. II“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 36 (4), pp. 464–485 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 36 (4), pp. 371–387.

64. Laurinčikas, A. 1997, “On limit distribution of the Matsumoto zeta-function“, *Acta Arith.*, vol. 79 (1), pp. 31–39.

65. Laurinčikas, A. 1997, “On limit distribution of the Lerch zeta-function“, in: *New Trends in Probability and Statistics, Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. Second Int. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 23-27 September 1996*. A. Laurinčikas, E. Manstavičius and V. Stakėnas (Eds.). Vilnius: TEV; Utrecht: VSP, pp. 135–148.

66. Laurinčikas, A. 1997, “A remark on the universality of the Riemann zeta-function“, *LMD mokslo darbai. Liet. Mat. Rink. (priedas)*. Vilnius: Technika, pp. 29–33.

67. Laurinčikas, A., Prokopovič, P. “On some trigonometrical problem“, *LMD mokslo darbai. Liet. Mat. Rink. (priedas)*. Vilnius: Technika, pp. 304–309 (in Russian).

68. Garunkštis, R., Laurinčikas, A. 1997, “A limit theorem with weight for the Lerch zeta-function in the space of analytic functions“, *Tr. Mat. Inst. Steklova*, vol. 218, pp. 109–121 (in Russian) $\equiv$ *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 3(218), pp. 104–116.

69. Laurinčikas, A. 1997, “A limit theorem for the Lerch zeta-function in the space of analytic functions“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 37 (2), pp. 191–203 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 37 (2), pp. 146–155.

70. Laurinčikas, A. 1997, “The universality on the Lerch zeta-function“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 37 (3), pp. 367–375 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 37 (3), pp. 275–280.

71. Laurinčikas, A., Prokopovič, P. 1997, “On some trigonometrical system“, *Proc. Scient. Conf. with Int. Participation, September 4-5, 1997*. Prešov, Slovakia, pp. 341–344 (in Russian).

72. Kačėnas, A., Laurinčikas, A., Matsumoto, K. 1998, “On the universality of Dirichlet series of holomorphic cusp forms“, *LMD mokslo darbai, Liet. Mat. Rink. (priedas)*. Technika: Vilnius, pp. 29–34.

73. Laurinčikas, A. 1998, “On the Matsumoto zeta-function“, *Acta Arith.*, vol. 84 (1), pp. 1–16.

74. Laurinčikas, A. 1998, “A limit theorem in the theory of finite Abelian groups“, *Publ. Math. Debrecen*, vol. 52 (3-4), pp. 517–533.

75. Laurinčikas, A. 1998, “On the Voronoï summation formulae“, in: *Voronoï’s Impact on Modern Science. Book I. Proc. Inst. Math. Natl. Acad. Sci. Ukr., Math. Appl.*, vol. 21 (1), P. Engel and H. Syta (Eds.), Inst. of Math., Kyiv, pp. 117–136.

76. Laurinčikas, A. 1998, “Several value distribution theorems for the Lerch zeta-function“, *Number Theory its Applications, Koyoto, 1997*. S. Kanemitsu (Ed.). Surikaiseikikenkyusho Kokyuroku, vol. 1060, pp. 58–65.

77. Laurinčikas, A. 1998, “A joint limit theorem for Lerch zeta-function“, *LMD mokslo darbai, Liet. Mat. Rink. (priedas)*. Vilnius: Technika, pp. 35–39.

78. Laurinčikas, A. 1998, “One functional property of the Lerch zeta-function“, *LMD mokslo darbai, Liet. Mat. Rink. (priedas)*. Vilnius: Technika, pp. 40–42.

79. Laurinčikas, A. 1998, "Approximation by mean of the function given by Dirichlet series", *Nonlinear Anal., Model. Control*, vol. 3, pp. 73–77.
80. Laurinčikas, A. 1998, "The Riemann zeta-function: results and problems. I. Distribution of zeros", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 1, 21–31.
81. Laurinčikas, A. 1998, "The Kyoto Conference "Number Theory and its applications"", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 1, pp. 32–38.
82. Laurinčikas, A., Matsumoto, K. 1998, "Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 38 (3), pp. 312–326 $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 38 (3), pp. 238–249.
83. Laurinčikas, A., Matsumoto, K. 1998, "On estimation of the number of zeros of linear combinations of certain zeta-functions", *LMD mokslo darbai, Liet. Mat. Rink. (priedas)*. Vilnius: Technika, pp. 43–48.
84. Laurinčikas, A., Prokopovič, P. 1998, "Functional independence of the Lerch zeta-function", *Informatics and Algorithmus, Proc. Sc. Conf. with Int. Participation. Informatics and Algorithms '98, September 3–4, 1998*. Prešov, Slovakia, pp. 207–211.
85. Kačėnas, A., Laurinčikas, A. 1998, "On Dirichlet series related to certain cusp forms", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 38 (1), pp. 82–97 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 38 (1), pp. 64–76.
86. Laurinčikas, A. 1998, "On the Lerch zeta-function with rational parameters", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 38 (1), pp. 113–124 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 38 (1), pp. 89–97.
87. Laurinčikas, A. 1998, "On the zeros of linear combinations of the Matsumoto zeta-functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 38 (2), pp. 185–204 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 38 (2), pp. 142–157.
88. Laurinčikas, A. Prokopovič, P. 1998, "On some trigonometrical system. II", *LMD mokslo darbai, Liet. Mat. Rink. (priedas)*. Vilnius: Technika, pp. 438–440 (in Russian).
89. Laurinčikas, A. Prokopovič, P. 1998, "The uniform estimates for the second moment of the Riemann zeta-function", *Informatics and Algorithmus, Proc. of the Sc. Conf. with Int. Participation. Informatics and Algorithms '98, September 3–4, 1998*. Prešov, Slovakia, pp. 212–219 (in Russian).
90. Garunkštis, R., Laurinčikas, A. 1999, "On zeros of the Lerch zeta-function", *Number Theory and its Applications, Koyoto, 1997*. S. Kanemitsu and K. Györy (Eds.). Kluwer Academic Publishers, pp. 129–143.
91. Garunkštis, R., Laurinčikas, A. 1999, "On one Hilbert's problem for the Lerch zeta-function", *Publ. Inst. Math.*, vol. 65 (79), pp. 63–68.
92. Laurinčikas, A. 1999, "Value-distribution of general Dirichlet series", *Probab. Theory and Math. Statistics. Proc. of the 7th Int. Vilnius Conf., 1998*. B. Grigelionis (Ed.). Vilnius: TEV, Utrecht: VSP, pp. 405–414.
93. Laurinčikas, A. 1999, "On some problems related to the Euler φ -function", *Paul Erdős and his Math.: Research Comm. Conf. held in the memory of Paul Erdős, Budapest, Hungary, July 4–11, 1999*. János Bolyai Math. Society, Budapest, pp. 152–154.
94. Laurinčikas, A. 1999, "A note on functions of exponential type", *LMD mokslo darbai, Liet. Mat. Rink. (priedas)*. Vilnius: Mat. Inf. Inst., pp. 56–61.
95. Laurinčikas, A. 1999, "On the mean square of the Lerch zeta-function", *LMD mokslo darbai, Liet. Mat. Rink. (priedas)*. Vilnius: Mat. Inf. Inst., pp. 62–67.
96. Laurinčikas, A. 1999, "Odd logarithmic moments of the Riemann zeta-function", *LMD mokslo darbai, Liet. Mat. Rink. (priedas)*. Vilnius: Mat. Inf. Inst., pp. 68–74.
97. Laurinčikas, A. 1999, "International Congresss of Mathematicians in Berline", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 2, pp. 34–41 (in Lithuanian).
98. Laurinčikas, A., 1999. "G. F. Voronoï and his summation formulae", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 2, pp. 42–55 (in Lithuanian).
99. Laurinčikas, A. 1999, "The Riemann zeta-function: results and problems. II. The moments", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 2, pp. 56–73.

100. Laurinčikas, A. 1999, "On the asymptotic independence of Dirichlet series", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 39 (1), pp. 65–73 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 39 (1), pp. 51–57.
101. Laurinčikas, A. 1999, "Some limit theorems for a Dirichlet series related to the Euler function", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 39 (3), pp. 331–342 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 39 (3), pp. 262–272.
102. Garunkštis, R., Laurinčikas, A. 2000, "The Lerch zeta-function", *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 10 (3-4), pp. 211–226.
103. Kačėnas, A., Laurinčikas, A. 2000, "A note on the value-distribution of the periodic zeta-function", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 40 (spec. nr.), pp. 28–32.
104. Laurinčikas, A. 2000, "Dirichlet polynomial", *Encyclopaedia of Math., Supplement II*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 61–62.
105. Laurinčikas, A. 2000, "On the mean square of the Lerch zeta-function with respect to the parameter", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 40 (spec. nr.), pp. 43–48.
106. Laurinčikas, A. 2000, "On Sprindjuk's works in "Lietuvos matematikos rinkinys"", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 40 (spec. nr.), pp. 226–231.
107. Laurinčikas, A. 2000, "The universality of Dirichlet series", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 3, pp. 27–35.
108. Laurinčikas, A. 2000, "The Lerch zeta-function. I", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 3, pp. 35–45.
109. Laurinčikas, A. 2000, "The Riemann zeta-function: results and problems. III. Limit theorems", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 3, pp. 46–56.
110. Laurinčikas, A., Matsumoto, K. 2000, "The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions", *Nagoya Math. J.*, vol. 157, pp. 211–227.
111. Laurinčikas, A. 2000, "A remark on negative moments of the Riemann zeta-function", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 40 (1), pp. 28–35 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 40 (1), pp. 23–28.
112. Laurinčikas, A. 2000, "On the effectivization of the universality theorem for the Lerch zeta-function", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 40 (2), pp. 172–178 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 40 (2), pp. 135–139.
113. Laurinčikas, A. 2001, "A joint limit theorem for zeta-functions attached to certain cusp forms", *Publ. Math. Debrecen*, vol. 59 (1-2), pp. 175–186.
114. Laurinčikas, A. 2001, "The universality of Dirichlet series attached to finite Abelian groups", *Number Theory. Proc. Turku Symp. Number Theory in Memory of Kustaa Inkeri, May 31-June 4, 1999*. M. Jutila and T. Metsänkylä (Eds.). Walter de Gruyter, Berlin, New York, pp. 179–192.
115. Laurinčikas, A. 2001, "The mean square of the Lerch zeta-function with respect to the parameter α ", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 41 (spec. nr.), pp. 88–93.
116. Laurinčikas, A. 2001, "The investigations of zeta-functions in Lithuania", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 41 (spec. nr.), pp. 383–388.
117. Laurinčikas, A. 2001, "On $H(D)$ -valued random elements", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 41 (spec. nr.), pp. 632–636.
118. Laurinčikas, A. 2001, "On value distribution of zeta-function associated with certain cusp forms", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 4, pp. 54–60.
119. Laurinčikas, A. 2001, "The Lerch zeta-function. II", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 4, pp. 61–70.
120. Laurinčikas, A. 2001, "Zeta-functions", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 4, pp. 71–79.
121. Laurinčikas, A., Matsumoto, K. 2001, "The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms", *Acta Arith.*, vol. 98 (4), pp. 345–359.
122. Laurinčikas, A., Šleževičienė, R. 2001, "On the universality of Dirichlet series with multiplicative coefficients", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 41 (spec. nr.), pp. 94–99.

123. Laurinčikas, A. Šleževičienė, R. 2001, "On the denseness of one set of series", *Nonlinear Anal. Model. Control*, vol. 6 (1), pp. 79–88.
124. Kačėnas, A., Laurinčikas, A. 2001, "On the periodic zeta-function", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 41 (2), pp. 214–226 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 41 (2), pp. 168–177.
125. Laurinčikas, A. 2001, "Value-distribution of general Dirichlet series. II", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 41 (4), pp. 449–460 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 41 (4), pp. 351–360.
126. Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2001, "On the periodic zeta-function. II", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 41 (4), pp. 461–476 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 41 (4), pp. 361–372.
127. Garunkštis, R., Laurinčikas, A., Šleževičienė, R., Steuding, J. 2002, "On the universality of Estermann zeta-functions", *Analysis*, vol. 22, pp. 285–296.
128. Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A. 2002, "A joint discrete limit theorem for the Matsumoto zeta-function in the space of meromorphic functions", in: *Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. Third Int. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 23-27 September 2001*. A. Dubickas, A. Laurinčikas and E. Manstavičius (Eds.). Vilnius: TEV, pp. 109–118.
129. Laurinčikas, A. 2002, "A probabilistic equivalent of the Lindelöf hypothesis", in: *Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. Third Int. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 23-27 September 2001*. A. Dubickas, A. Laurinčikas and E. Manstavičius (Eds.). Vilnius: TEV, pp. 157–161.
130. Laurinčikas, A. 2002, "Application of probabilistic methods in the theory of the Riemann zeta-function", *IV Int. Conf. Modern Problems of Number Theory and its Applications: Current Problems, Part II, Tula, Russia, 2001*. Moscow: Mech–Math. Fac. MGU, pp. 98–116.
131. Laurinčikas, A. 2002, "Limit theorems for general Dirichlet series", *Theory Stoch. Process.*, vol. 8 (3-4), pp. 256–268.
132. Laurinčikas, A. 2002, "A limit theorem for zeta-functions of normalized cusp forms", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 42 (spec. nr.), pp. 63–69.
133. Laurinčikas, A. 2002, "On the denseness in the space of analytic functions", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 42 (spec. nr.), pp. 189–193.
134. Laurinčikas, A. 2002, "30th anniversary of the Number Theory Seminar", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 42 (spec. nr.), pp. 402–404 (in Lithuanian).
135. Laurinčikas, A. 2002, "The Conf. "Theory of the Riemann zeta and allied functions" at Oberwolfach", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 5, pp. 39–44.
136. Laurinčikas, A. 2002, "The Lerch zeta-function. II", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 5, pp. 45–57.
137. Laurinčikas, A., Matsumoto, K. 2002, "The joint universality of zeta-functions attached to certain cusp forms", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 5, pp. 58–75.
138. Laurinčikas, A., Schwarz, W., Steuding, J. 2002, "Value distribution of general Dirichlet series. III", in: *Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. Third Int. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 23-27 September 2001*. A. Dubickas, A. Laurinčikas and E. Manstavičius (Eds.). Vilnius: TEV, pp. 137–156.
139. Laurinčikas, A., Šleževičienė, R. 2002, "The universality of zeta-functions with multiplicative coefficients", *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 13, pp. 243–257.
140. Laurinčikas, A. 2002, "On zeta-functions of finite Abelian groups", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 42 (4), pp. 448–458 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 42 (4), pp. 355–363.
141. Laurinčikas, A., Steuding, J. 2002, "A joint limit theorem for general Dirichlet series", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 42 (2), pp. 205–217 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 42 (2), pp. 163–173.
142. Garunkštis, R., Laurinčikas, A., Steuding, J. 2003, "On the mean square of Lerch zeta-functions", *Arch. Math. (Basel)*, vol. 80 (1), pp. 47–60.
143. Genys, J., Laurinčikas, A. 2003, "On joint distribution of general Dirichlet series", *Nonlinear Anal. Model. Control*, vol. 8 (2), pp. 27–39.

144. Laurinčikas, A. 2003, "The universality of zeta-functions", *Acta Appl. Math.*, vol. 78 (1-3), pp. 251–271.
145. Laurinčikas, A. 2003, "The joint universality for general Dirichlet series", *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comput.*, vol. 22, pp. 235–251.
146. Laurinčikas, A. 2003, "Probabilistic results for general Dirichlet series", *Chebysh. Sb.*, vol. 4 (3), pp. 129–143.
147. Laurinčikas, A. 2003, "Zeta-functions of cusp forms", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 43 (spec. nr.), pp. 60–64.
148. Laurinčikas, A. 2003, "The support of one random element", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 43 (spec. nr.), pp. 65–69.
149. Laurinčikas, A. 2003, "The geometry of numbers in Lithuanian school of the number theory", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 43 (spec. nr.), pp. 697–702.
150. Laurinčikas, A. 2003, "On the mean value of multiplicative function attached to certain cusp forms", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 6, pp. 64–80.
151. Laurinčikas, A. Macaitienė, R., 2003, "Discrete limit theorems for general Dirichlet series. I.", *Chebysh. Sb.*, vol. 4 (3), p.p. 156–170.
152. Laurinčikas, A., Schwarz, W., Steuding, J. 2003, "The universality of general Dirichlet series", *Analysis*, vol. 23 (1), pp. 13–26.
153. Laurinčikas, A. Šiaučiūnas, D. 2003, "The mean-square of the periodic zeta-function near the critical line", *Chebysh. Sb.*, vol. 4 (3), pp. 144–155.
154. Garunkštis, R., Laurinčikas, A., Steuding J. 2003, "An approximate functional equation for the Lerch zeta-function", *Mat. Zametki*, vol. 74 (4), p.p. 494–501 (in Russian) $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 74 (4), p.p. 469–476.
155. Genys, J., Laurinčikas, A. 2003, "Value distribution of general Dirichlet series. IV", *Liet. Mat., Rink.*, vol. 43 (3), pp. 342–358 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 43 (3), pp. 281–294.
156. Laurinčikas, A. 2003, "Voronoi summation formulae", *Vpliv naukovo dorobku G. Voronogo na suchasnu nauku, Praci Instit. Math. NA Nauk Ukr.*, vol. 48, G. Syta, A. Yurachivsky (Eds.). Kyiv: Inst. of Math., pp. 89–111.
157. Laurinčikas, A., Matsumoto, K., Steuding, J. 2003, "The universality of L -functions associated with newforms", *Izv. RAN, Ser. Mat.*, vol. 67 (1), pp. 83–98 (in Russian) $\equiv$ *Izv. Math.*, vol. 67 (1), pp. 77–90.
158. Laurinčikas, A., Steuding, J. 2003, "A short note on the Lindelöf hypothesis", *Liet. Mat., Rink.*, vol. 43 (1), pp. 59–64 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 43 (1), pp. 51–55.
159. Laurinčikas, A., Steuding, J. 2003, "The mean square of the Lerch zeta-function near the critical line", *Liet. Mat., Rink.*, vol. 43 (2), pp. 213–226 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 43 (2), pp. 176–188.
160. Garbaliuskienė, V., Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A. 2004, "The joint universality for L -functions of elliptic curves", *Nonlinear Anal. Model. Control*, vol. 9 (4), pp. 331–348.
161. Garbaliuskienė, V., Laurinčikas, A. 2004, "Discrete value-distribution of L -functions of elliptic curves", *Publ. Inst. Math.*, vol. 76 (90), pp. 65–71.
162. Ivanauskaitė, R., Laurinčikas, A. 2004, "The lognormal distribution law for zeta-functions of certain cups forms", *Chebysh. Sb.*, vol. 5 (4), pp. 144–154.
163. Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A. 2004, "On the value distribution of the Matsumoto zeta-function", *Acta Math. Hungar.*, vol. 105 (4), pp. 339–359.
164. Laurinčikas, A. 2004, "On moments of zeta-functions associated to certain cusp forms", *Chebysh. Sb.*, vol. 5 (3), pp. 138–152.
165. Laurinčikas, A. 2004, "On the Lindelöf hypothesis for the Hurwitz zeta-function", *Chebysh. Sb.*, vol. 5 (4), pp. 155–163.

166. Laurinčikas, A. 2004, "On zeta-functions of cusp forms", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 44 (spec. nr.), pp. 77–82.
167. Laurinčikas, A. 2004, "Contribution of M. Maknys to the Number Theory", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 44 (spec. nr.), pp. 482–486 (in Lithuanian).
168. Laurinčikas, A. 2004, "The definition of one complex-valued random variable", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 44 (spec. nr.), pp. 825–829.
169. Laurinčikas, A. 2004, "The joint universality of Dirichlet series", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 7, pp. 33–44.
170. Laurinčikas, A. 2004, "A survey on limit theorems for general Dirichlet series", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 7, pp. 45–56.
171. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2004, "Discrete limit theorems for general Dirichlet series. III", *Cent. Eur. J. Math.*, vol. 2 (3), pp. 339–361.
172. Laurinčikas, A., Matsumoto, K. 2004, "The joint universality of twisted automorphic L -functions", *J. Math. Soc. Japan*, vol. 56 (3), pp. 923–939.
173. Laurinčikas, A., Steuding, J. 2004, "On zeta-functions associated to certain cusp forms. I", *Cent. Eur. J. Math.*, vol. 2 (1), pp. 1–18.
174. Laurinčikas, A., Steuding, J. 2004, "A note on moments of $\zeta'(1/2 + i\gamma)$ ", *Publ. Inst. Math.*, vol. 76 (90), pp. 57–63.
175. Genys, J., Laurinčikas, A. 2004, "A joint limit theorem for general Dirichlet series", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 44 (1), pp. 23–43 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 44 (1), pp. 18–35.
176. Genys, J., Laurinčikas, A. 2004, "Value distribution of general Dirichlet series. V", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 44 (2), pp. 181–195 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 44 (2), pp. 145–156.
177. Laurinčikas, A. 2004, "A joint limit theorem on the complex plane for general Dirichlet series", *Liet. Mat. Rink.*, vol. 44 (3), pp. 283–291 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 44 (3), pp. 225–231.
178. Garbaliauskienė, V., Laurinčikas, A. 2005, "Some analytic properties for L -functions of elliptic curves", *Proc. Inst. Math. (Nat. Acad. Sc. Belarus)*, vol. 13 (1), pp. 75–82.
179. Garbaliauskienė, V., Laurinčikas, A. 2005, "Universality theorems for L -functions of elliptic curves", *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 8, pp. 14–25.
180. Ivanauskaitė, R., Laurinčikas, A. 2005, "Value distribution of zeta-functions of certain cusp forms", *Math. and its Applications. Proc. Inst. Math. Nat. Acad. of Sc. Ukraine, 55. Voronoï's Impact on Modern Science. Book 3. Proc. Third Voronoï Conf. Analytic Number Theory and Spatial Tessellations*. H. Syta et al. (Eds.). Inst. Math., Kyiv, pp. 13–26.
181. Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A. 2005, "Joint value distribution of the Matsumoto zeta-functions", *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 16 (5-6), pp. 415–422.
182. Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A. 2005, "Discrete limit theorems for the Laplace transform of the Riemann zeta-function", *Acta Math. Univ. Ostrav.*, vol. 13 (1), pp. 19–27.
183. Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A. 2005, "A joint limit theorem for Matsumoto zeta-functions", *Math. and its Applications. Proc. Inst. Math. Nat. Acad. of Sc. Ukraine, 55. Voronoï's Impact on Modern Science. Book 3. Proc. Third Voronoï Conf. Analytic Number Theory and Spatial Tessellations*. H. Syta et al. (Eds.). Inst. Math., Kyiv, pp. 27–32.
184. Laurinčikas, A. 2005, "On the derivatives of zeta-functions of certain cusp forms", *Glasg. Math. J.*, vol. 47 (1), pp. 87–96.
185. Laurinčikas, A. 2005, "On the derivatives of zeta-functions of certain cusp forms. II", *Glasg. Math. J.*, vol. 47, pp. 505–516.
186. Laurinčikas, A. 2005, "Limit theorems for Estermann zeta-function. I", *Statist. Probab. Lett.*, vol. 72, pp. 227–235.
187. Laurinčikas, A. 2005, "Limit theorems for the Estermann zeta-function. II", *Cent. Eur. J. Math.*, vol. 3 (4), pp. 580–590.

188. Laurinčikas, A. 2005, “A limit theorem for the Hurwitz zeta-function with algebraic irrational parameter“, *Zap. Nauch. Semin. POMI*, vol. 322, pp. 125–134.
189. Laurinčikas, A. 2005, “Value distribution of general Dirichlet series. VI“, *Nonlinear Anal. Model. Control*, vol. 10 (3), pp. 235–246.
190. Laurinčikas, A. 2005, “The joint distribution of additive and complex-valued multiplicative functions“, *Acta Math. Univ. Ostrav.*, vol. 13 (1), pp. 35–46.
191. Laurinčikas, A. 2005, “On the Lindelöf hypothesis for the Hurwitz zeta-function“, *Chebysh. Sb.*, vol. 5 (4), pp. 155–163.
192. Laurinčikas, A. 2005, “Limit theorems for the Mellin transforms of the Riemann zeta-function“, *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 8, pp. 63–75.
193. Laurinčikas, A. 2005, “Yu. V. Linnik and his large sieve method“, *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, vol. 8, pp. 76–80.
194. Laurinčikas, A., Steuding, J. 2005, “A limit theorem for the Hurwitz zeta-function with an algebraic irrational parameter“, *Arch. Math. (Basel)*, vol. 85, pp. 419–432.
195. Laurinčikas, A., Zmaramys S. 2005, “Asymptotics for the mean value of normalized zeta-functions of certain cusp forms“, *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 16 (5–6), pp. 437–450.
196. Kačėnas, A., Laurinčikas, A., Zmaramys, S. 2005, “On fractional moments of Dirichlet L -functions“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 45 (2), pp. 208–228 (in Russian) $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 45 (2), pp. 173–191.
197. Laurinčikas, A. 2005, “Joint universality of general Dirichlet series“, *Izv. RAN, Ser. Mat.*, vol. 69 (1), pp. 133–144 (in Russian) $\equiv$ *Izv. Math.*, vol. 69 (1), pp. 131–142.
198. Laurinčikas, A., Matsumoto, K., Steuding, J. 2005, “Discrete universality of L -functions for new forms“, *Mat. Zametki*, vol. 78 (4), pp. 595–603 (in Russian) $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 78 (3–4), pp. 551–558.
199. Ding, L., Kanemitsu, S., Laurinčikas, A. 2006, “On the summatory function of class of multiplicative functions“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 46 (1), pp. 111–122 $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 46 (1), pp. 92–101.
200. Genys, J., Laurinčikas, A. 2006, “Value distribution of general Dirichlet series.VIII“, *Chebysh. Sb.*, vol. 7 (2), pp. 286–296.
201. Genys, J., Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2006, “Value distribution of general Dirichlet series. VII“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 46 (2), pp. 193–202 $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 46 (2), pp. 55–162.
202. Javtokas, A., Laurinčikas, A. 2006, “Universality of the periodic Hurwitz zeta-function“, *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 17 (10), pp. 711–722.
203. Javtokas, A., Laurinčikas, A. 2006, “On the periodic Hurwitz zeta-function“, *Hardy-Ramanujan J.*, vol. 29, pp. 18–36.
204. Kaczorowski, J., Laurinčikas, A., Steuding, J. 2006, “On the value distribution of shifts of universal Dirichlet series“, *Monatsh. Math.*, vol. 147, pp. 309–317.
205. Laurinčikas, A. 2006, “Limit theorems for the Mellin transform of the square of the Riemann zeta-function. I“, *Acta Arith.*, vol. 122 (2), pp. 173–184.
206. Laurinčikas, A. 2006, “The joint distribution of the Riemann zeta-function“, *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 73 (2), pp. 201–217.
207. Laurinčikas, A. 2006, “Limit theorems for the Laplace transform of the Riemann zeta-function“, *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 17 (7), pp. 521–529.
208. Laurinčikas, A. 2006, “The joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions“, *Analysis*, vol. 26 (3), pp. 419–428.
209. Laurinčikas, A. 2006, “Value distribution of general Dirichlet series.VIII“, *Algebra Discrete Math.*, vol. 4, pp. 40–56.
210. Laurinčikas, A. 2006, “On one application of the theory of processes in analytic number theory“, *Prague Stochastics 2006. Proc. Joint Sess. 7th Prague Symp. Asympt. Stat. and 15th Prague*

Conf. on Inform. Theory, Statistical Decision Functions and Random Proc. M. Huškova and M. Janžura (Eds.). Matfyzpress, Prague, pp. 515–522.

211. Laurinčikas, A. 2006, “The universality of some zeta-functions“, *Chebyshev. Sb.*, vol. 7 (3), pp. 157–166.

212. Laurinčikas, A. 2006, “A limit theorem for the Hurwitz zeta-function with algebraic irrational parameter“, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, vol. 137 (2), pp. 4684–4689.

213. Laurinčikas, A. 2006, “Prehistory of the Voronin universality theorem“, *Šiauliai Math. Semin.*, vol. 1 (9), pp. 41–53.

214. Laurinčikas, A. 2006, “Analytic number theory“, in: *Math. in Lithuania after 1945*, pp. 45–71 (in Lithuanian).

215. Laurinčikas, A. 2006, “Algebraic number theory“, in: *Math. in Lithuania after 1945*, pp. 72–80 (in Lithuanian).

216. Laurinčikas, A. 2006, “Metric number theory“, in: *Math. in Lithuania after 1945*, pp. 81–86 (in Lithuanian).

217. Laurinčikas, A. Matsumoto, K. 2006, “Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions. II“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 46 (3), pp. 332–350 $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 46 (3), pp. 271–286.

218. Laurinčikas, A., Steuding, J. 2006, “On the Lindelöf hypothesis“, *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 17 (6), pp. 443–449.

219. Laurinčikas, A. Steuding, J. 2006, “Joint universality for L -functions attached to a family of elliptic curves“, *Elementare und analytische Zahlentheorie (Tagungsband). Proc. ELAZ-Conf., May 24–28, 2004*. W. Schwarz, J. Steuding (Eds.). Verlag, pp. 155–163.

220. Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2006, “Remarks on the universality of the periodic zeta-function“, *Mat. Zametki*, vol. 80 (4), pp. 561–568 (in Russian) $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 80 (3–4), pp. 532–538.

221. Garbaliuskienė, V., Genienė, D., Laurinčikas, A. 2007, “Value distribution of the Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter. I“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 47 (2), pp. 163–176 $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 47 (2), pp. 135–146.

222. Garbaliuskienė, V., Laurinčikas, A. 2007, “The universality of the derivatives of L -functions of elliptic curves“, in: *Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. Fourth Int. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 25–29 September 2006*. A. Laurinčikas and E. Manstavičius (Eds.). Vilnius: TEV, pp. 24–29.

223. Genienė, D., Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2007, “Value distribution of the Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter. II“, *Liet. Mat. Rink.*, vol. 47 (4), pp. 482–496 $\equiv$ *Lith. Math. J.*, vol. 47 (4), pp. 394–405.

224. Genys, J., Laurinčikas, A. 2007, “Weighted limit theorem for general Dirichlet series“, *Uniform Distrib. Theory*, vol. 2 (2), pp. 49–66.

225. Karaliūnaitė, J., Laurinčikas, A. 2007, “The Atkinson formula for the periodic zeta-function“, *Lith. Math. J.*, vol. 47 (4), pp. 412–422.

226. Laurinčikas, A. 2007, “Limit theorems for the Mellin transform of $|\zeta(1/2+it)|^2$. II“, *Advanced Studies in Pure Math.*, 49. Probability and Number Theory. Kanazawa, pp. 185–198.

227. Laurinčikas, A. 2007, “Value distribution theorems for the Estermann zeta-function“, *Vestnik Samarskogo Gosud. Univ.*, vol. 7 (57), pp. 215–227.

228. Laurinčikas, A. 2007, “A joint limit theorem for Laplace transforms of the Riemann zeta-function“, *Nonlinear Anal. Model. Control*, vol. 12 (4), pp. 503–510.

229. Laurinčikas, A. 2007, “Remarks on characteristic transform of probability measure“, *Šiauliai Math. Semin.*, vol. 2 (10), pp. 43–52.

230. Laurinčikas, A. 2007, “The joint universality of zeta-functions with periodic coefficients“, *Šiauliai Math. Semin.*, vol. 2 (10), pp. 53–65.

231. Laurinčikas, A. 2007, "In the limit measure for the Laplace transform of the Riemann zeta-function", *Archiv Math.*, vol. 89, pp. 552–560.
232. Laurinčikas, A. 2007, "Voronin-type theorem for periodic Hurwitz zeta-functions", *Matem. Sbornik*, vol. 198 (2), pp. 91–102 $\equiv$ *Sbornik Math.*, vol. 198 (1–2), pp. 231–242.
233. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2007, "Discrete limit theorems for Estermann zeta-functions. I", *Algebra Discrete Math.*, vol. 4, pp. 84–101.
234. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2007, "On the analogue of the Lindelöf hypothesis for the Lerch zeta-function", in: *Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. Fourth Int. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 25–29 September 2006*. A. Laurinčikas and E. Manstavičius (Eds.). Vilnius: TEV, pp. 76–86.
235. Laurinčikas, A., Matsumoto, K. 2007, "Joint value distribution theorems on Lerch zeta-functions. III", in: *Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. Fourth Int. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 25–29 September 2006*, A. Laurinčikas and E. Manstavičius (Eds.). Vilnius: TEV, pp. 87–98.
236. Laurinčikas, A., Steuding, J. 2007, "On fractional power moments of zeta-functions associated with certain cusp forms", *Acta Appl. Math.*, vol. 97 (1–3), pp. 25–39.
237. Laurinčikas, A., Steuding, J. 2007, "A joint limit theorem for Hurwitz-functions with algebraic irrational parameters", *Ann. Univ. Sc. Budapest. De Rolando, Sect. Comput.*, vol. 27, pp. 15–30.
238. Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2007, "On the fourth power moment of the function $\zeta_\lambda(s)$ ", *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 18 (9), p.p. 629–638.
239. Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A. 2007, "A general discrete limit theorem in the space of analytic functions for the Matsumoto zeta-function", *Teor. Verojatn. Primen*, vol. 52 (3), pp. 594–602 (in Russian).
240. Balinskaitė, V., Laurinčikas, A. 2008, "Discrete limit theorems for the Mellin transform of the Riemann zeta-function", *Acta Arith.*, vol. 131 (1), pp. 29–42.
241. Balinskaitė, V., Laurinčikas, A. 2008, "A two-dimensional discrete limit theorems in the space of analytic functions for Mellin transforms of the Riemann zeta function", *Nonlinear Anal. Model. Control*, vol. 13 (2), pp. 159–167.
242. Garbaliuskiene, V., Genys, J., Laurinčikas, A. 2008, "Discrete universality of the L -functions of elliptic curves", *Siberian Math. J.*, vol. 49 (4), pp. 612–627.
243. Genienė, D., Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2008, "Value distribution of the Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter. III", *Lith. Math. J.*, vol. 48 (3), pp. 282–293.
244. Javtokas, A., Laurinčikas, A. 2008, "A joint universality theorem for periodic Hurwitz zeta-function", *Bulletin of the Australian Math. Soc.*, vol. 78, pp. 13–33.
245. Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A. 2008, "A discrete limit theorem on the complex plane for the Hurwitz zeta-function with an algebraic irrational parameter", *Ann. Univ. Sc. Budapest. De Rolando, Sect. Comput.*, vol. 29, pp. 25–38.
246. Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A. 2008, "A general discrete limit theorem in the space of analytic functions for the Matsumoto zeta-function", *Probab. Th. Appl.*, vol. 52(3), pp. 523–531.
247. Kolupayeva, A., Laurinčikas, A. 2008, "Value-distribution of twisted automorphic L -functions", *Lith. Math. J.*, vol. 48 (2), pp. 203–211.
248. Korsakienė, D., Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. "On moments of the argument of zeta-functions of Hecke-Eigen cusp forms", *Voronoi's Impact on Modern Science, Book 4, Vol. 1, Proc. of the 4th Int. Conf. on Analytic Number Th. and Spatial Tessellations*. A. Laurinčikas, J. Steuding (Eds.). Inst. Math., NAS of Ukraine, Kyiv, pp. 63–72.
249. Laurinčikas, A. 2008, "Functional independence of periodic Hurwitz zeta-functions", *Mat. Zametki*, vol. 83 (1), pp. 69–78 (in Russian) $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 83 (1), pp. 65–71.

250. Laurinčikas, A. 2008, "On joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions", *Lith. Math. J.*, vol. 48 (1), pp. 79–91.
251. Laurinčikas, A. 2008, "Joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions", *Izv. RAN, Ser. Mat.*, vol. 72 (4), pp. 121–140 (in Russian) $\equiv$ *Izv. Math.*, vol. 72(4), pp. 741–760.
252. Laurinčikas, A. 2008, "One transformation formula related to the Riemann zeta-function", *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 19 (8), pp. 577–583.
253. Laurinčikas, A. 2008, "The Mellin transform of the Riemann zeta-function in the critical strip. II", *Voronoi's Impact on Modern Science, Book 4, Vol. 1, Proc. of the 4th Int. Conf. on Analytic Number Th. and Spatial Tessellations*. A. Laurinčikas, J. Steuding (Eds.). Inst. Math., NAS of Ukraine, Kyiv, pp. 89–96.
254. Laurinčikas, A. 2008, "On the joint universality of Hurwitz zeta-functions", *Šiauliai Math. Semin.*, vol. 3(11), pp. 169–187.
255. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2008, "The characteristic transforms on $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ ", *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 19 (1), pp. 11–22.
256. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2008, "Discrete limit theorems for Estermann zeta-functions. II", *Algebra and Discrete Math.*, vol. 3, pp. 69–83.
257. Laurinčikas, A., Steuding, J., Šiaučiušas, D. 2009, "On zeta-functions associated to certain cusp forms. II", *Central European J. Math.*, vol. 7(4), pp. 635–649.
258. Laurinčikas, A., Skerstonaitė, S. 2009, "A joint universality theorem for periodic Hurwitz zeta-functions. II", *Lith. Math. J.*, vol. 49 (3), pp. 287–296.
259. Laurinčikas, A., Misevičius, G. "Value distribution of the Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter. IV", *Lith. Math. J.*, vol. 49 (2), pp. 175–184.
260. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2009, "On the joint universality of periodic zeta-functions", *Mat. Zametki*, vol. 85 (1), pp. 54–64 $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 85 (1–2), pp. 51–60.
261. Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A. 2009, "The Laplace transform of the Riemann zeta-function in the critical strip", *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 20 (9), pp. 643–648.
262. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2009, "The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function", *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 20 (9), pp. 673–686.
263. Laurinčikas, A. 2009, "A two dimensional limit theorem for Mellin transforms of the Riemann zeta-function", *Lith. Math. J.*, vol. 49 (1), pp. 62–70.
264. Laurinčikas, A. 2009, "Application of a difference-differential equation for mean values of multiplicative functions", in: *Proc. Int. Conf. Differ. Eq. and Appl., DETA-2009*, V. Kleiza et al. (Eds), Kaunas University of Technology, pp. 59–65.
265. Genys, J., Laurinčikas, A. 2009, "Weighted limit theorems for general Dirichlet series. II", *Uniform Distribution Theory*, vol. 4, pp. 9–26.
266. Laurinčikas, A. 2009, "The joint distribution of multiplicative functions", *Chebysh. Sb.*, vol. 10 (1), pp. 41–58.
267. Garunkštis, R., Grigutis, A., Laurinčikas, A. 2009, "Selberg's central limit theorem on the critical line and the Lerch zeta-function", *New Directions in Value-Distrib. Theory of Zeta and L-functions, Würzburg Conf., October 6–10, 2008*. R. Steuding, J. Steuding (Eds.). Aachen: Shaker Verlag, pp. 57–63.
268. Laurinčikas, A., Macaitienė, R., Šiaučiušas, D. 2009, "On discrete universality of the periodic zeta-function. II", *New Directions in Value-Distrib. Theory of Zeta and L-functions, Würzburg Conf., October 6–10, 2008*. R. Steuding, J. Steuding (Eds.). Aachen: Shaker Verlag, pp. 149–159.
269. Laurinčikas, A., Skerstonaitė, S. 2009, "Joint universality for periodic Hurwitz zeta-function. II", *New Directions in Value-Distrib. Theory of Zeta and L-functions, Würzburg Conf., October 6–10, 2008*. R. Steuding, J. Steuding (Eds.). Aachen: Shaker Verlag, pp. 161–169.

270. Laurinčikas, A. 2010, “Universality of the Riemann zeta-function“, *J. Number Theory*, vol. 130 (10), pp. 2323–2331.
271. Laurinčikas, A. 2010, “On the joint universality of Lerch zeta functions“, *Math. Zametki*, vol. 88 (3), pp. 428–437 (in Russian) $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 88 (3–4), pp. 386–394.
272. Laurinčikas, A. 2010, “On the argument of zeta-functions of certain cusp forms near the critical line“, *Archiv Math.*, vol. 95 (3), pp. 243–250.
273. Laurinčikas, A. 2010, “On limit distribution of the Hurwitz zeta-function“, *Central European J. Math.*, vol. 8 (4), pp. 786–794.
274. Kolupayeva, A., Laurinčikas, A. 2010, “Value-distribution of twisted automorphic L -functions. II“, *Lith. Math. J.*, vol. 50 (3), pp. 284–292.
275. Laurinčikas, A. 2010, “Joint universality of zeta-functions with periodic coefficients“, *Izv. RAN, Ser. Mat.*, vol. 74 (3), pp. 79–102 (in Russian) $\equiv$ *Izv. Math.*, vol. 74 (3), pp. 515–539.
276. Kanemitsu, S., Laurinčikas, A., Jing, Ma. 2010, “Square-free integers as ideal norms“, *Acta Math. Sinica. English Series*, vol. 26 (4), pp. 621–628.
277. Garbaliuskienė, V., Laurinčikas, A., Stankus, E. 2010, “Limit theorems for twists of L -functions of elliptic curves“, *Lith. Math. J.*, vol. 50 (2), pp. 187–197.
278. Laurinčikas, A. 2010, “Limit theorems for the Mellin transform of the square of the Riemann zeta-function“. *I Corrigendum to the paper in Acta Arith.*, vol. 122 (2006), pp. 173–184, *Acta Arith.*, vol. 143(2), pp. 191–195.
279. Garunkštis, R., Laurinčikas, A., Matsumoto, K., Steuding, J., Steuding, R. 2010, “Effective uniform approximation by the Riemann zeta-function“, *Publications Math.*, vol. 54 (1), pp. 209–219.
280. Laurinčikas, A. 2010, “Limit theorems for the Mellin transform of the fourth power of the Riemann zeta-function“, *Sib. Mat. Zh.*, vol. 51 (1), pp. 110–127 (in Russian) $\equiv$ *Siberian Math. J.*, vol. 51 (1), pp. 88–103.
281. Balinskaitė, V., Laurinčikas, A. 2010, “A discrete limit theorem for the Mellin transforms of the Riemann zeta-function“, *Chebysh. Sb.*, vol. 11 (1), pp. 31–46.
282. Laurinčikas, A. 2010, “Some value-distribution theorems for periodic Hurwitz zeta-functions“, *Fundam. Prikladn. Matem.*, vol. 16 (5), pp. 79–92 (in Russian).
283. Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A. 2011, “The joint distribution of periodic zeta-functions“, *Studia Sc. Math. Hung.*, vol. 48 (2), pp. 257–279.
284. Laurinčikas, A., Steuding, J. 2011, “Limit theorems in the space of analytic functions for the Hurwitz zeta-function with an algebraic irrational parameter“, *Central European J. Math.*, vol. 9 (2), pp. 319–327.
285. Genys, J., Laurinčikas, A. 2011, “Joint weighted limit theorems for general Dirichlet series“, *Math. Model. Anal.*, vol. 16 (1), pp. 39–51.
286. Laurinčikas, A. 2011, “A growth estimate for the Mellin transform of the Riemann zeta function“, *Mat. Zametki*, vol. 89 (1), pp. 70–81 $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 89 (1–2), pp. 82–92.
287. Laurinčikas, A. 2011, “The Mellin transform of the square of the Riemann zeta-function in the critical strip“, *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 22(7), pp. 467–476.
288. Laurinčikas, A. 2011, “Mean square of the Mellin transform of the Riemann zeta-function“, *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 22(9), pp. 617–629.
289. Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2011, “On the fourth power moment of the function $\zeta_\lambda(s)$. II“, *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 22 (10), pp. 759–765.
290. Laurinčikas, A., Macaitienė, R., Šiaučiūnas, D. 2011, “Joint universality for zeta-functions of different types“, *Chebysh. Sb.*, vol. 12 (2), pp. 192–203.
291. Laurinčikas, A. 2011, “Universality theorems for composite functions of zeta-functions“, *Chebysh. Sb.*, vol. 12 (1), pp. 124–139.
292. Garbaliuskienė, V., Laurinčikas, A. 2011, “On twisted L -functions of elliptic curves“, *Chebysh. Sb.*, vol. 12 (2), pp. 171–181.

293. Laurinčikas, A. 2011, "On joint universality of Dirichlet L -functions", *Chebysh. Sb.*, vol. 12 (2), pp. 182–191.
294. Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2011, "Limit theorems for the Estermann zeta function. III", *Chebysh. Sb.*, vol. 12 (4), pp. 97–108.
295. Laurinčikas, A. 2012, "On joint universality of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-functions", *J. Number Theory*, vol. 132, pp. 2842–2853.
296. Laurinčikas, A. 2012, "Joint universality of Hurwitz zeta-functions", *Bulletin of the Australian Math. Soc.*, vol. 86, pp. 232–243.
297. Balčiūnas, A., Laurinčikas, A. 2012, "The Laplace transform of Dirichlet L -functions, *Nonlinear Anal. Model. Control*, vol. 17(2), pp. 127–138.
298. Laurinčikas, A., Rašytė, J. 2012, "Generalizations of a discrete universality theorem for Hurwitz zeta-functions", *Lith. Math. J.*, vol. 52(2), pp. 172–180.
299. Laurinčikas, A. 2012, "On universality of the Lerch zeta-function", *Tr. Mat. Inst. Steklova*, vol. 276 (1), pp. 173–181 (in Russian) $\equiv$ *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 276 (1), pp. 167–175.
300. Garbaliuskienė, V., Laurinčikas, A. 2012, "Limit Theorem for twists of L -functions of elliptic curves. II", *Math. Model. Anal.*, vol. 17(1), pp. 90–99.
301. Laurinčikas, A. 2012, "Universality of composite functions of periodic zeta-functions", *Matem. Sbornik*, vol. 203 (11), pp. 105–120 (in Russian) $\equiv$ *Sbornik Math.*, vol. 203 (11), pp. 1631–1646.
302. Janulis, K., Laurinčikas, A., Macaitienė, R., Šiaučiūnas, D. 2012, "Joint universality of Dirichlet L -functions and periodic Hurwitz zeta-functions", *Math. Model. Anal.*, vol. 17 (5), pp. 673–685.
303. Laurinčikas, A. 2012, "On joint distribution of the Riemann zeta-function", *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 23 (11), pp. 853–862.
304. Černigova, S., Laurinčikas, A. 2012, "On the mean square of the periodic zeta-function", in: *Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. Fifth Int. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 4-10 September 2011*, TEV: Vilnius, pp. 91–99.
305. Laurinčikas, A., Macaitienė, R., 2012, "On the universality of zeta-functions of certain cusp forms", in: *Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. Fifth Int. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 4-10 September 2011*, TEV: Vilnius, pp. 173–183.
306. Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2012, "A mixed joint universality theorem for zeta-functions. III", in: *Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. Fifth Int. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 4-10 September 2011*, TEV: Vilnius, pp. 185–195.
307. Laurinčikas, A. 2012, "Some value-distribution theorems for periodic Hurwitz zeta-functions", *J. Math. Sciences*, vol. 180 (5), pp. 581–591.
308. Laurinčikas, A. 2012, "Universality of composite functions", *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, vol. B34, pp. 191–204.
309. Laurinčikas, A. 2012, "The Riemann zeta-function: approximation of analytic functions", *Adv. in Applied Analysis, Trends in Math.* Basel: Birkhauser, pp. 95–114.
310. Garbaliuskienė, V., Laurinčikas, A., Macaitienė, R., Šiaučiūnas, D. 2012, "Universality of some zeta-functions", *Uchen. Zap. Orlovsk. Gos. Univ., Tekn. Med. Nauki*, vol. 6(2), pp. 260–265.
311. Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2012, "On zeros of some analytic functions related to the Hurwitz zeta-function", *Chebysh. Sb.*, vol. 13 (2), pp. 86–90.
312. Laurinčikas, A., Atstopenė, J. 2012, "On zeros of some composite functions", *Analytical methods of analysis and differential equations: AMADE-2012*, Cambridge Scientific Publishers, pp. 93–99.
313. Laurinčikas, A., Matsumoto, K., Steuding, J. 2013, "Universality of some functions related to zeta-functions of certain cusp forms", *Osaka J. Math.*, vol. 50 (4), pp. 1021–1037.

314. Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2013, “On zeros of periodic zeta functions“, *Ukrainian Math. J.*, vol. 65 (6), pp. 953–958.
315. Laurinčikas, A. 2013, “On the universality of the Hurwitz zeta-function“, *Int. J. Number Theory*, vol. 9 (1), pp. 155–165.
316. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2013, “Joint universality of the Riemann zeta-function and Lerch zeta-functions“, *Nonlinear Anal. Model. Control*, vol. 18 (3), pp. 314–326.
317. Laurinčikas, A. 2013, “On zeros of some analytic functions related to the Riemann zeta-function“, *Glasnik Mat. Ser. III*, vol. 48 (1), pp. 59–65.
318. Černigova, S., Laurinčikas, A. 2013, “The Atkinson type formula for the periodic zeta-function“, *Chebyshev. Sb.*, vol. 14 (2), pp. 180–200.
319. Laurinčikas, A., Macaitienė, R., Mochov, D., Šiaučiūnas, D. 2013, “On universality of certain zeta-functions“, *Izv. Sarat. Univ. Novaya Ser. Ser. Mat. Mekh. Inform.*, vol. 13 (4(2)), pp. 67–72.
320. Janulis, K., Laurinčikas, A. 2013, “Joint universality of Dirichlet L -functions and Hurwitz zeta-functions“, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, vol. 39, pp. 203–214.
321. Laurinčikas, A., Matsumoto, K., Steuding, J. 2013, “On hybrid universality of certain composite functions involving Dirichlet L -functions“, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, vol. 41, pp. 85–96.
322. Laurinčikas, A. 2013, “Universality results for the Riemann zeta-function“, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, vol. 3 (3–4), pp. 98–117.
323. Laurinčikas A., Meška, L. 2014, “Sharpening of the universality inequality“, *Mat. Zametki*, vol. 96 (5), pp. 905–910 $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 96 (5–6), pp. 971–976.
324. Garbaliusienė, V., Laurinčikas, A. 2014, “A limit theorem for twists of L -functions of elliptic curves“, *Math. Model. Anal.*, vol. 19 (5), pp. 696–705.
325. Laurinčikas, A. 2014, “A discrete universality theorem for the Hurwitz zeta-function“, *J. Number Theory*, vol. 143, 232–247.
326. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2014, “Joint universality of Dirichlet L -functions and Lerch zeta-functions“, *Sib. Mat. Zh.*, vol. 55 (4), pp. 787–805 (in Russian) $\equiv$ *Siberian Math. J.*, vol. 55 (4), pp. 645–657.
327. Buivydas, E., Laurinčikas, A., Macaitienė, R., Rašytė, J. 2014, “Discrete universality theorems for the Hurwitz zeta-function“, *J. Approx. Theory*, vol. 183, pp. 1–13.
328. Laurinčikas, A. 2014, “Joint discrete universality for Hurwitz zeta-functions“, *Matem. Sbornik*, vol. 205 (11), pp. 75–94 (in Russian) $\equiv$ *Sbornik Math.*, vol. 205 (11), pp. 1599–1619.
329. Garbaliusienė, V., Laurinčikas, A. 2014, “Limit theorems for twists of L -functions of elliptic curves. IV“, *Math. Model. Anal.*, vol. 19 (1), pp. 66–74.
330. Laurinčikas, A., Stoncelis, M., Šiaučiūnas, D. 2014, “On the zeros of some functions related to periodic zeta functions“, *Chebyshev. Sb.*, vol. 15 (1), pp. 121–130.
331. Laurinčikas, A. 2014, “A discrete version of the Mishou theorem“, *Algebra and Number Theory: current problems and applications, Proc. 12th Int. Conf. ded. to the 80th ann. of Prof. V. N. Latyshev, Tula, April 21–25, 2014*. Tula: TGPU of L. N. Tolstoy, pp. 31–34.
332. Buivydas, E., Laurinčikas, A. 2015, “A discrete version of the Mishou theorem“, *Ramanujan J.*, vol. 38 (2), pp. 331–347.
333. Laurinčikas, A. 2015, “General joint discrete universality theorem for Hurwitz zeta-functions“, *J. Number Theory*, vol. 154, pp. 44–62.
334. Buivydas, E., Laurinčikas, A. 2015, “A generalized joint discrete universality theorem for the Riemann and Hurwitz zeta-functions“, *Lith. Math. J.*, vol. 55 (2), pp. 193–206.
335. Černigova, S., Laurinčikas A. 2015, “On the mean square of the periodic zeta-function. II.“, *Nonlinear Anal. Model. Control*, vol. 20 (1), pp. 99–111.
336. Dubickas, A., Laurinčikas, A. 2015, “Joint discrete universality of Dirichlet L -functions“, *Arch. Math. (Basel)*, vol. 104 (1), pp. 25–35.

337. Laurinčikas A., Korsakienė D., Šiaučiūnas, D. 2015, “Joint discrete universality of Dirichlet L -functions. II“, *Chebysh. Sb.*, vol. 16 (1), pp. 205–218.
338. Laurinčikas, A. 2015, “Discrete universality of zeta and L -functions“, *Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: current problems and applications, Proc. 13th Int. Conf. ded. 80th birthday of Prof. S. S. Ryshkov, Tula, 25–30 May, 2015*, Tula: TGPU of L.N. Tolstoy, p. 32–35.
339. Dubickas, A., Laurinčikas, A. 2016, “Distribution modulo 1 and the discrete universality of the Riemann zeta-function“, *Abhand. Math. Sem. Un. Hamburg*, vol. 86 (1), pp. 79–87.
340. Garbaliuskiene, V., Laurinčikas, A. 2016, “A joint Elliott type theorem for twists of L -functions of elliptic curves“, *Math. Model. Anal.*, vol. 21 (6), pp. 752–761.
341. Laurinčikas A., Meška L., 2016, “On the modification of the universality of the Hurwitz zeta-function“, *Nonlinear Anal. Model. Control*, vol. 21 (4), pp. 564–576.
342. Laurinčikas A., 2016, “An Elliot-type theorem for twists of L -functions of elliptic curves“, *Mat. Zametki*, vol. 99 (1), pp. 78–88 (in Russian) $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 99 (1), pp. 82–90.
343. Laurinčikas A., Mochov D., 2016, “A discrete universality theorem for periodic Hurwitz zeta-functions“, *Chebysh. Sb.*, vol. 17 (1), pp. 148–159.
344. Janulis K., Jurgaitis D., Laurinčikas A., Macaitienė R. 2016, “Universality theorems for some composite functions“, *Math. Model. Anal.*, vol. 21 (1), pp. 35–46.
345. Laurinčikas A., Macaitienė R. 2016, “Universality results on Hurwitz zeta-functions“, *Algebra, Logic and Number Theory. Banach C. Publ.*, vol. 108, pp. 161–172.
346. Laurinčikas, A. 2016, “Uniform distribution modulo 1 and the universality of zeta-functions of certain cusp forms“, *Publ. Inst. Math. (Nouv. Sér.)*, vol. 100 (114(1)), pp. 131–140.
347. Laurinčikas, A. 2016, “Distribution modulo 1 and universality of the Hurwitz zeta-function“, *J. Number Theory*, vol. 167, pp. 294–303.
348. Laurinčikas, A., Matsumoto, K., Steuding, J. 2016, “Discrete universality of L -functions of new forms. II“, *Lith. Math. J.*, vol. 56 (2), pp. 207–218.
349. Laurinčikas, A. Macaitienė, R., Šiaučiūnas, D. 2016, “Uniform distribution modulo 1 and the joint universality of Dirichlet L -functions“, *Lith. Math. J.*, vol. 56 (4), pp. 529–539.
350. Laurinčikas, A. 2016, “Universality theorems for zeta-functions with periodic coefficients“, *Siberian Math. J.*, vol. 57 (2), pp. 330–339.
351. Laurinčikas, A. 2016, “The joint discrete universality of periodic zeta-functions“, in: *From Arithmetic to Zeta-functions: Number Theory in Memory of Wolfgang Schwarz*, J. Sander, J. Steuding, R. Steuding (Eds.). Cham: Springer Int. Publishing, pp. 231–246.
352. Laurinčikas, A., Meška, L. 2016, “Modification of the Mishou theorem“, *Chebysh. Sb.*, vol. 17 (3), pp. 125–137.
353. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2016, “Value distribution of twists of L -functions of elliptic curves“, *Sovr. Probl. Mat.*, vol. 23, pp. 77–84 (in Russian) $\equiv$ 2017, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 296 (2), pp. 70–77.
354. Laurinčikas, A., Mincevič, A. 2017, “Discrete universality theorems for the Lerch zeta-function“, in: *Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. 6th Int. Conf. in Honour of Prof. J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 11-17 September 2016*, A. Dubickas, Laurinčikas, A. E. Manstavičius, G. Stepanauskas (Eds.). Vilnius: Vilniaus University, pp. 87–95.
355. Laurinčikas, A., Meška, L., 2017, “Modifications of discrete versions of the Mishou theorem“, in: *Anal. Probab. Meth. in Number Theory. Proc. 6th Int. Conf. in Honour of Prof. J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 11-17 September 2016*, A. Dubickas, Laurinčikas, A. E. Manstavičius, G. Stepanauskas (Eds.). Vilnius: Vilniaus University, pp. 79–86.
356. Garbaliuskiene, V., Karaliūnaitė, J., Laurinčikas, A. 2017, “On zeros of some combinations of Dirichlet L -functions and Hurwitz zeta-functions“, *Math. Model. Anal.*, vol. 22 (6), pp. 733–749.
357. Laurinčikas, A. Macaitienė, R. 2017, “Discrete universality in the Selberg class“, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 299 (1), pp. 143–156 $\equiv$ *Tr. Steklov Mat. Inst.*, vol. 299, pp. 155–169

(in Russian).

358. Garunkštis, R., Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2017, “Zeros of the Riemann zeta-function and its universality“, *Acta Arith.*, vol. 181 (2), pp. 127–142.

359. Laurinčikas, A. 2017, “On discrete universality of the Hurwitz zeta-function“, *Results in Math.*, Basel: Springer Basel, vol. 72 (1–2), pp. 907–917.

360. Laurinčikas, A. 2017, “A discrete version of the Mishou theorem. II“, *Tr. Mat. Inst. Steklova*, vol. 296 (1), pp. 181–191 (in Russian) $\equiv$ *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 296 (1), pp. 172–182.

361. Laurinčikas, A. 2017, “A remark on the distribution of the values of the Riemann zeta function“, *Mat. Zametki*, vol. 102 (2), pp. 247–254 $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 102 (2), pp. 212–218.

362. Garunkštis, R., Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2017, “Zeros of the Riemann zeta-function and its universality“, *Acta Arith.*, vol. 181 (2), pp. 127–142.

363. Garbaliuskienė, V., Karaliūnaitė, J., Laurinčikas, A. 2017, “On zeros of some combinations of Dirichlet L -functions and Hurwitz zeta-functions“, *Math. Model. Anal.*, vol. 22 (6), pp. 733–749.

364. Garunkštis, R., Laurinčikas, A. 2018, “The Riemann hypothesis and universality of the Riemann zeta-function“, *Math. Slovaca*, vol. 68 (4), pp. 741–748.

365. Šiaučiūnas, D., Laurinčikas, A. 2018, “Discrete universality of zeta-functions of certain cusp forms“, *Algebra, Number Theory and Disc. Geometry: Modern Problems and Applications. Proc. XV Int. Conf. Prof. N. M. Korobov. Tula, 28–31 May, 2018*. Izd. Tul. Gos. Ped. Inst. Im. L.N. Tolstogo, pp. 236–238 (in Russian).

366. Garunkštis, R., Laurinčikas, A. 2018, “Discrete mean square of the Riemann zeta-function over imaginary parts of its zeros“, *Periodica Math. Hung.*, vol. 76 (2), pp. 217–228.

367. Macaitienė, R., Laurinčikas, A., 2018, Joint approximation of analytic functions by shifts of the Riemann and periodic Hurwitz zeta-functions“, *Appl. Anal. Discrete Math.*, vol. 12 (2), pp. 508–527.

368. Laurinčikas, A., Macaitienė, R., Mochov, D., Šiaučiūnas, D. 2018, “Universality of the periodic Hurwitz zeta-function with rational parameter“, *Sib. Mat. Zh.*, vol. 59 (5), pp. 1128–1135 (in Russian) $\equiv$ *Siberian Math. J.*, vol. 59 (5), pp. 894–900.

369. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2018, “A Bohr-Jessen type theorem for the Epstein zeta-function“, *Results in Math.*, vol. 73 (4), pp. 1–16.

370. Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D., Vaiginytė, A. 2018, “Extension of the discrete universality for zeta-functions of certain cusp forms“, *Nonlinear Anal. Model. Control*, vol. 23 (6), pp. 961–973.

371. Laurinčikas, A. 2018, “Joint value distribution theorems for the Riemann and Hurwitz zeta-functions“, *Moscow Math. J.*, vol. 18 (2), pp. 349–366.

372. Laurinčikas, A., Mincevič, A. 2018, “Joint discrete universality for Lerch zeta-functions“, *Chebysh. Sb.*, vol. 19 (1), pp. 138–151.

373. Laurinčikas, A., Mochov, D. 2018, “On the periodic Hurwitz zeta-function with rational parameter“, *Annales Univ. Sci. Budapest.*, Sect. Comp., vol. 48, pp. 65–80.

374. Laurinčikas, A. 2019, “Discrete universality of the Riemann zeta-function and uniform distribution modulo 1“, *St. Petersburg Math. J.*, vol. 30 (1), pp. 103–110.

375. Balčiūnas, A., Dubickas, A., Laurinčikas, A. 2019, “On the Hurwitz zeta-function with algebraic irrational parameter“, *Mat. Zametki*, vol. 105 (2), pp. 179–186 (in Russian) $\equiv$ *Math. Notes*, vol. 105 (1–2), pp. 173–179.

376. Franckevič, V., Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2019, “On approximation of analytic functions by periodic Hurwitz zeta-functions“, *Math. Model. Anal.*, vol. 24 (1), pp. 20–33.

377. Laurinčikas, A. 2019, “Non-trivial zeros of the Riemann zeta-function and joint universality theorems“, *J. Math. Anal. and Appl.*, vol. 475 (1), pp. 385–402.

378. Laurinčikas, A. 2019, “Joint discrete universality for periodic zeta-functions“, *Quaestiones Math.*, vol. 42 (5), pp. 687–699.

379. Laurinčikas, A., Macaitienė, R., Šiaučiūnas, D. 2019, “A generalization of the Voronin theorem“, *Lith. Math. J.*, vol. 59 (2), pp. 156–168.
380. Laurinčikas, A. 2019, “Almost universality of the Lerch zeta-function“, *Math. Commun.*, vol. 24 (1), pp. 107–118.
381. Laurinčikas, A. 2019, “Universality of the Riemann zeta-function in short intervals“, *J. Number Th.*, vol. 204, pp. 279–295.
382. Franckevič, V., Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2019, “On joint value distribution of Hurwitz zeta-functions“, *Chebysh. Sb.*, vol. 19 (3), pp. 219–230.
383. Korolev, M., Laurinčikas, A. 2019, “A new application of the Gram points“, *Aequationes Math.*, <https://link.springer.com/article/10.1007>
384. Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D., Vadeikis, G., “Weighted discrete universality of the Riemann zeta-function“, *Math. Model. Anal.* (to appear).
385. Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D., Vaiginytė A., “On joint approximation of analytic functions by non-linear shifts of zeta-functions of certain cusp forms“, *Nonlinear Anal. Model. Control.* (to appear).
386. Laurinčikas, A., Petuškinaitė, J., “Universality of Dirichlet L -functions and non-trivial zeros of the Riemann zeta-function“, *Matem. Sbornik* (in Russian) $\equiv$ *Sbornik Math.* (to appear).
387. Laurinčikas, A., “On the Mishou theorem with algebraic parameter“, *Sib. Mat. Zh.* (in Russian) $\equiv$ *Siberian Math. J.* (to appear).

3.2. Monographs

1. Laurinčikas, A. 1996, “Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function“, Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
2. Laurinčikas, A., Garunkštis, R. 2002, “The Lerch Zeta-Function“. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

3.3. Textbooks

1. Laurinčikas, A. 1992, “Basics of the Theory of the Riemann Zeta-Function“. Vilnius: Vilnius University (in Lithuanian).
2. Garunkštis, R., Kačėnas, A., Laurinčikas, A. 2000, “The Lerch Zeta-Function“. Vilnius: Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics (in Lithuanian).
3. Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A. 2003, “Distribution of Prime Numbers“. Šiauliai: Šiauliai University (in Lithuanian).
4. Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2008, “Introduction to the Theory of Dirichlet Series“. Šiauliai: Šiauliai University (in Lithuanian).

REFERENCES

1. Bagchi, B. 1981, “The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series“, Ph. D. Thesis. Calcutta, Indian Statistical Institute.
2. Bohr, H. & Jessen, B. 1930, “Über die Wertverteilung der Riemanschen Zetafunktion“, *Acta Math.*, vol. 54, pp. 1–35.
3. Borchsenius, V. & Jessen B. 1948, “Mean motions and values of the Riemann zeta-function“, *Acta Math.*, vol. 80, pp. 97–166.
4. Conrey, J. B. & Ghosh, A. 1984, “On mean values of the zeta-function“, *Mathematika*, vol. 31, pp. 159–161.

5. Delange, H. 1973, “Sur la distribution des valeurs des fonctions multiplicative complexes“, *C. R. Acad. Sci.*, série A, vol. 276, pp. 161–164.
6. Garbaliuskienė, V. & Macaitienė, R. & Stančikienė, R. & Verikaitė V. 2008, “Antanas Laurinčikas. The bibliographical index book“, Šiauliai: Šiauliai University.
7. Garunkštis, R. 2003, “The effective universality theorem for the Riemann zeta function“, in: *Proc. of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations, Bonn, 2002*, D. R. Heath-Brown, B. Z. Moroz (Eds.), vol. 360, pp. 1–21.
8. Gonek, S. M. 1979, “Analytic properties of zeta and L -functions“, Ph. D. Thesis. University of Michigan.
9. Harman, G. & Matsumoto, K. 1994, “Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function. IV“, *J. London Math. Soc.*, vol. 2, pp. 17–24.
10. Hölder, O. 1887, “Über die Eigenschaft der Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen“, *Math. Ann.*, vol. 28, pp. 1–13.
11. Ivič, A. & Matsumoto, K. 1996, “On the error term in the mean square formula for the Riemann zeta-function in the critical strip“, *Monatshefte Math.*, vol. 121, pp. 213–229.
12. Ivič, A. & Jutila, M. & Motohashi, Y. 2000, “The Mellin transform of power moments of the zeta-function“, *Acta Arith.*, vol. 95, pp. 305–342.
13. Jessen, B. & Wintner, A. 1935, “Distribution functions and the Riemann zeta-function“, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 38, pp. 48–88.
14. Joyner, D. 1986, “Distribution theorems for L -functions“, John Wiley, New York.
15. Klusch, D. 1987, “Asymptotic equalities for the Lipschitz-Lerch zeta-function“, *Arch. Math.*, vol. 49 (1), pp. 38–43.
16. Matsumoto, K. 1987, “Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function I“, *Acta Arith.*, vol. 48, pp. 167–190.
17. Matsumoto, K. 1988, “Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function III“, *Acta Arith.*, vol. 50, pp. 315–337.
18. Matsumoto, K. 2015, “A survey on the theory of universality for zeta and L -functions“, *Number Theory: Plowing and Starring Through High Wave Forms, Proc. 7th China - Japan Sem. (Fukuoka 2013)*, Ser. on Number Theory and its Appl., 11, M. Kaneko et al. (Eds.), World Scientific Publ. Co., Japan, pp. 95–144.
19. Matsumoto, K. & Meurman, T. 1994, “The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip. II“, *Acta Arith.*, vol. 68, pp. 369–382.
20. Mishou, H. 2007, “The joint value-distribution of the Riemann zeta function and Hurwitz zeta functions“, *Lith. Math. J.*, vol. 47, pp. 32–47.
21. Ostrowski, A. 1920, “Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen“, *Math. Z.*, vol. 8, pp. 241–298.
22. Steuding, J. 2007, “Value-Distribution of L -Functions“, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1877, Springer, Berlin, Heidelberg.

23. Steuding, J. 2008, “The mathematical work of Antanas Laurinčikas – an interim report –“, *Šiauliai Math. Semin.*, vol. 3 (11), pp. 7–51.
24. Titchmarsh, E. C. 1986, “The Theory of the Riemann Zeta-Function“, 2nd Edition, revised by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press, Oxford.
25. Voronin, S. M. 1975, “Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function“, *Math. USSR Izv.*, vol. 9, pp. 443–453.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bagchi B. The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Ph. D. Thesis. Calcutta, Indian Statistical Institute. 1981.
2. Bohr H., Jessen B. Über die Wertverteilung der Riemanschen Zetafunktion // *Acta Math.* 1930. Vol. 54, P. 1–35.
3. Borchsenius V., Jessen B. Mean motions and values of the Riemann zeta-function // *Acta Math.* 1948. Vol. 80. P. 97–166.
4. Conrey J. B., Ghosh A. On mean values of the zeta-function // *Mathematika.* 1984. Vol. 31. P. 159–161.
5. Delange H. Sur la distribution des valeurs des fonctions multiplicatives complexes // *C. R. Acad. Sci., série A.* Vol. 276. P. 161–164.
6. Garbaliuskienė V., Macaitienė R., Stančikienė R., Verikaitė V., Antanas Laurinčikas. The bibliographical index book. Šiauliai: Šiauliai University. 2008.
7. Garunkštis R. The effective universality theorem for the Riemann zeta function // *Proc. of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations, Bonn, 2002*, D. R. Heath-Brown, B. Z. Moroz (Eds.). Vol. 360. 2003. P. 1–21.
8. Gonek S. M. Analytic properties of zeta and L -functions, Ph. D. Thesis. University of Michigan. 1979.
9. Harman G., Matsumoto K. Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function. IV // *J. London Math. Soc.* 1994. Vol. 2. P. 17–24.
10. Hölder O. Über die Eigenschaft der Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen // *Math. Ann.* 1887. Vol. 28. P. 1–13.
11. Ivič A., Matsumoto K. On the error term in the mean square formula for the Riemann zeta-function in the critical strip // *Monatshefte Math.* 1996. Vol. 121. P. 213–229.
12. Ivič A., Jutila M., Motohashi Y. The Mellin transform of power moments of the zeta-function // *Acta Arith.* 2000. Vol. 95. P. 305–342.
13. Jessen B., Wintner A. Distribution functions and the Riemann zeta-function // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1935. Vol. 38. P. 48–88.
14. Joyner D. Distribution theorems for L -functions. John Wiley, New York. 1986.
15. Klusch D. Asymptotic equalities for the Lipschitz-Lerch zeta-function // *Arch. Math.* 1987. Vol. 49 (1). P. 38–43.

16. Matsumoto K. Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function I // *Acta Arith.* 1987. Vol. 48. P. 167–190.
17. Matsumoto K. Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function III // *Acta Arith.* 1988. Vol. 50. P. 315–337.
18. Matsumoto K. A survey on the theory of universality for zeta and L -functions // *Number Theory: Plowing and Starring Through High Wave Forms*, Proc. 7th China - Japan Sem. (Fukuoka 2013), Ser. on Number Theory and its Appl. **11**, M. Kaneko et al. (Eds.), World Scientific Publ. Co., Japan. 2015. P. 95–144.
19. Matsumoto K., Meurman T. The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip. II // *Acta Arith.* 1994. Vol. 68. P. 369–382.
20. Mishou H. The joint value-distribution of the Riemann zeta function and Hurwitz zeta functions // *Lith. Math. J.* 2007. Vol. 47. P. 32–47.
21. Ostrowski A. Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen // *Math. Z.* 1920. Vol. 8. P. 241–298.
22. Steuding J. Value-Distribution of L -Functions. Lecture Notes in Math. Vol. 1877. Springer, Berlin, Heidelberg. 2007.
23. Steuding J. The mathematical work of Antanas Laurinčikas – an interim report – // *Šiauliai Math. Semin.* 2008. Vol 3 (11). P. 7–51.
24. Titchmarsh E. C. The Theory of the Riemann Zeta-Function, 2nd Edition, revised by D. R. Heath-Brown. Oxford University Press, Oxford. 1986.
25. Воронин С.М. Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1975. Т. 39. С. 475–486.

Получено 06.02.2019

Принято к печати 10.04.2019

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-46-65

Совместная дискретная универсальность для L -функций из класса Сельберга и периодических дзета-функций Гурвица

А. Бальчюнас, Р. Мацайтене, Д. Шяучюнас

Айдас Бальчюнас — доктор математических наук, ассистент кафедры теории вероятностей и теории чисел, Вильнюсский университет, Литва.

e-mail: a.balciunas@gmail.com

Рената Мацайтене — профессор, доктор математических наук, ведущий научный сотрудник, Научный институт Шяуляйского университета, Факультет предпринимательства и технологий Шяуляйской государственной коллегии, Литва.

e-mail: renata.macaitiene@su.lt

Дарюс Шяучюнас — профессор, доктор математических наук, старший научный сотрудник, Научный институт Шяуляйского университета, Литва.

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

Аннотация

Класс Сельберга $\mathcal{S}$ составляют ряды Дирихле

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m^s}, \quad s = \sigma + it,$$

коэффициенты которых при всяком $\varepsilon > 0$ удовлетворяют оценке $a(m) \ll_{\varepsilon} m^{\varepsilon}$; существует целое $k \geq 0$ такое, что $(s-1)^k \mathcal{L}(s)$ является целой функцией конечного порядка; для $\mathcal{L}$ имеет место функциональное уравнение, связывающее s и $1-s$, и эйлерово произведение по простым числам. Штойдинг пополнил класс $\mathcal{S}$ условием

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{p \leq x} 1 \right)^{-1} \sum_{p \leq x} |a(p)|^2 = \kappa > 0,$$

где p означает простые числа. Полученный класс обозначается через $\tilde{\mathcal{S}}$.

Пусть α , $0 < \alpha \leq 1$, — фиксированный параметр, а $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ — периодическая последовательность комплексных чисел. Другой объект статьи — периодическая дзета-функция Гурвица $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ при $\sigma > 1$ определяется рядом Дирихле

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s},$$

и мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость.

В статье рассматривается дискретная универсальность набора

$$(\mathcal{L}(\tilde{s}), \zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})),$$

где $\mathcal{L}(\tilde{s}) \in \tilde{\mathcal{S}}$, а $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl_j})$ — периодические дзета-функции Гурвица, т. е., одновременное приближение набора широкого класса аналитических функций

$$(f(\tilde{s}), f_{11}(s), \dots, f_{1l_1}(s), \dots, f_{r1}(s), \dots, f_{rl_r}(s))$$

набором сдвигов

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}(\tilde{s} + ikh), \zeta(s + ikh_1, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(s + ikh_1, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \\ &\zeta(s + ikh_r, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(s + ikh_r, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})), \end{aligned}$$

где $h, h_1, \dots, h_r$ – положительные числа. При этом требуется линейная независимость над полем рациональных чисел для множества

$$\{(h \log p : p \in \mathbb{P}), (h_j \log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, r), 2\pi\},$$

где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел.

Ключевые слова: Дзета-функция Гурвица, класс Сельберга, периодическая дзета-функция Гурвица, ряды Дирихле, слабая сходимости, универсальность.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:

А. Бальчюнас, Р. Мацайтене, Д. Шяучюнас Совместная дискретная универсальность для L -функций из класса Сельберга и периодических дзета-функций Гурвица // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 46–65.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-46-65

Joint discrete universality for L -functions from the Selberg class and periodic Hurwitz zeta-functions

A. Balčiūnas, R. Macaitienė, D. Šiaučius

Aidas Balčiūnas – doctor of mathematics, assistant of Department of probability theory and number theory, Vilnius University, Lithuania.

e-mail: a.balciunui@gmail.com

Renata Macaitienė – professor, doctor of mathematics, chief researcher of Research Institute, Šiauliai University, Šiauliai State College, Lithuania.

e-mail: renata.macaitiene@su.lt

Darius Šiaučius – professor, doctor of mathematics, senior researcher of Research Institute, Šiauliai University, Lithuania.

e-mail: darius.siauciunas@su.lt

Abstract

The Selberg class $\mathcal{S}$ contains Dirichlet series

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m^s}, \quad s = \sigma + it,$$

such that, for every $\varepsilon > 0$, $a(m) \ll_{\varepsilon} m^{\varepsilon}$; there exists an integer $k \geq 0$ such that $(s-1)^k \mathcal{L}(s)$ is an entire function of finite order; the functions $\mathcal{L}$ satisfy a functional equation connecting s with $1-s$, and have a product representation over prime numbers. Steuding introduced a subclass $\tilde{\mathcal{S}}$ of $\mathcal{S}$ with additional condition

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{p \leq x} 1 \right)^{-1} \sum_{p \leq x} |a(p)|^2 = \kappa > 0,$$

where p runs prime numbers.

Let α , $0 < \alpha \leq 1$, be a fixed parameter, and $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ be a periodic sequence of complex numbers. The second object of the paper is the periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ which is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s},$$

and is meromorphically continued to the whole complex plane.

The paper is devoted to the discrete universality of the collection

$$(\mathcal{L}(\tilde{s}), \zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})),$$

where $\mathcal{L}(\tilde{s}) \in \tilde{S}$, and $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl_j})$ are periodic Hurwitz zeta-functions, i. e., to the simultaneous approximation of a collection

$$(f(\tilde{s}), f_{11}(s), \dots, f_{1l_1}(s), \dots, f_{r1}(s), \dots, f_{rl_r}(s))$$

of analytic functions from a wide class by a collection of shifts

$$(\mathcal{L}(\tilde{s} + ikh), \zeta(s + ikh_1, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(s + ikh_1, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \\ \zeta(s + ikh_r, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(s + ikh_r, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})),$$

where $h, h_1, \dots, h_r$ are positive numbers, is considered. For this, the linear independence over the field of rational numbers for the set

$$\{(h \log p : p \in \mathbb{P}), (h_j \log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, r), 2\pi\},$$

where $\mathbb{P}$ denotes the set of all prime numbers, is applied.

Keywords: Dirichlet series, Hurwitz zeta-function, periodic Hurwitz zeta-function, Selberg class, universality, weak convergence.

Bibliography: 29 titles.

For citation:

A. Balčiūnas, R. Macaitienė, D. Šiaučiūnas, 2019, "Joint discrete universality for L -functions from the Selberg class and periodic Hurwitz zeta-functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 46–65.

In honor of Professor Antanas Laurinčikas on the occasion of his 70th birthday

1. Introduction

After a pioneer Voronin's work [27], it is known that some zeta and L -functions are universal in the sense that their shifts approximate a wide class of analytic functions. Also, this universality property was extended to collections of zeta-functions simultaneously approximating a given collections of analytic functions. In other words, some zeta and L -functions are jointly universal in the approximation sense. The first joint universality theorem was obtained also by Voronin. In [28], investigating the joint functional independence of Dirichlet L -functions, he first obtained in a not explicit form their joint universality, see also [10], [11]. A very interesting is the so-called mixed joint universality of zeta and L -functions. In this case, a collection of analytic functions is approximated by the collection of zeta and L -functions consisting of functions having and having no Euler's product over primes. This type of universality was proposed by Mishou in [19] who proved

a mixed joint universality theorem for the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, and the Hurwitz zeta-function

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}, \quad \sigma > 1,$$

with transcendental parameter α , $0 < \alpha \leq 1$. Let $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, by $H(K)$ with $K \in \mathcal{K}$ the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K , and by $H_0(K)$ with $K \in \mathcal{K}$ the subclass of $H(K)$ of non-vanishing functions on K . Then the Mishou theorem is the following statement.

THEOREM 1. *Suppose that α is transcendental. Let $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, $f_1(s) \in H_0(K_1)$ and $f_2(s) \in H(K_2)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

In [7], Theorem 1 was extended for zeta-functions with periodic coefficients. Let $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ and $\mathbf{b} = \{b_m : m \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, be a periodic sequences of complex numbers with minimal periods $q_1 \in \mathbb{N}$ and $q_2 \in \mathbb{N}$, respectively. Then the periodic zeta-function $\zeta(s; \mathbf{a})$ and periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{b})$, $0 < \alpha \leq 1$, are defined, for $\sigma > 1$, by

$$\zeta(s; \mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s} \quad \text{and} \quad \zeta(s, \alpha; \mathbf{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m + \alpha)^s},$$

and can be continued meromorphically to the whole complex plane with possible simple pole at the point $s = 1$. The results of [14] were generalized for collections consisting from r_1 periodic zeta-functions with multiplicative coefficients and r_2 periodic Hurwitz zeta-functions with algebraically independent over $\mathbb{Q}$ parameters $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$. More general results were obtained in the theses of K. Janulis [6] and S. Račkauskienė [22].

The above mentioned universality results for zeta-functions are of continuous type, τ in shifts $\zeta(s + i\tau; \mathbf{a})$ and $\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{b})$ can take arbitrary real values. Reich in [23] proposed an another type of universality when τ takes values from a certain discrete set. He used the set $\{kh : k \in \mathbb{N}_0\}$ with fixed $h > 0$. The Reich theorem in the case of Riemann zeta-function is of the following form. In the sequel, $\#A$ denotes the cardinality of the set A , and N runs over non-negative integers.

THEOREM 2. *Suppose that $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$ and $h > 0$,*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Theorem 2 independently by an another method was also proved in [1].

The first discrete version of Theorem 1 was obtained in [3]. Define the set

$$L(\mathbb{P}, \alpha, h, \pi) = \left\{ (\log p : p \in \mathbb{P}), (\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0), \frac{2\pi}{h} \right\}.$$

Then the main result of [3] is the following theorem.

THEOREM 3. *Suppose that the set $L(\mathbb{P}, \alpha, h, \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Let $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, and $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + ikh) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |\zeta(s + ikh, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

In [4], Theorem 3 was generalized for shifts $\zeta(s + ikh_1)$ and $\zeta(s + ikh_2, \alpha)$ by using the linear independence over $\mathbb{Q}$ of the set

$$L(\mathbb{P}, \alpha, h_1, h_2, \pi) = \{(h_1 \log p : p \in \mathbb{P}), (h_2 \log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0), 2\pi\}.$$

An analogue of Theorem 3 for the functions $\zeta(s; \mathbf{a})$ with multiplicative coefficients and $\zeta(s, \alpha; \mathbf{b})$ was proved in [14]. Finally, in [15], the results of [14] were extended for a wide collections consisting from periodic and periodic Hurwitz zeta-functions.

The aim of this paper is discrete universality theorems for L -functions from the Selberg class and periodic Hurwitz zeta-functions.

The Selberg class $\mathcal{S}$ was introduced in [24], and consists of Dirichlet series

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m^s}$$

that satisfy the following axioms:

- (i) (Ramanujan conjecture). For every $\varepsilon > 0$, the estimate $a(m) \ll_{\varepsilon} m^{\varepsilon}$ takes place.
- (ii) (analytic continuation). There exists $r \in \mathbb{N}_0$ such that $(s-1)^r \mathcal{L}(s)$ is an entire function of finite order.
- (iii) (functional equation). The functional equation

$$\Lambda_{\mathcal{L}(s)} = \overline{w \Lambda_{\mathcal{L}}(1 - \bar{s})}, \quad \Lambda_{\mathcal{L}}(s) = \mathcal{L}(s) Q^s \prod_{j=1}^f \Gamma(\lambda_j s + \mu_j),$$

with $Q_j, \lambda_j \in \mathbb{R}$ and $\mu_j, w \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \mu_j \geq 0$ and $|w| = 1$ is satisfied for all s .

- (iv) (Euler product). The product representation over primes

$$\mathcal{L}(s) = \prod_p \mathcal{L}_p(s),$$

where

$$\log \mathcal{L}_p(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b(p^l)}{p^{ls}}$$

with $b(p^l) \ll p^{l\theta}$ with some $\theta < \frac{1}{2}$, is valid.

It is well known that the majority of classical zeta and L -functions are elements of the class $\mathcal{S}$. The first universality results for L -functions from the Selberg class were obtained by J. Steuding in [25] and [26]. The most general universality theorem for the above L -functions is given in [21]. In this theorem, an additional condition that

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{p \leq x} 1 \right)^{-1} \sum_{p \leq x} |a(p)|^2 = \kappa > 0 \tag{1}$$

is required. Moreover, for $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$, let

$$d_{\mathcal{L}} = 2 \sum_{j=1}^f \lambda_j,$$

and

$$\sigma_{\mathcal{L}} = \max \left\{ \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_{\mathcal{L}}} \right\}, \quad D = D_{\mathcal{L}} = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_{\mathcal{L}} < \sigma < 1\}.$$

Denote by $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ the class of compact subsets of $D_{\mathcal{L}}$ with connected complements, and by $H_{0\mathcal{L}}$ with $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ the class of continuous non-vanishing functions on K that are analytic in the interior of K . The main result of the paper [21] is the following theorem. Denote the class $\mathcal{S}$ with condition (1) by $\tilde{\mathcal{S}}$.

THEOREM 4. *Suppose that $\mathcal{L} \in \tilde{\mathcal{S}}$. Let $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ and $f(s) \in H_{0\mathcal{L}}(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\mathcal{L}(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Joint universality theorems of L -functions from the class $\tilde{\mathcal{S}}$ and periodic Hurwitz zeta-functions were proved in [8], [9] and [17].

The discrete version of Theorem 4 was given in [16].

THEOREM 5. *Under hypotheses of Theorem 4, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\mathcal{L}(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

The aim of this paper is to obtain joint discrete universality for L -functions in the class $\tilde{\mathcal{S}}$ and periodic Hurwitz zeta-functions. Such a theorem for a pair $(\mathcal{L}(s), \zeta(s, \alpha; \mathbf{a}))$ was obtained in [10].

For $h > 0$ define the set

$$L(\mathbb{P}; \alpha_1, \dots, \alpha_r; h, \pi) = \left\{ (\log p : p \in \mathbb{P}), (\log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, r), \frac{2\pi}{h} \right\}.$$

THEOREM 6. *Suppose that the set $L(\mathbb{P}; \alpha_1, \dots, \alpha_r; h, \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$ and $\mathcal{L} \in \tilde{\mathcal{S}}$. Let $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$, $K_1, \dots, K_r \in \mathcal{K}$, and $f(s) \in H_{0\mathcal{L}}(K)$, $f_1(s) \in H(K_1), \dots, f_r(s) \in H(K_r)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\mathcal{L}(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + ikh, \alpha_j; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\mathcal{L}(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + ikh, \alpha_j; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

For positive $h, h_1, \dots, h_r$, define one more set

$$L(\mathbb{P}; \alpha_1, \dots, \alpha_r; h, h_1, \dots, h_r; \pi) = \{(h \log p : p \in \mathbb{P}), (h_j \log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, r), 2\pi\}.$$

Then we have the following generalization of Theorem 6

THEOREM 7. Suppose that the set $L(\mathbb{P}; \alpha_1, \dots, \alpha_r; h, h_1, \dots, h_r; \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$ and $\mathcal{L} \in \tilde{\mathcal{S}}$. Let $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$, $K_1, \dots, K_r \in \mathcal{K}$, and $f(s) \in H_{0\mathcal{L}}(K)$, $f_1(s) \in H(K_1), \dots, f_r(s) \in H(K_r)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\mathcal{L}(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + ikh_j, \alpha_j; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\mathcal{L}(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + ikh_j, \alpha_j; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

The latter theorem can be generalized in the following manner. Suppose that $\mathbf{a}_{jl} = \{a_{mjl} : m \in \mathbb{N}_0\}$ is a periodic sequence of complex numbers with minimal period $q_{jl} \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. For $j = 1, \dots, r$, let q_j be the least common multiple of the periods $q_{j1}, \dots, q_{jl_j}$, and

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{0j1} & a_{0j2} & \dots & a_{0jl_j} \\ a_{1j1} & a_{1j2} & \dots & a_{1jl_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q_j-1,j1} & a_{q_j-1,j2} & \dots & a_{q_j-1,jl_j} \end{pmatrix}.$$

THEOREM 8. Suppose that $\mathcal{L} \in \tilde{\mathcal{S}}$, the set $L(\mathbb{P}; \alpha_1, \dots, \alpha_r; h, h_1, \dots, h_r; \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$ and that $\text{rank}(A_j) = l_j$, $j = 1, \dots, r$. Let $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ and $f(s) \in H_{0\mathcal{L}}(K)$, and for $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$, let $K_{jl} \in \mathcal{K}$, $f_{jl}(s) \in H(K_{jl})$. Then, for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\mathcal{L}(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |\zeta(s + ikh_j, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\mathcal{L}(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |\zeta(s + ikh_j, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

We see that Theorem 6 is a partial case of Theorem 7 with $h_1 = \dots = h_r = h$, and Theorem 7 is a partial case of Theorem 8 with $l_1 = \dots = l_r = 1$. Therefore, it suffices to prove Theorem 8.

The next section is of probabilistic character. It is devoted to limit theorems on weakly convergent certain probability measures connected to the functions $\mathcal{L}(s)$ and $\zeta(s, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})$.

2. Probabilistic results

Let G be a region on the complex plane, and $H(G)$ be the space of analytic functions on G endowed with the topology of uniform convergence on compacta. We preserve the notation of [17]. Thus, let

$$u = \sum_{j=1}^r l_j, \quad v = u + 1,$$

and

$$H^v = H^v(D_{\mathcal{L}}, D) = H(D_{\mathcal{L}}) \times H^u(D),$$

where $H^u(D) = \underbrace{H(D) \times \cdots \times H(D)}_u$. Denote by $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ the Borel σ -field of the space $\mathbb{X}$, and use the notation

$$Z(\hat{s}, s, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \mathcal{L}) = (\mathcal{L}(\hat{s}), \zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})),$$

where $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ and $\underline{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_{11}, \dots, \mathbf{a}_{1l_1}, \dots, \mathbf{a}_{r1}, \dots, \mathbf{a}_{rl_r})$. For $A \in \mathcal{B}(H^v)$ and $N \in \mathbb{N}_0$, define

$$P_N(A) = \frac{1}{N+1} \# \{0 \leq k \leq N : Z(\hat{s} + ikh, \underline{s} + ik\underline{h}, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \mathcal{L}) \in A\},$$

where $s + ik\underline{h} = (s + ikh_1, \dots, s + ikh_r)$. In this section, we will consider the weak convergence of P_N as $N \rightarrow \infty$. For the definition of the limit measure, we need a certain H^v -valued random element. Let $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$, and

$$\hat{\Omega} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \gamma_p, \quad \Omega = \prod_{m \in \mathbb{N}_0} \gamma_m,$$

where $\gamma_p = \gamma$ for all $p \in \mathbb{P}$ and $\gamma_m = \gamma$ for all $m \in \mathbb{N}_0$. The classical Tikhonov theorem implies that the infinite-dimensional tori $\hat{\Omega}$ and Ω with the product topology and pointwise multiplication are compact topological Abelian groups. Hence,

$$\underline{\Omega} = \hat{\Omega} \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_r,$$

where $\Omega_j = \Omega$ for all $j = 1, \dots, r$, is again a compact topological Abelian group. Therefore, on $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}))$, the probabilistic Haar measure m_H can be defined, and we obtain the probability space $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), m_H)$. Denote by $\hat{\omega}(p)$ the p th component of $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$, $p \in \mathbb{P}$, and by $\omega_j(m)$ the m th component of $\omega_j \in \Omega_j$, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, r$. Moreover, let $\omega = (\hat{\omega}, \omega_1, \dots, \omega_r)$ be elements of $\underline{\Omega}$. Now, on the probability space $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), m_H)$, define the H^v -valued random element $Z(\hat{s}, s, \omega, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \mathcal{L})$ by the formula

$$\underline{Z}(\omega) = Z(\hat{s}, s, \omega, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \mathcal{L}) = (\mathcal{L}(\hat{s}, \hat{\omega}), \zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r, \omega_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r, \omega_r; \mathbf{a}_{rl_r})),$$

where

$$\mathcal{L}(\hat{s}, \hat{\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)\hat{\omega}(m)}{m^{\hat{s}}}, \quad \hat{s} \in D_{\mathcal{L}},$$

with

$$\hat{\omega}(m) = \prod_{\substack{p^l | m \\ p^{l+1} \nmid m}} \hat{\omega}^l(p), \quad m \in \mathbb{N},$$

and, for $s \in D$,

$$\zeta(s, \alpha_j, \omega_j; \mathbf{a}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mj} \omega_j(m)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, l_j.$$

We observe that, for almost all $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$, the equality

$$\mathcal{L}(\hat{s}, \hat{\omega}) = \exp \left\{ \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k) \hat{\omega}^k(p)}{p^{k\hat{s}}} \right\}$$

holds [21] with certain coefficients $b(p^k)$.

Denote by P_Z the distribution of the random element $Z(\hat{s}, s, \omega, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \mathcal{L})$, i.e., P_Z is a probability measure on $(H^v, \mathcal{B}(H^v))$ defined by

$$P_Z(A) = m_H \{ \omega \in \underline{\Omega} : Z(\hat{s}, s, \omega, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \mathcal{L}) \in A \}, \quad A \in \mathcal{B}(H^v).$$

Now, we are able to state a limit theorem for P_N .

THEOREM 9. *Suppose that $\mathcal{L} \in \tilde{\mathcal{S}}$, the set $L(\mathbb{P}; \alpha_1, \dots, \alpha_r; h, h_1, \dots, h_r; \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$ and that $\text{rank}(A_j) = l_j$, $j = 1, \dots, r$. Then P_N converges weakly to P_Z as $N \rightarrow \infty$. Moreover, the support of the measure P_Z is the set $S_{\mathcal{L}} \times H^u(D)$, where*

$$S_{\mathcal{L}} = \{g \in H(D_{\mathcal{L}}) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0\}.$$

We divide the proof of Theorem 9 into Lemmas. The first of them deals with weak convergence on the group $\underline{\Omega}$.

LEMMA 1. *Suppose that the set $L(\mathbb{P}; \alpha_1, \dots, \alpha_r; h, h_1, \dots, h_r; \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then*

$$Q_N(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N+1} \left\{ 0 \leq k \leq N : \left((p^{-ikh} : p \in \mathbb{P}), ((m + \alpha_1)^{-ikh_1} : m \in \mathbb{N}_0), \dots, \right. \right. \\ \left. \left. ((m + \alpha_r)^{-ikh_r} : m \in \mathbb{N}_0) \right) \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\underline{\Omega}),$$

converges weakly to the Haar measure m_H as $N \rightarrow \infty$.

PROOF. We apply the Fourier transform method. Denote by $g_N(\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r)$, where $\underline{k} = (k_p : k_p \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P})$, $\underline{l}_1 = (l_{1m} : l_{1m} \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0), \dots, \underline{l}_r = (l_{rm} : l_{rm} \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0)$, the Fourier transform of Q_N . Since the characters of the group $\underline{\Omega}$ are of the form [13], [17]

$$\prod'_{p \in \mathbb{P}} \hat{\omega}^{k_p}(p) \prod_{j=1}^r \prod'_{m \in \mathbb{N}_0} \omega_j^{l_{jm}}(m),$$

where the sign “'” shows that only a finite number of integers k_p and l_{jm} are distinct from zero, we have that

$$g_N(\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) = \int_{\underline{\Omega}} \left(\prod'_{p \in \mathbb{P}} \hat{\omega}^{k_p}(p) \prod_{j=1}^r \prod'_{m \in \mathbb{N}_0} \omega_j^{l_{jm}}(m) \right) dQ_N.$$

Therefore, by the definition of Q_N ,

$$g_N(\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \prod'_{p \in \mathbb{P}} p^{-ik_p h} \prod_{j=1}^r \prod'_{m \in \mathbb{N}_0} (m + \alpha_j)^{-ikh_j l_{jm}} \\ = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \exp \left\{ -ik \left(\sum'_{p \in \mathbb{P}} h k_p \log p + \sum_{j=1}^r \sum'_{m \in \mathbb{N}_0} h_j l_{jm} \log(m + \alpha_j) \right) \right\}. \quad (2)$$

Obviously,

$$g_N(\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}) = 1. \quad (3)$$

Since the set $L(\mathbb{P}; \alpha_1, \dots, \alpha_r; h, h_1, \dots, h_r; \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, we have that

$$\exp \left\{ -ik \left(\sum'_{p \in \mathbb{P}} h k_p \log p + \sum_{j=1}^r \sum'_{m \in \mathbb{N}_0} h_j l_{jm} \log(m + \alpha_j) \right) \right\} \neq 1 \quad (4)$$

for $(\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) \neq (\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0})$. Actually, if inequality (4) is not true, then

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \sum'_{p \in \mathbb{P}} h k_p \log p + \sum_{j=1}^r \sum'_{m \in \mathbb{N}_0} h_j l_{jm} \log(m + \alpha_j) = 2\pi a$$

with a certain $a \in \mathbb{Z}$, and this contradicts the linear independence of the set $L(\mathbb{P}; \alpha_1, \dots, \alpha_r; h, h_1, \dots, h_r; \pi)$. Thus, inequality (4) is true, and, in view of (2), we find that, for

$$(\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) \neq (\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}),$$

$$g_N(\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) = \frac{1 - \exp\{-i(N+1)A\}}{(N+1)(1 - \exp\{-iA\})}.$$

This and (3) show that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) = \begin{cases} 1 & \text{if } (\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) = (\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}), \\ 0 & \text{if } (\underline{k}, \underline{l}_1, \dots, \underline{l}_r) \neq (\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}), \end{cases} \quad (5)$$

and the lemma is proved because the right-hand side of (5) is the Fourier transform of the Haar measure m_H . $\square$

The next lemma considers probability measures on the space $(H^v, \mathcal{B}(H^v))$ defined by collections consisting of absolutely convergent Dirichlet series. Let $\theta > \frac{1}{2}$ be a fixed number, and

$$v_n(m) = \exp \left\{ - \left(\frac{m}{n} \right)^\theta \right\}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

$$v_n(m, \alpha_j) = \exp \left\{ - \left(\frac{m + \alpha_j}{n + \alpha_j} \right)^\theta \right\}, \quad m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, r.$$

Define the functions

$$\mathcal{L}_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)v_n(m)}{m^s}$$

and

$$\zeta_n(s, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl} v_n(m, \alpha_j)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r, l = 1, \dots, l_j.$$

Then it is known that the series for $\mathcal{L}_n(s)$ is absolutely convergent for $\sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_{\mathcal{L}}}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{\mathcal{L}}$ [21], and the series for $\zeta_n(s, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})$ are absolutely convergent for $\sigma > \frac{1}{2}$ [12]. Additionally, we define the series

$$\mathcal{L}_n(s, \hat{\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)\hat{\omega}(m)v_n(m)}{m^s}$$

and

$$\zeta_n(s, \omega_j, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl} \omega_j(m) v_n(m, \alpha_j)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r, l = 1, \dots, l_j,$$

which, obviously, are also absolutely convergent in the above regions.

Let, for brevity,

$$Z_n(\hat{s}, s, \underline{\alpha}; \underline{a}, \mathcal{L}) = (\mathcal{L}_n(\hat{s}), \zeta_n(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta_n(s, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \\ \zeta_n(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta_n(s, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})),$$

$$Z_n(\hat{s}, s, \omega, \underline{\alpha}; \underline{a}, \mathcal{L}) = (\mathcal{L}_n(\hat{s}, \hat{\omega}), \zeta_n(s, \omega_1, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta_n(s, \omega_1, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \\ \zeta_n(s, \omega_r, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \zeta_n(s, \omega_r, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})),$$

and

$$P_{N,n}(A) = \frac{1}{N+1} \# \{0 \leq k \leq N : Z_n(\hat{s} + ikh, s + ik\underline{h}, \underline{\alpha}; \underline{a}, \mathcal{L}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^v).$$

LEMMA 2. Suppose that $\mathcal{L} \in \tilde{\mathcal{S}}$ and the set $L(\mathbb{P}; \alpha_1, \dots, \alpha_r; h, h_1, \dots, h_r; \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then $P_{N,n}$ converges weakly to the measure $\hat{P}_n$ on $(H^v, \mathcal{B}(H^v))$ as $N \rightarrow \infty$, where $\hat{P}_n = m_H u_n^{-1}$, and the function $u_n : \Omega \rightarrow H^v$ is given by the formula

$$u_n(\omega) = Z_n(\hat{s}, s, \omega, \underline{\alpha}; \underline{a}, \mathcal{L}).$$

PROOF. We have that

$$u_n \left(\left(p^{-ikh} : p \in \mathbb{P} \right), \left((m + \alpha_1)^{-ikh_1} : m \in \mathbb{N}_0 \right), \dots, \left((m + \alpha_r)^{-ikh_r} : m \in \mathbb{N}_0 \right) \right) \\ = Z_n(\hat{s} + ikh, s + ik\underline{h}, \underline{\alpha}; \underline{a}, \mathcal{L})$$

Therefore,

$$P_{N,n} = Q_N u_n^{-1}, \quad (6)$$

where Q_N is from Theorem 9, and the equality is understood as $P_{N,n}(A) = Q_N(u_n^{-1}A)$, $A \in \mathcal{B}(H^v)$. Moreover, the absolute convergence of the series for $\mathcal{L}_n(s, \hat{\omega})$ and $\zeta_n(s, \omega_j, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})$ implies the continuity of the function u_n . Therefore, the lemma is a consequence of (6), Lemma 1 and Theorem 5.1 of [2]. $\square$

Now, we will approximate Z by Z_n in the mean. For this, we need the metric in H^v . Let G be a region in $\mathbb{C}$. Then it is known [5] that there exists a sequence of compact sets $\{K_l : l \in \mathbb{N}\} \subset G$ such that

$$G = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

$K_l \subset K_{l+1}$ for all $l \in \mathbb{N}$, and if $K \subset D$ is a compact set, then $K \subset K_l$ for some l . Taking

$$\rho(g_1, g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}, \quad g_1, g_2 \in H(G),$$

gives a metric in $H(D)$ inducing its topology of uniform convergence on compacta. Define by $\rho_{\mathcal{L}}$ the above metric in $H(D_{\mathcal{L}})$, and by ρ the metric in $H(D)$. Let

$$\underline{g} = (g, g_{11}, \dots, g_{1l_1}, \dots, g_{r1}, \dots, g_{rl_r}), \underline{f} = (f, f_{11}, \dots, f_{1l_1}, \dots, f_{r1}, \dots, f_{rl_r}) \in H^v.$$

Then

$$\rho_v(\underline{g}, \underline{f}) = \max \left(\rho_{\mathcal{L}}(g, f), \max_{1 \leq j \leq r} \max_{1 \leq l \leq l_j} \rho(g_{jl}, f_{jl}) \right)$$

is a desired metric in H^v inducing its product topology.

LEMMA 3. *Let $\mathcal{L} \in \tilde{\mathcal{S}}$. Then the equality*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \rho_v(Z(\hat{s} + ikh, s + ikh, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \mathcal{L}), Z_n(\hat{s} + ikh, s + ikh, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \mathcal{L})) = 0$$

holds.

PROOF. By the definition of the metric ρ_v , it suffices to prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \rho_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(s + ikh), \mathcal{L}_n(s + ikh)) = 0,$$

and, for $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \rho(\zeta(s + ikh_j, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl}), \zeta_n(s + ikh_j, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})) = 0.$$

However, the first equality was obtained in [21], while the second equality follows from [10]. $\square$

Now, we will consider the limit measure $\hat{P}_n$ of Lemma 2, and will prove that the sequence $\{\hat{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ is tight, i.e., for every $\varepsilon > 0$, there exists a compact set $K = K(\varepsilon) \subset H^v$ such that

$$\hat{P}_n(K) > 1 - \varepsilon$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

LEMMA 4. *Suppose that $\mathcal{L} \in \tilde{\mathcal{S}}$ and the set $L(\mathbb{P}; \alpha_1, \dots, \alpha_r; h, h_1, \dots, h_r; \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then the sequence $\{\hat{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ is tight.*

PROOF. On a certain probability space with the measure μ , define the random variable θ_N by

$$\mu\{\theta_N = k\} = \frac{1}{N+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Define the H^v -valued random element $X_{N,n} = X_{N,n}(\hat{s}, s) = (X_{N,n}(\hat{s}), X_{N,n,1,1}(s), \dots, X_{N,n,1,l_1}(s), \dots, X_{N,n,r,1}(s), \dots, X_{N,n,r,l_r}(s)) = Z_n(\hat{s} + i\theta_N h, s + i\theta_N \underline{h}, \underline{\alpha}; \underline{\mathbf{a}}, \mathcal{L})$. Moreover, let

$$\hat{X}_n = \hat{X}_n(\hat{s}, s) = (X_n(\hat{s}), X_{n,1,1}(s), \dots, X_{n,1,l_1}(s), \dots, X_{n,r,1}(s), \dots, X_{n,r,l_r}(s))$$

be H^v -valued random element with the distribution $\hat{P}_n$, where $\hat{P}_n$ is the limit measure in Lemma 2. Then the assertion of Lemma 2 can be written as

$$X_{N,n} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \hat{X}_n, \tag{7}$$

where $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ means the convergence in distribution.

Since the series for $\mathcal{L}_n(s)$ is absolutely convergent for $\sigma > \sigma_{\mathcal{L}}$, we have that, for $\frac{1}{2} < \sigma < \sigma_{\mathcal{L}}$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathcal{L}_n(\sigma + it)|^2 dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a(m)|^2 v_n^2(m)}{m^{2\sigma}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a(m)|^2}{m^{2\sigma}} \leq C_{\sigma} < \infty$$

and

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathcal{L}'_n(\sigma + it)|^2 dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a(m)|^2 v_n^2(m) \log^2 m}{m^{2\sigma}} \leq C_{\sigma,1} < \infty.$$

These estimates and an application of the Gallagher lemma [20, Lemma 1.4], which connects discrete and continuous mean squares of some functions, lead, for $\frac{1}{2} < \sigma < \sigma_{\mathcal{L}}$ and all $n \in \mathbb{N}$, to

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N |\mathcal{L}_n(\sigma + ikh)|^2 \leq C_{\sigma_{\mathcal{L}}} < \infty. \quad (8)$$

Let $\hat{K}_m$ be a compact set from the definition of the metric $\rho_{\mathcal{L}}$. Then (8) and the Cauchy integral formula imply, for all $n \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sup_{\hat{s} \in \hat{K}_m} |\mathcal{L}_n(\hat{s} + ikh)| \leq C_m < \infty. \quad (9)$$

Let K_m be a compact set from the definition of the metric ρ . Then, in a similar way, we obtain that, for all $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sup_{s \in K_m} |\zeta_n(s + ikh_j, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})| \leq C_{j,l,m} < \infty \quad (10)$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Let $\varepsilon > 0$ be an arbitrary number, and, for $m \in \mathbb{N}$,

$$M_m = M_m(\varepsilon) = C_m 2^{m+1} \varepsilon^{-1}, \quad M_{j,l,m} = M_{j,l,m}(\varepsilon) = C_{j,l,m} 2^{n+m+1} \varepsilon^{-1}.$$

Now, using (9) and (10), we find that, for all $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \limsup_{N \rightarrow \infty} \mu \left\{ \left(\sup_{\hat{s} \in \hat{K}_m} |X_{N,n}(\hat{s})| > M_m \right) \text{ or } \left(\exists j, l : \sup_{s \in K_m} |X_{N,n,j,l}(s)| > M_{j,l,m} \right) \right\} \\ & \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \mu \left\{ \sup_{\hat{s} \in \hat{K}_m} |X_{N,n}(\hat{s})| > M_m \right\} + \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{l_j} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mu \left\{ \sup_{s \in K_m} |X_{N,n,j,l}(s)| > M_{j,l,m} \right\} \\ & = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{\hat{s} \in \hat{K}_m} |\mathcal{L}_n(\hat{s} + ikh)| > M_m \right\} \\ & \quad + \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{l_j} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K_m} |\zeta_n(s + ikh_j, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})| > M_{j,l,m} \right\} \\ & \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M_m(N+1)} \sum_{k=0}^N \sup_{\hat{s} \in \hat{K}_m} |\mathcal{L}_n(\hat{s} + ikh)| \\ & \quad + \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{l_j} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M_{j,l,m}(N+1)} \sum_{l=0}^N \sup_{s \in K_m} |\zeta_n(s + ikh_j, \alpha_j; \mathbf{a}_{jl})| \leq \frac{\varepsilon}{2m} \end{aligned}$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Thus, in virtue of (7),

$$\mu \left\{ \left(\sup_{\hat{s} \in \hat{K}_m} |X_n(\hat{s})| > M_m \right) \text{ or } \left(\exists j, l : \sup_{s \in K_m} |X_{n,j,l}| > M_{j,l,m} \right) \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2m} \quad (11)$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Define the set

$$\begin{aligned} K^v(\varepsilon) = & \left\{ (g, g_{11}, \dots, g_{1l_1}, \dots, g_{r1}, \dots, g_{rl_r}) \in H^v : \sup_{\hat{s} \in \hat{K}_m} |g(\hat{s})| \leq M_m, \sup_{s \in K_m} |g_{11}(s)| \leq M_{1,1,m}, \dots, \right. \\ & \left. \sup_{s \in K_m} |g_{1l_1}(s)| \leq M_{1,l_1,m}, \dots, \sup_{s \in K_m} |g_{r1}(s)| \leq M_{r,1,m}, \dots, \sup_{s \in K_m} |g_{rl_r}(s)| \leq M_{r,l_r,m}, m \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Then the set $K^v(\varepsilon)$ is compact in H^v , and, in virtue of (11),

$$\mu \left\{ \hat{X}_n \in K^v(\varepsilon) \right\} \geq 1 - \varepsilon$$

for all $n \in \mathbb{N}$, or equivalently,

$$\hat{P}_n(K^v(\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon$$

for all $n \in \mathbb{N}$. This shows that the sequence $\{\hat{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ is tight. $\square$

PROOF. [Proof of Theorem 9] Since, by Lemma 4, the sequence $\{\hat{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ is tight, in virtue of the Prokhorov theorem [2, Theorem 6.1], it is relatively compact. Therefore, every sequence of $\{\hat{P}_n\}$ contains a subsequence $\{\hat{P}_{n_k}\}$ such that $\hat{P}_{n_k}$ converges to a certain probability measure P on $(H^v, \mathcal{B}(H^v))$ as $k \rightarrow \infty$. Hence,

$$\hat{X}_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P. \quad (12)$$

Now, define the H^v -valued random element X_N by the formula

$$X_N = X_N(\hat{s}, s) = Z(\hat{s} + i\theta_N h, s + i\theta_N \underline{h}, \underline{\alpha}; \underline{a}, \mathcal{L}).$$

Then an application of Lemma 3 shows that, for every $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mu \{ \rho_v(X_N, X_{N,n}) \geq \varepsilon \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \{ 0 \leq k \leq N : \\ & \quad \rho_v(Z(\hat{s} + ikh, s + ik\underline{h}, \underline{\alpha}; \underline{a}, \mathcal{L}), Z_n(\hat{s} + ikh, s + ik\underline{h}, \underline{\alpha}; \underline{a}, \mathcal{L})) \geq \varepsilon \} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N+1)\varepsilon} \sum_{k=0}^N \rho_v((\hat{s} + ikh, s + ik\underline{h}, \underline{\alpha}; \underline{a}, \mathcal{L}), Z_n(\hat{s} + ikh, s + ik\underline{h}, \underline{\alpha}; \underline{a}, \mathcal{L})) = 0. \end{aligned}$$

The latter equality, relations (7), (11) and Theorem 4.2 of [2] imply that

$$X_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P, \quad (13)$$

or, in other words, P_N converges weakly to P as $N \rightarrow \infty$. Moreover, (13) shows that the measure P is independent of the choice of the sequence $\{X_{n_k}\}$. Therefore,

$$\hat{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P.$$

This means that P_N , as $N \rightarrow \infty$, converges weakly to the limit measure P of $\hat{P}_n$ as $n \rightarrow \infty$.

Denote by

$$X = (X_0, X_1, \dots, X_r), \quad X_j = (X_{j1}, \dots, X_{jl_j}), \quad j = 1, \dots, r,$$

the H^v -valued random element with distribution P . Moreover, let $\hat{P}_{n,0}, \hat{P}_{n,1}, \dots, \hat{P}_{n,r}$ be the marginal measures of $\hat{P}_n$. Then it is known [21] that $\hat{P}_{n,0}$ converges weakly to the distribution of the $H(D)$ -valued random element

$$\mathcal{L}(\hat{s}, \hat{\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)\hat{\omega}(m)}{m^{\hat{s}}}, \quad \hat{s} \in D_{\mathcal{L}},$$

as $n \rightarrow \infty$. The linear independence over $\mathbb{Q}$ of the set $L(\mathbb{P}; \alpha_1, \dots, \alpha_r; h, h_1, \dots, h_r; \pi)$ implies that for the sets

$$L(\alpha_j) = \{\log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0\}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Therefore, repeating the arguments of [12], we obtain that $\hat{P}_{n,j}$ converges weakly to the distribution of the H^{l_j} -valued random element

$$\zeta_j = \zeta_j(\omega) = (\zeta(s, \alpha_j, \omega_j; \mathbf{a}_{jl_1}), \dots, (\zeta(s, \alpha_j, \omega_j; \mathbf{a}_{jl_j}))$$

as $n \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, r$. This and the definition of the random element X show that

$$X_0 \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{L}(s, \hat{\omega}) \quad \text{and} \quad X_j \stackrel{\mathcal{D}}{=} \zeta_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

Therefore, P is the distribution of the H^v -valued random element

$$(\mathcal{L}(\hat{s}, \hat{\omega}), \zeta_1, \dots, \zeta_r),$$

in other words, P_N converges weakly to the distribution P_Z of the random element Z .

It remains to find the support of P_Z .

It is known [21] that the support of the random element $\mathcal{L}(\hat{s}, \hat{\omega})$ is the set $S_{\mathcal{L}}$. Denote by $\hat{m}_H$ the Haar measure on $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}))$, and by $m_{H,j}$ the Haar measure on $(\Omega_j, \mathcal{B}(\Omega_j))$, $j = 1, \dots, r$. Then we have that m_H is the product of the measures $\hat{m}_H$ and $m_{H,1}, \dots, m_{H,r}$. This means that, for

$$\begin{aligned} A &= A_0 \times A_1 \times \dots \times A_r, \quad A_0 \in \mathcal{B}(H(D_{\mathcal{L}})), \quad A_j \in \mathcal{B}(H^{l_j}(D)), \quad j = 1, \dots, r, \\ m_H(A) &= \hat{m}_H(A_0) \cdot m_{H,1}(A_1) \cdots m_{H,r}(A_r). \end{aligned} \quad (14)$$

The spaces $H(D_{\mathcal{L}})$ and $H(D)$ are separable, therefore [2]

$$\mathcal{B}(H^v) = \mathcal{B}(H(D_{\mathcal{L}})) \times \mathcal{B}(H^{l_1}(D)) \times \dots \times \mathcal{B}(H^{l_r}(D)).$$

Hence, it suffices to consider the measure m_H on sets of the type (14). Since the sets $L(\alpha_j)$ are linearly independent over $\mathbb{Q}$ and $\text{rank}(A_j) = l_j$, $j = 1, \dots, r$, we have that the support of ζ_j is the set $H^{l_j}(D)$, $j = 1, \dots, r$ [13]. Therefore, using the equality (14), we obtain that

$$\begin{aligned} m_H\{\omega \in \underline{\Omega} : Z(\omega) \in A\} &= \hat{m}_H\{\hat{\omega} \in \hat{\Omega} : \mathcal{L}(\hat{s}, \hat{\omega}) \in A_0\} \cdot m_{H,1}\{\omega_1 \in \Omega_1 : \zeta_1(\omega_1) \in A_1\} \cdots \\ &\quad m_{H,r}\{\omega_r \in \Omega_r : \zeta_r(\omega_r) \in A_r\}. \end{aligned}$$

This, the minimality of the support and the supports of the random elements $\mathcal{L}(\hat{s}, \hat{\omega}), \zeta_1(\omega_1), \dots, \zeta_r(\omega_r)$ imply that the support of the measure P_Z is the set $S_{\mathcal{L}} \times H^u(D)$. The theorem is proved. $\square$

3. Proof of universality

First we recall the Mergelyan theorem on the approximation of analytic functions by polynomials [18].

LEMMA 5. *Let $K \subset \mathbb{C}$ be a compact set with connected complements, and $f(s)$ be a continuous function on K and analytic in the interior of K . Then, for every $\varepsilon > 0$, there exists a polynomial $p(s)$ such that*

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

PROOF. [Proof of Theorem 8] In view of Lemma 5, there exist polynomials $p(s)$ and $p_{jl}(s)$ such that

$$\sup_{s \in K_{\mathcal{L}}} |f(s) - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (15)$$

and

$$\sup_{s \in K_{jl}} |f_{jl}(s) - p_{jl}(s)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, l_j. \quad (16)$$

Define the set

$$G_\varepsilon = \left\{ (g, g_{11}, \dots, g_{1l_1}, \dots, g_{r1}, \dots, g_{rl_r}) \in H^v : \sup_{s \in K_{\mathcal{L}}} |f(s) - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \right. \\ \left. \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |f_{jl}(s) - p_{jl}(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Then, by the second part of Theorem 9, the set G_ε is an open neighborhood of the element $(e^{p(s)}, p_{11}, \dots, p_{1l_1}, \dots, p_{r1}, \dots, p_{rl_r})$ of the support of the measure P_Z . Hence,

$$P_Z(G_\varepsilon) > 0. \quad (17)$$

Moreover, by Theorem 9 and the equivalent of weak convergence of probability measures in terms of open sets ([2, Theorem 2.1]), we have that

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} P_N(G_\varepsilon) \geq P_Z(G_\varepsilon).$$

This, the definitions of P_N and G_ε , and (15) – (17) prove the first assertion of the theorem.

To prove the second assertion of the theorem, define the set

$$\hat{G}_\varepsilon = \left\{ (g, g_{11}, \dots, g_{1l_1}, \dots, g_{r1}, \dots, g_{rl_r}) \in H^v : \sup_{s \in K_{\mathcal{L}}} |g(s) - f(s)| < \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |g_{jl}(s) - f_{jl}(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Then the boundaries $\partial \hat{G}_{\varepsilon_1}$ and $\partial \hat{G}_{\varepsilon_2}$ do not intersect for different positive ε_1 and ε_2 . Hence, the set $\hat{G}_\varepsilon$ is a continuity set of the measure P_Z ($P_Z(\partial \hat{G}_\varepsilon) = 0$) for all but at most countably many $\varepsilon > 0$. Using of Theorem 9 and the equivalent of weak convergence of probability measures in terms of continuity sets ([2, Theorem 2.1]) yields the equality

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(\hat{G}_\varepsilon) = P_Z(\hat{G}_\varepsilon) \quad (18)$$

for all but at most countably many $\varepsilon > 0$. Inequalities (15) and (16) imply that $G_\varepsilon \subset \hat{G}_\varepsilon$. Therefore, in virtue of (17), we have that $P_Z(\hat{G}_\varepsilon) > 0$. This, the definitions of P_N and $\hat{G}_\varepsilon$, and (18) prove the second assertion of the theorem. $\square$

4. Conclusions

In the paper, the joint discrete universality of the L -functions from the modified Selberg class and periodic Hurwitz zeta-functions is obtained. This means that wide collections of analytic functions $(f, f_{11}, \dots, f_{1l_1}, \dots, f_{r1}, \dots, f_{rl_r})$ can be approximated by discrete shifts

$$(\mathcal{L}(\hat{s} + ikh), \zeta(s + ikh_1, \alpha_1; \mathbf{a}_{11}), \dots, \zeta(s + ikh_1, \alpha_1; \mathbf{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s + ikh_r, \alpha_r; \mathbf{a}_{r1}), \dots, \\ \zeta(s + ikh_r, \alpha_r; \mathbf{a}_{rl_r})).$$

For this, the linear independence over $\mathbb{Q}$ for the set

$$\{(h \log p : p \in \mathbb{P}), (h_j \log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, r), 2\pi\},$$

where $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ are parameters of periodic Hurwitz zeta-functions, and $h; h_1, \dots, h_r$ are positive numbers, is applied.

We note that theorems of the paper can be extended for collections having several L -functions from the Selberg class. For this, the linear independence over $\mathbb{Q}$ for the set

$$\left\{ (\hat{h}_k \log p : p \in \mathbb{P}, k = 1, \dots, m), (h_j \log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, r), 2\pi \right\}$$

would be used.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bagchi B. The statistical behavior and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series. Ph. D. Thesis. Calcutta: Indian Statistical Institute, 1981.
2. Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York: Wiley, 1968.
3. Buivydas E., Laurinčikas A. A discrete version of the Mishou theorem // Ramanujan J. 2015. Vol. 38, №2. P. 331–347.
4. Buivydas E., Laurinčikas A. A generalized joint discrete universality theorem for the Riemann and Hurwitz zeta-function // Lith. Math. J. 2015. Vol. 55, №2. P. 193–206.
5. Conway J.B. Functions of one complex variable. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1978.
6. Janulis K. Mixed joint universality for Dirichlet L -functions and Hurwitz type zeta-functions. Doctoral dissertation. Vilnius: Vilnius University, 2015.
7. Kačinskaitė R., Laurinčikas A. The joint distribution of periodic zeta-functions // Stud. Sci. Math. Hung. 2011. Vol. 48. P. 257–279.
8. Kačinskaitė R., Matsumoto K. The mixed joint universality for a class of zeta-functions // Math. Nachr. 2015. Vol. 288, №16. P. 1900–1909.
9. Kačinskaitė R., Matsumoto K. Remarks on the mixed joint universality for a class of zeta-functions // Bull. Austral. Math. Soc. 2017. Vol. 95, №2. P. 187–198.
10. Kačinskaitė R., Matsumoto K. On mixed joint discrete universality for a class of zeta-functions // Anal. and Probab. Methods in Number Theory, A. Dubickas et al. (Eds). P. 51–66. Vilnius: Vilnius University, 2017.
11. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана. Москва: Физматлит, 1994.
12. Laurinčikas A. The joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions // Analysis (Munich). 2006. Vol. 26, №3. P. 419–428.
13. Лауринчикас А. Совместная универсальность дзета-функций с периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, №3. С. 79–102.
14. Laurinčikas A. The joint discrete universality of periodic zeta-functions // From Arithmetic to Zeta-Functions. 2016. P. 231–246. Springer.
15. Laurinčikas, A. Joint discrete universality for periodic zeta-functions // Quaest. Math. DOI: 10.2989/16073606.2018.1481891.
16. Лауринчикас А., Мацайтене Р. Дискретная универсальность в классе Сельберга // Тр. МИАН. 2017. Т. 299. С. 155–169.

17. Macaitienė R. Joint universality for L -functions from the Selberg class and periodic Hurwitz zeta-functions // *Ukrain. Math. J.* 2018. Vol. 70, №5. P. 655–671.
18. Мергелян С. Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного // *УМН.* 1952. Т. 7, №2. С. 31–122.
19. Mishou H. The joint value-distribution of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-function // *Lith. Math. J.* 2007. Vol. 47. P. 32–47.
20. Montgomery H. L. Topics in Multiplicative Number Theory. Lecture Notes in Math. vol. 227. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
21. Nagoshi H., Steuding J. Universality for L -functions in the Selberg class // *Lith. Math. J.* 2010. Vol. 50. P. 293–311.
22. Račkauskienė S. Joint universality of zeta-functions with periodic coefficients. Doctoral dissertation. Vilnius: Vilnius University, 2012.
23. Reich A. Werteverteilung von Zetafunktionen // *Arch. Math.* 1980. Vol. 34. P. 440–451.
24. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // *Proc. of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989)*. E. Bombieri et al. (Eds). 1992. P. 367–395. Salerno: Univ. Salerno.
25. Steuding J. On the universality for functions in the Selberg class // *Proc. of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations (Bonn, 2002)*. D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz (Eds). Vol. 360. 2003. 22 p. Bonn: Bonner Math. Sciften.
26. Steuding J. Value-Distribution of L -Functions. Lecture Notes Math. vol. 1877. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2007.
27. Воронин С. М. Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1975. Т. 39. С. 475–486.
28. Воронин С. М. О функциональной независимости L -функций Дирихле // *Acta Arith.* 1975. Т. 27. С. 493–503.
29. Воронин С. М. Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов. Дис. ... докт. физ.-матем. наук. Москва: МИАН, 1977.

REFERENCES

1. Bagchi, B. 1981, “The statistical behavior and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series“, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta.
2. Billingsley, P. 1968, “Convergence of Probability Measures“, John Wiley & Sons, New York.
3. Buivydas, E. & Laurinćikas, A. 2015, “A discrete version of the Mishou theorem“, *Ramanujan J.*, vol. 38, no. 2, pp. 331–347.
4. Buivydas, E. & Laurinćikas, A. 2015, “A generalized joint discrete universality theorem for the Riemann and Hurwitz zeta-function“, *Lith. Math. J.*, vol. 55, no. 2, pp. 193–206.
5. Conway, J. B. 1978, “Functions of one complex variable“, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

6. Janulis, K. 2015, “Mixed joint universality for Dirichlet L -functions and Hurwitz type zeta-functions“, Doctoral dissertation, Vilnius University, Vilnius.
7. Kačinskaitė, R. & Laurinčikas, A. 2011, “The joint distribution of periodic zeta-functions“, *Stud. Sci. Math. Hung.*, vol. 48, pp. 257–279.
8. Kačinskaitė, R. & Matsumoto, K. 2015, “The mixed joint universality for a class of zeta-functions“, *Math. Nachr.*, vol. 288, no. 16, pp. 1900–1909.
9. Kačinskaitė, R. & Matsumoto, K. 2017, “Remarks on the mixed joint universality for a class of zeta-functions“, *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 95, no. 2, pp. 187–198.
10. Kačinskaitė, R. & Matsumoto, K. 2017, “On mixed joint discrete universality for a class of zeta-functions“, in: *Anal. and Probab. Methods in Number Theory*, A. Dubickas et al. (Eds), pp. 51–66, Vilnius University, Vilnius.
11. Karatsuba, A. A. & Voronin, S. M. 1992, “The Riemann zeta-function“, Walter de Gruyter, Berlin.
12. Laurinčikas, A. 2006, “The joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions“, *Analysis (Munich)*, vol. 26, no. 3, pp. 419–428.
13. Laurinčikas, A. 2010, “Joint universality of zeta-functions with periodic coefficients“, *Izv. Math.*, vol. 74, no. 3, pp. 515–539.
14. Laurinčikas, A. 2016, “The joint discrete universality of periodic zeta-functions“, in: *From Arithmetic to Zeta-Functions*, pp. 231–246. Springer.
15. Laurinčikas, A. 2018, “Joint discrete universality for periodic zeta-functions“, *Quaest. Math.*, DOI: 10.2989/16073606.2018.1481891.
16. Laurinčikas, A. & Macaitienė, R. 2017, “Discrete universality in the Selberg class“, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 299, no. 1, pp. 143–156.
17. Macaitienė, R. 2018, “Joint universality for L -functions from the Selberg class and periodic Hurwitz zeta-functions“, *Ukrain. Math. J.*, vol. 70, no. 5, pp. 655–671.
18. Mergelyan, S. N. 1952, “Uniform approximations to functions of a complex variable“, *Usp. Matem. Nauk*, vol. 7 no 2, pp. 31–122(in Russian).
19. Mishou, H. 2007, “The joint value-distribution of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-function“, *Lith. Math. J.*, vol. 47, pp. 32–47.
20. Montgomery, H. L. 1971, “Topics in Multiplicative Number Theory“, Lecture Notes in Math. vol. 227, Springer-Verlag, Berlin.
21. Nagoshi, H. & Steuding, J. 2010, “Universality for L -functions in the Selberg class“, *Lith. Math. J.*, vol. 50, pp. 293–311.
22. Račkauskienė, S. 2012, “Joint universality of zeta-functions with periodic coefficients“, Doctoral dissertation, Vilnius University, Vilnius.
23. Reich, A. 1980, “Werteverteilung von Zetafunktionen“, *Arch. Math.*, vol. 34, pp. 440–451.
24. Selberg, A. 1992, “Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series“, in: *Proc. of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory* (Maiori, 1989), E. Bombieri et al. (Eds), pp. 367–395, Univ. Salerno, Salerno.

-
25. Steuding, J. 2003, “On the universality for functions in the Selberg class“, in: *Proc. of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations* (Bonn, 2002), D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz (Eds), vol. 360, 22 p., Bonner Math. Sciften, Bonn.
 26. Steuding, J. 2007, “Value-Distribution of L -Functions“, Lecture Notes Math. vol. 1877, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
 27. Voronin, S. M. 1975, “Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function“, *Math. USSR Izv.*, vol. 9, pp. 443–453.
 28. Voronin, S. M. 1975, “On the functional independence of Dirichlet L -functions“, *Acta Arith.*, vol. 27, pp. 493–503.
 29. Voronin, S. M. 1977, “Analytic properties of generating functions of arithmetical objects“, Diss. Doctor Phys.-matem. nauk, Matem. Institute V. A. Steklov, Moscow.

Получено 09.01.2019

Принято к печати 10.04.2019

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-66-81

Оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$ ¹

Ю. А. Басалов

Басалов Юрий Александрович — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: basalov_yuriy@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений для n действительных чисел. Эта проблема является частным случаем более общей проблемы приближения n действительных линейных форм и имеет свою богатую историю, восходящую к П. Г. Дирихле. Значительный вклад на раннем этапе исследований внесли А. Гурвиц с помощью аппарата цепных дробей и Ф. Фуртвенглером, используя аппарат линейной алгебры.

В середине двадцатого века Г. Дэвенпортом была найдена фундаментальная связь значения константы наилучших совместных диофантовых приближений и критического определителя звездного тела специального вида. Позднее, Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя к оценке его значения с помощью вычисления наибольшего значения $V_{n,s}$ — объема параллелепипеда с центром в начале координат обладающего определенными свойствами. Этот подход позволил получить оценки снизу константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$ (см. работы Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса).

В данной работе, основываясь на описанном выше подходе, получены оценки для $n = 5$ и $n = 6$. Идея построения оценок отличается от работы Т. Кьюзика. С помощью численных экспериментов были получены вначале примерные, а затем и точные значения оценок $V_{n,s}$. Доказательство этих оценок достаточно громоздко и представляет в первую очередь техническую сложность. Другим отличием построенных оценок является возможность обобщения их на любую размерность.

В процессе численных экспериментов была также получена интересная информация о структуре значений $V_{n,s}$. Эти результаты достаточно хорошо согласуются с результатами полученными в работах С. Красса. Вопрос о структуре значений $V_{n,s}$ для больших размерностей мало исследован и может представлять значительный интерес как с точки зрения геометрии чисел, так и с точки зрения теории диофантовых приближений.

Ключевые слова: наилучшие совместные диофантовы приближения, геометрия чисел, звездные тела, критические определители.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Ю. А. Басалов. Оценка константы наилучших диофантовых приближений для $n=5$ и $n=6$ // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 66–81.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-66-81

Estimation of the constant of the best simultaneous diophanite approximations for $n = 5$ and $n = 6$ ²

Yu. A. Basalov

Basalov Yuriy Aleksandrovich — Postgraduate Student, Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Pedagogical University of Leo Tolstoy, Tula.

e-mail: basalov_yuriy@mail.ru

Abstract

This paper is devoted to the problem of estimating from below the constant of the best Diophantine approximations for n real numbers. This problem is a special case of the more general problem of approximating n real linear forms and has its rich history, ascending to P. G. Dirichlet. A significant contribution at an early stage of research was made by A. Hurwitz using the apparatus of continued fractions and F. Furtwängler, using the apparatus of linear algebra.

In the mid-twentieth century, H. Davenport found a fundamental connection between the value of the constant of the best Diophantine approximations and critical determinant of a special type of star body. Later J. W. S. Cassels switched from directly calculating the critical determinant to estimating its value by calculating the largest value of $V_{n,s}$ — the volume of a parallelepiped centered at the origin of coordinates with certain properties. This approach allowed us to obtain estimates from below of the constant of the best joint Diophantine approximations for $n = 2, 3, 4$ (see the works of J. W. S. Cassels, T. Cusick, S. Krass).

In this paper, based on the approach described above, estimates for $n = 5$ and $n = 6$ are obtained. The idea of building estimates is different from the work of T. Cusick. Using numerical experiments we approximate and then obtain exact values of the estimates of $V_{n,s}$. The proof of these estimates is rather cumbersome and is primarily a technical difficulty. Another different of the given estimates is the ability to generalize them to any dimension.

In the process of numerical experiments was also obtained interesting information about the structure of the $V_{n,s}$ values. These results agree quite well with the results obtained in the works of S. Krass. The question of the structure of the values of $V_{n,s}$ for large dimensions has been scantily explored and can be of considerable interest both from the point of the geometry of numbers and from the point of the theory of Diophantine approximations.

Keywords: best joint Diophantine approximations, geometry of numbers, star bodies, critical determinants.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

Yu. A. Basalov, 2019, "Estimation of the constant of the best simultaneous Diophanite approximations for $n=5$ and $n=6$ ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 66–81.

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

1. Введение

Проблема оценки константы наилучших диофантовых приближений имеет интересную историю. Важной особенностью этой проблемы является разнообразие методов с помощью которых были получены результаты по этой проблеме. А. Гурвиц использовал аппарат цепных дробей [8], Ф. Фуртвенглером – аппарат линейной алгебры [6, 7], Г. Дэвенпортом, Дж. В. С. Касселсом использовали подходы геометрии чисел [2, 4].

В данной статье, мы разовьем подходы Г. Дэвенпорта, Дж. В. С. Касселса и Т. Кьюзика [2, 3, 4] к оценке константы наилучших диофантовых приближений C_n и получим оценку снизу для размерностей $n = 5$ и $n = 6$.

Отметим, что задача приближения n действительных чисел является частным случаем задачи приближения n действительных линейных форм

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \dots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

и тесно связано с приближение одной линейной формы с помощью принципа переноса Хинчина [19].

Сформулируем задачу наилучших совместных диофантовых приближений n действительных чисел. Пусть

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

— произвольный вектор действительных чисел. Нас будут интересовать приближения $\vec{\alpha}$ рациональными дробями

$$\frac{\vec{p}}{q} = \left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \dots, \frac{p_n}{q} \right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мерой качества совместных приближений первого рода вектора $\vec{\alpha}$ рациональным вектором $\vec{p}/q$ называется величина

$$D(\vec{\alpha}, \vec{p}/q) = \max_{i=1, \dots, n} q |\alpha_i - p_i|^{-n}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Константой наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ для вектора $\vec{x}$ называется точная нижняя грань величины C , для которой существует бесконечное число рациональных векторов $\vec{p}/q$, удовлетворяющих неравенству

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Константой наилучших диофантовых приближений C_n называется точная верхняя грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$ размерности n :

$$C_n = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} C(\vec{x}).$$

В 1891 году А. Гурвиц [8, 19] показал, что

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (1)$$

Напомним некоторые понятия из геометрии чисел [17].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $a_1, \dots, a_n$ – линейно независимые точки вещественного евклидова пространства. Множество всех точек

$$x = u_1 a_1 + \dots + u_n a_n$$

с целыми коэффициентами $u_1, \dots, u_n$ называется решеткой Λ . Величина

$$d(\Lambda) = |\det(a_1, \dots, a_n)|$$

называется определителем решетки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathbb{F}$ – точечное тело. Если решетка Λ не имеет в $\mathbb{F}$ отличных от $\mathcal{O}$ точек ($\mathcal{O} \in \mathbb{F}$), то Λ допустима для $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$ -допустима. Точную нижнюю грань

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathbb{F}$ -допустимых решеток Λ называют критическим определителем множества $\mathbb{F}$. Если $\mathbb{F}$ -допустимых решеток нет, то $\mathbb{F}$ является множеством бесконечного типа и $\Delta(\mathbb{F}) = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Под звездным телом понимают множество, обладающее следующими свойствами

- существует точка, называемая "началом", которая является внутренней точкой множества;
- любой луч, выходящий из "начала", либо не пересекается с границей множества, либо имеет с ней только одну общую точку.

Г. Дэвенпортом [4] был получен следующий фундаментальный результат.

Пусть $\mathbb{F}_n$ – это $(n+1)$ -мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1,$$

а $\Delta \mathbb{F}$ – его критический определитель. Тогда

ТЕОРЕМА 1.

$$C_n = \frac{1}{\Delta \mathbb{F}_n}. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [17]. $\square$

Дж. В. С. Касселс [2, 3] получил следующую оценку для $\Delta \mathbb{F}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^s |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^n |x_i|. \quad (3)$$

и $2^n V_{n,s}$ объем наибольшего параллелепипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры

$$f_{n,s} \leq 1. \quad (4)$$

Пусть $\Delta_{n,s}$ наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени $n+1$, которое имеет s пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел (то есть $2s \leq n+1$). Тогда

$$\Delta \mathbb{F}_n \leq \sqrt{\Delta_{n,s}} / V_{n,s}, \quad (5)$$

или же

$$C_n \geq V_{n,s} / \sqrt{\Delta_{n,s}}. \quad (6)$$

Нас будет интересовать, находится ли некоторый параллелепипед $\mathbb{A}$ внутри звездчатого тела $\mathbb{F}_{n,s}$. Можно предложить следующий метод проверки этого утверждения. Составим оптимизационную задачу

$$\begin{aligned} f_{n,s} &\rightarrow \max, \\ |b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n| &\leq 1, \\ |b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n| &\leq 1, \\ &\dots \\ |b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n| &\leq 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Если решение задачи ≤ 1 , то параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит полностью внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, в противном случае, часть его находится вне звездного тела.

Таким образом, если параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, имеет место оценка

$$V_{n,s} \geq \det A. \quad (12)$$

В дальнейшем нашей целью будет построение матрицы A такого вида, чтобы задача (11) имела решение $\max f_{n,s} \leq 1$. Параллелепипеды $\mathbb{A}$ для которых $\det A$ "велико" будем называть *наибольшими*. Соответствующую наибольшему параллелепипеду матрицу мы также будем называть *наибольшей*.

3. Численные эксперименты

На первом этапе исследования было решено провести вычислительные эксперименты по численному нахождению наибольших значений $V_{n,s}$. В процессе эксперимента производился направленный перебор матриц A (9) с целью найти матрицу с наибольшим $\det A$, удовлетворяющую условию (11). С деталями численных экспериментов можно ознакомиться в работе [1].

В результате экспериментов проводимых для размерностей 3 и 4 выяснилось, что существует множество наибольших матриц (а соответственного и параллелепипедов) с одинаковыми $\det A$. Поэтому было произведено исследование с целью получить наибольшую матрицу A с наиболее простой структурой. Оказалось, что можно найти наибольшую матрицу A следующего вида (примеры таких матриц см. в [1])

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_k & a_k \end{pmatrix}.$$

Стоит отметить следующие моменты.

Во-первых, исходя из вида матрицы A , можно описать структуру параллелепипеда $V_{n,s}$ – все его грани прямоугольники (причем часть из них – квадраты), ребра либо параллельны осям координат, либо образуют с ними угол 45° .

Во-вторых, уже для $n = 7$ наибольшая матрица A_7^* может быть получена как комбинация наибольших матриц A_3^* и A_4^* (точные их значения см. ниже)

$$\begin{aligned}
A_3^* &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & -\alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}. \\
A_4^* &= \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \end{pmatrix}. \\
A_7^* &= \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\underbrace{\quad}_{A_3^*} \quad \underbrace{\quad}_{A_4^*} \quad \underbrace{\quad}_{A_3^*}$

Вообще, для $n > 6$ матрицу A_n^* можно получить из A_{n-4}^* и A_4^* . Этот факт схож с результатом, полученным С. Крассом [9]

$$V_{n,s}V_{n',s'} \leq V_{n+n',s+s'}, \quad (13)$$

только вместо знака неравенства стоит равенство.

4. Вывод оценок $V_{n,s}$

Для нас представляют больший интерес не численные значения этих матриц, а точные. Для их нахождения можно поступить следующим образом. Можно постараться определить точки, в которых наибольший параллелепипед $V_{n,[n/2]}$ касается звездного тела $\mathbb{F}_{n,[n/2]}$, выписать в этих точках граничные условия и на их основании получить параметры параллелепипеда.

Например, рассмотрим случай $n = 3$. Рассмотрим матрицу

$$A_3^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Посторим задачу обратную (11). Выберем набор точек в которых $f_{3,1}$ должна быть ≤ 1 . Если выбрать в качестве него все точки $\mathbb{A}_3^*$ (набор δ_{max}), то матрица гарантировано будет удовлетворять задаче (11). При фиксированном наборе δ_0 точек будет максимизировать значение $\det A_3^*$. Если $\det A_3^*$ совпадет с $\det A_3$ наибольшей матрицы для $n = 3$, это будет означать, что можно перейти при проверке задачи (11) от набора δ_{max} к набору δ_0 . Сужая набор δ_0 до минимума, можно получить граничные точки, в которых достаточно требовать $f_{3,1} = 1$, чтобы весь параллелепипед $\mathbb{A}_3^*$ находился внутри $\mathbb{F}_{3,1}$.

Проводя численные эксперименты, начав с точек со значениями координат $-1, 0, 1$, мы пришли к набору, состоящему из единственной точки $(1, 1, 0)$ (на единичном кубе; единичный куб с помощью преобразования (10) приводится к $\mathbb{A}_3^*$). Эта точка, применяя (10), преобразуется в точку (a, b, b) , что приводит нас к задаче

$$\begin{aligned}
2ab^2 &\rightarrow \max, \\
\frac{1}{2} (a^2 + b^2) b &= 1.
\end{aligned}$$

Решив эту задачу [1] мы получим точное значение

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица дает оценку $V_{3,1} \geq \det A_3^* = 2$, что совпадает результатом Т. Кьюзика [3].

Для $n = 5$ возьмем матрицу

$$A_5^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В этом случае получаются более сложные граничные точки: $(1, 1, 1, -1, 1)$, $(1, 1, -1, \frac{1}{3}, 1)$ и $(1, 1, \sqrt{5} - 2, -1, 1)$. Соответствующая задача имеет вид

$$\begin{aligned} 4ab^2c^2 &\rightarrow \max, \\ 2a^2b^2c &= 1, \\ \frac{8}{27}(a^2 + 4b^2)c^3 &= 1, \\ (3 - \sqrt{5})b^2(a^2 + (3 - \sqrt{5})^2b^2)c &= 1. \end{aligned}$$

Ее решение [1]

$$a = \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{134 + 30\sqrt{5}}{27}}, \quad b = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{8(4\sqrt{5} - 9)}}, \quad c = \frac{1}{2a^2b^2},$$

что дает оценку

ТЕОРЕМА 3.

$$V_{5,2} \geq \det A_5^* = \sqrt{\frac{27(9 + 5\sqrt{5})}{88}} \approx 2.48831... \quad (15)$$

Для $n = 6$ матрица имеет вид

$$A_6^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}. \quad (16)$$

В этом случае достаточно двух граничных точек: $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ и $(1, 1, \sqrt{5} - 2, 1, 1, 1)$. Соответствующая задача имеет вид

$$\begin{aligned} 4a^2b^4 &\rightarrow \max, \\ \frac{1}{2}a^2b^2(a^2 + 4b^2) &= 1, \\ \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})b^2(a^2 + 4b^2)(a^2 + (3 - \sqrt{5})^2b^2) &= 1. \end{aligned}$$

Ее решение [1]

$$a = \sqrt[6]{\frac{8(30\sqrt{5} - 67)}{11}}, \quad b = \sqrt[6]{\frac{56 + 25\sqrt{5}}{88}},$$

что дает оценку

ТЕОРЕМА 4.

$$V_{6,3} \geq \det A_6^* = \frac{9 + 5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458.... \quad (17)$$

5. Доказательство оценок $V_{n,s}$

Для доказательства теорем 3 и 4 воспользуемся следующими леммами. Их доказательство не представляет сложности и носит технический характер.

ЛЕММА 1.

$$\max F_1(x, y, z, w) = (t + x^2)(t + z^2)(y^2 + w^2) = 64(56 - 25\sqrt{5}),$$

где $t = 10\sqrt{5} - 22$, при условии

$$-2 \leq x + y \leq 2, \quad -2 \leq x - y \leq 2.$$

$$-2 \leq z + w \leq 2, \quad -2 \leq z - w \leq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1]. $\square$

ЛЕММА 2.

$$\max F_2(x, y, z, w) = (t_1 + y^2)(t_2 x^2 + z^2)|w| = \frac{64(5\sqrt{5} - 9)}{27},$$

где $t_1 = 10\sqrt{5} - 22$ и $t_2 = \frac{26+10\sqrt{5}}{27}$, при условии

$$-2 \leq x + y \leq 2, \quad -2 \leq x - y \leq 2.$$

$$-2 \leq z + w \leq 2, \quad -2 \leq z - w \leq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1]. $\square$

В дальнейших рассуждениях будем рассматривать матрицы следующего вида

$$A_* = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}.$$

Тогда задача (11) принимает вид

$$f_{n,[n/2]} = \frac{1}{2^{[n/2]}} \prod_{i=1}^{[n/2]} |x_i^2 + x_{[n/2]+i}^2| \prod_{i=2[n/2]}^n |x_i| \rightarrow \max,$$

$$\left| \frac{x_1}{a} \right| \leq 1, \quad \dots \quad \left| \frac{x_{n-2k}}{a} \right| \leq 1,$$

$$\left| \frac{x_{n-2k+1}}{2a_1} + \frac{x_{n-2k+2}}{2a_1} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{x_{n-2k+1}}{2a_1} - \frac{x_{n-2k+2}}{2a_1} \right| \leq 1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\left| \frac{x_{n-1}}{2a_k} + \frac{x_n}{2a_k} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{x_{n-1}}{2a_k} - \frac{x_n}{2a_k} \right| \leq 1.$$

Сделав замену

$$x_i = ay_i, \quad i = \overline{1, n-2k}$$

$$x_{n-2(k-i)-1} = a_i y_{n-2(k-i)-1}, \quad x_{n-2(k-i)} = a_i y_{n-2(k-i)}, \quad i = \overline{1, k}$$
(18)

задача примет вид

$$f_{n,[n/2]} = \frac{1}{2^{[n/2]}} \prod_{i=1}^{[n/2]} |x_i^2 + x_{[n/2]+i}^2| \prod_{i=2[n/2]}^n |x_i| \rightarrow \max,$$

$$|y_1| \leq 1, \quad \dots \quad |y_{n-2k}| \leq 1,$$

$$|y_{n-2k+1} + y_{n-2k+2}| \leq 2, \quad |y_{n-2k+1} - y_{n-2k+2}| \leq 2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$|y_{n-1} + y_n| \leq 2, \quad |y_{n-1} - y_n| \leq 2.$$
(19)

В этой задаче ограничения не зависят от исходной матрицы A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.

В качестве матрицы A_n рассмотрим матрицу (16), записанную в виде

$$A_6 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

где

$$\alpha = \sqrt[6]{\frac{8(30\sqrt{5}-67)}{11}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{10\sqrt{5}-22}},$$

откуда

$$V_{6,3} \geq \det A_6 = \frac{9+5\sqrt{5}}{11}.$$

Задача (19) примет вид

$$f_{6,3} = \frac{1}{8}(x_1^2 + x_4^2)(x_2^2 + x_5^2)(x_3^2 + x_6^2) =$$

$$= \frac{\alpha^6 \beta^6}{8} \cdot \left(\frac{y_1^2}{\beta^2} + y_6^2 \right) \left(\frac{y_2^2}{\beta^2} + y_5^2 \right) (y_3^2 + y_6^2) \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned} |y_1| &\leq 1, & |y_2| &\leq 1, \\ |y_3 + y_4| &\leq 2, & |y_3 - y_4| &\leq 2, \\ |y_5 + y_6| &\leq 2, & |y_5 - y_6| &\leq 2. \end{aligned}$$

Докажем, что $\max f_{6,3} \leq 1$.

Отметим, что наибольшее значение достигается, при $|y_1| = 1$. Действительно, пусть существует максимум такой, что $\max f_{6,3} = f_{6,3}(\delta, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$, где $|\delta| < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{6,3}(\delta y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) &= \frac{\alpha^6 \beta^6}{8} \cdot \left(\frac{\delta^2}{\beta^2} + y_6^2 \right) \left(\frac{y_2^2}{\beta^2} + y_5^2 \right) (y_3^2 + y_6^2) \leq \\ &\leq \frac{\alpha^6 \beta^6}{8} \cdot \left(\frac{1}{\beta^2} + y_6^2 \right) \left(\frac{y_2^2}{\beta^2} + y_5^2 \right) (y_3^2 + y_6^2) = f_{6,3}(1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6). \end{aligned}$$

Противоречие, т.е. $|y_1| = 1$. Аналогично показывается, что $|y_2| = 1$.

Таким образом, достаточно доказать, что $\max f_{6,3}^* \leq 1$, при условии

$$|y_3 + y_4| \leq 2, \quad |y_3 - y_4| \leq 2, \quad |y_5 + y_6| \leq 2, \quad |y_5 - y_6| \leq 2. \quad (20)$$

где

$$f_{6,3}^* = \frac{\alpha^6 \beta^6}{8} \cdot \left(\frac{1}{\beta^2} + y_4^2 \right) \left(\frac{1}{\beta^2} + y_5^2 \right) (y_3^2 + y_6^2) = \frac{\alpha^6 \beta^6}{8} \cdot F_1(y_3, y_4, y_5, y_6),$$

и

$$F_1(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{\beta^2} + a^2 \right) \left(\frac{1}{\beta^2} + c^2 \right) (b^2 + d^2).$$

В силу леммы (1)

$$\max F_3(a, b, c, d) = 64(56 - 25\sqrt{5}),$$

при ограничениях (20). Тогда

$$f_{6,3}^* \leq \frac{\alpha^6 \beta^6}{8} \cdot 64(56 - 25\sqrt{5}) = 1.$$

Теорема доказана. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.

Доказательство будем проводить аналогично теореме 4. В качестве матрицы A_n рассмотрим (14), записанную в виде

$$A_5 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma \end{pmatrix}.$$

где

$$\alpha = \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{134 + 60\sqrt{5}}{27}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{10\sqrt{5} - 22}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{27}{26 + 10\sqrt{5}}}.$$

Тогда

$$V_{5,2} \geq \det A_5 = \sqrt{\frac{27(9 + 5\sqrt{5})}{88}}.$$

Задача (19) примет вид

$$\begin{aligned} f_{5,2} &= \frac{1}{4} (x_1^2 + x_3^2) (x_2^2 + x_4^2) |x_5| = \\ &= \frac{\alpha^5 \beta^5 \gamma^3}{4} \cdot \left(\frac{y_1^2}{\beta^2} + y_6^2 \right) \left(\frac{y_2^2}{\gamma^2} + y_4^2 \right) |y_5| \rightarrow \max, \\ &\quad |y_1| \leq 1, \\ &\quad |y_2 + y_3| \leq 2, \quad |y_2 - y_3| \leq 2, \\ &\quad |y_4 + y_5| \leq 2, \quad |y_4 - y_5| \leq 2. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству теоремы 4 отмечаем, что $|y_1| = 1$ и приходим к ограничениям

$$|y_2 + y_3| \leq 2, \quad |y_2 - y_3| \leq 2, \quad |y_4 + y_5| \leq 2, \quad |y_4 - y_5| \leq 2. \quad (21)$$

То есть

$$f_{5,2}^* = \frac{\alpha^5 \beta^5 \gamma^3}{4} \cdot \left(\frac{1}{\beta^2} + y_3^2 \right) \left(\frac{y_2}{\gamma^2} + y_4^2 \right) |y_5| = \frac{\alpha^5 \beta^5 \gamma^3}{4} \cdot F_2(y_2, y_3, y_4, y_5),$$

где

$$F_2(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{\beta^2} + b^2 \right) \left(\frac{a^2}{\gamma^2} + c^2 \right) |d|.$$

В силу теоремы (2)

$$\max F_2(a, b, c, d) = \frac{64 (5\sqrt{5} - 9)}{27}.$$

при ограничениях (21). Тогда

$$f_{5,2}^* \leq \frac{\alpha^5 \beta^5 \gamma^3}{4} \cdot \frac{64 (5\sqrt{5} - 9)}{27} = 1.$$

Теорема доказана. $\square$

Соединяя результаты (8), теоремы 4, 3 и оценку (13) можно получить общее описание оценок $V_{n,[n/2]}$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $n > 2$, то

$$V_{n,[n/2]} \geq T_n \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^{2[(n-3)/4]},$$

где

- если $n \equiv 3 \pmod{4}$, то $T_n = 2$;
- если $n \equiv 0 \pmod{4}$, то $T_n = \frac{16}{9} \approx 1.77777 \dots$;
- если $n \equiv 1 \pmod{4}$, то $T_n = \sqrt{\frac{27(9+5\sqrt{5})}{88}} \approx 2.48831 \dots$;
- если $n \equiv 2 \pmod{4}$, то $T_n = \frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458 \dots$.

6. Оценки C_n

В работе [5] были приведены следующие оценки константы наилучших диофантовых приближений снизу

$$\begin{aligned} C_3 &\geq \frac{2}{5\sqrt{11}} \approx 0.120605... \\ C_4 &\geq \frac{16}{9\sqrt{1609}} \approx 0.044320... \\ C_5 &\geq \frac{16}{207\sqrt{53}} \approx 0.010617... \\ C_6 &\geq \frac{16}{9\sqrt{184\,607}} \approx 0.004138... \end{aligned}$$

Следствие 1 позволяют улучшить эти значения

$$\begin{aligned} C_5 &\geq \frac{3}{46} \sqrt{\frac{3(9+5\sqrt{5})}{1166}} \approx 0.014860... \\ C_6 &\geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}} \approx 0.004269... \\ C_7 &\geq \frac{32}{4\,275\sqrt{19}} \approx 0.001717... \\ C_8 &\geq \frac{256}{81\sqrt{29\,510\,281}} \approx 0.000581... \\ C_9 &\geq \frac{6}{9051} \sqrt{\frac{3(9+5\sqrt{5})}{506}} \approx 0.000229... \\ C_{10} &\geq \frac{16(9+5\sqrt{5})}{99\sqrt{5\,939\,843\,699}} \approx 0.000042... \end{aligned}$$

7. Заключение

Данная работа является развитием подхода к оценке константы наилучших диофантовых приближений, заложенного Г. Дэвенпортом [4], Дж. В. С. Касселсом [2], Т. Кьюзиком (см. [3]). Применение новых идей в сочетании с эффективным использованием численных экспериментов, позволило улучшить существующие оценки константы наилучших диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$. При этом для получения более сильных оценок, скорее всего, потребуются принципиально новые подходы. Косвенным признаком этого может быть полученная нами в разделе 3 информация о том, что A_n^* можно представить в виде композиции A_{n-4}^* и A_4^* .

В качестве возможного подхода по усилению оценок C_n снизу можно предложить непосредственную оценку значения критического определителя звездного тела $\mathbb{F}_n$. Это нетривиальная задача, но необходимо отметить, что в случае оценки сверху были получены достаточно обширные результаты [11, 12, 13, 14, 15, 18].

Другим направлением исследований может стать применение предложенного в данной работе подхода для оценки критических определителей. Задача оценки критического определителя ограниченного тела достаточно схожа с задачей оценки $V_{n,s}$. Нам кажется, что сочетание численных и аналитических методов в описанном случае может дать определенные результаты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Basalov Yu. A. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation // arXiv.org. 2019. Дата обновления: 09.04.2019. URL: <https://arxiv.org/abs/1804.05385> (дата обращения: 10.04.2019).
2. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119–121.
3. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12(4). P. 543–556.
4. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 186–195.
5. Finch S. R. Mathematical Constants. Cambridge University Press, 2003 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).
6. Furtwängler H. Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen. I // Math. Ann. 1927. Vol. 96. P. 169–175;
7. Furtwängler H. Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen. II // Math. Ann. 1928. Vol. 99. P. 71–83.
8. Hurwitz A. Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 279–284.
9. Krass S. Estimates for n -dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ // J. Number Theory. 1985. Vol. 20(2). P. 172–176
10. Krass S. The N -dimensional diophantine approximation constants // Australian Mathematical Society. 1985. Vol 32(2). P. 313–316.
11. Mack J. M. Simultaneous Diophantine approximation // J. Austral. Math. Soc. A. 1977. Vol. 24. P. 266–285.
12. Nowak W. G. A note on simultaneous Diophantine approximation // Manuscr. Math. 1981. Vol. 36. P. 33–46.
13. Nowak W. G. A remark concerning the s -dimensional simultaneous Diophantine approximation constants // Graz. Math. Ber. 1993. Vol. 318. P. 105–110.
14. Nowak W. G. Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants. // Comm. Math. 2014. Vol. 22, Is. 1, P. 71–76.
15. Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland. 2016. P. 181–197.
16. Басалов Ю. А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 388–405.
<https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411>.
17. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.
18. Мощевитин Н. Г. К теореме Бlichфельда-Мюлленера-Спона о совместных приближениях // Тр. МИАН, 2002, том 239, с. 268–274.

19. Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

20. A Database for Number Fields // A Database for Number Fields.

URL: <http://galoisdb.math.upb.de/> (дата обращения: 05.05.2018).

REFERENCES

1. Basalov Yu. A. 2019, “On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation“, Available at: <https://arxiv.org/abs/1804.05385>.
2. Cassels J. W. S. 1955, “Simultaneous Diophantine approximation“, *J. London Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 119–121.
3. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // *Journal of Number Theory*. 1980. Vol. 12(4). P. 543–556.
4. Davenport. H. 1955, “On a theorem of Furtwängler“, *J. London Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 186–195.
5. Finch S. R. 2003, *Mathematical Constants*, Cambridge University Press (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).
6. Furtwängler H. 1927, “Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen. I“, *Math. Ann.*, Vol. 96, pp. 169–175.
7. Furtwängler H. 1928, “Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen. II“, *Math. Ann.*, Vol. 99, pp. 71–83.
8. Hurwitz A. 1891, “Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche“, *Math. Ann.*, Vol. 39, pp. 279–284.
9. Krass S. 1985, “Estimates for n -dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ “, *J. Number Theory*, Vol. 20, Is. 2, pp. 172–176.
10. Krass S. 1985, “The N -dimensional diophantine approximation constants“, *Australian Mathematical Society*, Vol. 32, Is. 2, pp. 313–316.
11. Mack J. M. 1977, “Simultaneous Diophantine approximation“, *J. Austral. Math. Soc. A.*, Vol. 24, pp. 266–285.
12. Nowak W. G. 1981, “A note on simultaneous Diophantine approximation“, *Manuscr. Math.*, Vol. 36, pp. 33–46.
13. Nowak W. G. 1993, “A remark concerning the s -dimensional simultaneous Diophantine approximation constants“, *Graz. Math. Ber.*, Vol. 318. pp. 105–110.
14. Nowak W. G. 2014, “Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants“, *Comm. Math.*, Vol. 22, Is. 1, pp. 71–76.
15. Nowak W. G. 2016, “Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz’s theorem“, In: *T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications*, Springer, Switzerland, pp. 181–197.

16. Basalov Yu. A., 2018, "On the history of estimates of the constant of the best joint Diophantine approximations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 388–405.
<https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411>
17. Cassels J. W. S. 1965, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Mir.
18. Moshchevitin N. G. 2002, "To the Blichfeldt-Mullender-Spohn theorem on simultaneous approximations", *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, Vol. 239, pp. 268–274.
19. Schmidt W. M. 1983, *Diophantine Approximation*, Mir.
20. A Database for Number Fields. Available at: <http://galoisdb.math.upb.de/>

Получено 21.01.2019

Принято к печати 10.04.2019

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-82-93

Расширение теоремы Лауринчикаса — Матсумото

А. Вайгините

Вайгините Адель — докторант кафедры теории вероятностей и теории чисел, Вильнюсский университет, Литва.

e-mail: adele.vaiginyte@mif.stud.vu.lt

Аннотация

В 1975 г. С. М. Воронин открыл замечательное свойство универсальности дзета функции Римана $\zeta(s)$. Он показал, что широкого класса аналитические функции могут быть приближены с желаемой точностью сдвигами $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, одной и той же функции $\zeta(s)$. Открытие Воронина вдохновило продолжить исследования в этом направлении. Оказалось, что универсальность является свойством многих других дзета и L -функций, а также некоторых классов рядов Дирихле. Среди них L -функции Дирихле, дзета функции Дедекинда, Гурвица и Лерха. В 2001 г. А. Лауринчикас и К. Матсумото получили универсальность дзета-функций $\zeta(s, F)$, связанных с некоторыми параболическими формами F . В статье получено расширение теоремы Лауринчикаса–Матсумото с использованием для приближения аналитических функций сдвигов $\zeta(s + i\varphi(\tau), F)$. Здесь $\varphi(\tau)$ – дифференцируемая функция, при $\tau \geq \tau_0$, имеющая непрерывную монотонную положительную производную $\varphi'(\tau)$, удовлетворяющую при $\tau \rightarrow \infty$ оценкам $\frac{1}{\varphi'(\tau)} = o(\tau)$ и $\varphi(2\tau) \max_{\tau \leq t \leq 2\tau} \frac{1}{\varphi'(t)} \ll \tau$. Более точно, в статье доказано, что если κ – вес параболической формы F , K – компактное множество полосы $\{s \in \mathbb{C} : \frac{\kappa}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2}\}$, обладающее связным дополнением, и $f(s)$ – непрерывная, неимеющая нулей в K и аналитическая внутри K функция, то для всякого $\varepsilon > 0$ множество $\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\varphi(\tau), F) - f(s)| < \varepsilon\}$ имеет положительную нижнюю плотность.

Ключевые слова: дзета-функция параболической формы, параболическая форма Гекке, универсальность.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

А. Вайгините. Расширение теоремы Лауринчикаса — Матсумото // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 82–93.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-82-93

Extention of the Laurinčikas — Matsumoto theorem

A. Vaiginytė

Vaiginytė Adele — doctoral student of the Department of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University, Lithuania.

e-mail: adele.vaiginyte@mif.stud.vu.lt

Abstract

In 1975, S. M. Voronin discovered the remarkable universality property of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$. He proved that analytic functions from a wide class can be approximated with a given accuracy by shifts $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, of one and the same function $\zeta(s)$. The Voronin discovery inspired to continue investigations in the field. It turned out that some other zeta and L -functions as well as certain classes of Dirichlet series are universal in the Voronin sense. Among them, Dirichlet L -functions, Dedekind, Hurwitz and Lerch zeta-functions. In 2001, A. Laurinčikas and K. Matsumoto obtained the universality of zeta-functions $\zeta(s, F)$ attached to certain cusp forms F . In the paper, the extention of the Laurinčikas-Matsumoto theorem is given by using the shifts $\zeta(s + i\varphi(\tau), F)$ for the approximation of analytic functions. Here $\varphi(\tau)$ is a differentiable real-valued positive increasing function, having, for $\tau \geq \tau_0$, the monotonic continuous positive derivative, satisfying, for $\tau \rightarrow \infty$, the conditions $\frac{1}{\varphi'(\tau)} = o(\tau)$ and $\varphi(2\tau) \max_{\tau \leq t \leq 2\tau} \frac{1}{\varphi'(t)} \ll \tau$. More precisely, in the paper it is proved that, if κ is the weight of the cusp form F , K is the compact subset of the strip $\{s \in \mathbb{C} : \frac{\kappa}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2}\}$ with connected complement, and $f(s)$ is a continuous non-vanishing function on K which is analytic in the interior of K , then, for every $\varepsilon > 0$, the set $\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\varphi(\tau), F) - f(s)| < \varepsilon\}$ has a positive lower density.

Keywords: zeta-function of cusp forms, Hecke-eigen cusp form, universality.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. Vaiginytė, 2019, "Extention of the Laurinčikas — Matsumoto theorem", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 82–93.

Dedicated to Professor Antanas LAURINČIKAS on the occasion of his 70th birthday

1. Introduction

In 1975 the remarkable property of universality was discovered by Voronin [25]. By analyzing the Riemann zeta-function, he noticed that with certain shifts of one and the same function a whole class of analytic functions can be approximated. This fact inspired further research of functions with similar properties and became a subject of interest for number theory specialists, among them Reich [14], Gonek [4], Good [6], Bagchi [1], Laurinčikas [8], [9] and others. The aim of this paper is certain extended results on the universality for zeta-functions attached to certain cusp forms.

Denote by $s = \sigma + it$ a complex variable. Let

$$SL(2, \mathbb{Z}) := \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

be the full modular group. We say that the function $F(z)$, $z \in \mathbb{C}$, is a holomorphic cusp form of weight κ for $SL(2, \mathbb{Z})$ if it is holomorphic for $\text{Im}(z) > 0$, for all $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$ satisfies the functional equation

$$F\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^\kappa F(z)$$

and at infinity has the Fourier series expansion

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z}.$$

We assume additionally that $F(z)$ is an eigen form of all Hecke operators

$$T_m F(z) = m^{\kappa-1} \sum_{\substack{a,d>0 \\ ad=m}} \frac{1}{d^\kappa} \sum_{b \pmod{d}} F\left(\frac{az+b}{d}\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Then $c(m) \neq 0$, and, therefore, $F(z)$ can be normalized to have the Fourier coefficient $c(1) = 1$.

Having all the aforementioned assumptions, the zeta-function $\zeta(s, F)$ associated with the cusp form $F(z)$ of weight κ is defined, for $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$, by absolutely convergent Dirichlet series

$$\zeta(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}.$$

It is proved [5] that $\zeta(s, F)$ is analytically continued to an entire function. Moreover, for $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$, the function $\zeta(s, F)$ has the Euler product expansion over primes, i. e.,

$$\zeta(s, F) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

where $\mathbb{P}$ is the set of all prime numbers, and $\alpha(p)$ and $\beta(p)$ are complex conjugate numbers satisfying $\alpha(p) + \beta(p) = c(p)$.

The first result on the universality of $\zeta(s, F)$ was obtained by the Laurinćikas and Matsumoto in 2001 [10]. For the formulation of the theorem, we need some notation.

Let $D = D_F = \{s \in \mathbb{C} : \frac{\kappa}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2}\}$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_F$ be the class of compact subsets in the strip D with connected complements, and $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, stand for the class of continuous non-vanishing functions on K that are analytic in the interior of K . The Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$ is denoted by $\text{meas}A$. Then the Laurinćikas-Matsumoto universality theorem for $\zeta(s, F)$ can be formulated as follows.

THEOREM 1 ([10]). *Suppose that $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$, the following inequality*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, F) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

holds.

In the theorem, the shifts τ take arbitrary real values. However, it turns out that more general shifts can be considered. The aim of this paper is taking shifts for the universality theorem from a certain class of functions $U(\tau_0)$. We say that a function $\varphi(\tau) \in U(\tau_0)$, $\tau_0 > 0$, if the following conditions are satisfied:

1. $\varphi(\tau)$ is a differentiable real-valued positive increasing function on $[\tau_0, \infty)$;
2. $\varphi'(\tau)$ is monotonic, continuous, positive on $[\tau_0, \infty)$ satisfying $\frac{1}{\varphi'(\tau)} = o(\tau)$, $\tau \rightarrow \infty$;
3. $\varphi(2\tau) \max_{\tau \leq t \leq 2\tau} \frac{1}{\varphi'(t)} \ll \tau$, $\tau \rightarrow \infty$.

Then the following result is true.

THEOREM 2. *Suppose that $\varphi(\tau) \in U(\tau_0)$, $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau_0} \text{meas} \left\{ \tau \in [\tau_0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\varphi(\tau), F) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

It is known [11], [12] that universality theorems can be stated in a slightly different form. Theorem 2 has the following modification which will be proved in the paper.

THEOREM 3. *Suppose that $\varphi(\tau) \in U(\tau_0)$, $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H_0(K)$. Then the limit*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau_0} \text{meas} \left\{ \tau \in [\tau_0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\varphi(\tau), F) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

In the following section, some lemmas necessary for the proof of the above mentioned theorems will be introduced.

2. Auxiliary results

Denote by $\mathcal{B}(X)$ the Borel σ -field of the space X , and by γ the unit circle on the complex plane. Define

$$\Omega = \prod_{p \in \mathbb{P}} \gamma_p,$$

where $\gamma_p = \gamma$ for all primes $p \in \mathbb{P}$. By the Tikhonov theorem, with product topology and pointwise multiplication, the infinite-dimensional torus Ω is a compact topological Abelian group. Therefore, the probability Haar measure m_H on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ can be defined, and so we have a probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Denote by $\omega(p)$ the projection of an element $\omega \in \Omega$ to the coordinate space γ_p , $p \in \mathbb{P}$, by $H(D)$ the space of analytic functions on D endowed with the topology of uniform convergence on compacta, and on probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ define the $H(D)$ -valued random element $\zeta(s, \omega, F)$ by the formula

$$\zeta(s, \omega, F) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\alpha(p)\omega(p)}{p^s} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)\omega(p)}{p^s} \right)^{-1}.$$

Denote by $P_{\zeta, F}$, the distribution of $\zeta(s, \omega, F)$, i. e.,

$$P_{\zeta, F}(A) = m_H\{\omega \in \Omega : \zeta(s, \omega, F) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

Proof of the universality theorem is based on the weak convergence, as $T \rightarrow \infty$, for

$$P_{T, F}(A) = \frac{1}{T - \tau_0} \text{meas} \{ \tau \in [\tau_0, T] : \zeta(s + i\varphi(\tau), F) \in A \}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

THEOREM 4. *Suppose that $\varphi(\tau) \in U(\tau_0)$. Then $P_{T, F}$ converges weakly to $P_{\zeta, F}$ as $T \rightarrow \infty$. Moreover, the support of $P_{\zeta, F}$ is the set $S_F = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0\}$.*

We divide the proof of Theorem 4 into several lemmas. The first of them is a limit theorem on the torus Ω . For the proof of this lemma, properties of the function $\varphi(\tau)$ are needed.

For $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, define

$$Q_T(A) = \frac{1}{T - \tau_0} \text{meas} \left\{ \tau \in [\tau_0, T] : (p^{-i\varphi(\tau)} : p \in \mathbb{P}) \in A \right\}.$$

LEMMA 1. *Suppose that $\varphi(\tau) \in U(\tau_0)$. Then Q_T converges weakly to the Haar measure m_H as $T \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Proof] For the proof, we will apply the Fourier transform method. Let $g_T(\underline{k})$, $\underline{k} = (k_p : k_p \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P})$, be the Fourier transform of Q_T , i. e.,

$$g_T(\underline{k}) = \int_{\Omega} \left(\prod'_{p \in \mathbb{P}} \omega^{k_p}(p) \right) dQ_T,$$

where “ $'$ ” means that only a finite number of k_p are distinct from zero. Thus, from the definition of Q_T , we have

$$g_T(\underline{k}) = \frac{1}{T - \tau_0} \int_{\tau_0}^T \left(\prod'_{p \in \mathbb{P}} p^{-ik_p \varphi(\tau)} \right) d\tau = \frac{1}{T - \tau_0} \int_{\tau_0}^T \exp \left\{ -i\varphi(\tau) \sum'_{p \in \mathbb{P}} k_p \log p \right\} d\tau, \quad (1)$$

Obviously,

$$g_T(\underline{0}) = 1. \quad (2)$$

Since the set $\{\log p : p \in \mathbb{P}\}$ is linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$, we have that

$$a := \sum'_{p \in \mathbb{P}} k_p \log p \neq 0$$

for all $\underline{k} \neq \underline{0}$.

Clearly,

$$\int_{\tau_0}^T \exp \{-ia\varphi(\tau)\} d\tau = \int_{\tau_0}^T \cos(a\varphi(\tau)) d\tau - i \int_{\tau_0}^T \sin(a\varphi(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

Suppose that $\varphi'(\tau)$ is decreasing. Then, $\frac{1}{\varphi'(\tau)}$ is increasing, and therefore, by the mean value theorem,

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^T \cos(a\varphi(\tau)) d\tau &= \frac{1}{a} \int_{\tau_0}^T \frac{a\varphi'(\tau) \cos(a\varphi(\tau))}{\varphi'(\tau)} d\tau = \frac{1}{a\varphi'(T)} \int_{\xi}^T a\varphi'(\tau) \cos(a\varphi(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{a\varphi'(T)} \int_{\xi}^T d \sin(a\varphi(\tau)) = o(\tau) \end{aligned}$$

as $T \rightarrow \infty$, where $\tau_0 \leq \xi \leq T$. The same is also true for the second integral in (3). Thus, by (3),

$$\int_{\tau_0}^T \exp \{-ia\varphi(\tau)\} d\tau = o(\tau), \quad T \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Similarly, if $\varphi'(\tau)$ is increasing, then

$$\int_{\tau_0}^T \exp \{-ia\varphi(\tau)\} d\tau \ll \frac{1}{|a|\varphi(\tau_0)}. \quad (5)$$

From (4) and (5) together with (1), we get that

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(\underline{k}) = 0,$$

whenever $\underline{k} \neq \underline{0}$. Therefore, in view of (2),

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(\underline{k}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \underline{k} = \underline{0}, \\ 0 & \text{if } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

The right-hand side of the latter equality is the Fourier transform of the Haar measure m_H . Therefore, the lemma follows from the continuity theorem for probability measures on compact groups. $\square$

Now, some absolutely convergent Dirichlet series will be analysed. Let $\theta > \frac{1}{2}$ be a fixed number, and $m, n \in \mathbb{N}$. We define series

$$\zeta_n(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)v_n(m)}{m^s}$$

and

$$\zeta_n(s, \omega, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)\omega(m)v_n(m)}{m^s},$$

where

$$v_n(m) = \exp \left\{ - \left(\frac{m}{n} \right)^\theta \right\} \quad \text{and} \quad \omega(m) = \prod_{\substack{p^l | m \\ p^{l+1} \nmid m}} \omega^l(p), \quad m \in \mathbb{N}.$$

The latter series are absolutely convergent for $\sigma > \frac{\kappa}{2}$ [10]. Define the function $u_{n,F} : \Omega \rightarrow H(D)$ by the formula $u_{n,F}(\omega) = \zeta_n(s, \omega, F)$. Due to absolute convergence of $\zeta_n(s, \omega, F)$, we have that the function $u_{n,F}(\omega)$ is continuous, hence $(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{B}(H(D)))$ -measurable. Therefore, the Haar measure m_H on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ induces the unique probability measure $\hat{P}_{n,F}$ on $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ defined by

$$\hat{P}_{n,F}(A) = m_H u_{n,F}^{-1}(A) = m_H(u_{n,F}^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

LEMMA 2. Suppose that $\varphi(\tau) \in U(\tau_0)$. Then

$$P_{T,n,F}(A) := \frac{1}{T - \tau_0} \text{meas} \{ \tau \in [\tau_0, T] : \zeta_n(s + i\varphi(\tau), F) \in A \}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

converges weakly to $\hat{P}_{n,F}$ as $T \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Proof] The lemma is derived by standard arguments from Lemma 1 and the continuity of the function $u_{n,F}$. $\square$

Our aim is to prove that $P_{T,F}$ converges weakly to the limit measure P_F of the measure $\hat{P}_{n,F}$ as $n \rightarrow \infty$. For the proof of Theorem 4, approximation in the mean of $\zeta(s, F)$ by $\zeta_n(s, F)$ is used. Thus, the following estimate of the mean square is needed.

LEMMA 3. Suppose that $\varphi(\tau) \in U(\tau_0)$, and $\sigma, \frac{\kappa}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2}$, is fixed. Then, for all $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\tau_0}^T |\zeta(\sigma + it + i\varphi(\tau), F)|^2 d\tau \ll T(1 + |t|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Proof] It is known that, for fixed $\sigma, \frac{\kappa}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2}$,

$$\int_{\tau_0}^T |\zeta(\sigma + it, F)|^2 dt \ll T. \tag{6}$$

For $X > \tau_0$, we get

$$\begin{aligned} \int_X^{2X} |\zeta(\sigma + it + i\varphi(\tau), F)|^2 d\tau &= \int_X^{2X} \frac{1}{\varphi'(\tau)} |\zeta(\sigma + it + i\varphi(\tau), F)|^2 d\varphi(\tau) \\ &\ll \max_{X \leq \tau \leq 2X} \frac{1}{\varphi'(\tau)} \int_X^{2X} d \left(\int_0^{|t|+\varphi(\tau)} |\zeta(\sigma + iu, F)|^2 du \right) \\ &= \max_{X \leq \tau \leq 2X} \frac{1}{\varphi'(\tau)} \left(\int_0^{|t|+\varphi(\tau)} |\zeta(\sigma + iu, F)|^2 du \right) \Big|_X^{2X}. \end{aligned}$$

Consequently, by (6),

$$\int_0^{|t|+\varphi(\tau)} |\zeta(\sigma + iu, F)|^2 du \Big|_X^{2X} \ll_{\sigma} |t| + \varphi(2X),$$

and thus,

$$\begin{aligned} \int_X^{2X} |\zeta(\sigma + it + i\varphi(\tau), F)|^2 d\tau &\ll (|t| + \varphi(2X)) \max_{X \leq \tau \leq 2X} \frac{1}{\varphi'(\tau)} \\ &\ll X + |t| \max_{X \leq \tau \leq 2X} \frac{1}{\varphi'(\tau)} \ll X(1 + |t|). \end{aligned}$$

Taking $X = 2^{-k-1}T$ and summing over $k = 0, 1, \dots$ prove the lemma. $\square$

Now, we can approximate $\zeta(s, F)$ by $\zeta_n(s, F)$ in the mean. For $g_1, g_2 \in H(D)$, take

$$\rho(g_1, g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|},$$

where $\{K_l : l \in \mathbb{N}\} \subset D$ is a sequence of compact subsets such that

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

$K_l \subset K_{l+1}$ for all $l \in \mathbb{N}$, and if $K \subset D$ is a compact subset, then $K \subset K_l$ for some $l \in \mathbb{N}$. Then ρ is the metric in $H(D)$ inducing its topology of uniform convergence on compacta.

LEMMA 4. *Suppose that $\varphi(\tau) \in U(\tau_0)$. Then*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau_0} \int_{\tau_0}^T \rho(\zeta(s + i\varphi(\tau), F), \zeta_n(s + i\varphi(\tau), F)) d\tau = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Proof] Let θ be from the definition of $v_n(m)$, and

$$l_n(s) = \frac{s}{\theta} \Gamma\left(\frac{s}{\theta}\right) n^s, \quad n \in \mathbb{N},$$

where $\Gamma(s)$ denotes the Euler gamma-function. Then the function $\zeta_n(s, F)$ has the representation [10]

$$\zeta_n(s, F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \zeta(s+z, F) l_n(z) \frac{dz}{z}, \quad \sigma > \frac{\kappa}{2}.$$

Let K be an arbitrary compact subset of D . Then, from the residue theorem and the above equality, we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{T - \tau_0} \int_{\tau_0}^T \sup_{s \in K} (\zeta(s + i\varphi(\tau), F), \zeta_n(s + i\varphi(\tau), F)) d\tau \\ \ll \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\hat{\sigma} + iu)| \left(\frac{1}{T - \tau_0} \int_{\tau_0}^T |\zeta(\sigma + it + iu + i\varphi(\tau), F)| d\tau \right) du, \end{aligned}$$

as $T \rightarrow \infty$, where $\hat{\sigma} < 0$, $\frac{\kappa}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2}$, and t is bounded by a constant depending on K . Lemma 3 implies that with $t \in \mathbb{R}$, for $\frac{\kappa}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2}$,

$$\int_{\tau_0}^T |\zeta(\sigma + it + iu + i\varphi(\tau), F)| d\tau \ll \left(T \int_{\tau_0}^T |\zeta(\sigma + it + iu + i\varphi(\tau), F)|^2 d\tau \right)^{1/2} \ll_{\sigma, K} T(1 + |u|).$$

Therefore,

$$\frac{1}{T - \tau_0} \int_{\tau_0}^T \sup_{s \in K} (\zeta(s + i\varphi(\tau), F), \zeta_n(s + i\varphi(\tau), F)) d\tau \ll_{\sigma, K} \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\hat{\sigma} + iu)|(1 + |u|) du,$$

as $T \rightarrow \infty$. Hence,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau_0} \int_{\tau_0}^T \sup_{s \in K} (\zeta(s + i\varphi(\tau), F), \zeta_n(s + i\varphi(\tau), F)) d\tau = 0.$$

So, the lemma follows from the definition of the metric ρ . $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Proof of Theorem 4] Let ξ be a random variable uniformly distributed on $[0, 1]$ and defined on a certain probability space with measure μ . Define the $H(D)$ -valued random element $X_{T,n,F}$ by the formula

$$X_{T,n,F} = X_{T,n,F}(s) = \zeta_n(s + i\varphi(\xi T), F).$$

Then the assertion of Lemma 2 can be written as

$$X_{T,n,F} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \hat{X}_{n,F}, \quad (7)$$

where $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ means the convergence in distribution, and $\hat{X}_{n,F}$ is the $H(D)$ -valued random element with the distribution $\hat{P}_{n,F}$. Here $\hat{P}_{n,F}$ is the same limit probability measure as in Lemma 2.

Now, we will prove that the family $\{\hat{P}_{n,F} : n \in \mathbb{N}\}$ is tight, i.e., for every $\varepsilon > 0$, there exists a compact set $K = K(\varepsilon) \subset H(D)$ such that $\hat{P}_{n,F}(K) > 1 - \varepsilon$ for all $n \in \mathbb{N}$. Let $K \subset D$ be a compact set. Then, by the integral Cauchy formula,

$$\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\varphi(\tau), F)| \ll \frac{1}{\delta_K} \int_{L_K} |\zeta(z + i\varphi(\tau), F)| |dz|,$$

where L_K is a simple closed contour lying in D and enclosing the set K , and δ_K is the distance of L_K from the set K . Hence,

$$\int_{\tau_0}^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\varphi(\tau), F)| d\tau \ll \frac{1}{\delta_K} \int_{L_K} |dz| \int_{\tau_0}^T |\zeta(\operatorname{Re}(z) + i\varphi(\tau), F)| d\tau \ll_K T.$$

This with Lemma 4 shows that

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau_0} \int_{\tau_0}^T \sup_{s \in K_l} |\zeta_n(s + i\varphi(\tau), F)| d\tau \leq C_l < \infty, \quad (8)$$

where $\{K_l : l \in \mathbb{N}\}$ is the sequence of compact subsets of D from the definition of metric ρ .

Now, let the ε be an arbitrary positive number, and $M_l = M_l(\varepsilon) = C_l 2^l \varepsilon^{-1}$. Then, from (8), we have

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \limsup_{T \rightarrow \infty} \mu \left\{ \sup_{s \in K_l} |X_{T,n,F}(s)| > \varepsilon \right\} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau_0} \int_{\tau_0}^T \sup_{s \in K_l} |\zeta_n(s + i\varphi(\tau), F)| d\tau \leq \frac{\varepsilon}{2^l},$$

and, by (7),

$$\mu \left\{ \sup_{s \in K_l} |\hat{X}_{n,F}(s)| > \varepsilon \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2^l} \quad (9)$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Define the set $K = K(\varepsilon) = \{g \in H(D) : \sup_{s \in K_l} |g(s)| \leq M_l, l \in \mathbb{N}\}$. Then K is a compact set in $H(D)$, and, by (9),

$$\mu \left\{ \hat{X}_{n,F} \in K \right\} \geq 1 - \varepsilon$$

for all $n \in \mathbb{N}$, or, by definition of $\hat{X}_{n,F}$,

$$\hat{P}_{n,F}(K) \geq 1 - \varepsilon$$

for all $n \in \mathbb{N}$, thus the family $\{\hat{P}_{n,F} : n \in \mathbb{N}\}$ is tight. Therefore, by the Prokhorov theorem (see Theorem 6.1 in [2]), it is relatively compact, i.e., every sequence of $\{\hat{P}_{n,F}\}$ contains a weakly convergent subsequence. Thus, there exists $\{\hat{P}_{n_r,F}\} \subset \{\hat{P}_{n,F}\}$ such that $\{\hat{P}_{n_r,F}\}$ converges weakly to a certain probability measure P_F on $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ as $r \rightarrow \infty$, or, in terms of convergence in distribution, we say

$$\hat{X}_{n_r,F} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P_F \quad (10)$$

Define one more $H(D)$ -valued random element

$$X_{T,F} = X_{T,F}(s) = \zeta_n(s + \varphi(\xi T), F).$$

Then, in view of Lemma 4, for every $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \mu \{ \rho(X_{T,F}, X_{T,n,F}) \geq \varepsilon \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau_0} \text{meas} \{ \tau \in [\tau_0, T] : \rho(\zeta(s + i\varphi(\tau), F), \zeta_n(s + i\varphi(\tau), F)) \geq \varepsilon \} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(T - \tau_0)\varepsilon} \int_{\tau_0}^T \rho(\zeta(s + i\varphi(\tau), F), \zeta_n(s + i\varphi(\tau), F)) d\tau = 0. \end{aligned}$$

This together with (7) and (10) shows that all hypotheses of Theorem 4.2 of [2] are fulfilled, therefore,

$$X_{T,F} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P_F,$$

or $P_{T,F}$ converges weakly to the limit measure P_F of $\hat{P}_{n,F}$ as $T \rightarrow \infty$.

The final step is to identify the measure P_F . For this, we will use a simple observation. It is known [3], [7] that

$$\frac{1}{T} \text{meas} \{ \tau \in [0, T] : \zeta(s + i\tau, F) \in A \}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

as $T \rightarrow \infty$, converges weakly to the limit measure P_F of $\hat{P}_{n,F}$, and that $P_F = P_{\zeta,F}$. Moreover, the support of $P_{\zeta,F}$ is the set S_F . Therefore, $P_{T,F}$ also converges weakly to $P_{\zeta,F}$ as $T \rightarrow \infty$. $\square$

3. Proofs of universality theorems

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Proof of Theorem 2] Define the set

$$G_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - e^{p(s)}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

where $p(s)$ is a polynomial satisfying

$$\sup_{s \in K} |f(s) - e^{p(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11)$$

The existence of $p(s)$ follows from the Mergelyan theorem on the approximation of analytic functions by polynomials (see [13]).

By the second part of Theorem 4, the function $e^{p(s)}$ belongs to the support of the measure $P_{\zeta, F}$. Therefore,

$$P_{\zeta, F}(G_\varepsilon) > 0. \quad (12)$$

Since G_ε is an open set, by the first part of Theorem 4 and the equivalent of weak convergence of probability measures in terms of open sets, we have that

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} P_{T, F}(G_\varepsilon) \geq P_{\zeta, F}(G_\varepsilon).$$

This, the definition of $P_{T, F}$ and inequality (12) give

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau_0} \text{meas} \left\{ \tau \in [\tau_0, T] : \sup_{s \in K} \left| \zeta(s + i\varphi(\tau), F) - e^{p(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} > 0.$$

This together with (11) proves the theorem. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Proof of Theorem 3] Define the set

$$\hat{G}_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Then the boundary $\partial \hat{G}_\varepsilon$ of $\hat{G}_\varepsilon$ lies in the set

$$\left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| = \varepsilon \right\}.$$

Therefore, $\partial \hat{G}_{\varepsilon_1} \cap \partial \hat{G}_{\varepsilon_2} = \emptyset$ for $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Hence, for at most countably many $\varepsilon > 0$, the sets $\partial \hat{G}_\varepsilon$ have a positive $P_{\zeta, F}$ measure. Using Theorem 4 and equivalent of weak convergence of probability measures in terms of continuity sets, we obtain that

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_{T, F}(\hat{G}_\varepsilon) = P_{\zeta, F}(\hat{G}_\varepsilon) \quad (13)$$

for all but at most countably many $\varepsilon > 0$. Let G_ε be from the proof of Theorem 2. Then, in view of (11), we obtain that $G_\varepsilon \subset \hat{G}_\varepsilon$, and thus, by (12), $P_{\zeta, F}(\hat{G}_\varepsilon) > 0$. This, the definition of $P_{T, F}$ and (13) prove the theorem. $\square$

4. Conclusions

In the paper, a generalized version of the Laurinćikas-Matsumoto universality theorem for zeta functions of certain cusp forms $\zeta(s, F)$ is proved in two different forms. Namely, it is shown that the shifts $\zeta(s + i\varphi(\tau), F)$, where $\varphi(\tau)$ belongs to a certain class of differentiable functions $U(\tau_0)$ can approximate with a given accuracy all non-vanishing analytic functions defined in the strip $\{s \in \mathbb{C} : \frac{\kappa}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2}\}$, where κ is the weight of the form F , and the lower density of the set of such shifts is positive.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bagchi B. The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, PhD Thesis, // Calcutta, Indian statistical Institute. 1981.
2. Billingsley P. Convergence of Probability measures // Wiley, New York. 1968.

3. Dubickas A., Laurinčikas A. Distribution modulo 1 and the discrete universality of the Riemann zeta-function // *Abh. Math. Semin. Hambg.* 2016. Vol. 86, P. 79–87.
4. Gonek S. M. Analytic properties of zeta and L -functions // *Math. Z.* 1982. Vol. 181, P. 319–334.
5. Hecke E. Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I // *Math. Ann.* 1937. Vol. 114, 1–28; II. *ibid.* P. 316–351.
6. Good A. On the distribution of values of Riemann's zeta-function // *Act. Arith.* 1981. Vol. 38, P. 347–388.
7. Laurinčikas A. Limit theorems for the Riemann zeta-function // Kluwer, Dordrecht, Boston, London. 1996.
8. Laurinčikas A. The universality theorem // *Lith. Math. J.* 1983. Vol. 23, P. 283–289.
9. Laurinčikas A. The universality theorem II // *Lith. Math. J.* 1984. Vol. 24, P. 143–149.
10. Laurinčikas A., Matsumoto K. The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms // *Acta Arith.* 2001. Vol. 98, P. 345–359.
11. Лауринчикас А., Мешка Л. Уточнение неравенства универсальности // *Матем. заметки.* 2014. Т. 96, С. 905–910,
12. Laurinčikas A., Meška L. On the modification of the universality of the Hurwitz zeta-function // *Nonlinear Anal. Model. Control.* 2016. Vol. 21, P. 564–576.
13. Мергелян С. Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного // *УМН.* 1952. Т. 7, №2. С. 31–122.
14. Reich A. Zur Universalität und Hypertranszendenz der Dedekindschen Zetafunktion // *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.* 1982. Vol. 33, P. 197–203.
15. Воронин С. М. Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1975. Т. 39. С. 475–486.

REFERENCES

1. Bagchi, B. 1981, “The statistical behavior and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series“, PhD Thesis, *Calcutta, Indian statistical Institute.*
2. Billingsley, P. 1968, “Convergence of Probability measures“, *Wiley, New York.*
3. Dubickas, A., Laurinčikas, A. 2016, “Distribution modulo 1 and the discrete universality of the Riemann zeta-function“, *Abh. Math. Semin. Hambg.*, vol. 86, pp. 79–87.
4. Gonek, S. M. 1982, “Analytic properties of zeta and L -functions“, *Math. Z.*, vol. 181, pp. 319–334.
5. Hecke, E. 1937, “Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I“, *Math. Ann.*, vol. 114, 1–28; II. *ibid.* pp. 316–351.
6. Good, A. 1981, “On the distribution of values of Riemann's zeta-function“, *Act. Arith.*, vol. 38, pp. 347–388.

7. Laurinčikas, A. 1996, “Limit theorems for the Riemann zeta-function“, *Kluwer, Dordrecht, Boston, London*.
8. Laurinčikas, A. 1983, “The universality theorem“, *Lith. Math. J.*, vol. 23, pp. 283–289.
9. Laurinčikas, A. 1984, “The universality theorem II“, *Lith. Math. J.*, vol. 24, pp. 143–149.
10. Laurinčikas, A., Matsumoto, K. 2001, “The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms“, *Acta Arith.*, vol. 98, pp. 345–359.
11. Laurinčikas, A., Meška, L. 2014, “Sharpening of the universality inequality“, *Math. Notes*. vol. 96, pp. 971–976,
12. Laurinčikas, A., Meška, L. 2016, “On the modification of the universality of the Hurwitz zeta-function“, *Nonlinear Anal. Model. Control*, vol. 21, pp. 564–576.
13. Mergelyan, S. N. 1952, “Uniform approximations of functions of a complex variable“, *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, vol. 7, pp. 31–122.
14. Reich, A. 1982, “Zur Universalität und Hypertranszendenz der Dedekindschen Zetafunktion“, *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, vol. 33, pp. 197–203.
15. Voronin, S. M. 1975, “Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function“, *Math. USSR Izv.*, vol. 9, pp. 443–453.

Получено 09.01.2019

Принято к печати 10.04.2019

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 51-7, 519.816

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-82-93

Исследование систем действительных функций на двумерных сетках с использованием нечетких множеств¹

А. Д. Гвишиани, С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов

Гвишиани Алексей Джерменович — Академик РАН, профессор, доктор физико-математических наук, научный руководитель, Геофизический центр РАН; главный научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта, г. Москва.

e-mail: s.gvishiani@gcras.ru

Агаян Сергей Мартикович — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН, г. Москва.

e-mail: s.agayan@gcras.ru

Богоутдинов Шамиль Рафекович — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Геофизический центр РАН; старший научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта, г. Москва.

e-mail: shm@gcras.ru

Аннотация

Настоящая работа посвящена изложению программы исследования конечной системы функций на конечной двумерной сетке, способной учесть любую экспертную точку зрения на заданные функции, их свойства и динамику. Программа реализована на языке нечетких множеств и нечеткой логики, содержит несколько этапов и в конечном итоге позволяет решить в каких областях исходного множества система заданных функций ведет себя наиболее интересно с экспертной точки зрения.

Ключевые слова: нечеткая математика, меры близости, динамические показатели, меры аномальности, функциональная кластеризация.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:

А. Д. Гвишиани, С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов. Исследование систем действительных функций на двумерных сетках с использованием нечетких множеств // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 94–111.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 51-7, 519.816

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-82-93

Investigation of systems of real functions on two-dimensional grids using fuzzy sets²

А. Д. Гвишиани, С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-17-00241).

²The study was carried out at the expense of a grant from the Russian science Foundation (project 18-17-00241).

Gvishiani Alexey Dzhermenovich — Academician, Prof., D.Sc., Chief Scientist, Geophysical Center RAS; Principal research scientist, Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS, Moscow.
e-mail: s.gvishiani@gcras.ru

Agayan Sergey Martikovich — D.Sc., Principal research scientist, Geophysical Center RAS, Moscow.
e-mail: s.agayan@gcras.ru

Bogoutdinov Shamil Rafekovich — Ph.D., Leading research scientist, Geophysical Center RAS; Senior research scientist, Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS, Moscow.
e-mail: shm@gcras.ru

Abstract

This work deals with the description of the study of a finite function system on a finite two-dimensional grid able to consider any expert's point of view on the given functions, their features and dynamics. The program is implemented using the fuzzy sets and fuzzy logic language, it consists of several stages and, ultimately, makes it possible to decide in which areas of the initial set the system of given functions behaves most interestingly from an expert point of view.

Keywords: fuzzy mathematics, nearness measures, dynamic indicators, anomaly measures, functional clusterization.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

A. D. Gvishiani, S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov, 2019, "Investigation of systems of real functions on two-dimensional grids using fuzzy sets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 94–111.

1. Введение

Поиск аномалий в полях геофизических данных [1, 2, 3, 4, 5, 6], распознавание мест возможного возникновения сильнейших, сильных и значительных землетрясений [7, 8, 9], оптимизация захоронения радиоактивных отходов [10] и целый ряд других актуальных проблем природного риска приводят исследователя (эксперта) к необходимости ранжирования узлов конечной двумерной сетки с целью выбора наилучших в смысле произведенных в них измерений.

В статье изучается конечная система функций на конечной двумерной сетке. При этом делается попытка учесть различные экспертные точки зрения на заданные функции, их свойства и динамику. а также на то, какие именно узлы мы объявляем "наилучшими". В работе используется язык нечетких множеств и нечеткой логики, обладающий большими возможностями по сравнению с классическими множествами и булевой логикой для передачи различных экспертных представлений о явлениях, описываемых рассматриваемыми функциями.

Перейдем к формализованной постановке задачи: система функций $\mathcal{F}$ на двумерной сетке W анализируется виртуальным экспертом $\mathcal{E}$. Предполагается, что эксперт $\mathcal{E}$ имеет точку зрения на динамику $\mathcal{F}$ в каждом узле $w \in W$ и задается при этом двумя вопросами:

1. В какой степени мера $\mu_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(w) \in [0, 1]$ выражает интересующие эксперта $\mathcal{E}$ свойства системы функций $\mathcal{F}$ в узле w ?
2. Существуют ли достаточно большие связные области сетки W , в которых подавляющее число узлов w обладают интересующими экспертов $\mathcal{E}$ свойствами?

Настоящая работа делает попытку продвинуться в получении формализованных ответов на эти вопросы.

2. Исходные данные, соглашения и обозначения

На плоскости $\mathbb{R}^2(x_1, x_2)$ выбрана конечная сетка $\mathcal{W} = \mathcal{W}(h_1, h_2)$ с узлами w :

$$\mathcal{W} = \{w = (ih_1, jh_2) : i, j \in \mathbb{Z}\}$$

Для i и j будем также использовать обозначения $i(w)$ и $j(w)$.

Расстояние на $\mathcal{W}$ считается индуцированным нормой $\|\cdot\|_\infty$ в координатах i и j :

$$\|w - \bar{w}\| = \max(|i(w) - i(\bar{w})|, |j(w) - j(\bar{w})|)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Узлы w и $\bar{w}$ полагаем соседними, если $|i(w) - i(\bar{w})| + |j(w) - j(\bar{w})| = 1$, а отношение соседства обозначаем через N (w и $\bar{w}$ – соседи $\Leftrightarrow w N \bar{w}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подмножество $W \subset \mathcal{W}$ будем называть связным, если для каждой пары его узлов внутри W существует соединяющий их путь, состоящий из соседних узлов.

Далее множество W предполагается связным и конечным.

Обозначим через $\mathcal{F}$ конечную систему функций на W , представляющую исходные данные задачи:

$$\mathcal{F} = \{f_i|_1^M, f_i : W \rightarrow \mathbb{R}\} \quad (1)$$

а через $\mathcal{F}(W)$ пространство всех вещественнозначных функций на W .

3. Меры близости

Локальный анализ функций на W невозможен без формализации понятия локализации самого пространства W . Такая локализация пространства W в каждом из узлов w осуществляется с помощью нечеткой структуры δ_w на W , называемой мерой близости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Мера близости δ_w в W к узлу w – функция принадлежности на W к нечеткому множеству $\{(\bar{w}, \delta_w(\bar{w})) : \bar{w} \in W\}$. Значение $\delta_w(\bar{w})$ выражает в шкале $[0, 1]$ при нормировке $\delta_w(w)$ степень близости узла $\bar{w}$ к узлу w в метрическом пространстве $(W, \|\cdot\|)$

Таким образом строится отображение $w \rightarrow \delta_w$, ставящее в соответствие каждому узлу $w \in W$ некоторое упорядочивание объектов $\bar{w} \in W$ по их близости к w , определенной мерой $\delta_w(\bar{w})$. Иными словами $\forall w \in W$ вводит на W свою структуру нечеткого множества.

Мера близости δ_w определяет нечеткие окрестности для w в W . В общем случае значение $\delta_w(\bar{w})$ может убывать не только с ростом расстояния $\|w - \bar{w}\|$, но и зависеть от других факторов, в частности, от расположения («топологии») узлов W вокруг w .

Мера близости δ_w формализует «взгляд эксперта $\mathcal{E}$ на W из узла w ». Такой «взгляд» есть ранжирование $\bar{w} \in W$ вокруг w весами $\delta_w(\bar{w})$, которые $\mathcal{E}$ придает узлам $\bar{w}$ при локальном анализе в узле w пространства W и функций на нем. Пространство W превращается в пространство с отмеченной точкой $w \in W$.

Эксперт $\mathcal{E}$ из узла $w \in W$ может переместиться в другую точку $v \in W$. Тогда его взгляд на пространство W из новой точки v , вообще говоря, изменится.

В приведенных ниже примерах мер близости неотрицательный параметр « p » отвечает за масштаб δ -локализации. Чем больше « p », тем δ -локализация сильнее, в частности, в самом слабом случае при $p = 0$ получится «точка зрения» на W , одинаковая во всех его узлах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.

1. Будем называть меру близости δ глобальной, если $\delta_w(\bar{w}) \neq 0 \forall w, \bar{w} \in W$. Иными словами обзор эксперта из любого узла w охватывает все W .

2. Меры близости, не являющиеся глобальными, будем называть локальными.

ПРИМЕР 1.

1. Глобальная мера близости (первая конструкция) (рис. 1)

$$\delta_w(\bar{w}) = \left(1 - \frac{\|\bar{w} - w\|}{\max_{\bar{w} \in W} \|\bar{w} - w\| + 1} \right)^p \quad (2)$$

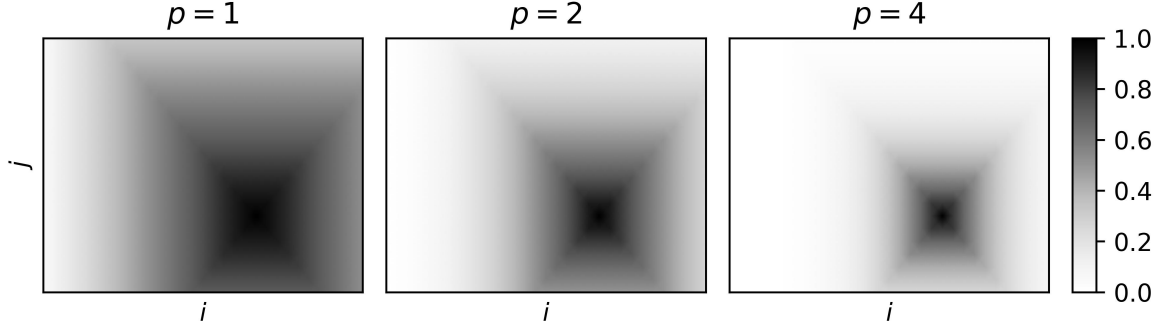


Рис. 1: Глобальная мера близости (первая конструкция)

2. Глобальная мера близости (вторая конструкция)

$$\delta_w(\bar{w}) = \left(1 - \frac{\sum \|\bar{w} - w\| : \|\bar{w} - w\| \leq \|\bar{w} - w\|}{(\sum \|\bar{w} - w\| : \bar{w} \in W) + 1} \right)^p \quad (3)$$

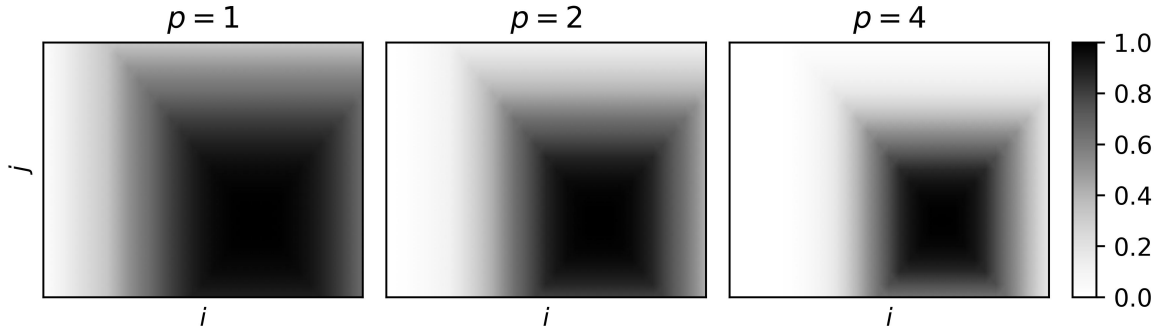


Рис. 2: Глобальная мера близости (вторая конструкция)

3. Локальная мера близости (рис. 3)

$$\delta_w(\bar{w}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\|\bar{w} - w\|}{r} \right)^p, & \text{если } \|\bar{w} - w\| \leq r \\ 0 & \text{если } \|\bar{w} - w\| > r \end{cases} \quad (4)$$

где $r = r(w)$ – радиус обзора эксперта в узле w .

Параметр « p » из (2)-(4) имеет существенное значение, т.к. решение о поведении системы функций $\mathcal{F}$ в узле w эксперт $\mathcal{E}$ принимает в результате системного анализа разномасштабных взглядов на W из w . Представляя собой первый параметр исследования, меры близости δ_w нужны эксперту $\mathcal{E}$ для локального анализа системы функций $\mathcal{F}$.

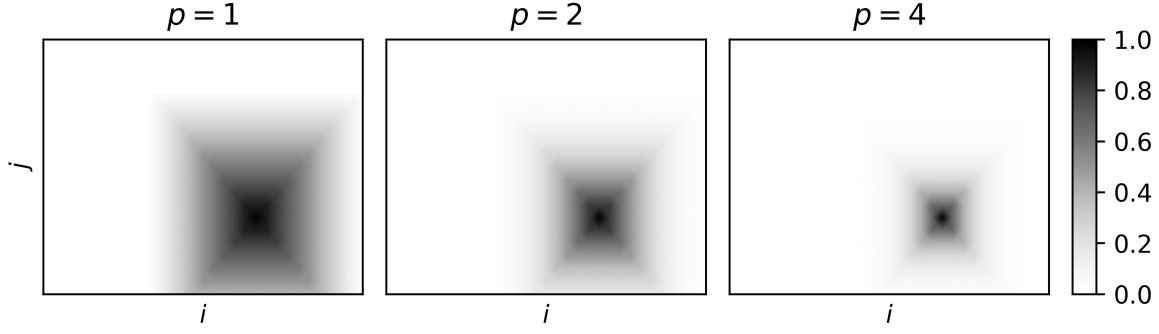


Рис. 3: Локальная мера близости

4. Динамические показатели

Эксперт анализирует с разных сторон исходные данные с целью извлечь максимальное из них знание об изучаемом процессе или явлении. Интерпретируя измерение на формальном математическом языке, мы будем считать его функцией на W . Результат ее изучения с точек зрения разных экспертов назовем динамическими показателями этой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Динамическим показателем D мы называем неотрицательный функционал на конечном пространстве W , параметризованный им самим же, т.е.*

$$D : \mathcal{F}(W) \times W \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (5)$$

где $\mathbb{R}^+$ есть множество неотрицательных вещественных чисел.

Значение $D(f, w)$ будет обозначаться через $D_f(w)$ и трактоваться как количественные оценки поведения функции f в узле w при "взгляде" D на ее динамику (при подходе D к ее динамике). $D_f(w)$ – количественное выражение определенной точки зрения на функцию f в w .

Подчеркнем, что в точке зрения $\mathcal{E}$ на функцию f присутствует мера близости $\delta_w(\bar{w})$. Это дает возможность для каждого узла $w \in W$ определить совокупность

$$\text{Im}_w f = \{(f(\bar{w}), \delta_w(\bar{w})), \bar{w} \in W\}, \quad (6)$$

которую мы будем называть нечетким образом функции f в узле w .

Динамические показатели $D_f(w)$ являются некоторыми числовыми характеристиками нечеткого образа. Существует открытый к пополнению набор таких характеристик. Каждая из них имеет прозрачное математическое толкование.

ПРИМЕР 2. *Динамические показатели*

1. Энергия

$$E_f(w|\delta) = \frac{\sum_{\bar{w} \in W} |f(\bar{w}) - M_f(w|\delta)| \delta_w(\bar{w})}{\sum_{\bar{w} \in W} \delta_w(\bar{w})} \quad (7)$$

где

$$M_f(w|\delta) = \frac{\sum_{\bar{w} \in W} f(\bar{w}) \delta_w(\bar{w})}{\sum_{\bar{w} \in W} \delta_w(\bar{w})}$$

2. Разброс

$$Q_f(w|\delta, q) = \left(\frac{\sum_{\bar{w}, \bar{\bar{w}} \in W} |f(\bar{w}) - f(\bar{\bar{w}})|^q \delta_w(\bar{w}) \delta_w(\bar{\bar{w}})}{\sum_{\bar{w}, \bar{\bar{w}} \in W} \delta_w(\bar{w}) \delta_w(\bar{\bar{w}})} \right)^{1/q} \quad (8)$$

Мы пользуемся колмогоровскими средними, позволяющими получить статистически устойчивый разброс [14] (опыт показывает, что q должно быть ≥ 1). .

3. Изрезанность

$$L_f(w|\delta) = \frac{\sum_{\bar{w} \in N_{\bar{w}; \bar{w}, \bar{w} \in W}} |f(\bar{w}) - f(\bar{w})| \delta_w(\bar{w}) \delta_w(\bar{w})}{\sum_{\bar{w} \in N_{\bar{w}; \bar{w}, \bar{w} \in W}} \delta_w(\bar{w}) \delta_w(\bar{w})} \quad (9)$$

где N отношение соседства узлов (определение 1).

4. Градиент

Обозначим через $l_f(w|\delta)(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$ линейную регрессию для нечетной функции (f, δ_w) . При маленьких шагах h_1 и h_2 для дифференцируемой функции f в непрерывной окрестности узла w такая регрессия близка к касательной $l_f(x_1, x_2) = \frac{df}{dx_1}(w)(x_1 - w_1) + \frac{df}{dx_2}(w)(x_2 - w_2) + f(w)$. Поэтому коэффициенты a и b в общем случае естественно считать «частными производными» $\frac{df}{dx_1}(w)$ и $\frac{df}{dx_2}(w)$, а вектор $\left(\frac{df}{dx_1}(w), \frac{df}{dx_2}(w)\right)$ градиентом $\text{grad } f(w)$ [13].

Динамический показатель

$$G_f(w|\delta) = \|\text{grad } f(w)\|_2 \quad (10)$$

выражает динамические свойства функции f в узле w , а именно: направление и силу ее роста.

5. Локальная линейность

$$R_{f_i}(w|\delta) = \frac{\sum_{w \in W} |f(\bar{w}) - l_f(w|\delta)(\bar{w})| \delta_w(\bar{w})}{\sum_{w \in W} \delta_w(\bar{w})} \quad (11)$$

6. Модуль

Технически важный показатель, не зависящий от локализации

$$M_f(w) = |f(w)| \quad (12)$$

Приведенные динамические показатели связаны с естественными и важными, но достаточно простыми точками зрения эксперта $\mathcal{E}$ на функцию f . Общий случай складывается из простых, причем соединение не может быть прямым, механическим. Дело в том, что изначально динамические показатели D_f для разных D имеют различный масштаб. Для выполнения таких соединений используются так называемые меры максимальности, определение которых будет приведено ниже.

Динамические показатели представляют собой второй параметр исследования.

5. Меры аномальности динамического показателя

Мера динамической активности μD_f является функцией принадлежности на W к нечеткому понятию «активность функции f в узле w с позиции показателя D ». Мера μD_f есть ответ на Вопрос № 1 из введения для показателя D : «значение $\mu D_f(w)$ есть степень выраженности в шкале $[0, 1]$ для функции f в узле w свойства, стоящего за показателем D ». Мера μD_f тесно связана с задачей поиска аномалий и, собственно, возникла благодаря им, поэтому μD_f мы также равнозначно будем называть мерой аномальности динамического показателя.

Мера μD_f получается из показателя D_f с помощью той или иной конструкции меры максимальности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Мера максимальности $\text{mesmax}_B(a)$ – нечеткая структура на $\mathbb{R}^+$, отвечающая для конечного взвешенного неотрицательного множества $B = \{(b_k, \omega_k) |_{k=1}^K, b_k \geq 0, \omega_k > 0\}$ на вопрос:

«В какой степени число $a \in \mathbb{R}^+$ является большим по модулю B ?»:

$$\text{mesmax}_B(a) = \text{mes}(B < a) \in [0, 1]$$

Для меры $\mu D_f(w)$ роль B играет $\text{Im}_w D_f$ – нечеткий образ, центрированный в узле w с помощью меры близости δ_w : $\text{Im}_w D_f = \{(D_f(\bar{w}), \delta_w(\bar{w})), \bar{w} \in W\}$ и

$$\mu D_f(w) = \text{mesmax}_{\text{Im}_w D_f} D_f(w)$$

Имеется несколько принципиально разных конструкций mesmax . Однако в этой статье мы ограничимся конструкцией меры максимальности, основанной на нечетких сравнениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Нечеткое сравнение $n(b, a)$ неотрицательных чисел $a, b \in \mathbb{R}^+$ измеряет степень превосходства a над b

$$n(a, b) = \text{mes}(b < a) \in [0, 1]$$

Нечеткое сравнение чисел $n(b, a)$ следует понимать как нечеткое бинарное отношение на полуоси $\mathbb{R}^+$, согласованное с ее естественным порядком.

В качестве n может выступать любая функция $\Psi(b, a): \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$, возрастающая по a при фиксированном b , убывающая по b при фиксированном a и имеющая следующие дополнительные граничные условия

$$\begin{aligned} \forall b \lim_{a \rightarrow \infty} \Psi(a, b) &= 1 \\ \forall a \Psi(a, a) &= 0.5 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3.

$$n(b, a) = \frac{a}{a + b}$$

Нечеткое сравнение $n(b, a)$ можно расширить (неоднозначно) до сравнения числа a с взвешенной числовой совокупностью $B = \{(b_k, \omega_k) |_{k=1}^K\}$. Всякое такое расширение $n(B, a)$ будет мерой максимальности $\text{mesmax}_B a$:

$$n(B, a) = \text{mes}(B < a) = \text{mesmax}_B a$$

Приведем три конструкции расширения $n(b, a) \rightarrow n(B, a)$

ПРИМЕР 4. Мера максимальности «нечеткие сравнения»

1. Бинарная конструкция

$$n_b(B, a) = \frac{\sum_{k=1}^K n(b_k, a) \omega_k}{\sum_{k=1}^K \omega_k}$$

2. Гравитационная конструкция. Обозначим через $\bar{B}$ среднее (центр тяжести) совокупности B :

$$\bar{B} = \frac{\sum_{k=1}^K b_k \omega_k}{\sum_{k=1}^K \omega_k}$$

Тогда

$$n_g(B, a) = n(\bar{B}, a)$$

3. Сигма-конструкция.

Левый момент

$$\sigma^l(B, a) = \left(\sum_{k=1}^K (a - b_k) \omega_k : b_k < a \right)$$

есть довод за максимальность « a » по модулю B . Соответственно, правый момент

$$\sigma^r(B, a) = \left(\sum_{k=1}^K (b_k - a) \omega_k : b_k > a \right)$$

есть довод за минимальность « a » по модулю B . Тогда

$$n_\sigma(B, a) = n(\sigma^r(B, a), \sigma^l(B, a))$$

Возвращаясь к мерам аномальности динамического показателя D , приведем их явное выражение для нечеткого сравнения $n(b, a)$ из примера 3.

ПРИМЕР 5. Меры μD_f на основе сравнения $n(b, a) = \frac{a}{a+b}$

1. Бинарная конструкция

$$\mu D_f(w) = \left(\sum_{\bar{w} \in W} \frac{D_f(w) \delta_w(\bar{w})}{D_f(w) + D_f(\bar{w})} \right) \left(\sum_{\bar{w} \in W} \delta_w(\bar{w}) \right)^{-1}$$

2. Гравитационная конструкция

$$\mu D_f(f) = \frac{D_f(w)}{D_f(w) + \overline{D_f(w)}}$$

где

$$\overline{D_f(w)} = \frac{\sum_{\bar{w} \in W} D_f(\bar{w}) \delta_w(\bar{w})}{\sum_{\bar{w} \in W} \delta_w(\bar{w})}$$

3. Сигма-конструкция

$$\mu D_f(w) = \frac{\sigma^l(\text{Im}_w D_f, D_f(w))}{\sigma^l(\text{Im}_w D_f, D_f(w)) + \sigma^r(\text{Im}_w D_f, D_f(w))}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma^l(\text{Im}_w D_f, D_f(w)) &= \sum_{\bar{w} \in W} (D_f(w) - D_f(\bar{w})) \delta_w(\bar{w}) : D_f(\bar{w}) < D_f(w) \\ \sigma^r(\text{Im}_w D_f, D_f(w)) &= \sum_{\bar{w} \in W} (D_f(\bar{w}) - D_f(w)) \delta_w(\bar{w}) : D_f(\bar{w}) > D_f(w) \end{aligned}$$

Меры максимальности являются третьим параметром исследования и, соединяясь с первыми двумя (мерами близости и динамическими показателями) дают меры аномальности, отвечающие на первый вопрос исследования в узком смысле только для динамического показателя. Общий ответ будет получен с привлечением нечеткой математики ниже.

6. Итоговая мера аномальности

Переход $D_f \rightarrow \mu D_f$ переводит анализ функции f на язык нечеткой логики и нечеткой математики: меры аномальности μD_f для разных показателей D принимают значения в единой шкале отрезка $[0, 1]$ и могут сочетаться в любых составах и любых количествах с помощью многочисленных операций нечеткой логики и всякого рода усреднений, которые мы обозначим через $*$. Становится возможным придать смысл сложной активности функции f по совокупности динамических показателей $\mathcal{D}$ в узле $w \in W$:

$$\mu \mathcal{D}_f(w) = *_{D \in \mathcal{D}}(\mu D_f(w))$$

Именно такой конструкцией в общем случае моделируется взгляд эксперта $\mathcal{E}$ на функцию f . Во многом такое моделирование является искусством и состоит в подборе базовых динамических показателей $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ и правильном их соединении $*(\mathcal{E})$:

$$\mu \mathcal{E}_f(w) = *(\mathcal{E})_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})}(\mu D_f(w))$$

ПРИМЕР 6.

1. Соединения $*$ с помощью нечеткой конъюнкции $\top$ дают возможность одновременно учесть все базовые динамики из $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ [14, 15]:

$$\mu \mathcal{E}_f(w) = \top_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})}(\mu D_f(w))$$

2. Соединения $*$ с помощью нечеткой дизъюнкции $\perp$ дают возможность проявить себя каждой базовой динамике из $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ [14, 15]:

$$\mu \mathcal{E}_f(w) = \perp_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})}(\mu D_f(w))$$

3. Соединение $*$ с помощью усреднения дает возможность учесть веса $\omega(D)$ базовых динамик из $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, с которыми эксперт $\mathcal{E}$ к ним относится:

$$\mu \mathcal{E}_f(w) = \frac{\sum_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})} \omega(D) \mu D_f(w)}{\sum_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})} \omega(D)}$$

Итоговая мера аномальности $\mu \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ для системы функций $\mathcal{F}$ получается соединением мер аномальности $\mu \mathcal{E}_f$ по всем $f \in \mathcal{F}$:

$$\mu \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(w) = *(\mathcal{E})_{f \in \mathcal{F}}$$

Значение $\mu \mathcal{E}_f(w)$ – степень интереса к узлу w эксперта $\mathcal{E}$ (степень $\mathcal{E}$ – аномальности w) и полный ответ на первый вопрос, поставленный во введении. Мера $\mu \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ дает нам ключ к точечным $\mathcal{E}$ -аномалиям. Мы считаем $\mathcal{E}$ -аномальными для $\mathcal{F}$ узлы $w \in W$, в которых $\mu \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(w) \geq 0.75$. Это достаточно естественно, т.к. если некоторое свойство выражено в шкале $[0, 1]$, то его проявления, попадающие в отрезок $[0.75, 1]$, выглядят аномальными.

Соединения $*(\mathcal{E})$, преобразующие меры аномальности μD_f для отдельных динамических показателей D и отдельных функций f в итоговую меру аномальности $\mu \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ системы $\mathcal{F}$ – четвертый параметр исследования.

В силу произвольности системы функций $\mathcal{F}$ $\mathcal{E}$ -аномальные узлы для нее могут представлять собой подмножество в W , нуждающееся в дополнительной работе (предварительной «топологической» фильтрации и последующей кластеризации). Несомненный интерес в W представляют подмножества, являющиеся основаниями возвышенностей меры $\mu \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$. В этом нам поможет DPS.

7. Функциональный алгоритм DPS и $\mathcal{E}$ -аномалии для системы $\mathcal{F}$

Пусть $A, B \subset W$ и $w \in W$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Плотность $P(A, w)$ на множестве W – это отображение произведения $2^W \times W$ в отрезок $[0, 1]$, возрастающее по первому аргументу:

$$\forall w, A \subset B \Rightarrow P(A, w) \leq P(B, w)$$

Значение $P(A, w)$ называется плотностью подмножества A в w и в дальнейшем будет обозначаться через $P_A(w)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Подмножество A называется α -совершенным в W для $\alpha \in [0, 1]$, если

$$A = \{w \in W : P_A(w) \geq \alpha\}$$

Процесс построения в W максимального α -совершенного подмножества $W(\alpha)$ осуществляется обычным алгоритмом DPS (Discrete Perfect Sets) [11, 12]:

$$W(\alpha) = \text{DPS}(W|P, \alpha)$$

Подмножество $W(\alpha)$ получается в результате пересечения

$$W(\alpha) = \bigcap_{k=1}^{\infty} W^k(\alpha)$$

где

$$W^{k+1}(\alpha) = \{w \in W^k(\alpha) : P_{W^k(\alpha)}(w) \geq \alpha\}$$

Пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty}$ обязательно достигается, потому что всегда является конечным в силу конечности W и вложенности $W^{k+1}(\alpha)$ в $W^k(\alpha)$ при всех $k = 0, 1, \dots$

Функциональный DPS связан со специальной плотностью $P = P(\Psi, r)$, в основе которой лежит функция $\Psi: W \rightarrow [0, 1]$ и локализация радиуса r :

$$P_A(w) = \frac{\sum \Psi(\bar{w}) : \bar{w} \in D_A(w, r)}{|D_A(w, r)|}$$

где $D_A(w, r)$ замкнутый шар в A с центром в w радиуса r :

$$D_A(w, r) = \{\bar{w} \in A : \|\bar{w} - w\| \leq r\}$$

Результат $W(\alpha)$ работы такого алгоритма DPS представляет собой максимальное подмножество в W , на котором функция Ψ r -локально в среднем $\geq \alpha$.

Если $W(\alpha)/N = \left\{W_i(\alpha)|_{i=1}^{I(\alpha)}\right\}$, $W(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{I(\alpha)} W_i(\alpha)$ разбиение $W(\alpha)$ на компоненты связности по отношению соседства узлов N , введенному в начале, то при условии нетривиальности $W(\alpha)$ при $\alpha \in [0.75, 1]$ фрагменты $W_i(\alpha)$ будут интересны как связные подмножества в W , на которых функция Ψ аномальна.

Беря в качестве Ψ меру аномальности $\mu_{\mathcal{EF}}$, мы получаем ответ на второй вопрос введения статьи об $\mathcal{E}$ -аномалиях для $\mathcal{F}$ в W . Радиус локализации r в функциональном DPS – пятый и последний параметр исследования.

Заметим, что этап кластеризации, в отличие от всех остальных этапов, не всегда обязателен в исследовании: если мера аномальности $\mu_{\mathcal{EF}}$ устроена хорошо и эксперту $\mathcal{E}$ несложно принять решение об аномальных областях в W непосредственно по ней, то DPS не нужен. Именно с такой ситуацией мы столкнемся в приведенных ниже примерах.

8. Примеры

Покажем как все работает на примере двух рельефов (неотрицательных функций) f_1 и f_2 , заданных на квадрате $W = \{(i, j) : 0 \leq i, j \leq 200\}$ (рис. 4). Функция f_1 имеет две возвышенности в окрестностях узлов $w_1 = (40, 40)$ и $w_2 = (40, 160)$ и плоский участок в окрестности узла $w_3 = (140, 150)$. Вторая функция f_2 имеет возвышенность в окрестности узла w_1 и плоские участки в окрестностях узлов w_2 и w_3 .

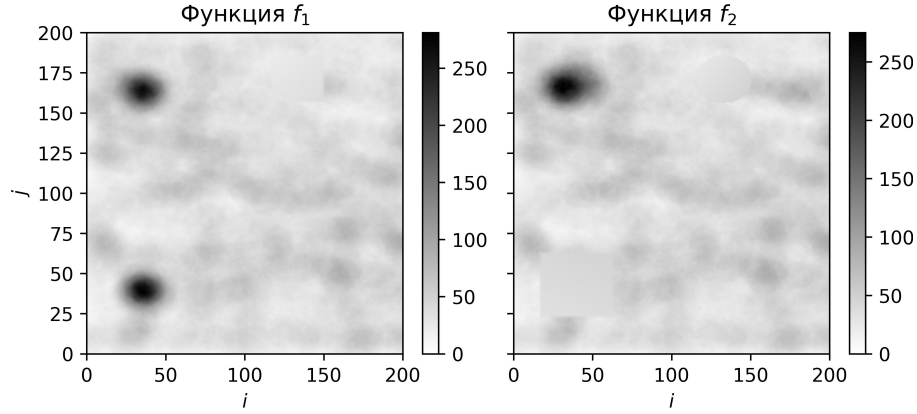


Рис. 4: Функции f_1 и f_2

Предположим, что эксперт $\mathcal{E}$ имеет две точки зрения на функции f_1 и f_2 : локальный разброс (8) и локальная линейность (11), но в разных сочетаниях.

Таким образом,

$$\mathcal{F} = \{f_i|_1^2\}, f_i : W \longrightarrow \mathbb{R}^+; D_{f_1}, D_{f_2} \in \{Q(w|\delta, q), R(w|\delta)\}.$$

Мера близости δ предполагается локальной (4) с $r = 2$ и $p = 1$, показатель q (8) равным единице.

ПРИМЕР 7. $D_{f_1} = Q_{f_1}(w|\delta, 1)$, $D_{f_2} = Q_{f_2}(w|\delta, 1)$

Эксперта интересует участок $\bar{W}$ из W , на котором обе функции имеют аномально большой разброс. Программа исследования в этом случае последовательно представлена на рис. 5:

- Динамические показатели: Q_{f_1} (рис. 5а) и Q_{f_2} (рис. 5б);
- Меры аномальности: μQ_{f_1} (рис. 5в) и μQ_{f_2} (рис. 5г);
- Итоговая мера аномальности: $\mu \mathcal{F} = \min(\mu Q_{f_1}, \mu Q_{f_2})$ (рис. 5д);
- $\bar{W}$ – окрестность узла w_2 .

ПРИМЕР 8. $D_{f_1} = R_{f_1}(w|\delta)$, $D_{f_2} = R_{f_2}(w|\delta)$

Эксперта интересует участок $\bar{W}$ из W , на котором обе функции максимально линейны. Программа исследования в этом случае последовательно представлена на рис. 6:

- Динамические показатели: R_{f_1} (рис. 6а) и R_{f_2} (рис. 6б);
- Меры аномальности будут нечеткими отрицаниями $\neg \mu R_{f_1} = 1 - \mu R_{f_1}$ (рис. 6в) и $\neg \mu R_{f_2} = 1 - \mu R_{f_2}$ (рис. 6г), поскольку в данном случае нас интересуют малые значения локальной линейности;

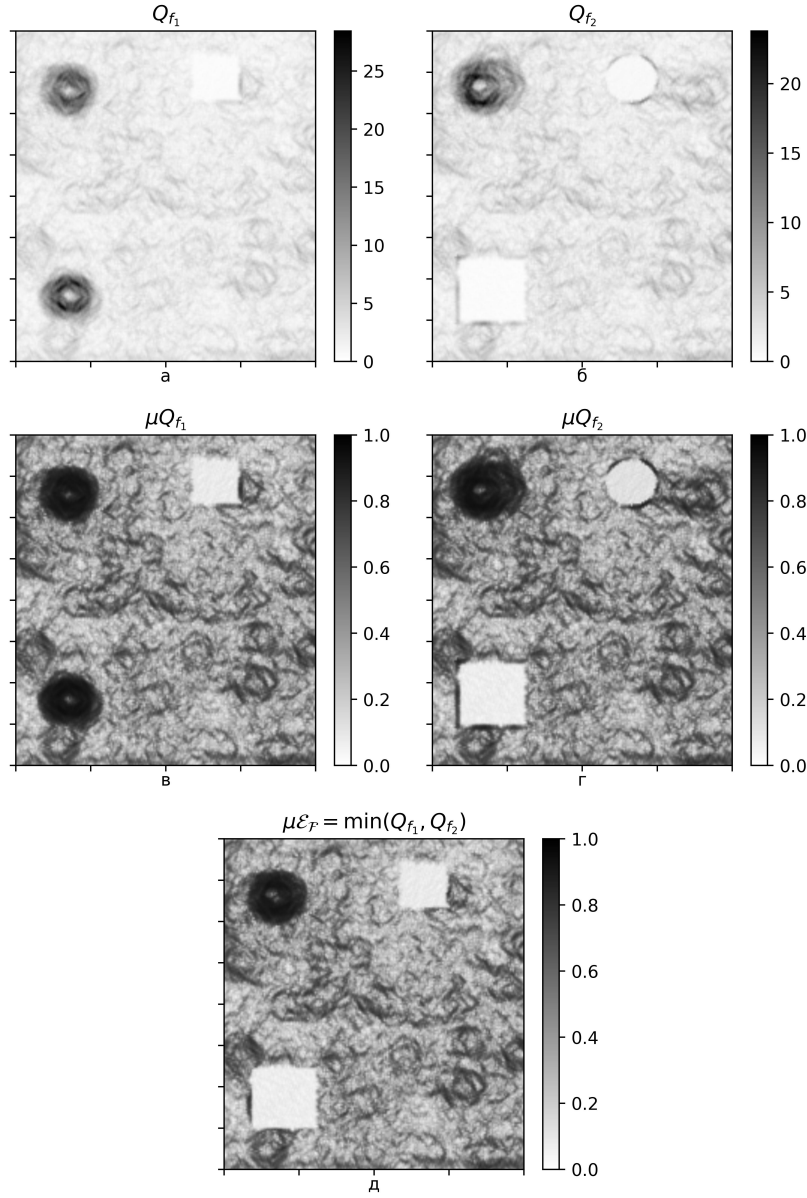


Рис. 5: Исследование системы $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ с $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \{Q_{f_1}(w|\delta, 1), Q_{f_2}(w|\delta, 1)\}$

- Итоговая мера аномальности: $\mu\mathcal{E}_{\mathcal{F}} = \min(\neg\mu R_{f_1}, \neg\mu R_{f_2})$ (рис. 6д);

- $\overline{W}$ – окрестность узла w_3 .

ПРИМЕР 9. $D_{f_1} = Q_{f_1}(w|\delta, 1)$, $D_{f_2} = R_{f_2}(w|\delta)$

Эксперта интересует участок $\overline{W}$ из W , на котором функция f_1 имеет аномально большой разброс, а функция f_2 – максимально линейна. Программа исследования в этом случае последовательно представлена на рис. 7:

- Динамические показатели: Q_{f_1} (рис. 7а) и R_{f_2} (рис. 7б);
- Меры аномальности: μQ_{f_1} (рис. 5в) и $\neg\mu R_{f_2} = 1 - \mu R_{f_2}$ (рис. 7г);
- Итоговая мера аномальности: $\mu\mathcal{E}_{\mathcal{F}} = \min(\mu Q_{f_1}, \neg\mu R_{f_2})$ (рис. 7д);
- $\overline{W}$ – окрестность узла w_1 .

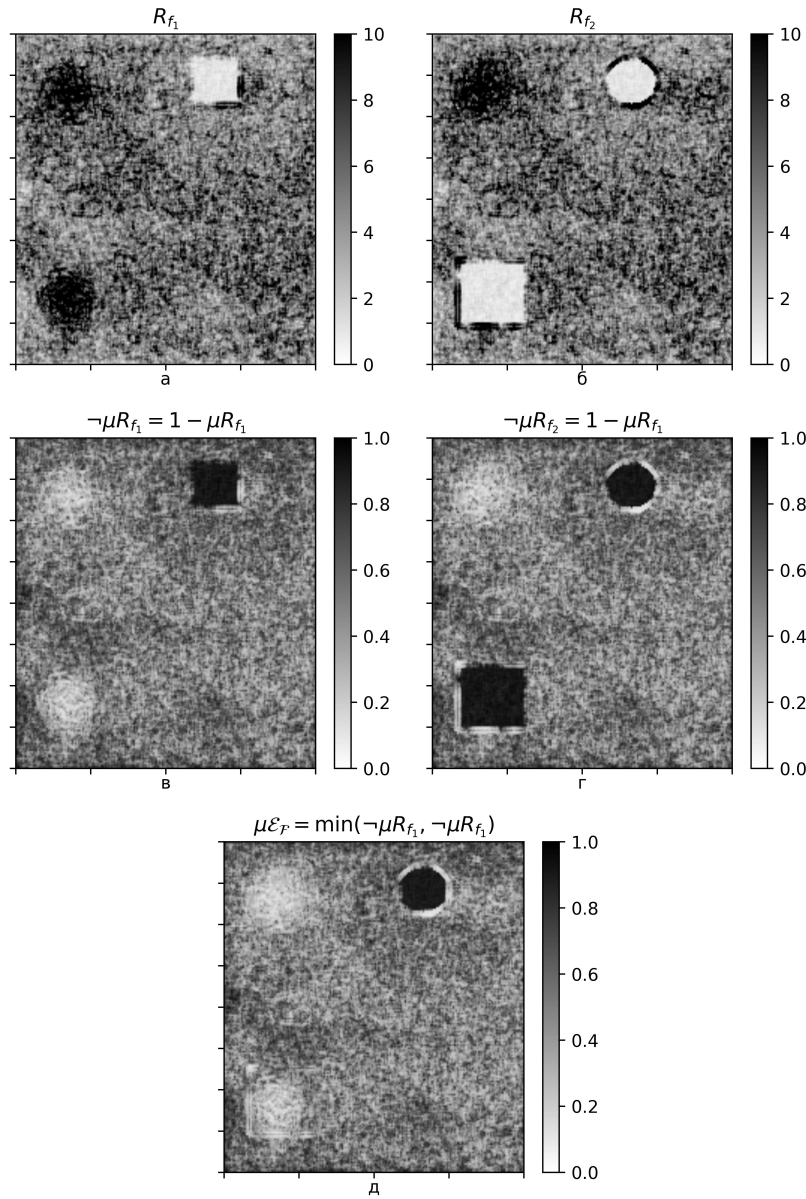


Рис. 6: Исследование системы $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ с $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \{R_{f_1}(w|\delta), R_{f_2}(w|\delta)\}$

9. Заключение

Подведем итог изложенному выше в виде схемы на рис. 8 и сделаем несколько заключительных замечаний

Одномерная версия схемы: W – дискретное время, $\mathcal{F}$ – временной ряд f на W , один динамический показатель – это современная версия логики интерпретатора, позволяющая с позиций НМ и НЛ подойти к фундаментальной задаче об аномалиях на временных рядах [16, 17, 18, 19, 20, 21].

Динамические показатели могут быть двух типов. Первый тип имеет дело с функцией непосредственно, и именно такие показатели приведены выше (7-11). Второй тип имеет дело с функцией опосредованно через какое-либо преобразование, например, через преобразование Фурье или вейвлет-преобразование [22], и может быть количественной характеристикой соответствующего спектра.

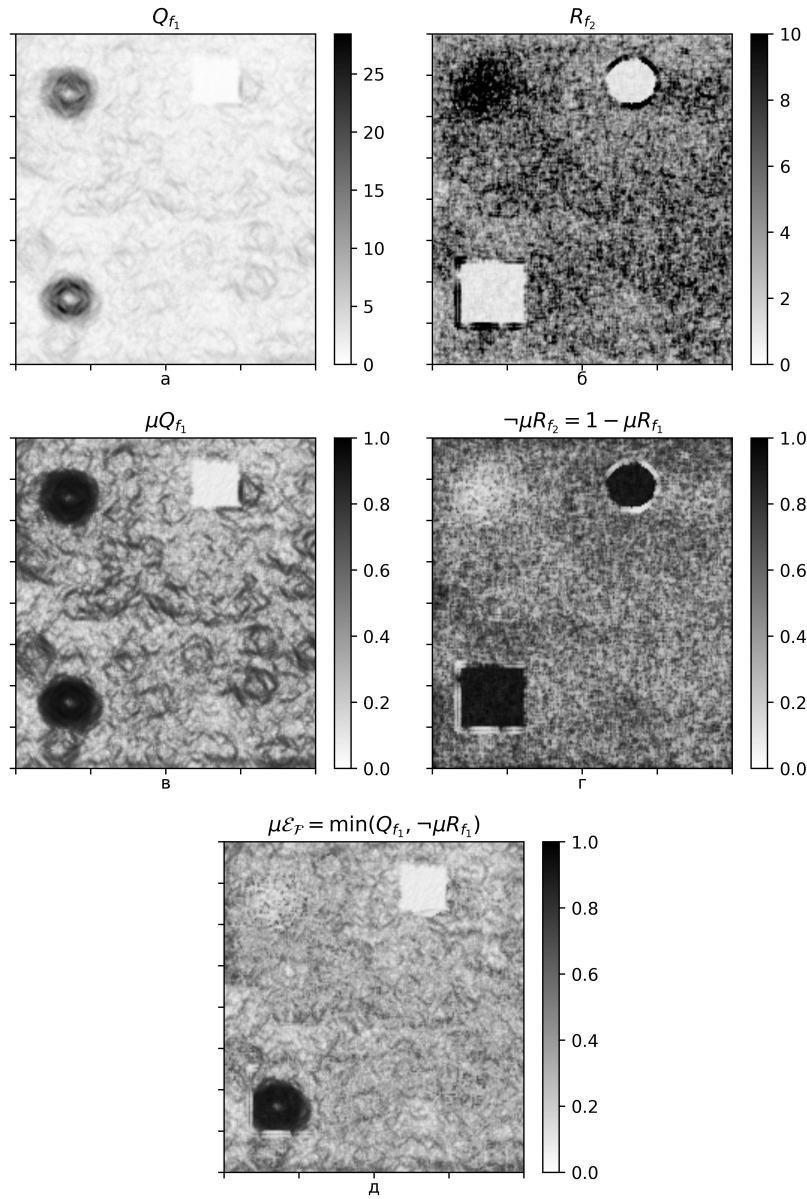


Рис. 7: Исследование системы $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ с $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \{Q_{f_1}(w|\delta, 1), R_{f_2}(w|\delta)\}$

Схема показывает, что преобразование $\mathcal{F} \rightarrow \mu\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ переводит векторный анализ относительно системы функций $\mathcal{F}$ в скалярный анализ относительно итоговой меры аномальности $\mu\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$.

Все это до известной степени напоминает ситуацию в теории принятия решений, когда многокритериальная задача выбора сводится к скалярному выбору относительно, так называемой, функции полезности [23].

На заключительной стадии исследования возникает задача выделения возвышенностей по мере $\mu\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$. Алгоритм DPS дает оригинальное решение этой фундаментальной в анализе данных задачи (см., например, выделение ярких фрагментов на изображениях в Image Processing [24]).

Работа выполнена в рамках проекта Российского научного фонда № 18-17-00241 “Исследование устойчивости породных массивов на основе системного анализа геодинамических процессов для геоэкологически безопасной подземной изоляции радиоактивных отходов”.

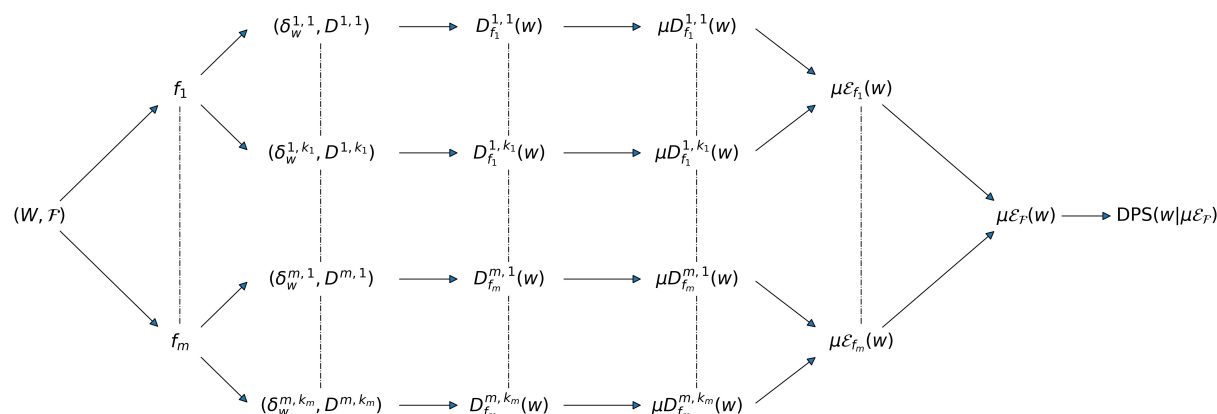


Рис. 8: Схема исследования

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gvishiani A. D., Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Tikhotsky S. A., Hinderer J., Bonnin J., Diamant M. Algorithm FLARS and recognition of time series anomalies // System Research & Information Technologies. 2004. № 3. P. 7–16.
2. Гвишиани А.Д., Диамант М., Михайлов В.О., Гальдеано А., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Граева Е.М. Алгоритмы искусственного интеллекта для кластеризации магнитных аномалий // Физика Земли. 2002. № 7. С. 13–28.
3. Mikhailov V., Galdeano A., Diamant M., Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov Sh., Graeva E., Sailhac P. Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering // Geophysics. 2003. Vol. 68, № 1. P. 168–180.
4. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р. Определение аномалий на временных рядах методами нечеткого распознавания // Доклады Академии наук. 2008. Т.421, № 1. С. 101–105.
5. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Злотники Ж., Боннин Ж. Математические методы геоинформатики. III. Нечеткие сравнения и распознавание аномалий на временных рядах // Кибернетика и системный анализ. 2008. Т.44, № 3. С. 3–18.
6. Agayan S., Bogoutdinov Sh., Soloviev A., Sidorov R. The Study of Time Series Using the DMA Methods and Geophysical Applications // Data Science Journal. 2016. P. 1–21, DOI: <http://dx.doi.org/10.5334/dsj-2016-014>
7. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Добровольский М.Н., Дзобоев Б.А. Объективная классификация эпицентров и распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений в Калифорнии // Геоинформатика. 2013. № 2. С. 44–57.
8. Гвишиани А.Д., Дзобоев Б.А., Агаян С.М. О новом подходе к распознаванию мест возможного возникновения сильных землетрясений на Кавказе // Физика Земли. 2013. № 6. С. 3–19. DOI: 10.7868/S0002333713060045

9. Гвишиани А. Д., Агаян С. М., Дзебоев Б. А., Белов И. О. О Распознавание мест возможного возникновения эпицентров сильных землетрясений с одним классом обучения // Доклады академии наук. 2017. Т. 474, № 1. С. 86–92. DOI: 10.7867/S0869565217130175
10. Камнев Е. Н., Морозов В. Н., Шишиц И. Ю. Выбор площадок для захоронения радиоактивных отходов в геологических формациях // М.: Изд-во «Горная книга». 2012. 207 с.
11. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Добровольский М. Н. Об одном алгоритме поиска плотных областей и его геофизических приложениях // Доклады 15-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов. ММРО-15». 2011. С. 543–546.
12. Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Добровольский М. Н. Дискретные совершенные множества и их применение в кластерном анализе // Кибернетика и системный анализ. 2014. № 2. С. 17–32.
13. Агаян С. М., Соловьев А. А., Богоутдинов Ш. Р., Николова Ю. И. Регрессионные производные и их применение в изучении геомагнитных джерков // Геомагнетизм и аэрономия. 2019. В печати.
14. Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф., Силов В. Б., Тарасов В. Б. (Под редакцией Д. А. Пospelова). Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта // М.: Наука, 1986. 312 с.
15. Соловьев А. А. Методы геоинформатики и нечеткой математики в анализе геофизических данных // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4. С. 194–214. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-4-194-214
16. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники // М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
17. Кедров О. К., Пермякова В. Е., Поликарпова Л. А., Стеблов Г. М. Методы обнаружения слабых сейсмических явлений в пределах платформ // М.: ОИФЗ РАН, 2000. 101 с.
18. Кушнир А. Ф., Мостовой С. В. Статистический анализ геофизических полей // Киев: Наукова думка, 1990. 276 с.
19. Haries H. P., Joswig M. Signal detection by pattern recognition methods, in A Twenty-Five Years Review of Basic Research (edited by A. U. Kerr and D. L. Carlson) // Publisher USA. 1985. P. 579–584.
20. Romeo G. Seismic signals detection and classification using artificial neural networks // Annali di geofisica. 1994. Vol. XXXVII, № 3. P. 343–353.
21. Boschetti F., Dentith M., List R. A fractal based algorithm for detecting first arrivals on seismic traces // Geophysics. 1996. Vol. 61, № 4, P. 10951102. DOI: doi.org/10.1190/1.1444030
22. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов // М.: Мир, 2005. 671 с.
23. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений // М.: Наука, 1978. 352 с.
24. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений // М.: Техносфера, 2005. 1072 с.

REFERENCES

1. Gvishiani, A. D., Agayan, S. M., Bogoutdinov, Sh. R., Tikhotsky, S. A., Hinderer, J., Bonnin, J., Diamant, M. 2004, "Algorithm FLARS and recognition of time series anomalies", *System Research & Information Technologies*, no. 3, pp. 7–16.
2. Гвишиани, А. Д., Диамант, М., Михайлов, В. О., Гальдеано, А., Агаян, С. М., Богоутдинов, Ш. Р., Граева, Е. М. 2002, "Алгоритмы искусственного интеллекта для кластеризации магнитных аномалий", *Физика Земли*, № 7, С. 13–28.
3. Mikhailov, V., Galdeano, A., Diamant, M., Gvishiani, A., Agayan, S., Bogoutdinov, Sh., Graeva, E., Sailhas, P. 2003, "Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering", *Geophysics*, Vol. 68, № 1, P. 168–180.
4. Гвишиани, А. Д., Агаян, С. М., Богоутдинов, Ш. Р. 2008, "Определение аномалий на временных рядах методами нечеткого распознавания", *Доклады Академии наук*, Т. 421, № 1, С. 101–105.
5. Гвишиани, А. Д., Агаян, С. М., Богоутдинов, Ш. Р., Злотники, Ж., Боннин, Ж. 2008, "Математические методы геоинформатики. III. Нечеткие сравнения и распознавание аномалий на временных рядах", *Кибернетика и системный анализ*, Т. 44, № 3, С. 3–18.
6. Agayan, S., Bogoutdinov, Sh., Soloviev, A., Sidorov, R. 2016, "The Study of Time Series Using the DMA Methods and Geophysical Applications", *Data Science Journal*, P. 1–21, DOI: <http://dx.doi.org/10.5334/dsj-2016-014>
7. Гвишиани, А. Д., Агаян, С. М., Добровольский, М. Н., Дзобоев, Б. А. 2013, "Объективная классификация эпицентров и распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений в Калифорнии", *Геоинформатика*, № 2, С. 44–57.
8. Гвишиани, А. Д., Дзобоев, Б. А., Агаян, С. М. 2013, "О новом подходе к распознаванию мест возможного возникновения сильных землетрясений на Кавказе", *Физика Земли*, № 6, С. 3–19, DOI: 10.7868/S0002333713060045
9. Гвишиани, А. Д., Агаян, С. М., Дзобоев, Б. А., Белов, И. О. 2017, "О Распознавание мест возможного возникновения эпицентров сильных землетрясений с одним классом обучения", *Доклады академии наук*, Т. 474, № 1, С. 86–92, DOI: 10.7867/S0869565217130175
10. Камнев, Е. Н., Морозов, В. Н., Шишиц, И. Ю. 2012, "Выбор площадок для захоронения радиоактивных отходов в геологических формациях", *М.: Изд-во «Горная книга»*, 207 с.
11. Агаян, С. М., Богоутдинов, Ш. Р., Добровольский, М. Н. 2011, "Об одном алгоритме поиска плотных областей и его геофизических приложениях", *Доклады 15-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов. ММРО-15»*, С. 543–546.
12. Агаян, С. М., Богоутдинов, Ш. Р., Добровольский, М. Н. 2014, "Дискретные совершенные множества и их применение в кластерном анализе", *Кибернетика и системный анализ*, № 2, С. 17–32.
13. Агаян, С. М., Соловьев, А. А., Богоутдинов, Ш. Р., Николова, Ю. И. 2019, "Регрессионные производные и их применение в изучении геомагнитных джерков", *Геомагнетизм и аэрономия*, В печати.

14. Аверкин, А. Н., Батыршин, И. З., Блишун, А. Ф., Силов, В. Б., Тарасов, В. Б. (Под редакцией Д. А. Поспелова). 1986, “Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта“, *М.: Наука*, 312 с.
15. Соловьев, А. А. 2018, “Методы геоинформатики и нечеткой математики в анализе геофизических данных“, *Чебышевский сборник*, Т. 19, вып. 4, С. 194–214, DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-4-194-214
16. Левин, Б. Р. 1989, “Теоретические основы статистической радиотехники“, *М.: Радио и связь*, 656 с.
17. Кедров, О. К., Пермьякова, В. Е., Поликарпова, Л. А., Стеблов, Г. М. 2000, “Методы обнаружения слабых сейсмических явлений в пределах платформ“, *М.: ОИФЗ РАН*, 101 с.
18. Кушнир, А. Ф., Мостовой, С. В. 1990, “Статистический анализ геофизических полей“, *Киев: Наукова думка*, 276 с.
19. Haries, H. P., Joswig, M. 1985, “Signal detection by pattern recognition methods, in A Twenty-Five Years Review of Basic Research (edited by A. U. Kerr and D. L. Carlson)“, *Publisher USA*, P. 579–584.
20. Romeo, G. 1994, “Seismic signals detection and classification using artificial neural networks“, *Annali di geofisica*, Vol. XXXVII, № 3, P. 343–353.
21. Boschetti, F., Dentith, M., List, R. 1996, “A fractal based algorithm for detecting first arrivals on seismic traces“, *Geophysics*, Vol. 61, № 4, P. 1095–1102, DOI: doi.org/10.1190/1.1444030
22. Малла, С. 2005, “Вейвлеты в обработке сигналов“, *М.: Мир*, 671 с.
23. Фишберн, П. 1978, “Теория полезности для принятия решений“, *М.: Наука*, 352 с.
24. Гонсалес, Р., Вудс, Р. 2005, “Цифровая обработка изображений“, *М.: Техносфера*, 1072 с.

Получено 02.02.2019

Принято к печати 10.04.2019

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-112-130

 p -адические L -функции и p -адические кратные дзета значения

Н. М. Глазунов

Глазунов Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Национальный Авиационный Университет, г. Киев (Украина).

Аннотация

Статья посвящена памяти Георгия Вороного. Описываются новые избранные результаты о рядах Эйзенштейна, о (мотивных), (p -адических), (кратных) значениях (круговых) дзета и L -функций, и их приложения, полученные ниже перечисляемыми авторами, а также элементарное введение в эти результаты. Дан краткий обзор новых результатов о (мотивных), (p -адических), (кратных) значениях (круговых) дзета функциях, L -функциях и рядах Эйзенштейна. Статья ориентирована на избранные задачи и не является исчерпывающей. Начало статьи содержит краткое изложение результатов о числах Бернулли, связанных с исследованиями Георгия Вороного. Результаты о кратных значениях дзета функций были представлены Д. Загиром, П. Делинем и А. Гончаровым, А. Гончаровым, Ф. Брауном, К. Глэнсом (Glanois) и другими. С. Унвер ("Unver) исследовал кратные p -адические дзета-значения глубины два. Таннакиева интерпретация кратных p -адических дзета-значений дана Х. Фурушо. Краткая история и связи между группами Галуа, фундаментальными группами, мотивами и арифметическими функциями представлены в докладе Ю. Ихара. Результаты о кратных дзета-значениях, группах Галуа и геометрии модулярных многообразий представлены Гончаровым. Интересная унитарная мотивная фундаментальная группа определена и исследована Делинем и Гончаровым. В данной работе мы кратко упоминаем в рамках (p -адических) L -функций и (p -адических) (кратных) дзета-значений применения подходов Куботы-Леопольдта и Ивасава, которые основаны на P -адических L -функциях Куботы-Леопольдта, и арифметических p -адических L -функциях Ивасава. Прореферирован ряд недавних работ (и соответствующих результатов): кратные дзета-значения в корнях из единицы, построение семейств мотивных итерированных интегралов с предписанными свойствами по Глэносу (Glanois); явные выражения для круговых p -адических кратных дзета-значений глубины два по Унверу (Unver); связи арифметических степеней циклов Кудлы-Рапопорта на интегральной модели многообразия Шимуры, соответствующей унитарной группе сигнатуры (1,1), с коэффициентами Фурье центральных производных рядов Эйзенштейна рода 2 по Санкарану (Sankaran). Более полно с содержанием статьи можно ознакомиться по приводимому ниже оглавлению: Введение. 1. Сравнения типа Вороного для чисел Бернулли. 2. Римановы дзета-значения. 3. О группах классов колец с теорией дивизоров. Мнимые квадратичные и круговые поля. 4. Ряды Эйзенштейна. 5. Группы классов, поля классов и дзета-функции. 6. Кратные дзета-значения. 7. Элементы неархимедовых локальных полей и неархимедова анализа. 8. Итерированные интегралы и (кратные) дзета-значения. 9. Формальные и p -делимые группы. 10. Мотивы и (p -адические) (кратные) дзета-значения. 11. О рядах Эйзенштейна, ассоциированных с многообразиями Шимуры. Разделы 1-9 и подраздел 11.1 (О некоторых многообразиях Шимуры и модулярных формах Зигеля) можно рассматривать как элементарное введение в результаты раздела 10 и подраздела 11.2 (О несобственном пересечении дивизоров Кудлы-Рапопорта и рядах Эйзенштейна).

Я глубоко признателен Н. М. Добровольскому за помощь и поддержку в процессе подготовки статьи к печати.

Ключевые слова: p -адическая интерполяция; (p -адическая) L -функция; ряд Эйзенштейна; изоморфизм сравнения; кристаллический морфизм Фробениуса; фундаментальная группа де Рама; (p -адическое) кратное дзета-значение; геория Ивасава; многообразие Шимуры; арифметические циклы.

Библиография: 43 названия.

Для цитирования:

Н. М. Глазунов. p -адические L -функции и p -адические кратные дзета значения // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 112–130.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-112-130

p -adic L -functions and p -adic multiple zeta values

N. M. Glazunov

Glazunov Nikolay Mihaylovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, National Aviation University, Kiev (Ukraine).

Abstract

The article is dedicated to the memory of George Voronoi. It is concerned with (p -adic) L -functions (in partially (p -adic) zeta functions) and cyclotomic (p -adic) (multiple) zeta values. The beginning of the article contains a short summary of the results on the Bernoulli numbers associated with the studies of George Voronoi. Results on multiple zeta values have presented by D. Zagier, by P. Deligne and A. Goncharov, by A. Goncharov, by F. Brown, by C. Glanois and others. S. Ünver have investigated p -adic multiple zeta values in the depth two. Tannakian interpretation of p -adic multiple zeta values is given by H. Furusho. Short history and connections among Galois groups, fundamental groups, motives and arithmetic functions are presented in the talk by Y. Ihara. Results on multiple zeta values, Galois groups and geometry of modular varieties has presented by Goncharov. Interesting unipotent motivic fundamental group is defined and investigated by Deligne and Goncharov. The framework of (p -adic) L -functions and (p -adic) (multiple) zeta values is based on Kubota-Leopoldt p -adic L -functions and arithmetic p -adic L -functions by Iwasawa. Motives and (p -adic) (multiple) zeta values by Glanois and by Ünver, improper intersections of Kudla-Rapoport divisors and Eisenstein series by Sankaran are reviewed. More fully the content of the article can be found at the following table of contents: Introduction. 1. Voronoi-type congruences for Bernoulli numbers. 2. Riemann zeta values. 3. On class groups of rings with divisor theory. Imaginary quadratic and cyclotomic fields. 4. Eisenstein Series. 5. Class group, class fields and zeta functions. 6. Multiple zeta values. 7. Elements of non-Archimedean local fields and p -adic analysis. 8. Iterated integrals and (multiple) zeta values. 9. Formal groups and p -divisible groups. 10. Motives and (p -adic) (multiple) zeta values. 11. On the Eisenstein series associated with Shimura varieties. Sections 1-9 and subsection 11.1 (On some Shimura varieties and Siegel modular forms) can be considered as an elementary introduction to the results of section 10 and subsection 11.2 (On improper intersections of Kudla-Rapoport divisors and Eisenstein series). Numerical examples are included.

Keywords: p -adic interpolation; (p -adic) L -function; Eisenstein Series; comparison isomorphism; crystalline Frobenius morphism; de Rham fundamental group; (p -adic) multiple zeta value; Iwasawa theory; Shimura variety; arithmetic cycles.

Bibliography: 43 titles.

For citation:

N. M. Glazunov, 2019, " p -adic L -functions and p -adic multiple zeta values", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 112–130.

Introduction

The article is dedicated to the memory of George Voronoi. It is concerned with (p -adic) L -functions (in partially (p -adic) zeta functions) and cyclotomic (p -adic) (multiple) zeta values. The beginning of the article contains a short summary of the results on the Bernoulli numbers associated with the studies of George Voronoi. Results on multiple zeta values have presented by D. Zagier [1], by P. Deligne and A. Goncharov [5], by A. Goncharov [6], by F. Brown [7], by C. Glanois [8] and others. Tannakian interpretation of p -adic multiple zeta values is given by H. Furusho [10]. Short history and connections among Galois groups, fundamental groups, motives and arithmetic functions are presented in the talk by Y. Ihara [12]. Results on multiple zeta values, Galois groups and geometry of modular varieties has presented by Goncharov [6]. Interesting unipotent motivic fundamental group is defined and investigated by Deligne and Goncharov [5]. S. Ünver [9, 11] have investigated p -adic multiple zeta values in the depth two. The framework of (p -adic) L -functions and (p -adic) (multiple) zeta values is based on Kubota-Leopoldt p -adic L -functions [13] and arithmetic p -adic L -functions by Iwasawa [14]. Motives and (p -adic) (multiple) zeta values, improper intersections of Kudla-Rapoport divisors and Eisenstein series by Sankaran [37] are reviewed. More fully the content of the article can be found at the following table of contents: Introduction. 1. Voronoi-type congruences for Bernoulli numbers. 2. Riemann zeta values. 3. On class groups of rings with divisor theory. Imaginary quadratic and cyclotomic fields. 4. Eisenstein Series. 5. Class group, class fields and zeta functions. 6. Multiple zeta values. 7. Elements of non-Archimedean local fields and p -adic analysis. 8. Iterated integrals and (multiple) zeta values. 9. Formal groups and p -divisible groups. 10. Motives and (p -adic) (multiple) zeta values. 11. On the Eisenstein series associated with Shimura varieties. Sections 1-9 and subsection 11.1 (On some Shimura varieties and Siegel modular forms) can be considered as an elementary introduction to the results of section 10 and subsection 11.2 (On improper intersections of Kudla-Rapoport divisors and Eisenstein series). Numerical examples are included.

The subject matter of this review has deep historical roots, with contributions of many mathematicians. I apologize for any oversights and any misrepresentations, which are not intentional but rather due to my ignorance.

REMARK 1. *Let me now present very briefly the background of my interest on the subject of the values of zeta and L -functions. In 1970-1971 years Yu. Manin gave courses of lectures and seminars on Algebraic Geometry, Diophantine Geometry in MGU and in Steklov mathematical institute. In his lectures and talks Yu. Manin presented and discussed the Birch-Swinnerton-Dyer conjecture concerning L -functions of elliptic curves and abelian varieties. In particular Yu. Manin have proposed in these talks modular symbols for computation of values of L -functions of elliptic curves at $s = 1$ [2, 3]. Author of the text attended the lectures and seminars of Yu. Manin. Following of the kind conversation with Yu. Manin the author has implemented the computer program and has computed Manin's modular symbols [39] for elliptic curve $E_{\Gamma_0(11)}$ follow to Manin article [2].*

1. Voronoi-type congruences for Bernoulli numbers

We follow to [18, 19].

1.1. Bernoulli numbers

Bernoulli numbers B_m are determined for integers $m \geq 0$ by the expansion

$$\frac{t}{\exp(t) - 1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m!} t^m.$$

REMARK 2. For $m > 0$, $B_{2m+1} = 0$.

So we have $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, \dots$

1.2. Voronoi's congruences

Let N be an natural number (the modulus), a coprime with N and let $B_{2m} = \frac{P_{2m}}{Q_{2m}}$ be the Bernoulli number with coprime P_{2m} and Q_{2m} . Then

$$(a^{2m} - 1)P_{2m} \equiv 2ma^{2m-1}Q_{2m} \sum_{s=1}^{N-1} s^{2m-1} \left[\frac{sa}{N} \right] \pmod{N}.$$

1.3. Kummer congruences

If p is prime and $p-1$ not divide even positive m then the number $\frac{B_m}{m}$ is p -integer and there is the congruence

$$\frac{B_{m+p-1}}{m+p-1} \equiv \frac{B_m}{m} \pmod{p}.$$

2. Riemann zeta values

Here we follow to [15, 16, 17, 18].

Let $s = \sigma + it$ be a complex number and let $\zeta(s)$ be the Riemann zeta function which is presented for $\sigma > 1$ by the series

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

;

By Euler for $m \geq 1$

$$\zeta(2m) = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}$$

where B_{2m} are Bernoulli numbers; recall also that

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1},$$

for odd $n = 1, 3, 5, \dots$

$$\zeta(1-2m) = -\frac{B_{2m}}{2m}, \text{ if } m > 0.$$

REMARK 3. (By Euler),

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7},$$

$$\zeta(-1) = -\frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12}, \zeta(-3) = \frac{1}{120}.$$

Define polylogarithm

$$L_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n n^{-m}.$$

REMARK 4.

$$\zeta(2) = L_2(1).$$

3. On class groups of rings with divisor theory. Imaginary quadratic and cyclotomic fields

The study of class groups of rings and corresponding schemes is an actual scientific problem (see [18, 20] and references therein). For regular local rings, according to the Auslander-Buchsbaum theorem, the (divisors) class group is trivial. But in most interesting cases the group is nontrivial. The Heegner approach, together with the results of Weber, Birch, Baker and Stark, makes it possible to calculate and even parametrize rings with a given (small) class number in some cases. Let R be a commutative ring with identity for which there exists the theory of divisors [18]. The order of the class group is calculated on the basis of the use of L -functions. We investigate one of the aspects of this problem, consisting in finding the moduli spaces of elliptic curves defined over the rings R with the given class number.

Problem. To investigate the case of elliptic curves over rings of integers of quadratic fields (rings of integers $\mathcal{O}$ of quadratic algebraic extensions k of the field of rational numbers $\mathbb{Q}$) with a small class number, see [18].

In some cases, for instance under computer algebra computations, we have to enumerate investigated objects. Some simple parametric spaces and moduli spaces in the case of imaginary quadratic fields are presented below [40]. We present an elementary introduction to this problem and give the moduli spaces as trivial bundles over affine part of the groups of rational points of some elliptic curves over the ring of integers $\mathbb{Z}$. Below we present parameter spaces and moduli for class number one and two. Let

$$E : y^2 = x^3 + ax + b, \text{ Disc}(E) = 4a^3 + 27b^2, \text{ Disc}(E) \neq 0, \quad (*)$$

be an elliptic curve over the ring $\mathcal{O}$. Let A_1 be the affine part of the group of rational points over $\mathbb{Z}$ of the Heegner elliptic curve $y^2 = 2x(x^3 + 1)$. With results by Heegner, Deuring, Birch, Baker, Stark, Kenku, Abrashkin, we deduce

PROPOSITION 1. *Let $\mathcal{O}$ be the ring of integers of the imaginary quadratic field with class number one. Then the parameter space of elliptic curves of the form $(*)$ is the trivial bundle*

$$(\mathcal{O} \times \mathcal{O} / (\text{Disc}(E) = 0)) \times A_1.$$

PROPOSITION 2. *Let k be the imaginary quadratic field with class number one. Then the moduli space of elliptic curves of the form $(*)$ is the trivial bundle*

$$k \times A_1.$$

Let A_2 be the affine part of the group of rational points over $\mathbb{Z}$ of the elliptic curve $X^3 + 3X = -Y^2$, let A_3 be the affine part of the group for the elliptic curve $X^3 - 3X = 2Y^2$, and A_4 respectively for $9X^4 - 1 = 2Y^2$.

PROPOSITION 3. *Let $\mathcal{O}$ be the ring of integers of the imaginary quadratic field with class number two. Then the parameter spaces of elliptic curves of the form $(*)$, without an exceptional case, are trivial bundles*

$$(\mathcal{O} \times \mathcal{O}/(\text{Disc}(E) = 0)) \times A_2, (\mathcal{O} \times \mathcal{O}/(\text{Disc}(E) = 0)) \times A_3, (\mathcal{O} \times \mathcal{O}/(\text{Disc}(E) = 0)) \times A_4.$$

PROPOSITION 4. *Let k be the imaginary quadratic field with class number two. Then the moduli spaces of elliptic curves of the form $(*)$, without an exceptional case, are the trivial bundles*

$$k \times A_2, k \times A_3, k \times A_4.$$

THEOREM 1. (The Kronecker-Weber theorem) *Every finite abelian extension of $\mathbb{Q}$ is contained in a cyclotomic field.*

With results by Heegner, Deuring, Birch, Baker, Stark, Shafarevich we have

PROPOSITION 5. *Imaginary quadratic fields with class number one and with discriminants $-D = 4, 8, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163$ are contained, respectively, in cyclotomic fields*

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\sqrt[4]{1}), \mathbb{Q}(\sqrt[8]{1}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{1}), \mathbb{Q}(\sqrt[7]{1}), \mathbb{Q}(\sqrt[11]{1}), \\ \mathbb{Q}(\sqrt[19]{1}), \mathbb{Q}(\sqrt[43]{1}), \mathbb{Q}(\sqrt[67]{1}), \mathbb{Q}(\sqrt[163]{1}). \end{aligned} \quad (1)$$

4. Eisenstein Series

Here we follow to [15, 16, 17, 18].

Let τ belong to the modular figure of the modular group $\Gamma = \Gamma(1)$.

DEFINITION 1. *In these notations with $k > 1$ the Eisenstein series is defined as*

$$c_k = \sum_{m \neq 0, k > 1} \frac{1}{(n + m\tau)^{2k}}.$$

PROPOSITION 6. *Eisenstein series have the representation*

$$c_k = 2\zeta(2k) + \frac{2(-2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n > 0, m > 0} n^{2k-1} q^{nm},$$

where $q = e^{2\pi i \tau} \neq 0$.

If we will use functions of the sums of divisors σ_{2k-1} we obtain

$$c_k = 2\zeta(2k) + \frac{2(-2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

or shortly

$$c_k = 2\zeta(2k) + \frac{2(-2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} S_{2k-1}.$$

As $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$ we have

$$\text{COROLLARY 1. } c_k = 2\zeta(2k) \left(1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n\right).$$

Put $g_2 = 60c_2$, $g_3 = 140c_3$.

PROPOSITION 7. $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

As $\Delta \neq 0$ it is possible to define $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$.

DEFINITION 2. *Modular invariant of the elliptic curve $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ is equal to $j = 2^6 3^3 J$.*

PROPOSITION 8. $j = \frac{1}{q} + u_1q + \dots$ where u_i are integers, $u_0 = 0$.

Let us transform c_k in such a way that corresponding Fourier coefficients under $q^n, n \geq 1$ will be rational numbers. Dividing c_k on $2\zeta(2k)$ and denoting the obtained result as E_k we have by the Corollary 1

PROPOSITION 9. $E_k = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n)q^n$.

REMARK 5.

$$E_2 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n,$$

$$E_3 = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n.$$

5. Class group, class fields and zeta functions

Here we follow to [16, 18].

Let K be an imaginary quadratic field and let Cl_K be its class group.

DEFINITION 3. Let $N(\mathfrak{a})$ be the norm of the ideal $\mathfrak{a}$. The Dedekind ζ -function for K is defined for all $s > 1$ by the series

$$\zeta_K(s) = \sum \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s},$$

where the sum is taken over all nonzero ideals $\mathfrak{a} \in \mathcal{O}_K$.

Let R be a subring ($R \neq \mathbf{Z}$) of the ring of integers $\mathcal{O}_K$ of the imaginary quadratic field K .

Let $M_1, \dots, M_h$ be pairwise nonequivalent modules of K with the same ring of multipliers R .

PROPOSITION 10. $j(M_1), \dots, j(M_h)$ are integer algebraic numbers which are conjugate over K .

PROPOSITION 11. The field $K(j(M_i))/K$ is the normal field.

DEFINITION 4. The field $K(j(M_i))/K$ is called the ring class field.

Follow to [16] it is possible to define ray class field. As in an imaginary quadratic field there is no real infinite primes so modulus of the field is an ideal of the ring of integers of the field.

Let $\mathfrak{m}$ be a modulus of the an imaginary quadratic field K , let $Cl_K^{\mathfrak{m}}$ be the ray class group, let τ_W be the Weber function.

Let $\mathfrak{R} \in Cl_K$ and let $\mathfrak{R}^* \in Cl_K^{\mathfrak{m}}$ be the ideal class whose image in Cl_K is equal to $(\mathfrak{m})\mathfrak{R}^{-1}$.

PROPOSITION 12. The field $K(j(\mathfrak{R}), \tau_W(\mathfrak{R}^*))/K$ is the ray class field.

Let C be an ideal class.

DEFINITION 5. The ideal class zeta function is the expression of the form

$$\zeta_C(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in C \\ \mathfrak{a} \text{ integral}}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

$$s = \sigma + it, \sigma > 1.$$

Below we present values of zeta and L -functions connecting with imaginary quadratic fields. Let d be a squarefree integer number, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ a quadratic field, χ be the character of the quadratic field K . Let $L(s, \chi)$ be the L -series with a nonunit character χ modulo $|D|$. Here D is the discriminant of the field K .

PROPOSITION 13.

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s, \chi) = \zeta(s) \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right).$$

Let m be the number of roots of unity of the imaginary quadratic field $[K : \mathbb{Q}]$.

REMARK 6. $m = 4$ for $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $m = 6$ for $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $m = 2$ for all other imaginary quadratic fields.

Let h be the class number of the field K .

PROPOSITION 14.

$$L(1, \chi) = \frac{2\pi h}{m\sqrt{|D|}}.$$

COROLLARY 2. For imaginary quadratic fields with class number one ($h = 1$) we have

$$L(1, \chi) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) \\ \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \\ \frac{\pi}{\sqrt{|D|}}, -D = 8, 7, 11, 19, 43, 67, 163. \end{cases}$$

6. Multiple zeta values

DEFINITION 6. Let $x_1, \dots, x_p$ be natural numbers with $x_p \geq 2$. The multiple zeta value of the weight w and the depth p is called the expression of the form

$$\zeta(x_1, \dots, x_p) = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_p} \frac{1}{n_1^{x_1} \dots n_p^{x_p}}, w = \sum x_i.$$

REMARK 7.

$$\zeta(2, 2) = \sum_{0 < n_1 < n_2} \frac{1}{n_1^2 n_2^2}, w = \sum x_i = 4.$$

REMARK 8.

$$\zeta(2, 2) = \frac{1}{2}(\zeta(2)\zeta(2) - \zeta(4)).$$

Let μ_N be the group of roots of unity.

DEFINITION 7. Let $x_1, \dots, x_p$ be natural numbers with $x_p \geq 2$. The multiple zeta value relative to μ_N of the weight w and the depth p is called the expression of the form

$$\zeta_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)}^{(x_1, \dots, x_p)} = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_p} \frac{\epsilon_1^{n_1} \dots \epsilon_p^{n_p}}{n_1^{x_1} \dots n_p^{x_p}}, \epsilon_i \in \mu_N,$$

$$w = \sum x_i, (x_p, \epsilon_p) \neq (1, 1).$$

7. Elements of non-Archimedean local fields and p -adic analysis

Here we present elements of p -adic local fields, their algebraic extensions and p -adic interval analysis. We follow to [18, 21].

7.1. Elements of non-Archimedean local fields

A non-Archimedean local field is a complete discrete valuation field with finite residue field. Further, for brevity, we call these fields local. In other words, a field K is called local if it is complete in a topology determined by the valuation of the field and if its residue field k is finite. We assume further that the valuation ν is normalized, i.e. the homomorphism of the multiplicative group of the field to the additive group of rational integers $\nu : K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ is surjective.

The structure of such fields is known: if the field K has the characteristic zero, then it is a finite extension of the p -adic field $\mathbb{Q}_p$, which is the completion of the field of rational numbers with respect to the p -adic valuation.

If $[K : \mathbb{Q}_p] = n$, then $n = ef$, where f is the degree of classes of residues, (i.e. $f = [k : \mathbb{F}_p]$) and $e = \nu_K(p)$ is the ramification index of K .

If the field K has the characteristic p , then it is isomorphic to the field $k((T))$ of formal power series, where T is a uniformizing parameter.

Let L be a finite extension of a local field K with their residue fields l and k , $p = \text{char } k$ and $e_{L/K}$ be the ramification index of L over K .

An extension L/K is called unramified if a) $e_{L/K} = 1$; b) the extension l/k is separable. An extension L/K is called tamely ramified if a) p does not divide $e_{L/K}$; b) the extension l/k is separable.

An extension L/K is called wildly ramified if $e_{L/K} = p^s$, $s \geq 1$;

Denote by $\text{Tr}_{L/K}$ and by $\text{Norm}_{L/K}$ respectively the trace and the norm of the extension L/K . We drop indices, when it is clear what kind of extension we are talking about.

Denote by K_{nr} the maximal unramified extension of the field K (in a fixed algebraic closure of the field K) with a residue field k_s , which is the algebraic closure of a field k .

In a non-Archimedean local field K each of its elements α has a representation $\alpha = \epsilon\pi^m$, where ϵ is a unit of the ring of integers of the field K and π its uniformizing element, that is $\nu(\pi) = 1$, m is an integer rational number. A unit is called principal if $\epsilon \equiv 1 \pmod{\pi}$.

LEMMA 1. *If the local field contains a primitive p -th root ξ_p of unity, then $\nu(\xi_p - 1) = \frac{e}{p-1}$ is an integer number.*

Proof. $\xi_p - 1$ is the root of the equation $(x+1)^{p-1} + (x+1)^{p-2} + \dots + (x+1) + 1 = x^{p-1} + p(\dots) + p$. The value of the p -adic valuation at the root of this equation is $\frac{e}{p-1}$ which proves the required. $\square$

A complete discrete valuation field with an algebraically closed residue field is called a quasilocal field.

7.2. p -adic intervals and p -adic distributions

Let X be a topological space. A distribution on X with values in an abelian group A is a finitely additive function from the compact-open subsets of X to A . Let $|\cdot|_p$ be the p -adic norm.

Define $[\alpha, N]_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x - \alpha|_p \leq \frac{1}{p^N}\}$, $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, $N \in \mathbb{N}$.

DEFINITION 8. *We call sets $[\alpha, N]_p$ the p -adic intervals (disks) and define by these p -adic intervals the basis of open sets on $\mathbb{Q}_p$.*

It is easy to test that axioms of open sets are satisfied.

REMARK 9. *p -adic intervals $[\alpha, N]_p$ open and closed simultaneously.*

Proof. Any union of open p -adic intervals is open. Intervals $[\alpha, N]_p$ are closed, because $[\alpha, N]_p$ is an addition to the union of open intervals $[\alpha', N]_p$ for all $\alpha' \in \mathbb{Q}_p$ for which $\alpha' \rhd \alpha \in [\alpha, N]_p$. $\square$

Further we will call $[\alpha, N]_p$ as intervals. More generally we will consider compact-open sets. Let X be a compact-open set. Recall that a function $f : X \rightarrow \mathbb{Q}_p$ is locally constant if and only if

f has a representation as a finite linear combination of characteristic functions of compact-open subsets.

Let $U = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$ be a partition of $U \subset X$. Recall that the additive mapping μ of a set of compact-open subsets of X with value in $\mathbb{Q}_p$ is called the p -adic distribution on X :

$$\mu(U) = \mu(U_1) + \mu(U_2) + \dots + \mu(U_n).$$

7.2.1. Bernoulli distributions.

Let $B_m(x)$ be the m -Bernoulli polynomial. These polynomials are defined by the decomposition

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x) \frac{t^m}{m!}.$$

We have:

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \dots$$

REMARK 10. *If we substitute $x = 0$ in the m -Bernoulli polynomial we obtain m -Bernoulli number:*

$$B_0(0) = 1, \quad B_1(0) = -\frac{1}{2}, \quad B_2(0) = \frac{1}{6}, \quad B_3(0) = 0, \quad B_4(0) = -\frac{1}{30}, \dots$$

Let now for α the inequality $0 \leq \alpha \leq p^N - 1$ is satisfied. Define the function $\mu_{B,m}$ by the formula

$$\mu_{B,m}([\alpha, N]_p) = p^{N(m-1)} B_m(\alpha/p^N).$$

PROPOSITION 15. *The function $\mu_{B,m}$ is expanded to the distribution on $\mathbb{Z}_p$. This distribution for the given m is called the m -th Bernoulli distribution.*

8. Iterated integrals and (multiple) zeta values

Here we follow to [22, 23].

Let $\mathbb{C}$ be the complex plane and $f_i(z)$ be the holomorphic function on $\mathbb{C}$. Let $f_i(z)dz$ be the differential of the first kind on $\mathbb{C}$. Let S be a Riemann surfaces and w be the differential of the first kind on S . Parshin has considered iterated integrals of this type on Riemann surfaces [22]. Chen [23] for smooth paths on a manifold M and respective path spaces have investigated iterated (path) integrals. For differential forms $w_1, \dots, w_r$ on M he has constructed the iterated integrals by repeating r times the integration of the path space differential forms (and their linear combinations). Chen [23] has denoted the iterated integrals as $\int w_1 w_2 \dots w_r$ and set $\int w_1 w_2 \dots w_r = 1$ when $r = 0$ and $\int w_1 w_2 \dots w_r = 0$ when $r < 0$.

REMARK 11.

$$\zeta(2) = \int_0^1 \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{1-t_2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

More generally iterated integrals are path space differential forms which permit further integration.

9. Formal groups and p -divisible groups

Recall some definitions. Let K be a complete discrete valuation field with the ring of integers O_K and the maximal ideal M_K . A complete discrete valuation field with finite residue field is called a *local* field [24]. A complete discrete valuation field K with algebraically closed residue field k is called a *quasi-local* field [26]. Below we will suppose that in the case the characteristic of k satisfies $p > 0$. Let K be a local or quasi-local field. If K is a local field [24] and has the characteristic 0 then it is a finite extension of the field of p -adic numbers $\mathbb{Q}_p$. Let ν_K be the normalized exponential valuation of K . If $[K : \mathbb{Q}_p] = n$ then $n = e \cdot f$, where $e = \nu_K(p)$ and $f = [k : \mathbb{F}_p]$, where k is the residue field of K (always assumed perfect). If K has the characteristic $p > 0$ then it is isomorphic to the field $k((T))$ of formal power series, where T is uniformizing parameter. Let L be a finite extension of a local field K , k, l their residue fields, $p = \text{char } k$ and $e_{L/K}$ ramification index of L over K . An extension L/K is said to be *unramified* if $e_{L/K} = 1$ and extension l/k is separable. An extension L/K is said to be *tamely ramified* if p not divides $e_{L/K}$ and the residue extension l/k is separable. An extension L/K is said to be *totally ramified* if $e_{L/K} = [L : K] = (\text{char } k)^s, s \geq 1$.

Let L/K be the finite Galois extension of quasi-local field K with Galois group G , $F(x, y)$ one dimensional formal group law over the ring of integers O_K of the field K , $F(M_K)$ be the G -module, that is defined by the group law $F(x, y)$ on the maximal ideal M_K of the ring O_K , $M_K^t (t \in \mathbb{Z}, t \geq 1)$ be the subgroup of t -th degrees of elements from M_K , $F_K^t := F(M_K^t)$.

DEFINITION 9. For $n \in \mathbb{Z}$ the function $\mu(n)$, $N_{L/K}(F_L^n) \subset F_K^{\mu(n)}$ is defined by the condition: $F_K^{\mu(n)}$ is the least of subgroups F_K^t ($t = 1, 2, \dots$) contains $N_{L/K}(F_L^n)$.

REMARK 12. Please do not confuse with the measure μ .

Below we will suppose that $\text{char } k > 3$.

9.1. Norm Maps

Here we use results on formal groups from [27, 25]. Let $F_L = F(M_L)$ be the G -module that is defined by the n -dimensional group law $F(x, y)$ on the product $(M_L)^n := M_L \times \dots \times M_L$, (n times) of maximal ideals of the ring O_L of any finite Galois extension L of the field K .

DEFINITION 10. The norm map $N : F_L \rightarrow F_K$ of the module F_L to F_K is defined by the formula $N(a) = (((a +_F \sigma a) +_F \dots) +_F \sigma_s a)$, where $a +_F b$ denotes the addition of points in the sense of group structure of the module F_L , $a, b \in M_L$, $G = \text{Gal}(L/K)$, $\sigma_s \in G$, $[G : 1] = s$.

Let $p := \text{char } k$, $e := \nu_K(p)$, ($e = +\infty$, if characteristic of the field K is equal p and e is positive integer in the opposite case), L/K be the Galois extension of the prime degree q , $F(x, y)$ be the one dimensional group law over O_K . Let $p := \text{char } k > 0$.

LEMMA 2. If $\Pi_s \in \pi_L^s \cdot O_L$, $s \geq 1$ then $N(\Pi_s) \equiv \text{Tr}(\Pi_s) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [\text{Norm } \Pi_s]^n \pmod{\text{Tr}(\pi_L^{2s} \cdot O_L)}$ where $c_n \in O_K$ are coefficients of the p -iteration of the group law.

Let R be a commutative ring. Let A, B, C be finite group schemes over R . The sequence

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

is called exact if $\text{Im } f = \text{Ker } g$.

Let p be a prime number and h be an integer, $h \geq 0$.

Recall the definition of the p -divisible group by J. Tate.

DEFINITION 11. A p -divisible group over R of height h is an inductive system

$$G = (G_\nu, i_\nu), \nu \geq 0,$$

where

- (i) G_ν is a finite group scheme over R of order $p^{\nu h}$,
- (ii) for each $\nu \geq 0$,

$$0 \longrightarrow G_\nu \xrightarrow{i_\nu} G_{\nu+1} \xrightarrow{p^\nu} G_{\nu+1}$$

is exact.

REMARK 13. $(G_\nu = (\mathbb{Z}/p^\nu \mathbb{Z}))^h$, $G = (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^h$.

10. Motives and (p -adic) (multiple) zeta values

Glanois in paper [8] presents the revised and expanded version of his Doctoral thesis [Periods of the motivic fundamental groupoid of $\mathbb{P}^1\{0, \mu_N, \infty\}$, Pierre and Marie Curie University, 2016;], written under F. Brown.

Let $k_N = \mathbb{Q}(\xi_N)$ be the cyclotomic field, $\xi_N \in \mu_N$ be a primitive N th root of unity and $\mathcal{O}_N$ be the ring of integers of k_N . The corresponding multiple zeta values at arguments $x_i \in \mathbb{N}$, $\epsilon_i \in \mu_N$ can be expressed in terms of the coefficients of a version of Drinfeld's associators by Drinfeld [28], which in turn, can be expressed in terms of periods of the corresponding motivic multiple zeta values (MMZV).

These MMZV $\zeta^{\mathbf{m}}(\frac{x_1, \dots, x_p}{\epsilon_1, \dots, \epsilon_p})$, $\epsilon_i \in \mu_N$, $(x_p, \epsilon_p) \neq (1, 1)$ relative to μ_N (of the weight $w = \sum x_i$ and the depth p), are elements of an algebra $\mathcal{H}^N$ over $\mathbb{Q}$ and span the algebra.

The algebra $\mathcal{H}^N$ carries an action of the motivic Galois group of the category of mixed Tate motives over $\mathcal{O}_N[1/N]$. The author studies the Galois action on the motivic unipotent fundamental groupoid of $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \mu_N, \infty\}$ (or of $\mathbb{G}_m \setminus \mu_N$) for next values of N :

$$N \in \{2^a 3^b, a + 2b \leq 3\} = \{1, 2, 3, 4, '6', 8\}.$$

His results include: bases of multiple zeta values via multiple zeta values at roots of unity μ_N for the above N ; more generally, constructing of families of motivic iterated integrals with prescribed properties; the new proof, via the coproduct by Goncharov [29] and its extension by Brown [7], of the results by Deligne [30] that the Tannakian category of mixed Tate motives over $\mathcal{O}_N[1/N]$ 'for $N = \{2, 3, 4, 8\}$ is spanned by the motivic fundamental groupoid of $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \mu_N, \infty\}$ with an explicit basis'.

In article [11] Ünver continues his investigation of p -adic multiple zeta values[9], presenting a computation of values of the p -adic multiple polylogarithms at roots of unity. The main result of the paper [11] (Theorem 6.4.3 with Propositions 6.4.1 and 6.3.1) is to give explicit expression for the cyclotomic p -adic multi-zeta values $\zeta_p(s_1, s_2; i_1, i_2)$ of depth two. The result is far too technical to state here.

The proof of the theorem is rather technical; it is based on rigid analytic function arguments and a long distance analysis of group-like elements of related algebras.

For number fields the category of realizations has defined and investigated by Deligne [4]. Results on multiple zeta values, Galois groups and geometry of modular varieties has presented by Goncharov [6]. Interesting unipotent motivic fundamental group is defined and investigated by Deligne and Goncharov [5]. Tannakian interpretation of p -adic multiple zeta values is given by Furusho [10].

Results obtained in the paper [11] may be applied to the problems of the p -adic theory of higher cyclotomy.

11. On the Eisenstein series associated with Shimura varieties

Interesting classes of Shimura varieties form varieties which have an interpretation as moduli spaces of abelian varieties. Moduli spaces of corresponding p -divisible groups over perfect fields of characteristic p are used for investigation of the local structure of these Shimura varieties.

11.1. On some Shimura varieties and Siegel modular forms

Let $\mathbb{C}^n$ be n -dimensional complex vector space, $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ be $2n$ -linear independent vectors and

$$\Lambda = \{e_1\mathbb{Z}, \dots, e_{2n}\mathbb{Z}\}$$

be a lattice. Then

$$\mathbb{C}^n/\Lambda$$

is a compact commutative topological group. If $\alpha \in GL_n(\mathbb{C})$ and $\Lambda_1 = \alpha\Lambda$ then

$$\mathbb{C}^n/\Lambda = \mathbb{C}^n/\Lambda_1.$$

If $n > 1$ then not for every lattice Λ there exists an abelian variety.

PROPOSITION 16. *Let $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ and let $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ be $\mathbb{R}$ -bilinear form such that*

$$(i) F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -F(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

(ii) $F(\mathbf{x}, i\mathbf{x})$ is the Hermitian positive defined form

and for

(iii) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda$ it takes integer values: $F(\Lambda, \Lambda) \in \mathbb{Z}$.

Then for this lattice Λ there exists the abelian variety.

DEFINITION 12. *The pair (Λ, F) is called the polarized abelian variety.*

Let $M = M(F)$ be the matrix of the form F .

DEFINITION 13. *The abelian variety $A = (\Lambda, F)$ is called principally polarized if the bilinear form F is unimodular or, equivalently, $\det(M) = \det(M(F)) = 1$.*

Denote by Π the period matrix of the abelian variety A . This is $n \times 2n$ complex matrix $\Pi = (M_1, M_2)$ with nondegenerate $n \times n$ matrices M_1 and M_2 .

DEFINITION 14. *The period matrix Π is called normalized if it has the form (E_n, Z) where E_n is the unit $n \times n$ matrix and $Z \in \mathbb{H}_n$, where.*

$$\mathbb{H}_n = \{n \times n \text{ matrices } Z | Z^T = Z \text{ and } \text{Im} Z > 0\},$$

is the Siegel upper half-plane. Here Z^T is the matrix transposed to Z .

REMARK 14. *It is clear that the Siegel matrix $Z \in \mathbb{H}_n$ defines the normalized period matrix Π .*

Let

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

DEFINITION 15. *Siegel modular group $\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z})$ is the set of matrices*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

such that

$$M^T J M = J.$$

DEFINITION 16. *Siegel modular group Γ_n acts on the Siegel upper half-plane $\mathbb{H}_n$ by the formula*

$$Z \mapsto (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

PROPOSITION 17. *In the framework of Definitions 13, 14 two Siegel matrices define isomorphic principally polarized abelian varieties if and only if one of them can be obtained from the other by the transformation of the Definition 15.*

Sometimes we will use for Siegel matrices Z an equivalent notations: $Z = X + iY$, X, Y are real matrices, $X^T = X$, $Y^T = Y$, $Y > 0$; Y is the matrix of the positive definite quadratic form.

DEFINITION 17. *Let f be an analytic function on the Siegel upper half-plane that satisfies the equality*

$$f((AZ + B)/(CZ + D)) = (CZ + D)^h f(Z),$$

and is bounded on the domains of the form

$$\{Z = X + iY, Z \in \mathbb{H}_n, Y \geq cE_n, c > 0.\}$$

Then the function f is called Siegel modular form of the genus n and the weight k .

REMARK 15. *As the matrix*

$$J = \begin{pmatrix} E_n & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

belong to Γ_n (its determinant is equal 1) and

$$f(Z + B) = f(Z),$$

so $f(Z)$ has a representation by the Fourier series.

11.2. On improper intersections of Kudla-Rapoport divisors and Eisenstein series

Let k be an imaginary quadratic field, $\mathcal{O}_k$ its ring of integers and $\mathcal{O}_{k,p}$ be the ring of integers of the completion k_p of k at p . Sankaran [37] proves that the arithmetic degrees of Kudla-Rapoport cycles on an integral model of a Shimura variety attached to a unitary group of signature $(1, 1)$ are Fourier coefficients of the central derivative of an Eisenstein series of genus 2. The main results of the paper are the following Theorem 4.13 on the value of the Eisenstein series and the Corollary 4.15 on the relation between the arithmetic degree of special cycle and the Eisenstein series. These results confirm conjectures by Kudla [31] and by Kudla, Rapoport [32] on relations between intersection numbers of special cycles and the Fourier coefficients of automorphic forms in the degenerate setting and for dimension 2. As have pointed out by Kudla [33] and others ‘these relations may be viewed as an arithmetic version of the classical Siegel-Weil formula, which identifies the Fourier coefficients of values of Siegel-Eisenstein series with representation numbers of quadratic forms’. In the paper by Kudla, Rapoport [34] ‘the Shimura variety is replaced by a formal moduli space of p -divisible groups, the special arithmetic cycles are replaced by formal subvarieties, and the special values of the derivative of the Eisenstein series are replaced by the derivatives of representation densities of hermitian forms.’ Sankaran defines the local Kudla-Rapoport cycles $Z(b)$ and gives some applications of results obtained in his earlier paper [38] where he proved the Theorem 3.14 on cycles $Z(b)$. He allows ‘the polarizations to be non-principal in a controlled way’. An unpolarized case of p -divisible groups with the given p^m -kernel type and with applications to their Newton polygons has considered in the paper by Harashita [35]. Sankaran’s paper [37] consists of four sections. The first section presents the purpose of the paper and short description of ideas and

results of next sections. Second section concerns with local Kudla-Rapoport cycles on the Drinfeld upper half-plane. The main result of this section is the Theorem 2.14 on values of local intersection numbers of these cycles. The third section is devoted to the prove of the closed-form formula for representation densities $\alpha(S, T)$. Author specializes the explicit formula on Hermitian representation densities by Hironaka [36] to the case at hand: $F(S, T, X) \in Q[X]$, $T \in \text{Herm}_2(o_{k,p})$, $\text{ord}_p \det(T)$ is even, $S = \text{diag}(p, 1)$, $\alpha(S_r, T) = F(S, T, (-p)^{-r})$. In the last section global aspects are discussed and main result is presented. Let $M_{(1,1)}^d$ denote the Deligne-Mumford (DM) stack over o_k of almost-principally polarized abelian surfaces and $\mathcal{E}$ the DM stack over o_k of principally polarized elliptic curves with multiplication by o_k . In conditions of the subsection 4.1 of the paper [37] author sets $\mathcal{M} = \mathcal{E} \times_{\text{Spec } o_k} M_{(1,1)}^d$ and define for $T \in \text{Herm}_2(o_k)$ cycles $\mathcal{Z}(T)$. Then in subsection 4.3 the author prove Theorem 4.13 and Corollary 4.15.

Conclusions

Classical and novel results on (p -adic) L -functions, (p -adic) (multiple) zeta values and Eisenstein series are presented.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zagier D. Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple ζ -values // Research into Automorphic Forms and L -functions. Kyoto: Surikaiseikikenkyusho Kokyuroku, 843. 1993. P. 162–170.
2. Манин Ю.И. Круговые поля и модулярные кривые // УМН. 1971. Т. 26, вып. 6 (162). С. 7–78.
3. Манин Ю.И. Параболические точки и дзета-функции модулярных кривых // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 19–64.
4. Deligne P. Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points // Galois Groups over $\mathbb{Q}$ (Eds. Ihara et al.). New York: Springer Verlag. 1989. P. 79–297.
5. Deligne P., Goncharov A. Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). 2005. Vol. 38, no. 1. P. 1–56.
6. Goncharov A. Multiple ζ -values, Galois groups, and geometry of modular varieties // European Congr. of Mathematics. Progr. Math. Vol. I. Barcelona: Birkhauser 2000. P. 361–392.
7. Brown F. Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$ // Ann. of Math. 2012. Vol. 175, no. 1. P. 949–976.
8. Glanois C. Motivic unipotent fundamental groupoid of $\mathbb{G}_m \backslash \mu_N$ for $N = 2, 3, 4, 6, 8$ and Galois descents // Journal of Number Theory. 2016. 160. P. 334–384.
9. Ünver S. p -adic multiple zeta values // Journal of Number Theory. 2004. 108. P. 111–156.
10. Furusho H. p -adic multiple zeta values II. Tannakian interpretations // Am. J. Math. 2007. Vol. 129, no. 4. P. 1105–1144.
11. Ünver S. “Cyclotomic p -adic multi-zeta values in depth two // Manuscr. Math. 2016. Vol. 149, no. 3-4. P. 405–441.
12. Ihara Y. Braids, Galois Groups, and Some Arithmetic Functions // Proc. of the ICM 90 (I). Tokyo Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag. 1991. P. 99–120.

13. Kubota K. Leopoldt H.-W. Eine p -adische Theorie der Zeta-Werte. I // J. Reine Angew. Math. 1964. 214/215. P. 328–339.
14. Iwasawa K. Analogies between number fields and function fields // Collected Papers. Vol. II. Tokyo: Springer-Verlag, 2001. P. 606–611.
15. Weber H. Lehrbuch der Algebra. vol. III. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, 1908.
16. Hasse H. Zum Hauptidealsatz der komplexen Multiplikation // Monatshefte für Math. 1931. 38. P. 315–322, 323–330, 331–344.
17. Deuring M. Klassenkörper der komplexen Multiplikation // Enzyklopädie der Math. Wiss. 1961. Bd. 12. Heft 10. Teil II, 23.
18. Бореви́ч З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985. 510 с.
19. Вороной Г.Ф. Собрание сочинений. Т. I. Киев: Издательство Акад. наук Укр. ССР, 1952. 403 с.
20. Hashimoto M. Equivariant class group. II: Enriched descent theorem // Commun. Algebra. 2017. Vol. 45, no. 4. P. 1509–1532.
21. Коблиц Н. p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции. Ижевск: Бибфизмат, 1997. 192 с.
22. Паршин А. Н. Об одном обобщении якобиева многообразия // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30, вып. 1. С. 175–182.
23. Chen, K. Iterated path integrals // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. 83. P. 831–879.
24. Algebraic Number Theory. Edited by J. Cassels and A. Fröhlich. London: Academic Press. 2003. 366 p.
25. Hazewinkel M. Formal Groups. NY: Academic Press. 1977. 573 p.
26. Введенский О.Н. О локальных “полях классов” эллиптических кривых // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37, вып. 1. С. 20–88.
27. Введенский О.Н. О “универсальных нормах” формальных групп, определенных над кольцом локального поля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37, вып. 4. С. 737–751.
28. Дринфельд В. Г. О квазитреугольных квазихопфовых алгебрах и одной группе, тесно связанной с $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, вып. 4. С. 149–181.
29. Goncharov A. Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry // Duke Math. J. 2005. Vol. 128, no. 2. P. 209–284.
30. Deligne P. 2010, “Le groupe fondamental unipotent motivique de $G_m \setminus \mu_N$ pour $N = 2, 3, 4, 6$ or 8 // Publ. Math. IHES, vol. 112, no. 1, pp. 101–141.
31. Kudla K. Special cycles and derivatives of Eisenstein series // Math. Sci. Research Institute Publ. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 2004. Vol. 49. P. 243–270.
32. Kudla K., Rapoport M. Special cycles on unitary Shimura varieties II: global theory // J. Reine Angew. Math. 2014. Vol. 697. P. 91–157.

33. Kudla K. Derivatives of Eisenstein Series and Arithmetic Geometry // Proc. of ICM 2002. Vol. II. Beijing: Higher Education Press. 2004. P. 173–183.
34. Kudla K., Rapoport M. Special cycles on unitary Shimura varieties I. Unramified local theory // Invent. math. 2011. Vol. 184. P. 629–682.
35. Harashita, S. Geometry and analysis of automorphic forms of several variables // Proc. Int. Symp. in honor of Takayuki Oda on the occasion of his 60th birthday, Univ. of Tokyo, Tokyo, Japan, September 14–17, 2009. Series on Number Theory and its Applications 7. Hackensack, NJ: World Scientific. 2012. P. 41–55.
36. Hironaka Y. Local Zeta functions on Hermitian forms and its application to local densities // Number Theory. 1998. Vol. 71. P. 40–64.
37. Sankaran S. Improper intersections of Kudla-Rapoport divisors and Eisenstein serie // J. Inst. Math. Jussieu. 2017. Vol. 16, no. 5. P. 899–945.
38. Sankaran S. Unitary cycles on Shimura curves and the Shimura lift I // Documenta Math. 2013. Vol. 18. P. 1403–1464.
39. Глазунов Н.М. Алгоритмы и программы для исследований в диофантовой геометрии // Препринт 73–16. Киев: Институт кибернетики АН УССР, 1973. 26 с.
40. Glazunov N. Class groups of rings with divisor theory, L -functions and moduli spaces // Int. Conf. Algebraic and geometric methods of analysis. Book of abstracts. Odessa-Kiev: Institute of Math. 2018. С. 19–20. Available at: <https://www.imath.kiev.ua/topology/conf/agma2018>
41. Glazunov N.M. Class Fields, Riemann Surfaces and (Multiple) Zeta Values // Proc. 3-d Int. Conf. Computer Algebra & Information Technologies. Odessa: I.I. Mechnikov National University, 2018. С. 152–154.
42. Glazunov, N. Quadratic forms, algebraic groups and number theory // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 4. С. 77–89.
43. Glazunov, N. Extremal forms and rigidity in arithmetic geometry and in dynamics // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3. С. 124–146.

REFERENCES

1. Zagier, D. 1993, “Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple ζ -values”, *Research into Automorphic Forms and L -functions*, Kyoto, Surikaiseikikenkyusho Kokyuroku, 843, pp. 162–170.
2. Manin, Yu. I. 1971, “Cyclotomic fields and modular curves”, *UMN*, 26:6, pp. 7–78.
3. Manin, Yu. I. 1972, “Parabolic points and zeta-functions of modular curves”, *Math. USSR-Izv.*, 6:1, pp. 19–64.
4. Deligne, P. 1989, “Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points”, in: Ihara et al., (Eds.), *Galois Groups over $\mathbb{Q}$* , Springer Verlag, New York, pp. 79–297.
5. Deligne, P., Goncharov, A. 2005. “Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte”, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, (4), vol. 38, no. 1, pp. 1–56.

6. Goncharov, A. 2000, "Multiple ζ -values, Galois groups, and geometry of modular varieties", *European Congr. of Mathematics*, **I**, Barcelona, Progr. Math., **201**, Birkhauser, pp. 361–392.
7. Brown, F. 2012, "Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$ ", *Ann. of Math.*, vol. 175, no. 1, pp. 949–976.
8. Glanois, C. 2016, "Motivic unipotent fundamental groupoid of $\mathbb{G}_m \setminus \mu_N$ for $N = 2, 3, 4, 6, 8$ and Galois descents", *Journal of Number Theory*, 160, pp. 334–384.
9. Ünver, S. 2004, " p -adic multiple zeta values", *Journal of Number Theory*, 108, pp. 111–156.
10. Furusho, H. 2007, " p -adic multiple zeta values II. Tannakian interpretations", *Am. J. Math.*, 129 (4), pp. 1105–1144.
11. Ünver, S. 2016, "Cyclotomic p -adic multi-zeta values in depth two", *Manuscr. Math.*, **149**, no. 3-4, pp. 405–441.
12. Ihara, Y. 1991, "Braids, Galois Groups, and Some Arithmetic Functions", *Proc. of the ICM 90 (I)*, Springer-Verlag, Tokyo Berlin Heidelberg New York, 1991, pp. 99–120.
13. Kubota, K. Leopoldt, H.-W. 1964, "Eine p -adische Theorie der Zeta-Werte". I, *J. Reine Angew. Math.*, 214/215, pp. 328–339.
14. Iwasawa, K. 2001. "Analogies between number fields and function fields". In *Collected Papers*, **II**, Springer-Verlag, Tokyo, pp. 606–611.
15. Weber, H. 1908, *Lehrbuch der Algebra*, vol. III, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig.
16. Hasse, H. 1931, "Zum Hauptidealsatz der komplexen Multiplikation", *Monatshefte für Math.*, 38, 315–322, 323–330, 331–344.
17. Deuring, M. 1961, "Klassenkörper der komplexen Multiplikation", *Enzyklopädie der Math. Wiss.*, Bd. 12, Heft 10, Teil II, 23.
18. Borevich, Z., Shafarevich, I. 1986, *Number Theory*, Pure and Applied mathematics, Academic Press, New York.
19. Voronoi, G.F. 1952, *Collected Works*, vol. I, AN UkrSSR, Kiev.
20. Hashimoto, M. 2017, Equivariant class group. II: Enriched descent theorem. *Commun. Algebra*, 45(4), pp. 1509–1532.
21. Koblitz, N. 1997, *p -adic numbers, p -adic analysis and zeta-functions*, Bibphysmat, Igevsck.
22. Parshin, A. 1966 "A generalization of Jacobian variety", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 30, pp. 175–182.
23. Chen, K. 1977, "Iterated path integrals", *Bull. Amer. Math. Soc.* 83, pp. 831–879.
24. Edited by J. Cassels and A. Fröhlich, 2003, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, London.
25. Hazewinkel M. 1977, *Formal Groups*, Academic Press, NY.
26. Vvedenskii O.N. 1973, "On local 'class fields' of elliptic curves", *Izv. Akad. Nauk SSSR Math., USSR Izvestija Ser. Mat.*, vol. 37, no. 1, pp. 20–88.
27. Vvedenskii O.N. On "universal norms" of formal groups over integer ring of local fields (In Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Math., USSR Izvestija Ser. Mat.*, vol. 37, 1973, 737–751.

28. Drinfeld, V. 1991, “On quasi-triangular quasi-Hopf algebras and one group that is closely related to $Gal(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ ”, *Leningrad Math. J.*, 2:4 , pp. 829–860.
29. Goncharov, A. 2005, “Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry”, *Duke Math. J.*, 128, no. 2, pp. 209–284.
30. Deligne, P. 2010, “Le groupe fondamental unipotent motivique de $G_m \setminus \mu_N$ pour $N = 2, 3, 4, 6$ or 8”, *Publ. Math. IHES*, vol. 112, no. 1, pp. 101–141.
31. Kudla, K. 2004, “Special cycles and derivatives of Eisenstein series”, *Math. Sci. Research Institute Publ.*, Cambridge Univ. Press, vol. 49. pp. 243–270.
32. Kudla, K., Rapoport, M. 2014, “Special cycles on unitary Shimura varieties II: global theory”, *J. Reine Angew. Math.*, 697, pp. 91–157.
33. Kudla, K. “Derivatives of Eisenstein Series and Arithmetic Geometry”, *Proc. of ICM 2002*, vol. II, Higher Education Press, Beijing, 2004, pp. 173–183.
34. Kudla, K., Rapoport, M. 2011 “Special cycles on unitary Shimura varieties I. Unramified local theory”, *Invent. math.*, 184, pp. 629–682.
35. Harashita, S. “Geometry and analysis of automorphic forms of several variables”, *Proc. Int. Symp. in honor of Takayuki Oda on the occasion of his 60th birthday*, Univ. of Tokyo, Tokyo, Japan, September 14–17, 2009. Hackensack, NJ: World Scientific. Series on Number Theory and its Applications 7, pp. 41–55.
36. Hironaka, Y. 1998, “Local Zeta functions on Hermitian forms and its application to local densities”, *Number Theory*, 71, pp. 40–64.
37. Sankaran, S. 2017, “Improper intersections of Kudla-Rapoport divisors and Eisenstein serie”, *J. Inst. Math. Jussieu*, 16, no. 5. pp. 899–945.
38. Sankaran, S. 2013, “Unitary cycles on Shimura curves and the Shimura lift I”, *Documenta Math.*, 18, pp. 1403–1464.
39. Glazunov, N.M. 1973, “Algorithms and programs for research in Diophantine geometry”, *Preprint 73-16*, Institute of Cybernetics of the Ukrainian Academy of Sciences, Kiev, 26 p.
40. Glazunov, N. “Class groups of rings with divisor theory, L -functions and moduli spaces”, *Int. conf. ‘Algebraic and geometric methods of analysis*. Book of abstracts. Institute of Mathematics, Odessa-Kiev, 2018, pp. 19–20. Available at:
<https://www.imath.kiev.ua/topology/conf/agma2018>
41. Glazunov, N. “Class Fields, Riemann Surfaces and (Multiple) Zeta Values”, *Proc. 3-d Intl Conf. Computer Algebra & Information Technologies*, Mechnikov National University, Odessa, 2018, pp. 152–154.
42. Glazunov, N. 2015, “Quadratic forms, algebraic groups and number theory”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol.16, no. 4, pp. 77–89.
43. Glazunov, N. 2015, “Extremal forms and rigidity in arithmetic geometry and in dynamics”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, no. 3, pp. 124–146.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-131-147

Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса¹

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула.

e-mail: dvgtail@mail.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Для классического потенциала Рисса или дробного интеграла I_α хорошо известны условия Харди–Литлвуда–Соболева–Стейна–Вейса (L^p, L^q) -ограниченности со степенными весами. С помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}$ потенциал Рисса определяется равенством $\mathcal{F}(I_\alpha f)(y) = |y|^{-\alpha} \mathcal{F}(f)(y)$. Важным обобщением преобразования Фурье стало преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$, действующее в лебеговых пространствах с весом Данкля, определяемым с помощью системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$, ее группы отражений G и неотрицательной функции кратности k на R , инвариантной относительно G . С. Тангавелу и Ю. Шу с помощью равенства $\mathcal{F}_k(I_\alpha f)(y) = |y|^{-\alpha} \mathcal{F}_k(f)(y)$ определили D -потенциал Рисса. Для D -потенциала Рисса также были доказаны условия ограниченности в лебеговых пространствах с весом Данкля и степенными весами, аналогичные условиям для потенциала Рисса. На конференции "Follow-up Approximation Theory and Function Spaces" в Centre de Recerca Matemàtica (CRM, Barcelona, 2017) М. Л. Гольдман поставил вопрос об условиях (L_p, L_q) -ограниченности D -потенциала Рисса с кусочно-степенными весами. Рассмотрение кусочно-степенных весов позволяет выявить влияние на ограниченность D -потенциала Рисса поведения весов в нуле и бесконечности. В настоящей работе на этот вопрос дается полный ответ. В частности, в случае потенциала Рисса получены необходимые и достаточные условия. В качестве вспомогательных результатов доказаны необходимые и достаточные условия ограниченности операторов Харди и Беллмана в лебеговых пространствах с весом Данкля и кусочно-степенными весами.

Ключевые слова: Преобразование Фурье, потенциал Рисса, преобразование Данкля, потенциал Данкля–Рисса.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 131–147.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-131-147

Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential²

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov

Gorbachev Dmitry Viktorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University, Tula.

e-mail: dvgmail@mail.ru

Ivanov Valerii Ivanovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University, Tula.

e-mail: dvgmail@mail.ru

Abstract

For the classical Riesz potential or the fractional integral I_α , the Hardy–Littlewood–Sobolev–Stein–Weiss (L^p, L^q) -boundedness conditions with power weights are well known. Using the Fourier transform $\mathcal{F}$, the Riesz potential is determined by the equality $\mathcal{F}(I_\alpha f)(y) = |y|^{-\alpha} \mathcal{F}(f)(y)$. An important generalization of the Fourier transform became the Dunkl transform $\mathcal{F}_k(f)$, acting in Lebesgue spaces with Dunkl's weight, defined by the root system $R \subset \mathbb{R}^d$, its reflection group G and a non-negative multiplicity function k on R , invariant with respect to G . S. Thangavelu and Yu. Xu using the equality $\mathcal{F}_k(I_\alpha^k f)(y) = |y|^{-\alpha} \mathcal{F}_k(f)(y)$ determined the D -Riesz potential I_α^k . For the D -Riesz potential, the boundedness conditions in Lebesgue spaces with Dunkl weight and power weights, similar to the conditions for the Riesz potential, were also proved. At the conference "Follow-up Approximation Theory and Function Spaces" in the Centre de Recerca Matemàtica (CRM, Barcelona, 2017) M. L. Goldman raised the question about (L_p, L_q) -boundedness conditions of the D -Riesz potential with piecewise-power weights. Consideration of piecewise-power weights makes it possible to reveal the influence of the behavior of weights at zero and infinity on the boundedness of the D -Riesz potential. This paper provides a complete answer to this question. In particular, in the case of the Riesz potential, necessary and sufficient conditions are obtained. As auxiliary results, necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Hardy and Bellman operators are proved in Lebesgue spaces with Dunkl weight and piecewise-power weights.

Keywords: Fourier transform, Riesz potential, Dunkl transform, D -Riesz potential.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2019, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 131–147.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d -мерное евклидово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$, $d\mu(x) = (2\pi)^{-d/2} dx$ — нормированная мера Лебега на $\mathbb{R}^d$, $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$, — пространства Лебега с нормой $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu)^{1/p} < \infty$, $C_b(\mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывных ограниченных функций, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца,

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i(x,y)} d\mu(x)$$

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

— преобразование Фурье и Δ — оператор Лапласа.

Мы будем писать $A \lesssim B$, если $A \leq CB$ с константой $C > 0$, зависящей только от несущественных параметров, и $A \asymp B$, если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$. Как обычно, для $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный гильбертов показатель, $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}^d$.

Потенциал Рисса или дробный интеграл I_α определяется как интегральный оператор

$$I_\alpha f(x) = (\gamma_\alpha)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) |x - y|^{\alpha-d} d\mu(y) = (\gamma_\alpha)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x) |y|^{\alpha-d} d\mu(y),$$

где $0 < \alpha < d$, $\gamma_\alpha = 2^{\alpha-d/2} \Gamma(\alpha/2) / \Gamma((d-\alpha)/2)$, и $\tau^y f(x) = f(x+y)$ — оператор сдвига.

Этот оператор впервые исследовал О. Фростман [1]. Многие важные его свойства были доказаны М. Риссом [2]. Формулы для преобразований Фурье

$$\mathcal{F}(I_\alpha f) = |\cdot|^{-\alpha} \mathcal{F}(f), \quad \mathcal{F}((-\Delta)^{\alpha/2} f) = |\cdot|^\alpha \mathcal{F}(f),$$

указывают, что потенциал Рисса является обратным оператором для дробной степени оператора Лапласа.

Весовая (L^p, L^q) -ограниченность потенциала Рисса записывается в виде неравенства Стейна–Вейса

$$\| |x|^{-\gamma} I_\alpha f(x) \|_q \leq \mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d) \| |x|^\beta f(x) \|_p \quad (1)$$

с константой $\mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ и $1 < p \leq q < \infty$.

Условия конечности константы $\mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ хорошо известны.

Теорема 1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma < \frac{d}{q}$, $\beta < \frac{d}{p}$, $0 < \alpha < d$, и $\alpha - \gamma - \beta = d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$. Константа $\mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ в неравенстве (1) конечна, если $p = q$ или $p < q$ и $\alpha \geq d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$.

Теорема 1 была доказана Г.Х. Харди и Дж.И. Литтлвудом [3] для $d = 1$, С. Соболевым [4] для $d > 1$ и $\gamma = \beta = 0$, Е.М. Стейном и Г. Вейсом [5] в общем случае.

Неравенство Стейна–Вейса (1) в эквивалентной форме может быть записано в виде неравенства Харди–Реллиха–Соболева

$$\| |x|^{-\gamma} f(x) \|_q \leq \mathbf{c}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d) \| |x|^\beta (-\Delta)^{\alpha/2} f(x) \|_p.$$

Одним из важных обобщений преобразования Фурье $\mathcal{F}$ является преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$ (см. [6, 7]). Аналог потенциала Рисса для преобразования Данкля, исследуемый в статье, и называемый нами D-потенциалом Рисса, определили С. Тангавелу и Ю. Шу [8].

Пусть $R \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ — система корней, R_+ — положительная подсистема R , $G(R) \subset O(d)$ — группа отражений, образованная отражениями $\{\sigma_a : a \in R\}$, где σ_a — отражение относительно гиперплоскости $(a, x) = 0$, $k : R \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы G . Напомним, что конечное множество $R \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ называется системой корней, если

$$R \cap \mathbb{R}a = \{a, -a\} \quad \text{и} \quad \sigma_a R = R \quad \text{для всех } a \in R.$$

Пусть

$$v_k(x) = \prod_{a \in R_+} |(a, x)|^{2k(a)}, \quad d\mu_k(x) = c_k v_k(x) dx$$

— вес и мера Данкля, где $c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x) dx$ — интеграл Макдональда–Мета–Сельберга,

$L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, $1 \leq p < \infty$, — пространства Лебега с нормой $\|f\|_{p, d\mu_k} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu_k \right)^{1/p} < \infty$,

$$T_j f(x) = D_j f(x) + \sum_{a \in R_+} k(a) (a, e_j) \frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{(a, x)}, \quad j = 1, \dots, d,$$

—дифференциально-разностные операторы Данкля и $\Delta_k = \sum_{j=1}^d T_j^2$ — лапласиан Данкля. Ядро Данкля $E_k(x, y)$ является единственным решением системы

$$T_j f(x) = y_j f(x), \quad j = 1, \dots, d, \quad f(0) = 1.$$

Функция $e_k(x, y) = E_k(x, iy)$ играет роль обобщенной экспоненты. Ее свойства подобны свойствам классической экспоненты $e^{i(x,y)}$. Многие из них вытекают из интегрального представления Реслер [9]

$$e_k(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi, y)} d\mu_x^k(\xi), \quad (2)$$

где μ_x^k — вероятностная мера Бореля с носителем в выпуклой оболочке G -орбиты x в $\mathbb{R}^d$. В частности, $|e_k(x, y)| \leq 1$ и $\text{supp } \mu_x^k \subset B_{|x|}$, где B_r — евклидов шар радиуса r с центром в нуле.

Для $f \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ преобразование Данкля определяется равенством

$$\mathcal{F}_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{e_k(x, y)} d\mu_k(x).$$

Если $k \equiv 0$, то $\mathcal{F}_0$ совпадает с преобразованием Фурье $\mathcal{F}$. Отметим, что

$$\mathcal{F}_k(e^{-|\cdot|^2/2})(y) = e^{-|y|^2/2}, \quad \mathcal{F}_k^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}_k(f)(-x).$$

Преобразование Данкля является изометрией в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$. Равенство Планшереля имеет вид

$$\|f\|_{2, d\mu_k} = \|\mathcal{F}_k(f)\|_{2, d\mu_k}.$$

М. Реслер [10] определила оператор обобщенного сдвига τ^y , $y \in \mathbb{R}^d$, на пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ равенством

$$\mathcal{F}_k(\tau^y f)(z) = e_k(y, z) \mathcal{F}_k(f)(z)$$

или

$$\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e_k(y, z) e_k(x, z) \mathcal{F}_k(f)(z) d\mu_k(z).$$

Он действует из $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ и $\|\tau^y\|_{2 \rightarrow 2} = 1$.

Если $k \equiv 0$, то $\tau^y f(x) = f(x+y)$. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то $\tau^y f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и равенство (3) справедливо поточечно. К. Тримеш распространил τ^y на $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ [11]. Например, $\tau^y 1 = 1$. В общем случае, τ^y не является положительным оператором и вопрос о его L_p -ограниченности остается открытым.

Пусть

$$d_k = 2\lambda_k + 2, \quad \lambda_k = \frac{d}{2} - 1 + \sum_{a \in R_+} k(a). \quad (3)$$

С. Тангавелу и Ю. Шу [8] определили D-потенциал Рисса на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ как интегральный оператор

$$I_\alpha^k f(x) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x) |y|^{\alpha-d_k} d\mu_k(y), \quad (4)$$

где $0 < \alpha < d_k$ и $\gamma_\alpha^k = 2^{\alpha-d_k/2} \Gamma(\alpha/2) / \Gamma((d_k - \alpha)/2)$. Как и для потенциала Рисса для него справедливо равенство $\mathcal{F}_k(I_\alpha^k f) = |\cdot|^{-\alpha} \mathcal{F}_k(f)$.

Потенциал Рисса — положительный оператор. Из определения (4) положительность D-потенциала Рисса не вытекает. Нам удалось показать, что D-потенциал Рисса также является положительным оператором, записав его с помощью положительного оператора обобщенного сдвига.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ — евклидова сфера, $x = rx'$, $r = |x| \in \mathbb{R}_+$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\lambda \geq -1/2$, $b_\lambda^{-1} = 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)$, $d\nu_\lambda(r) = b_\lambda r^{2\lambda+1} dr$ — мера на $\mathbb{R}_+$, $d\sigma_k(x') = a_k v_k(x') dx'$ — вероятностная мера на $\mathbb{S}^{d-1}$. Отметим, что $d\mu_k(x) = d\nu_{\lambda_k}(r) d\sigma_k(x')$.

В [12] на пространстве Шварца нами определен положительный оператор обобщенного сдвига равенством

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x) d\sigma_k(y') = \int_{\mathbb{R}^d} j_{\lambda_k}(t|z|) e_k(x, z) \mathcal{F}_k(f)(z) d\mu_k(z).$$

Его положительность вытекает из представления Реслер [13]

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) d\sigma_{x,t}^k(z),$$

где $\sigma_{x,t}^k$ — вероятностная мера Бореля с носителем

$$\text{supp } \sigma_{x,t}^k \subset \bigcup_{g \in G} \{z \in \mathbb{R}^d : |z - gx| \leq t\}.$$

В частности, $T^t 1 = 1$. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, то $\|T^t f\|_{p, d\mu_k} \leq \|f\|_{p, d\mu_k}$ и оператор T^t может быть продолжен на пространства $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ при $1 \leq p < \infty$ и пространство $C_b(\mathbb{R}^d)$ при $p = \infty$ с сохранением нормы.

D-потенциал Рисса может быть записан следующим образом

$$I_\alpha^k f(x) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \int_0^\infty T^t f(x) t^{\alpha-d_k} d\nu_{\lambda_k}(t). \quad (5)$$

Из представления (5) и L_p -ограниченности оператора T^t вытекает его положительность на всех функциях из L_p , на которых он определен. Поэтому при исследовании весовой (L_p, L_q)-ограниченности D-потенциала Рисса можно ограничиться неотрицательными функциями.

Неравенство Стейна–Вейса для D-потенциала Рисса примет вид

$$\| |x|^{-\gamma} I_\alpha^k f(x) \|_{q, d\mu_k} \leq \mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d) \| |x|^\beta f(x) \|_{p, d\mu_k}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad (6)$$

с константой $\mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ и $1 < p \leq q < \infty$. Неравенство (6) эквивалентно неравенству Харди–Реллиха–Соболева

$$\| |x|^{-\gamma} f(x) \|_{q, d\mu_k} \leq \mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d) \| |x|^\beta (-\Delta_k)^{\alpha/2} f(x) \|_{p, d\mu_k}.$$

В [14] нами доказан полный аналог теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, k — произвольная функция кратности, $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma < \frac{d_k}{q}$, $\beta < \frac{d_k}{p}$, $0 < \alpha < d_k$, и $\alpha - \gamma - \beta = d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$. Константа $\mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ в неравенстве (6) конечна, если $p = q$ или $p < q$ и $\alpha \geq d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$.

Мы видим, что везде размерность d в теореме 1 заменяется на число d_k , которое можно считать обобщенной размерностью евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля.

Если $k \equiv 0$, то $d_k = d$ и теорема 2 сводится к теореме 1. Для группы отражений $\mathbb{Z}_2^d$ и $\gamma = \beta = 0$, теорема 2 была доказана в [8]. Для произвольной группы отражений и $\gamma = \beta = 0$ она была доказана С. Хассани, С. Мустафа и М. Сифи [15]. Мы предложили для этого случая и другое доказательство [12], основанное на идеях работы [8] и использующее представление (5). При $p = q$ теорема 2 была доказана в [16] при более сильных ограничениях $1 < p < \infty$, $0 < \gamma < \frac{d_k}{p}$, $0 < \beta < \frac{d_k}{p}$.

На конференции "Follow-up Approximation Theory and Function Spaces" в Centre de Recerca Matemàtica (CRM, Barcelona, 2017) М.Л. Гольдман поставил вопрос об условиях (L_p, L_q) -ограниченности D-потенциала Рисса с кусочно-степенными весами. Настоящая работа посвящена ответу на этот вопрос.

Пусть $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d: |x| \leq 1\}$, $B_1^c = \mathbb{R}^d \setminus B_1$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$,

$$u_{-\gamma}(x) = |x|^{-\gamma_1} \chi_{B_1}(x) + |x|^{-\gamma_2} \chi_{B_1^c}(x), \quad u_{\beta}(x) = |x|^{\beta_1} \chi_{B_1}(x) + |x|^{\beta_2} \chi_{B_1^c}(x)$$

— кусочно-степенные весовые функции. Рассмотрим неравенство

$$\|u_{-\gamma}(x) I_{\alpha}^k f(x)\|_{q, d\mu_k} \leq \mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d) \|u_{\beta}(x) f(x)\|_{p, d\mu_k} \quad (7)$$

с константой $\mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ и $1 < p \leq q < \infty$.

Неравенство Харди–Реллиха–Соболева в этом случае будет иметь вид

$$\|u_{-\gamma}(x) f(x)\|_{q, d\mu_k} \leq \mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d) \|u_{\beta}(x) (-\Delta_k)^{\alpha/2} f(x)\|_{p, d\mu_k}.$$

Мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $d \in \mathbb{N}$, k — произвольная функция кратности, $1 < p \leq q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. Константа $\mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ в неравенстве (7) конечна при $p = q$ или при $p < q$ и $\alpha \geq d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \gamma_1 < \frac{d_k}{q}, \quad \beta_1 < \frac{d_k}{p'}, \quad \alpha - \gamma_2 < \frac{d_k}{q'}, \quad \alpha - \beta_2 < \frac{d_k}{p}, \\ \gamma_1 + \beta_1 \leq \alpha - d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \leq \gamma_2 + \beta_2. \end{aligned} \quad (8)$$

При доказательстве теоремы 3 используются неравенства типа Харди для операторов Харди и Беллмана в лебеговых пространствах с весом Данкля и кусочно-степенными весами. Они имеют самостоятельный интерес и устанавливаются в секции 2.

Если в теореме 3 положим $\gamma_1 = \gamma_2$, $\beta_1 = \beta_2$, то получим условия (L_p, L_q) -ограниченности в теореме 2.

В общем случае в теореме 3 при $p < q$ нам не известна необходимость условия $\alpha \geq d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. Необходимость этого условия нам удалось доказать только при $k \equiv 0$.

Теорема 4. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $k \equiv 0$, $1 < p \leq q < \infty$, $0 < \alpha < d$. Константа $\mathbf{c}_0(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ конечна в неравенстве (7) тогда и только тогда, когда выполнены условия (8), в которых $d_k = d$, и $\alpha \geq d \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$.

Таким образом, теорема 4 обобщает теорему 1 и показывает, что все условия на параметры в ней являются необходимыми.

Для радиальных функций условие $\alpha \geq d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ при $p < q$ можно ослабить.

Теорема 5. Пусть $d \in \mathbb{N}$, k — произвольная функция кратности, $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. Константа $\mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ в неравенстве (7) конечна на подпространстве радиальных функций тогда и только тогда, когда выполнены условия (8) и

$$\alpha \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \quad (9)$$

Теорема 5 при $\gamma_1 = \gamma_2$, $\beta_1 = \beta_2$ была доказана в [17, 18, 19] (достаточность см. также в [20]).

2. Неравенства типа Харди в пространствах с весом Данкля

Неравенства Харди на полупрямой, простое доказательство и их история изложены, например, в [21], [22, Section 1], [23, Introduction]. Функции в них предполагаются неотрицательными.

Предложение 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $u(r)$, $v(r)$ — измеримые, почти всюду положительные на $\mathbb{R}_+$ весовые функции.

(i) Неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(u(r) \int_0^r f(t) dt \right)^q dr \right)^{1/q} \lesssim \left(\int_0^\infty (v(r)f(r))^p dr \right)^{1/p}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0 < r < \infty} \left(\int_r^\infty u^q(r) dr \right)^{1/q} \left(\int_0^r v^{-p'}(r) dr \right)^{1/p'} < \infty. \quad (10)$$

(ii) Неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(u(r) \int_r^\infty f(t) dt \right)^q dr \right)^{1/q} \lesssim \left(\int_0^\infty (v(r)f(r))^p dr \right)^{1/p}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0 < r < \infty} \left(\int_0^r u^q(r) dr \right)^{1/q} \left(\int_r^\infty v^{-p'}(r) dr \right)^{1/p'} < \infty.$$

Определим операторы Харди

$$Hf(x) = \int_{|y| \leq |x|} f(y) d\mu_k(y)$$

и Беллмана

$$Bf(x) = \int_{|y| \geq |x|} f(y) d\mu_k(y).$$

Для них справедливы следующие неравенства типа Харди в пространствах с весом Данкля. Функции в них также предполагаются неотрицательными.

Теорема 6. Пусть $d \in \mathbb{N}$, k — произвольная функция кратности, d_k и λ_k определены в (3), $1 < p \leq q < \infty$, $u(r)$, $v(r)$ — весовые функции на $\mathbb{R}_+$.

(i) Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} (u(|x|)Hf(x))^q d\mu_k(x) \right)^{1/q} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} (v(|x|)f(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} \quad (11)$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0 < r < \infty} \left(\int_r^\infty u^q(t)t^{2\lambda_k+1} dt \right)^{1/q} \left(\int_0^r v^{-p'}(t)t^{2\lambda_k+1} dt \right)^{1/p'} < \infty. \quad (12)$$

(ii) Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} (u(|x|)Bf(x))^q d\mu_k(x) \right)^{1/q} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} (v(|x|)f(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0 < r < \infty} \left(\int_0^r u^q(t) t^{2\lambda_k+1} dt \right)^{1/q} \left(\int_r^\infty v^{-p'}(t) t^{2\lambda_k+1} dt \right)^{1/p'} < \infty. \quad (13)$$

Доказательство. Оба утверждения в теореме 6 доказываются с помощью предложения 1. Докажем только часть (i). Доказательство части (ii) будет проходить аналогично.

Пусть вначале функция $f(x) = f_0(|x|)$ — радиальная, $x = rx'$, $y = ty'$, $r = |x|$, $t = |y|$. Переходя к полярным координатам, получим

$$\begin{aligned} Hf(x) &= \int_{|y| \leq |x|} f(y) d\mu_k(y) = \int_0^r \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(ty') d\sigma_k(y') d\nu_{\lambda_k}(t) \\ &= \int_0^r f_0(t) d\nu_{\lambda_k}(t) = b_{\lambda_k} \int_0^r f_0(t) t^{2\lambda_k+1} dt, \\ \left(\int_{\mathbb{R}^d} (u(|x|) Hf(x))^q d\mu_k(x) \right)^{1/q} &= b_{\lambda_k}^{1+1/q} \left(\int_0^\infty \left(u(r) r^{\frac{2\lambda_k+1}{q}} \int_0^r f_0(t) t^{2\lambda_k+1} dt \right)^q dr \right)^{1/q}, \\ \left(\int_{\mathbb{R}^d} (v(|x|) f(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} &= b_{\lambda_k}^{1/p} \left(\int_0^\infty (v(r) r^{\frac{2\lambda_k+1}{p}} f_0(r))^p dr \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

После замены $g(t) = f_0(t) t^{2\lambda_k+1}$ неравенство (9) будет эквивалентно неравенству

$$\left(\int_0^\infty \left(u(r) r^{\frac{2\lambda_k+1}{q}} \int_0^r g(t) dt \right)^q dr \right)^{1/q} \lesssim \left(\int_0^\infty (v(r) r^{-\frac{2\lambda_k+1}{p'}} f(r))^p dr \right)^{1/p}.$$

Применяя (10), приходим к условию (12).

Так как $Hf(x)$ всегда радиальная функция, то общий случай может быть сведен к радиальному. Пусть $f(x)$ — произвольная, $f_0(r) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(rx') d\sigma_k(x')$ и выполнено (12). Применяя неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty (v(r) f_0(r))^p d\nu_{\lambda_k}(r) \right)^{1/p} &= \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(rx') d\sigma_k(x') \right)^p v^p(r) d\nu_{\lambda_k}(r) \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} (v(|x|) f(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

По уже доказанному,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (u(|x|) Hf(x))^q d\mu_k(x) \right)^{1/q} &= \left(\int_0^\infty \left(u(r) r^{\frac{2\lambda_k+1}{q}} \int_0^r f_0(t) t^{2\lambda_k+1} dt \right)^q dr \right)^{1/q} \\ &\lesssim \left(\int_0^\infty (v(r) r^{\frac{2\lambda_k+1}{p}} f_0(r))^p dr \right)^{1/p} \\ &\lesssim \left(\int_0^\infty (v(r) f_0(r))^p d\nu_{\lambda_k}(r) \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} (v(|x|) f(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (11) доказано. $\square$

Напомним, что для $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ кусочно-степенной вес имеет вид

$$u_\gamma(x) = |x|^{\gamma_1} \chi_{B_1}(x) + |x|^{\gamma_2} \chi_{B_1^c}(x).$$

Теорема 7. Пусть $d \in \mathbb{N}$, k — произвольная функция кратности, $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} (u_{-\gamma}(|x|) Hf(x))^q d\mu_k(x) \right)^{1/q} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} (u_\beta(|x|) f(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} \quad (14)$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\beta_1 < \frac{d_k}{p'}, \quad \gamma_2 > \frac{d_k}{q}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leq d_k \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right) \leq \gamma_2 + \beta_2.$$

Доказательство. В силу теоремы 6 необходимо проверить выполнение условия (12)

$$\sup_{0 < r < \infty} A(r) = \sup_{0 < r < \infty} \left(\int_r^\infty u_{-\gamma}^q(t) t^{2\lambda_k+1} dt \right)^{1/q} \left(\int_0^r u_\beta^{-p'}(t) t^{2\lambda_k+1} dt \right)^{1/p'} < \infty.$$

Если $0 < r \leq 1$, то

$$A(r) \asymp \left(\int_r^1 t^{-\gamma_1 q + 2\lambda_k + 1} dt + \int_1^\infty t^{-\gamma_2 q + 2\lambda_k + 1} dt \right)^{1/q} \left(\int_0^r t^{-\beta_1 p' + 2\lambda_k + 1} dt \right)^{1/p'}.$$

Необходимо потребовать

$$\int_1^\infty t^{-\gamma_2 q + 2\lambda_k + 1} dt < \infty, \quad \int_0^1 t^{-\beta_1 p' + 2\lambda_k + 1} dt < \infty,$$

или $\gamma_2 > \frac{d_k}{q}$, $\beta_1 < \frac{d_k}{p'}$. При выполнении этих условий

$$A(r) \asymp r^{-\beta_1 + d_k/p'} \left(1 + r^{-\gamma_1 + d_k/q} \right) = r^{-\beta_1 + d_k/p'} + r^{-\gamma_1 - \beta_1 + d_k(1/p' + 1/q)},$$

поэтому из конечности $\sup_{0 < r \leq 1} A(r)$ вытекает условие $\gamma_1 + \beta_1 \leq d_k \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right)$.

Если $r \geq 1$, то

$$\begin{aligned} A(r) &\asymp \left(\int_r^\infty t^{-\gamma_2 q + 2\lambda_k + 1} dt \right)^{1/q} \left(\int_0^1 t^{-\beta_1 p' + 2\lambda_k + 1} dt + \int_1^r t^{-\beta_2 p' + 2\lambda_k + 1} dt \right)^{1/p'} \\ &\asymp r^{-\gamma_2 + d_k/q} \left(1 + r^{-\beta_2 + d_k/p'} \right) = r^{-\gamma_2 + d_k/q} + r^{-\gamma_2 - \beta_2 + d_k(1/p' + 1/q)}. \end{aligned}$$

Из конечности $\sup_{r \geq 1} A(r)$ вытекает условие $\gamma_2 + \beta_2 \geq d_k \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right)$. $\square$

Теорема 8. Пусть $d \in \mathbb{N}$, k — произвольная функция кратности, $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. Неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} (u_{-\gamma}(|x|) Bf(x))^q d\mu_k(x) \right)^{1/q} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} (u_\beta(|x|) f(x))^p d\mu_k(x) \right)^{1/p} \quad (15)$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\beta_2 > \frac{d_k}{p'}, \quad \gamma_1 < \frac{d_k}{q}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leq d_k \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} \right) \leq \gamma_2 + \beta_2.$$

Доказательство. В силу теоремы 6 необходимо проверить выполнение условия (13)

$$\sup_{0 < r < \infty} A(r) = \sup_{0 < r < \infty} \left(\int_0^r u_{-\gamma}^q(t) t^{2\lambda_k+1} dt \right)^{1/q} \left(\int_r^\infty u_\beta^{-p'}(t) t^{2\lambda_k+1} dt \right)^{1/p'} < \infty.$$

Если $0 < r \leq 1$, то

$$A(r) \asymp \left(\int_0^r t^{-\gamma_1 q + 2\lambda_k + 1} dt \right)^{1/q} \left(\int_r^1 t^{-\beta_1 p' + 2\lambda_k + 1} dt + \int_1^\infty t^{-\beta_2 p' + 2\lambda_k + 1} dt \right)^{1/p'}.$$

Необходимо потребовать

$$\int_1^\infty t^{-\beta_2 p' + 2\lambda_k + 1} dt < \infty, \quad \int_0^1 t^{-\gamma_1 q + 2\lambda_k + 1} dt < \infty,$$

или $\gamma_1 < \frac{d_k}{q}$, $\beta_2 > \frac{d_k}{p'}$. При выполнении этих условий

$$A(r) \asymp r^{-\gamma_1 + d_k/q} \left(1 + r^{-\beta_1 + d_k/p'}\right) = r^{-\gamma_1 + d_k/p'} + r^{-\gamma_1 - \beta_1 + d_k(1/p' + 1/q)},$$

поэтому из конечности $\sup_{0 < r \leq 1} A(r)$ вытекает условие $\gamma_1 + \beta_1 \leq d_k \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}\right)$.

Если $r \geq 1$, то

$$\begin{aligned} A(r) &\asymp \left(\int_0^1 t^{-\gamma_1 q + 2\lambda_k + 1} dt + \int_1^r t^{-\gamma_1 q + 2\lambda_k + 1} dt\right)^{1/q} \left(\int_r^\infty t^{-\beta_2 p' + 2\lambda_k + 1} dt\right)^{1/p'} \\ &\asymp r^{-\beta_2 + d_k/p'} \left(1 + r^{-\gamma_2 + d_k/q}\right) = r^{-\beta_2 + d_k/q} + r^{-\gamma_2 - \beta_2 + d_k(1/p' + 1/q)}. \end{aligned}$$

Из конечности $\sup_{r \geq 1} A(r)$ вытекает условие $\gamma_2 + \beta_2 \geq d_k \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}\right)$. $\square$

3. Доказательство основных теорем

Доказательство теоремы 3. Можно считать, что $f(x) \geq 0$ и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. В [14] для D-потенциала Рисса получено интегральное представление

$$I_\alpha^k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \Phi_\alpha(x, y) d\mu_k(y) \quad (16)$$

с ядром $\Phi_\alpha(x, y)$, для которого выполнены свойства:

1. $\Phi_\alpha(x, y) = \Phi_\alpha(y, x)$;
2. $\Phi_\alpha(rx', ty') = r^{\alpha - d_k} \Phi_\alpha(x', (t/r)y')$;
3. $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_\alpha(rx', ty') d\sigma_k(x') = \Phi_{\alpha,0}(r, t)$, где $c_{\lambda_k}^{-1} = \int_0^\pi \sin^{d_k-2} \varphi d\varphi$,

$$\Phi_{\alpha,0}(r, t) := (\gamma_\alpha^k)^{-1} c_{\lambda_k} \int_0^\pi (r^2 + t^2 - 2rt \cos \varphi)^{(\alpha - d_k)/2} \sin^{d_k-2} \varphi d\varphi;$$

4. $\Phi_\alpha(x, y) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 + |y|^2 - 2(y, \eta))^{(\alpha - d_k)/2} d\mu_x^k(\eta)$,
где μ_x^k — вероятностная мера из (2) и $\text{supp } \mu_x^k \subset B_{|x|} = \{\eta: |\eta| \leq |x|\}$.

Разобьем (16) на сумму трех линейных операторов

$$I_\alpha^k f(x) = J_1 f(x) + J_2 f(x) + J_3 f(x), \quad (17)$$

где

$$J_1 f(x) = \int_{|y| \leq |x|/2} f(y) \Phi_\alpha(x, y) d\mu_k(y), \quad J_2 f(x) = \int_{|y| \geq 2|x|} f(y) \Phi_\alpha(x, y) d\mu_k(y),$$

$$J_3 f(x) = \int_{|x|/2 \leq |y| \leq 2|x|} f(y) \Phi_\alpha(x, y) d\mu_k(y).$$

Оценка $J_1 f$. Так как

$$(|x| - |y|)^2 \leq |x|^2 + |y|^2 - 2(y, \eta) \leq (|x| + |y|)^2,$$

то при $|y| \leq |x|/2$ из свойства 4 $\Phi_\alpha(x, y) \asymp |x|^{\alpha-d_k}$. Следовательно,

$$J_1 f(x) \asymp |x|^{\alpha-d_k} \int_{|y| \leq |x|/2} f(y) d\mu_k(y) = |x|^{\alpha-d_k} Hf(x/2).$$

Кусочно-степенной вес обладает слабой однородностью

$$c_1(\lambda) u_{-\gamma}(x) \leq u_{-\gamma}(\lambda x) \leq c_2(\lambda) u_{-\gamma}(x), \quad \lambda > 0,$$

поэтому по теореме 7

$$\begin{aligned} \|u_{-\gamma}(x) J_1 f(x)\|_{q, d\mu_k} &\asymp \|u_{-\gamma}(x) |x|^{\alpha-d_k} Hf(x/2)\|_{q, d\mu_k} \\ &\asymp \|u_{-\gamma}(x) |x|^{\alpha-d_k} Hf(x)\|_{q, d\mu_k} \lesssim \|u_\beta(x) f(x)\|_{p, d\mu_k} \end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда

$$\beta_1 < \frac{d_k}{p'}, \quad \alpha - \gamma_2 < \frac{d_k}{q'}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leq \alpha - d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \leq \gamma_2 + \beta_2.$$

Оценка $J_2 f$. При $|y| \geq 2|x|$, $\Phi_\alpha(x, y) \asymp |y|^{\alpha-d_k}$. Следовательно,

$$J_2 f(x) \asymp \int_{|y| \geq 2|x|} f(y) |y|^{\alpha-d_k} d\mu_k(y) = \int_{|y| \geq 2|x|} g(y) d\mu_k(y) = Bg(2x),$$

где $g(y) = f(y) |y|^{\alpha-d_k}$. Необходимо найти условия на параметры, при которых имеет место неравенство

$$\|u_{-\gamma}(x) Bg(2x)\|_{q, d\mu_k} \lesssim \|u_\beta(x) |x|^{d_k-\alpha} g(x)\|_{p, d\mu_k}.$$

По теореме 8

$$\begin{aligned} \|u_{-\gamma}(x) Bg(2x)\|_{q, d\mu_k} &\asymp \|u_{-\gamma}(x) Bg(x)\|_{q, d\mu_k} \\ &\lesssim \|u_\beta(x) |x|^{d_k-\alpha} g(x)\|_{p, d\mu_k} \end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда

$$\alpha - \beta_2 < \frac{d_k}{p}, \quad \gamma_1 < \frac{d_k}{q}, \quad \gamma_1 + \beta_1 \leq \alpha - d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \leq \gamma_2 + \beta_2.$$

Оценка $J_3 f$. Остается показать, что при выполнении условий (8) и при $p < q$ условия $\alpha \geq d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ справедливо неравенство

$$\|u_{-\gamma}(x) J_3 f(x)\|_{q, d\mu_k} \lesssim \|u_\beta(x) f(x)\|_{p, d\mu_k}. \quad (18)$$

Вначале докажем неравенство

$$\|\chi_{B_1}(x) u_{-\gamma}(x) J_3 f(x)\|_{q, d\mu_k} \lesssim \|u_\beta(x) f(x)\|_{p, d\mu_k}. \quad (19)$$

Неравенство (19) эквивалентно неравенству

$$\|\chi_{B_1}(x) u_{-\gamma}(x) J_3(u_{-\beta} f)(x)\|_{q, d\mu_k} \lesssim \|f(x)\|_{p, d\mu_k}.$$

Учитывая, что при $|x| \leq 1$, $u_{-\gamma}(x) \asymp |x|^{-\gamma_1}$, $u_{-\beta}(x) \asymp |x|^{-\beta_1}$, запишем последнее неравенство в виде

$$A := \|\chi_{B_1}(x)|x|^{-\gamma_1-\beta_1}J_3f(x)\|_{q,d\mu_k} \lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_k}.$$

Так как

$$\frac{d_k}{q} + \frac{d_k}{p'} > \alpha - d_k\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \text{ или } d_k > \alpha,$$

то существует пара (γ_0, β_0) такая, что

$$\gamma_0 < \frac{d_k}{q}, \quad \beta_0 < \frac{d_k}{p'}, \quad \gamma_0 + \beta_0 = \alpha - d_k\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \geq \gamma_1 + \beta_1.$$

Поэтому, применяя теорему 2 для пары (γ_0, β_0) , получим

$$\begin{aligned} A &\leq \left(\int_{|x| \leq 1} \left(|x|^{-\gamma_0-\beta_0} \int_{|x|/2 \leq |y| \leq 2|x|} f(y) \Phi_\alpha(x, y) d\mu_k(y) \right)^q d\mu_k(x) \right)^{1/q} \\ &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(|x|^{-\gamma_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) |y|^{-\beta_0} \Phi_\alpha(x, y) d\mu_k(y) \right)^q d\mu_k(x) \right)^{1/q} \\ &\lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_k}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что неравенство (6) может быть записано в эквивалентной форме

$$\||x|^{-\gamma} I_\alpha^k(|\cdot|^{-\beta} f)(x)\|_{q,d\mu_k} \leq \mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d) \|f(x)\|_{p,d\mu_k}.$$

Неравенство (19) доказано.

Докажем неравенство

$$\|\chi_{B_1^c}(x)u_{-\gamma}(x)J_3f(x)\|_{q,d\mu_k} \lesssim \|u_{-\beta}(x)f(x)\|_{p,d\mu_k}. \quad (20)$$

Оно эквивалентно неравенству

$$\|\chi_{B_1^c}(x)u_{-\gamma}(x)J_3(u_{-\beta}f)(x)\|_{q,d\mu_k} \lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_k}.$$

Из условия $|x| \geq 1$ вытекает $u_{-\gamma}(x) \asymp |x|^{-\gamma_2}$, $u_{-\beta}(x) \asymp |x|^{-\beta_2}$, поэтому последнее неравенство можно записать так

$$A := \|\chi_{B_1^c}(x)|x|^{-\gamma_2-\beta_2}J_3f(x)\|_{q,d\mu_k} \lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_k}.$$

Так как

$$\alpha - \frac{d_k}{q'} + \alpha - \frac{d_k}{p} < \alpha - d_k\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \text{ или } \alpha < d_k,$$

то существует пара (γ_0, β_0) такая, что

$$\alpha - \gamma_0 < \frac{d_k}{q'}, \quad \alpha - \beta_0 < \frac{d_k}{p}, \quad \gamma_0 + \beta_0 = \alpha - d_k\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \leq \gamma_2 + \beta_2.$$

Для нее также $\gamma_0 < \frac{d_k}{q}$, $\beta_0 < \frac{d_k}{p'}$ и по теореме 2 для пары (γ_0, β_0)

$$\begin{aligned} A &\leq \left(\int_{|x| \leq 1} \left(|x|^{-\gamma_0-\beta_0} \int_{|x|/2 \leq |y| \leq 2|x|} f(y) \Phi_\alpha(x, y) d\mu_k(y) \right)^q d\mu_k(x) \right)^{1/q} \\ &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(|x|^{-\gamma_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) |y|^{-\beta_0} \Phi_\alpha(x, y) d\mu_k(y) \right)^q d\mu_k(x) \right)^{1/q} \\ &\lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_k}. \end{aligned}$$

Неравенство (20) также доказано. Из (19), (20) вытекает неравенство (18). $\square$

Доказательство теоремы 4. С учетом теоремы 3 остается установить необходимость условия $\alpha \geq d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. Пусть $0 < \varepsilon < 1/3$, $x_0 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$, $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0| \leq \varepsilon\}$. Если $x, y \in B_\varepsilon(x_0)$, то

$$\frac{1}{2}|x| \leq \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)|x_0| \leq (1 - \varepsilon)|x_0| \leq |y| \leq (1 + \varepsilon)|x_0| \leq 2(1 - \varepsilon)|x_0| \leq 2|x|$$

и с постоянными, не зависящими от ε ,

$$u_{-\gamma}(x) \asymp 1, \quad u_\beta(x) \asymp 1,$$

поэтому,

$$\begin{aligned} \|\chi_{B_\varepsilon(x_0)}(x) u_{-\gamma}(x) I_\alpha(\chi_{B_\varepsilon(x_0)})(x)\|_{q, d\mu_k} &\gtrsim \left(\int_{B_\varepsilon(x_0)} \left(\int_{B_\varepsilon(x_0)} \frac{dy}{|x - y|^{d-\alpha}} \right)^q dx \right)^{1/q}, \\ \|u_\beta(x) \chi_{B_\varepsilon(x_0)}(x)\|_{p, d\mu_k} &\lesssim \left(\int_{B_\varepsilon(x_0)} dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Делая в интегралах замены переменных $x = x_0 + \varepsilon z$, $y = x_0 + \varepsilon w$, получим

$$\begin{aligned} \|u_{-\gamma}(x) I_\alpha(\chi_{B_\varepsilon(x_0)})(x)\|_{q, d\mu_k} &\gtrsim \varepsilon^{\alpha+d/q} \left(\int_{B_1} \left(\int_{B_1} \frac{dw}{|z - w|^{d-\alpha}} \right)^q dz \right)^{1/q} \gtrsim \varepsilon^{\alpha+d/q}, \\ \|u_\beta(x) \chi_{B_\varepsilon(x_0)}(x)\|_{p, d\mu_k} &\lesssim \varepsilon^{d/p}. \end{aligned}$$

Следовательно, для справедливости неравенства (7) при $\varepsilon \rightarrow 0$ необходимо выполнение условия $\alpha + \frac{d}{q} \geq \frac{d}{p}$. $\square$

Рассмотрим сужение D-потенциала Рисса на радиальные функции. Пусть $x = rx'$, $y = ty'$, $r = |x|$, $t = |y|$, $f(x) = f_0(r)$. Применяя полярные координаты, свойства 1, 3 ядра $\Phi_\alpha(x, y)$, получим

$$I_\alpha^k f(x) = \int_0^\infty f_0(r, t) \Phi_{\alpha, 0}(r, t) d\nu_{\lambda_k}(t) = I_\alpha^{\lambda_k} f_0(r),$$

где

$$\Phi_{\alpha, 0}(r, t) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} c_{\lambda_k} \int_0^\pi (r^2 + t^2 - 2rt \cos \varphi)^{(\alpha-d_k)/2} \sin^{d_k-2} \varphi d\varphi.$$

Пусть $L^p(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda_k})$, $1 \leq p < \infty$, — пространства Лебега с нормой

$$\|f\|_{p, d\nu_{\lambda_k}} = \left(\int_0^\infty |f|^p d\nu_{\lambda_k} \right)^{1/p} < \infty.$$

Для радиальной функции $\|f(x)\|_{p, d\mu_k} = \|f_0(r)\|_{p, d\nu_{\lambda_k}}$.

Предложение 2 [17-19]. Пусть $d \in \mathbb{N}$, k — произвольная функция кратности, $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. Неравенство

$$\|r^{-\gamma} I_\alpha^{\lambda_k} f_0(r)\|_{q, d\nu_{\lambda_k}} \lesssim \|r^\beta f_0(r)\|_{p, d\nu_{\lambda_k}}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\gamma < \frac{d_k}{q}, \quad \beta < \frac{d_k}{p'}, \quad \alpha \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \quad \alpha - \gamma - \beta = d_k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right).$$

Доказательство теоремы 5. Пусть $r = |x|$, $f(x) = f_0(r)$ — неотрицательная радиальная функция. Как и при доказательстве теоремы 3 будем использовать разложение (17). Так как в неравенствах (14), (15) экстремальным является подпространство радиальных функций, то условия (8) являются необходимыми и достаточными для справедливости неравенств

$$\|u_{-\gamma}(x)J_i f(x)\|_{q,d\mu_k} \lesssim \|u_\beta(x)f(x)\|_{p,d\mu_k}, \quad i = 1, 2.$$

Неравенство

$$\|u_{-\gamma}(x)J_3 f(x)\|_{q,d\mu_k} \lesssim \|u_\beta(x)f(x)\|_{p,d\mu_k}$$

доказывается также как и в теореме 3, только вместо теоремы 2 следует использовать предложение 2.

Необходимость условия $\alpha \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ доказана, например, в [19]. $\square$

4. Заключение

Ограниченность D-потенциала Рисса исследована в лебеговых пространствах с весом Данкля для степенных и кусочно-степенных весов. Хотя в теоремах 2, 3 остается невыясненным вопрос о необходимости при $p < q$ условия $\alpha \geq d_k\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$. Другой важной задачей становится исследование ограниченности D-потенциала Рисса для пары общих весов $u(x)$, $v(x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frostman O. Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications a la theorie des fonctions. These. Commun. Semin. Math. de l'Univ. de Lund., 1935. Vol. 3.
2. Riesz M. L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy // Acta Math. 1949. Vol. 81, № 1. P. 1–222.
3. Hardy G.H., Littlewood J.E. Some properties of fractional integrals, I // Math. Zeit. 1928. Vol. 27. P. 565–606.
4. Соболев С. Об одной теореме функционального анализа // Матем. сб. 1938. Т. 4(46), № 4. С. 471–497.
5. Stein E.M., Weiss G. Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space // J. Math. Mech. 1958. Vol. 7, № 4. P. 503–514.
6. Dunkl C.F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.
7. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2003. Vol. 1817. P. 93–135.
8. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.
9. Rösler M. Positivity of Dunkl's intertwining operator // Duke Math. J. 1999. Vol. 98. P. 445–463.
10. Rösler M. Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators // Comm. Math. Phys. 1998. Vol. 192. P. 519–542.

11. Trimèche K. Paley-Wiener Theorems for the Dunkl transform and Dunkl translation operators // *Integral Transform. Spec. Funct.* 2002. Vol. 13. P. 17–38.
12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L_p -bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // *Constr. Approx.* 2018. P. 1–51.
doi.org/10.1007/s00365-018-9435-5
13. Rösler M. A positive radial product formula for the Dunkl kernel // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2003. Vol. 355, № 6. P. 2413–2438.
14. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform. Preprint CRM, Barcelona, 2018. № 1238. P. 1–28.
15. Hassani S., Mustapha S., Sifi M. Riesz potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform // *J. Lie Theory.* 2009. Vol. 19, № 4. P. 725–734.
16. Abdelkefi C., Rachdi M. Some properties of the Riesz potentials in Dunkl analysis // *Ricerche Mat.* 2015. Vol. 64, № 4. P. 195–215.
17. Nowak A., Stempak K. Potential operators associated with Hankel and Hankel-Dunkl transforms // *J. d'Analyse Math.* 2017. Vol. 131, № 1. P. 277–321.
18. De Nápoli P. L., Drelichman I., Durán R. G. On weighted inequalities for fractional integrals of radial functions // *Illinois J. Math.* 2011. Vol. 55. P. 575–587.
19. Duoandikoetxea J. Fractional integrals on radial functions with applications to weighted inequalities // *Ann. Mat. Pura Appl.* 2013. Vol. 192. P. 553–568.
20. Рубин Б. С. Одномерное представление, обращение и некоторые свойства потенциалов Рисса от радиальных функций // *Матем. заметки.* 1983. Т. 34, № 4. P. 521–533.
21. Sinnamon G, Stepanov V. D. The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // *J. London Math. Soc.* 1996. Vol. 54, № 2. P. 89–101.
22. Kufner A., Opic B. Xardy-type inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Harlow: Longman Scientific and Technical, 1990. 333 p.
23. Kufner A., Persson L. E. Weighted inequalities of Xardy type. Singopure-London: World Scientific hrblishing Co. Pte. Ltd., 2003. 358 p.

REFERENCES

1. Frostman O., 1935, “Potentiel d’équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions”, *These, Commun. Semin. Math. de l’Univ. de Lund.*, vol. 3.
2. Riesz M., 1949, “L’intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy”, *Acta Math.*, vol. 81, № 1, pp. 1–222.
3. Hardy G. H., Littlewood J. E., 1928, “Some properties of fractional integrals, I”, *Math. Zeit.*, vol. 27, pp. 565–606.
4. Soboleff S., 1963, “Sur un théorème d’analyse fonctionnelle”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, № 2(34), pp. 39–68.

5. Stein E. M., Weiss G., 1958, "Fractional integrals on n -dimensional Euclidean space", *J. Math. Mech.*, vol. 7, № 4, pp. 503–514.
6. Dunkl C. F., 1992, "Hankel transforms associated to finite reflections groups", *Contemp. Math.*, vol. 138, pp. 123–138.
7. Rösler M., 2003, "Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions", *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.
8. Thangavelu S., Xu Y., 2007, "Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 199, pp. 181–195.
9. Rösler M., 1999, "Positivity of Dunkl's intertwining operator", *Duke Math. J.*, vol. 98, pp. 445–463.
10. Rösler M., 1998, "Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators", *Comm. Math. Phys.*, vol. 192, pp. 519–542.
11. Trimèche K., 2002, "Paley-Wiener Theorems for the Dunkl transform and Dunkl translation operators", *Integral Transform. Spec. Funct.*, vol. 13, pp. 17–38.
12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2018, "Positive L_p -bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications", *Constr. Approx.*, doi.org/10.1007/s00365-018-9435-5, pp. 1–51.
13. Rösler M., 2003, "A positive radial product formula for the Dunkl kernel", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 355, № 6, pp. 2413–2438.
14. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2018, "Riesz potential and maximal function for Dunkl transform", *Preprint CRM, Barcelona*, № 1238, pp. 1–28.
15. Hassani S., Mustapha S., Sifi M., 2009, "Riesz potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform", *J. Lie Theory*, vol. 19, № 4, pp. 725–734.
16. Abdelkefi C., Rachdi M., 2015, "Some properties of the Riesz potentials in Dunkl analysis", *Ricerche Mat.*, vol. 64, № 4, pp. 195–215.
17. Nowak A., Stempak K., 2017, "Potential operators associated with Hankel and Hankel-Dunkl transforms", *J. d'Analyse Math.*, vol. 131, № 1, pp. 277–321.
18. De Nápoli P. L., Drelichman I., Durán R. G., 2011, "On weighted inequalities for fractional integrals of radial functions", *Illinois J. Math.*, vol. 55, pp. 575–587.
19. Duoandikoetxea J., 2013, "Fractional integrals on radial functions with applications to weighted inequalities", *Ann. Mat. Pura Appl.*, vol. 192, pp. 553–568.
20. Rubin B. S., 1983, "One-dimensional representation, inversion and certain properties of Riesz potentials of radial functions", *Math. Notes*, vol. 34, № 4, pp. 751–757.
21. Sinnamon G., Stepanov V. D., 1996, "The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ ", *J. London Math. Soc.*, vol. 54, № 2, pp. 89–101.
22. Kufner A., Opic B., 1990, "Xardy-type inequalities", Pitman Research Notes in Mathematics Series, Harlow: Longman Scientific and Technical, 333 p.

-
23. Kufner A., Persson L. E., 2003, “Weighted inequalities of Hardy type”, *Singapore-London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, 358 p.

Получено 13.02.2019

Принято к печати 10.04.2019

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-1-148-163

Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел¹

Н. Н. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

В работе исследуется дзета-функция $\zeta(M(p_1, p_2)|\alpha)$ моноида $M(p_1, p_2)$, порожденного простыми числами $p_1 < p_2$ вида $3n + 2$. Далее, выделяется основной моноид $M_{3,1}(p_1, p_2) \subset M(p_1, p_2)$ и основное множество $A_{3,1}(p_1, p_2) = M(p_1, p_2) \setminus M_{3,1}(p_1, p_2)$. Для соответствующих дзета-функций найдены явные конечные формулы, задающие аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, кроме счётного множества полюсов. Найдены обратные ряды для этих дзета-функций и функциональные уравнения.

В работе даны определения трёх новым типам моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы: моноиды степеней, моноиды Эйлера по модулю q и единичные моноиды по модулю q . Указаны выражение их дзета-функций через эйлеровы произведения.

В работе рассмотрен эффект Дэвенпорта — Хейльбронна для дзета-функций моноидов натуральных чисел, связанный с появлением нулей у дзета-функций слагаемых, получающихся при разбиении на классы вычетов по модулю.

Для моноидов с экспоненциальной последовательностью простых чисел доказана гипотеза о заградительном ряде и показано, что областью голоморфности дзета-функции такого моноида является комплексная полуплоскость справа от мнимой оси.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710005_р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-148-163

One model Zeta function of the monoid of natural numbers²

N. N. Dobrovol'skii

Dobrovol'sky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate professor of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

The paper studies the Zeta function $\zeta(M(p_1, p_2)|\alpha)$ of the monoid $M(p_1, p_2)$ generated by Prime numbers $p_1 < p_2$ of the form $3n + 2$. Next, the main monoid $M_{3,1}(p_1, p_2) \subset M(p_1, p_2)$ and the main set $A_{3,1}(p_1, p_2) = M(p_1, p_2) \setminus M_{3,1}(p_1, p_2)$ are distinguished. For the corresponding Zeta functions, explicit finite formulas are found that give an analytic continuation on the entire complex plane except for the countable set of poles. Inverse series for these Zeta functions and functional equations are found.

The paper gives definitions of three new types of monoids of natural numbers with a unique decomposition into simple elements: monoids of degrees, Euler monoids modulo q and unit monoids modulo q . Provided the expression of the Zeta functions using the Euler product.

The paper discusses the effect Davenport — Heilbronn Zeta-functions of monoids of natural numbers that is associated with the appearance of zeros of the Zeta-functions of terms obtained by the classes of residues modulo.

For monoids with an exponential sequence of primes, the barrier series hypothesis is proved and it is shown that the holomorphic domain of the Zeta function of such a monoid is the complex half-plane to the right of the imaginary axis.

In conclusion, topical problems with zeta-functions of monoids of natural numbers that require further investigation are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, 2019, "One model Zeta function of the monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 148–163.

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710005_r_a.

*Посвящается 70-летию академика Литовской АН,
профессора Антанаса Лауринчикаса*

1. Введение

Пусть $p_1 < p_2$ — два простых числа вида $3n + 2$. Например, $p_1 = 2, p_2 = 5$. Через $M(p_1, p_2)$ обозначаем, как обычно, моноид, порожденный простыми числами p_1 и p_2 :

$$M(p_1, p_2) = \{n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \mid \beta_1, \beta_2 \geq 0\}, \quad \zeta(M(p_1, p_2)|\alpha) = \sum_{n \in M(p_1, p_2)} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > 0).$$

Ясно, что моноид $M(p_1, p_2)$ с однозначным разложением на простые множители, и поэтому его дзета-функция выражается через конечное эйлерово произведение:

$$\zeta(M(p_1, p_2)|\alpha) = P(M(p_1, p_2)|\alpha) = \left(1 - \frac{1}{p_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^\alpha}\right)^{-1}.$$

Рассмотрим моноид $M_{3,1}(p_1, p_2) \subset M(p_1, p_2)$, заданный равенством

$$M_{3,1}(p_1, p_2) = \{n = 3k + 1 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \mid \beta_1 + \beta_2 \equiv 0 \pmod{2}\},$$

который для краткости будем называть основным моноидом, и основное множество

$$A_{3,1}(p_1, p_2) = M(p_1, p_2) \setminus M_{3,1}(p_1, p_2) = \{n = 3k + 2 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \mid \beta_1 + \beta_2 \equiv 1 \pmod{2}\}.$$

Для моноида $M_{3,1}(p_1, p_2)$ нетрудно описать $P(M_{3,1}(p_1, p_2))$ — множество простых элементов: $P(M_{3,1}(p_1, p_2)) = \{q_1, q_2, q_3\}$ и состоит из псевдопростых чисел

$$q_1 = p_1^2 < q_2 = p_1 p_2 < q_3 = p_2^2.$$

Обозначим через $P(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \prod_{q \in P(M_{3,1}(p_1, p_2))} \left(1 - \frac{1}{q^\alpha}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{q_3^\alpha}\right)^{-1}.$$

Будем называть каноническим разложением элемента n из мультипликативного моноида $M_{3,1}(p_1, p_2)$ натуральных чисел представление вида $n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} q_3^{\beta_3}$. Через $k(n)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа n , тогда эйлерово произведение $P(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \sum_{n \in M_{3,1}(p_1, p_2)} \frac{k(n)}{n^\alpha}.$$

Так как в моноиде $M_{3,1}(p_1, p_2)$ нет однозначности разложения на простые элементы, действительно, $q_1 q_3 = q_2^2$, то $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) \neq P(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$.

Интересно, что моноид $M(q_1, q_2)$ имеет однозначное разложение на множители, так как $q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} = p_1^{2\beta_1 + \beta_2} p_2^{\beta_2}$, что доказывает однозначность разложения на простые элементы. Поэтому

$$\zeta(M(q_1, q_2)|\alpha) = \sum_{n \in M(q_1, q_2)} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} \frac{1}{(q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2})^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1} = P(M(q_1, q_2)|\alpha).$$

И вообще, справедливо равенство $\zeta(M(q_\nu, q_\mu)|\alpha) = P(M(q_\nu, q_\mu)|\alpha) \quad 1 \leq \nu < \mu \leq 3$.

Цель данной работы — найти обратный ряд Дирихле для дзета-функции $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ и аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Кроме этого, в работе будет доказана гипотеза о заградительном ряде для дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых чисел.

2. Вес, порядок и радиус в точке

Рассмотрим функцию $f(\alpha)$ от комплексного аргумента в окрестности точки α_0 и её разложение в ряд Лорана:

$$f(\alpha) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_{\nu}(\alpha - \alpha_0)^{\nu}, \quad c_n \neq 0.$$

Назовём *порядком* и *весом в точке* α_0 величины n и c_n , соответственно. Эти два функционала будем обозначать следующим образом:

$$\text{ord}_{\alpha_0} f(\alpha) = n, \quad \text{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha) = c_n.$$

Нетрудно видеть, что если $n > 0$, то порядок функции $f(\alpha)$ в точке α_0 равен порядку нуля в этой точке. Если порядок нулевой, то вес в точке α_0 равен значению функции в этой точке. Наконец, если порядок отрицательный, то он со знаком минус равен порядку полюса в точке α_0 .

ЛЕММА 1. *Функционал порядка аддитивен:*

$$\text{ord}_{\alpha_0} f(\alpha)g(\alpha) = \text{ord}_{\alpha_0} f(\alpha) + \text{ord}_{\alpha_0} g(\alpha).$$

Функционал веса мультипликативен:

$$\text{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha)g(\alpha) = \text{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha) \cdot \text{Wei}_{\alpha_0} g(\alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть функции $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ раскладываются в ряды Лорана:

$$f(\alpha) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_{\nu}(\alpha - \alpha_0)^{\nu}, \quad c_n \neq 0, \quad g(\alpha) = \sum_{\mu=m}^{\infty} d_{\mu}(\alpha - \alpha_0)^{\mu}, \quad d_m \neq 0,$$

тогда

$$f(\alpha)g(\alpha) = \sum_{\nu=n+m}^{\infty} \left(\sum_{\mu=m}^{\nu-n} c_{\nu-\mu} d_{\mu} \right) (\alpha - \alpha_0)^{\nu}, \quad c_n d_m \neq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\text{ord}_{\alpha_0} f(\alpha)g(\alpha) = n + m = \text{ord}_{\alpha_0} f(\alpha) + \text{ord}_{\alpha_0} g(\alpha), \quad \text{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha)g(\alpha) = c_n d_m = \text{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha) \cdot \text{Wei}_{\alpha_0} g(\alpha).$$

□

Обозначим через $\text{rad}_{\alpha_0} f(\alpha)$ радиус сходимости ряда Лорана для функции $f(\alpha)$ в точке α_0 . Таким образом, если порядок функции $f(\alpha)$ в точке α_0 неотрицательный, то $\text{rad}_{\alpha_0} f(\alpha)$ — радиус сходимости соответствующего степенного ряда в точке α_0 , а если он отрицательный, то ряд Лорана сходится при $0 < |\alpha - \alpha_0| < \text{rad}_{\alpha_0} f(\alpha)$ и расходится при $|\alpha - \alpha_0| > \text{rad}_{\alpha_0} f(\alpha)$.

Из леммы 1 вытекают следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливы равенства*

$$\text{ord}_{\alpha_0} \frac{1}{f(\alpha)} = -\text{ord}_{\alpha_0} f(\alpha), \quad \text{Wei}_{\alpha_0} \frac{1}{f(\alpha)} = \frac{1}{\text{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если положить в лемме 1 $g(\alpha) = \frac{1}{f(\alpha)}$ и воспользоваться очевидными равенствами $\text{ord}_{\alpha_0} 1 = 0$, $\text{Wei}_{\alpha_0} 1 = 1$, то утверждение следствия следует из леммы 1. □

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\text{ord}_{\alpha_0} f(\alpha) + \text{ord}_{\alpha_0} g(\alpha) = 0$, то

$$f(\alpha_0)g(\alpha_0) = \text{Wei}_{\alpha_0} f(\alpha) \cdot \text{Wei}_{\alpha_0} g(\alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если порядки функций $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ в точке α_0 нулевые, то их значения в этой точке равны весам и утверждение леммы справедливо. Если один порядок положительный, то это порядок нуля, а вторая функция имеет полюс в этой точке того же порядка. Поэтому в произведении он гасится нулём, а произведение весов будет значением произведения в точке. $\square$

3. Обращение дзета-функции для основного моноида

Обращение дзета-функций для основного моноида будем осуществлять по схеме из работы [7].

Рассмотрим дзета-функцию $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$, заданную равенством

$$\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \sum_{n \in M_{3,1}(p_1, p_2)} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \sigma > \sigma_{M_{3,1}(p_1, p_2)}), \quad (1)$$

где $\sigma_{M_{3,1}(p_1, p_2)} \leq 1$ — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда, и через $\zeta^*(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ обозначается обратный ряд, то есть $\zeta^*(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \zeta^{-1}(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$.

ЛЕММА 2. Для произвольного числа $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \in M_{3,1}(p_1, p_2)$ и числа $k(n)$ канонических представлений $n = q_1^{\lambda_1} q_2^{\lambda_2} q_3^{\lambda_3}$ справедливо равенство

$$k(n) = \begin{cases} \frac{\min(\beta_1, \beta_2) + 1}{2}, & \text{при } \beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 1 \pmod{2}, \\ \frac{\min(\beta_1, \beta_2) + 2}{2}, & \text{при } \beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \in M_{3,1}(p_1, p_2)$, то

$$\beta_1 + \beta_2 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Рассмотрим два случая.

Пусть $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 1 \pmod{2}$, тогда $\lambda_2 = 1 + \lambda$, $\beta_1 = 2\lambda_1 + 1 + \lambda$, $\beta_2 = 2\lambda_3 + 1 + \lambda$. Следовательно, $\lambda = 2\lambda'$, $0 \leq \lambda' \leq \frac{\min(\beta_1, \beta_2) - 1}{2}$ и $k(n) = \frac{\min(\beta_1, \beta_2) + 1}{2}$.

Пусть $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 0 \pmod{2}$, тогда $\lambda_2 = 2\lambda$, $\beta_1 = 2\lambda_1 + 2\lambda$, $\beta_2 = 2\lambda_3 + 2\lambda$. Следовательно, $0 \leq \lambda \leq \frac{\min(\beta_1, \beta_2)}{2}$ и $k(n) = \frac{\min(\beta_1, \beta_2) + 2}{2}$. $\square$

Ряд Дирихле для произведения Эйлера

$$P(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \sum_{\beta_1 + \beta_2 \equiv 0 \pmod{2}} \frac{\left\lfloor \frac{\min(\beta_1, \beta_2)}{2} \right\rfloor + 1}{\left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}\right)^\alpha}$$

абсолютно сходится при $\sigma > 0$ и является мажорирующим рядом для вещественных $\alpha > 0$ дзета-ряду $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$. Поэтому абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ будет $\sigma_{M_{3,1}(p_1, p_2)} = 0$. По теореме Ландау (см. [13], стр. 156) в точке $\alpha = \sigma_{M_{3,1}(p_1, p_2)} = 0$ будет особая точка дзета-функции $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$, хотя это и так очевидно в силу бесконечности моноида $M_{3,1}(p_1, p_2)$.

ЛЕММА 3. При $\sigma > 0$ справедливо представление

$$\begin{aligned}\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) &= \left(1 + \frac{1}{(p_1 p_2)^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{q_2^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{q_3^\alpha}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned}\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) &= \sum_{n \in M_{3,1}(p_1, p_2)} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{\beta_1 + \beta_2 \equiv 0 \pmod{2}} \frac{1}{(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2})^\alpha} = \\ &= \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2})^\alpha} + \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{2\beta_1+1} p_2^{2\beta_2+1})^\alpha} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{(p_1 p_2)^\alpha}\right) \left(\sum_{\beta_1=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{2\beta_1})^\alpha}\right) \left(\sum_{\beta_2=0}^{\infty} \frac{1}{(p_2^{2\beta_2})^\alpha}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{(p_1 p_2)^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{q_2^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{q_3^\alpha}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

□

ЛЕММА 4. При $\sigma > 0$ справедливо представление

$$\begin{aligned}\zeta(A_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) &= \left(\frac{1}{p_1^\alpha} + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{1}{p_1^\alpha} + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{q_3^\alpha}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned}\zeta(A_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) &= \sum_{n \in A_{3,1}(p_1, p_2)} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{\beta_1 + \beta_2 \equiv 1 \pmod{2}} \frac{1}{(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2})^\alpha} = \\ &= \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{2\beta_1+1} p_2^{2\beta_2})^\alpha} + \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2+1})^\alpha} = \\ &= \left(\frac{1}{p_1^\alpha} + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \left(\sum_{\beta_1=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{2\beta_1})^\alpha}\right) \left(\sum_{\beta_2=0}^{\infty} \frac{1}{(p_2^{2\beta_2})^\alpha}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{p_1^\alpha} + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{p_1^\alpha} + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{q_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{q_3^\alpha}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

□

ЛЕММА 5. При $\sigma > 0$ справедливо представление

$$\begin{aligned}\zeta^*(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) &= \left(1 + \frac{1}{(p_1 p_2)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{q_1^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{q_3^\alpha}\right) = 1 - \frac{1}{q_2^\alpha} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k 2}{q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{q_1^\alpha q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{q_3^\alpha q_2^{k\alpha}}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из леммы 3 следует, что

$$\begin{aligned}\zeta^*(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) &= \left(1 + \frac{1}{(p_1 p_2)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{q_1^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{q_3^\alpha}\right).\end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\left(1 + \frac{1}{q_2^\alpha}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{q_2^{k\alpha}}, \quad q_1 q_3 = q_2^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\zeta^*(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{q_1^\alpha q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{q_3^\alpha q_2^{k\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{q_2^{(k+2)\alpha}} = \\ &= 1 - \frac{1}{q_2^\alpha} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k 2}{q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{q_1^\alpha q_2^{k\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{q_3^\alpha q_2^{k\alpha}}.\end{aligned}$$

□

Обозначим через $\zeta(M(p_1, p_2), M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ отношение двух дзета-функций:

$$\zeta(M(p_1, p_2), M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \zeta(M(p_1, p_2)|\alpha) \zeta^{-1}(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha).$$

Обозначим коэффициенты соответствующего ряда Дирихле через $y(n)$:

$$\zeta(M(p_1, p_2), M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y(n)}{n^\alpha}, \quad y(1) = 1. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. При $\sigma > 0$ справедливо равенство

$$\zeta(M(p_1, p_2), M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \left(1 + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{(p_1 p_2)^\alpha}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y(n)}{n^\alpha},$$

где

$$y(1) = 1, \quad y(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{при } n = p_1(p_1 p_2)^k, \quad k \geq 0, \\ (-1)^k, & \text{при } n = p_2(p_1 p_2)^k, \quad k \geq 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из леммы 5 следует, что

$$\begin{aligned}\zeta(M(p_1, p_2), M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) &= \left(1 - \frac{1}{p_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^\alpha}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{(p_1 p_2)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{(p_1 p_2)^\alpha}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(p_1 p_2)^{k\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p_1^\alpha (p_1 p_2)^{k\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p_2^\alpha (p_1 p_2)^{k\alpha}} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(p_1 p_2)^{(k+1)\alpha}} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p_1^\alpha (p_1 p_2)^{k\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p_2^\alpha (p_1 p_2)^{k\alpha}}.\end{aligned}$$

□

4. Аналитическое продолжение и функциональное уравнение

Хорошо известна производящая функция для чисел Бернулли (см. [3], стр. 254–257):

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

из которой несложно получить следующее разложение мероморфной функции $\frac{1}{e^x - 1}$ в ряд Лорана

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} x^n,$$

который абсолютно сходится при $0 < |x| < 2\pi$, и имеет полюс первого порядка при $x = 0$ с вычетом равным 1. Кроме того, так как $e^x = e^{x+2k\pi i}$ для любого целого k , то в каждой точке $x = 2k\pi i$ для любого целого k имеется полюс первого порядка с вычетом равным 1 и разложение в ряд Лорана

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x - 2k\pi i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (x - 2k\pi i)^n,$$

который абсолютно сходится при $0 < |x - 2k\pi i| < 2\pi$.

Подставляя $x = -\alpha \ln p$, получим, что дзета-функция геометрической прогрессии $M(p)$ является мероморфной функцией на всей комплексной α -плоскости с рядом Лорана

$$\zeta(M(p)|\alpha) = \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1} = \frac{1}{\alpha \ln p} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (-\alpha \ln p)^n = \frac{1}{\alpha \ln p} + \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (-\alpha \ln p)^n,$$

который абсолютно сходится при $0 < |\alpha| < \frac{2\pi}{\ln p}$, и имеет полюс первого порядка при $\alpha = 0$ с вычетом равным $\frac{1}{\ln p}$.

Другой способ получения ряда Лорана связан с подстановкой $x = \alpha \ln p$. Действительно,

$$\zeta(M(p)|\alpha) = 1 + \frac{1}{p^\alpha - 1} = 1 + \frac{1}{\alpha \ln p} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (\alpha \ln p)^n = \frac{1}{\alpha \ln p} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (\alpha \ln p)^n.$$

Эти два ряда Лорана совпадают, так как все нечетные числа Бернулли начиная с третьего номера равны нулю, и поэтому

$$\zeta(M(p)|\alpha) = \frac{1}{\alpha \ln p} + \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!} (\alpha \ln p)^{2n+1}.$$

Кроме того, так как $p^\alpha = p^{\alpha + \frac{2k\pi i}{\ln p}}$ для любого целого k , то в каждой точке $\alpha = \frac{2k\pi i}{\ln p}$ для любого целого k имеется полюс первого порядка с вычетом равным $\frac{1}{\ln p}$ и разложение в ряд Лорана

$$\zeta(M(p)|\alpha) = \frac{1}{\ln p \left(\alpha - \frac{2k\pi i}{\ln p}\right)} + \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n+2} (\ln p)^{2n+1}}{(2n+2)!} \left(\alpha - \frac{2k\pi i}{\ln p}\right)^{2n+1},$$

который абсолютно сходится при $0 < \left|\alpha - \frac{2k\pi i}{\ln p}\right| < \frac{2\pi}{\ln p}$.

Конечное эйлерово произведение:

$$P(M(p_1, p_2)|\alpha) = \left(1 - \frac{1}{p_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^\alpha}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p_1^\alpha - 1} + \frac{1}{p_2^\alpha - 1} + \frac{1}{(p_1^\alpha - 1)(p_2^\alpha - 1)}$$

является мероморфной функцией на всей комплексной α -плоскости кроме точки $\alpha = 0$, в которой у неё полюс второго порядка, и точек $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln p_1}i$, $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln p_2}i$, $k \neq 0$, в которых полюса первого порядка.

Так как при $0 < |\alpha| < \frac{2\pi}{\ln p_2}$ оба ряда Лорана

$$\left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right)^{-1} = \frac{1}{\alpha \ln p_\nu} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (\alpha \ln p_\nu)^n \quad \nu = 1, 2$$

абсолютно сходятся, то перемножая их, находим

$$\begin{aligned} P(M(p_1, p_2)|\alpha) &= \left(1 - \frac{1}{p_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^\alpha}\right)^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 \ln p_1 \ln p_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ln p_1} + \frac{1}{\ln p_2} \right) \frac{1}{\alpha} + \\ &+ \frac{\ln p_2}{\ln p_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (\alpha \ln p_2)^{n-1} + \frac{\ln p_1}{\ln p_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (\alpha \ln p_1)^{n-1} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \alpha^n ((\ln p_1)^n + (\ln p_2)^n) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} (\ln p_1)^k \frac{B_{n-k+1}}{(n-k+1)!} (\ln p_2)^{n-k} \right) \alpha^n. \end{aligned}$$

Отсюда следует что для вычета в точке $\alpha = 0$ справедливо равенство

$$\text{Res}_0 P(M(p_1, p_2)|\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ln p_1} + \frac{1}{\ln p_2} \right).$$

Так как логарифмы двух простых чисел линейно независимы, то

$$\zeta \left(M(p_\nu) \left| \frac{2k\pi}{\ln p_\mu} i \right. \right) = \left(1 - \frac{1}{p_\nu^{\frac{2k\pi}{\ln p_\mu} i}} \right)^{-1}$$

определено и отлично от 0 при $\nu \neq \mu$, $k \neq 0$. Таким образом, дзета-функция $\zeta(M(p_1)|\alpha)$ имеет в точке $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln p_1}i$ порядок -1 с весом $\frac{1}{\ln p_1}$, а дзета-функция $\zeta(M(p_2)|\alpha)$ порядок 0 с весом $\left(1 - \frac{1}{p_2^{\frac{2k\pi}{\ln p_1} i}}\right)^{-1}$. Поэтому по лемме 1 их произведение в этой точке имеет порядок -1 с весом $\frac{1}{\ln p_1} \left(1 - \frac{1}{p_2^{\frac{2k\pi}{\ln p_1} i}}\right)^{-1}$. Аналогичное утверждение справедливо для точек $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln p_2}i$ с $k \neq 0$. Поэтому для вычета дзета-функции $\zeta(M(p_1, p_2)|\alpha)$ в точке $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln p_\nu}i$, $k \neq 0$, $\nu = 1, 2$ справедливо равенство

$$\text{Res}_{\frac{2k\pi}{\ln p_\nu}i} \zeta(M(p_1, p_2)|\alpha) = \frac{1}{\ln p_\nu} \left(1 - \frac{1}{p_\mu^{\frac{2k\pi}{\ln p_\nu} i}} \right)^{-1}, \quad \mu = 2 - \left[\frac{\nu}{2} \right].$$

В работе [9] доказано функциональное уравнение для дзета-функции $\zeta(M(p_1, p_2)|\alpha)$, которое имеет вид

$$\zeta(M(p_1, p_2)|-\alpha) = \frac{\zeta(M(p_1, p_2)|\alpha)}{(p_1 p_2)^\alpha}.$$

Из леммы 3 следует, что дзета-функция $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ — мероморфная функция на всей комплексной α -плоскости кроме точки $\alpha = 0$, где у неё полюс второго порядка, и точек $\alpha = \frac{2k\pi}{\ln q_\nu}i$, $k \neq 0$, $\nu = 1, 3$, где полюса первого порядка.

Также из леммы 3 несложно найти функциональное уравнение

$$\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|-\alpha) = \frac{q_2^\alpha}{(q_1 q_3)^\alpha} \zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \frac{\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)}{(p_1 p_2)^\alpha}.$$

Из леммы 4 мы находим функциональное уравнение для дзета-функции основного множества:

$$\zeta(A_{3,1}(p_1, p_2)|-\alpha) = \frac{\zeta(A_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)}{(p_1 p_2)^\alpha}.$$

Из теоремы 1 находим очень простое функциональное уравнение для дзета-функции $\zeta(M(p_1, p_2), M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$, из которого следует четность этой дзета-функции:

$$\zeta(M(p_1, p_2), M_{3,1}(p_1, p_2)|-\alpha) = \zeta(M(p_1, p_2), M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha).$$

5. Моноиды степеней, Эйлера и единичные моноиды по модулю

Наиболее простым по своей структуре можно считать моноид M_k — моноид k -х степеней:

$$M_k = \{n^k \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Это моноид с однозначным разложением на простые элементы и множество простых элементов $P(M_k)$ состоит из псевдопростых чисел:

$$P(M_k) = \{p^k \mid p \in \mathbb{P}\}.$$

Поэтому для дзета-функции $\zeta(M_k|\alpha)$ справедливы равенства

$$\zeta(M_k|\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^k)^\alpha} = P(M_k|\alpha) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{(p^k)^\alpha}\right)^{-1} = \zeta(k\alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \frac{1}{k}.$$

Пусть q — натуральное число больше 2. Для любого натурального числа n с каноническим разложением $n = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$, где простые $p_1 < \dots < p_k$, его эйлеровой компонентой по модулю q назовем число $E_q(n)$, а единичным делителем по модулю q — число $U_q(n)$, заданные равенствами

$$E_q(n) = \prod_{p_\nu \not\equiv 1 \pmod{q}, (p_\nu, q)=1} p_\nu^{\varphi(q) \left[\frac{\beta_\nu}{\varphi(q)} \right]}, \quad U_q(n) = \prod_{p_\nu \equiv 1 \pmod{q}} p_\nu^{\beta_\nu}.$$

Через n_q^* будем обозначать мультипликативное дополнение эйлеровой компоненты до числа n : $n_q^* = \frac{n}{E_q(n)}$, а через n_q^{**} — мультипликативное дополнение произведения эйлеровой компоненты на единичный делитель до числа n : $n_q^{**} = \frac{n}{E_q(n)U_q(n)}$. Очевидно, что выполняются сравнения

$$E_q(n) \equiv U_q(n) \equiv 1 \pmod{q}, \quad n \equiv n_q^* \equiv n_q^{**} \pmod{q}.$$

Назовём моноидом Эйлера по модулю q множество E_q , заданное равенством

$$E_q = \left\{ n^{\varphi(q)} \left| n = \prod_{p|n} p^{\beta_p}, p \not\equiv 1 \pmod{q}, (p, q) = 1 \right. \right\}.$$

Назовём *единичным моноидом по модулю q* множество U_q , заданное равенством

$$U_q = \left\{ n \mid n = \prod_{p|n} p^{\beta_p}, p \equiv 1 \pmod{q} \right\}.$$

Моноиды E_q и U_q имеют однозначное разложение на простые элементы. Для единичного моноида по модулю q множество простых элементов $P(U_q)$ состоит из простых чисел:

$$P(U_q) = \{p \mid p \equiv 1 \pmod{q}\}.$$

Это бесконечное множество простых чисел согласно теореме Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Поэтому

$$\zeta(U_q|\alpha) = P(U_q|\alpha) = \prod_{p \equiv 1 \pmod{q}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

Для моноида Эйлера по модулю q множество простых элементов $P(E_q)$ состоит из псевдопростых чисел:

$$P(E_q) = \{p^{\varphi(q)} \mid p \not\equiv 1 \pmod{q}, (p, q) = 1\}.$$

Это бесконечное множество псевдопростых чисел согласно теореме Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Поэтому

$$\zeta(E_q|\alpha) = P(E_q|\alpha) = \prod_{p \not\equiv 1 \pmod{q}, (p, q) = 1} \left(1 - \frac{1}{p^{\varphi(q)\alpha}}\right)^{-1} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \frac{1}{\varphi(q)}.$$

6. Эффект Дэвенпорта — Хейльбронна

В знаменитой работе Г. Дэвенпорта и Г. Хейльброна [16] было установлено, что дзета-функция Гурвица $\zeta(s, a)$ для рациональных a , $0 < a < 1$, $a \neq \frac{1}{2}$ имеет бесконечно много нулей в полуплоскости абсолютной сходимости определяющего ряда Дирихле. Отсюда сразу следует, что если $a = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q > 2$, то дзета-функция класса вычетов по модулю q

$$\zeta(p, q|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(nq + p)^\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1$$

имеет бесконечно много нулей в полуплоскости абсолютной сходимости дзета-ряда.

Таким образом, суть эффекта Дэвенпорта — Хейльбронна состоит в том, что дзета-функция Римана разбивается на сумму слагаемых

$$\zeta(\alpha) = \sum_{p=1}^q \zeta(p, q|\alpha),$$

часть из которых имеет нули справа от абсциссы абсолютной сходимости $\sigma = 1$, а дзета-функция Римана в этой области не имеет нулей.

Как следует из конечного представления дзета-функции $\zeta(M(p_1, p_2)|\alpha)$ моноида $M(p_1, p_2)$ натуральных чисел в виде эйлерова произведения

$$\zeta(M(p_1, p_2)|\alpha) = \left(1 - \frac{1}{p_1^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^\alpha}\right)^{-1},$$

она не имеет нулей во всей комплексной α -плоскости.

Согласно определению справедливо равенство

$$\zeta(M(p_1, p_2)|\alpha) = \zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) + \zeta(A_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha).$$

ТЕОРЕМА 2. *Дзета-функция $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ обращается в ноль в точках $\alpha = \frac{\pi(1+2k)}{\ln(p_1 p_2)}i$, где k — любое целое число.*

Дзета-функция $\zeta(A_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$ обращается в ноль в точках $\alpha = \frac{\pi(1+2k)}{\ln p_2 - \ln p_1}i$, где k — любое целое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно лемме 3 имеем:

$$\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \left(1 + \frac{1}{(p_1 p_2)^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1}.$$

Второй и третий сомножители не обращаются в ноль во всей комплексной α -плоскости, а первый сомножитель обращается в ноль в точках $\alpha = \frac{\pi(1+2k)}{\ln(p_1 p_2)}i$, где k — любое целое число. Так как эти нули не совпадают с полюсами второго и третьего сомножителей, то они остаются и нулями дзета-функции $\zeta(M_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$.

Согласно лемме 4 имеем:

$$\zeta(A_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha) = \left(\frac{1}{p_1^\alpha} + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{p_1^{2\alpha}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2^{2\alpha}}\right)^{-1}.$$

Второй и третий сомножители не обращаются в ноль во всей комплексной α -плоскости, а первый сомножитель обращается в ноль в точках $\alpha = \frac{\pi(1+2k)}{\ln p_2 - \ln p_1}i$, где k — любое целое число. Так как эти нули не совпадают с полюсами второго и третьего сомножителей, то они остаются и нулями дзета-функции $\zeta(A_{3,1}(p_1, p_2)|\alpha)$. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что эффект Дэвенпорта — Хейльбронна имеет место и в этом случае, но его характер несколько изменился, так как нули слагаемых, выделяемых классами вычетов по модулю 3, появляются на абсциссе абсолютной сходимости дзета-функции основного моноида.

Другая ситуация возникает в случае моноида Эйлера E_q по модулю q и в случае единичного моноида U_q по модулю q . Дело в том, что все элементы этих моноидов принадлежат одному классу вычетов по модулю q , а наличие произведения Эйлера для дзета-функции этих моноидов исключает наличие нулей в области абсолютной сходимости.

Вопрос о наличии эффекта Дэвенпорта — Хейльбронна для моноида k -х степеней требует отдельного рассмотрения, так как здесь возможны разные постановки вопросов.

7. Область голоморфности дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых

В работе [6] была введена экспоненциальная последовательность простых чисел PE . Дзета-функция моноида $M(PE)$ обладает эйлеровым произведением:

$$\zeta(M(PE)|\alpha) = \sum_{n \in M(PE)} \frac{1}{n^\alpha} = P(M(PE)|\alpha) = \prod_{p \in PE} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 0.$$

В работе [9] была высказана гипотеза, что дзета-функцию $\zeta(M(PE)|\alpha)$ нельзя продолжить в левую полуплоскость $\sigma \leq 0$. Другими словами, её область голоморфности совпадает с правой полуплоскостью $\sigma > 0$.

ЛЕММА 6. *Пусть $\alpha_0 = \sigma_0 + it_0$ — произвольная точка в правой полуплоскости $\sigma_0 > 0$, тогда порядок $\text{ord}_{\alpha_0} \zeta(M(PE)|\alpha) = 0$ и радиус в этой точке $\text{rad}_{\alpha_0} \zeta(M(PE)|\alpha) = \sigma_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из наличия эйлерова произведения следует, что справедливо равенство

$$\zeta(M(PE)|\alpha) = \prod_{p \in PE} \zeta(M(p)|\alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 0.$$

Очевидно, что для любого $p \in PE$ справедливы равенства

$$\text{ord}_{\alpha_0} \zeta(M(p)|\alpha) = 0, \quad \text{Wei}_{\alpha_0} \zeta(M(p)|\alpha) = \zeta(M(p)|\alpha_0), \quad \text{rad}_{\alpha_0} \zeta(M(p)|\alpha) = \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_p^2},$$

где $\tau_p = \min_{k \in \mathbb{Z}} \left| t_0 - \frac{2k\pi}{\ln p} \right|$ задает расстояние до ближайшего полюса $\frac{2k\pi}{\ln p}i$ дзета-функции $\zeta(M(p)|\alpha)$.

Нетрудно видеть, что круг $K(\alpha_0, \sigma_0) = \{\alpha \mid |\alpha - \alpha_0| < \sigma_0\}$ является пересечением всех кругов $K(\alpha_0, \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_p^2}) = \{\alpha \mid |\alpha - \alpha_0| < \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_p^2}\}$, когда p пробегает всё множество PE :

$$K(\alpha_0, \sigma_0) = \bigcap_{p \in PE} K(\alpha_0, \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_p^2}).$$

Как известно (см. [4], стр. 59), на окружности круга сходимости всегда есть по меньшей мере одна особая точка. Так как все точки окружности круга $K(\alpha_0, \sigma_0)$ кроме точки касания с мнимой осью принадлежат области абсолютной сходимости дзета-ряда $\zeta(M(PE)|\alpha)$, то особой точкой является точка касания $\alpha = it_0$. Лемма полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 3. Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства предыдущей леммы следует, что все точки мнимой оси являются особыми точками дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$. Отсюда следует, что мнимая ось целиком является особой линией для дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$. А это означает, что областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > 0$. $\square$

Доказанную теорему можно перенести на другой класс моноидов натуральных чисел.

Пусть Q — натуральное число и моноид $M = M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых чисел PE . Определим моноид M_{-Q} как множество натуральных чисел, не делящихся на простые p из $P(M)$ и больших Q . Если определить моноид M_{+Q} как множество натуральных чисел, имеющих в своём каноническом разложении только простые числа $p \in P(M)$, которые больше Q , то $\mathbb{N} = M_{-Q} \cdot M_{+Q}$ и $\zeta(\alpha) = \zeta(M_{-Q}|\alpha)\zeta(M_{+Q}|\alpha)$. Последнее равенство верно при $\sigma > 0$.

ЛЕММА 7. Пусть $\alpha_0 = \sigma_0 + it_0$ — произвольная точка в правой полуплоскости $\sigma_0 > 0$, тогда порядок $\text{ord}_{\alpha_0} \zeta(M_{+Q}|\alpha) = 0$ и радиус в этой точке $\text{rad}_{\alpha_0} \zeta(M_{+Q}|\alpha) = \sigma_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дословно повторяя доказательство леммы 6, получим доказываемое утверждение, так как удаление конечного числа простых из экспоненциальной последовательности простых оставляет её экспоненциальной последовательностью. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M_{+Q}|\alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из предыдущей теоремы, так как для любой экспоненциальной последовательности простых PE моноид M_{+Q} задается той-же последовательностью простых, из которой удалено конечное число начальных членов. $\square$

ТЕОРЕМА 5. Областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M_{-Q}|\alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства

$$\zeta(M_{-Q}|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M_{+Q}|\alpha)}$$

следует, что дзета-функция $\zeta(M_{-Q}|\alpha)$ — аналитическая функция в α -полуплоскости $\sigma > 0$, кроме точки $\alpha = 1$, где у неё полюс первого порядка. Если бы, её область голоморфности была шире чем данная полуплоскость, то из равенства

$$\zeta(M_{+Q}|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M_{-Q}|\alpha)}$$

вытекало бы противоречие с предыдущей теоремой. $\square$

8. Заключение

Достаточно простые соображения из первого раздела позволили нам доказать гипотезу о заградительном ряде для дзета-функции моноида с экспоненциальной последовательностью простых.

Рассмотрение модельной дзета-функции основного моноида и основного множества позволяют по-новому рассматривать вопрос о поведении соответствующих рядов Дирихле.

В работе [8] было дано определение специальных видов последовательностей простых чисел. Будем говорить, что бесконечная последовательность $\mathbb{P}_1$ простых чисел

$$p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$$

является σ_0 -последовательностью третьего рода, если дзета-функция $\zeta(\mathbb{P}_1|\alpha)$ имеет абсциссу абсолютной сходимости $\sigma_{\mathbb{P}_1} = \sigma_0$.

Из работ [6], [8] следует, что σ_0 -последовательности третьего рода существуют для любого σ_0 из отрезка $[0; 1]$.

Из доказательства последней теоремы следует, что для любой 0-последовательности третьего рода $\mathbb{P}_1$ областью голоморфности дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha)$ является полуплоскость $\sigma > 0$. Возникает вопрос об области голоморфности дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha)$ для произвольного множества простых $\mathbb{P}_1$.

Следующий простой пример показывает, что полуплоскость $\sigma > 0$ без точки $\alpha = 1$ может быть областью голоморфности и для 1-последовательности простых чисел. Действительно, пусть $\mathbb{P}_1$ — произвольная 0-последовательность простых чисел, тогда $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}_1$ будет 1-последовательностью простых чисел. Очевидно, что

$$\zeta(M(\mathbb{P}_2)|\alpha) = \zeta(M(\mathbb{P})|\alpha)\zeta^{-1}(M(\mathbb{P}_1)|\alpha) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha)}.$$

Отсюда следует утверждение об области голоморфности.

В заключении автор выражает свою признательность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бомбьери Э., Гош А. Вокруг функции Девенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.
2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

3. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967. — 376 с.
4. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.
5. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.
6. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 188–208.
7. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.
8. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.
9. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.
10. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.
11. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.
12. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.
13. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.
14. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L -функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.
15. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969. — 576 с.
16. Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. — Vol. 11. — P. 181–185.

REFERENCES

1. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, "Around the Davenport–Heilbronn function", *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.
2. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.
3. Gel'fond A. O., 1967, *Calculus of finite differences*, Izd-vo Nauka, Moskva, 376 p.
4. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.
5. S. S. Demidov, E. A. Morozova, V. N. Chubarikov, I. Yu. Rebrov, I. N. Balaba, N. N. Dobrovolskii, N. M. Dobrovolskii, L. P. Dobrovolskaya, A. V. Rodionov, O. A. Pikhtil'kova, 2018, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol 18, №4(64) pp. 6–85.

6. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.
7. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.
8. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 142–150.
9. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.
10. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.
11. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.
12. Titchmarsh E. K., 1952, *Teorija dzeta-funkcii Rimana* Izd-vo I-L, Moskva, 407 p.
13. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskiju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.
14. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.
15. Shabat B. V., 1969, *Introduction to complex analysis* — M.: Science, — 576 p.
16. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series", *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

Получено 4.12.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-164-179

Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе
в приближенном анализе¹

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, физики и информатики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Родионов Александр Валерьевич — старший преподаватель кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Аннотация

В работе для каждого моноида M натуральных чисел определён новый класс периодических функций M_s^α , который является подклассом известного класса Коробова периодических функций E_s^α . Относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$ класс M_s^α является несепарабельным банаховым подпространством класса E_s^α .

Установлено, что класс M_s^α замкнут относительно действия интегрального оператора Фредгольма и на этом классе разрешимо интегральное уравнение Фредгольма второго рода. В работе получены оценки нормы образа интегрального оператора, которые содержат норму ядра и s -ю степень дзета-функции моноида M . Получены оценки на параметр λ , при которых интегральный оператор $A_{\lambda,f}$ является сжатием. Доказана теорема о представлении единственного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода в виде ряда Неймана.

В работе рассмотрены вопросы решения дифференциального уравнения с частными производными с дифференциальным оператором $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ в пространстве M_s^α , который зависит от арифметических свойств спектра этого оператора.

В работе обнаружен парадоксальный факт, что для моноида $M_{q,1}$ чисел сравнимых с 1 по модулю q квадратурная формула с параллелепипедальной сеткой для допустимого набора коэффициентов по модулю q точна на классе $M_{q,1,s}^\alpha$. Более того, это утверждение остается верным и для класса $M_{q,a,s}^\alpha$ с $1 < a < q$, когда q — простое число. Так как функции из класса $M_{q,a,s}^\alpha$ с $1 < a < q$ не имеют нулевого коэффициента Фурье $C(\vec{0})$, то при простом

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_p_a.

q сумма значений функции по узлам соответствующей параллелепипедальной сетки будет нулевой.

Ключевые слова: классы функций, квадратурные формулы, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-164-179

Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis²

N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate Professor of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Rodionov Alexandr Valer'evich — senior lecturer of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Abstract

For every monoid M of natural numbers defined a new class of periodic functions M_s^α , which is a subclass of a known class of periodic functions Korobov E_s^α . With respect to the norm $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$, the class M_s^α is an inseparable Banach subspace of class E_s^α .

It is established that the class M_s^α is closed with respect to the action of the Fredholm integral operator and the Fredholm integral equation of the second kind is solvable on this class.

In this paper we obtain estimates of the image norm of the integral operator, which contain the kernel norm and the s -th degree of the Zeta function of the monoid M . Estimates are obtained for the parameter λ , in which the integral operator $A_{\lambda,f}$ is a compression. The theorem

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

on the representation of the unique solution of Fredholm integral equation of the second kind in the form of Neumann series is proved.

The paper deals with the problems of solving the partial differential equation with the differential operator $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ in the space M_s^α , which depends on the arithmetic properties of the spectrum of this operator.

A paradoxical fact is found that for a monoid $M_{q,1}$ of numbers comparable to 1 modulo q , a quadrature formula with a parallelepiped grid for an admissible set of coefficients modulo q is exact on the class $M_{q,1,s}^\alpha$. Moreover, this statement remains true for the class $M_{q,a,s}^\alpha$ with $1 < a < q$ when q is a Prime number. Since the functions of class $M_{q,a,s}^\alpha$ with $1 < a < q$ do not have a zero Fourier coefficient $C(\vec{0})$, then for a simple q the sum of the function values at the nodes of the corresponding parallelepipedal grid will be zero.

Keywords: classes of functions, quadrature formulas, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

N. N. Dobrovolskii, N. M. Dobrovolskii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, "Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 164–179.

*Посвящается 70-летию академика Литовской АН,
профессора Антанаса Лауринчикаса*

1. Введение

В данной работе преследуется цель — показать, что теория дзета-функций моноидов натуральных чисел связана с теоретико-числовым методом в приближенном анализе. Для этого вводится новый класс периодических функций многих переменных M_s^α , соответствующий моноиду M натуральных чисел, у которого множество номеров экспонент, входящих в комплексный ряд Фурье, задается этим мультипликативным моноидом натуральных чисел. В результате мы получаем некоторый подкласс известного класса периодических функций многих переменных E_s^α . Относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$ класс M_s^α является несепарабельным банаховым подпространством.

Как известно, класс $\mathfrak{E}_s$ определяется как объединение всех классов E_s^α при $\alpha > 1$. С одной стороны, класс $\mathfrak{E}_s$ состоит из непрерывных периодических функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье. С другой стороны он замкнут относительно действия интегральных операторов Фредгольма и подкласс дифференцируемых функций при действии дифференциальных операторов переходит в некоторый подкласс класса $\mathfrak{E}_s$.

Целью данной статьи является перенос этих свойств на новый класс функций.

2. Моноиды натуральных чисел и классы периодических функций

Пусть M — произвольный моноид натуральных чисел. Определим класс функций M_s^α следующим образом. Этот класс периодических функций состоит из функций $f(\vec{x})$, которые задаются многомерным рядом Фурье вида³

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \\ \vec{m} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \\ \vec{m} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

³Здесь и далее для вещественных m полагаем $\overline{m} = \max(1, |m|)$.

где коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам

$$|C(\vec{m})| \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\vec{m} \in M, (\nu=1, \dots, s)} |C(\vec{m})| (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha = \sup_{\vec{m} \in M, (\nu=1, \dots, s)} |c(\vec{m})| < \infty.$$

Если σ_M — абсцисса абсолютной сходимости дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ моноида натуральных чисел M , то для любого $\alpha > \sigma_M$ ряд Фурье для функции $f(\vec{x}) \in M_s^\alpha$ абсолютно и равномерно сходится для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$.

Таким образом, справедливо вложение $M_s^\alpha \subset \mathfrak{A}_s$, где $\mathfrak{A}_s$ — пространство периодических функций от s переменных с абсолютно сходящимся рядом Фурье.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{M}_s$ периодических функций от s переменных, заданное равенством $\mathfrak{M}_s = \bigcup_{\alpha > \sigma_M} M_s^\alpha$. Ясно, что $\mathfrak{M}_s \subset \mathfrak{A}_s$.

Нетрудно видеть, что для нормы $\|f(\vec{x})\|_C = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^s} |f(\vec{x})|$ справедливо неравенство

$$\|f(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(M|\alpha))^s.$$

Рассмотрим оператор вложения $\mathbb{A}_{\alpha_1, \alpha_2}$ пространства $M_s^{\alpha_1}$ в пространство $M_s^{\alpha_2}$ при $\alpha_1 > \alpha_2$. Естественной, что нормой оператора вложения $\mathbb{A}_{\alpha_1, \alpha_2}$ называется величина, определяемая равенством

$$\|\mathbb{A}_{\alpha_1, \alpha_2}\| = \sup_{f(\vec{x}) \in M_s^{\alpha_1}} \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}}}{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}}.$$

ЛЕММА 1. Для любых $\alpha_1 > \alpha_2 > \sigma_M$ для нормы оператора вложения пространства $M_s^{\alpha_1}$ в пространство $M_s^{\alpha_2}$ справедливо равенство

$$\|\mathbb{A}_{\alpha_1, \alpha_2}\| = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $f(\vec{x}) = C$, то $\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}} = \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}} = C$ и, значит, $\|\mathbb{A}_{\alpha_1, \alpha_2}\| \geq 1$.

С другой стороны, если $f(\vec{x}) \in M_s^{\alpha_1}$ и

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{\vec{m}_1, \dots, \vec{m}_s, \\ \vec{m} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

то

$$|C(\vec{m})| \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^{\alpha_1}},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}} &= \sup_{\vec{m} \in M, (\nu=1, \dots, s)} |C(\vec{m})| (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^{\alpha_2} \leq \\ &\leq \sup_{\vec{m} \in M, (\nu=1, \dots, s)} \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}} (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^{\alpha_2}}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^{\alpha_1}} \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}} \end{aligned}$$

и $\|\mathbb{A}_{\alpha_1, \alpha_2}\| \leq 1$. Следовательно, $\|\mathbb{A}_{\alpha_1, \alpha_2}\| = 1$. $\square$

Очевидно, что для любого $\alpha > 1$ пространство периодических функций M_s^α является подпространством периодических функций E_s^α . Соответствующий оператор вложения будем обозначать через $\mathbb{A}_\alpha$. Ясно, что этот оператор имеет единичную норму: $\|\mathbb{A}_\alpha\| = 1$.

3. Замкнутость относительно оператора Фредгольма

Одним из важных классов интегральных уравнений является уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi(\vec{t}) = \lambda \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}) \varphi(\vec{u}) d\vec{u} + f(\vec{t}), \quad (1)$$

где $G_s = [0; 1]^s$.

Характерная особенность уравнения (1) — его линейность: неизвестная функция φ входит в него линейно.

Мы будем исследовать уравнение (1) для случая, когда свободный член $f(\vec{t})$ и ядро $K_s(\vec{t}, \vec{u})$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $M_s^\alpha(C_1)$ и $M_{2s}^\alpha(C_2)$.

Первые работы по применению теоретико-числовых методов для приближённого решения уравнение (1) принадлежат Н. М. Коробову (см. [10], [12]).

Сопоставим уравнению (1) оператор $A_{\lambda, f}$, определяемый равенством:

$$A_{\lambda, f} \varphi(\vec{t}) = g(\vec{t}).$$

Это означает, что:

$$g(\vec{t}) = A_{\lambda, f} \varphi(\vec{t}) = \lambda \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}) \varphi(\vec{u}) d\vec{u} + f(\vec{t}). \quad (2)$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha > \sigma_M$, $K_s(\vec{t}, \vec{u}) \in M_{2s}^\alpha$; $f(\vec{t})$, $\varphi(\vec{t}) \in M_s^\alpha$ тогда

$$A_{\lambda, f} \varphi(\vec{t}) \in M_s^\alpha$$

и

$$\|A_{\lambda, f} \varphi(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \leq \|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} + |\lambda| \cdot \|K_s(\vec{t}, \vec{u})\|_{E_{2s}^\alpha} \cdot \|\varphi(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot (1 + 2\zeta(M|2\alpha))^s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C_2 = \|K_s(\vec{t}, \vec{u})\|_{E_{2s}^\alpha}$, $C_1 = \|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}$, $C = \|\varphi(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}$, тогда

$$\begin{aligned} K_s(\vec{t}, \vec{u}) &= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_s \\ \vec{m}, \vec{n} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{m}, \vec{n}) e^{2\pi i((\vec{m}, \vec{t}) + (\vec{n}, \vec{u}))}, & |C(\vec{m}, \vec{n})| &\leq \frac{C_2}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s \overline{n}_1 \dots \overline{n}_s)^\alpha}; \\ f(\vec{t}) &= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s \\ \vec{m} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C_1(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{t})}, & |C_1(\vec{m})| &\leq \frac{C_1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}; \\ \varphi(\vec{t}) &= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s \\ \vec{m} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{t})}, & |C(\vec{m})| &\leq \frac{C}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}. \end{aligned}$$

Подставим данные равенства в соотношение (2):

$$\begin{aligned} g(\vec{t}) &= \lambda \iint_{G_s} \left(\sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_s \\ \vec{m}, \vec{n} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{m}, \vec{n}) e^{2\pi i((\vec{m}, \vec{t}) + (\vec{n}, \vec{u}))} \right) \left(\sum_{\substack{k_1, \dots, k_s \\ \vec{k} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{k}) e^{2\pi i(\vec{k}, \vec{u})} \right) d\vec{u} + \\ &\quad + \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s \\ \vec{m} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C_1(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{t})}. \end{aligned}$$

Перемножим абсолютно сходящиеся ряды и почленно проинтегрируем их произведение, получим:

$$g(\vec{t}) = \lambda \sum_{\substack{\vec{m}, \vec{n}, \vec{k} \\ \overline{m_\nu}, \overline{n_\nu}, \overline{k_\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{m}, \vec{n}) C(\vec{k}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{t})} \iint_{G_s} e^{2\pi i(\vec{n} + \vec{k}, \vec{u})} d\vec{u} + \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \\ \overline{m_\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C_1(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{t})}.$$

Так как

$$\iint_{G_s} e^{2\pi i(\vec{n} + \vec{k}, \vec{u})} d\vec{u} = \begin{cases} 1 & \text{при } \vec{n} + \vec{k} = \vec{0}, \\ 0 & \text{при } \vec{n} + \vec{k} \neq \vec{0}, \end{cases}$$

то для $g(\vec{t})$ справедливо равенство:

$$\begin{aligned} g(\vec{t}) &= \lambda \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_s \\ \overline{m_\nu}, \overline{n_\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{m}, \vec{n}) C(-\vec{n}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{t})} + \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \\ \overline{m_\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C_1(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{t})} = \\ &= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \\ \overline{m_\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} \left(C_1(\vec{m}) + \lambda \sum_{\substack{n_1, \dots, n_s, \\ \overline{n_\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{m}, \vec{n}) C(-\vec{n}) \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{t})} = \\ &= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \\ \overline{m_\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C_2(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{t})}. \end{aligned}$$

Оценим модуль коэффициента $C_2(\vec{m})$.

$$\begin{aligned} |C_2(\vec{m})| &= |C_1(\vec{m}) + \lambda \sum_{\substack{n_1, \dots, n_s, \\ \overline{n_\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{m}, \vec{n}) C(-\vec{n})| \leq \\ &\leq \frac{C_1}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} + \lambda \sum_{\substack{n_1, \dots, n_s, \\ \overline{n_\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} \frac{C_2}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s} \overline{n_1} \dots \overline{n_s})^\alpha} \frac{C}{(-\overline{n_1} \dots -\overline{n_s})^\alpha} = \\ &= \frac{1}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} \left(C_1 + \lambda C_2 C \sum_{\substack{n_1, \dots, n_s, \\ \overline{n_\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} \frac{1}{(\overline{n_1} \dots \overline{n_s})^{2\alpha}} \right) = \frac{C_1 + \lambda C_2 C (1 + 2\zeta(M|2\alpha))^s}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом показано, что функция $g(\vec{t}) = A_{\lambda, f} \varphi(\vec{t})$ принадлежит классу M_s^α и

$$\|g(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \leq \|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} + \lambda \cdot (1 + 2\zeta(M|2\alpha))^s \cdot \|\varphi(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot \|K_s(\vec{t}, \vec{u})\|_{E_{2s}^\alpha}.$$

А, следовательно, доказано, что оператор $A_{\lambda, f}$ при достаточно малом λ является сжимающим отображением. $\square$

ЛЕММА 3. Пусть $|\lambda| \leq \frac{q}{\|K_s(\vec{t}, \vec{u})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(M|2\alpha))^s}$ и $q < 1$ тогда оператор $A_{\lambda, f}$ является сжатием, то есть

$$\|A_{\lambda, f} \varphi_1 - A_{\lambda, f} \varphi_2\|_{E_s^\alpha} \leq q \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{E_s^\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через A_λ оператор $A_{\lambda, f}$ при $f \equiv 0$. Из определения A_λ следует, что это линейный оператор и

$$A_{\lambda, f} \varphi(\vec{t}) = A_\lambda \varphi(\vec{t}) + f(\vec{t})$$

Отсюда следует, что:

$$A_{\lambda, f} \varphi_1 - A_{\lambda, f} \varphi_2 = A_\lambda \varphi_1 - A_\lambda \varphi_2 = A_\lambda (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Применяя лемму 2 при $f \equiv 0$, получим

$$\|A_\lambda(\varphi_1 - \varphi_2)\|_{E_s^\alpha} \leq |\lambda|((1 + 2\zeta(M|2\alpha))^s) \|\varphi_1(\vec{t}) - \varphi_2(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot \|K_s(\vec{t}, \vec{u})\|_{E_{2s}^\alpha}.$$

Тогда при

$$|\lambda| \leq \frac{q}{\|K_s(\vec{t}, \vec{u})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(M|2\alpha))^s}$$

справедливо неравенство:

$$\|A_{\lambda,f}\varphi_1 - A_{\lambda,f}\varphi_2\|_{E_s^\alpha} \leq q\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{E_s^\alpha},$$

что и требовалось доказать. $\square$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q < 1$ и

$$|\lambda| \leq \frac{q}{\|K_s(\vec{t}, \vec{u})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(M|2\alpha))^s}. \quad (3)$$

Тогда уравнение Фредгольма (1) имеет единственное решение и для него справедливо представление в виде ряда Неймана

$$\varphi(\vec{t}) = f(\vec{t}) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как согласно лемме (2) при λ , удовлетворяющем условию (3) оператор $A_{\lambda,f}$ является сжатием полного пространства E_s^α , то он имеет единственную неподвижную точку, то есть уравнение

$$A_{\lambda,f}\varphi(\vec{t}) = \varphi(\vec{t})$$

имеет единственное решение. Но это и означает, что $\varphi(\vec{t})$ решение уравнения (1).

Как известно, для любой точки x_0 полного пространства E и сжимающего отображения A последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = A^n x_0$, сходится к неподвижной точке оператора A в норме пространства E . Применяя это к пространству $E = E_s^\alpha$, оператору $A = A_{\lambda,f}$, точке $x_0 = f(\vec{t})$ и норме $\|\cdot\|_{E_s^\alpha}$, получим, что

$$A_{\lambda,f}^n f(\vec{t}) \rightarrow \varphi(\vec{t})$$

где φ — решение уравнения (1). То есть

$$\|\varphi - A_{\lambda,f}^n f\|_{E_s^\alpha} \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Так как

$$\|g(\vec{x})\|_C \leq (1 + 2\zeta(2\alpha))^s \|g(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$$

для любой функции $g(\vec{x}) \in E_s^\alpha$, то из (4) следует, что

$$\|\varphi - A_{\lambda,f}^n f\|_C \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Другими словами, последовательность $A_{\lambda,f}^n f$ равномерно сходится к решению уравнения (1).

Докажем по индукции, что

$$A_{\lambda,f}^n f = f(\vec{t}) + \sum_{k=1}^n \lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k. \quad (5)$$

Действительно, (5) справедливо при $n = 1$, так как

$$A_{\lambda,f}f = f(\vec{t}) + \lambda \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}) f(\vec{u}) d\vec{u}.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} A_{\lambda,f}^{n+1}f &= A_{\lambda,f}(A_{\lambda,f}^n f) = \\ &= A_{\lambda,f} \left(f(\vec{t}) + \sum_{k=1}^n \lambda^k \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k \right) = \\ &= f(\vec{t}) + A_{\lambda} \left(f(\vec{t}) + \sum_{k=1}^n \lambda^k \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k \right) = \\ &= f(\vec{t}) + \lambda \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}) f(\vec{u}) d\vec{u} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \lambda^{k+1} \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) \left(\iint_{G_{sk}} K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_{k+1}) f(\vec{u}_{k+1}) d\vec{u}_2 \dots d\vec{u}_{k+1} \right) d\vec{u}_1. \end{aligned}$$

Так как для непрерывных функций порядок интегрирования произвольный, то

$$\begin{aligned} &\iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) \left(\iint_{G_{sk}} K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}) f(\vec{u}_{k+1}) d\vec{u}_2 \dots d\vec{u}_{k+1} \right) d\vec{u}_1 = \\ &= \iint_{G_{(k+1)s}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}) f(\vec{u}_{k+1}) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_{k+1}. \end{aligned}$$

Из равномерной сходимости последовательности $A_{\lambda,f}f$ следует, что

$$\varphi(\vec{t}) = f(\vec{t}) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k,$$

и этот ряд равномерно сходится на G_s . Теорема полностью доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполняется условие теоремы, тогда для решения уравнения (1) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{t}) &= f(\vec{t}) + \sum_{k=1}^n \lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k + \\ &+ \frac{q^{n+1} \cdot \Theta \cdot \|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}}{1-q}, \quad \text{где } |\Theta| \leq (1 + 2\zeta(2\alpha))^s. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k = A_{\lambda}^k f(\vec{t}).$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k \right\|_{E_s^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_\lambda^k f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}.$$

Так как A_λ линейный оператор и для его нормы $\|A_\lambda\|$ по лемме (1) справедливо неравенство

$$\|A_\lambda\| \leq |\lambda| \|K_s(\vec{t}, \vec{u})\|_{E_{2s}^\alpha} \cdot (1 + 2\zeta(M|2\alpha))^s \leq q, \quad \text{то} \quad \|A_\lambda^n\| \leq \|A_\lambda\|^n \leq q^n.$$

Поэтому

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k \right\|_{E_s^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k \|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} = \frac{q^{n+1} \|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}}{1 - q}.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k \right\|_C \leq (1 + 2\zeta(2\alpha))^s \frac{q^{n+1} \|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}}{1 - q},$$

чем следствие полностью доказано. $\square$

4. Дифференциальные свойства классов M_s^α

Как хорошо известно, теоретико-числовые методы применимы для решения уравнений с частными производными [11, 13, 14, 15].

Рассмотрим

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \quad (6)$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q) = n_1 + \dots + n_s$, с максимальным порядком по отдельным переменным, не превосходящим $m(Q) = \max(n_1, \dots, n_s)$, а $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_s)$ — периодическая с периодом единица по каждому из своих аргументов функция из класса M_s^α ($\alpha > m(Q) + 1$).⁴

Таким образом,

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \\ \overline{m} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} c_{m_1, \dots, m_s} e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} \quad (7)$$

⁴Условие на α гарантирует, что ряд Фурье для образа $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) \varphi(\vec{x})$, полученный почленным дифференцированием, равномерно и абсолютно сходится.

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{m_1, \dots, m_s}| \leq \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}. \quad (8)$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha} = \sup_{m_1, \dots, m_s} |c_{m_1, \dots, m_s} (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha| < \infty \quad (9)$$

является нормой на пространстве M_s^α , относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

В своей работе В. С. Рябенкий предложил некоторый общий подход численного решения задачи Коши с использованием произвольных сеток, для которых выполнены специальные условия, и показал, что его конструкция применима для многомерных кубических сеток, которые ещё называют равномерными, и для параллелепипедальных сеток Н. М. Коробова.

Прежде всего найдем собственные функции и ядро дифференциального оператора

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right).$$

Положим

$$M_s = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid \overline{m_\nu} \in M, (\nu = 1, \dots, s)\}.$$

Для любого $\vec{m} \in M_s$ зададим величины $Q(\vec{m})$ равенствами

$$Q(\vec{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} (2\pi i)^{j_1 + \dots + j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s} = \sum_{j=0}^{n(Q)} A_j(\vec{m}) (2\pi i)^j, \quad (10)$$

$$A_j(\vec{m}) = \sum_{j_1 + \dots + j_s = j} a_{j_1, \dots, j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s}. \quad (11)$$

Заметим, что если все коэффициенты $a_{j_1, \dots, j_s}$ — алгебраические числа, то в силу трансцендентности числа π величина $Q(\vec{m}) = 0$ тогда и только тогда, когда $A_j(\vec{m}) = 0$, для всех $j = 0, \dots, n(Q)$.

ЛЕММА 4. Для любого $\vec{m} \in M_s$ функция $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$ является собственной функцией оператора $Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right)$ с собственным числом $Q(\vec{m})$, если $Q(\vec{m}) \neq 0$, или принадлежит ядру Ker_Q оператора, если $Q(\vec{m}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = (2\pi i)^{j_1 + \dots + j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & Q \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \\ &= \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1, \dots, j_s} (2\pi i)^{j_1 + \dots + j_s} m_1^{j_1} \dots m_s^{j_s} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \\ &= Q(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Будем использовать обозначение $\mathbb{K}er_Q$ для самого ядра оператора, а для множества значений $\vec{m}$, для которых $e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in \mathbb{K}er_Q$ будем использовать обозначение Ker_Q .

Пусть $S \subset M_s$ — произвольное конечное множество целочисленных векторов $\vec{m}$. Обозначим через $\mathbb{T}_0(S)$ — пространство всех тригонометрических многочленов с постоянными коэффициентами

$$\mathbb{T}_0(S) = \left\{ P(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \mid b_{\vec{m}} \in \mathbb{C}, \vec{m} \in S \right\}.$$

Очевидно, что если $f(\vec{x}) \in \mathbb{K}er_Q$ и $f(\vec{x}) \neq 0$, то уравнение

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) = f(\vec{x}) \quad (12)$$

не имеет решений. Более того, пространство $\mathbb{T}_0(S)$ можно представить как прямую сумму подпространств

$$\mathbb{T}_0(S) = \mathbb{T}_0(S \setminus Ker_Q) \oplus \mathbb{T}_0(S \cap Ker_Q)$$

и уравнение (12) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$f(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S \setminus Ker_Q).$$

ТЕОРЕМА 2. Для пространства $\mathbb{T}_0(S)$ общим решением дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) &= f(\vec{x}), \\ f(\vec{x}) &= \sum_{\vec{m} \in S \setminus Ker_Q} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in \mathbb{T}_0(S \setminus Ker_Q), \quad -\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1, \dots, s) \end{aligned} \quad (13)$$

является тригонометрический многочлен

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus Ker_Q} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + \sum_{\vec{m} \in S \cap Ker_Q} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (14)$$

где $c_{\vec{m}}$ — произвольные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный многочлен $u(\vec{x}) \in \mathbb{T}_0(S)$:

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(\vec{x}) &= \sum_{\vec{m} \in S} c_{\vec{m}} Q(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \\ &= \sum_{\vec{m} \in S \setminus Ker_Q} c_{\vec{m}} Q(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in S \setminus Ker_Q} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \end{aligned}$$

Таким образом, приравнивая коэффициенты тригонометрических многочленов слева и справа, получим

$$c_{\vec{m}} = \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})}$$

для каждого $\vec{m} \in S \setminus Ker_Q$ и $c_{\vec{m}}$ — произвольное число, если $\vec{m} \in S \cap Ker_Q$, что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Вопрос о переходе от пространства $\mathbb{T}_0(S)$ к пространству M_s^α требует дополнительного анализа, так как связан с арифметическими свойствами спектра дифференциального оператора $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ на пространстве M_s^α , от которых зависит сходимость тригонометрического ряда формального решения

$$\sum_{\vec{m} \in M_s \setminus Ker_Q} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} + \sum_{\vec{m} \in Ker_Q} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

для произвольной функции

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M_s \setminus Ker_Q} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \in M_s^\alpha.$$

5. О погрешности квадратурных формул на классе M_s^α для некоторых моноидов M

Пусть $q > 3^s$ и моноид $M = M_{q,1}$, состоящий из натуральных чисел сравнимых с 1 по модулю q :

$$M_{q,1} = \{m \mid m \equiv 1 \pmod{q}\}.$$

Рассмотрим квадратурную формулу с параллелепипедальной сеткой

$$\left(\frac{k}{q}, \left\{\frac{a_1 k}{q}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{q}\right\}\right) \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

на классе M_s^α :

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{k=0}^{q-1} f\left(\frac{k}{q}, \left\{\frac{a_1 k}{q}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{q}\right\}\right) - R_q[f(\vec{x})], \quad f(\vec{x}) \in M_s^\alpha. \quad (15)$$

Если

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \\ \vec{m}_{\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \\ \vec{m}_{\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

то для погрешности приближенного интегрирования $R_q[f(\vec{x})]$ справедливо равенство

$$R_q[f(\vec{x})] = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \vec{m} \neq \vec{0}, \\ \vec{m}_{\nu} \in M, (\nu=1, \dots, s)}} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} \delta_q(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s),$$

где символ Коробова $\delta_q(m)$ задан равенствами

$$\delta_q(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

Назовём набор коэффициентов $(a_1, \dots, a_{s-1})$ допустимым по модулю q , если для любого набора $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq s-1$ при $k = 1, \dots, s-1$ выполнены соотношения

$$\pm a_{\nu_1} \pm \dots \pm a_{\nu_k} \not\equiv 1 \pmod{q}, \quad \pm a_{\nu_1} \pm \dots \pm a_{\nu_k} \not\equiv 0 \pmod{q}.$$

ТЕОРЕМА 3. Для любого допустимого набора $(a_1, \dots, a_{s-1})$ по модулю q квадратурная формула (15) точна на классе M_s^α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $\overline{m_\nu} \in M$, то либо $m_\nu \equiv \pm 1 \pmod{q}$, либо $m_\nu = 0$. Обозначим набор $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq s-1$ при $k = 1, \dots, s-1$ таких значений ν , что $m_{\nu+1} \equiv \pm 1 \pmod{q}$, а для всех остальных $\nu > 0$ имеем $m_{\nu+1} = 0$.

Если $m_1 = 0$, то из равенства $\delta_q(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s) = 1$ следует, что $\pm a_{\nu_1} \pm \dots \pm a_{\nu_k} \equiv 0 \pmod{q}$. Если $m_1 \equiv \pm 1 \pmod{q}$, то $\pm a_{\nu_1} \pm \dots \pm a_{\nu_k} \equiv \mp 1 \pmod{q}$. Но оба сравнения невозможны, так как набор $(a_1, \dots, a_{s-1})$ допустимый. Следовательно, в сумме для погрешности приближенного интегрирования все слагаемые нулевые и теорема доказана. $\square$

Доказанная теорема, а точнее метод её доказательства, позволяет получить утверждение для любой оптимальной параллелепипедальной сетки, для которой гиперболический параметр больше 1.

Пусть $\Lambda(a_1, \dots, a_{s-1}; q)$ целочисленная решётка решений линейного сравнения:

$$\Lambda(a_1, \dots, a_{s-1}; q) = \{ \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s \equiv 0 \pmod{q} \}$$

и $q(\Lambda(a_1, \dots, a_{s-1}; q))$ — гиперболический параметр этой решётки, то есть

$$q(\Lambda(a_1, \dots, a_{s-1}; q)) = \min_{\vec{m} \in \Lambda(a_1, \dots, a_{s-1}; q), \vec{m} \neq \vec{0}} \overline{m_1} \dots \overline{m_s}.$$

ТЕОРЕМА 4. Для любого оптимального набора $(a_1, \dots, a_{s-1})$ по модулю q с

$$q(\Lambda(a_1, \dots, a_{s-1}; q)) > 1$$

квадратурная формула (15) точна на классе M_s^α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $q(\Lambda(a_1, \dots, a_{s-1}; q)) > 1$, то ни один набор $(m_1, \dots, m_s)$ с $\overline{m_\nu} \in M$, $(\nu = 1, \dots, s)$ не будет принадлежать решётке $\Lambda(a_1, \dots, a_{s-1}; q)$, что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

6. Заключение

Из рассмотренных материалов видно.

Во-первых, с каждым моноидом M натуральных чисел связывается класс периодических функций M_s^α , который вложен в хорошо известный класс E_s^α .

Оказалось, что класс периодических функций M_s^α замкнут относительно интегральных операторов Фредгольма и на нем разрешимо интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Во-вторых, для моноида $M = M_{q,1}$ справедлив парадоксальный результат о точности квадратурной формулы с параллелепипедальной сеткой с допустимым набором коэффициентов для всего класса M_s^α .

Нетрудно видеть, что если через $M_{q,a}$ обозначить класс вычетов $m \equiv a \pmod{q}$ при $2 \leq a \leq q-1$, то можно определить класс функций $M_{q,a,s}^\alpha$ следующим образом. Этот класс периодических функций состоит из функций $f(\vec{x})$, которые задаются многомерным рядом Фурье вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \\ m_\nu \in M_{q,a}, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \\ m_\nu \in M_{q,a}, (\nu=1, \dots, s)}} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам

$$|C(\vec{m})| \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\overline{m}_\nu \in M, (\nu=1, \dots, s)} |C(\vec{m})| (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha = \sup_{\overline{m}_\nu \in M, (\nu=1, \dots, s)} |c(\vec{m})| < \infty.$$

Если $\sigma_{M_{q,a}}$ — абсцисса абсолютной сходимости дзета-функции

$$\zeta(M_{q,a}|\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|qm+a|^\alpha}$$

класса вычетов $M_{q,a}$, то для любого $\alpha > \sigma_{M_{q,a}}$ ряд Фурье для функции $f(\vec{x}) \in M_{q,a,s}^\alpha$ абсолютно и равномерно сходится для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$.

Если модуль q — простое число, то для квадратурной формулы (15) теоремы 3 и 4 остаются справедливыми и для класса $M_{q,a,s}^\alpha$. Так как функции $f(\vec{x})$ из класса $M_{q,a,s}^\alpha$ имеют нулевое значение для нулевого коэффициента Фурье $C(\vec{0})$, то отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{q-1} f\left(\frac{k}{q}, \left\{\frac{a_1 k}{q}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_{s-1} k}{q}\right\}\right) = 0, \quad f(\vec{x}) \in M_{q,a,s}^\alpha$$

при этих условиях.

В-третьих, вопрос о решении дифференциального уравнения с частными производными с дифференциальным оператором $Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$ в пространстве M_s^α зависит от арифметических свойств спектра этого оператора.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.
2. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. — Т. 4, вып. 3. — Тула, 1998. — С. 56–67.
3. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Аккуратова С. В. О некоторых свойствах нормированных пространств и алгебр сеток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. — Т. 5, вып. 1. — Тула, 1999. — С. 100–113.
4. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 187–207.
5. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.
6. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.
7. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

8. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.
9. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.
10. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 1959. — Т. 128, № 2. — С. 235–238.
11. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. — М.: Физматгиз, 1963.
12. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2004. — 288 с.
13. Родионов А. В. О методе В. С. Рябенского — Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными // Чебышевский сборник. 2009. — Т. 10, вып. 3. — С. 84–96.
14. Рябенский В. С. Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретико-числовых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1961. — Т. 60. — С. 232–237.
15. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр.: В 2 ч. / Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Ребров Е. Д., Басалов Ю. А., Басалова А. Н., Лямин М. И., Родионов А. В.; Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. — Ч. II. — 161 с.

REFERENCES

1. S. S. Demidov, E. A. Morozova, V. N. Chubarikov, I. Yu. Rebrov, I. N. Balaba, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, L. P. Dobrovol'skaya, A. V. Rodionov, O. A. Pikhtil'kova, 2018, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol 18, №4(64) pp. 6–85.
2. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, "Banach spaces of periodic functions", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.
3. Dobrovol'skii, N. M., Manokhin, E.V., Rebrova, I. YU. & Akkuratova, S.V. 1999, "On some properties of normed spaces and algebras of nets", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 5, no. 1, pp. 100–113.
4. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.
5. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.
6. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 142–150.

7. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.
8. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.
9. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.
10. Korobov, N. M. 1959, "On approximate solution of integral equations", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 128, no. 2, pp. 235–238.
11. Korobov, N. M. 1963, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhenном analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.
12. Korobov, N.M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhenном analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia. — 288 с.
13. Rodionov, A. V., 2009, "On the method by V. S. Ryaben'kii — N. M. Korobov approximate solutions of partial differential equations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 10, no. 3. — pp. 84–96.
14. Ryaben'kij, V.S. 1961, "On a method for obtaining difference schemes and on the use of number-theoretic grids for solving the Cauchy problem by the finite difference method", *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova*, vol. 60, pp. 232–237.
15. "Numerical-theoretical method in approximate analysis and its implementation in POIVS "TMK" ": Monogr.: In 2 h., 2016. / Rebrova I. Yu., Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Balaba I. N., Yesayan A. R., Rebrov E. D., Basalov Yu. A., Basalova A. N., Lyamin M. I., Rodionov A. V.; Pod. ed. Dobrovolsky N. M. — Tula: Publishing house of Tula. state PED. UN-TA im. L. N. Tolstoy, — Part II. — 161 p.

Получено 4.12.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-187-207

Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел¹

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба,
И. Ю. Реброва

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН, г. Москва.

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Балаба Ирина Николаевна — доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: ibalaba@mail.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

В работе для произвольного моноида натуральных чисел строятся основы алгебры рядов Дирихле либо над числовым полем, либо над кольцом целых чисел алгебраического числового поля.

Для любого числового поля $\mathbb{K}$ показано, что множество $\mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}}$ всех обратимых рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ является бесконечной абелевой группой, состоящей из рядов, у которых первый коэффициент отличен от нуля.

Вводится понятие целого ряда Дирихле моноида натуральных чисел, которые образуют алгебру над кольцом целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$. Показано, что для группы $\mathbb{U}_{\mathbb{K}}$ алгебраических единиц кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$ множество $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ целых рядов Дирихле, у которых $a(1) \in \mathbb{U}_{\mathbb{K}}$, является мультипликативной группой.

Для любого ряда Дирихле из алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел определены приведенный ряд, необратимая часть и дополнительный ряд. Найдена формула разложения произвольного ряда Дирихле в произведение приведенного ряда и конструкции из необратимой части и дополнительного ряда.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_p_a.

Для любого моноида натуральных чисел выделена алгебра рядов Дирихле, сходящихся на всей комплексной области. Также построена алгебра рядов Дирихле с заданной полуплоскостью абсолютной сходимости. Показано, что для любого нетривиального моноида M и для любого вещественного σ_0 найдется бесконечное множество рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)$ таких, что областью их голоморфности является α -полуплоскость $\sigma > \sigma_0$.

С помощью теоремы универсальности С. М. Воронина удалось доказать слабую форму теоремы универсальности для широкого класса дзета-функций моноидов натуральных чисел.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования. В частности, если верна гипотеза Линника–Ибрагимова, то для них должна быть справедлива и сильная теорема универсальности.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение, теорема универсальности, алгебра рядов Дирихле.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-187-207

Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers²

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate Professor of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Geophysical centre of RAS, Moscow.

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, assistant professor, professor of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: ibalaba@mail.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: i_rebrova@mail.ru

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

Abstract

In this paper, for an arbitrary monoid of natural numbers, the foundations of the Dirichlet series algebra are constructed either over a numerical field or over a ring of integers of an algebraic numerical field.

For any numerical field $\mathbb{K}$, it is shown that the set $\mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}}$ of all reversible Dirichlet series of $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ is an infinite Abelian group consisting of series whose first coefficient is nonzero.

We introduce the notion of an integer Dirichlet monoid of natural numbers that form an algebra over a ring of algebraic integers $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ of the algebraic field $\mathbb{K}$. It is shown that for a group $\mathbb{U}_{\mathbb{K}}$ of algebraic units of the ring of algebraic integers of $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ an algebraic field $\mathbb{K}$ the set of $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ of entire Dirichlet series, $a(1) \in \mathbb{U}_{\mathbb{K}}$, is multiplicative group.

For any Dirichlet series from the Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers, the reduced series, the irreversible part and the additional series are determined. A formula for decomposition of an arbitrary Dirichlet series into the product of the reduced series and a construction of an irreversible part and an additional series is found.

For any monoid of natural numbers allocated to the algebra of Dirichlet series, convergent in the entire complex domain. The Dirichlet series algebra with a given half-plane of absolute convergence is also constructed. It is shown that for any nontrivial monoid M and for any real σ_0 , there is an infinite set of Dirichlet series of $\mathbb{D}(M)$ such that the domain of their holomorphism is α -half-plane $\sigma > \sigma_0$.

With the help of the universality theorem S. M. Voronin managed to prove the weak form of the universality theorem for a wide class of Zeta functions of monoids of natural numbers.

In conclusion describes the actual problem with the Zeta functions of monoids of natural numbers that require further research. In particular, if the Linnik–Ibrahimov hypothesis is true, then a strong theorem of universality should be valid for them.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product, universality theorem, Dirichlet series algebra.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.

*Посвящается 70-летию академика Литовской АН,
профессора Антанаса Лауринчикаса*

1. Введение

За последние полтора года начало интенсивно развиваться новое направление исследований, связанное с изучением дзета-функций моноидов натуральных чисел [5, 6, 7, 9, 10, 11].

В данной работе преследуется цель — показать, что теория дзета-функций моноидов натуральных чисел входит как составная часть в более общую теорию Алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел, основы которой и будут изложены далее.

2. Основные определения и обозначения

Пусть $M \subset \mathbb{N}$ — произвольный моноид натуральных чисел. Рассмотрим множество $\mathbb{D}(M)$ — произвольных рядов Дирихле вида

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geq \sigma_f^*,$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости. Как хорошо известно [14, 15], для любых рядов Дирихле справедливо неравенство $\sigma_f \leq \sigma_f^* + 1$.

Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное числовое поле. Таким образом, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$. Если все коэффициенты $a(n) \in \mathbb{K}$, то множество всех таких рядов Дирихле будем обозначать через $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ и оно является бесконечномерным линейным функциональным пространством над полем $\mathbb{K}$.

Выделим подпространство $\mathbb{D}^{\infty}(M)_{\mathbb{K}}$ условием $\sup_{n \in M} |a(n)| < \infty$. На $\mathbb{D}^{\infty}(M)_{\mathbb{K}}$ зададим норму

$$\|f(\alpha)\| = \sup_{n \in M} |a(n)|.$$

Относительно заданной нормы $\mathbb{D}^{\infty}(M)_{\mathbb{K}}$ является несепарабельным пространством. Оно будет банаховым, если поле $\mathbb{K}$ — банахово пространство над полем $\mathbb{Q}$ относительно нормы, заданной абсолютной величиной числа из поля $\mathbb{K}$. Так как отсюда следует, что либо $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то $\mathbb{D}^{\infty}(M)_{\mathbb{K}}$ — банахово пространство, только для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Нетрудно понять, что пространство $\mathbb{D}^{\infty}(M)_{\mathbb{K}}$ над полем $\mathbb{K}$ не является алгеброй, так как нет замкнутости относительно произведения рядов Дирихле.

Рассмотрим произведение двух рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$:

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^{\alpha}}, \quad g(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{b(n)}{n^{\alpha}} \quad a(n), b(n) \in \mathbb{K},$$

имеем:

$$f(\alpha)g(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{c(n)}{n^{\alpha}},$$

где

$$c(n) = \sum_{m|n, m, \frac{n}{m} \in M} a(m)b\left(\frac{n}{m}\right) \in \mathbb{K} \quad n \in M.$$

Следовательно $f(\alpha)g(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ и $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ является коммутативной алгеброй над полем $\mathbb{K}$.

Аналогично, для произведения трёх рядов Дирихле имеем:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^{\alpha}}, \quad g(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{b(n)}{n^{\alpha}}, \quad h(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{c(n)}{n^{\alpha}}, \quad a(n), b(n), c(n) \in \mathbb{K}, \\ (f(\alpha)g(\alpha))h(\alpha) &= \left(\sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(\sum_{m|n, m, \frac{n}{m} \in M} a(m)b\left(\frac{n}{m}\right) \right) \right) \sum_{n \in M} \frac{c(n)}{n^{\alpha}} = \\ &= \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{m_1, m_2, m_3 \in M, m_1 m_2 m_3 = n} a(m_1)b(m_2)c(m_3); \\ f(\alpha)(g(\alpha)h(\alpha)) &= \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^{\alpha}} \left(\sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(\sum_{m|n, m, \frac{n}{m} \in M} b(m)c\left(\frac{n}{m}\right) \right) \right) = \\ &= \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{m_1, m_2, m_3 \in M, m_1 m_2 m_3 = n} a(m_1)b(m_2)c(m_3) = (f(\alpha)g(\alpha))h(\alpha), \end{aligned}$$

что доказывает ассоциативность алгебры $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ над полем $\mathbb{K}$.

Если ряд Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ имеет коэффициент $a(1) \neq 0$, то существует обратный ряд Дирихле $f^{-1}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$, то есть такой ряд Дирихле

$$f^{-1}(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{b(n)}{n^{\alpha}}, \quad \text{что} \quad f(\alpha)f^{-1}(\alpha) = 1.$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты $b(n)$ удовлетворяют соотношениям:

$$b(1) = \frac{1}{a(1)}, \quad b(n) = -\frac{1}{a(1)} \sum_{m|n, m, \frac{n}{m} \in M, m>1} a(m)b\left(\frac{n}{m}\right) \quad n \in M, n > 1.$$

Множество всех обратимых рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ обозначим через $\mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}}$. Ясно, что это мультипликативный моноид, но справедливо более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Множество $\mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}}$ всех обратимых рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ является бесконечной абелевой группой, состоящей из рядов, у которых первый коэффициент отличен от нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из предыдущего видно, что если первый коэффициент ряда Дирихле $a(1) \neq 0$, то существует обратный ряд Дирихле $f^{-1}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ и, значит, $f(\alpha) \in \mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}}$.

Покажем теперь, что условие $a(1) \neq 0$ является необходимым для обратимости ряда Дирихле. Действительно, если $a(1) = 0$, то обозначим через $m \in M$ наименьший номер такой, что $a(m) \neq 0$. Пусть произвольное $\sigma_0 > \max(\sigma_f, \sigma_{f^{-1}})$ и величина A задана равенством

$$A = \max \left(\sum_{n \in M, n \geq m} \frac{|a(n)|}{n^{\sigma_0}}, \sum_{n \in M} \frac{|b(n)|}{n^{\sigma_0}} \right), \quad f^{-1}(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{b(n)}{n^{\alpha}},$$

тогда при $\alpha > \sigma_0$ имеем:

$$|f^{-1}(\alpha)| \leq A, \quad |f(\alpha)| \leq \sum_{n \in M, n \geq m} \frac{|a(n)|}{n^{\alpha}} \leq \frac{1}{m^{\alpha-\sigma_0}} \sum_{n \in M, n \geq m} \frac{|a(n)|}{n^{\sigma_0}} \leq \frac{A}{m^{\alpha-\sigma_0}}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\alpha > \sigma_0, \alpha \rightarrow \infty} f^{-1}(\alpha)f(\alpha) = 0,$$

но это противоречит обратимости $f^{-1}(\alpha)f(\alpha) = 1$.

Единичным элементом является ряд Дирихле $f(\alpha) \equiv 1$.

Замкнутость относительно произведения рядов Дирихле очевидна, так как младший коэффициент произведения является произведением младших коэффициентов. Существования обратного элемента входит в определение множества обратимых рядов. $\square$

Обозначим через A_f область аналитичности ряда Дирихле $f(\alpha)$, то есть максимальную область куда ряд Дирихле $f(\alpha)$ аналитически продолжается. Через P_f — множество полюсов его аналитического продолжения, а через Z_f — множество его нулей. Очевидно, что для $f(\alpha) \in \mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}}$ выполняются соотношения

$$A_{f^{-1}} = (A_f \setminus Z_f) \bigcup P_f.$$

3. Алгебра целых рядов Дирихле

Рассмотрим кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$. Ряд Дирихле

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^{\alpha}} \quad a(n) \in \mathbb{K}, n \in M$$

будем называть целым рядом Дирихле над алгебраическим полем $\mathbb{K}$ для моноида M . Множество всех таких рядов Дирихле будем обозначать через $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$. Ясно, что $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}} \subset \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$.

Нетрудно видеть, что множество целых рядов Дирихле, с одной стороны, является $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ -модулем, а с другой стороны, — алгеброй над целым алгебраическим кольцом $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$.

Обозначим через $\mathbb{U}_{\mathbb{K}}$ группу алгебраических единиц кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$. Через $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ обозначим подмножество целых рядов Дирихле из алгебры $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$, у которых $a(1) \in \mathbb{U}_{\mathbb{K}}$.

ТЕОРЕМА 2. *Множество $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ целых рядов Дирихле является мультипликативной группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, покажем что множество $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ замкнуто относительно операции умножения рядов Дирихле. Действительно, если

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^{\alpha}}, \quad g(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{b(n)}{n^{\alpha}} \quad a(n), b(n) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad a(1), b(1) \in \mathbb{U}_{\mathbb{K}},$$

то

$$f(\alpha)g(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{c(n)}{n^{\alpha}}, \quad c(n) = \sum_{m|n, m, \frac{n}{m} \in M} a(m)b\left(\frac{n}{m}\right) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \quad n \in M, \quad c(1) = a(1)b(1) \in \mathbb{U}_{\mathbb{K}}$$

и замкнутость установлена.

Во-вторых, единичным элементом является ряд Дирихле $f(\alpha) \equiv 1$.

Наконец, для любого $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ имеем:

$$f^{-1}(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{b(n)}{n^{\alpha}}, \quad b(1) = \frac{1}{a(1)}, \quad b(n) = -\frac{1}{a(1)} \sum_{m|n, m, \frac{n}{m} \in M, m > 1} a(m)b\left(\frac{n}{m}\right) \quad n \in M, n > 1.$$

Ясно, что $b(1) \in \mathbb{U}_{\mathbb{K}}$. Далее индукцией по n мы получаем, что для всех $n \in M, n > 1$ имеем $b(n) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, что доказывает $f^{-1}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$. Тем самым теорема полностью доказана. $\square$

Если определить множество $\mathbb{D}(M)_{1_{\mathbb{K}}}$ целых рядов Дирихле с $a(1) = 1$, то нетрудно видеть, что это будет подгруппа: $\mathbb{D}(M)_{1_{\mathbb{K}}} \subset \mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}} \subset \mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}}$.

4. Алгебра необратимых рядов Дирихле

Для произвольного ряда Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ определим его необратимую часть $f^*(\alpha)$ равенством $f^*(\alpha) = f(\alpha) - a(1)$. Ясно, что $f^*(\alpha) = f(\alpha)$ только для необратимых рядов Дирихле. Обозначим множество всех необратимых рядов Дирихле через $\mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{K}}$, а множество всех необратимых целых рядов Дирихле через $\mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$. Очевидно, что $\mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{K}}$ — алгебра над полем $\mathbb{K}$, а $\mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$ — алгебра над кольцом $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$.

Ясно, что справедливы следующие разложения в прямые суммы:

$$\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \bigoplus \mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{K}}, \quad \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}} = \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \bigoplus \mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}.$$

Кроме этого, справедливы равенства:

$$\mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^* + \mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{K}}, \quad \mathbb{D}^*(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}} = \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}^* + \mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}, \quad \mathbb{D}(M)_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}} = \mathbb{U}_{\mathbb{K}} + \mathbb{D}^0(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}},$$

где $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}^* = \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$.

Для произвольного ряда Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ определим его дополнительную часть $f^{**}(\alpha)$ равенством $f^{**}(\alpha) = (1 + f^*(\alpha))^{-1} - 1$.

Если дан произвольный ряд Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$, то его приведенным рядом Дирихле назовём ряд $f^{(p)}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$, заданный равенством $f^{(p)}(\alpha) = 1 + f^*(\alpha)$. Очевидно, что для $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{1_{\mathbb{K}}}$ будет $f^{(p)}(\alpha) = f(\alpha)$.

ТЕОРЕМА 3. Для любого $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ справедливо равенство

$$f(\alpha) = f^{(p)}(\alpha)(a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} f^{(p)}(\alpha)(1 + f^{**}(\alpha)) &= (1 + f^*(\alpha))(1 + f^{**}(\alpha)) = 1; \\ f^{(p)}(\alpha)(a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha)) &= f^{(p)}(\alpha)(f(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha)) = \\ &= f(\alpha)f^{(p)}(\alpha)(1 + f^{**}(\alpha)) = f(\alpha). \end{aligned}$$

□

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$ справедливо равенство

$$f(\alpha) = f^{(p)}(\alpha)(a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha)),$$

где $f^{(p)}(\alpha), a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, каждый приведенный ряд Дирихле $f^{(p)}(\alpha)$ для произвольного целого ряда Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$ принадлежит группе $\mathbb{D}(M)_{1_{\mathbb{K}}}$. Следовательно, $1 + f^{**}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{1_{\mathbb{K}}}$, а значит, и $a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$. □

5. Алгебра рядов Дирихле, сходящихся на всей комплексной плоскости

Рассмотрим ряд Дирихле $f_0(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{R}}$, заданный равенством

$$f_0(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha} e^n}.$$

Для любого $\alpha = \sigma + it$ мажорирующим рядом для $f_0(\alpha)$ будет ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma} e^n},$$

который сходится по интегральному признаку Коши, так как сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma} e^x}, \quad \int_{x_{\sigma}}^{\infty} \frac{dx}{x^{\sigma} e^x} \leq \int_{x_{\sigma}}^{\infty} \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{2}{e^{x_{\sigma}}},$$

где $x_{\sigma} \geq 1$ определяется из условия $x > -2\sigma \ln x$ при $x > x_{\sigma}$.

Отсюда следует, что ряд Дирихле $f_0(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{R}}$ сходится для любого комплексного α . Так как $n!$ растёт быстрее чем e^n , то и ряд Дирихле $f_1(\alpha) \in \mathbb{D}(M)_{\mathbb{Q}}$, заданный равенством

$$f_1(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^{\alpha} n!},$$

будет сходиться для любого комплексного α . Так как $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$ для любого числового поля $\mathbb{K}$, то для любого числового поля $\mathbb{K}$ множество рядов Дирихле, сходящихся для любого комплексного α , непусто. Обозначим это множество через $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}}$.

Будем через $\mathbb{D}_{fin}(M)_{\mathbb{K}}, \mathbb{D}_{fin}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}, \mathbb{D}_{fin}(M)_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}, \mathbb{D}_{fin}(M)_{1_{\mathbb{K}}}$ и $\mathbb{D}_{fin}^*(M)_{\mathbb{K}}$ обозначать соответствующие множества конечных рядов Дирихле. Очевидно, что все эти множества являются подмножествами множества $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}}$. Первые два множества являются алгебрами, а последние три — мультипликативными моноидами, так как последние три множества незамкнуты относительно операции сложения.

ТЕОРЕМА 4. Для любого моноида M натуральных чисел множество $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}}$ является алгеброй над полем $\mathbb{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{K}$, очевиден. Требуется доказать, что произведение двух рядов Дирихле абсолютно сходящихся для любого комплексного значения α будет абсолютно сходиться для любого комплексного значения α .

Пусть величины A , B и m_ε определены из условий

$$A = \sum_{n \in M} \frac{|a(n)|}{n^\sigma}, \quad B = \sum_{n \in M} \frac{|b(n)|}{n^\sigma}, \quad \max \left(\sum_{n \in M, n > m_\varepsilon} \frac{|a(n)|}{n^\sigma}, \sum_{n \in M, n > m_\varepsilon} \frac{|b(n)|}{n^\sigma} \right) < \varepsilon,$$

тогда

$$AB = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n \in M, n < m_\varepsilon^2} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{m, k \in M, mk=n, m, k < m_\varepsilon} |a(m)b(k)| = \left(\sum_{n \in M, n < m_\varepsilon} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \right) \left(\sum_{n \in M, n < m_\varepsilon} \frac{|b(n)|}{n^\sigma} \right), \\ S_2 &= \sum_{n \in M, n < m_\varepsilon^2} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{m, k \in M, mk=n, m < m_\varepsilon, k \geq m_\varepsilon} |a(m)b(k)| < \left(\sum_{n \in M, n < m_\varepsilon} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \right) \left(\sum_{n \in M, n \geq m_\varepsilon} \frac{|b(n)|}{n^\sigma} \right), \\ S_3 &= \sum_{n \in M, n < m_\varepsilon^2} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{m, k \in M, mk=n, m \geq m_\varepsilon, k < m_\varepsilon} |a(m)b(k)| < \left(\sum_{n \in M, n \geq m_\varepsilon} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \right) \left(\sum_{n \in M, n < m_\varepsilon} \frac{|b(n)|}{n^\sigma} \right), \\ S_4 &= \sum_{n \in M, n \geq m_\varepsilon^2} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{m, k \in M, mk=n, m, k \geq m_\varepsilon} |a(m)b(k)| < \left(\sum_{n \in M, n \geq m_\varepsilon} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \right) \left(\sum_{n \in M, n \geq m_\varepsilon} \frac{|b(n)|}{n^\sigma} \right). \end{aligned}$$

Из предыдущего следует, что

$$(A - \varepsilon)(B - \varepsilon) < S_1 \leq AB, \quad 0 \leq S_2 < A\varepsilon, \quad 0 \leq S_3 < B\varepsilon, \quad 0 \leq S_4 < \varepsilon^2.$$

Отсюда вытекает, что ряд Дирихле

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{m, k \in M, mk=n} |a(m)b(k)|$$

абсолютно сходится и равен произведению соответствующих рядов Дирихле. $\square$

ТЕОРЕМА 5. Если целый ряд из $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{Z}}$ абсолютно сходится для любого комплексного значения α , то он из $\mathbb{D}_{fin}(M)_{\mathbb{Z}}$:

$$\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{Z}} = \mathbb{D}_{fin}(M)_{\mathbb{Z}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если целый ряд Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{DC}(M)_{\mathbb{Z}}$, то

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^\alpha}, \quad a(n) \in \mathbb{Z} \quad (n \in M)$$

и бесконечное число $a(n) \neq 0$, но это означает, что при $\alpha = 0$ ряд расходится, так как общий член не стремится к нулю.

Следовательно, если целый ряд Дирихле сходится для любого комплексного значения α , то он содержит конечное число слагаемых, то есть $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{Z}} = \mathbb{D}_{fin}(M)_{\mathbb{Z}}$. $\square$

Заметим, что если мы переходим к полю алгебраических чисел $\mathbb{K}$ на поле $\mathbb{Q}$, то утверждение теоремы 5 перестает быть верным. Действительно, в вещественном алгебраическом поле существует бесконечно много алгебраических единиц. В частности, если $\varepsilon \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ и $0 < \varepsilon < 1$, то ряд Дирихле с $a(n) = \varepsilon^n$ $n \in M$ будет примером целого ряда Дирихле, который сходится для любого значения α .

6. Алгебра рядов Дирихле с заданной полуплоскостью абсолютной сходимости

Пусть σ_0 — произвольное вещественное число. Обозначим через $\mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$ подмножество всех рядов Дирихле $f(\alpha)$ из $\mathbb{D}(M)_{\mathbb{K}}$, для которых $\sigma_f \leq \sigma_0$. Очевидно, что $\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$ для любого σ_0 . Повторяя дословно доказательство теоремы 4 получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. *Для любого моноида M натуральных чисел множество $\mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$ является алгеброй над полем $\mathbb{K}$.*

Нетрудно видеть, что при $\sigma_1 < \sigma_0$ будет выполнено включение $\mathbb{D}_{\sigma_1}(M)_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$ и

$$\mathbb{DC}(M)_{\mathbb{K}} = \bigcap_{\sigma_0 \in \mathbb{R}} \mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}, \quad \mathbb{DC}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}} = \bigcap_{\sigma_0 \in \mathbb{R}} \mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}.$$

Несложно задать при $\sigma_1 > \sigma_0$ изоморфизм линейных пространств $\mathbb{D}_{\sigma_1}(M)_{\mathbb{K}}$ и $\mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$. Действительно, каждому ряду Дирихле

$$f(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)}{n^\alpha} \in \mathbb{D}_{\sigma_1}(M)_{\mathbb{K}}$$

поставим в соответствие ряд Дирихле

$$g(\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{b(n)}{n^\alpha} \in \mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$$

с помощью равенства

$$b(n) = a(n)[n^{\sigma_1 - \sigma_0}], \quad n \in M.$$

И наоборот, каждому ряду Дирихле $g(\alpha)$ поставим в соответствие ряд Дирихле $f(\alpha)$ с помощью равенства

$$a(n) = \frac{b(n)}{[n^{\sigma_1 - \sigma_0}]}, \quad n \in M.$$

Указанное соответствие осуществляет изоморфизм линейных пространств, но изоморфизм алгебр при этом не выполняется, так как произведение не переходит в произведение.

Обозначим указанное отображение $\mathbb{D}_{\sigma_1}(M)_{\mathbb{K}}$ в $\mathbb{D}_{\sigma_0}(M)_{\mathbb{K}}$ через $\varphi_{\sigma_1, \sigma_0}$. Это линейное преобразование можно применить к любому ряду Дирихле $f(\alpha)$. Оно будет сдвигать абсциссу абсолютной сходимости.

ТЕОРЕМА 7. *Для абсциссы абсолютной сходимости образа ряда Дирихле $f(\alpha)$ справедливо равенство*

$$\sigma_{\varphi_{\sigma_1, \sigma_0}(f)} = \sigma_f + \sigma_1 - \sigma_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению абсциссы абсолютной сходимости ряда Дирихле $f(\alpha)$ для любого значения $\alpha = \sigma + it$ при $\sigma > \sigma_f$ ряд

$$\sum_{n \in M} \frac{|a(n)|}{|n^\alpha|}$$

сходится, а согласно теореме Ландау (см. [14], стр.) ряд

$$\sum_{n \in M} \frac{|a(n)|}{n^{\sigma_f}}$$

расходится.

Ряд Дирихле для $\varphi_{\sigma_1, \sigma_0}(f)$ имеет вид:

$$\varphi_{\sigma_1, \sigma_0}(f) = \sum_{n \in M} \frac{a(n)[n^{\sigma_1 - \sigma_0}]}{n^\alpha}.$$

Для ряда абсолютных величин имеем неравенства:

$$\frac{1}{2} \sum_{n \in M} \frac{|a(n)|n^{\sigma_1 - \sigma_0}}{n^\sigma} \leq \sum_{n \in M} \frac{|a(n)|[n^{\sigma_1 - \sigma_0}]}{n^\sigma} \leq \sum_{n \in M} \frac{|a(n)|n^{\sigma_1 - \sigma_0}}{n^\sigma}.$$

Так как при $\sigma - \sigma_1 + \sigma_0 > \sigma_f$ мажорирующий ряд сходится, а при $\sigma - \sigma_1 + \sigma_0 = \sigma_f$ расходится, то утверждение теоремы доказано. $\square$

7. Ряды Дирихле с областью голоморфности заданной правой полуплоскостью

В работе [8] была доказана гипотеза о заградительном ряде для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых из работы [9]. Этим же методом мы покажем, что для простейшего моноида — геометрической прогрессии существует ряд Дирихле, для которого областью голоморфности является заданная правая полуплоскость.

Для произвольного вещественного σ_0 и натурального $q > 1$ определим ряд Дирихле

$$f_{\sigma_0, q}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n\sigma_0}}{q^{n\alpha}} \in \mathbb{D}(M(q)), \quad M(q) = \{m = q^n \mid n = 0, 1, \dots\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$f_{\sigma_0, q}(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{q^{\alpha - \sigma_0}}\right)^{-1}.$$

Отсюда следует что для абсциссы абсолютной сходимости справедливо равенство

$$\sigma_{f_{\sigma_0, q}} = \sigma_0.$$

Функция $f_{\sigma_0, q}(\alpha)$ — мероморфная функция на всей комплексной α -плоскости кроме точек $\alpha = \sigma_0 + \frac{2\pi ik}{\ln q}$, k — любое целое число.

Определим функцию $F_{\sigma_0, q}(\alpha)$ с помощью обобщенного произведения Эйлера:

$$F_{\sigma_0, q}(\alpha) = \prod_{m=1}^{\infty} f_{\sigma_0, q^m}(\alpha) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(q^m)^{\alpha - \sigma_0}}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n)}{q^{n(\alpha - \sigma_0)}},$$

где $a(0) = 1$ и при $n > 0$ $a(n)$ — количество решений в целых неотрицательных числах линейного уравнения с растущим числом слагаемых

$$x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n. \quad (1)$$

Ясно, что $F_{\sigma_0, q}(\alpha) \in \mathbb{D}(M(q))$.

ЛЕММА 1. При $\alpha = \sigma + it$ и $\sigma > \sigma_0$ ряд Дирихле для $F_{\sigma_0, q}(\alpha)$ абсолютно сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмём логарифм обобщенного произведения Эйлера для $F_{\sigma_0, q}(\alpha)$, получим

$$\ln F_{\sigma_0, q}(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(q^m)^{(\alpha - \sigma_0)n}}.$$

При $\delta = \sigma - \sigma_0 > 0$ для него имеется мажорирующий ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(q^m)^{\delta n}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n(m)}{q^{m\delta}}, \quad n(m) = \sum_{n|m} \frac{1}{n} < 1 + \ln m,$$

который абсолютно равномерно сходится. $\square$

Далее будем использовать обозначения и определения из работы [8].

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha_1 = \sigma_1 + it_1$ — произвольная точка в правой полуплоскости $\sigma_1 > \sigma_0$, тогда порядок $\text{ord}_{\alpha_1} F_{\sigma_0, q}(\alpha) = 0$ и радиус в этой точке $\text{rad}_{\alpha_1} F_{\sigma_0, q}(\alpha) = \sigma_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из наличия обобщённого эйлера произведения следует, что справедливо равенство

$$F_{\sigma_0, q}(\alpha) = \prod_{m=1}^{\infty} f_{\sigma_0, q^m}(\alpha), \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_0.$$

Очевидно, что для любого $m \geq 1$ справедливы равенства

$$\text{ord}_{\alpha_1} f_{\sigma_0, q^m}(\alpha) = 0, \quad \text{Wei}_{\alpha_1} f_{\sigma_0, q^m}(\alpha) = f_{\sigma_0, q^m}(\alpha_1), \quad \text{rad}_{\alpha_1} f_{\sigma_0, q^m}(\alpha) = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + \tau_m^2},$$

где $\tau_m = \min_{k \in \mathbb{Z}} \left| t_1 - \frac{2k\pi}{m \ln q} \right|$ задает расстояние до ближайшего полюса $\sigma_0 + \frac{2k\pi}{m \ln q} i$ функции $f_{\sigma_0, q^m}(\alpha)$.

Нетрудно видеть, что круг $K(\alpha_1, \sigma_1 - \sigma_0) = \{\alpha \mid |\alpha - \alpha_1| < \sigma_1 - \sigma_0\}$ является пересечением всех кругов $K\left(\alpha_1, \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + \tau_m^2}\right) = \{\alpha \mid |\alpha - \alpha_1| < \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + \tau_m^2}\}$, когда m пробегает все натуральные значения:

$$K(\alpha_1, \sigma_1 - \sigma_0) = \bigcap_{m=1}^{\infty} K\left(\alpha_1, \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + \tau_m^2}\right).$$

Как известно (см. [3], стр. 59), на окружности круга сходимости всегда есть по меньшей мере одна особая точка. Так как все точки окружности круга $K(\alpha_1, \sigma_1 - \sigma_0)$ кроме точки касания с прямой $\sigma = \sigma_0$ принадлежат области абсолютной сходимости ряда $F_{\sigma_0, q}(\alpha)$, то особой точкой является точка касания $\alpha = \sigma_0 + it_1$. Лемма полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 8. Областью голоморфности ряда Дирихле $F_{\sigma_0, q}(\alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > \sigma_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства предыдущей леммы следует, что все точки прямой $\sigma = \sigma_0$ являются особыми точками ряда Дирихле $F_{\sigma_0, q}(\alpha)$. Отсюда следует, что прямая $\sigma = \sigma_0$ целиком является особой линией для ряда Дирихле $F_{\sigma_0, q}(\alpha)$. А это означает, что областью голоморфности ряда Дирихле $F_{\sigma_0, q}(\alpha)$ является α -полуплоскость $\sigma > \sigma_0$. $\square$

Из доказанной теоремы следует что для любого нетривиального моноида M и для любого вещественного σ_0 найдется бесконечное множество рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M)$ таких, что областью их голоморфности является α -полуплоскость $\sigma > \sigma_0$.

8. Универсальность некоторых рядов Дирихле и дзета-функций некоторых моноидов натуральных чисел

45 лет тому назад 21 августа 1974 года в редакцию Известий АН СССР Серия математическая поступила работа С. М. Воронина, в которой была доказана знаменитая теорема об универсальности дзета-функции Римана [1]. Эта работа открыла целое новое направление исследований, в котором значительную роль сыграли А. Лауринчикас и его ученики. Более подробно о вкладе в данную тематику литовской школы теории чисел можно узнать по работе [12].

ТЕОРЕМА 9. Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(s)$ — функция, аналитическая внутри круга $|s| \leq r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(s)$ не имеет нулей внутри круга $|s| \leq r$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|s| \leq r} \left| f(s) - \zeta \left(s + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right) \right| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1] или [2], стр. 240–250. $\square$

Для дальнейшего нам потребуются моноиды M с однозначным разложением на простые числа такие, что для их дзета-функций $\zeta(M|\alpha)$ справедливо разложение в произведение Эйлера

$$\zeta(M|\alpha) = \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha} \right)^{-1}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma \geq \frac{1}{2}.$$

Доказательство существования таких моноидов содержится в работе [7]. Будем через $\mathfrak{M}_{\sigma_0}$ обозначать класс моноидов M с однозначным разложением на простые числа таких, что дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ представляется в виде произведения Эйлера, абсолютно и равномерно сходящегося в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$.

ЛЕММА 3. При $Q > 4$ для любого $q > Q$ и для любого вещественного T справедливы неравенства

$$\max_{|\alpha| \leq \frac{1}{4}} \left| \frac{1 - \frac{1}{q^{\alpha + \frac{3}{4} + iT}}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha + \frac{3}{4}}}} - 1 \right| < \frac{4}{\sqrt{Q}}, \quad \max_{|\alpha| \leq \frac{1}{4}} \left| 1 - \frac{1}{q^{\alpha + \frac{3}{4} + iT}} \right| < 1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для второго неравенства имеем:

$$\left| 1 - \frac{1}{q^{\alpha + \frac{3}{4} + iT}} \right| \leq 1 + \frac{1}{|q^{\alpha + \frac{3}{4} + iT}|} \leq 1 + \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}.$$

Далее имеем:

$$\left| \frac{1 - \frac{1}{q^{\alpha + \frac{3}{4} + iT}}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha + \frac{3}{4}}}} - 1 \right| = \left| \frac{q^{\alpha + \frac{3}{4}} - \frac{1}{q^{iT}}}{q^{\alpha + \frac{3}{4}} - 1} - 1 \right| = \left| \frac{1 - \frac{1}{q^{iT}}}{q^{\alpha + \frac{3}{4}} - 1} \right| \leq \frac{4}{q^{\frac{1}{2}}} < \frac{4}{\sqrt{Q}}.$$

$\square$

Пусть p_0 — простое число и моноид $M_{-}(p_0)$ обозначает моноид натуральных чисел, не делящихся на p_0 . Дзета-функция $\zeta(M_{-}(p_0)|\alpha)$ в правой полуплоскости $\sigma > 1$ имеет представление в виде произведения Эйлера:

$$\zeta(M_{-}(p_0)|\alpha) = \prod_{p \neq p_0} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha} \right)^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть $Q > 4$, $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leq r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leq r$ и $A(r, f) = \max_{|\alpha| \leq r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для любого простого $p_0 > Q$ существует вещественное $T = T(\varepsilon, p_0)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| f(\alpha) - \zeta \left(M_{-}(p_0) \left| \alpha + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right. \right) \right| < \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\sqrt{Q}} \right) + \frac{4A}{\sqrt{Q}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $f_1(\alpha)$ с помощью равенства

$$f_1(\alpha) = f(\alpha) \left(1 - \frac{1}{p_0^{\alpha + \frac{3}{4}}} \right)^{-1}.$$

Для неё выполнены все условия теоремы С. М. Воронина (теорема 9), поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon, p_0)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| f_1(\alpha) - \zeta \left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right) \right| < \varepsilon.$$

Так как

$$\zeta \left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right) = \zeta \left(M_{-}(p_0) \left| \alpha + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right. \right) \left(1 - \frac{1}{p_0^{\alpha + \frac{3}{4} + iT}} \right)^{-1},$$

то

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| f(\alpha) \frac{1 - \frac{1}{q^{\alpha + \frac{3}{4} + iT}}}{1 - \frac{1}{q^{\alpha + \frac{3}{4}}}} - \zeta \left(M_{-}(p_0) \left| \alpha + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right. \right) \right| < \varepsilon \max_{|\alpha| \leq \frac{1}{4}} \left| 1 - \frac{1}{q^{\alpha + \frac{3}{4} + iT}} \right|.$$

Применяя лемму 3, получим утверждение теоремы. $\square$

Теорему 10 можно существенно усилить. Пусть Q — натуральное число и моноид $M \in \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}$. Определим моноид M_{-Q} как множество натуральных чисел, не делящихся на простые p из $P(M)$ и больших Q . Если определить моноид M_{+Q} как множество натуральных чисел, имеющих в своём каноническом разложении только простые числа $p \in P(M)$, которые больше Q , то $\mathbb{N} = M_{-Q} \cdot M_{+Q}$ и $\zeta(\alpha) = \zeta(M_{-Q}|\alpha)\zeta(M_{+Q}|\alpha)$.

ЛЕММА 4. Для любого вещественного $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < 1$ найдётся натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что для любого вещественного T справедливы неравенства

$$\max_{|\alpha| \leq \frac{1}{4}} \left| \frac{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4})}{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4} + iT)} - 1 \right| < 3\varepsilon_1, \quad \max_{|\alpha| \leq \frac{1}{4}} \left| \frac{1}{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4} + iT)} \right| < 1 + \varepsilon_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $M \in \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}$, то для любого α из круга $|\alpha| \leq \frac{1}{4}$ справедливо равенство

$$\zeta \left(M \left| \alpha + \frac{3}{4} + iT \right. \right) = \prod_{p \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{p^{\alpha + \frac{3}{4} + iT}} \right)^{-1},$$

в котором произведение Эйлера равномерно и абсолютно сходится.

Почленно прологарифмировав, получим

$$\begin{aligned}\ln \zeta \left(M \left| \alpha + \frac{3}{4} + iT \right. \right) &= \sum_{p \in P(M)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu p^{(\alpha + \frac{3}{4} + iT)\nu}}, \\ \ln \zeta \left(M_{+Q} \left| \alpha + \frac{3}{4} + iT \right. \right) &= \sum_{p \in P(M), p > Q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu p^{(\alpha + \frac{3}{4} + iT)\nu}}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого вещественного $\varepsilon_1 > 0$ найдётся натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что для любого вещественного T справедливы неравенства

$$-\ln(1 + \varepsilon_1) < \left| \ln \zeta \left(M_{+Q} \left| \alpha + \frac{3}{4} + iT \right. \right) \right| < \ln(1 + \varepsilon_1)$$

и, значит,

$$\max_{|\alpha| \leq \frac{1}{4}} \left| \frac{1}{\zeta \left(M_{+Q} \left| \alpha + \frac{3}{4} + iT \right. \right)} \right| < 1 + \varepsilon_1.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\left| \ln \frac{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4})}{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4} + iT)} \right| &= \left| \sum_{p \in P(M), p > Q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu p^{(\alpha + \frac{3}{4})\nu}} - \frac{1}{\nu p^{(\alpha + \frac{3}{4} + iT)\nu}} \right) \right| = \\ &= \left| \sum_{p \in P(M), p > Q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu p^{(\alpha + \frac{3}{4})\nu}} \left(1 - \frac{1}{p^{iT\nu}} \right) \right| < \sum_{p \in P(M), p > Q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu p^{\frac{\nu}{2}}} < 2 \ln(1 + \varepsilon_1).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\left| \frac{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4})}{\zeta(M_{+Q}|\alpha + \frac{3}{4} + iT)} - 1 \right| < (1 + \varepsilon_1)^2 - 1 < 3\varepsilon_1.$$

□

ТЕОРЕМА 11. Пусть $0 < r < \frac{1}{4}$; пусть $f(\alpha)$ — функция, аналитическая внутри круга $|\alpha| \leq r$ и непрерывная вплоть до границы круга. Если $f(\alpha)$ не имеет нулей внутри круга $|\alpha| \leq r$ и $A(r, f) = \max_{|\alpha| \leq r} |f(\alpha)|$, то для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякого $1 > \varepsilon_1 > 0$ существует натуральное $Q = Q(\varepsilon_1)$ такое, что существует вещественное $T = T(\varepsilon, \varepsilon_1)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| f(\alpha) - \zeta \left(M_{+Q} \left| \alpha + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right. \right) \right| < \varepsilon (1 + \varepsilon_1) + 3A\varepsilon_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q = Q(\varepsilon_1)$ из леммы 4. Определим функцию $f_2(\alpha)$ с помощью равенства

$$f_2(\alpha) = f(\alpha) \zeta \left(M_{+Q} \left| \alpha + \frac{3}{4} \right. \right).$$

Для неё выполнены все условия теоремы С. М. Воронина (теорема 9), поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное $T = T(\varepsilon, \varepsilon_1)$ такое, что

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| f_2(\alpha) - \zeta \left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right) \right| < \varepsilon.$$

Так как

$$\zeta \left(\alpha + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right) = \zeta \left(M_{-Q} \left| \alpha + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right. \right) \zeta \left(M_{+Q} \left| \alpha + \left(\frac{3}{4} + iT \right) \right. \right),$$

то

$$\max_{|\alpha| \leq r} \left| f(\alpha) \frac{\zeta(M_{+Q} | \alpha + \frac{3}{4})}{\zeta(M_{+Q} | \alpha + (\frac{3}{4} + iT))} - \zeta\left(M_{-Q} \left| \alpha + \left(\frac{3}{4} + iT\right)\right.\right) \right| < \varepsilon \max_{|\alpha| \leq \frac{1}{4}} \left| \frac{1}{\zeta(M_{+Q} | \alpha + \frac{3}{4} + iT)} \right|.$$

Применяя лемму 4, получим утверждение теоремы. $\square$

9. Заключение

Теория дзета-функций моноидов натуральных чисел входит как составная часть в более общую теорию Алгебры рядов Дирихле моноида натуральных чисел.

Представляет интерес, например, исследование подалгебры рядов Дирихле, сходящихся на всей комплексной плоскости. Другая интересная алгебра образована рядами Дирихле, которые имеют аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость.

С помощью теоремы универсальности С. М. Воронина удалось доказать слабую форму теоремы универсальности для широкого класса дзета-функций моноидов натуральных чисел. Было бы интересно выяснить какие элементы доказательства С. М. Воронина непосредственно переносятся на этот класс дзета-функций моноидов натуральных чисел?

Интересно заметить, что как показано в работе [8] среди дзета-функций моноидов натуральных чисел, для которых справедлива слабая теорема универсальности, есть те, для которых область голоморфности совпадает со всей α -полуплоскостью $\sigma > 0$, кроме точки $\alpha = 1$, где у них полюс первого порядка. Таким образом, они продолжаются в лево от полуплоскости абсолютной сходимости, но не на всю плоскость. Если верна гипотеза Линника–Ибрагимова [13], то для них должна быть справедлива и сильная теорема универсальности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин С. М. Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1975. — Т. 39, № 3. — С. 475–486.
2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.
3. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.
4. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтильков О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.
5. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.
6. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.
7. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.
8. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

9. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.
10. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.
11. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.
12. Дубицкас А., Мацайтене Р. Некоторые моменты из жизни Антанаса Лауринчикаса: в поисках Универсальности // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, с. 6–45.
13. Лауринчикас А. П., Матсумото К., Стеудинг Й. "Универсальность L-функций, связанных с новыми формами". Изв. РАН. Сер. матем. — Т. 67, № 1 (2003). — С. 83–98; *Izv. Math.*, 67:1 (2003). — Р. 77–90.
14. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.
15. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

REFERENCES

1. Voronin, S. M. 1975, "Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function", *Math. USSR Izv.*, vol. 9, pp. 443–453.
2. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.
3. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.
4. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.
5. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization", *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.
6. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.
7. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 142–150.
8. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.
9. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.
10. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.

11. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.
12. A. Dubickas, R. Macaitienė, 2019, "Some Moments in the Life of Antanas Laurinčikas: the Search for Universality", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 6–45.
13. Laurinčikas, A., Matsumoto, K., Steuding, J. 2003, "The universality of L -functions associated with newforms", *Izv. RAN, Ser. Mat.*, vol. 67 (1), pp. 83–98 (in Russian) $\equiv$ *Izv. Math.*, vol. 67 (1), pp. 77–90.
14. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuyu teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.
15. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L -Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.

Получено 4.12.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 512.62

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-197-203

О многочленах Ньюмена без корней на единичном круге

А. Дубицкас

Артурас Дубицкас — доктор математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Вильнюсского университета, г. Вильнюс (Литва).

e-mail: arturas.dubickas@mif.vu.lt

Аннотация

В настоящей заметке мы получим необходимое и достаточное условие на тройку неотрицательных целых чисел $a < b < c$ при выполнении которого многочлен Ньюмена $\sum_{j=0}^a x^j + \sum_{j=b}^c x^j$ имеет корень на единичном круге. Используя это условие мы докажем, что для каждого $d \geq 3$ существует такое целое положительное число $n > d$, что многочлен Ньюмена $1 + x + \dots + x^{d-2} + x^n$ длины d не имеет корней на единичном круге.

Ключевые слова: многочлен Ньюмена, корень из единицы.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:

А. Дубицкас. О многочленах Ньюмена без корней на единичном круге // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 197–203.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 512.62

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-197-203

On Newman polynomials without roots on the unit circle

A. Dubickas

Artūras Dubickas — habilitated doctor of mathematics, research professor, Institute of Mathematics, Vilnius University, Vilnius (Lithuania).

e-mail: arturas.dubickas@mif.vu.lt

Abstract

In this note we give a necessary and sufficient condition on the triplet of nonnegative integers $a < b < c$ for which the Newman polynomial $\sum_{j=0}^a x^j + \sum_{j=b}^c x^j$ has a root on the unit circle. From this condition we derive that for each $d \geq 3$ there is a positive integer $n > d$ such that the Newman polynomial $1 + x + \dots + x^{d-2} + x^n$ of length d has no roots on the unit circle.

Keywords: Newman polynomial, root of unity.

Bibliography: 11 titles.

For citation:

A. Dubickas, 2019, "On Newman polynomials without roots on the unit circle", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 197–203.

In honor of Professor Antanas Laurinćikas on the occasion of his 70th birthday

1. Introduction

For a polynomial $f \in \mathbb{C}[x]$, let throughout

$$m(f) := \min_{|z|=1} |f(z)|$$

be the minimal value of f on the unit circle. Motivated by some questions raised by Campbell, Ferguson, Forcade [2], and Smyth [11] Boyd in [1] studied the behavior of $m(f)$ for *Newman polynomials* f . (Recall that $f(x) = \sum_{j=0}^d a_j x^j$ is a Newman polynomial if $a_j \in \{0, 1\}$ for each $j = 0, 1, \dots, d$.) In particular, in [1] it was shown that for each $d \geq 12$ there is a Newman polynomial f of degree d satisfying $m(f) > 1$ and that for each sufficiently large $d \in \mathbb{N}$ there is a Newman polynomial f of degree d satisfying $m(f) > d^{0.137}$. Here, 12 is the smallest possible such degree. For example,

$$m(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^7 + x^8 + x^{10} + x^{12}) = 1.36237 \dots$$

See also [9] for some results on the irreducibility of Newman polynomials.

One can raise similar questions with degree of f replaced by its length (see [1], [4] and [8]). Such questions turn out to be more difficult. More precisely, let $\mathcal{N}_d$ be the set of Newman polynomials of length d , namely,

$$\mathcal{N}_d := \{x^{k_1} + \dots + x^{k_d}, \text{ where } k_1 < \dots < k_d \text{ are nonnegative integers}\}.$$

As in [8], we put

$$\mu(d) := \max_{f \in \mathcal{N}_d} m(f).$$

Evidently, $\mu(1) = 1$ and $\mu(2) = 0$. The values of $\mu(3)$ and $\mu(4)$ have been calculated in [11] and [4], respectively. (They come from polynomials $1 + x^2 + x^3$ and $1 + x^2 + x^3 + x^4$.) It is conjectured that $\mu(d) \rightarrow \infty$ as $d \rightarrow \infty$ (see [1], [8]), but even much weaker inequality $\mu(d) \geq 1$ is still not established for each $d \geq 5$ (see [8]).

In [8] Mercer proved that $\mu(d) > 0$ for each $d \geq 3$. This is equivalent to the fact that for each $d \geq 3$ there is a Newman polynomial of length d which has no roots on the unit circle. In this note we describe which Newman polynomials of the form

$$f(x) = \sum_{j=0}^a x^j + \sum_{j=b}^c x^j = 1 + \dots + x^a + x^b + \dots + x^c,$$

where $0 \leq a < b \leq c$, have roots on the unit circle and which do not have. These polynomials are naturally obtained by taking a degree c polynomial with all coefficients 1 and then replacing in it a string of consecutive coefficients by zeros. Note that Theorem 3 immediately implies the above mentioned result $\mu(d) > 0$ for every $d \geq 3$.

For a positive integer m and a prime number p , let $\nu_p(m)$ be the power of p in the prime factorization of m , and $\nu_p(0) = 0$.

THEOREM 1. *Let a, b, c be integers satisfying $0 \leq a < b \leq c$. Then the Newman polynomial $1 + \dots + x^a + x^b + \dots + x^c$ has a root on the unit circle if and only if $c = a + b$ or at least one of the inequalities*

$$\gcd(a + 1, c - b + 1) > 1, \tag{1}$$

$$\gcd(c+1, c-b+a+2) > 1, \quad (2)$$

$$\nu_2(|c-a-b|) > \nu_2(b) \quad (3)$$

holds.

In particular, selecting $a = d - 2 \geq 1$ and $b = c = n > a$, we see that $c \neq a + b$ and that $\gcd(a+1, c-b+1) = \gcd(d-1, 1) = 1$, so (1) does not hold. Inserting $c+1 = n+1$, $c-b+a+2 = d$, $|c-a-b| = d-2$ and $b = n$ into (2) and (3), we obtain the following special case of Theorem 1:

THEOREM 2. *Let d and n be integers satisfying $n > d - 2 \geq 1$. Then the Newman polynomial $1 + x + \dots + x^{d-2} + x^n \in \mathcal{N}_d$ has a root on the unit circle if and only if at least one of the inequalities*

$$\gcd(n+1, d) > 1, \quad (4)$$

$$\nu_2(d-2) > \nu_2(n) \quad (5)$$

holds.

Let $\varphi(m)$ be the Euler totient function. From Theorem 2 we shall derive the following:

THEOREM 3. *Let $d \geq 3$ be an integer. Write d in the form $d = 2^m(2l+1)$ with integers $m, l \geq 0$. If $k \in \mathbb{N}$ satisfies*

$$k \geq \frac{\log d}{\varphi(2l+1) \log 2} \quad (6)$$

then the Newman polynomial $1 + x + \dots + x^{d-2} + x^n \in \mathcal{N}_d$, with degree $n = 2^{\varphi(2l+1)k}$, has no roots on the unit circle.

The proof of Theorem 1 is based on the following very simple lemma which was proved in [3]. (Subsequently, it was used in a different context in [6], [7], [10].)

LEMMA 1. *Suppose z_1, z_2, z_3, z_4 are complex numbers of modulus 1 satisfying*

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

Then $z_1 + z_j = 0$ for some $j \in \{2, 3, 4\}$.

In the next section we give the proof of Theorem 1. In Section 3 we prove Theorem 3. Finally, in Section 4 we present one more construction of Newman polynomials without roots on the unit circle.

2. Proof of Theorem 1

For $c = a + b$, the polynomial

$$1 + \dots + x^a + x^b + \dots + x^c = (1 + \dots + x^a)(1 + x^b)$$

is a product of cyclotomic polynomials, so all of its roots are roots of unity. In all what follows we will assume that $c \neq a + b$.

If a complex number ζ of modulus 1 is a root of

$$f(x) := 1 + \dots + x^a + x^b + \dots + x^c,$$

then $\zeta \neq 1$ and

$$0 = (1 - \zeta)f(\zeta) = 1 - \zeta^{a+1} + \zeta^b - \zeta^{c+1}.$$

Since the four numbers on the right hand side of this equality, namely, $1, -\zeta^{a+1}, \zeta^b, -\zeta^{c+1}$, are all of modulus 1, by Lemma 1, we must have one of the following three possibilities:

$$1 - \zeta^{a+1} = \zeta^b - \zeta^{c+1} = 0,$$

$$1 - \zeta^{c+1} = -\zeta^{a+1} + \zeta^b = 0,$$

$$1 + \zeta^b = \zeta^{a+1} + \zeta^{c+1} = 0.$$

In particular, these equalities imply that if ζ of modulus 1 is a root of f , then ζ must be a root of unity.

Now, will show that in the first (resp. second and third) case the inequality (1) (resp. (2) and (3)) holds and, conversely, if (1), (2) or (3) holds then $f(\xi) = 0$ for some root of unity ξ . (Evidently, $|\xi| = 1$.)

In the first case, we have $\zeta^{a+1} = \zeta^{c-b+1} = 1$. Set $g := \gcd(a+1, c-b+1)$. Then, there are some $u, v \in \mathbb{Z}$ such that $g = u(a+1) + v(c-b+1)$, and therefore $\zeta^g = 1$. This is impossible if $g = 1$, because $\zeta \neq 1$. Hence $g > 1$ which proves (1). On the other hand, we will show that $\xi := e^{2\pi i/g} \neq 1$ is a root of f . Indeed, then, as g divides $a+1$ and $c-b+1$, we have $\xi^{a+1} = \xi^{c-b+1} = 1$, which yields $\xi^{c+1} = \xi^b$. Consequently,

$$(1 - \xi)f(\xi) = 1 - \xi^{a+1} - \xi^{c+1} + \xi^b = 1 - 1 + 0 = 0,$$

giving $f(\xi) = 0$.

In the second case, we have $\zeta^{c+1} = 1$ and $\zeta^{b-a-1} = 1$. Therefore, $\zeta^{c+1} = \zeta^{c-b+a+2} = 1$. As above, putting $g_1 := \gcd(c+1, c-b+a+2)$ we derive that $\zeta^{g_1} = 1$. Hence $g_1 > 1$ which proves (2). On the other hand, we will show that $\xi := e^{2\pi i/g_1} \neq 1$ is a root of f . Indeed, then $\xi^{c+1} = \xi^{c-b+a+2} = 1$, which yields $\xi^b = \xi^{a+1}$. Consequently,

$$(1 - \xi)f(\xi) = 1 - \xi^{c+1} - \xi^{a+1} + \xi^b = 1 - 1 + 0 = 0,$$

giving $f(\xi) = 0$.

In the third case, we obtain $\zeta^b = -1$ and $\zeta^{c-a} = -1$. Hence $\zeta^{c-a-b} = 1$, and so $\zeta^{|c-a-b|} = 1$. From $\zeta^b = -1$ we find that $\zeta = e^{\pi i(2k+1)/b}$ for some $k \in \mathbb{Z}$. So, using $\zeta^{|c-a-b|} = 1$, we obtain

$$e^{\pi i(2k+1)|c-a-b|/b} = 1.$$

It follows that $(2k+1)|c-a-b|/b$ must be an even integer, which is only possible when $\nu_2(|c-a-b|) > \nu_2(b)$. This implies (3). To prove that the condition (3) is sufficient, we assume that $\nu_2(b) = t \geq 0$ and $\nu_2(|c-a-b|) = s \geq t+1$. Then $b = 2^t(2q+1)$ and $|c-a-b| = 2^s(2\ell+1)$, where $q, \ell \geq 0$ are integers. (Here, we use the fact that $c \neq a+b$.) Putting $\xi := e^{\pi i/2^t}$, we deduce that

$$\xi^b = e^{2^t(2q+1)\pi i/2^t} = e^{(2q+1)\pi i} = -1$$

and

$$\xi^{|c-a-b|} = e^{2^s(2\ell+1)\pi i/2^t} = e^{2^{s-t}(2\ell+1)\pi i} = 1.$$

Thus $1 + \xi^b = 0$ and $\xi^{c-a-b} = 1$, which yields $\xi^{c+1} = -\xi^{a+1}$. It follows that ξ is a root of $(1-x)f(x) = 1 - x^{a+1} + x^b - x^{c+1}$. Since $\xi \neq 1$, it is a root of f . This completes the proof of Theorem 1.

3. Proof of Theorem 3

To derive Theorem 3 from Theorem 2 we first observe that (6) implies

$$n = 2^{\varphi(2l+1)k} = e^{\varphi(2l+1)k \log 2} \geq e^{\log d} = d,$$

so $1 + x + \dots + x^{d-2} + x^n$ is indeed a Newman polynomial of length d . Next, from (6), $n = 2^{\varphi(2l+1)k}$, $d \geq 3$ and the trivial inequality $\nu_2(c) \leq \log_2 c$ for $c \in \mathbb{N}$, it follows that

$$\nu_2(n) = \varphi(2l+1)k \geq \log_2 d > \log_2(d-2) \geq \nu_2(d-2),$$

so (5) does not hold. To show that (4) does not hold as well, we need to prove that the numbers $n+1 = 2^{\varphi(2l+1)k} + 1$ and $d = 2^m(2l+1)$ are coprime. By Euler's theorem, $2^{\varphi(2l+1)k} \equiv 1 \pmod{2l+1}$. Consequently, $n+1 = 2^{\varphi(2l+1)k} + 1$ modulo $2l+1$ is 2. Combining this with the fact that $n+1$ is odd, we derive that

$$\gcd(n+1, d) = \gcd(n+1, 2l+1) = \gcd(2, 2l+1) = 1.$$

This completes the proof of Theorem 3.

4. Another series of Newman polynomials without unimodular roots

Finally, in order to give one more alternative (and very short) proof of the fact that $\mu(d) > 0$ for each $d \geq 3$ we recall the following result of Filaseta, Finch and Nicol (see the proof of Theorem 4.1 in [5]):

LEMMA 2. *There is an infinite sequence of nonnegative integers $S := \{s_1 < s_2 < s_3 < \dots\}$ such that for every finite set $T \subset S$ the polynomial $1 + \sum_{t \in T} x^{4^t}$ is irreducible over the rationals.*

Fix $d \geq 3$ and take any $T \subset S$ with $d-1$ elements, for instance, $T = \{t_1 < \dots < t_{d-1}\} \subset S$. Then

$$f(x) := 1 + \sum_{t \in T} x^{4^t} \in \mathcal{N}_d.$$

We claim that f has no roots on the unit circle. Indeed, if ζ is a root of f satisfying $|\zeta| = 1$ then so is $\bar{\zeta} = 1/\zeta$, and hence the minimal polynomial g of ζ over $\mathbb{Q}$ is reciprocal. Since $g|f$ and, by Lemma 2, f is irreducible, we must have $g = f$. It follows that f is reciprocal, namely, $f(x) = x^D f(1/x)$, with $D = 4^{t_{d-1}}$. However, the identity

$$x^D + \sum_{t \in T} x^{D-4^t} = x^D f(1/x) = f(x) = 1 + \sum_{t \in T} x^{4^t}$$

does not hold in view of

$$D - (D - 4^{t_1}) = 4^{t_1} < 3 \cdot 4^{t_{d-2}} \leq 4^{t_{d-1}} - 4^{t_{d-2}} = D - 4^{t_{d-2}}.$$

Hence f has no roots on the unit circle, as claimed.

Acknowledgement. This research was funded by a grant (No. S-MIP-17-66/LSS-110000-1274) from the Research Council of Lithuania.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boyd D. W. Large Newman polynomials // in: Diophantine analysis (Kensington, 1985), London Math. Soc. Lecture Note Ser. Vol. 109, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986. P. 159–170.
2. Campbell D. M., Ferguson H. R. P., Forcade R. W. Newman polynomials on $|z| = 1$ // Indiana Univ. Math. J. 1983. Vol. 32. P. 517–525.
3. Dubickas A. Nonreciprocal algebraic numbers of small measure // Comment. Math. Univ. Carolin. 2004. Vol. 45. P. 693–697.
4. Goddard B. Finite exponential series and Newman polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 116. P. 313–320.
5. Filaseta M., Finch C., Nicol C. On three questions concerning 0,1-polynomials // J. Théorie des Nombres Bordx. 2006. Vol. 118. P. 357–370.
6. Finch C., Jones L. On the irreducibility of $\{-1, 0, 1\}$ -quadrinomials // Integers. 2006. Vol. 6, A16. 4 P.
7. Mercer I. Newman polynomials, reducibility and roots on the unit circle // Integers. 2012. Vol. 12, A6. 16 P.
8. Mercer I. Newman polynomials not vanishing on the unit circle // Integers. 2012. Vol. 12, A67. 7 P.
9. Konyagin S. V. On the number of irreducible polynomials with 0,1 coefficients // Acta Arith. 1999. Vol. 88. P. 333–350.
10. Luo J. J., Ruan H.-J., Wang, Y.-L. Lipschitz equivalence of Cantor sets and irreducibility of polynomials // Mathematika. 2018. Vol. 64. P. 730–741.
11. Smyth C. J. Some results on Newman polynomials // Indiana Univ. Math. J. 1985. Vol. 34. P. 195–200.

REFERENCES

1. Boyd, D. W. 1986, “Large Newman polynomials“, in: Diophantine analysis (Kensington, 1985), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 109, Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 159–170.
2. Campbell, D. M., Ferguson, H. R. P. & Forcade, R. W. 1983, “Newman polynomials on $|z| = 1$ “, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 32, pp. 517–525.
3. Dubickas, A. 2004, “Nonreciprocal algebraic numbers of small measure“, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, vol. 45, pp. 693–697.
4. Goddard, B. 1992, “Finite exponential series and Newman polynomials“, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 116, pp. 313–320.
5. Filaseta, M., Finch, C. & Nicol, C. 2006, “On three questions concerning 0,1-polynomials“, *J. Théorie des Nombres Bordx.*, vol. 118, pp. 357–370.
6. Finch, C. & Jones, L. 2006, “On the irreducibility of $\{-1, 0, 1\}$ -quadrinomials“, *Integers*, vol. 6, A16, 4 pp.

7. Mercer, I. 2012, “Newman polynomials, reducibility and roots on the unit circle“, *Integers*, vol. 12, A6, 16 pp.
8. Mercer, I. 2012, “Newman polynomials not vanishing on the unit circle“, *Integers* vol. 12, A67, 7 pp.
9. Konyagin, S. V. 1999, “On the number of irreducible polynomials with 0,1 coefficients“, *Acta Arith.*, vol. 88, pp. 333–350.
10. Luo, J. J., Ruan, H.-J. & Wang, Y.-L., 2018, “Lipschitz equivalence of Cantor sets and irreducibility of polynomials“, *Mathematika*, vol. 64, pp. 730–741.
11. Smyth, C. J. 1985, “Some results on Newman polynomials“, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 34, pp. 195–200.

Получено 12.12.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 512.541

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-204-213

Алгебраически компактные абелевы TI -группы

Е. И. Компанцева, Т. К. Ч. Нгуен

Компанцева Екатерина Игоревна — доктор технических наук, доцент, профессор кафедры алгебры, Московский педагогический государственный университет; профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики, Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва.

e-mail: kompantseva@yandex.ru

Нгуен Т. К. Ч. — аспирант, Московский педагогический государственный университет, г. Москва.

e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

Аннотация

Абелева группа G называется TI -группой если любое ассоциативное кольцо с аддитивной группой G является филиальным. Абелева группа называется SI -группой (SI_H -группой), если любое (ассоциативное) кольцо с аддитивной группой G является SI -кольцом (гамильтоновым кольцом). В работе в классе редуцированных алгебраически компактных абелевых групп описаны TI -группы, а также SI -группы и SI_H -группы.

Ключевые слова: абелева группа, кольцо на абелевой группе, алгебраически компактная группа, филиальное кольцо, TI -группа.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:

Е. И. Компанцева, Т. К. Ч. Нгуен Алгебраически компактные абелевы TI -группы // Чебышевский сборник, 2019. Т. 20, вып. 1. С. 204–213.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 512.541

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-204-213

Algebraically compact abelian TI -groups

E. I. Kompantseva, T. Q. T. Nguyen

Kompantseva Ekaterina Igorevna — doctor of engineering, professor, Professor, Department of algebra, Moscow state pedagogical University; Professor of the Department of probability theory and mathematical statistics, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow.

e-mail: kompantseva@yandex.ru

Nguyen T. Q. T. — postgraduate student, Moscow state pedagogical University, Moscow.

e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

Abstract

An abelian group G is called a TI -group if every associative ring with additive group G is filial. An abelian group G such that every (associative) ring with additive group G is an SI -ring (a hamiltonian ring) is called an SI -group (an SI_H -group). In this paper, TI -groups, as well as SI -groups and SI_H -groups are described in the class of reduced algebraically compact abelian groups.

Keywords: abelian group, ring on a group, algebraically compact group, filial ring, TI -group.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

Е. И. Компантсева, Т. Q. T. Nguyen, 2019, "Algebraically compact abelian TI -groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 204–213.

1. Введение

Изучение взаимосвязи между свойствами кольца и строением его аддитивной группы имеет долгую историю в алгебре (см., например, [1–5]), а также вызывает интерес у современных алгебраистов ([6–8] и других), наиболее полные обзоры содержатся в [9] и [10].

Для определения кольцевой структуры на абелевой группе G необходимо указать гомоморфизм $\mu : G \otimes G \rightarrow G$, который называется умножением на группе G . Абелева группа с заданным на ней умножением называется кольцом на этой группе. В [11] получено описание всех умножений на редуцированной алгебраически компактной абелевой группе, которое выявляет тесную связь между кольцевыми структурами и базисными подмодулями p -адических компонент и дает удобный метод построения алгебраически компактных колец. На основании этого описания в настоящей работе исследуются свойства колец на редуцированных алгебраически компактных абелевых группах. Изучение колец на алгебраически компактных группах обусловлено и следующим фактом. В [9] показано, что умножение на произвольной абелевой группе продолжается однозначно до умножения на ее сервантно-инъективной и копериодических оболочках, поэтому изучение колец на алгебраически компактных и копериодических группах может дать полезную информацию об умножениях на произвольной абелевой группе. Таким способом, например, в [12] описаны абсолютные ниль-идеалы смешанных абелевых групп.

В [13] изучаются аддитивные группы SI -колец, SI -кольцо – это кольцо, в котором любое подкольцо является идеалом. Ассоциативное SI -кольцо называется гамильтоновым кольцом или H -кольцом, поскольку эти структуры в определенном смысле аналогичны гамильтоновым группам. Гамильтоновы кольца систематически изучались многими авторами, наиболее значительные результаты содержатся в [14–16]. Абелева группа, на которой любое (ассоциативное) кольцо является SI -кольцом (H -кольцом), называется SI -группой (SI_H -группой). Естественным обобщением H -колец являются филиальные кольца, то есть ассоциативные кольца, в которых отношение «быть идеалом» транзитивно. Филиальные кольца изучались в [17–20]. В связи с этим в [21] введено понятие TI -группы (от «transitive ideal»). Абелева группа называется TI -группой, если любое ассоциативное кольцо на ней филиально. В [22] С. Фейгельсток изучал абелевы группы, на которых любое умножение коммутативно, такие группы называются CR -группами. В [8] введено понятие $SACR$ -группы, $SACR$ -группа – это абелева группа, на которой любое кольцо является ассоциативным и коммутативным. В [22] описаны периодические CR -группы, а в [8] показано, что в классе всех периодических абелевых групп понятия CR -группы и $SACR$ -группы эквивалентны. В [13] получено описание периодических SI_H -групп и SI -групп, а в [21] – описание периодических TI -групп.

В настоящей работе описаны TI -группы, а также SI -группы, SI_H -группы и $SACR$ -группы в классе редуцированных алгебраически компактных абелевых групп.

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа». Умножение $\mu : G \otimes G \rightarrow G$ на группе G часто обозначается знаком $\times$ (и т. п.), т.е. $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для любых $g_1, g_2 \in G$. Умножение $\times$ задает кольцо на группе G , которое обозначается $(G, \times)$. Если в кольце $(G, \times)$ выполняется $g_1 \times g_2 = 0$ для всех $g_1, g_2 \in G$, то умножение называется нулевым, а кольцо $(G, \times)$ обозначается G^0 . Как обычно, $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{P}$ – множества натуральных, целых неотрицательных, всех простых чисел соответственно, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\widehat{\mathbb{Z}}_p, \mathbb{Q}_p^*$ – аддитивная группа и кольцо целых p -адических чисел соответственно, $\mathbb{Z}(n)$ – циклическая группа порядка n , а $\mathbb{Z}_n$ – кольцо $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Циклический модуль над ассоциативным кольцом R , порожденный элементом e , будем записывать в виде Re . Пусть G – группа, $g \in G$ и $(G, \times)$ – кольцо на G , через $T(G)$ обозначим периодическую часть группы G , $o(g)$, $\langle g \rangle$, $(g)_\times$ – порядок элемента g , циклическая группа, порожденная g , и идеал кольца $(G, \times)$, порожденный g , соответственно. Элемент прямого произведения $G = \prod_i G_i$ групп G_i ($i \in I$) будем записывать в виде $(g_i)_{i \in I}$, где $g_i \in G_i$ для всех $i \in I$. Если J – идеал кольца R , то пишем $J < R$. Чтобы подчеркнуть, что разложение $G = A \oplus B$ группы G в прямую сумму подгрупп A и B является также разложением некоторого фиксированного кольца на G в прямую сумму идеалов, будем писать $G = A \dot{+} B$. За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [9].

Известно [9], что редуцированная алгебраически компактная группа G представима в виде $G = \prod_p G_p$, где G_p – p -адическая алгебраически компактная группа, которая называется p -адической компонентой группы G . При этом разложение $G = \prod_p G_p$ является разложением любого кольца на G в прямое произведение идеалов [11]. Для описания p -адических алгебраически компактных групп приведем определения из [23]. Пусть I – множество индексов. Набор целых p -адических чисел $\{a_i \mid i \in I\}$ называется почти конечным, если, во первых, не более чем счетное число a_i ($i \in I$) отлично от нуля; во вторых, для любого натурального числа n почти все a_i ($i \in I$) делятся в $\mathbb{Q}_p^*$ на p^n . Пусть $\prod_{i \in I} \mathbb{Q}_p^* e_i$ – прямое произведение циклических p -адических модулей с образующими элементами e_i . Подгруппу группы $\prod_{i \in I} \mathbb{Q}_p^* e_i$, состоящую из таких элементов $(a_i e_i)_{i \in I}$, что $\{a_i \mid i \in I\}$ – почти конечный набор целых p -адических чисел, называются регулярной прямой суммой циклических p -адических модулей и обозначаются $\widetilde{\sum_{i \in I} \mathbb{Q}_p^* e_i}$. Каждая p -адическая алгебраически компактная группа G изоморфна p -адическому пополнению своего базисного подмодуля $B = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}_p^* e_i$, где I – некоторое множество индексов [9], следовательно, G является регулярной прямой суммой циклических модулей: $G = \widetilde{\sum_{i \in I} \mathbb{Q}_p^* e_i}$. Кроме того, такую группу можно представить в виде $G = A \oplus C$, где $A = \widetilde{\sum_{i \in I_1} \mathbb{Q}_p^* e_i}$ – алгебраически компактная группа без кручения, $C = \widetilde{\sum_{i \in I_2} \mathbb{Q}_p^* e_i}$ – урегулированная алгебраически компактная группа, здесь $o(e_i) = \infty$ при $i \in I_1$ и $o(e_i) = p^{k_i}$ ($k_i \in \mathbb{N}$) при $i \in I_2$.

2. Алгебраически компактные TI -группы

ЛЕММА 1. 1) Любое кольцо с ненулевым умножением на группе $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ изоморфно кольцу $p^k \mathbb{Q}_p^*$ при некотором $k \in \mathbb{N}_0$.

2) Идеалами кольца $p^k \mathbb{Q}_p^*$ ($k \in \mathbb{N}_0$) являются подгруппы $p^{k+k_1} \mathbb{Q}_p^*$ ($k_1 \in \mathbb{N}_0$) и только они.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Запишем группу $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ в виде $\widehat{\mathbb{Z}}_p = \mathbb{Q}_p^* e$, где $e \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$. Пусть $e \times e = p^k a e$, где $a \in \mathbb{Q}_p^* \setminus p \mathbb{Q}_p^*$. Тогда $x e \times y e = (x y) p^k a e$ для любых $x, y \in \mathbb{Q}_p^*$ [11]. Легко проверить, что

отображение

$$\varphi : \mathbb{Q}_p^* e \rightarrow p^k \mathbb{Q}_p^*,$$

при котором $\varphi(xe) = p^k ax$ для любого $x \in \mathbb{Q}_p^*$, является изоморфизмом колец $(\mathbb{Q}_p^* e, \times)$ и $p^k \mathbb{Q}_p^*$ ($k \in \mathbb{N}_0$).

2) Пусть $I \triangleleft p^k \mathbb{Q}_p^*$ и пусть k_1 – наименьшее целое неотрицательное число такое, что $p^{k+k_1} \mathbb{Q}_p^* \cap I \neq 0$. Тогда существует $x \in \mathbb{Q}_p^*$ такой, что $g = p^{k+k_1} x \in I$ и $p \nmid x$. Элемент x можно представить в виде $x = a + p^k y$, где $a \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Q}_p^*$ и $p \nmid a$. Существуют $u, v \in \mathbb{Z}$, для которых $ua + vp^k = 1$. Имеем

$$ug = p^{k+k_1}(ux) = p^{k+k_1}(ua + up^k y) = p^{k+k_1}(1 - vp^k + up^k y) = p^{k+k_1} + p^{2k+k_1} z \in I,$$

где $z = uy - v \in \mathbb{Q}_p^*$. Поскольку $g_1 = p^{2k+k_1} z = g(p^k x^{-1} z) \in I$, то $p^{k+k_1} = ug - g_1 \in I$. Отсюда $p^{k+k_1} \mathbb{Q}_p^* \subseteq I$. Так как обратное включение выполняется в силу выбора числа k_1 , то $I = p^{k+k_1} \mathbb{Q}_p^*$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Группа $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ целых p -адических чисел является TI -группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кольцо с нулевым умножением на группе $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ является филиальным. Если умножение $\times$ на $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ ненулевое, то $(\widehat{\mathbb{Z}}_p, \times)$ изоморфно кольцу $p^k \mathbb{Q}_p^*$ ($k \in \mathbb{N}_0$) по лемме 1. Пусть $J \triangleleft I \triangleleft p^k \mathbb{Q}_p^*$, тогда $I = p^{k+k_1} \mathbb{Q}_p^*$, $J = p^{k+k_1+k_2} \mathbb{Q}_p^*$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ в силу леммы 1. Значит, $J \triangleleft p^k \mathbb{Q}_p^*$. Следовательно, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ является TI -группой. $\square$

ЛЕММА 2. *Пусть $p \in \mathbb{P}$, A – такая группа, что $A \neq T(A)$ или $A_p \neq 0$. Тогда кольцо $\mathbb{Q}_p^* \dot{+} A^0$ не является филиальным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a – такой элемент из группы A , что $o(a) = \infty$ или $o(a) = p$. Положим $g = p + a \in \mathbb{Q}_p^* \dot{+} A$, $I = p\mathbb{Q}_p^* + \langle a \rangle \triangleleft \mathbb{Q}_p^* \dot{+} A$, $J = p^2\mathbb{Q}_p^* + \langle g \rangle$. Так как $g \cdot a = 0$ (здесь $\cdot$ – умножение в кольце $\mathbb{Q}_p^* \dot{+} A$), то нетрудно видеть, что $J \triangleleft I \triangleleft \mathbb{Q}_p^* \dot{+} A^0$. Допустим, $1 \cdot g \in J$, где $1 \in \mathbb{Q}_p^*$, тогда $1 \cdot g = p = (p^2x + kp) + ka$ при некоторых $x \in \mathbb{Q}_p^*$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $o(a) = \infty$, то $k = 0$, откуда $p = p^2x$. Если $o(a) = p$, то $k = pk_1$, где $k_1 \in \mathbb{Z}$, откуда $p = p^2(x + k_1)$, где $x + k_1 \in \mathbb{Q}_p^*$. В каждом из случаев получили противоречие, следовательно, $J \not\triangleleft \mathbb{Q}_p^* \dot{+} A^0$. Значит, кольцо $\mathbb{Q}_p^* \dot{+} A^0$ не является филиальным. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $p \in \mathbb{P}$, A – такая группа, что $A \neq T(A)$ или $A_p \neq 0$. Тогда группа $\widehat{\mathbb{Z}}_p \oplus A$ не является TI -группой.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Из предложений 1, 2, 7 в [21] следует, что если A – такая группа, что $A \neq T(A)$ или $A_p \neq 0$, то группы $\mathbb{Z}(p^n) \oplus A$ ($n \geq 2$) и $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus A$ не являются TI -группами. Там же показано, что прямые слагаемые TI -группы являются TI -группами.*

ТЕОРЕМА 1. *p -адическая алгебраически компактная группа G , не являющаяся периодической, является TI -группой тогда и только тогда, когда $G = \widehat{\mathbb{Z}}_p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – p -адическая алгебраически компактная группа. Тогда G можно представить в виде $G = A \oplus C$, где $A = \widetilde{\sum_{i \in I_1} \mathbb{Q}_p^* e_i}$ (здесь $o(e_i) = \infty$) – алгебраически компактная группа без кручения, $C = \widetilde{\sum_{i \in I_2} \mathbb{Q}_p^* e_i}$ (здесь $o(e_i) = p^{k_i}$) – урегулированная алгебраически компактная группа [9]. Пусть G является TI -группой, тогда A и C – также TI -группы.

Если $A \neq 0$, то $A = \mathbb{Q}_p^* e_1 \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$ при некотором $p \in \mathbb{P}$ в силу следствия 2. По тому же следствию в этом случае $C = 0$.

Допустим, $A = 0$. Тогда $G = C \neq T(C)$, поэтому группу C можно представить в виде $C = \mathbb{Z}(p^k) \oplus C_1$, где $C_1 \neq T(C_1)$, что противоречит предложению 2 в [21] (см. замечание 1).

Таким образом, $G = \widehat{\mathbb{Z}}_p$. Следствие 1 завершает доказательство. $\square$

Далее символом (a, b) , как обычно, обозначаем наибольший общий делитель целых чисел a и b .

ЛЕММА 3. *Группа $\widehat{\mathbb{Z}}_p \oplus \mathbb{Z}(n)$, где n – натуральное число, свободное от квадратов и $(p, n) = 1$, является TI -группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группу $G = \widehat{\mathbb{Z}}_p \oplus \mathbb{Z}(n)$ можно записать в виде

$$G = \mathbb{Q}_p^* e_1 \oplus \mathbb{Z} e_2, \quad (1)$$

где $e_1 \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$, $e_2 \in \mathbb{Z}(n)$, $o(e_2) = n$. Пусть $(G, \times)$ – кольцо на группе G , тогда разложение (1) является разложением кольца $(G, \times)$ в прямую сумму идеалов. При этом, согласно [11], $(x_1 e_1 + y_1 e_2) \times (x_2 e_1 + y_2 e_2) = (x_1 x_2)(e_1 \times e_1) + (y_1 y_2)(e_2 \times e_2)$ для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}_p^*$, $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что кольцо $(G, \times)$ является ассоциативным и коммутативным. Пусть $e_2 \times e_2 = t_0 e_2$, где $t_0 \in \mathbb{N}_0$. По теореме 1 в [19] кольцо $(G, \times)$ является филиальным тогда и только тогда, когда

$$(g)_\times = (g)_\times^2 + \langle g \rangle, \quad (2)$$

для любого $g \in G$.

Пусть

$$g = p^k a e_1 + t e_2 \in G, \quad (3)$$

где $k \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{Q}_p^* \setminus p\mathbb{Q}_p^*$, $t \in \mathbb{Z}$.

Случай 1. Умножение $\times$ индуцирует на $\mathbb{Q}_p^* e_1$ ненулевое умножение.

В этом случае элемент e_1 может быть выбран таким образом, что $e_1 \times e_1 = p^{k_0} e_1$ для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}_0$. Тогда

$$(g)_\times = g \times G + \langle g \rangle = p^{k+k_0} \mathbb{Q}_p^* e_1 + \langle t t_0 e_2 \rangle + \langle g \rangle. \quad (4)$$

Так как $(p, n) = 1$, то $u_1 p^{k_0} + v_1 a n = 1$ при некоторых $u_1, v_1 \in \mathbb{Z}$. Имеем:

$$(v_1 n)g = (p^k v_1 a n) e_1 + 0 = p^k (1 - u_1 p^{k_0}) e_1 = p^k e_1 - (p^{k+k_0} u_1) e_1 \in (g)_\times. \quad (5)$$

Так как $(p^{k+k_0} u_1) e_1 \in (g)_\times$ в силу (4), то из (5) получаем, что $p^k e_1 \in (g)_\times$, откуда $(p^k \mathbb{Z}) e_1 \subseteq (g)_\times$. Следовательно, $(p^k \mathbb{Q}_p^*) e_1 = (p^k \mathbb{Z}) e_1 + (p^{k+k_0} \mathbb{Q}_p^*) e_1 \subseteq (g)_\times$. Отсюда из (3) имеем $\langle t e_2 \rangle \subseteq (g)_\times$. Значит,

$$(g)_\times = (p^k \mathbb{Q}_p^*) e_1 + \langle t e_2 \rangle. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь

$$I = (g)_\times^2 + \langle g \rangle = (p^{2k+2k_0} \mathbb{Q}_p^*) e_1 + \langle t^2 t_0 e_2 \rangle + \langle g \rangle. \quad (7)$$

Имеем $u_2 p^{k+k_0} + v_2 n a = 1$ при некоторых $u_2, v_2 \in \mathbb{Z}$, откуда

$$(v_2 n)g = (p^k v_2 n a) e_1 = p^k (1 - u_2 p^{k+k_0}) e_1 = p^k e_1 - (u_2 p^{2k+k_0}) e_1 \in (g)_\times. \quad (8)$$

Так как $(u_2 p^{2k+k_0}) e_1 \in I$ в силу (7), то из (8) имеем $p^k e_1 \in I$, откуда $(p^k \mathbb{Z}) e_1 \subseteq I$. Следовательно, $(p^k \mathbb{Q}_p^*) e_1 = (p^k \mathbb{Z}) e_1 + (p^{2k+k_0} \mathbb{Q}_p^*) e_1 \subseteq I$. Отсюда получаем $\langle t e_2 \rangle \subseteq I$ в силу (3). Значит, в силу (7) имеем $I = (g)_\times^2 + \langle g \rangle = (p^k \mathbb{Q}_p^*) e_1 + \langle t e_2 \rangle = (g)_\times$. Следовательно, кольцо $(G, \times)$ филиально в силу (2).

Случай 2. Умножение $\times$ индуцирует на $\mathbb{Q}_p^* e_1$ нулевое умножение.

В этом случае $(G, \times) = \widehat{\mathbb{Z}}_p^0 + \mathbb{Z}e_2$, $(g)_\times = \langle tt_0e_2 \rangle + \langle g \rangle$. Нетрудно видеть, что $(g)_\times^2 + \langle g \rangle = \langle t^2t_0e_2 \rangle + \langle g \rangle$. Заметим, что $o(tt_0e_2) = \frac{n}{(tt_0, n)}$, поэтому $(t, o(tt_0e_2)) = 1$, так как n свободно от квадратов. Следовательно, $\langle t^2te_2 \rangle = \langle tt_0e_2 \rangle$. Значит, $(g)_\times^2 + \langle g \rangle = \langle tt_0e_2 \rangle + \langle g \rangle = (g)_\times$. Следовательно, кольцо $(G, \times)$ филиально. $\square$

ЛЕММА 4. Если $\mathbb{P}_0 \subseteq \mathbb{P}$, то группа $\prod_{p \in \mathbb{P}_0} \mathbb{Z}(p)$ является TI -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем группу $G = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} \mathbb{Z}(p)$ в виде $G = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} \mathbb{Z}e_p$, где $o(e_p) = p$. Пусть $(G, \times)$ – кольцо на группе G . Тогда разложение $G = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} \mathbb{Z}e_p$ является разложением кольца $(G, \times)$ в прямое произведение идеалов. При этом кольцо $(G, \times)$ ассоциативно и коммутативно, так как таким является каждый из идеалов $\mathbb{Z}e_p$ ($p \in \mathbb{P}_0$).

Пусть $g \in G$, $g \neq 0$. Обозначим: π_p – проекция G на $\mathbb{Z}e_p$, $\mathbb{P}_1 = \{p \in \mathbb{P}_0 \mid \pi_p(g) \neq 0, e_p \times e_p \neq 0\}$. Без потери общности можно считать, что $\mathbb{P}_1 \neq \emptyset$. Элементы e_p ($p \in \mathbb{P}_1$) могут быть выбраны таким образом, что $e_p \times e_p = e_p$.

Нетрудно видеть, что $(g)_\times = \prod_{p \in \mathbb{P}_1} \mathbb{Z}e_p + \langle g \rangle$, откуда $(g)_\times = (g)_\times^2 + \langle g \rangle$. По теореме 1 в [19] кольцо $(G, \times)$ филиально. Следовательно, G является TI -группой. $\square$

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – редуцированная алгебраически компактная группа, не являющаяся периодической. Группа G является TI -группой тогда и только тогда, когда G удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) $G = \widehat{\mathbb{Z}}_p$, где $p \in \mathbb{P}$,
- 2) $G = \widehat{\mathbb{Z}}_p \oplus \mathbb{Z}(n)$, где $p \in \mathbb{P}$, $(p, n) = 1$, n – натуральное число, свободное от квадратов,
- 3) $G = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} \mathbb{Z}(p)$, где $\mathbb{P}_0$ – бесконечное подмножество множества $\mathbb{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – редуцированная алгебраически компактная группа и $G \neq T(G)$. Тогда $G = \prod_{p \in \mathbb{P}} G_p$, где G_p – p -адическая алгебраически компактная группа. Допустим, G является TI -группой, тогда G_p также являются TI -группами при всех $p \in \mathbb{P}$ (замечание 1).

Пусть $\mathbb{P}_0 = \{p \in \mathbb{P} \mid G_p \neq 0\}$. Допустим, для некоторого $p \in \mathbb{P}_0$ группа G_p не является периодической, тогда $G_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ по теореме 1 и $G = \widehat{\mathbb{Z}}_p \oplus \prod_{q \in \mathbb{P}_1} G_q$, где $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_0 \setminus \{p\}$. Если $\mathbb{P}_1 = \emptyset$,

то $G = \widehat{\mathbb{Z}}_p$. Если же $\mathbb{P}_1 \neq \emptyset$, то в силу следствия 2 множество $\mathbb{P}_1$ конечно и G_q – периодическая группа для всех $q \in \mathbb{P}_1$. При этом каждая из групп G_q ($q \in \mathbb{P}_1$) не имеет прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}(q^k)$, где $k \geq 2$, и $\mathbb{Z}(q) \oplus \mathbb{Z}(q)$ (см. замечание 1). Следовательно, $G_q = \mathbb{Z}(q)$ при любом $q \in \mathbb{P}_1$, и, значит, $\prod_{q \in \mathbb{P}_1} G_q = \bigoplus_{q \in \mathbb{P}_1} \mathbb{Z}(q) = \mathbb{Z}(n)$, где $n = \prod_{q \in \mathbb{P}_1} q$. Таким образом, $G = \widehat{\mathbb{Z}}_p \oplus \mathbb{Z}(n)$, где $(n, p) = 1$ и число n свободно от квадратов.

Пусть теперь для любого $p \in \mathbb{P}_0$ группа G_p является периодической. В этом случае, так как $G \neq T(G)$, множество $\mathbb{P}_0$ бесконечно. Отсюда для любого $p \in \mathbb{P}_0$ группа G может быть записано в виде $G = G_p \oplus B_p$, где $B_p = \prod_{q \in \mathbb{P}_0 \setminus \{p\}} G_q$ – группа без кручения. Значит, ни одна

из групп G_p ($p \in \mathbb{P}_0$) не содержит подгрупп вида $\mathbb{Z}(p^k)$, где $k \geq 2$, и $\mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(p)$ (замечание 1). Следовательно, $G_p = \mathbb{Z}(p)$ при всех $p \in \mathbb{P}_0$. Значит, $G = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} \mathbb{Z}(p)$, где $\mathbb{P}_0$ – бесконечное множество простых чисел.

Из следствия 1 и лемм 3, 4 получаем обратное утверждение. $\square$

3. Алгебраически компактные SI -группы и $SACR$ -группы

Пусть G – редуцированная алгебраически компактная группа, тогда, G может быть представлена в виде $G = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} G_p$, где $\mathbb{P}_0 \subseteq \mathbb{P}$ и $G_p = \widehat{\sum_{i \in I_p} \mathbb{Q}_p^* e_i^{(p)}}$ – регулярная прямая сумма при любом $p \in \mathbb{P}_0$. Согласно [11], для любых элементов $\tau_{ij}^{(p)} \in G_p$ таких, что $o(\tau_{ij}^{(p)}) \leq \min\{o(e_i), o(e_j)\}$, существует умножение $\times$ на G , для которого $e_i^{(p)} \times e_j^{(p)} = \tau_{ij}^{(p)}$ и $e_i^{(p)} \times e_j^{(q)} = 0$ при $p \neq q$. Следовательно, если хотя бы для одного p множество I_p содержит более одного элемента, то на группе G существует некоммутативное умножение. Отсюда получаем описание алгебраически компактных $SACR$ -групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Редуцированная алгебраически компактная группа G является $SACR$ -группой тогда и только тогда, когда $G = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} G_p$, где $\mathbb{P}_0 \subseteq \mathbb{P}$, $G_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ или $G_p = \mathbb{Z}(p^k)$ ($k \in \mathbb{N}$) при любом $p \in \mathbb{P}_0$.* $\square$

В следующей теореме описаны SI -группы и SI_H -группы в классе редуцированных алгебраически компактных групп.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G – редуцированная алгебраически компактная группа. Тогда следующие условия равносильны:*

- 1) G является SI -группой,
- 2) G является SI_H -группой,
- 3) $G \cong \mathbb{Z}(n)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как то, что из 1) следует 2), а из 3) следует 1), очевидно, докажем, что из 2) следует 3). Пусть G – SI_H -группа и $G = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} G_p$, где $\mathbb{P}_0 \subseteq \mathbb{P}$, G_p – p -адическая компонента группы G . Пусть $p \in \mathbb{P}_0$, тогда группа G_p является SI_H -группой в силу леммы 3 в [13].

Отметим, что $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ не является SI_H -группой, поскольку в кольце $\mathbb{Q}_p^*$ подкольцо $\mathbb{Z}$ не является идеалом. Значит, G_p не содержит подгруппы $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ и имеет вид $G_p = \widehat{\sum_{i \in I_p} \mathbb{Z}(p^{n_{i,p}})}$, где $n_{i,p} \in \mathbb{N}$ при всех $i \in I_p$. По следствию 9 в [13] группа $T(G_p)$ является SI_H -группой, и, следовательно, $T(G_p) \cong \mathbb{Z}(p^{n_p})$ при некотором $n_p \in \mathbb{N}$ (по теореме 7 в [13]). Отсюда и $G_p \cong \mathbb{Z}(p^{n_p})$, так как G_p – это p -адическое пополнение $T(G_p)$.

Допустим, $\mathbb{P}_0$ – бесконечное множество. Запишем группу G в виде $G = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} \mathbb{Z}e_p$, где $o(e_p) = p^{n_p}$, и определим ассоциативное умножение $\times$ на G , положив $e_p \times e_p = e_p$ и $e_p \times e_q = 0$ при $p \neq q$. Рассмотрим элемент $g = (e_p)_{p \in \mathbb{P}_0} \in G$, тогда подгруппа $\langle g \rangle$ является подкольцом кольца $(G, \times)$, но не является его идеалом. Следовательно, G не является SI_H -группой. Отсюда получаем, что множество $\mathbb{P}_0$ конечно и, значит, $G = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} \mathbb{Z}(p^{n_p}) \cong \mathbb{Z}(n)$, где $n = \prod_{p \in \mathbb{P}_0} p^{n_p}$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. *В классе непериодических редуцированных алгебраически компактных групп не существует SI -групп и SI_H -групп.* $\square$

4. Заключение

В [9] показано, что любое умножение на периодической группе G полностью определяется его сужением на базисную подгруппу группы G . Как уже отмечалось, описание всех умножений на редуцированных алгебраически компактных группах [11] также выявило тесную связь

между кольцевыми структурами на этих группах и базисными подмодулями их p -адических компонент. Этот факт позволяет успешно изучать и строить кольца на алгебраически компактных группах.

В свою очередь, возможность продолжения умножения на группе до умножения на ее сервантно-инъективной оболочке дает метод изучения колец на произвольных редуцированных группах. Действительно, вкладывая кольцо на редуцированной группе G в качестве подкольца в кольцо на алгебраически компактной группе, свойства которого известны, мы можем получать информацию о кольцах на G . Так, например, нетрудно видеть, что группа, сервантно-инъективная оболочка которой является SI -группой (SI_H -группой), сама является SI -группой (SI_H -группой); заметим, что обратное не верно, примером чему служит аддитивная группа $\mathbb{Z}$. Кроме того, группа является $SACR$ -группой тогда и только тогда, когда $SACR$ -группой является ее сервантно-инъективная оболочка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beaumont R.A. Rings with additive groups which is the direct sum of cyclic groups // Duke Math. J. 1948. Vol. 15, № 2. P. 367–369.
2. Fuchs L. Ringe und ihre additive Gruppe // Publ. Math. Debrecen 1956. Vol. 4. P. 488–508.
3. Szele T. Zur Theorie der Zeroringe // Math. Ann. 1949. Vol. 121. P. 242–246.
4. Redei L., Szele T. Die Ringe “ersten Ranges” // Acta Sci. Math. (Szeged) 1950. Vol. 12a. P. 18–29.
5. Beaumont R. A., Pierce R.S. Torsion-free rings // Illinois J. Math. 1961. Vol. 5. P. 61–98.
6. Чехлов А. Р., Об абелевых группах, все подгруппы которых являются идеалами // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2009. № 3(7). С. 64–67.
7. Aghdam A. M., Karimi F., Najafizadeh A. On the subgroups of torsion-free groups which are subrings in every ring // Ital. J. Pure Appl. Math. 2013. Vol. 31. P. 63–76.
8. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On additive groups of associative and commutative rings // J. Quaest. Math. 2017. Vol. 40, № 4. P. 527–537.
9. Fuchs L. Abelian groups. Switz.: Springer International Publishing, 2015.
10. Feigelstock S. Additive Groups of Rings. Vol. I, II. Boston-London: Pitman Advanced Publishing Program, 1983, 1988.
11. Kompantseva E. I. Torsion-free rings // J. Math. Sci. 2010. Vol. 171. № 2. P. 213–247.
12. Kompantseva E. I. Absolute nil-ideals of Abelian groups // J. Math. Sci. 2014. Vol. 197. № 5. P. 625–634.
13. Feigelstock S. Additive groups of rings whose subrings are ideals // Bull. Austral. Math. Soc. 1997. Vol. 55. P. 477–481.
14. Redei L. Vollidealringe im weiteren Sinn. I // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1952. Vol. 3. P. 243–268.
15. Андриянов В. И. Периодические гамильтоновы кольца // Матем. сб. 1967. Vol. 74(116). № 2. С. 241–261

16. Kruse R. L. Rings in which all subrings are ideals // *Canad. J. Math.* 1968. Vol. 20. P. 862–871.
17. Ehrlich G. Filial rings // *Portugal. Math.* 1983-1984. vol. 42. P. 185–194.
18. Sands A. D. On ideals in over-rings // *Publ. Math. Debrecen.* 1988. V. 35. P. 273–279.
19. Andruszkiewicz R., Puczyłowski E. On filial rings // *Portugal. Math.* 1988. Vol. 45, № 2. P. 139–149.
20. Filipowicz M., Puczyłowski E. R. Left filial rings // *Algebra Colloq.* 2004. Vol. 11. P. 335–344.
21. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On TI -groups // *Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie.* 2014. P. 33–41.
22. Feigelstock S. Additive groups of commutative rings // *Quaest. Math.* 2000. Vol. 23. P. 241–245.
23. Куликов Л. Я. Обобщенный примарные группы. I, II // *Труды московского матем. общества* 1952. С. 247–326., 1953. С. 85–167.

REFERENCES

1. Beaumont, R. A. 1948, “Rings with additive groups which is the direct sum of cyclic groups”, *Duke Math. J.*, vol. 15, no. 2, pp. 367–369.
2. Fuchs, L. 1948, “Ringe und ihre additive Gruppe”, *Publ. Math. Debrecen*, vol. 4, pp. 488–508.
3. Szele, T. 1949, “Zur Theorie der Zeroringe”, *Math. Ann.*, vol. 121, pp. 242–246.
4. Redei, L. & Szele, T. 1950, “Die Ringe “erstaen Ranges”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, vol. 12a, pp. 18–29.
5. Beaumont, R. A. & Pierce, R. S. 1961, “Torsion-free rings”, *Illinois J. Math.*, vol. 5, pp. 61–98.
6. Chekhlov, A. R. 2009, “On abelian groups, in which all subgroups are ideals”, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, no. 3(7), pp. 64–67.
7. Aghdam, A. M. & Karimi, F. & Najafizadeh, A. 2013, “On the subgroups of torsion-free groups which are subrings in every ring”, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, vol. 31, pp. 63–76.
8. Andruszkiewicz, R. & Woronowicz, M. 2017, “On additive groups of associative and commutative rings”, *J. Quaest. Math.*, vol. 40, no. 4, pp. 527–537.
9. Fuchs, L. 2015, “Abelian groups”, Switz.: Springer International Publishing.
10. Feigelstock, S. 1983, 1988, “Additive groups of rings”, vol. 1, vol. 2, Boston-London: Pitman Advanced Publishing Program.
11. Kompantseva, E. I. 2010, “Torsion-free rings”, *J. Math. Sci.*, vol. 171, no. 2, pp. 213–247.
12. Kompantseva, E. I. 2014, “Absolute nil-ideals of Abelian groups”, *J. Math. Sci.*, vol. 197, no. 5, pp. 625–634.
13. Feigelstock, S. 1997, “Additive groups of rings whose subrings are ideals”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 55, pp. 477–481.
14. Redei, L. 1952, “Vollidealringe im weiteren Sinn. I”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 3, pp. 243–268.

15. Andriyanov, V.I. 1967, "Periodic Hamiltonian rings", *Math. USSR-Sb.*, vol. 3, no. 2, pp. 225–242.
16. Kruse, R.L. 1968, "Rings in which all subrings are ideals", *Canad. J. Math.*, vol. 20, pp. 862–871.
17. Ehrlich, G. 1983-1984. "Filial rings", *Portugal. Math.*, vol. 42, pp. 185–194.
18. Sands, A.D. 1988, "On ideals in over-rings", *Publ. Math. Debrecen.*, vol. 35, pp. 273–279.
19. Andruszkiewicz, R. & Puczyłowski, E. 1988, "On filial rings", *Portugal. Math.*, vol. 45, no. 2, pp. 139–149.
20. Filipowicz, M. & Puczyłowski, E.R. 2004, "Left filial rings", *Algebra Colloq.*, vol. 11, pp. 335–344.
21. Andruszkiewicz, R. & Woronowicz, M. 2014, "On TI -groups", *Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie.*, pp. 33–41.
22. Feigelstock, S. 2000, "Additive groups of commutative rings", *Quaest. Math.*, vol. 23, pp. 241–245.
23. Kulikov L.Ya. 1952, 1953, "Generalized primary groups. I, II", *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, pp. 247–326, pp. 85–167.

Получено 14.01.2019 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 512.541

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-214-223

Умножения на смешанных абелевых группах

Е. И. Компанцева

Компанцева Екатерина Игоревна — доктор технических наук, доцент, профессор кафедры алгебры, Московский педагогический государственный университет; профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики, Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва.

e-mail: kompantseva@yandex.ru

Аннотация

Умножение на абелевой группе G — это гомоморфизм $\mu : G \otimes G \rightarrow G$. Абелева группа G называется MT -группой, если любое умножение на ее периодической части однозначно продолжается до умножения на G . MT -группы изучались во многих работах по теории аддитивных групп колец, но вопрос об их строении остается открытым. В настоящей работе для MT -группы G рассматривается сервантная вполне характеристическая подгруппа G_Λ^* , одно из основных свойств которой заключается в том, что подгруппа $\bigcap_{p \in \Lambda(G)} pG_\Lambda^*$ является ниль-идеалом в любом кольце с аддитивной группой G (здесь $\Lambda(G)$ — множество всех простых чисел p , для которых p -примарная компонента группы G отлична от нуля). Показано, что для любой MT -группы G либо $G = G_\Lambda^*$, либо факторгруппа G/G_Λ^* несчетна.

Ключевые слова: Абелева группа, умножение на группе, кольцо на абелевой группе.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Е. И. Компанцева Умножения на смешанных абелевых группах // Чебышевский сборник, 2019. Т. 20, вып. 1. С. 214–223.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 512.541

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-214-223

Multiplications on mixed abelian groups

Е. И. Kompantseva

Kompantseva Ekaterina Igorevna — doctor of engineering, professor, Professor, Department of algebra, Moscow state pedagogical University; Professor of the Department of probability theory and mathematical statistics, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow.

e-mail: kompantseva@yandex.ru

Abstract

A multiplication on an abelian group G is a homomorphism $\mu : G \otimes G \rightarrow G$. An mixed abelian group G is called an *MT*-group if every multiplication on the torsion part of the group G can be extended uniquely to a multiplication on G . *MT*-groups have been studied in many articles on the theory of additive groups of rings, but their complete description has not yet been obtained. In this paper, a pure fully invariant subgroup G_Λ^* is considered for an abelian *MT*-group G . One of the main properties of this subgroup is that $\bigcap_{p \in \Lambda(G)} pG_\Lambda^*$ is a nil-ideal

in every ring with the additive group G (here $\Lambda(G)$ is the set of all primes p , for which the p -primary component of G is non-zero). It is shown that for every *MT*-group G either $G = G_\Lambda^*$ or the quotient group G/G_Λ^* is uncountable.

Keywords: Abelian group, multiplication on a group, ring on an abelian group.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

E. I. Kompantseva, 2019, "Multiplications on mixed abelian groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 214–223.

Введение

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu : G \otimes G \rightarrow G$, все умножения на группе G образуют группу $Mult G = Hom(G \otimes G, G)$. Абелева группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на G .

В [1] показано, что любое умножение на периодической абелевой группе G определяется частичным умножением $\mu : B \otimes B \rightarrow G$ на базисной погруппе B группы G и, более того, $Mult G \cong Hom(B \otimes B, G)$. Это значит, что для задания умножения на периодической группе достаточно указать попарные произведения элементов некоторого ее базиса. Этот факт позволяет строить и изучать кольца не только на периодических группах, но и на смешанных абелевых группах G , обладающих следующим свойством: любое умножение на периодической части $T(G)$ группы G однозначно продолжается до умножения на всей группе. Такие группы называются *MT*-группами, задача их изучения поставлена в [2, стр. 34, проблема 38], ее решению посвящены работы [3, 4, 5] и др. Класс *MT*-групп достаточно широк, он содержит, например, урегулированные копериодические группы G и все их вполне характеристические подгруппы, содержащие $T(G)$. Очевидно, для *MT*-группы G имеют место изоморфизмы $Mult G \cong Mult T(G) \cong Hom(B \otimes B, T(G))$.

Многие работы по теории аддитивных групп колец посвящены подгруппам абелевых групп с так называемыми «абсолютными свойствами»: абсолютным идеалам [6–9], абсолютным ниль-идеалам (нильпотентным идеалам) [10–12] и тп. Абсолютным идеалом (ниль-идеалом, нильпотентным идеалом) абелевой группы G называют ее подгруппу, которая является идеалом (ниль-идеалом, нильпотентным идеалом) в любом кольце на G . В [12] для смешанной абелевой группы G определена сервантная вполне характеристическая подгруппа G_Λ^* , одно из основных свойств которой заключается в том, что если G — *MT*-группа, то $\bigcap_{p \in \Lambda(G)} pG_\Lambda^*$ является ее наибольшим абсолютным ниль-идеалом, здесь $\Lambda(G) = \{p \mid T_p(G) \neq 0\}$, $T_p(G)$ — p -примарная компонента группы G . Однако вопрос о возможном индексе подгруппы G_Λ^* в *MT*-группе G оставался открытым. В настоящей работе показано, что для любой *MT*-группы G либо $G = G_\Lambda^*$, либо факторгруппа G/G_Λ^* несчетна.

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» всюду в дальнейшем означает «абелева группа». Умножение $\mu : G \otimes G \rightarrow G$ на группе G часто обозначается знаком $\times$ и т.п., то есть $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением $\times$ определяет кольцо на группе G , которое обозначается $(G, \times)$. Множества целых, целых

неотрицательных, натуральных и всех простых чисел обозначаются $\mathbb{Z}, \mathbb{N}_0, \mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ соответственно. Элемент прямого произведения $\prod_{i \in I} G_i$ записывается в виде $(g_i)_{i \in I}$, где $g_i \in G_i$, или в виде $(g_1, g_2, \dots)$, если множество I счётно. Пусть $\mathbb{P}_1 \subseteq \mathbb{P}$, группа G называется $\mathbb{P}_1$ -делимой, если она p -делима для любого $p \in \mathbb{P}_1$. Для произвольной группы G обозначим: $T_p(G)$ — p -примарная компонента группы G , $\Lambda(G) = \{p \mid T_p(G) \neq 0\}$, $G_\Lambda^1 = \{g \in G \mid (\forall p \in \Lambda(G)) h_p(g) = \infty\}$, $\bar{G}_\Lambda = G/G_\Lambda^1$, $\bigotimes_n^G G$ — n -ая тензорная степень группы G . Если $g \in G$, то $\bar{g} = g + G_\Lambda^1 \in \bar{G}_\Lambda$, $h_p(g)$ — p -высота элемента g , $o(g)$ — порядок элемента g . За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [1, 13].

В [14] при изучении расщепляемости тензорных степеней смешанной группы было введено следующее определение. Пусть d — действительное число, G — группа; мы говорим, что элемент $g \in G$ удовлетворяет условию $(*)$ для d и простого числа p , если существует неубывающая неограниченная функция $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ такая, что $h_p(p^i g) > d(i + f(i))$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$. Определим подмножества $G_\Lambda^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), G_Λ^* и G^* группы G следующим образом:

$$\begin{aligned} G_\Lambda^{(n)} &= \{g \in G \mid (\exists k \in \mathbb{N}) kg \text{ удовлетворяет условию } (*) \text{ для } \frac{n}{n-1} \text{ и любого } p \in \Lambda(G)\}, \\ G_\Lambda^* &= \bigcup_{n \geq 2} G_\Lambda^{(n)} = \{g \in G \mid (\exists k \in \mathbb{N}) (\exists d > 1) kg \text{ удовлетворяет условию } (*) \text{ для } d \text{ и любого } p \in \Lambda(G)\}, \\ G^* &= \{g \in G \mid (\exists k \in \mathbb{N}) (\exists d > 1) kg \text{ удовлетворяет условию } (*) \text{ для } d \text{ и любого } p \in \mathbb{P}\}. \end{aligned}$$

В [12] показано в любой смешанной группе G подмножества $G_\Lambda^{(n)}$ ($n \geq 2$), G_Λ^* и G^* являются сервантными вполне характеристическими подгруппами, содержащими $T(G)$ и G_Λ^1 ; при этом факторгруппы $G/G_\Lambda^{(n)}$ ($n \geq 2$), G/G_Λ^* и G/G^* являются группами без кручения.

1. Индекс подгруппы G_Λ^* в MT -группе G

Сформулируем три факта о смешанных группах, которые будем использовать в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 1. 1) [14] Пусть G — редуцированная группа и факторгруппа $G/T(G)$ является $\Lambda(G)$ -делимой. Группа $\bigotimes_n^G G$ расщепляется тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G \setminus T(G)$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что kg удовлетворяет условию $(*)$ для $\frac{n}{n-1}$ и любого $p \in \Lambda(G)$.

2) [12] Если смешанная группа G имеет $\Lambda(G)$ -делимую факторгруппу $G/T(G)$, то $\bar{G}_\Lambda = G/G_\Lambda^1$ изоморфна сервантной подгруппе $\mathbb{Z}$ -адического пополнения базисной подгруппы группы $T(G)$.

3) [3] Если G — MT -группа, то G — редуцированная группа и факторгруппа $G/T(G)$ является $\Lambda(G)$ -делимой. $\square$

ЛЕММА 1. Пусть (G, μ) — кольцо на MT -группе G , D_Λ — максимальная $\Lambda(G)$ -делимая подгруппа группы G . Тогда для любого элемента $g \in G_\Lambda^*$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что степень g^n элемента g в кольце (G, μ) при любой расстановке скобок содержится в подгруппе $T(G) \oplus D_\Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in G_\Lambda^*$, тогда $g \in G_\Lambda^{(n)}$ при некотором натуральном $n \geq 2$. Тогда умножение μ на G индуцирует умножение на $G_\Lambda^{(n)}$. При этом $D_\Lambda \subseteq G_\Lambda^{(n)}$, $T(G) \subseteq G_\Lambda^{(n)}$ и группа $G_\Lambda^{(n)}/T(G)$ является $\Lambda(G)$ -делимой, так как $G_\Lambda^{(n)}$ сервантна в G .

Пусть g^n степень элемента g в кольце (G, μ) с некоторой расстановкой скобок, $\bigotimes_n^G G_\Lambda^{(n)}$ —

тензорная степень группы $G_\Lambda^{(n)}$ с той же расстановкой скобок. Имеем

$$(\bigotimes^n G_\Lambda^{(n)})/T(\bigotimes^n G_\Lambda^{(n)}) \cong \bigotimes^n (G_\Lambda^{(n)}/T(G))$$

[1], отсюда $(\bigotimes^n G_\Lambda^{(n)})/T(\bigotimes^n G_\Lambda^{(n)})$ является $\Lambda(G)$ -делимой группой.

Так как $\bigotimes^n G_\Lambda^{(n)}$ — расщепляется по теореме 1, то $\bigotimes^n G_\Lambda^{(n)} \cong (\bigotimes^n G_\Lambda^{(n)})/T(\bigotimes^n G_\Lambda^{(n)}) + T(\bigotimes^n G_\Lambda^{(n)})$ — это сумма $\Lambda(G)$ -делимой и периодической групп. Значит, $g^n \in D_\Lambda \oplus T(G)$. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть g — элемент смешанной группы G . Тогда следующие условия равносильны:

1) для любого действительного числа $d > 0$ существует $p \in \mathbb{P}$ такое, что g не удовлетворяет условию (*) для d и p .

2) для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существуют $p \in \mathbb{P}$ и $i_p \in \mathbb{N}_0$ такие, что $h_p(p^{i_p}g) - i_p \leq \varepsilon i_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для элемента $g \in G$ выполняется условие 1) и пусть $\varepsilon > 0$. Положим $d = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, $f(i) = [\frac{\varepsilon}{2d}i]$. Так как g не удовлетворяет условию (*) для d и p , то найдется $i_p \in \mathbb{N}_0$ такое, что $h_p(p^{i_p}g) \leq d(i_p + f(i_p)) \leq di_p + \frac{\varepsilon}{2}i_p = i_p + \varepsilon i_p$.

Обратно, пусть для элемента g выполняется условие 2) и пусть заданы $d > 1$ и неубывающая неограниченная функция $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$. Положим $\varepsilon = d - 1 > 0$. Тогда найдется $i_p \in \mathbb{N}_0$, для которого $h_p(p^{i_p}g) - i_p \leq \varepsilon i_p = (d - 1)i_p \leq (d - 1)i_p + df(i_p)$, отсюда $h_p(p^{i_p}g) \leq d(i_p + f(i_p))$, то есть g не удовлетворяет условию (*) для d и p . $\square$

Теорема 1 позволяет свести изучение колец на MT -группах к изучению колец на урегулированных алгебраически компактных группах, все умножения на которых описаны в [15].

Пусть группа G имеет $\Lambda(G)$ -делимую факторгруппу $G/T(G)$. Для каждого $p \in \Lambda(G)$ базисную подгруппу группы $T_p(G)$ запишем в виде $B_p = \bigoplus_{i \in I_p} \langle e_i^{(p)} \rangle$, $\hat{B}_p$ — p -адическое пополнение

группы B_p , тогда $B = \bigoplus_{p \in \Lambda(G)} B_p$ — базисная подгруппа группы $T(G)$, $\hat{B} = \prod_{p \in \Lambda(G)} \hat{B}_p$ — $\mathbb{Z}$ -адическое пополнение группы B . В группе $\bar{G}_\Lambda$ рассмотрим подгруппы $\bar{B}_p = (B_p \oplus G_\Lambda^1)/G_\Lambda^1$

и $\bar{B} = (B \oplus G_\Lambda^1)/G_\Lambda^1$. Тогда $\bar{B}_p = \bigoplus_{i \in I_p} \langle \overline{e_i^{(p)}} \rangle$, $\bar{B} = \bigoplus_{p \in \Lambda(G)} \bar{B}_p$, при этом $\bar{B}_p \cong B_p$, $\bar{B} \cong B$ и

$o(e_i^{(p)}) = o(\overline{e_i^{(p)}})$ при всех $p \in \Lambda(G)$, $i \in I_p$.

Обозначим через V_p p -адическое пополнение группы $\bar{B}_p$, тогда $V = \prod_{p \in \Lambda(G)} V_p$ — $\mathbb{Z}$ -адическое

пополнение группы $\bar{B}$ и $V \cong \hat{B}$, $V_p \cong \hat{B}_p$ при всех $p \in \Lambda(G)$. Через π_p будем обозначать проекцию V на V_p , группу V_p будем рассматривать как сервантную подгруппу группы $\prod_{i \in I_p} \langle \overline{e_i^{(p)}} \rangle$,

то есть элемент $a \in V_p$ записывается в виде $a = (k_{i,p} \overline{e_i^{(p)}})_{i \in I_p}$, где $k_{i,p} \in \mathbb{Z}$. В силу теоремы 1 группа $\bar{G}_\Lambda$ является сервантной подгруппой группы V .

Пусть на группе G задано кольцо $(G, \times)$, тогда определено факторкольцо $(\bar{G}_\Lambda, \times)$, так как подгруппа G_Λ^1 является абсолютным идеалом группы G . Парные произведения $\overline{e_i^{(p)}} \times \overline{e_j^{(p)}} = \overline{e_i^{(p)}} \times \overline{e_j^{(p)}}$ базисных элементов в кольце $(\bar{G}_\Lambda, \times)$ определяют также умножение на $V \subseteq \prod_{p \in \Lambda(G)} \prod_{i \in I_p} \langle \overline{e_i^{(p)}} \rangle$, то есть умножение на $\bar{G}_\Lambda$ продолжается до умножения на V . Кольцо $(V, \times)$ будем называть *кольцом, соответствующим кольцу $(G, \times)$* .

Пусть G — MT -группа. Определим ассоциативное и коммутативное умножение $\times$ на группе

$T(G)$, положив

$$e_i^{(p)} \times e_j^{(q)} = \begin{cases} e_i^{(p)}, & \text{если } p = q \quad \text{и} \quad i = j \\ 0, & \text{если } p \neq q \quad \text{или} \quad i \neq j \end{cases}$$

для любых $p, q \in \Lambda(G)$ и для любых $i \in I_p, j \in I_q$. Это умножение на $T(G)$ однозначно продолжается до ассоциативного и коммутативного умножения на G , такое умножение будем называть *каноническим умножением на G , определенным базисом $\{e_i^{(p)} \mid p \in \Lambda(G), i \in I_p\}$* .

ЛЕММА 3. Пусть G — MT - группа, $\times$ — каноническое умножение на G , $g \in G \setminus G_\Lambda^*$. Тогда $g^2 = g \times g \notin G_\Lambda^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\times$ — каноническое умножение на G , определенное базисом

$$\{e_j^{(p)} \mid p \in \Lambda(G), j \in I_p\}, \quad g \in G \setminus G_\Lambda^*$$

Тогда $\bar{g} \notin \bar{G}_\Lambda^* = (\bar{G}_\Lambda)^*$. Допустим, $g^2 \in G_\Lambda^*$, тогда $\bar{g}^2 \in \bar{G}_\Lambda^*$. Следовательно, $\bar{g}^n \in T(\bar{G})$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ в силу леммы 1. Значит,

$$c\bar{g}^n = 0 \quad (1)$$

при некотором $c \in \mathbb{N}$.

Пусть $(V, \times)$ — кольцо, соответствующее кольцу $(G, \times)$, тогда $\bar{g} \notin V^*$, так как $\bar{G}_\Lambda$ сервантна в V . Для $p \in \Lambda(G)$ обозначим $\pi_p(\bar{g}) = (p^{k_{j,p}} \alpha_{j,p} e_j^{(p)})_{j \in I_p} = (p^{k_{1,p}} \alpha_{1,p} e_1^{(p)}, p^{k_{2,p}} \alpha_{2,p} e_2^{(p)}, \dots) \in V_p$, где $k_{j,p} \in \mathbb{N}_0, \alpha_{j,p} \in \mathbb{Z}, p \nmid \alpha_{j,p} \ (j \in \mathbb{N})$, причем последовательность $\{k_{j,p}\}_{j \in \mathbb{N}}$ не ограничена, и можно считать, что $k_{1,p} \leq k_{2,p} \leq \dots$. Обозначим $o(e_j^{(p)}) = p^{s_{j,p}} \ (j \in \mathbb{N})$. Из [15] следует, что

$$\pi_p(\bar{g}^n) = (p^{nk_{1,p}} \alpha_{1,p}^n e_1^{(p)}, p^{nk_{2,p}} \alpha_{2,p}^n e_2^{(p)}, \dots).$$

Случай 1. $\pi_p(\bar{g}) \notin V_p^* = (V_p)^*$ при некотором $p \in \Lambda(G)$.

В этом случае будем опускать индекс p : $e_j^{(p)} = e_j$; $s_{j,p} = s_j$; $\pi_p(\bar{g}) = (p^{k_j} \alpha_j e_j)_{j \in \mathbb{N}}$; $\pi_p(\bar{g}^n) = (p^{nk_j} \alpha_j^n e_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Пусть $t \in \mathbb{N}$, покажем, что $p^{k_t} | c$. В силу леммы 2 имеем

$$0 < h_p(p^{i_0} \bar{g}) - i_0 \leq \frac{1}{n \max\{s_j - k_j \mid 1 \leq j \leq t\}} i_0 \quad (2)$$

при некотором $i_0 \in \mathbb{N}$.

Так как $\pi_p(\bar{g}) \notin V_p^*$, то $\pi_p(\bar{g})$ — элемент бесконечного порядка, поэтому последовательность $\{s_j - k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ не ограничена. Следовательно, найдется такое число $l \in \mathbb{N}$, что

$$s_l - k_l > i_0. \quad (3)$$

Отметим, что в силу (2) и (3) выполняется $s_l - k_l > i_0 \geq \max\{s_j - k_j \mid 1 \leq j \leq t\}$, значит $l > t$, откуда $k_l \geq k_t$, причем индекс l можно выбрать таким образом, что

$$s_j - k_j \leq i_0 \quad \text{при всех} \quad j < l. \quad (4)$$

Получаем из (3) и (4)

$$h_p(p^{i_0} \bar{g}) - i_0 = k_l. \quad (5)$$

С другой стороны, из (2) и (3) имеем

$$h_p(p^{i_0} \bar{g}) - i_0 \leq \frac{1}{n} i_0 < \frac{1}{n} (s_l - k_l). \quad (6)$$

Из (5) и (6) получаем

$$k_l < s_l - nk_l. \quad (7)$$

Из (1) имеем $\pi_p(c\bar{g}^n) = 0$, откуда $cp^{nk_l}\alpha_l^n e_l = 0$, значит, $cp^{nk_l}\alpha_l^n \equiv 0(\text{mod } p^{s_l})$ и, следовательно, $c \equiv 0(\text{mod } p^{s_l - nk_l})$. Значит, $p^{k_l} \mid c$ в силу (7), откуда $p^{k_t} \mid c$. Так как последовательность $\{k_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ не ограничена, то $c = 0$.

Случай 2. $\pi_p(\bar{g}) \in V_p^*$ при всех $p \in \Lambda(G)$.

Если $\bar{g} \notin p\bar{G}_\Lambda$ для бесконечного множества простых чисел p , то $\bar{g}^2 \notin p\bar{G}_\Lambda$ для всех p из этого множества. Следовательно, $\bar{g}^2 \notin G_\Lambda^*$.

Пусть теперь $\bar{g} \in p\bar{G}_\Lambda$ для почти всех $p \in \Lambda(G)$. Тогда существует бесконечное множество простых чисел p , для каждого из которых существует $i_p \in \mathbb{N}$ такое, что

$$0 < h_p(p^{i_p}\bar{g}) - i_p \leq \frac{1}{n}i_p. \quad (8)$$

Зафиксируем одно из таких p , тогда $p^{i_p}\bar{g} \neq 0$, поэтому $s_{l,p} - k_{l,p} > i_p$ при некотором $l \in \mathbb{N}$. При этом, l можно выбрать так, что

$$s_{j,p} - k_{j,p} \leq i_p \quad \text{при всех } j < l. \quad (9)$$

Тогда

$$h(p^{i_p}\bar{g}) - i_p = k_{l,p} > 0 \quad (10)$$

в силу (9). Из (8) имеем

$$h(p^{i_p}\bar{g}) - i_p \leq \frac{1}{n}i_p < \frac{1}{n}(s_{l,p} - k_{l,p}). \quad (11)$$

Из (10) и (11) получаем

$$s_{l,p} - nk_{l,p} > k_{l,p} > 0. \quad (12)$$

Из (1) следует, что $\pi_p(c\bar{g}^n) = 0$, откуда $cp^{nk_{l,p}}\alpha_{l,p}^n e_l^{(p)} = 0$, и, значит, $cp^{nk_{l,p}} \equiv 0(\text{mod } p^{s_{l,p}})$. Следовательно, $c \equiv 0(\text{mod } p^{s_{l,p} - nk_{l,p}})$, т.е. $p \mid c$. В силу бесконечности множества таких p получаем, что $c = 0$. Это противоречит (1), значит, $\bar{g}^2 \notin G_\Lambda^*$. $\square$

ТЕОРЕМА 2. Если G — МТ-группа, то $G = G_\Lambda^*$ или группа G/G_Λ^* более чем счетна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\times$ — каноническое умножение на G , определенное базисом

$$\{e_j^{(p)} \mid p \in \Lambda(G), j \in I_p\},$$

$(V, \times)$ — кольцо, соответствующее кольцу $(G, \times)$. Допустим, $G \neq G_\Lambda^*$, и пусть $g \in G \setminus G_\Lambda^*$, тогда $\bar{g}^2 \notin G_\Lambda^*$ по лемме 3, значит, $\bar{g}^2 \notin V^*$. Пусть $\pi_p(\bar{g}^2) = (b_{j,p}e_j^{(p)})_{j \in \mathbb{N}}$.

Случай 1. $\pi_p(\bar{g}^2) \in V_p^*$ при всех $p \in \Lambda(G)$.

В этом случае существуют бесконечное множество $\{p_n \in \mathbb{P} \mid n \in \mathbb{N}\}$ и множество $\{i_n \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ такие, что

$$h_{p_n}(p_n^{i_n}\bar{g}^2) - i_n \leq \frac{1}{n}i_n \quad (13)$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $\pi_{p_n}(p_n^{i_n}\bar{g}^2) = (p_n^{i_n}b_{j,p_n}e_j^{(p_n)})_{j \in \mathbb{N}}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, то

$$h_{p_n}(p_n^{i_n}\bar{g}^2) = h_{p_n}(p_n^{i_n}b_{j_n,p_n}e_{j_n}^{(p_n)}) \quad (14)$$

при некоторых $j_n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Пусть T — бесконечное множество натуральных чисел. Определим умножение $\times_T$ на $T(G)$, положив $e_{j_n}^{(p_n)} \times_T e_{j_n}^{(p_n)} = e_{j_n}^{(p_n)}$ для всех $n \in T$, а все остальные попарные произведения базисных

элементов $T(G)$ равными нулю. Это умножение однозначно продолжается до умножения $\times$ на G . Пусть $(V, \times_T)$ — кольцо, соответствующее кольцу $(G, \times_T)$.

Пусть $x = \bar{g} \times_T \bar{g} \in \bar{G} \leq V$, $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $t \in T$, для которого $\frac{1}{t} < \varepsilon$ и $p_t \nmid k$.

В силу (14) имеем

$$h_{p_t}(p_t^{it} kx) = h_{p_t}(p_t^{it} x) = h_{p_t}(p_t^{it} b_{j_t, p_t} e_{j_t}^{(p_t)}) = h_{p_t}(p_t^{it} \bar{g}^2),$$

откуда $h_{p_t}(p_t^{it} kx) - i_t \leq \frac{1}{t} i_t < \varepsilon i_t$ в силу (13). Это значит, что $x = \bar{g} \times_T \bar{g} \notin \bar{G}_\Lambda^*$ по лемме 2.

Так как $\bar{g} \times_T \bar{g} - \bar{g} \times_S \bar{g} = \bar{g} \times_M \bar{g}$, где $S, T \subseteq \mathbb{N}$, $M = (T \cup S) \setminus (S \cap T)$, то $\bar{g} \times_T \bar{g}$ и $\bar{g} \times_S \bar{g}$ сравнимы по подгруппе $\bar{G}_\Lambda^*$ если и только если множества T и S почти равны. Следовательно, группа $\bar{G}_\Lambda / \bar{G}_\Lambda^*$ содержит несчетное подмножество $\{(\bar{g} \times_T \bar{g}) + \bar{G}_\Lambda^* | T \subseteq \mathbb{N}\}$. Значит, и группа G / G_Λ^* более чем счетна.

Случай 2. $\pi_p(\bar{g}) \notin V_p^*$ при некотором $p \in \Lambda(G)$.

В этом случае будем опускать индекс p : $e_j^{(p)} = e_j$, $b_{j,p} = b_j$. Определим последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{i_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{j_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ следующим образом. Положим $n_1 = 2$; предположим, что определено $n_k \in \mathbb{N}$. Тогда определено натуральное i_k , для которого

$$0 < h_p(p^{i_k} \bar{g}^2) - i_k \leq \frac{1}{n_k} i_k. \quad (15)$$

Так как $\pi_p(p^{i_k} \bar{g}^2) = (p^{i_k} b_j e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ для каждого $k \in \mathbb{N}$, то найдется такое $j_k \in \mathbb{N}$, что

$$h_p(p^{i_k} \bar{g}^2) = h(p^{i_k} b_{j_k} e_{j_k}) < \infty \quad (16)$$

Определим n_{k+1} как наименьшее натуральное число, для которого

$$p^{n_{k+1}} b_{j_k} e_{j_k} = 0 \quad (17)$$

Из (15), (16), (17) получаем, что

$$i_{k+1} \geq n_{k+1} > i_k \geq n_k \quad (18)$$

при всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$p^{i_k} b_{j_s} e_{j_s} = 0 \quad (19)$$

при всех $s < k$. Из (16) и (19) получаем, что все числа j_k ($k \in \mathbb{N}$) различны.

Пусть T — бесконечное множество натуральных чисел. Определим умножение $\times_T$ на $T(G)$, положив $e_{j_k} \times_T e_{j_k} = e_{j_k}$ при всех $k \in T$, а все остальные попарные произведения базисных элементов $T(G)$ равными нулю. Это умножение однозначно продолжается до умножения на G .

Пусть $(V, \times_T)$ — кольцо, соответствующее кольцу $(G, \times_T)$, и пусть $x = \bar{g} \times_T \bar{g} \in V$, тогда $\pi_p(x) = (b_{j_k} e_{j_k})_{k \in T}$. Покажем, что $x \notin \bar{G}_\Lambda^*$. Заметим, что для любого $k \in T$ имеем $h_p(p^{i_k} \bar{g}^2) \leq h_p(p^{i_k} x) \leq h_p(p^{i_k} b_{j_k} e_{j_k})$, откуда $h_p(p^{i_k} x) = h_p(p^{i_k} \bar{g}^2)$ в силу (16). Следовательно, из (15) получаем

$$0 < h_p(p^{i_k} x) - i_k \leq \frac{1}{n_k} i_k \quad (20)$$

при всех $k \in T$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $s \in \mathbb{N}_0$ покажем, что $\frac{h_p(p^i p^s x)}{i} < 1 + \varepsilon$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Выберем $m \in T$, для которого $n_m > \max\{\frac{2}{\varepsilon}, s\}$, тогда $\frac{1}{n_m} < \frac{\varepsilon}{2}$ и $i_m \geq n_m > s$ в силу (18). Так как $\{i_t \mid t \in T\}$ — неограниченное множество, то существует такое $t \in T$, что $t > m$ и $i_t > (1 + \frac{1}{n_m}) \frac{2s}{\varepsilon} + s$. Тогда

$$i_t - s > (1 + \frac{1}{n_m}) \frac{2s}{\varepsilon} \quad (21)$$

и

$$\frac{h_p(p^{i_t}x)}{i_t} < 1 + \frac{1}{n_t} < 1 + \frac{1}{n_m} \quad (22)$$

в силу (20). Обозначим $i = i_t - s$. Используя (21) и (22), получаем

$$\begin{aligned} \frac{h_p(p^{i+s}x)}{i} &= \frac{h(p^{i_t}x)}{i_t} \cdot \frac{i_t}{i_t - s} = \frac{h(p^{i_t}x)}{i_t} \left(1 + \frac{s}{i_t - s}\right) \\ &< \left(1 + \frac{1}{n_m}\right) \left(1 + \frac{s}{\left(1 + \frac{1}{n_m}\right) \cdot \frac{2s}{\varepsilon}}\right) = 1 + \frac{1}{n_m} + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $p^s x$ не удовлетворяет условию (*) для p и любого $d > 1$ по лемме 2. Значит, $x = \bar{g} \times_T \bar{g} \notin \bar{G}_\Lambda^*$. Как и в случае 1, получаем, что группа G/G_Λ^* более чем счетна. $\square$

2. Заключение

Итак, в MT -группе G для подгруппы G_Λ^* возможны два случая. В первом — факторгруппа G/G_Λ^* несчетна. В этом случае из доказательства теоремы 2 и из леммы 9 в [12] следует, что для любого $g \in G \setminus G_\Lambda^*$ существует несчетное множество ассоциативных и коммутативных колец на G , в каждом из которых система $\{g^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ всех натуральных степеней элемента g линейно независима.

Во втором случае $G = G_\Lambda^*$. В этой ситуации в силу леммы 1 и того, что максимальная $\Lambda(G)$ -делимая подгруппа группы G является абсолютным нильпотентным идеалом [16], для любого кольца $(G, \times)$ на G факторкольцо $(G/T(G), \times)$ является ниль-кольцом. Более того, для любого $g \in G$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что в каждом кольце на G степень g^n при любой расстановке скобок принадлежит $T(G)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fuchs L. Abelian groups. Switz.: Springer International Publishing, 2015.
2. Topics in abelian groups. — Chicago, Ill., 1963
3. Москаленко А. И. О длине расщепления абелевой группы // Мат. заметки 1978. Vol. 24. № 6. P. 749–762.
4. Москаленко А. И. О продолжении умножений на смешанной абелевой группе счетного ранга // Матем. заметки 1981. Vol. 29. № 3. P. 375–379.
5. Фам Т. Т. Т. Абсолютные идеалы смешанных абелевых групп // Чебышевский сбор. 2012. Vol. 13. № 1. P. 153–164.
6. Fried E. On the subgroups of abelian groups that are ideals in every ring // Proc. Colloq. Abelian groups, Budapest, 1964. P. 51–55.
7. Fried E. Preideals in modules // Period. Math. Hung. 1971. Vol. 1. № 3. P. 163–169.
8. McLean K. R. The additive ideals of a p -ring // J. London Math. Soc. 1975. Vol. 2. P. 523–529.
9. McLean K. R. p -ring whose only right ideals are the fully invariant subgroups // Proc. London Math. Soc. 1975. Vol. 3. P. 445–458.
10. Gardner B. J. Rings on completely decomposable torsion-free abelian groups // Comment. Math. Univ. Carolinae 1974. Vol. 15. № 3. P. 381–392.

11. Jackett D. R. Rings on certain mixed abelian groups // Pacific. J. Math. 1982. Vol. 98. № 2. P. 365–373.
12. Kompantseva E. I. Absolute nil-ideals of abelian groups // J. Math. Sci. 2014. Vol. 197. № 5. P. 625–634.
13. Jacobson N. Structure of rings. Amer. Math. Soc., Colloq. Publ. Vol. 37, 1968.
14. Toubassi E. H., Lawver D. A. Height-slope and splitting length of abelian groups // Publ. Math. 1973. Vol. 20. P. 63–71.
15. Kompantseva E. I. Torsion-free rings // J. Math. Sci. 2010. Vol. 171. № 2. P. 213–247.
16. Компанцева Е. И. Абелева MT -группы и кольца на них // Тезисы докладов международной алгебраической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша. М.: Издательство МГУ, 2018. С. 108–109.

REFERENCES

1. Fuchs, L. 2015, “Abelian groups”, Switz.: Springer International Publishing.
2. Topics in abelian groups. — Chicago, Ill., 1963
3. Moskalenko, A. I. 1978, “Splitting length of an Abelian group”, *Mat. Zametki*, vol. 24, no. 6, pp. 749–762.
4. Moskalenko, A. I. 1981, “Extension of multiplications on a mixed Abelian group of countable rank”, *Mat. Zametki*, vol. 29, no. 3, pp. 375–379.
5. Pham, T. T. T. 2012, “Absolute ideals of mixed abelian groups”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 13, no. 1, pp. 153–164.
6. Fried, E. 1964, “On the subgroups of abelian groups that are ideals in every ring”, *Proc. Colloq. Abelian groups*, Budapest, pp. 51–55.
7. Fried, E. 1971, “Preideals in modules”, *Period. Math. Hung.*, vol. 1, no. 3, pp. 163–169.
8. McLean, K. R. 1975, “The additive ideals of a p -ring” *J. London Math. Soc.*, vol. 2, pp. 523–529.
9. McLean, K. R. 1975, “ p -ring whose only right ideals are the fully invariant subgroups”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 3, pp. 445–458.
10. Gardner, B. J. 1974, “Rings on completely decomposable torsion-free abelian groups”, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, vol. 15, no. 3, pp. 381–392.
11. Jackett, D. R. 1982, “Rings on certain mixed abelian groups”, *Pacific. J. Math.*, vol. 98, no. 2, pp. 365–373.
12. Kompantseva, E. I. 2014, “Absolute nil-ideals of Abelian groups”, *J. Math. Sci.*, vol. 197, no. 5, pp. 625–634.
13. Jacobson, N. 1968, “Structure of rings”. Amer. Math. Soc., Colloq. Publ. vol. 37.
14. Toubassi, E. H. & Lawver, D. A. 1973, “Height-slope and splitting length of abelian groups”, *Publ. Math.*, vol. 20, pp. 63–71.

15. Kompantseva, E.I. 2010, "Torsion-free rings", *J. Math. Sci.*, vol. 171, no. 2, pp. 213–247.
16. Kompantseva, E.I. 2018, "Abelian MT -groups and rings on them", *Abstract of International Algebraic Conference dedicated to the 110th anniversary of Professor A. G. Kurosh*, M.: Pub. MSU, pp. 108–109.

Получено 14.01.2019 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 510

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-224-247

О множествах ограниченных остатков для
 (t, s) -последовательностей I

Мордехай Б. Левин

Левин Мордехай Борисович — кандидат физико-математических наук, Факультет математики, Университет Бар-Илан, Рамат-Ган, Израиль.

e-mail: mlevin@math.biu.ac.il

Аннотация

Пусть $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ — s -мерная последовательность типа Холтона, полученная из глобального функционального поля, $b \geq 2$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, $\gamma_i \in [0, 1)$ с b -адическим разложением $\gamma_i = \gamma_{i,1}b^{-1} + \gamma_{i,2}b^{-2} + \dots$, $i = 1, \dots, s$.

В этой статье мы докажем, что $[0, \gamma_1) \times \dots \times [0, \gamma_s)$ — множество ограниченного остатка относительно последовательности $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ тогда и только тогда, когда

$$\max_{1 \leq i \leq s} \max\{j \geq 1 \mid \gamma_{i,j} \neq 0\} < \infty.$$

Мы также получим аналогичные результаты для обобщенных последовательностей Нидеррайтера, последовательностей Хинга — Нидеррайтера и последовательностей Нидеррайтера — Хинга.

Ключевые слова: множества ограниченных остатков, (t, s) -последовательности, последовательности Холтона.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Мордехай Б. Левин О множествах ограниченных остатков для (t, s) -последовательностей I // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 224–247.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 510

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-224-247

On a bounded remainder set for (t, s) sequences I

Mordechay B. Levin

Levin Mordechay Borisovich — candidat of physical and mathematical Sciences, Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat-Gan, 5290002, Israel.

e-mail: mlevin@math.biu.ac.il

Abstract

Let $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ be a sequence of points in $[0, 1]^s$. A subset S of $[0, 1]^s$ is called a bounded remainder set if there exist two real numbers a and C such that, for every integer N ,

$$|\text{card}\{n < N \mid \mathbf{x}_n \in S\} - aN| < C.$$

Let $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ be an s -dimensional Halton-type sequence obtained from a global function field, $b \geq 2$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, $\gamma_i \in [0, 1)$, with b -adic expansion $\gamma_i = \gamma_{i,1}b^{-1} + \gamma_{i,2}b^{-2} + \dots$, $i = 1, \dots, s$. In this paper, we prove that $[0, \gamma_1) \times \dots \times [0, \gamma_s)$ is the bounded remainder set with respect to the sequence $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ if and only if

$$\max_{1 \leq i \leq s} \max\{j \geq 1 \mid \gamma_{i,j} \neq 0\} < \infty.$$

We also obtain the similar results for a generalized Niederreiter sequences, Xing-Niederreiter sequences and Niederreiter-Xing sequences.

Keywords: bounded remainder set, (t, s) sequence, Halton type sequences.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Mordechay B. Levin, 2019, "On a bounded remainder set for (t, s) sequences I", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 224–247.

Dedicated to the 100th anniversary of Professor N.M. Korobov

1. Introduction

1.1. Bounded remainder sets. Let $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ be a sequence of points in $[0, 1]^s$, $S \subseteq [0, 1]^s$,

$$\Delta(S, (\mathbf{x}_n)_{n=0}^{N-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{1}_S(\mathbf{x}_n) - \lambda(S)),$$

where $\mathbf{1}_S(\mathbf{x}) = 1$, if $\mathbf{x} \in S$, and $\mathbf{1}_S(\mathbf{x}) = 0$, if $\mathbf{x} \notin S$. Here $\lambda(S)$ denotes the s -dimensional Lebesgue-measure of S . We define the star *discrepancy* of an N -point set $(\mathbf{x}_n)_{n=0}^{N-1}$ as

$$D^*((\mathbf{x}_n)_{n=0}^{N-1}) = \sup_{0 < y_1, \dots, y_s \leq 1} |\Delta([0, \mathbf{y}), (\mathbf{x}_n)_{n=0}^{N-1})/N|,$$

where $[0, \mathbf{y}) = [0, y_1) \times \dots \times [0, y_s)$. The sequence $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ is said to be **uniformly distributed** in $[0, 1]^s$ if $D_N \rightarrow 0$. In 1954, Roth proved that $\limsup_{N \rightarrow \infty} N(\ln N)^{-\frac{s}{2}} D^*((\mathbf{x}_n)_{n=0}^{N-1}) > 0$. According to the well-known conjecture (see, e.g., [1, p.283]), this estimate can be improved to

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} N(\ln N)^{-s} D^*((\mathbf{x}_n)_{n=0}^{N-1}) > 0. \quad (1)$$

See [2] and [7] for results on this conjecture.

A sequence $(\mathbf{x}_n^{(s)})_{n \geq 0}$ is of **low discrepancy** (abbreviated l.d.s.) if $D((\mathbf{x}_n^{(s)})_{n=0}^{N-1}) = O(N^{-1}(\ln N)^s)$ for $N \rightarrow \infty$. A sequence of point sets $((\mathbf{x}_{n,N}^{(s)})_{n=0}^{N-1})_{N=1}^{\infty}$ is of low discrepancy (abbreviated l.d.p.s.) if $D((\mathbf{x}_{n,N}^{(s)})_{n=0}^{N-1}) = O(N^{-1}(\ln N)^{s-1})$, for $N \rightarrow \infty$. For examples of such a sequences, see, e.g., [1], [3], and [11].

Definition 1. Let $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ be a sequence of points in $[0, 1]^s$. A subset S of $[0, 1]^s$ is called a bounded remainder set for $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ if the discrepancy function $\Delta(S, (\mathbf{x}_n)_{n=0}^{N-1})$ is bounded in $\mathbb{N}$.

Let α be an irrational number, let I be an interval in $[0, 1)$ with length $|I|$, let $\{n\alpha\}$ be the fractional part of $n\alpha$, $n = 1, 2, \dots$. Hecke, Ostrowski and Kesten proved that $\Delta(S, (\{n\alpha\})_{n=1}^N)$ is bounded if and only if $|I| = \{k\alpha\}$ for some integer k (see references in [4]).

The sets of bounded remainder for the classical s -dimensional Kronecker sequence studied by Lev and Grepstad [4]. The case of Halton's sequence was studied by Hellekalek [5].

Let b be a prime power, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, $\gamma_i \in (0, 1)$ with b -adic expansion

$$\gamma_i = \gamma_{i,1}b^{-1} + \gamma_{i,2}b^{-2} + \dots, \quad i = 1, \dots, s,$$

and let $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ be a uniformly distributed digital Kronecker sequence. In [7], we proved the following theorem:

Theorem A. *The set $[0, \gamma_1) \times \dots \times [0, \gamma_s)$ is of bounded remainder with respect to $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ if and only if*

$$\max_{1 \leq i \leq s} \max\{j \geq 1 \mid \gamma_{i,j} \neq 0\} < \infty. \quad (2)$$

In this paper, we prove similar results for digital sequences described in [3, Sec. 8]. Note that according to Larcher's conjecture [6, p.215], the assertion of Theorem A is true for all digital (t, s) -sequences in base b .

2. Definitions and auxiliary results.

2.1 $(\mathbf{T}, s)$ sequences. A subinterval E of $[0, 1)^s$ of the form

$$E = \prod_{i=1}^s [a_i b^{-d_i}, (a_i + 1)b^{-d_i}),$$

with $a_i, d_i \in \mathbb{Z}$, $d_i \geq 0$, $0 \leq a_i < b^{d_i}$, for $1 \leq i \leq s$ is called an *elementary interval in base $b \geq 2$* .

Definition 2. Let $0 \leq t \leq m$ be integers. A (t, m, s) -net in base b is a point set $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{b^m-1}$ in $[0, 1)^s$ such that $\#\{n \in [0, b^m - 1] \mid \mathbf{x}_n \in E\} = b^t$ for every elementary interval E in base b with $\text{vol}(E) = b^{t-m}$.

Definition 3. Let $t \geq 0$ be an integer. A sequence $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ of points in $[0, 1)^s$ is a (t, s) -sequence in base b if, for all integers $k \geq 0$ and $m \geq t$, the point set consisting of $\mathbf{x}_n$ with $kb^m \leq n < (k+1)b^m$ is a (t, m, s) -net in base b .

By [Ni, p. 56,60], (t, m, s) nets and (t, s) sequences are of low discrepancy. See reviews on (t, m, s) nets and (t, s) sequences in [3] and [11].

Definition 4. ([3, Definition 4.30]) For a given dimension $s \geq 1$, an integer base $b \geq 2$, and a function $\mathbf{T} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ with $\mathbf{T}(m) \leq m$ for all $m \in \mathbb{N}_0$, a sequence $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots)$ of points in $[0, 1)^s$ is called a $(\mathbf{T}, s)$ -sequence in base b if for all integers $m \geq 0$ and $k \geq 0$, the point set consisting of the points $\mathbf{x}_{kb^m}, \dots, \mathbf{x}_{(k+1)b^m-1}$ forms a $(\mathbf{T}(m), m, s)$ -net in base b .

Definition 5. ([3, Definition 4.47]) Let $m, s \geq 1$ be integers. Let $C^{(1,m)}, \dots, C^{(s,m)}$ be $m \times m$ matrices over $\mathbb{F}_b$. Now we construct b^m points in $[0, 1)^s$. For $n = 0, 1, \dots, b^m - 1$, let $n = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(n)b^j$ be the b -adic expansion of n . Choose a bijection $\phi : \mathbb{Z}_b := \{0, 1, \dots, b-1\} \mapsto \mathbb{F}_b$ with $\phi(0) = \bar{0}$, the neutral element of addition in $\mathbb{F}_b$. We identify n with the row vector

$$\mathbf{n} = (\bar{a}_0(n), \dots, \bar{a}_{m-1}(n)) \in \mathbb{F}_b^m \text{ with } \bar{a}_r(n) = \phi(a_r(n)), \quad r \in [0, m). \quad (3)$$

We map the vectors

$$y_n^{(i)} = (y_{n,1}^{(i)}, \dots, y_{n,m}^{(i)}) := \mathbf{n} C^{(i,m)\top}, \quad y_{n,j}^{(i)} = \sum_{r=0}^{m-1} \bar{a}_r(n) c_{j,r}^{(i)} \in \mathbb{F}_b, \quad (4)$$

to the real numbers

$$x_n^{(i)} = \sum_{j=1}^m x_{n,j}^{(i)} / b^j, \quad x_{n,j}^{(i)} = \phi^{-1}(y_{n,j}^{(i)}) \quad (5)$$

to obtain the point

$$\mathbf{x}_n := (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(s)}) \in [0, 1]^s. \quad (6)$$

The point set $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{b^m-1}\}$ is called a **digital net** (over $\mathbb{F}_b$) (with generating matrices $(C^{(1,m)}, \dots, C^{(s,m)})$).

For $m = \infty$, we obtain a sequence $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ of points in $[0, 1]^s$ which is called a **digital sequence** (over $\mathbb{F}_b$) (with generating matrices $(C^{(1,\infty)}, \dots, C^{(s,\infty)})$).

We abbreviate $C^{(i,m)}$ as $C^{(i)}$ for $m \in \mathbb{N}$ and for $m = \infty$.

2.2 Duality theory (see [3, Section 7]).

Let $\mathcal{N}$ be an arbitrary $\mathbb{F}_b$ -linear subspace of $\mathbb{F}_b^{sm}$. Let H be a matrix over $\mathbb{F}_b$ consisting of sm columns such that the row-space of H is equal to $\mathcal{N}$. Then we define the **dual space** $\mathcal{N}^\perp \subseteq \mathbb{F}_b^{sm}$ of $\mathcal{N}$ to be the null space of H (see [3, p. 244]). In other words, $\mathcal{N}^\perp$ is the orthogonal complement of $\mathcal{N}$ relative to the standard inner product in $\mathbb{F}_b^{sm}$,

$$\mathcal{N}^\perp = \{A \in \mathbb{F}_b^{sm} \mid B \cdot A = 0 \text{ for all } B \in \mathcal{N}\}.$$

Let $C^{(1)}, \dots, C^{(s)} \in \mathbb{F}_b^{\infty \times \infty}$ be generating matrices of a digital sequence $(\mathbf{x}_n(C))_{n \geq 0}$ over $\mathbb{F}_b$. For any $m \in \mathbb{N}$, we denote the $m \times m$ left-upper sub-matrix of $C^{(i)}$ by $[C^{(i)}]_m$. The matrices $[C^{(1)}]_m, \dots, [C^{(s)}]_m$ are then the generating matrices of a digital net. We define the **overall generating matrix** of this digital net by

$$[C]_m = ([C^{(1)}]_m^\top | [C^{(2)}]_m^\top | \dots | [C^{(s)}]_m^\top) \in \mathbb{F}_b^{m \times sm} \quad (7)$$

for any $m \in \mathbb{N}$.

Let $\mathcal{C}_m$ denote the row space of the matrix $[C]_m$ i.e.,

$$\mathcal{C}_m = \left\{ \left(\sum_{r=0}^{m-1} c_{j,r}^{(i)} \bar{a}_r(n) \right)_{1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq s} \mid 0 \leq n < b^m \right\}.$$

The dual space is then given by

$$\mathcal{C}_m^\perp = \{A \in \mathbb{F}_b^{sm} \mid B \cdot A^\top = \mathbf{0} \text{ for all } B \in \mathcal{C}_m\}.$$

Lemma A. ([3, Theorem 4.86]) *Let b be a prime power. A strict digital $(\mathbf{T}, s)$ -sequence over $\mathbb{F}_b$ is uniformly distributed modulo one, if and only if $\liminf_{m \rightarrow \infty} (m - \mathbf{T}(m)) = \infty$.*

2.3 Admissible sequences.

For $x = \sum_{j \geq 1} x_j b^{-j}$, and $y = \sum_{j \geq 1} y_j b^{-j}$ where $x_j, y_j \in \mathbb{Z}_b := \{0, 1, \dots, b-1\}$, we define the (b -adic) digital shifted point v by $v = x \oplus y := \sum_{j \geq 1} v_j b^{-j}$, where $v_j \equiv x_j + y_j \pmod{b}$ and $v_j \in \mathbb{Z}_b$. Let $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(s)}) \in [0, 1]^s$, $\mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(s)}) \in [0, 1]^s$. We define the (b -adic) digital shifted point $\mathbf{v}$ by $\mathbf{v} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = (x^{(1)} \oplus y^{(1)}, \dots, x^{(s)} \oplus y^{(s)})$. For $n_1, n_2 \in [0, b^m)$, we define $n_1 \oplus n_2 := (n_1/b^m \oplus n_2/b^m)b^m$.

For $x = \sum_{j \geq 1} x_i b^{-i}$, where $x_i \in \mathbb{Z}_b$, $x_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$) and $x_{k+1} \neq 0$, we define the absolute valuation $\|\cdot\|_b$ of x by $\|x\|_b = b^{-k-1}$. Let $\|n\|_b = b^k$ for $n \in [b^k, b^{k+1})$.

Definition 6. A point set $(\mathbf{x}_n)_{0 \leq n < b^m}$ in $[0, 1]^s$ is d -admissible in base b if

$$\min_{0 \leq k < n < b^m} \|\mathbf{x}_n \ominus \mathbf{x}_k\|_b > b^{-m-d} \quad \text{where} \quad \|\mathbf{x}\|_b := \prod_{i=1}^s \|x_j^{(i)}\|_b.$$

A sequence $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ in $[0, 1]^s$ is d -admissible in base b if $\inf_{n > k \geq 0} \|n \ominus k\|_b \times \|\mathbf{x}_n \ominus \mathbf{x}_k\|_b \geq b^{-d}$.

By [8], generalized Niederreiter's sequences, Xing-Niederreiter's sequences and Halton-type (t, s) sequences have d -admissible properties. In [8], we proved for all d -admissible digital (t, s) sequences $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$

$$\max_{1 \leq N \leq b^m} ND^*((\mathbf{x}_n \oplus \mathbf{w})_{0 \leq n < N}) \geq Km^s$$

with some $\mathbf{w}$ and $K > 0$. This result supports conjecture (1).

Definition 7. A sequence $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ in $[0, 1]^s$ is weakly admissible in base b if

$$\varkappa_m := \min_{0 \leq k < n < b^m} \|\mathbf{x}_n \ominus \mathbf{x}_k\|_b > 0 \quad \forall m \geq 1 \text{ where } \|\mathbf{x}\|_b := \prod_{i=1}^s \left\| x^{(i)} \right\|_b.$$

Let $m \geq 1$, $\tau_m = [\log_q(\kappa_m)] + m$, $\mathbf{w} = (w^{(1)}, \dots, w^{(s)})$, $w^{(i)} = (w_1^{(i)}, \dots, w_{\tau_m}^{(i)})$,

$$g_{\mathbf{w}} = \{A \geq 1 \mid x_{b^m A, j}^{(i)} = w_j^{(i)}, j \in [1, \tau_m], i \in [1, s]\} \text{ and } g_{\mathbf{w}} \neq \emptyset \quad \forall w_j^{(i)} \in \mathbb{Z}_b. \quad (8)$$

Theorem B. (see [9, Proposition]) Let $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ be a uniformly distributed weakly admissible digital (T, s) -sequence in base b , satisfying (8) for all $m \geq m_0$. Then the set $[0, \gamma_1] \times \dots \times [0, \gamma_s]$ is of bounded remainder with respect to $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ if and only if (2) is true.

2.4 Notation and terminology for algebraic function fields. For the theory of algebraic function fields, we follow the notation and terminology in the books [14] and [13].

Let b be an arbitrary prime power, $\mathbb{F}_b$ a finite field with b elements, $\mathbb{F}_b(x)$ the rational function field over $\mathbb{F}_b$, and $\mathbb{F}_b[x]$ the polynomial ring over $\mathbb{F}_b$. For $\alpha = f/g$, $f, g \in \mathbb{F}_b[x]$, let

$$\nu_{\infty}(\alpha) = \deg(g) - \deg(f)$$

be the degree valuation of $\mathbb{F}_b(x)$. We define the field of Laurent series as

$$\mathbb{F}_b((x)) := \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} a_i x^i \mid m \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{F}_b \right\}.$$

A finite extension field F of $\mathbb{F}_b(x)$ is called an algebraic function field over $\mathbb{F}_b$. Let $\mathbb{F}_b$ be algebraically closed in F . We express this fact by simply saying that $F/\mathbb{F}_b$ is an algebraic function field. The genus of $F/\mathbb{F}_b$ is denoted by g .

A place $\mathcal{P}$ of F is, by definition, the maximal ideal of some valuation ring of F . We denote by $O_{\mathcal{P}}$ the valuation ring corresponding to $\mathcal{P}$ and we denote by $\mathbb{P}_F$ the set of places of F . For a place $\mathcal{P}$ of F , we write $\nu_{\mathcal{P}}$ for the normalized discrete valuation of F corresponding to $\mathcal{P}$, and any element $t \in F$ with $\nu_{\mathcal{P}}(t) = 1$ is called a local parameter (prime element) at $\mathcal{P}$.

The field $F_{\mathcal{P}} := O_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}$ is called the residue field of F with respect to $\mathcal{P}$. The degree of a place $\mathcal{P}$ is defined as $\deg(\mathcal{P}) = [F_{\mathcal{P}} : \mathbb{F}_b]$. We denote by $\text{Div}(F)$ the set of divisors of $F/\mathbb{F}_b$.

The completion of F with respect to $\nu_{\mathcal{P}}$ will be denoted by $F^{(\mathcal{P})}$. Let t be a local parameter of $\mathcal{P}$. Then $F^{(\mathcal{P})}$ is isomorphic to $F_{\mathcal{P}}((t))$ (see [13, Theorem 2.5.20]), and an arbitrary element $\alpha \in F^{(\mathcal{P})}$ can be uniquely expanded as (see [13, p. 293])

$$\alpha = \sum_{i=\nu_{\mathcal{P}}(\alpha)}^{\infty} S_i t^i \quad \text{where} \quad S_i = S_i(t, \alpha) \in F_{\mathcal{P}} \subseteq F^{(\mathcal{P})}.$$

The derivative $\frac{d\alpha}{dt}$, or differentiation with respect to t , is defined by (see [13, Definition 9.3.1])

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=\nu_{\mathcal{P}}(\alpha)}^{\infty} i S_i t^{i-1}. \quad (9)$$

For an algebraic function field $F/\mathbb{F}_b$, we define its set of differentials (or Hasse differentials, H-differentials) as

$$\Delta_F = \{y \, dz \mid y \in F, \, z \text{ is a separating element for } F/\mathbb{F}_b\}$$

(see [14, Definition 4.1.7]).

Lemma B. ([14, Proposition 4.1.8] or [13, Theorem 9.3.13]) *Let $z \in F$ be separating. Then every differential $\gamma \in \Delta_F$ can be written uniquely as $\gamma = y \, dz$ for some $y \in F$.*

We define the order of $\alpha \, d\beta$ at $\mathcal{P}$ by

$$\nu_{\mathcal{P}}(\alpha \, d\beta) := \nu_{\mathcal{P}}(\alpha \, d\beta/dt), \quad (10)$$

where t is any local parameter for $\mathcal{P}$ (see [13, Definition 9.3.8]).

Let Ω_F be the set of all Weil differentials of $F/\mathbb{F}_b$. There exists an F -linear isomorphism of the differential module Δ_F onto Ω_F (see [14, Theorem 4.3.2] or [13, Theorem 9.3.15]).

For $0 \neq \omega \in \Omega_F$, there exists a uniquely determined divisor $\text{div}(\omega) \in \text{Div}(F)$. Such a divisor $\text{div}(\omega)$ is called a canonical divisor of $F/\mathbb{F}_b$. (see [14, Definition 1.5.11]). For a canonical divisor $\dot{W}$, we have (see [14, Corollary 1.5.16])

$$\deg(\dot{W}) = 2g - 2 \quad \text{and} \quad \ell(\dot{W}) = g. \quad (11)$$

Let $\alpha \, d\beta$ be a nonzero H-differential in F and let ω be the corresponding Weil differential. Then (see [13, Theorem 9.3.17], [14, ref. 4.35])

$$\nu_{\mathcal{P}}(\text{div}(\omega)) = \nu_{\mathcal{P}}(\alpha \, d\beta), \quad \text{for all } \mathcal{P} \in \mathbb{P}_F. \quad (12)$$

Let $\alpha \, d\beta$ be an H-differential, t a local parameter of $\mathcal{P}$, and

$$\alpha \, d\beta = \sum_{i=\nu_{\mathcal{P}}(\alpha)}^{\infty} S_i t^i dt \in F^{(\mathcal{P})}.$$

Then the **residue** of $\alpha \, d\beta$ (see [13, Definition 9.3.10]) is defined by

$$\text{Res}_{\mathcal{P}}(\alpha \, d\beta) := \text{Tr}_{F_{\mathcal{P}}/\mathbb{F}_b}(S_{-1}) \in \mathbb{F}_b.$$

Let

$$\text{Res}_{\mathcal{P},t}(\alpha) := \text{Res}_{\mathcal{P}}(\alpha dt).$$

For a divisor $\mathcal{D}$ of $F/\mathbb{F}_b$, let $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ denote the Riemann-Roch space

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \{y \in F \setminus 0 \mid \text{div}(y) + \mathcal{D} \geq 0\} \cup \{0\}. \quad (13)$$

Then $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ is a finite-dimensional vector space over $\mathbb{F}$, and we denote its dimension by $\ell(\mathcal{D})$. By [14, Corollary 1.4.12],

$$\ell(\mathcal{D}) = \{0\} \quad \text{for} \quad \deg(\mathcal{D}) < 0. \quad (14)$$

Theorem C (Riemann-Roch Theorem). [14, Theorem 1.5.15, and 14, Theorem 1.5.17] *Let W be a canonical divisor of $F/\mathbb{F}_b$. Then for each divisor $A \in \text{div}(F)$, $\ell(A) = \deg(A) + 1 - g + \ell(W - A)$, and*

$$\ell(A) = \deg(A) + 1 - g \quad \text{for} \quad \deg(A) \geq 2g - 1.$$

3. Statements of results.

3.1 Generalized Niederreiter sequence. In this subsection, we introduce a generalization of the Niederreiter sequence due to Tezuka (see [3, Section 8.1.2]). By [3, Section 8.1], the Sobol's sequence, the Faure's sequence and the original Niederreiter sequence are particular cases of a generalized Niederreiter sequence.

Let b be a prime power and let $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{F}_b[x]$ be pairwise coprime polynomials over $\mathbb{F}_b$. Let $e_i = \deg(p_i) \geq 1$ for $1 \leq i \leq s$. For each $j \geq 1$ and $1 \leq i \leq s$, the set of polynomials $\{y_{i,j,k}(x) : 0 \leq k < e_i\}$ needs to be linearly independent (mod $p_i(x)$) over $\mathbb{F}_b$. For integers $1 \leq i \leq s$, $j \geq 1$ and $0 \leq k < e_i$, consider the expansions

$$\frac{y_{i,j,k}(x)}{p_i(x)^j} = \sum_{r \geq 0} a^{(i)}(j, k, r) x^{-r-1}$$

over the field of formal Laurent series $\mathbb{F}_b((x^{-1}))$. Then we define the matrix $C^{(i)} = (c_{j,r}^{(i)})_{j \geq 1, r \geq 0}$ by

$$c_{j,r}^{(i)} = a^{(i)}(Q+1, k, r) \in \mathbb{F}_b \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq s, j \geq 1, r \geq 0,$$

where $j-1 = Qe_i + k$ with integers $Q = Q(i, j)$ and $k = k(i, j)$ satisfying $0 \leq k < e_i$.

A digital sequence $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ over $\mathbb{F}_b$ generated by the matrices $C^{(1)}, \dots, C^{(s)}$ is called a **generalized Niederreiter sequence** (see [3, p.266]).

Theorem D. (see [3, p.266] and [7, Theorem 1]) *The generalized Niederreiter sequence $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ with generating matrices, defined as above, is a digital d -admissible (t, s) -sequence over $\mathbb{F}_b$ with $d = e_0$, $t = e_0 - s$ and $e_0 = e_1 + \dots + e_s$.*

In this paper, we will consider the case where $(x, p_i) = 1$ for $1 \leq i \leq s$. We will consider the general case in [10].

Theorem 1. *With the notations as above, the set $[0, \gamma_1) \times \dots \times [0, \gamma_s)$ is of bounded remainder with respect to $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ if and only if (2) is true.*

3.2 Xing-Niederreiter sequence (see [3, Section 8.4]). Let $F/\mathbb{F}_b$ be an algebraic function field with full constant field $\mathbb{F}_b$ and genus g . Assume that $F/\mathbb{F}_b$ has at least one rational place P_∞ , and let G be a positive divisor of $F/\mathbb{F}_b$ with $\deg(G) = 2g$ and $P_\infty \notin \text{supp}(G)$. Let $P_1, \dots, P_s$ be s distinct places of $F/\mathbb{F}_b$ with $P_i \neq P_\infty$ for $1 \leq i \leq s$. Put $e_i = \deg(P_i)$ for $1 \leq i \leq s$.

By [3, p.279], we have that there exists a basis $w_0, w_1, \dots, w_g$ of $\mathcal{L}(G)$ over $\mathbb{F}_b$ such that

$$\nu_{P_\infty}(w_u) = n_u \quad \text{for} \quad 0 \leq u \leq g,$$

where $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_g \leq 2g$. For each $1 \leq i \leq s$, we consider the chain

$$\mathcal{L}(G) \subset \mathcal{L}(G + P_i) \subset \mathcal{L}(G + 2P_i) \subset \dots$$

of vector spaces over $\mathbb{F}_b$. By starting from the basis $w_0, w_1, \dots, w_g$ of $\mathcal{L}(G)$ and successively adding basis vectors at each step of the chain, we obtain for each $n \in \mathbb{N}$ a basis

$$\{w_0, w_1, \dots, w_g, k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \dots, k_{n_{e_i}}^{(i)}\}$$

of $\mathcal{L}(G + nP_i)$. We note that we then have

$$k_j^{(i)} \in \mathcal{L}(G + ((j-1)/e_i + 1)P_i) \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq s \quad \text{and} \quad j \geq 1. \quad (15)$$

Lemma C. ([3, Lemma 8.10]) *The system $\{w_0, w_1, \dots, w_g\} \cup \{k_j^{(i)}\}_{1 \leq i \leq s, j \geq 1}$ of elements of F is linearly independent over $\mathbb{F}_b$.*

Let z be an arbitrary local parameter at P_∞ . For $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, we put

$$z_r = \begin{cases} z^r & \text{if } r \notin \{n_0, n_1, \dots, n_g\}, \\ w_u & \text{if } r = n_u \text{ for some } u \in \{0, 1, \dots, g\}. \end{cases} \quad (16)$$

Note that in this case $\nu_{P_\infty}(z_r) = r$ for all $r \in \mathbb{N}_0$. For $1 \leq i \leq s$ and $j \in \mathbb{N}$, we have $k_j^{(i)} \in \mathcal{L}(G + nP_i)$ for some $n \in \mathbb{N}$ and also $P_\infty \notin \text{supp}(G + nP_i)$, hence $\nu_{P_\infty}(k_j^{(i)}) \geq 0$. Thus we have the local expansions

$$k_j^{(i)} = \sum_{r=0}^{\infty} a_{j,r}^{(i)} z_r \quad \text{for } 1 \leq i \leq s \quad \text{and } j \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

where all coefficients $a_{j,r}^{(i)} \in \mathbb{F}_b$. Let $H_1 = \mathbb{N}_0 \setminus H_2 = \{h(0), h(1), \dots\}$, $H_2 = \{n_0, n_1, \dots, n_g\}$.

For $1 \leq i \leq s$ and $j \in \mathbb{N}$, we now define the sequences

$$\begin{aligned} c_{j,r}^{(i)} &= a_{j,h(r)}^{(i)}, \quad \mathbf{c}_j^{(i)} = (c_{j,0}^{(i)}, c_{j,1}^{(i)}, \dots) := (a_{j,n}^{(i)})_{n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{n_0, \dots, n_g\}} = (a_{j,h(r)}^{(i)})_{r \geq 0} \\ &= (\widehat{a_{j,n_0}^{(i)}} , a_{j,n_0+1}^{(i)}, \dots, \widehat{a_{j,n_1}^{(i)}} , a_{j,n_1+1}^{(i)}, \dots, \widehat{a_{j,n_g}^{(i)}} , a_{j,n_g+1}^{(i)}, \dots) \in \mathbb{F}_b^{\mathbb{N}}, \end{aligned} \quad (18)$$

where the hat indicates that the corresponding term is deleted.

We define the matrices $C^{(1)}, \dots, C^{(s)} \in \mathbb{F}_b^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ by

$$C^{(i)} = (\mathbf{c}_1^{(i)}, \mathbf{c}_2^{(i)}, \mathbf{c}_3^{(i)}, \dots)^\top \quad \text{for } 1 \leq i \leq s, \quad (19)$$

i.e., the vector $\mathbf{c}_j^{(i)}$ is the j th row vector of $C^{(i)}$ for $1 \leq i \leq s$.

Theorem E (see [3, Theorem 8.11] and [7, Theorem 1]). *With the above notations, we have that the matrices $C^{(1)}, \dots, C^{(s)}$ given by (19) are generating matrices of the Xing-Niederreiter d -admissible digital (t, s) -sequence $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ with $d = e_1 + \dots + e_s$, $t = g + e_1 + \dots + e_s - s$.*

In order to obtain the bounded remainder set property, we will take a specific local parameter z . Let $P_0 \in \mathbb{P}_F$, $P_0 \notin \{P_1, \dots, P_s, P_\infty\}$, $P_0 \notin \text{supp}(G)$ and $\deg(P_0) = e_0$. By the Riemann-Roch theorem, there exists a local parameter z at P_∞ , with

$$z \in \mathcal{L}((2g+1)P_0 - P_\infty) \setminus \mathcal{L}((2g+1)P_0 - 2P_\infty). \quad (20)$$

Theorem 2. *With the notations as above, the set $[0, \gamma_1) \times \dots \times [0, \gamma_s)$ is of bounded remainder with respect to $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ if and only if (2) is true.*

3.3 Generalized Halton-type sequences from global function fields.

Let $q \geq 2$ be an integer

$$n = \sum_{j \geq 1} e_{q,j}(n) q^{j-1}, \quad e_{q,j}(n) \in \{0, 1, \dots, q-1\}, \quad \text{and } \varphi_q(n) = \sum_{j \geq 1} e_{q,j}(n) q^{-j}.$$

Van der Corput proved that $(\varphi_q(n))_{n \geq 0}$ is a 1-dimensional l.d.s. Let

$$\hat{H}_s(n) = (\varphi_{\hat{q}_1}(n), \dots, \varphi_{\hat{q}_s}(n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

where $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_s \geq 2$ are pairwise coprime integers. Halton proved that $(\hat{H}_s(n))_{n \geq 0}$ is an s -dimensional l.d.s. (see [11]).

Let $Q = (q_1, q_2, \dots)$ and $Q_j = q_1 q_2 \dots q_j$, where $q_j \geq 2$ ($j = 1, 2, \dots$) is a sequence of integers. Every nonnegative integer n then has a unique Q -adic representation of the form

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} n_j q_1 \cdots q_{j-1} = n_1 + n_2 q_1 + n_3 q_1 q_2 + \cdots,$$

where $n_j \in \{0, 1, \dots, q_j - 1\}$. We call this the Cantor expansion of n with respect to the base Q . Consider Cantor's expansion of $x \in [0, 1)$:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j / Q_j, \quad x_j \in \{0, 1, \dots, q_j - 1\}, \quad x_j \neq q_j - 1 \text{ for infinitely many } j.$$

The Q -adic representation of x is then unique. We define the radical inverse function

$$\varphi_Q \left(\sum_{j=1}^{\infty} n_j q_1 \cdots q_{j-1} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n_j}{q_1 \cdots q_j}.$$

Let $p_{i,j} \geq 2$ be integers ($s \geq i \geq 1, j \geq 1$), $\text{g.c.d.}(p_{i,k}, p_{j,l}) = 1$ for $i \neq j$, $\tilde{P}_{i,0} = 1$, $\tilde{P}_{i,j} = \prod_{1 \leq k \leq j} p_{i,k}$, $i \in [1, s]$, $j \geq 1$, $\mathcal{P}_i = (p_{i,1}, p_{i,2}, \dots)$, $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s)$.

In [5], Hellecaleg proposed the following generalisation of the Halton sequence:

$$H_{\mathcal{P}} = (\varphi_{\mathcal{P}_1}(n), \dots, \varphi_{\mathcal{P}_s}(n))_{n=0}^{\infty}. \quad (21)$$

In [Te], Tezuka introduced a polynomial arithmetic analogue of the Halton sequence :

Let $p(x)$ be an arbitrary nonconstant polynomial over $\mathbb{F}_b$, $e = \deg(p)$,

$$n = a_0(n) + a_1(n)b + \cdots + a_m(n)b^m.$$

We fix a bijection $\phi : \mathbb{Z}_b \rightarrow \mathbb{F}_b$ with $\phi(0) = \bar{0}$. Denote $v_n(x) = \bar{a}_0(n) + \bar{a}_1(n)x + \cdots + \bar{a}_m(n)x^m$, where $\bar{a}_r(n) = \phi(a_r(n))$, $r = 0, 1, \dots, m$. Then $v_n(x)$ can be represented in terms of $p(x)$ in the following way:

$$v_n(x) = r_0(x) + r_1(x)p(x) + \cdots + r_k(p(x))^k, \quad \text{with } k = [m/e].$$

We define the radical inverse function $\varphi_{p(x)} : \mathbb{F}_b[x] \rightarrow \mathbb{F}_b(x)$ as follows

$$\varphi_{p(x)}(v_n(x)) = r_0(x)/p(x) + r_1(x)/p^2(x) + \cdots + r_k/(p(x))^k.$$

Let $p_1(x), \dots, p_s(x)$ be pairwise coprime. Then Tezuka's sequence is defined as follows

$$\mathbf{x}_n = (\sigma_1(\varphi_{p_1(x)}(n)), \dots, \sigma_s(\varphi_{p_s(x)}(n)))_{n=0}^{\infty},$$

where each σ_i is a mapping from F to the real field defined by $\sigma_i(\sum_{j \geq w} \dot{a}_j x^{-j}) = \sum_{j \geq w} \phi^{-1}(\dot{a}_j) b^{-j}$. By [Te], $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ is a (t, s) sequence in base b .

In 2010, Levin [7] and in 2013, Niederreiter and Yeo [12] generalized Tezuka's construction to the case of arbitrary algebraic function fields F . The construction of [12] is follows:

Let $F/\mathbb{F}_b$ be an algebraic function field with full constant field $\mathbb{F}_b$ and genus g . We assume that $F/\mathbb{F}_b$ has at least one rational place, that is, a place of degree 1. Given a dimension $s \geq 1$, we choose $s+1$ distinct places $P_1, \dots, P_s, P_{\infty}$ of F with $\deg(P_{\infty}) = 1$. The degrees of the places $P_1, \dots, P_s$ are arbitrary and we put $e_i = \deg(P_i)$ for $1 \leq i \leq s$. Denote by O_F the holomorphy ring given by $O_F = \bigcap_{P \neq P_{\infty}} O_P$, where the intersection is extended over all places $P \neq P_{\infty}$ of F , and O_P is the valuation ring of P . We arrange the elements of O_F into a sequence by using the fact that $O_F = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{L}(mP_{\infty})$. The terms of this sequence are denoted by $f_0, f_1, \dots$ and they are obtained as

follows. Consider the chain $\mathcal{L}(0) \subseteq L(P_\infty) \subseteq L(2P_\infty) \subseteq \dots$ of vector spaces over $\mathbb{F}_b$. At each step of this chain, the dimension either remains the same or increases by 1. From a certain point on, the dimension always increases by 1 according to the Riemann-Roch theorem. Thus we can construct a sequence $v_0, v_1, \dots$ of elements of O_F such that $\{v_0, v_1, \dots, v_{\ell(mP_{s+1})-1}\}$ is a $\mathbb{F}_b$ -basis of $\mathcal{L}(mP_{s+1})$. We fix a bijection $\phi : \mathbb{Z}_b \rightarrow \mathbb{F}_b$ with $\phi(0) = \bar{0}$. Then we define

$$f_n = \sum_{r=0}^{\infty} \bar{a}_r(n) v_r \in O_F \quad \text{with} \quad \bar{a}_r(n) = \phi(a_r(n)) \quad \text{for} \quad n = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n) b^r.$$

Note that the sum above is finite since for each $n \in \mathbb{N}$. We have $a_r(n) = 0$ for all sufficiently large r . By the Riemann-Roch theorem, we have

$$\{\tilde{f} \mid \tilde{f} \in \mathcal{L}((m+g-1)P_{s+1})\} = \{f_n \mid n \in [0, b^m]\} \quad \text{for} \quad m \geq g.$$

For each $i = 1, \dots, s$, let $\wp_i$ be the maximal ideal of O_F corresponding to P_i . Then the residue class field $F_{P_i} := O_F/\wp_i$ has order b^{e_i} (see [14, Proposition 3.2.9]). We fix a bijection $\sigma_{P_i} : F_{P_i} \rightarrow Z_{b^{e_i}}$. For each $i = 1, \dots, s$, we can obtain a local parameter $t_i \in O_F$ at $\wp_i$, by applying the Riemann-Roch theorem and choosing $t_i \in \mathcal{L}(kP_\infty - P_i) \setminus \mathcal{L}(kP_\infty - 2P_i)$ for a suitably large integer k . We have a local expansion of f_n at $\wp_i$ of the form

$$f_n = \sum_{j \geq 0} f_{n,j}^{(i)} t_i^j \quad \text{with all} \quad f_{n,j}^{(i)} \in F_{P_i}, \quad n = 0, 1, \dots$$

We define the map $\xi : O_F \rightarrow [0, 1]^s$ by

$$\xi(f_n) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{P_1}(f_{n,j}^{(1)})(b^{e_1})^{-j-1}, \dots, \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{P_s}(f_{n,j}^{(s)})(b^{e_s})^{-j-1} \right).$$

Now we define the sequence $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ of points in $[0, 1]^s$ by $\mathbf{x}_n = \xi(f_n)$ for $n = 0, 1, \dots$. From [12, Theorem 1], we get the following theorem :

Theorem F. *With the notation as above, we have that $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ is a (t, s) -sequence over $\mathbb{F}_b$ with $t = g + e_1 + \dots + e_s - s$.*

The construction of Levin [7] is similar, but more complicated than in [12]. However in [7], we can use arbitrary pairwise coprime divisors $D_1, \dots, D_s$ instead of places $P_1, \dots, P_s$.

In this paper, we introduce the Hellegalek-like generalisation (21) of the above construction:

Let $\mathbb{P}_F := \{P \mid P \text{ be a place of } F/\mathbb{F}_b\}$, $P_0, P_\infty \in \mathbb{P}_F$, $\deg(P_\infty) = 1$, $\deg(P_0) = e_0$, $P_0 \neq P_\infty$, $P_{i,j} \in \mathbb{P}_F$ for $1 \leq j, 1 \leq i \leq s$, $P_{i_1,j_1} \neq P_{i_2,j_2}$ for $i_1 \neq i_2$, $P_{i,j} \neq P_0$, $P_{i,j} \neq P_\infty$ for all i, j , $\dot{n}_{i,j} = \deg(P_{i,j})$, $n_{i,j} = \deg(\mathcal{P}_{i,j})$, $\mathcal{P}_{0,j} = P_0^j$,

$$\mathcal{P}_{i,0} = 1, \quad \mathcal{P}_{i,j} = \prod_{1 \leq k \leq j} P_{i,k}, \quad n_{i,j} = \deg(\mathcal{P}_{i,j}) = n_{i,j-1} + \dot{n}_{i,j}, \quad n_{i,0} = 0. \quad (22)$$

Let $i \in [0, s]$. We will construct a basis $(w_j^{(i)})_{j \geq 0}$ of O_F in the following way. Let

$$\begin{aligned} L_{i,j} &= \mathcal{L}((n_{i,j} + 2g - 1)P_\infty) = \mathcal{L}(A_{i,j}), \quad A_{i,j} = (n_{i,j} + 2g - 1)P_\infty, \\ \mathfrak{L}_{i,j} &= \mathcal{L}((n_{i,j} + 2g - 1)P_\infty - \mathcal{P}_{i,j}) = \mathcal{L}(B_{i,j}), \quad B_{i,j} = (n_{i,j} + 2g - 1)P_\infty - \mathcal{P}_{i,j}, \\ \mathcal{L}_{i,j} &= \mathcal{L}((n_{i,j} + 2g - 1)P_\infty - \mathcal{P}_{i,j-1}), \quad \dot{B}_{i,j} = (n_{i,j} + 2g - 1)P_\infty - \mathcal{P}_{i,j-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Using the Riemann-Roch theorem, we obtain

$$\begin{aligned} \deg(A_{i,j}) &= n_{i,j} + 2g - 1, \quad \dim(L_{i,j}) = n_{i,j} + g, \quad \deg(B_{i,j}) = 2g - 1, \\ \dim(\mathfrak{L}_{i,j}) &= g, \quad \deg(\dot{B}_{i,j}) = \dot{n}_{i,j} + 2g - 1, \quad \dim(\mathcal{L}_{i,j}) = \dot{n}_{i,j} + g. \end{aligned} \quad (24)$$

Let $(u_{j,\mu}^{(i)})_{\mu=1}^g$ be a $\mathbb{F}_b$ linear basis of $\mathfrak{L}_{i,j}$. By (23) and (24), we get that the basis $(u_{j,\mu}^{(i)})_{\mu=1}^g$ can be extended to a basis $(v_{j,1}^{(i)}, \dots, v_{j,\dot{n}_{i,j}}^{(i)}, u_{j,1}^{(i)}, \dots, u_{j,g}^{(i)})$ of $\mathcal{L}_{i,j}$.

Bearing in mind that $(u_{j,\mu}^{(i)})_{\mu=1}^g$ is a $\mathbb{F}_b$ linear basis of $\mathfrak{L}_{i,j}$, we obtain that $v_{j,\mu}^{(i)} \notin \mathfrak{L}_{i,j}$ for $\mu \in [1, \dot{n}_{i,j}]$. So

$$v_{j,\mu}^{(i)} \in \mathbb{L}_{i,j} := \mathcal{L}_{i,j} \setminus \mathfrak{L}_{i,j} \quad \text{for } \mu \in [1, \dot{n}_{i,j}]. \quad (25)$$

Let

$$V_{i,j} := \{v_{k,\mu}^{(i)} \mid 1 \leq \mu \leq \dot{n}_{i,k}, 1 \leq k \leq j\} \cup \{u_{j,\mu}^{(i)} \mid \mu = 1, \dots, g\}. \quad (26)$$

We claim that vectors from $V_{i,j}$ are $\mathbb{F}_b$ linear independent. Suppose the opposite. Assume that there exists $b_{k,\mu}^{(i)} \in \mathbb{F}_b$ such that

$$\dot{u} + \ddot{u} = 0, \quad \text{where } \dot{u} = \sum_{k=1}^j w_k, \quad w_k = \sum_{\mu=1}^{\dot{n}_{i,k}} b_{k,\mu}^{(i)} v_{k,\mu}^{(i)}, \quad \ddot{u} = \sum_{\mu=1}^g b_{0,\mu}^{(i)} u_{j,\mu}^{(i)}. \quad (27)$$

Let $w_l \neq 0$ for some $l \in [1, j]$ and let $w_k = 0$ for all $k \in [1, l)$.

Using (23) - (25), we get

$$w_l \in \mathbb{L}_{i,l} = \mathcal{L}((n_{i,l} + 2g - 1)P_\infty - \mathcal{P}_{i,l-1}) \setminus \mathcal{L}((n_{i,l} + 2g - 1)P_\infty - \mathcal{P}_{i,l}).$$

Applying definition (13) of the Riemann-Roch space, we obtain

$$w_l \in \mathcal{L}((n_{i,j} + 2g - 1)P_\infty - \mathcal{P}_{i,l-1}) \setminus \mathcal{L}((n_{i,j} + 2g - 1)P_\infty - \mathcal{P}_{i,l}).$$

But from (27), (22) and (25), we have

$$-w_l = \dot{u} + \ddot{u} - \sum_{k=1}^l w_k = \sum_{k=l+1}^j w_k + \ddot{u} \in \mathcal{L}((n_{i,j} + 2g - 1)P_\infty - \mathcal{P}_{i,l}).$$

We have a contradiction. Hence vectors from $V_{i,j}$ are $\mathbb{F}_b$ linear independent.

By (23) - (26), we have $V_{i,j} \subset L_{i,j}$ and

$$\text{card}(V_{i,j}) = \sum_{k=1}^j \dot{n}_{i,k} + g = n_{i,j} + g = \dim(L_{i,j}).$$

Hence vectors from $V_{i,j}$ are the $\mathbb{F}_b$ linear basis of $L_{i,j}$.

Now we will find a basis of $L_{i,j-2g}$. We claim that $u_{j,\mu}^{(i)} \notin L_{i,j-2g}$ for $\mu \in [1, g]$. Suppose the opposite. By (23) and (24), we get

$$\begin{aligned} u_{j,\mu}^{(i)} &\in L_{i,j-2g} \cap \mathfrak{L}_{i,j} = \mathcal{L}((n_{i,j-2g} + 2g - 1)P_\infty) \cap \mathcal{L}((n_{i,j} + 2g - 1)P_\infty - \mathcal{P}_{i,j}) \\ &= \mathcal{L}((n_{i,j-2g} + 2g - 1)P_\infty - \mathcal{P}_{i,j}) = \mathcal{L}(T). \end{aligned}$$

By (22), $\deg(T) = n_{i,j-2g} + 2g - 1 - n_{i,j} < 0$. Hence $\mathcal{L}(T) = \{0\}$. We have a contradiction. Bearing in mind that $V_{i,j}$ is $\mathbb{F}_b$ linear basis of $L_{i,j}$, we obtain that a basis of $L_{i,j-2g}$ can be chosen from the

set $(v_{1,1}^{(i)}, \dots, v_{1,\dot{n}_{i,1}}^{(i)}, \dots, v_{j,1}^{(i)}, \dots, v_{j,\dot{n}_{i,j}}^{(i)})$
 $= V_{i,j} \setminus \{u_{j,\mu}^{(i)} \mid \mu = 1, \dots, g\}$. From (23) - (25), we get

$$v_{k,\mu}^{(i)} \in \mathcal{L}_{i,k} \subseteq L_{i,j-2g} \quad \text{for } \mu \in [1, \dot{n}_{i,k}] \text{ and } 1 \leq k \leq j-2g.$$

Hence vectors

$$v_{1,1}^{(i)}, \dots, v_{1,\dot{n}_{i,1}}^{(i)}, \dots, v_{j-2g,1}^{(i)}, \dots, v_{j-2g,\dot{n}_{i,j-2g}}^{(i)}, \tilde{v}_{j,1}^{(i)}, \dots, \tilde{v}_{j,g}^{(i)} \quad \text{with } \tilde{v}_{j,\mu}^{(i)} = v_{k,\rho}^{(i)},$$

$1 \leq \mu \leq g$, for some $\rho \in [1, \dot{n}_{i,k}]$ and $k \in (j-2g, j]$ are an $\mathbb{F}_b$ linear basis of $L_{i,j-2g}$ ($0 \leq i \leq s$).

Therefore $(v_{k,\mu}^{(i)})_{1 \leq \mu \leq \dot{n}_{i,k}, k \geq 1}$ is the $\mathbb{F}_b$ linear basis of $O_F = \cup_{j \geq 1} L_{i,j}$. We put in order the basis $(v_{k,\mu}^{(i)})_{1 \leq \mu \leq \dot{n}_{i,k}, k \geq 1}$ as follows

$$v_{n_{i,j-1}+\mu-1}^{(i)} = v_{j,\mu}^{(i)}, \quad \text{with } n_{i,0} = 0, 1 \leq \mu \leq \dot{n}_{i,j}, 0 \leq i \leq s. \quad (28)$$

So we proved the following lemma :

Lemma 1. *For all $i \in [0, s]$ there exists a sequence $(w_j^{(i)})_{j \geq 0}$ such that $(w_j^{(i)})_{j \geq 0}$ is a $\mathbb{F}_b$ linear basis of O_F and for all $j \geq 1$ a $\mathbb{F}_b$ linear basis of $L_{i,j}$ can be chosen from the set $\{w_0^{(i)}, \dots, w_{n_{i,j+2g}-1}^{(i)}\}$.*

Bearing in mind that $(w_j^{(i)})_{j \geq 0}$ is the $\mathbb{F}_b$ linear basis of O_F , we obtain for all $i \in [1, s]$ and $r \geq 0$ that there exists $c_{j,r}^{(i)} \in \mathbb{F}_b$ and integers $l_r^{(i)}$ such that

$$w_r^{(0)} = \sum_{j=1}^{l_r^{(i)}} c_{j,r}^{(i)} w_{j-1}^{(i)}, \quad c_{j,j-1}^{(0)} = 1, \text{ and } c_{j,r}^{(0)} = 0 \text{ for } j-1 \neq r. \quad (29)$$

Let $n = \sum_{r \geq 0} a_r(n) b^r$. We fix a bijection $\phi : \mathbb{Z}_b \rightarrow \mathbb{F}_b$ with $\phi(0) = \bar{0}$. Then we define

$$f_n = \sum_{r=0}^{\infty} \bar{a}_r(n) w_r^{(0)} \in O_F \quad \text{with } \bar{a}_r(n) = \phi(a_r(n)) \text{ for } n = 0, 1, \dots. \quad (30)$$

By (29), we have for $i \in [0, s]$

$$f_n = \sum_{r=0}^{\infty} \bar{a}_r(n) \sum_{j=1}^{l_{i,r}} c_{j,r}^{(i)} w_{j-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^{\infty} w_{j-1}^{(i)} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{a}_r(n) c_{j,r}^{(i)} = \sum_{j=1}^{\infty} y_{n,j}^{(i)} w_{j-1}^{(i)} \quad (31)$$

where $y_{n,j}^{(i)} = \sum_{r \geq 0} \bar{a}_r(n) c_{j,r}^{(i)} \in \mathbb{F}_b$, $y_{n,j}^{(0)} = \bar{a}_{j-1}(n)$.

We map the vectors

$$y_n^{(i)} = (y_{n,1}^{(i)}, y_{n,2}^{(i)}, \dots) \quad (32)$$

to the real numbers

$$x_n^{(i)} = \sum_{j \geq 1} \phi^{-1}(y_{n,j}^{(i)}) / b^j$$

to obtain the point

$$\mathbf{x}_n := (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(s)}) \in [0, 1)^s. \quad (33)$$

Theorem 3. *With the notations as above, the set $[0, \gamma_1) \times \dots \times [0, \gamma_s)$ is of bounded remainder with respect to $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ if and only if (2) is true.*

Remark. It is easy to verify that Hellekalek's sequence and our generalized Halton-type sequence $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ are l.d.s if

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} m^{-s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^m \log(p_{i,j}) < \infty \quad \text{and} \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} m^{-s} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^m \deg(P_{i,j}) < \infty.$$

3.4 Niederreiter-Xing sequence (see [3, Section 8.3]). Let $F/\mathbb{F}_b$ be an algebraic function field with full constant field $\mathbb{F}_b$ and genus g . Assume that $F/\mathbb{F}_b$ has at least $s+1$ rational places. Let $P_1, \dots, P_{s+1}$ be $s+1$ distinct rational places of F . Let $G_m = m(P_1 + \dots + P_s) - (m-g+1)P_{s+1}$, and let t_i be a local parameter at P_i , $1 \leq i \leq s+1$. For any $f \in \mathcal{L}(G_m)$ we have $\nu_{P_i}(f) \geq -m$, and so the local expansion of f at P_i has the form

$$f = \sum_{j=-m}^{\infty} f_{i,j} t_i^j, \quad \text{with} \quad f_{i,j} \in \mathbb{F}_b, \quad j \geq -m, \quad 1 \leq i \leq s.$$

For $1 \leq i \leq s$, we define the $\mathbb{F}_b$ -linear map $\psi_{m,i} : \mathcal{L}(G_m) \rightarrow \mathbb{F}_b^m$ by

$$\psi_{m,i}(f) = (f_{i,-1}, \dots, f_{i,-m}) \in \mathbb{F}_b^m, \quad \text{for} \quad f \in \mathcal{L}(G_m).$$

Let

$$\mathcal{M}_m = \mathcal{M}_m(P_1, \dots, P_s; G_m) := \{(\psi_{m,1}(f), \dots, \psi_{m,s}(f)) \in \mathbb{F}_b^{ms} \mid f \in \mathcal{L}(G_m)\}.$$

Let $C^{(1)}, \dots, C^{(s)} \in \mathbb{F}_b^{\infty \times \infty}$ be the generating matrices of a digital sequence $\mathbf{x}_n(C)_{n \geq 0}$, and let $(\mathcal{C}_m)_{m \geq 1}$ be the associated sequence of row spaces of overall generating matrices $[C]_m$, $m = 1, 2, \dots$ (see (7)).

Theorem G. (see [3, Theorem 7.26 and Theorem 8.9]) *There exist matrices $C^{(1)}, \dots, C^{(s)}$ such that $(\mathbf{x}_n(C))_{n \geq 0}$ is a digital (t, s) -sequence with $t = g$ and $\mathcal{C}_m^\perp = \mathcal{M}_m(P_1, \dots, P_s; G_m)$ for $m \geq g+1$, $s \geq 2$.*

In [8, p.24], we proposed the following way to get $\mathbf{x}_n(C)_{n \geq 0}$:

We consider the H -differential dt_{s+1} . Let ω be the corresponding Weil differential, $\text{div}(\omega)$ the divisor of ω , and $W := \text{div}(dt_{s+1}) = \text{div}(\omega)$. By (9)-(11), we have $\deg(W) = 2g - 2$. We consider a sequence $\dot{v}_0, \dot{v}_1, \dots$ of elements of F such that $\{\dot{v}_0, \dot{v}_1, \dots, \dot{v}_{\ell((m-g+1)P_{s+1}+W)-1}\}$ is an $\mathbb{F}_b$ linear basis of $L_m := \mathcal{L}((m-g+1)P_{s+1} + W)$ and

$$\dot{v}_r \in L_{r+1} \setminus L_r, \quad \nu_{P_{s+1}}(\dot{v}_r) = -r + g - 2, \quad r \geq g, \quad \text{and} \quad \dot{v}_{r,r+2-g} = 1, \quad \dot{v}_{r,j} = 0 \quad (34)$$

for $2 \leq j < r + 2 - g$, where

$$\dot{v}_r := \sum_{j \leq r-g+2} \dot{v}_{r,j} t_{s+1}^{-j} \quad \text{for} \quad \dot{v}_{r,j} \in \mathbb{F}_b \quad \text{and} \quad r \geq g.$$

According to Lemma B, we have that there exists $\tau_i \in F$ ($1 \leq i \leq s$) such that $dt_{s+1} = \tau_i dt_i$, for $1 \leq i \leq s$.

Bearing in mind (10), (12) and (34), we get

$$\nu_{P_i}(\dot{v}_j \tau_i) = \nu_{P_i}(\dot{v}_j \tau_i dt_i) = \nu_{P_i}(\dot{v}_j dt_{s+1}) \geq \nu_{P_i}(\text{div}(dt_{s+1}) - W) = 0, \quad j \geq 0.$$

We consider the following local expansions

$$\dot{v}_r \tau_i := \sum_{j=1}^{\infty} \dot{c}_{j,r}^{(i)} t_i^{j-1}, \quad \text{where all} \quad \dot{c}_{j,r}^{(i)} \in \mathbb{F}_b, \quad 1 \leq i \leq s, \quad j \geq 1. \quad (35)$$

Now let $\dot{C}^{(i)} = (\dot{c}_{j,r}^{(i)})_{j-1, r \geq 0}$, $1 \leq i \leq s$, and let $(\dot{C}_m^\perp)_{m \geq 1}$ be the associated sequence of row spaces of overall generating matrices $[\dot{C}]_m$, $m = 1, 2, \dots$ (see (7)).

Theorem H (see [8, Theorem 5]). *With the above notations, $(\mathbf{x}_n(\dot{C}))_{n \geq 0}$ is a digital d -admissible (t, s) sequence with $d = g + s$, $t = g$, and $\dot{C}_m^\perp = \mathcal{M}_m(P_1, \dots, P_s; G_m)$ for all $m \geq g + 1$.*

We note that condition (34) is required in the proof of Theorem H only in order to get the discrepancy lower bound. While the equality $\dot{C}_m^\perp = \mathcal{M}_m(P_1, \dots, P_s; G_m)$ is true for arbitrary sequence $\dot{v}_0, \dot{v}_1, \dots$ of elements of $\mathbb{F}_b$ such that for all $m \geq 1$

$$\{\dot{v}_0, \dot{v}_1, \dots, \dot{v}_{\ell((m-g+1)P_{s+1}+W)-1}\} \text{ is a } \mathbb{F}_b \text{ linear basis of } L_m. \quad (36)$$

In order to obtain the bounded remainder property, in this paper, we will construct from $(\dot{v}_n)_{n \geq 0}$ a special basis $(\ddot{v}_n)_{n \geq 0}$ as follows:

Let $P_0 \in \mathbb{P}_F$, $P_0 \neq P_i$ ($i = 1, \dots, s + 1$), and let t_0 be a local parameter of P_0 . For simplicity, we suppose that $\deg(P_0) = 1$. Let

$$\begin{aligned} L_m &= \mathcal{L}((m - g + 1)P_{s+1} + W), \quad \mathcal{L}_m = \mathcal{L}((m + 2)P_{s+1} + W - mP_0), \\ \mathfrak{L}_m &= \mathcal{L}((m + 2)P_{s+1} + W - (m + 1)P_0). \end{aligned} \quad (37)$$

It is easy to verify that

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{L}_m) &= 2g, \quad \dim(\mathcal{L}_m) = g + 1, \quad \deg(\mathfrak{L}_m) = 2g - 1, \quad \dim(\mathfrak{L}_m) = g, \\ \text{for } m \geq 0, \quad \deg(L_m) &= m + g - 1, \quad \dim(L_m) = m, \quad \text{for } m \geq g. \end{aligned} \quad (38)$$

Using the Riemann-Roch theorem, we have that there exists

$$w_m \in \mathcal{L}_m \setminus \mathfrak{L}_m, \quad \text{and} \quad w_m \in L_{m+g+1}, \quad m = 0, 1, \dots. \quad (39)$$

According to Lemma B, we have that there exists $\tau_0 \in F$, such that $dt_{s+1} = \tau_0 dt_0$.

Let $u \in L_m = \mathcal{L}((m - g + 1)P_{s+1} + W)$ with $m \geq 0$. Bearing in mind (10), (12), (37)-(39) and the Riemann-Roch theorem, we get

$$\nu_{P_0}(u\tau_0) = \nu_{P_0}(u\tau_0 dt_0) = \nu_{P_0}(u dt_{s+1}) = \nu_{P_0}(\operatorname{div}(u) + W) \geq 0 \quad (40)$$

and

$$\nu_{P_0}(w_m \tau_0) = \nu_{P_0}(\operatorname{div}(w_m) + W) = m \quad \text{for } m = 0, 1, \dots. \quad (41)$$

We consider the sequence $(\dot{v}_j)_{j \geq 0}$ (34). By (36), $(\dot{v}_j)_{j=0}^{m-1}$ is an $\mathbb{F}_b$ linear basis of L_m . Let

$$V_j = \{\dot{v}_j + \sum_{k=0}^{j-1} b_k \dot{v}_k \mid b_k \in \mathbb{F}_b, k \in [0, j)\}, \quad \alpha(j) = \max_{v \in V_j} \nu_{P_0}(v\tau_0). \quad (42)$$

It is easy to verify that $\alpha(j) \neq \alpha(j)$ for $i \neq j$. We construct a sequence $(\ddot{v}_j)_{j \geq 0}$ as follows :

$$\ddot{v}_0 = \dot{v}_0, \quad \ddot{v}_j \in \{v \in V_j \mid \nu_{P_0}(v\tau_0) = \alpha(j)\}, \quad j = 1, 2, \dots. \quad (43)$$

It is easy to see that $(\ddot{v}_j)_{j \geq 0}$ satisfy the condition (36). Bearing in mind (40)-(42) and that $\ddot{v}_j \in L_m$ for $j < m$, we get

$$\nu_{P_0}(\ddot{v}_j \tau_0) \neq \nu_{P_0}(\ddot{v}_k \tau_0) \text{ for } j \neq k, \text{ and } \nu_{P_0}(\ddot{v}_j \tau_0) = \alpha(j) \geq 0, \quad j \geq 0. \quad (44)$$

Hence, for all $f \in L_m$, we have

$$\nu_{P_0}(f\tau_0) \in \{\alpha(0), \alpha(1), \dots\} =: \dot{H}.$$

Taking into account (41) and (44), we obtain

$$\dot{H} = \{n \mid n \geq 0\} = \mathbb{N}_0. \quad (45)$$

Suppose that $\alpha(j) > j + g$. By (36) - (38), $\ddot{v}_j \in L_{j+1} = \mathcal{L}((j - g + 2)P_{s+1} + W)$. Hence $\ddot{v}_j \in \mathcal{L}(X)$, with $X = (j - g + 2)P_{s+1} + W - (j + g + 1)P_0$.

Bearing in mind that $\deg(P_0) = \deg(P_{s+1}) = 1$ and $\deg(W) = 2g - 2$, we get $\deg(X) = -1$. Therefore $\mathcal{L}(X) = \{0\}$ and we have a contradiction. Hence

$$\alpha(j) \leq j + g. \quad (46)$$

By (45), we have that for every integer $k \geq 0$ there exists $r \geq 0$ with $\alpha(r) = k$. Therefore the map $\alpha : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ is an isomorphism. Hence there exist integers $\beta(k) \geq 0$ such that

$$\beta(k) = \alpha^{-1}(k), \alpha(\beta(k)) = k \text{ and } \beta(\alpha(k)) = k \text{ for } k = 0, 1, \dots. \quad (47)$$

From (46), we get for $j = \beta(k)$

$$k = \alpha(\beta(k)) = \alpha(j) \leq j + g = \beta(k) + g. \quad (48)$$

Let

$$B_j = \{r \geq 0 \mid \alpha(r) < j\}. \quad (49)$$

Taking $r = \beta(k)$, we get $\alpha(r) = k$ and

$$B_j = \{\beta(0), \beta(1), \dots, \beta(j - 1)\} \text{ for } j \geq 1. \quad (50)$$

Suppose $j \notin B_{j+g+1}$ for some j , then $j = \beta(j + g + l)$ for some $l \geq 1$. Using (48) with $k = j + g + l$, we obtain

$$j + l = (j + g + l) - g \leq \beta(j + g + l) = j.$$

We have a contradiction. Hence

$$j \in B_{j+g+1} \text{ for all } j \geq 0.$$

We consider the local expansion (35), applied to $i = 0$:

$$\dot{v}_r \tau_0 := \sum_{j=1}^{\infty} \dot{c}_{j,r}^{(0)} t_0^{j-1}, \text{ where } \dot{c}_{j,r}^{(0)} \in \mathbb{F}_b, j \geq 1, \dot{C}^{(0)} = (\dot{c}_{j,r}^{(0)})_{j-1, r \geq 0}. \quad (51)$$

Let $(x_n^{(0)}(\dot{C}^{(0)}))_{n \geq 0}$ be the digital sequence generated by the matrix $\dot{C}^{(0)}$.

Now we consider the matrix $\tilde{C}^{(i)} = (\dot{c}_{j,r}^{(i)})_{j-1, r \geq 0}$, obtained from equation (35) and (51), where we take $\dot{v}_r$ instead of $\dot{v}_r$ ($i = 0, 1, \dots, s$). Using Theorem H, we obtain that $(x_n^{(0)}(\tilde{C}^{(0)}), \mathbf{x}_n(\tilde{C}))_{n \geq 0}$ is the digital $(t, s + 1)$ -sequence with $t = g$. Therefore we have proved the following lemma :

Lemma 2. *There exists a sequence $(\ddot{v}_j)_{j \geq 0}$ such that $(x_n^{(0)}(\tilde{C}^{(0)}), \mathbf{x}_n(\tilde{C}))_{n \geq 0}$ is the digital $(t, s + 1)$ -sequence with $t = g$ and $\{0, 1, \dots, m - 1\} \subset B_{m+g}$.*

In §4.4, we will prove

Theorem 4. *With the notations as above, the set $[0, \gamma_1) \times \dots \times [0, \gamma_s)$ is of bounded remainder with respect to $(\mathbf{x}_n(\tilde{C}))_{n \geq 0}$ if and only if (2) is true.*

4. Proof

Consider the following condition

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} (m - \mathbf{T}(m)) = \infty. \quad (52)$$

We will prove (52) for the generalized Halton sequence in §4.3. For other considered sequences, assertion (52) follows from Theorem D, Theorem E and Theorem H.

The sufficient part of all considered theorems follows from Definition 2 and (52). Therefore we need only consider the case of necessity.

4.1 Generalized Niederreiter sequence. Proof of Theorem 1.

From Theorem D, we have that $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ is the uniformly distributed digital weakly admissible (t, s) -sequence in base b . By Theorem B, in order to prove Theorem 1, we need only to check condition (8). By (8, p.26, ref 4.6), we get

$$y_{n,j}^{(i)} = \text{Res}_{P_\infty, x^{-1}} \left(\frac{y_{i,l,k(i,j)}(x)}{p_i(x)^l} \sum_{r=0}^{m-1} \bar{a}_r(n) x^{r+2} \right) = \text{Res}_{P_\infty, x^{-1}} \left(\frac{y_{i,l,k(i,j)}(x)}{p_i(x)^l} n(x) \right) \quad (53)$$

$$\text{with } l = Q(i, j) + 1, \quad n(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \bar{a}_j(n) x^{j+2} \text{ and } \bar{a}_j(n) = \text{Res}_{P_\infty, x^{-1}} (n(x) x^{-j-1}).$$

We take $\dot{y}_{i,j,k}(x) = x^m y_{i,j,k}(x)$ instead of $y_{i,j,k}(x)$. Now using Theorem D, we obtain from (53), (4) - (6) that $(\dot{\mathbf{x}}_n)_{0 \leq n < b^{\dot{m}}}$ is a $(t, \dot{m}, s)$ net for $\dot{m} = s\tau_m + t$ with $\dot{x}_{n,j}^{(i)} = \phi^{-1}(\dot{y}_{n,j}^{(i)}) = x_{b^{\dot{m}}n,j}^{(i)}$. Bearing in mind that $\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{x}_{b^{\dot{m}}n}$, we obtain (8). Hence Theorem 1 is proved. ■

4.2 Xing-Niederreiter sequence. Proof of Theorem 2.

By Theorem B and Theorem E, in order to prove Theorem 2, we need only to check condition (8).

From (3) - (6), we get that in order to obtain (8), it suffices to prove that

$$\begin{aligned} \#\{n \in [0, b^M] \mid y_{n,j}^{(i)} = u_j^{(i)}, \quad j \in [1, \tau_m] \text{ for } i \in [1, s], \text{ and } a_{j-1}(n) = u_j^{(0)} \\ j \in [1, m]\} > 0, \quad \text{with } M = s\tau_m + (m + 2g)(2g + 1)e_0 + m_0, \end{aligned} \quad (54)$$

$m_0 = 2g + 2 + e_1 + \dots + e_s$, for all $u_j^{(i)} \in \mathbb{F}_b$.

Let

$$\delta(\mathfrak{T}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \mathfrak{T} \text{ is true,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let $k_{j+1}^{(0)} = z_{h(j)} = z^{h(j)}$ for $j \in H_1$ with $H_1 = \mathbb{N}_0 \setminus H_2 = \{h(0), h(1), \dots\}$, $H_2 = \{n_0, n_1, \dots, n_g\}$. From (17), we have

$$a_{j,r}^{(0)} = \delta(j - 1 = r \in H_1), \quad j \geq 1.$$

Let $c_{j,r}^{(0)} := a_{j,h(r)}^{(0)}$. By (4), (5) and (20), we get

$$\begin{aligned} c_{j,r}^{(0)} = \delta(j - 1 = h(r)), \quad y_{n,j}^{(0)} = \sum_{r \geq 0} \bar{a}_r(n) c_{j,r}^{(0)} = \bar{a}_{h(j-1)}(n), \\ x_n^{(0)} = \sum_{j \geq 1} a_{h(j-1)}(n) / b^j \quad \text{and} \quad k_j^{(0)} = z^{h(j-1)} \in \mathcal{L}(h(j-1)(2g+1)P_0), \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (55)$$

So, we obtain a digital $s + 1$ -dimensional sequence $(x_n^{(0)}, \mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$.

Let $n = \sum_{r=0}^{M-1} a_r(n)b^r$ and let

$$\dot{n} = \sum_{r \in H_1} a_r(n)b^r, \quad \ddot{n} = \sum_{r \in H_2} a_r(n)b^r, \quad \dot{U} = \{\dot{n} | n \in [0, b^M)\}, \quad \ddot{U} = \{\ddot{n} | n \in [0, b^M)\}.$$

By (4), (18) and (55), we get

$$\begin{aligned} y_{n,j}^{(i)} &= \sum_{r \geq 0} \bar{a}_r(n) c_{j,r}^{(i)} = \sum_{r \in H_1} \bar{a}_r(n) c_{j,r}^{(i)} + \sum_{r \in H_2} \bar{a}_r(n) c_{j,r}^{(i)} = y_{\dot{n},j}^{(i)} + y_{\ddot{n},j}^{(i)}, \\ i \in [1, s], \quad y_{n,j}^{(0)} &= y_{\dot{n},j}^{(0)} = \bar{a}_{h(j-1)}(n), \quad y_{\ddot{n},j}^{(0)} = 0, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

We fix $\tilde{n} \in \ddot{U}$. Let

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{u}, \tilde{n}} &= \{n \in [0, b^M) \mid y_{n,j}^{(i)} = u_j^{(i)}, \quad j \in [1, \tau_m], \quad i \in [1, s], \\ y_{n,j}^{(0)} &= u_j^{(0)}, \quad j \in [1, m], \quad \ddot{n} = \tilde{n}\}. \end{aligned} \quad (56)$$

It is easy to verify that statement (54) follows from the next assertion

$$\#A_{\mathbf{u}, \tilde{n}} > 0 \quad \forall u_j^{(i)} \in \mathbb{F}_b, \quad \tilde{n} \in \ddot{U}. \quad (57)$$

Taking into account that $y_{n,j}^{(i)} = y_{\dot{n},j}^{(i)} + y_{\ddot{n},j}^{(i)}$, we get

$$A_{\mathbf{u}, \tilde{n}} = \{\dot{n} \in \dot{U} \mid y_{\dot{n},j}^{(i)} = \dot{u}_j^{(i)}, \quad j \in [1, \tau_m], \quad i \in [1, s], \quad y_{\ddot{n},j}^{(0)} = u_j^{(0)}, \quad j \in [1, m]\},$$

where $\dot{u}_j^{(i)} = \dot{u}_j^{(i)} - y_{\ddot{n},j}^{(i)}$.

According to (4), (18) and (55), in order to prove (57), it suffices to show that the vectors

$$\pi_M(\mathbf{c}_j^{(i)}) = (c_{j,0}^{(i)}, \dots, c_{j,M-1}^{(i)}) \in F_b^M, \quad \text{with } 1 \leq j \leq d_i, \quad 0 \leq i \leq s, \quad (58)$$

$d_i = \tau_m$, $1 \leq i \leq s$ and $d_0 = m$, are linearly independent over $\mathbb{F}_b$.

To prove this statement, we closely follow [3, p.282]. Suppose that we have

$$\sum_{j=1}^m f_j^{(0)} \pi_M(\mathbf{c}_j^{(0)}) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tau_m} f_j^{(i)} \pi_M(\mathbf{c}_j^{(i)}) = \mathbf{0} \in F_b^M$$

for some $f_j^{(i)} \in \mathbb{F}_b$ with $\sum_{j=1}^m |\phi^{-1}(f_j^{(0)})| + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tau_m} |\phi^{-1}(f_j^{(i)})| > 0$.

We put $f_r^{(0)} = 0$ for $r > m$. Hence

$$\sum_{j=1}^m f_j^{(0)} c_{j,r}^{(0)} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tau_m} f_j^{(i)} c_{j,r}^{(i)} = 0 \quad \text{for } r \in [0, M).$$

By (18) and (55), we obtain $c_{j,r}^{(i)} = a_{j,h(r)}^{(i)}$ for $1 \leq i \leq s$ and $c_{j,r}^{(0)} = \delta(j-1) = h(r)$. Therefore

$$0 = \sum_{j=1}^m f_j^{(0)} \delta(j-1 = h(r)) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tau_m} f_j^{(i)} a_{j,h(r)}^{(i)} = f_{h(r)+1}^{(0)} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tau_m} f_j^{(i)} a_{j,h(r)}^{(i)} \quad (59)$$

for $r \in [0, M)$.

Now consider the element $\alpha \in \mathbb{F}_b$ given by $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, where

$$\alpha_1 = \sum_{r=0}^{m-1} f_{h(r)+1}^{(0)} z_{h(r)}, \quad \alpha_2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tau_m} f_j^{(i)} k_j^{(i)} - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tau_m} f_j^{(i)} \sum_{u=0}^g a_{j,n_u}^{(i)} w_u. \quad (60)$$

Using (17), we get

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tau_m} f_j^{(i)} \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_{j,r}^{(i)} z_r - \sum_{u=0}^g a_{j,n_u}^{(i)} z_{n_u} \right) = \sum_{r \in H_1} \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tau_m} f_j^{(i)} a_{j,r}^{(i)} \right) z_r.$$

From (18), (59) and (60), we obtain

$$\alpha = \sum_{r \geq 0} \left(f_{h(r)+1}^{(0)} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tau_m} f_j^{(i)} a_{j,h(r)}^{(i)} \right) z_{h(r)} = \sum_{r \geq M} \left(f_{h(r)+1}^{(0)} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\tau_m} f_j^{(i)} a_{j,h(r)}^{(i)} \right) z_{h(r)}.$$

Hence

$$\nu_{P_\infty}(\alpha) \geq M. \quad (61)$$

Furthermore, (15), (16), (20), (55) and (60) yield

$$\alpha_1 \in \mathcal{L}((m+2g)(2g+1)P_0), \quad \alpha_2 \in \mathcal{L}\left(G + \sum_{i=1}^s ([\tau_m/e_i] + 1)P_i\right). \quad (62)$$

Combining (61) and (62), we obtain

$$\alpha \in \mathcal{L}\left(G + \sum_{i=1}^s ([\tau_m/e_i] + 1)P_i + (m+2g)(2g+1)P_0 - MP_\infty\right).$$

But from (54), we have

$$\begin{aligned} & \deg\left(G + \sum_{i=1}^s ([\tau_m/e_i] + 1)P_i + (m+2g)(2g+1)P_0 - MP_\infty\right) \\ &= 2g + \sum_{i=1}^s ([\tau_m/e_i] + 1)e_i + (m+2g)(2g+1)e_0 - M \\ &\leq 2g + s\tau_m + e_1 + \cdots + e_s + (m+2g)(2g+1)e_0 - M < 0. \end{aligned}$$

Hence

$$\mathcal{L}\left(G + \sum_{i=1}^s ([\tau_m/e_i] + 1)P_i + (m+2g)(2g+1)P_0 - MP_\infty\right) = \{0\}$$

by (14) and therefore we have $\alpha = 0$.

By (15), we have $\nu_{P_0}(k_j^{(i)}) \geq 0$ and $\nu_{P_0}(w_u) \geq 0$ for all i, j, u . According to (60), we get $\nu_{P_0}(\alpha_2) \geq 0$. Suppose that $\alpha_1 \neq 0$. Taking into account that $z_0 = z_{n_0} = w_0 \neq z_{h(r)}$ for $r \geq 0$, we obtain from (60) that $\nu_{P_0}(\alpha_1) < 0$. We have a contradiction. Hence $\alpha_1 = 0$ and $\alpha_2 = 0$. From Lemma C, we conclude that $f_j^{(i)} = 0$ for all i, j . Hence the system (58) is linearly independent over $\mathbb{F}_b$.

Thus (54) is true and $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ satisfies the condition (8). By Theorem E, $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ is the d -admissible uniformly distributed digital (t, s) -sequence in base b . Applying Theorem B, we get the assertion of Theorem 2. ■

4.3 Generalized Halton-type sequence. Proof of Theorem 3.

Lemma 3. *The sequence $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ is uniformly distributed in $[0, 1]^s$.*

Proof. By Lemma A, in order to prove Lemma 3, it suffices to show that $m - T(m) \rightarrow \infty$ for $m \rightarrow \infty$. Let $R_k = \max_{1 \leq i \leq s} n_{i,k}$, $k = 1, 2, \dots$. We define $j_{i,k}$ from the following condition $n_{i,j_{i,k}} \geq R_k > n_{i,j_{i,k}-1}$. Let $\tilde{R}_k = \sum_{i=1}^s n_{i,j_{i,k}}$.

We consider the definition of (t, m, s) net. Suppose that for all

$$E = \prod_{i=1}^s [a_i b^{-d_i}, (a_i + 1) b^{-d_i}), \text{ with } a_i = \sum_{j=1}^{d_i} a_{i,j} b^{j-1}, \quad a_{i,j} \in \mathbb{Z}_b, \quad d_i \geq 0,$$

$1 \leq i \leq s$, $d_1 + \dots + d_s = R_k$, we have

$$\begin{aligned} \#\{n \in [0, b^m) \mid x_n \in E\} &= \#\{n \in [0, b^m) \mid y_{n,j}^{(i)} = u_j^{(i)}, \quad j \in [1, d_i], i \in [1, s]\} \\ &= b^{m-R_k}, \quad \text{where } m \geq \tilde{R}_k + (3g+3)e_0, \quad u_j^{(i)} = \phi^{-1}(a_{i,j}) \in \mathbb{F}_b, \end{aligned} \quad (63)$$

$j \in [1, d_i]$, $i \in [1, s]$.

By Definition 2, we get that $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ is a (T, s) -sequence in base b with $m - R(k) \geq T(m)$ for $m \geq \tilde{R}_k + (3g+3)e_0$. Bearing in mind that $R(k) \rightarrow \infty$ for $k \rightarrow \infty$, we obtain the assertion of Lemma 4.

Taking into account that $d_i \leq R_k \leq n_{i,j_{i,k}}$ for $1 \leq i \leq s$, we get that in order to prove (63), it suffices to verify that

$$\#\{n \in [0, b^m) \mid y_{n,j}^{(i)} = u_j^{(i)}, \quad j \in [1, n_{i,j_{i,k}}], \quad i \in [1, s]\} = b^{m-\tilde{R}_k} \quad (64)$$

for all $u_j^{(i)} \in \mathbb{F}_b$, with $j \in [1, n_{i,j_{i,k}}]$, $i \in [1, s]$.

Let $\mathcal{M} = (m_0 e_0 + 2g - 1)P_\infty$ with $m_0 = \lfloor m/e_0 \rfloor - 2g - 1$.

By Lemma 1, we obtain that there exist sets H_1 and H_2 such that $H_1 \cup H_2 = \{0, 1, \dots, m-1\}$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $(w_r^{(0)})_{r \in H_1}$ is the $\mathbb{F}_b$ linear basis of $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ and $\#H_2 = m - m_0 e_0 - g =: g_1$, with $g_1 - e_0(2g+1) - g \in [0, e_0)$. Let $n = \sum_{r=0}^{m-1} a_r(n) b^r$ and let

$$\dot{n} = \sum_{r \in H_1} a_r(n) b^r, \quad \ddot{n} = \sum_{r \in H_2} a_r(n) b^r, \quad \dot{U} = \{\dot{n} \mid n \in [0, b^m)\}, \quad \ddot{U} = \{\ddot{n} \mid n \in [0, b^m)\}.$$

So

$$f_n = \sum_{r=0}^{m-1} \bar{a}_r(n) w_r^{(0)} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \iff n = \dot{n}, \quad \text{for } n \in [0, b^m).$$

We fix $\tilde{n} \in \ddot{U}$. Let

$$A_{\mathbf{u}, \tilde{n}} = \{n \in [0, b^m) \mid y_{n,j}^{(i)} = u_j^{(i)}, \quad j \in [1, n_{i,j_{i,k}}], \quad i \in [1, s], \quad \ddot{n} = \tilde{n}\}.$$

It is easy to see that statement (64) follows from the next assertion

$$\#A_{\mathbf{u}, \tilde{n}} = b^{m-\tilde{R}_k-g_1} \quad \forall u_j^{(i)} \in \mathbb{F}_b, \quad \tilde{n} \in \ddot{U}. \quad (65)$$

Taking into account that $y_{n,j}^{(i)} = y_{\dot{n},j}^{(i)} + y_{\ddot{n},j}^{(i)}$, we get

$$A_{\mathbf{u}, \tilde{n}} = \{\dot{n} \in \dot{U} \mid y_{\dot{n},j}^{(i)} = u_j^{(i)}, \quad j \in [1, n_{i,j_{i,k}}], \quad i \in [1, s]\},$$

where $\dot{u}_j^{(i)} = \dot{u}_j^{(i)} - y_{n,j}^{(i)}$. Let

$$\hat{\psi}(f_n) := (y_{n,1}^{(1)}, \dots, y_{n,n_{1,j_1,k}}^{(1)}, \dots, y_{n,1}^{(s)}, \dots, y_{n,n_{s,j_s,k}}^{(s)}) \in \mathbb{F}_b^{\tilde{R}_k}.$$

We consider the map $\check{\psi} : \mathcal{L}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{F}_b^{\tilde{R}_k}$ defined by

$$\check{\psi}(\dot{f}) := \hat{\psi}(f_n) \quad \text{where} \quad \mathcal{L}(\mathcal{M}) \ni \dot{f} = f_n \quad \text{with some } n \in \dot{U}.$$

Note that $\check{\psi}$ is a linear transformation between vector spaces over $\mathbb{F}_b$. It is clear that in order to prove (65), it suffices to verify that $\check{\psi}$ is surjective. To prove this, it is enough to show that

$$\dim(\mathcal{L}(\mathcal{M})/\ker(\check{\psi})) = \tilde{R}_k. \quad (66)$$

Using (23), (25) and (28), we get that $w_l^{(i)} \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_{i,j_{i,k}}}$ for $l \geq n_{i,j_{i,k}}$. By (23), (25), (28), and (31), we derive that $y_{n,j}^{(i)} = 0$ for all $j \in [1, n_{i,j_{i,k}}]$ if and only if $\dot{f} = f_n \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_{i,j_{i,k}}}$ for $i \in [1, s]$.

From the definition of $\check{\psi}$ it is clear that

$$\ker(\check{\psi}) = \mathcal{L}(H), \quad \text{with} \quad H = \mathcal{M} - \sum_{i=1}^s \mathcal{P}_{i,n_{i,j_{i,k}}}.$$

Using Riemann-Roch's theorem, we obtain that $\dim(\mathcal{M}) = m_0 e_0 + g = m - g_1$, where $\deg(\mathcal{M}) = m_0 e_0 + 2g - 1$ and

$$\deg(H) = m_0 e_0 + 2g - 1 - \sum_{i=1}^s n_{i,j_{i,k}} = m + g - 1 - g_1 - \tilde{R}_k.$$

Hence $\dim(\ker(\psi)) = m - \tilde{R}_k - g_1 \geq (3g+3)e_0 - g_1 \geq (3g+3)e_0 - (2g+2)e_0 - g \geq 1$, $\dim(\mathcal{M}) = m - g_1$ and (66) follows. So $\check{\psi}$ is indeed surjective. Therefore (65) and Lemma 3 are proved. ■

Lemma 4. *The sequence $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ satisfies condition (8).*

Proof. Let

$$M = ([M_1/e_0] + 3g + 1)e_0, \quad M_1 = \sum_{i=0}^s n_{i,j_{i,m}} \quad \text{where } n_{j_{i,m}} \geq \tau_m > n_{j_{i,m-1}} \quad (67)$$

for $i \in [1, s]$, $n_{0,j_{0,m}} = ([m/e_0] + 1)e_0$, $j_{0,m} = [m/e_0] + 1$.

Bearing in mind that $y_{n,j}^{(0)} = \bar{a}_{j-1}(n)$, ($j = 1, 2, \dots$), we get from (32) - (33), that in order to obtain (8), it suffices to prove that

$$\#\{n \in [0, b^M) \mid y_{n,j}^{(i)} = u_j^{(i)}, \quad j \in [1, n_{i,j_{i,m}}] \quad \text{for } i \in [0, s]\} > 0 \quad (68)$$

for all $u_j^{(i)} \in \mathbb{F}_b$. Let $\mathcal{M} = ([M_1/e_0] + 1)e_0 + 2g - 1P_\infty$. By (22), $\deg(P_\infty) = 1$. Hence $\deg(\mathcal{M}) = ([M_1/e_0] + 1)e_0 + 2g - 1$. Using Riemann-Roch's theorem, we obtain that

$$\dim(\mathcal{M}) = ([M_1/e_0] + 1)e_0 + g = M_1 + g_1 + g \quad \text{with} \quad g_1 := ([M_1/e_0] + 1)e_0 - M_1. \quad (69)$$

By Lemma 1, we get that an $\mathbb{F}_b$ linear basis of $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ can be chosen from the set $\{w_0^{(0)}, \dots, w_{M-1}^{(0)}\}$ with $M = ([M_1/e_0] + 3g + 1)e_0 = n_{0,[M_1/e_0]+3g+1}$.

Let $n = \sum_{r=0}^{M-1} a_r(n)b^r$ and let $f_n = \sum_{r=0}^{M-1} \bar{a}_r(n)w_r^{(0)}$. We get that for all $\dot{f} \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ there exists $n \in [0, b^M)$ such that $\dot{f} = f_n$.

From (31), we have

$$f_n = \sum_{j=1}^{\infty} y_{n,j}^{(i)} w_{j-1}^{(i)}, \quad 0 \leq i \leq s. \quad (70)$$

Let

$$\psi(f_n) := (y_{n,1}^{(0)}, \dots, y_{n,n_0,j_0,m}^{(0)}, \dots, y_{n,1}^{(s)}, \dots, y_{n,n_s,j_s,m}^{(s)}) \in \mathbb{F}_b^{M_1}. \quad (71)$$

Consider the map $\dot{\psi} : \mathcal{L}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{F}_b^{M_1}$ defined by

$$\dot{\psi}(\dot{f}) := \psi(f_n) \quad \text{where} \quad \dot{f} = f_n \quad \text{with some } n \in [0, b^M).$$

We see that in order to obtain (68), it suffices to verify that $\dot{\psi}$ is surjective.

To prove this, it suffices to show that

$$\dim(\mathcal{L}(\mathcal{M})/\ker(\dot{\psi})) = M_1. \quad (72)$$

Using (23), (25) and (28), we get that $w_k^{(i)} \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_{i,j_i,m}}$ for $k > n_{i,m}$. From (70), (23), (25) and (28), we derive that $y_{n,j}^{(i)} = 0$ for all $j \in [1, n_{i,j_i,m}]$ if and only if $f_n \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_{i,j_i,m}}$ for $i \in [0, s]$.

From the definition of $\dot{\psi}$ it is clear that

$$\ker(\dot{\psi}) = \mathcal{L}(H), \quad \text{with} \quad H = \mathcal{M} - \sum_{i=0}^s \mathcal{P}_{i,j_i,m}.$$

Using (67), (69), (22) and Riemann-Roch's theorem, we obtain that

$$\deg(H) = M_1 + g_1 + 2g - 1 - \sum_{i=0}^s n_{i,j_i,m} = g_1 + 2g - 1$$

and $\dim(\ker(\psi)) = g_1 + g$. By (69), $\dim(\mathcal{M}) = M_1 + g_1 + g$. Hence $\dim(\mathcal{L}(\mathcal{M})/\ker(\dot{\psi})) = M_1$. Therefore (72) is true. So ψ is indeed surjective and (68) follows. Therefore Lemma 4 is proved. ■

Lemma 5. *The sequence $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ is weakly admissible.*

Proof. Suppose that $x_n^{(i)} = x_k^{(i)}$ for some i, n, k . From (71) and (32)-(33), we get that $y_{n,j}^{(i)} = y_{k,j}^{(i)}$ for $j \geq 1$.

Using (70), we have

$$f_n = \sum_{j \geq 1} y_{n,j}^{(i)}(n) w_{j-1}^{(i)}.$$

Hence $f_n = f_k$. Taking into account that $(w_r^{(0)})_{r \geq 0}$ is an $\mathbb{F}_b$ linear basis of O_F , we obtain from (30), that $n = k$. By Definition 7, Lemma 5 is proved. ■

Applying Theorem B, we get the assertion of Theorem 3. ■

4.4 Niederreiter-Xing sequence. Proof of Theorem 4.

Similarly to the proof of Lemma 5, we get that $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ is weakly admissible. By Lemma 2, $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ is the digital uniformly distributed sequence.

According to (4), (5), (8) and Theorem B, in order to prove Theorem 4, it is enough to verify that

$$\#\{n \in [0, b^M) | y_{n,j}^{(i)} = u_j^{(i)}, j \in [1, \tau_m], i \in [1, s], a_j(n) = 0 \text{ for } j \in [0, m)\} > 0 \quad (73)$$

for all $u_j^{(i)} \in \mathbb{F}_b$, where $M = s\tau_m + m + 2g + 2$.

Bearing in mind that by Lemma 2 $(x_n^{(0)}, \mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ is a $(g, s + 1)$ sequence, we obtain

$$\#\{n \in [0, b^M) | y_{n,j}^{(i)} = u_j^{(i)}, j \in [1, \tau_m], i \in [1, s], y_{n,j}^{(0)} = 0, j \in [1, m + g + 2]\} > 0$$

for all $u_j^{(i)} \in \mathbb{F}_b$.

Therefore, in order to prove (73), it suffices to verify that

$$\text{if } y_{n,j}^{(0)} = 0 \text{ for } j \in [1, m + g + 2] \text{ then } a_j(n) = 0 \text{ for } j \in [0, m). \quad (74)$$

Now we will prove (74) :

From (35) and (43), we have $\ddot{v}_r \dot{\tau}_0 = \sum_{j \geq 1} \dot{c}_{j,r}^{(0)} t_0^{j-1}$ with $\nu_{P_0}(\ddot{v}_r \tau_0) = \alpha(r)$. Hence $\dot{c}_{j,r}^{(0)} = 0$ for $j \leq \alpha(r)$ and $\dot{c}_{j,r}^{(0)} \neq 0$ for $j = \alpha(r) + 1$.

Using (4), (47) and (49) we obtain $\dot{c}_{j,\beta(j-1)}^{(0)} \neq 0$ and

$$y_{n,j}^{(0)} = \sum_{r \geq 0} \bar{a}_r(n) \dot{c}_{j,r}^{(0)} = \sum_{\alpha(r) < j} \bar{a}_r(n) \dot{c}_{j,r}^{(0)} = \sum_{r \in B_j} \bar{a}_r(n) \dot{c}_{j,r}^{(0)}, \quad j \geq 1.$$

We apply induction and consider the case $j = 1$. By (50), we see that $\bar{a}_{\beta(0)}(n) = 0$ if $y_{n,1}^{(0)} = 0$. Suppose that $\bar{a}_{\beta(0)}(n) = \dots = \bar{a}_{\beta(l-1)}(n) = 0$ if $y_{n,1}^{(0)} = \dots = y_{n,l}^{(0)} = 0$ for some $l \geq 1$. Now let $y_{n,1}^{(0)} = \dots = y_{n,l}^{(0)} = y_{n,l+1}^{(0)} = 0$. We see

$$0 = y_{n,l+1}^{(0)} = \sum_{r \in B_{l+1}} \bar{a}_r(n) \dot{c}_{l+1,r}^{(0)} = \sum_{r \in B_{l+1} \setminus B_l} \bar{a}_r(n) \dot{c}_{l+1,r}^{(0)} = \bar{a}_{\beta(l)}(n) \dot{c}_{l+1,\beta(l)}^{(0)}.$$

Bearing in mind that $\dot{c}_{l+1,\beta(l)}^{(0)} \neq 0$, we get $\bar{a}_{\beta(l)}(n) = 0$.

Therefore if $y_{n,j}^{(0)} = 0$ for all $1 \leq j \leq m + g + 1$, then $a_{\beta(j-1)}(n) = 0$ for all $1 \leq j \leq m + g + 1$. Using Lemma 2, we get $a_r(n) = 0$ for all $0 \leq r \leq m - 1$.

Hence (74) is true and Theorem 4 follows. ■

Acknowledgment. Parts of this work were started at the Workshop "Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo methods" held at the Erwin Schrödinger Institute, September 25 - 29, 2017.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beck, J., Chen, W. W. L. Irregularities of Distribution, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
2. Bilyk, D. On Roth's orthogonal function method in discrepancy theory, Unif. Distrib. Theory 6 (2011), no. 1, 143–184.
3. Dick, J. and Pillichshammer, F. Digital Nets and Sequences, Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
4. Grepstad, S.; Lev, N. Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation. Geom. Funct. Anal. 25 (2015), no. 1, 87–133.
5. Hellekalek, P. Regularities in the distribution of special sequences, J. Number Theory, 18 (1984), no. 1, 41–55.

6. Larcher, G. Digital Point Sets: Analysis and Applications. Springer Lecture Notes in Statistics (138), pp. 167–222, 1998.
7. Levin, M. B. Adelic constructions of low discrepancy sequences, Online J. Anal. Comb. No. 5 (2010), 27 pp.
8. Levin, M. B. On the lower bound of the discrepancy of (t, s) sequences: II, Online J. Anal. Comb. No. 5 (2017), 74 pp.
9. Levin, M.B., On a bounded remainder set for a digital Kronecker sequence, arXiv: 1901.00042.
10. Levin, M. B. On a bounded remainder set for (t, s) sequences II, in preparation.
11. Niederreiter, H., Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, in: CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 63, SIAM, 1992.
12. Niederreiter, H. and Yeo, A. S., Halton-type sequences from global function fields, Sci. China Math. 56 (2013), 1467–1476.
13. Salvador, G. D. V. Topics in the Theory of Algebraic Function Fields. Mathematics: Theory & Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.
14. Stichtenoth, H. Algebraic Function Fields and Codes, 2nd ed. Berlin: Springer, 2009.
15. Tezuka, S. Polynomial arithmetic analogue of Halton sequences. ACM Trans Modeling Computer Simulation, 3 (1993), 99–107

REFERENCES

1. Beck, J., Chen, W. W. L. Irregularities of Distribution, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
2. Bilyk, D. On Roth's orthogonal function method in discrepancy theory, Unif. Distrib. Theory 6 (2011), no. 1, 143–184.
3. Dick, J. and Pillichshammer, F. Digital Nets and Sequences, Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
4. Grepstad, S.; Lev, N. Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation. Geom. Funct. Anal. 25 (2015), no. 1, 87–133.
5. Hellekalek, P. Regularities in the distribution of special sequences, J. Number Theory, 18 (1984), no. 1, 41–55.
6. Larcher, G. Digital Point Sets: Analysis and Applications. Springer Lecture Notes in Statistics (138), pp. 167–222, 1998.
7. Levin, M. B. Adelic constructions of low discrepancy sequences, Online J. Anal. Comb. No. 5 (2010), 27 pp.
8. Levin, M. B. On the lower bound of the discrepancy of (t, s) sequences: II, Online J. Anal. Comb. No. 5 (2017), 74 pp.
9. Levin, M. B. On a bounded remainder set for a digital Kronecker sequence, arXiv: 1901.00042.
10. Levin, M. B. On a bounded remainder set for (t, s) sequences II, in preparation.

-
11. Niederreiter, H. Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, in: CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 63, SIAM, 1992.
 12. Niederreiter, H. and Yeo, A. S. Halton-type sequences from global function fields, *Sci. China Math.* 56 (2013), 1467–1476.
 13. Salvador, G. D. V. Topics in the Theory of Algebraic Function Fields. Mathematics: Theory & Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.
 14. Stichtenoth, H. Algebraic Function Fields and Codes, 2nd ed. Berlin: Springer, 2009.
 15. Tezuka, S. Polynomial arithmetic analogue of Halton sequences. *ACM Trans Modeling Computer Simulation*, 3 (1993), 99–107

Получено 09.01.2019 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.6

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-248-260

Критерий периодичности непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей¹

В. П. Платонов, Г. В. Федоров

Платонов Владимир Петрович — Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН); Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН), г. Москва.

e-mail: platonov@niisi.ras.ru

Федоров Глеб Владимирович — кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН); Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (МГУ имени М. В. Ломоносова), г. Москва.

e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Аннотация

Периодичность и квазипериодичность функциональных непрерывных дробей в гиперэллиптическом поле $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ имеет более сложную природу, чем периодичность числовых непрерывных дробей элементов квадратичных полей. Известно, что периодичность непрерывной дроби элемента $\sqrt{f}/h^{g+1}$, построенной по нормированию, связанному с многочленом h первой степени, эквивалентна наличию нетривиальных S -единиц в поле L рода g и эквивалентна наличию нетривиального кручения в группе классов дивизоров. В данной статье найден точный промежуток значений $s \in \mathbb{Z}$ таких, что элементы $\sqrt{f}/h^s$ имеют периодическое разложение в непрерывную дробь, где $f \in \mathbb{Q}[x]$ — свободный от квадратов многочлен четной степени. Для многочленов f нечетной степени проблема периодичности непрерывных дробей элементов вида $\sqrt{f}/h^s$ рассмотрена в статье [5], причем там доказано, что длина квазипериода не превосходит степени фундаментальной S -единицы поля L . Проблема периодичности непрерывных дробей элементов вида $\sqrt{f}/h^s$ для многочленов f четной степени является более сложной. Это подчеркивается найденным нами примером многочлена f степени 4, для которого соответствующие непрерывные дроби имеют аномально большую длину периода. Ранее в статье [5] также были найдены примеры непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля L с длиной квазипериода значительно превосходившей степень фундаментальной S -единицы поля L .

Ключевые слова: непрерывные дроби, фундаментальные единицы, S -единицы, кручение в якобианах, гиперэллиптические поля, дивизоры, группа классов дивизоров.

Библиография: 16 — названий.

Для цитирования:

В. П. Платонов, Г. В. Федоров Критерий периодичности непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 248–260.

¹ Публикация выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (выполнение фундаментальных научных исследований ГП 14) по теме № 0065-2019-0011 "Исследование групповых алгебраических многообразий и их связей с алгеброй, геометрией и теорией чисел" (№ АААА-А19-119011590095-7).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.6

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-248-260

The criterion of periodicity of continued fractions of key elements in hyperelliptic fields ²

V. P. Platonov, G. V. Fedorov

Platonov Vladimir Petrovich — Federal State Institution «Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences» (SRISA); Steklov Mathematical Institute (MIAN), Moscow.

e-mail: platonov@niisi.ras.ru

Fedorov Gleb Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, Federal State Institution «Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences» (SRISA); Moscow State University (MSU), Moscow.

e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Abstract

The periodicity and quasi-periodicity of functional continued fractions in the hyperelliptic field $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ has a more complex nature, than the periodicity of the numerical continued fractions of the elements of a quadratic fields. It is known that the periodicity of a continued fraction of the element $\sqrt{f}/h^{g+1}$, constructed by valuation associated with a polynomial h of first degree, is equivalent to the existence of nontrivial S -units in a field L of the genus g and is equivalent to the existence nontrivial torsion in a group of classes of divisors. This article has found an exact interval of values of $s \in \mathbb{Z}$ such that the elements $\sqrt{f}/h^s$ have a periodic decomposition into a continued fraction, where $f \in \mathbb{Q}[x]$ is a squarefree polynomial of even degree. For polynomials f of odd degree, the problem of periodicity of continued fractions of elements of the form $\sqrt{f}/h^s$ are discussed in the article [5], and it is proved that the length of the quasi-period does not exceed degree of the fundamental S -unit of L . The problem of periodicity of continued fractions of elements of the form $\sqrt{f}/h^s$ for polynomials f of even degree is more complicated. This is underlined by the example we found of a polynomial f of degree 4, for which the corresponding continued fractions have an abnormally large period length. Earlier in the article [5] we found examples of continued fractions of elements of the hyperelliptic field L with a quasi-period length significantly exceeding the degree of the fundamental S -unit of L .

Keywords: continued fractions, fundamental units, S -units, torsion in the Jacobians, hyperelliptic fields, divisors, divisor class group.

Bibliography: 16 — titles.

For citation:

V. P. Platonov, G. V. Fedorov, 2019, "The criterion of periodicity of continued fractions of key elements in hyperelliptic fields", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 248–260.

²The publication was performed within the framework of the state assignment of SRISA (14 GP implementation of fundamental research) on the subject № 0065-2019-0011 (№AAAA-A19-119011590095-7).

1. Введение

Пусть $F(X) \in K[X]$ — свободный от квадратов многочлен над полем K характеристики отличной от 2. В классическом случае рассматривается гиперэллиптическое поле $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$, где u многочлена F степени $2g + 2$, $g \geq 1$, старший коэффициент является полным квадратом в мультипликативной группе K^* поля K . Критерий периодичности непрерывной дроби $\sqrt{F}$, построенной в поле $K((X^{-1}))$, был известен еще Абелю [1] и Чебышеву [2], современные результаты наиболее полно изложены в [3]. В частности, из этих результатов следует, что в поле $\mathcal{L}$ элемент $\sqrt{F}$ и его разложение в непрерывную дробь играет ключевую роль в вопросах связанных с поиском фундаментальных единиц и рациональных точек кручения в якобиане гиперэллиптической кривой, заданной уравнением $Y^2 = F(X)$.

В отличие от числовых непрерывных дробей, в функциональном случае непрерывная дробь может быть квазипериодической — периодической с точностью до константы из K^* . Для непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}$ справедливо утверждение: если длина квазипериода конечна, то длина периода либо равна длине квазипериода, либо равна удвоенной длине квазипериода.

В статье [4] дана оценка сверху на длину квазипериода t непрерывной дроби элемента специального вида $\beta = (B + \sqrt{F})/A \in \mathcal{L}$, где $A, B \in K[X]$, $A \mid F - B^2$, согласно которой $t \leq m - p + 1$, где m — порядок класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$, p — порядок полюса элемента β в ∞^+ .

В данной статье мы покажем, что в поле $\mathcal{L}$ могут существовать элементы, имеющие периодическую непрерывную дробь с длиной квазипериода существенно больше, чем порядок класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$. Частные примеры непрерывных дробей, построенных по конечному нормированию, для которых длина квазипериода существенно больше степени соответствующего дивизора кручения, были приведены в статье [5] (см. примеры 1-4).

Пусть α является корнем многочлена

$$H(X) = \lambda_2 X^2 + 2\lambda_1 X + \lambda_0, \quad \text{где } \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in K[x], \quad (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in K^*. \quad (1)$$

Величину $d = \lambda_1^2 - \lambda_2 \lambda_0$ будем называть сокращенным дискриминантом многочлена (1) или просто *дискриминантом*. Положим f — свободная от квадратов часть многочлена d , т. е. $d = \omega^2 f$, $f, \omega \in K[x]$ и $\alpha \in L = K(x)(\sqrt{f})$.

Пусть $h \in K[x]$, $\deg h = 1$, и нормирование v_h поля $K(x)$ имеет два продолжения v_h^- и v_h^+ на поле $L = K(x)(\sqrt{f})$. Поле L может быть вложено в поле формальных степенных рядов $K((h))$ двумя способами. Мы фиксируем одно из вложений, соответствующее нормированию v_h^- . Тогда любой элемент поля L имеет единственное разложение в непрерывную дробь в $K((h))$ (см. [5], [6]). Положим $S_h = \{v_h^-, v_h^+\}$. Пусть $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ — разложение α в непрерывную дробь, соответствующее нормированию v_h^- . Положим $r = \max(\deg \lambda_0, \deg \lambda_1, \deg \lambda_2)$.

В теореме 1 статьи [5] доказан общий критерий квазипериодичности непрерывных дробей в поле формальных степенных рядов $K((h))$ для элементов поля L . Согласно этому критерию следующие условия эквивалентны:

1. непрерывная дробь α в поле $K((h))$ квазипериодическая;
2. в поле L существует нетривиальная S_h -единица вида $u = h^{-m}(\omega_1 + \omega_2 \sqrt{d})$, где $S_h = \{v_h^-, v_h^+\}$, $\omega_1, \omega_2 \in K[h]$, $v_h(\omega_2) = 0$, $\deg \omega_1 - \deg \omega_2 \geq r$;
3. уравнение

$$\omega_1^2 - d\omega_2^2 = bh^{2m} \quad (2)$$

имеет решение $\omega_1, \omega_2 \in K[h]$ такое, что $v_h(\omega_2) = 0$, $\deg \omega_1 - \deg \omega_2 \geq r$, $b \in K^*$, $\deg \omega_1 = m$.

В статьях [5]-[15] отмечалось, что элементы вида $\sqrt{f}/h^s$ для различных $s \in \mathbb{Z}$ играют особую роль для поиска фундаментальных S_h -единиц и изучения их свойств в гиперэллиптическом поле $L = K(h)(\sqrt{f})$. В статье [11] доказано, что каждая квазипериодическая непрерывная дробь элемента вида $\sqrt{f}/h^s$, $s \in \mathbb{Z}$, является периодической, а в статье [13] показано, что из периодичности непрерывной дроби элемента $\sqrt{f}/h^s$ следует периодичность непрерывной дроби $\sqrt{f}/h^{k-s}$, где $k = \deg f$.

В теореме 2 статьи [5] для некоторого фиксированного $s \in \mathbb{Z}$ найдены достаточные условия одновременной квазипериодичности непрерывных дробей элементов α , $\alpha \cdot h^s \in L \setminus K(x)$. Для гиперэллиптических полей $L = K(x)(\sqrt{f})$, построенных с помощью свободных от квадратов многочленов $f \in K[x]$ нечетной степени $2g + 1$ найденные достаточные условия также являются необходимыми. В случае $\deg f = 2g + 2$ указанные в теореме 2 статьи [5] достаточные условия не являются необходимыми, что подтверждается примерами 1-3 [5]. Одним из наглядных эффектов случая, когда для элементов α и $\alpha \cdot h^s$ достаточные условия не являются необходимыми, является значительное отличие длин квазипериодов и периодов непрерывных дробей элементов α и $\alpha \cdot h^s$. Так, в примере 4 статьи [5] найден свободный от квадратов многочлен $f \in \mathbb{Q}[h]$ степени 6, для которого длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha = \sqrt{f}/h^3$ равна 2, а длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha \cdot h^3 = \sqrt{f}$ равна 18 при том, что поле $L = \mathbb{Q}(h)(\sqrt{f})$ обладает фундаментальной S_h -единицей степени 4, где $S_h = \{v_h^-, v_h^+\}$.

Целью данной статьи является уточнение теоремы 2 статьи [5]. А именно, в теореме 2 данной статьи мы находим необходимые условия одновременной квазипериодичности непрерывных дробей элементов $\alpha, \alpha \cdot h^s \in L \setminus \mathbb{Q}(x)$ для гиперэллиптических полей $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g + 2$. Также мы приводим интересный пример эллиптического поля $\mathbb{Q}(X)(\sqrt{F})$, $\deg F = 4$, для которого длина квазипериода непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}$ равна 3, длина квазипериода непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}/X$ равна 20, длина квазипериода непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}/X^2$ равна 19, а длина периода — 38. Элементы $\sqrt{F}/X$ и $\sqrt{F}/X^2$ имеют аномально большую длину квазипериода по сравнению с порядком $m = 4$ класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$.

Символом $\text{lc}(R)$ обозначим старший коэффициент для многочлена R , а символом $\text{tc}(R)$ — свободный член многочлена R .

2. Вспомогательные утверждения

Следующая лемма была доказана в [5].

ЛЕММА 1. Пусть $Q, F \in K[X]$, многочлен Q неприводим в $K[X]$, $v_Q(F) > 0$, и поле $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$ обладает фундаментальной единицей $\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{F}$, где $\Psi_1, \Psi_2 \in K[X]$. Тогда для любой нетривиальной единицы $\Omega_1 + \Omega_2\sqrt{F}$ поля $\mathcal{L}$, где $\Omega_1, \Omega_2 \in K[X]$, справедливы соотношения $v_Q(\Omega_1) = v_Q(\Psi_1) = 0$ и $v_Q(\Omega_2) = v_Q(\Psi_2)$.

Идея доказательства заключается в том, что без ограничения общности можно считать, что для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $c \in K^*$ справедливы тождества

$$\begin{aligned} \Omega_1 + \Omega_2\sqrt{F} &= c(\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{F})^n = \\ &= c \left(\sum_{0 \leq j \leq n/2} \binom{n}{2j} \Psi_1^{n-2j} \Psi_2^{2j} F^j \right) + c \left(\sum_{0 \leq j < n/2} \binom{n}{2j+1} \Psi_1^{n-2j-1} \Psi_2^{2j+1} F^j \right) \sqrt{F}. \end{aligned} \quad (3)$$

Остается заметить, что из условия $v_Q(F) > 0$ следует $v_Q(\Psi_1) = 0$.

Следующая теорема уточняет теорему 2 [5] для многочленов f четной степени.

ТЕОРЕМА 1. Пусть непрерывная дробь элемента $\alpha \in L = K(h)(\sqrt{f})$ квазипериодическая, тогда справедливы следующие утверждения:

1. если $s \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет неравенствам

$$\deg \lambda_2 - \deg \omega_1 + \deg \omega_2 \leq s \leq \deg \omega_1 - \deg \omega_2 - \deg \lambda_0, \quad (4)$$

то непрерывные дроби элементов $\alpha \cdot h^s$ и $\bar{\alpha} \cdot h^s$ квазипериодические;

2. если степень многочлена d нечетная и s не удовлетворяет неравенствам (4), то непрерывные дроби элементов $\alpha \cdot h^s$ и $\bar{\alpha} \cdot h^s$ не квазипериодические;

3. если степень многочлена d четная и в поле L фундаментальная S_h -единица

$$u_h = (\mu_1 - \mu_2 \sqrt{f})/h^m$$

такая, что $\deg \mu_1 - \deg \mu_2 - g - 1 \neq 0$, то для s не удовлетворяющим неравенствам (4) непрерывные дроби элементов $\alpha \cdot h^s$ и $\bar{\alpha} \cdot h^s$ не квазипериодические.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1. и 2. были доказаны в теореме 2 [5].

Докажем пункт 3. Обозначим $X = 1/h$, $\Psi_1(X) = \mu_1/h^m$, $\Psi_2(X) = \mu_2/h^{m-g-1}$, $F = f/h^{2g+2}$, и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ положим $\Omega_1 + \Omega_2 \sqrt{F} = (\Psi_1 + \Psi_2 \sqrt{F})^n$, $\Omega_1, \Omega_2, \Psi_1, \Psi_2 \in K[X]$. Из доказательства теоремы 2 [5] следует, что $v_X(\Psi_2) = |\deg \mu_1 - \deg \mu_2 - g - 1|$, то есть в нашем случае $v_X(\Psi_2) > 0$. Имеем $v_X(\Psi_1) = v_X(F) = 0$, следовательно, из (3) получаем $v_X(\Omega_1) = 0$, $v_X(\Omega_2) = v_X(\Psi_2)$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству пункта 2. теоремы 2 [5]. $\square$

В теореме 1 не разобраны случаи, когда

$$\deg \lambda_2 - \deg \omega_1 + \deg \omega_2 = 0 \quad \text{или} \quad \deg \omega_1 - \deg \omega_2 - \deg \lambda_0 = 0.$$

Оказывается, что эти случаи являются наиболее интересными, и имеют свои особенности. Для их рассмотрения над полем $K = \mathbb{Q}$ мы изучим рациональные корни двух последовательностей биномиальных многочленов.

Для $n \in \mathbb{N}$ определим две последовательности многочленов $T_n, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ следующим образом

$$T_n(X) = \sum_{0 \leq j \leq n/2} \binom{n}{2j} X^j, \quad Q_n(X) = \sum_{0 \leq j < n/2} \binom{n}{2j+1} X^j. \quad (5)$$

Тогда $\deg T_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\deg Q_n = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ и справедливо тождество

$$T_n(X^2) + XQ_n(X^2) = (X+1)^n. \quad (6)$$

Выпишем первые несколько многочленов $T_n, Q_n \in \mathbb{Q}[x]$

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 1, & Q_1(x) &= 1, & T_2(x) &= x+1, & Q_2(x) &= 2, \\ T_3(x) &= 3x+1, & Q_3(x) &= x+3, & T_4(x) &= x^2+6x+1, & Q_4(x) &= 4(x+1), \\ T_5(x) &= 5x^2+10x+1, & Q_5(x) &= x^2+10x+5, & \dots \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Многочлены T_n и Q_n взаимно просты, $(T_n, Q_n) \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливы тождества

$$(1 + \sqrt{z})^n = T_n(z) + \sqrt{z}Q_n(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

и, следовательно, для $u = \sqrt{z} \in \mathbb{C}$ имеем

$$(1 + u)^n = T_n(u^2) + uQ_n(u^2), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Если предположить, что $u_0 \in \mathbb{C}$ является общим корнем многочленов $T_n(u^2)$ и $Q_n(u^2)$, то из (8) заключаем, что $u_0 = -1$, но

$$T_n((-1)^2) = \sum_{0 \leq j \leq n/2} \binom{n}{2j} > 0, \quad Q_n((-1)^2) = \sum_{0 \leq j < n/2} \binom{n}{2j+1} > 0.$$

□

ЛЕММА 3. Если число n простое, то многочлены $T_n, Q_n \in \mathbb{Q}[x]$ неприводимы над $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = p$ — простое, тогда $p \mid \binom{p}{j}$ для $1 \leq j \leq p-1$. Следовательно, по признаку Эйзенштейна многочлены $T_p, Q_p \in \mathbb{Q}[x]$ неприводимы над $\mathbb{Q}$. □

ЛЕММА 4. Для $n, m \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{Q}$ таких, что $T_n(a) \neq 0$, справедливы тождества

$$T_{nm}(a) = (T_n(a))^m \cdot T_m(b), \quad Q_{nm}(a) = (T_n(a))^{m-1} \cdot Q_n(a) \cdot Q_m(b), \quad (9)$$

где $b = a(Q_n(a)/T_n(a))^2$. В частности, из условия, что многочлен $T_{nm}(x) \cdot Q_{nm}(x)$ имеет рациональный корень следует, что $T_n(x) \cdot Q_n(x)$ или $T_m(x) \cdot Q_m(x)$ имеет рациональный корень.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$ такое, что $T_n(z) \neq 0$, тогда из (7) имеем

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{z})^{mn} &= (T_n(z) + \sqrt{z}Q_n(z))^m = T_n(z)^m (1 + \sqrt{u})^m = \\ &= (T_n(z))^m (T_m(u) + \sqrt{u}Q_m(u)) = \\ &= (T_n(z))^m \cdot T_m(u) + \sqrt{z}(T_n(z))^{m-1}Q_n(z)Q_m(u), \end{aligned} \quad (10)$$

где $u = z(Q_n(z)/T_n(z))^2$. □

ЛЕММА 5. Для $n \in \mathbb{N}$ такого, что $n \not\equiv 0 \pmod{2}$ и $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, многочлены $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ рациональных корней не имеют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассуждать по индукции по количеству простых делителей числа n с учетом их кратностей. База индукции для простых n справедлива. Рассмотрим $n = p \cdot m$, p — простое, $p \neq 2$, $p \neq 3$. Так как $T_p(x)$ и $Q_p(x)$ неприводимы и $\deg T_p \geq 2$, $\deg Q_p \geq 2$, то по (9) получаем, что множество рациональных корней многочлена $T_{pn}(x) \cdot Q_{pn}(x)$ совпадает с множеством рациональных корней многочлена $T_n(x) \cdot Q_n(x)$, которое пусто по индукционному предположению. □

ЛЕММА 6. Для $a \in \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$ таких, что $T_n(a) = 0$, имеем $T_{nm}(a) = 0$ и $Q_{nm}(a) \neq 0$, если $m \in \mathbb{N}$ нечетно, и $T_{nm}(a) \neq 0$ и $Q_{nm}(a) = 0$, если $m \in \mathbb{N}$ четно; если $a \in \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $Q_n(a) = 0$, то $Q_{nm}(a) = 0$ и $T_{nm}(a) \neq 0$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из (10). □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Рациональные корни многочленов T_n, Q_n , $n \in \mathbb{N}$, описаны в таблице 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из лемм 2-6. □

Таблица 1: Рациональные корни многочленов T_n, Q_n

$n \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
рац. корни T_n			-1	-1/3			-1			-1/3	-1	
рац. корни Q_n	-1/3; -1; -3			-3	-1		-1/3; -3		-1	-3		

3. Основные результаты

Следующая теорема уточняет теорему 1 для элементов вида $h^{-s}\sqrt{f}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in \mathbb{Q}[x]$ — свободный от квадратов многочлен, $\deg f = 2g + 2$ и $h \in \mathbb{Q}[x]$ — линейный многочлен. Пусть $u_h = h^{-m}(\mu_1 + \mu_2\sqrt{f})$ — фундаментальная S_h -единица в поле $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$. Положим для $n \in \mathbb{N}$

$$u_h^n = h^{-nm}(\mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)}\sqrt{f}), \quad r_n = \left| \deg \mu_1^{(n)} - \deg \mu_2^{(n)} - g - 1 \right|.$$

1. Если $r_1 \neq 0$, то элементы вида $h^{-s}\sqrt{f}$ имеют периодическое разложение в непрерывную дробь тогда и только тогда, когда $g + 1 - r_1 \leq s \leq g + 1 + r_1$.
2. Если $r_1 = 0$, то элементы вида $h^{-s}\sqrt{f}$ имеют периодическое разложение в непрерывную дробь тогда и только тогда, когда $g + 1 - r_2 - r_3 \leq s \leq g + 1 + r_2 + r_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1 следует из теоремы 1.

Рассмотрим пункт 2, когда $r_1 = 0$. Обозначим

$$X = 1/h, \quad \Psi_1(X) = \mu_1/h^m, \quad \Psi_2(X) = \mu_2/h^{m-g-1}, \quad D_0(X) = f/h^{2g+2},$$

тогда в (3) можно считать $c = 1$,

$$\Omega_1(X) = \Omega_1^{(n)}(X) = \mu_1^{(n)}h^{-nm}, \quad \Omega_2(X) = \Omega_2^{(n)}(X) = \mu_2^{(n)}h^{g+1-nm}.$$

Положим $Z = \Psi_2^2 D_0 / \Psi_1^2$, тогда

$$\Omega_1 + \Omega_2 \sqrt{D_0} = \Psi_1^n (T_n(Z) + Q_n(Z) \sqrt{Z}).$$

Отметим, что при $n \geq 2$ возможно $r_n > 0$ тогда и только тогда, когда $\text{tc}(\Omega_1) = 0$ или $\text{tc}(\Omega_2) = 0$, так как $\text{tc}(\Omega_1) = \text{tc}(\Omega_2) = 0$ невозможно из-за условия $\Omega_1^2 - \Omega_2^2 D_0 \in \mathbb{Q}^*$. Так как по условию $r_1 = 0$, то $v_X(\Psi_1) = v_X(\Psi_2) = v_X(D_0) = 0$, и может быть корректно вычислен предел $Z_0 = \lim_{X \rightarrow 0} Z \in \mathbb{Q}$. Пусть многочлены T_n и Q_n определены как в (5). Тогда в силу (3) возможно $\text{tc}(\Omega_1) = 0$, если и только если $T_n(Z_0) = 0$, и, аналогично, $\text{tc}(\Omega_2) = 0$, если и только если $Q_n(Z_0) = 0$. Из предложения 1, дающего полное описание всех рациональных корней многочленов T_n и Q_n , в частности следует, что если $r_n = 0$ при $n \leq 3$, то $r_n = 0$ при $n \geq 4$. Далее нам остается проверить, сколько младших коэффициентов многочленов Ω_1 и Ω_2 могут обнулиться в каждом из случаев, соответствующих различным корням Z_0 многочленов T_n, Q_n , описанных в предложении 1.

Пусть

$$\Psi_1(X) \equiv \Psi_{1,0} + \Psi_{1,1}X \pmod{X^2},$$

$$\Psi_2(X) \equiv \Psi_{2,0} + \Psi_{2,1}X \pmod{X^2},$$

$$D_0(X) \equiv D_{0,0} + D_{0,1}X \pmod{X^2},$$

причем $\Psi_{1,0} \neq 0$, $\Psi_{2,0} \neq 0$ и $D_{0,0} \neq 0$.

Предположим, что $r_2 > 0$. По предложению 1 выполнено неравенство $r_2 > 0$ только, если $\text{tc}(\Omega_1^{(2)}) = 0$. Последнее условие равносильно $\lim_{X \rightarrow 0} T_2(Z) = T_2(Z_0) = 0$, что возможно только при $Z_0 = -1$. По определению величины Z , условие $Z_0 = -1$ равносильно условию $\Psi_{1,0}^2 + \Psi_{2,0}^2 D_{0,0} = 0$. Также по предложению 1 ясно, что при $r_2 > 0$ справедливы соотношения $v_X(\Omega_1^{(n)}) = 0$ при $n \not\equiv 2 \pmod{4}$, и $v_X(\Omega_2^{(n)}) = 0$ при $n \not\equiv 0 \pmod{4}$. Покажем, что для $k \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $v_X(\Omega_1^{(4k+2)}) = v_X(\Omega_1^{(2)}) = v_X(\Omega_2^{(4k)}) = r_2$.

Для начала рассмотрим $\Omega_1^{(2)}(X) \equiv \Omega_{1,0}^{(2)} + \Omega_{1,1}^{(2)}X \pmod{X^2}$, где

$$\begin{aligned}\Omega_{1,0}^{(2)} &= \Psi_{1,0}^2 + \Psi_{2,0}^2 D_{0,0} = 0, \\ \Omega_{1,1}^{(2)} &= 2\Psi_{1,0}\Psi_{1,1} + 2\Psi_{2,0}\Psi_{2,1}D_{0,0} + \Psi_{2,0}^2 D_{0,1}.\end{aligned}$$

По формулам (10) имеем

$$\begin{aligned}\Omega_1^{(4k+2)} &= \Psi_1^{4k+2} T_{4k+2} \left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2} \right) = \\ &= (\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0) \cdot T_{2k+1} \left(\frac{4\Psi_1 \Psi_2^2 D_0}{(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0)^2} \right) (\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0)^{2k} \equiv \\ &\equiv \Omega_{1,1}^{(2)} \cdot (4\Psi_{1,0}\Psi_{2,0}^2 D_{0,0})^k \cdot X \pmod{X^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\Omega_{1,1}^{(4k+2)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,1}^{(2)} = 0$. Далее, рассуждая аналогично, при условии, что $\Omega_{1,0}^{(2)} = \Omega_{1,1}^{(2)} = \dots = \Omega_{1,n-1}^{(2)} = 0$, по индукции имеем

$$\Omega_1^{(4k+2)} \equiv \Omega_{1,n}^{(2)} \cdot (4\Psi_{1,0}\Psi_{2,0}^2 D_{0,0})^k \cdot X^n \pmod{X^{n+1}},$$

т. е. $\Omega_{1,n}^{(4k+2)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,n}^{(2)} = 0$, что означает $v_X(\Omega_1^{(4k+2)}) = v_X(\Omega_1^{(2)})$.

Аналогично, по формулам (10) получаем

$$\begin{aligned}\Omega_2^{(4k)} &= \Psi_1^{4k-2} Q_{4k} \left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2} \right) = \\ &= (\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0) \cdot Q_{2k} \left(\frac{4\Psi_1 \Psi_2^2 D_0}{(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0)^2} \right) (\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0)^{2(k-1)} \equiv \\ &\equiv \text{lc}(Q_{2k}) \cdot \Omega_{1,1}^{(2)} \cdot (4\Psi_{1,0}\Psi_{2,0}^2 D_{0,0})^{k-1} \cdot X \pmod{X^2}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\Omega_{2,1}^{(4k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,1}^{(2)} = 0$. Далее, по индукции получаем $\Omega_{1,n}^{(4k+2)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,n}^{(2)} = 0$, что означает $v_X(\Omega_2^{(4k)}) = v_X(\Omega_1^{(2)})$.

Предположим, что $r_3 > 0$. В этом случае $r_1 = r_2 = 0$. По предложению 1 неравенство $r_3 > 0$ может быть выполнено только, если $\text{tc}(\Omega_1^{(3)}) = 0$ или $\text{tc}(\Omega_2^{(3)}) = 0$.

Первым рассмотрим условие $\text{tc}(\Omega_1^{(3)}) = 0$, которое равносильно

$$\lim_{X \rightarrow 0} T_3(Z) = T_3(Z_0) = 0,$$

что возможно только при $Z_0 = -1/3$. По определению величины Z , условие $Z_0 = -1/3$ равносильно условию $\Psi_{1,0}^2 + 3\Psi_{2,0}^2 D_{0,0} = 0$. Также по предложению 1 ясно, что в этом случае справедливы соотношения $v_X(\Omega_1^{(n)}) = 0$ при $n \not\equiv 3 \pmod{6}$, и $v_X(\Omega_2^{(n)}) = 0$ при $n \not\equiv 0 \pmod{6}$. Покажем, что для $k \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $v_X(\Omega_1^{(6k+3)}) = v_X(\Omega_1^{(3)}) = v_X(\Omega_2^{(6k)}) = r_3$.

Для начала рассмотрим $\Omega_1^{(3)}(X) \equiv \Omega_{1,0}^{(3)} + \Omega_{1,1}^{(3)}X \pmod{X^2}$, где

$$\Omega_{1,0}^{(3)} = \Psi_{1,0}(\Psi_{1,0}^2 + 3\Psi_{2,0}^2 D_{0,0}) = 0,$$

$$\Omega_{1,1}^{(3)} = 3(2D_{0,0}\Psi_{1,0}\Psi_{2,0}\Psi_{2,1} + D_{0,0}\Psi_{1,1}\Psi_{2,0}^2 + D_{0,1}\Psi_{1,0}\Psi_{2,0}^2 + \Psi_{1,0}^2\Psi_{1,1}).$$

По формулам (10) имеем

$$\begin{aligned} \Omega_1^{(6k+3)} &= \Psi_1^{6k+3} T_{6k+3} \left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2} \right) = \\ &= \Psi_1^{2k+1} (\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0) \cdot T_{2k+1} \left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2} \left(\frac{3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0} \right)^2 \right) (\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0)^{2k} \equiv \\ &\equiv \Psi_{1,0}\Omega_{1,1}^{(3)} \cdot (\Psi_{2,0}^2 D_{0,0})^k \cdot (\Omega_{2,0}^{(3)})^{2k} \cdot X \pmod{X^2}, \end{aligned}$$

где $\Omega_{2,0}^{(3)} = 3\Psi_{1,0}^2 + \Psi_{2,0}^2 D_{0,0} \neq 0$. Таким образом, $\Omega_{1,1}^{(6k+3)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,1}^{(3)} = 0$. Далее, по индукции получаем $\Omega_{1,n}^{(6k+3)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,n}^{(3)} = 0$, что означает $v_X(\Omega_1^{(6k+3)}) = v_X(\Omega_1^{(3)})$.

Аналогично, по формулам (10) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_2^{(6k)} &= \Psi_1^{6k-2} Q_{6k} \left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2} \right) = \\ &= \Psi_1^{6k+1} (\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0) (3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0) Q_{2k} \left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2} \left(\frac{3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0} \right)^2 \right) (\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0)^{2(k-1)} \equiv \\ &\equiv \text{lc}(Q_{2k}) \cdot \Omega_{1,1}^{(3)} \cdot (\Psi_{2,0}^2 D_{0,0})^{k-1} \cdot (\Omega_{2,0}^{(3)})^{2k-1} \cdot X \pmod{X^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, если $\Omega_{1,1}^{(3)} \neq 0$, то $\Omega_{2,1}^{(6k)} \neq 0$. Следовательно, $\Omega_{2,1}^{(6k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,1}^{(3)} = 0$. Далее, по индукции получаем $\Omega_{1,n}^{(6k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{1,n}^{(3)} = 0$, что означает $v_X(\Omega_2^{(6k)}) = v_X(\Omega_1^{(3)})$.

Теперь рассмотрим условие $\text{tc}(\Omega_2^{(3)}) = 0$, которое равносильно

$$\lim_{X \rightarrow 0} Q_3(Z) = Q_3(Z_0) = 0,$$

что возможно только при $Z_0 = -3$. По определению величины Z , условие $Z_0 = -3$ равносильно условию $3\Psi_{1,0}^2 + \Psi_{2,0}^2 D_{0,0} = 0$. Также по предложению 1 ясно, что в этом случае справедливо $v_X(\Omega_2^{(n)}) = 0$ при $n \not\equiv 0 \pmod{3}$. Покажем, что для $k \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $v_X(\Omega_2^{(3k)}) = v_X(\Omega_2^{(3)}) = r_3$.

Для начала рассмотрим $\Omega_2^{(3)}(X) \equiv \Omega_{2,0}^{(3)} + \Omega_{2,1}^{(3)}X \pmod{X^2}$, где

$$\Omega_{2,0}^{(3)} = \Psi_{2,0}(3\Psi_{1,0}^2 + \Psi_{2,0}^2 D_{0,0}) = 0,$$

$$\Omega_{2,1}^{(3)} = 3D_{0,0}\Psi_{2,0}^2\Psi_{2,1} + D_{0,1}\Psi_{2,0}^3 + 3\Psi_{1,0}^2\Psi_{2,1} + 6\Psi_{1,0}\Psi_{1,1}\Psi_{2,0}.$$

По формулам (10) имеем

$$\begin{aligned} \Omega_2^{(6k)} &= \Psi_1^{6k-2} Q_{6k} \left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2} \right) = \\ &= \Psi_1^{2k-2} (\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0) (3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0) Q_{2k} \left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2} \left(\frac{3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0} \right)^2 \right) (\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0)^{2(k-1)} \equiv \\ &\equiv \Psi_{1,0}^{2k-2} Q_{2k}(0) \cdot \Omega_{2,1}^{(3)} \cdot (\Omega_{1,0}^{(3)})^{2k-1} \cdot X \pmod{X^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Omega_{2,1}^{(6k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{2,1}^{(3)} = 0$. Далее, по индукции получаем $\Omega_{2,n}^{(6k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{2,n}^{(3)} = 0$, что означает $v_X(\Omega_2^{(6k)}) = v_X(\Omega_2^{(3)})$.

Аналогично, по формулам (10) получаем

$$\begin{aligned}\Omega_2^{(6k+3)} &= \Psi_1^{6k+1} Q_{6k+3} \left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2} \right) = \\ &= \Psi_1^{2k-1} (3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0) Q_{2k+1} \left(\frac{\Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2} \left(\frac{3\Psi_1^2 + \Psi_2^2 D_0}{\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0} \right)^2 \right) (\Psi_1^2 + 3\Psi_2^2 D_0)^{2k} \equiv \\ &\equiv \Psi_{1,0}^{2k-1} Q_{2k+1}(0) \cdot \Omega_{2,1}^{(3)} \cdot (\Omega_{1,0}^{(3)})^{2k} \cdot X \pmod{X^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\Omega_{2,1}^{(6k+3)} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{2,1}^{(3)} \neq 0$. Далее, по индукции получаем $\Omega_{1,n}^{(6k+3)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{2,n}^{(3)} = 0$, что означает $v_X(\Omega_2^{(6k+3)}) = v_X(\Omega_2^{(3)})$.

Теорема 2 доказана. $\square$

4. Заключение

Приведем пример элемента эллиптического поля $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(X)(\sqrt{F})$, $F \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg F = 4$, у которого длина квазипериода непрерывной дроби значительно превосходит порядок порядка класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$. Этот пример был найден с помощью символьных компьютерных вычислений и параметризации Куберта [16] всех эллиптических кривых, имеющих точку конечного порядка.

Положим $F = 4X^4 - 8X^3 - 8X^2 - 12X - 3$. Бесконечное нормирование поля $\mathbb{Q}(X)$ имеет два неэквивалентных продолжения на поле $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(X)(\sqrt{F})$. Рассмотрим элемент $\alpha = \sqrt{F}$ и его непрерывную дробь.

В обозначениях теоремы 2 справедливы соотношения $v_X(\Omega_1^{(1)}) = v_X(\Omega_1^{(2)}) = 0$, $v_X(\Omega_1^{(3)}) = 2$, то есть $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = 2$. Поэтому, согласно пункту 3 теоремы 2, элементы $\sqrt{F} \cdot X^s$ для $-2 \leq s \leq 2$ имеют периодическое разложение в непрерывную дробь.

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{F}$ в $\mathbb{Q}((1/X))$ имеет вид

$$\sqrt{F} = \left[2X^2 - 2X - 3; \overline{-\frac{X}{6} + \frac{1}{4}, 8X - 12, -\frac{X^2}{12} + \frac{X}{12} + \frac{1}{8}, 8X - 12, -\frac{X}{6} + \frac{1}{4}, 4X^2 - 4X - 6} \right].$$

Длина квазипериода равна 3, длина периода равна 6, коэффициент квазипериода $c = -48$, период имеет симметричный вид. В поле $\mathcal{L}$ существует фундаментальная единица степени 4, порядок класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$ равен 4. В отличие от элементов $\sqrt{F}/X$ и $\sqrt{F}/X^2$ для элемента $\sqrt{F}$ справедливы условия утверждения из статьи [4] об оценке длины квазипериода.

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{F}/X$ в $\mathbb{Q}((1/X))$ имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{F}}{X} &= \left[2X - 2; \overline{-\frac{X}{3} + \frac{2}{3}, -3X - 6, -\frac{2X}{27} + \frac{2}{9}, 27X - 27, -\frac{X}{27} + \frac{1}{18}, 24X^2 - 36X - 18,} \right. \\ &\quad \left. \overline{-\frac{X}{36} + \frac{1}{36}, 24X - 24, -\frac{X}{12} + \frac{1}{6}, \frac{16X^3}{3} - \frac{16X^2}{3} - 8X - 16, -\frac{X}{12} + \frac{1}{6}, 24X - 24,} \right. \\ &\quad \left. \overline{-\frac{X}{36} + \frac{1}{36}, 24X^2 - 36X - 18, -\frac{X}{27} + \frac{1}{18}, 27X - 27, -\frac{2X}{27} + \frac{2}{9}, -3X - 6, -\frac{X}{3} + \frac{2}{3}, 4X - 4} \right].\end{aligned}$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна 20, период имеет симметричный вид.

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{F}/X^2$ в $\mathbb{Q}((1/X))$ имеет вид

$$\frac{\sqrt{F}}{X^2} = \left[2; -\frac{X}{2} + \frac{3}{4}, \frac{8X}{3} + 4, -\frac{X^2}{24} + \frac{X}{8} - \frac{1}{6}, 48X - 96, -\frac{X}{24} + \frac{1}{48}, \frac{32X}{3} - 16, \right. \\ \frac{X}{16} + \frac{1}{16}, 8X - 22, -\frac{2X}{3} + \frac{3}{2}, \frac{X^4}{3} - \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} - X - \frac{3}{2}, -\frac{2X}{3} + \frac{3}{2}, 8X - 22, \frac{X}{16} + \frac{1}{16}, \\ \frac{32X}{3} - 16, -\frac{X}{24} + \frac{1}{48}, 48X - 96, -\frac{X^2}{24} + \frac{X}{8} - \frac{1}{6}, \frac{8X}{3} + 4, -\frac{X}{2} + 1, 8X - 16, \\ -\frac{X}{6} - \frac{1}{4}, \frac{2X^2}{3} - 2X + \frac{8}{3}, -3X + 6, \frac{2X}{3} - \frac{1}{3}, -\frac{2X}{3} + 1, -X - 1, -\frac{X}{2} + \frac{11}{8}, \\ \frac{32X}{3} - 24, -\frac{X^4}{48} + \frac{X^3}{48} + \frac{X^2}{32} + \frac{X}{16} + \frac{3}{32}, \frac{32X}{3} - 24, -\frac{X}{2} + \frac{11}{8}, -X - 1, -\frac{2X}{3} + 1, \\ \left. \frac{2X}{3} - \frac{1}{3}, -3X + 6, \frac{2X^2}{3} - 2X + \frac{8}{3}, -\frac{X}{6} - \frac{1}{4}, 8X - 16, -\frac{X}{2} + 1 \right].$$

Длина квазипериода равна 19, длина периода равна 38, коэффициент квазипериода $c = -1/16$, период имеет сдвинутый симметричный вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abel N.H. Über die Integration der Differential-Formel $\rho \, dx/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind // J. Reine Angew. Math. 1826. №1. P. 185–221.
2. Chebychev P.L. Sur l'integration de la differential $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma}}dx$ // J. Math. Pures Appl. 1864. Vol. 2, № 9. P. 225–246.
3. Платонов В.П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69, № 1(415). С. 3–38.
4. Berry, T. G. 1990, “On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields”, *Arch. Math.*, vol. 55, pp. 259–266.
5. Платонов В.П., Федоров Г.В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209, № 4. С. 54–94.
6. Беньаш-Кривец В.В., Платонов В.П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 1. С. 15–44.
7. Федоров Г.В. Периодические непрерывные дроби и S-единицы с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 3.
8. Платонов В.П., Федоров Г.В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 474, № 5. С. 540–544.
9. Платонов В.П., Федоров Г.В. О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 475, № 2. С. 133–136.
10. Платонов В.П., Жгун В.С., Федоров Г.В. Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и многочлены Мамфорда // ДАН. 2016. Т. 471, № 6. С. 640–644.

11. Платонов В. П., Петрунин М. М. Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Тр. МИАН. 2018. Т. 302. С. 354–376.
12. Платонов В. П., Петрунин М. М. S-единицы и периодичность в квадратичных функциональных полях // УМН. 2016. Т. 71, № 5. С. 181–182.
13. Платонов В. П., Петрунин М. М. S-единицы в гиперэллиптических полях и периодичность непрерывных дробей // ДАН. 2016. Т. 470, № 3. С. 260–265.
14. Жгун В. С., Обобщенные якобианы и непрерывные дроби в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 4. С. 208–220.
15. Платонов В. П., Федоров Г. В., S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2015. Т. 465, № 5. С. 537–541.
16. Kubert D.S., Universal bounds on the torsion of elliptic curves // Proc. London Math.Soc. (3). 1976. Vol. 33, № 2. P. 193–237.

REFERENCES

1. Abel N. H. 1826, “Über die Integration der Differential-Formel $\rho \, dx/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind”, *J. Reine Angew. Math.*, no. 1, pp. 185–221.
2. Chebychev P. L. 1864. “Sur l’integration de la differential $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma}}dx$ ”, *J. Math. Pures Appl.*, vol. 2, no. 9, pp. 225–246.
3. Platonov, V. P. 2014, “Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field”, *Russian Math. Surveys*, vol. 69, no. 1, pp. 1–34.
4. Berry, T. G. 1990, “On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields”, *Arch. Math.*, vol. 55, pp. 259–266.
5. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2018, “On the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, *Sb. Math.*, vol. 209, no. 4, pp. 519–559.
6. Benyash-Krivets, V. V., Platonov, V. P. 2009, “Groups of S-units in hyperelliptic fields and continued fractions”, *Sb. Math.*, vol. 200, no. 11, pp. 1587–1615.
7. Fedorov, G. V. 2018, “Periodic continued fractions and S-units with second degree valuations in hyperelliptic fields”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 3. (In Russ.)
8. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2017, “On the periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, *Dokl. Math.*, vol. 95, no. 3, pp. 254–258.
9. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2017, “On the periodicity of continued fractions in elliptic fields”, *Dokl. Math.*, vol. 96, no. 1, pp. 332–335.
10. Platonov, V. P., Zhgoon, V. S., Fedorov, G. V. 2016, “Continued Rational Fractions in Hyperelliptic Fields and the Mumford Representation”, *Dokl. Math.*, vol. 94, no. 3, pp. 692–696.
11. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2018, “Groups of S-units and the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 302, pp. 336–357.

12. Platonov, V.P., Petrunin, M.M. 2016, "S-Units and periodicity in quadratic function fields", *Russian Math. Surveys*, vol. 71, no. 5, pp. 973–975.
13. Platonov, V.P., Petrunin, M.M. 2016, "S-units in hyperelliptic fields and periodicity of continued fractions", *Dokl. Math.*, vol. 94, no. 2, pp. 532–537.
14. Zhgoon V.S. 2017, "On generalized jacobians and rational continued fractions in the hyperelliptic fields", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 208–220. (In Russ.)
15. Platonov, V.P., Fedorov, G.V. 2015, "S-Units and Periodicity of Continued Fractions in Hyperelliptic Fields", *Dokl. Math.*, vol. 92, no. 3, pp. 752–756.
16. Kubert, D.S. 1976, "Universal bounds on the torsion of elliptic curves", *Proc. London Math.Soc.* (3), vol. 33, no. 2, pp. 193–237.

Получено 02.02.2019 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-261-271

Обобщённая предельная теорема для периодической дзета-функции Гурвица

А. Римкявичене

Римкявичене Аудроне — доктор математики, доцент, Шяуляйская государственная коллегия, Литва.

e-mail: a.rimkeviciene@svako.lt

Аннотация

С времен Бора и Йессена (1910–1935) в теории дзета-функций применяются вероятностные методы. В 1930 г. они доказали первую теорему для дзета-функции Римана $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, которая является прототипом современных предельных теорем, характеризующих поведение дзета-функции при помощи слабой сходимости вероятностных мер. Более точно, они получили, что при $\sigma > 1$ существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} J \{t \in [0, T] : \log \zeta(\sigma + it) \in R\},$$

где R — прямоугольник на комплексной плоскости со сторонами, параллельными осям, а $J A$ обозначает меру Жордана множества $A \subset \mathbb{R}$. Два года спустя они распространили приведенный результат на полуплоскость $\sigma > \frac{1}{2}$.

Идеи Бора и Йессена были развиты в работах Винтнера, Борщениуса, Йессена, Сельберга и других известных математиков. Современные версии теорем Бора-Йессена для широкого класса дзета-функций были получены в работах К. Матсумото.

В основном теория Бора-Йессена применялась для дзета-функций, имеющих эйлерово произведение по простым числам. В настоящей статье доказывается предельная теорема для дзета-функций, не имеющих эйлерова произведения и являющихся обобщением классической дзета-функции Гурвица. Пусть α , $0 < \alpha \leq 1$, фиксированный параметр, а $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ — периодическая последовательность комплексных чисел. Тогда периодическая дзета-функция Гурвица $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ в полуплоскости $\sigma > 1$ определяется рядом Дирихле

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}$$

и мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость. Пусть $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ — борелевское σ -поле комплексной плоскости, $\text{meas} A$ — мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, а функция $\varphi(t)$ при $t \geq T_0$ имеет монотонную положительную производную $\varphi'(t)$, при $t \rightarrow \infty$ удовлетворяющую оценкам $(\varphi'(t))^{-1} = o(t)$ и $\varphi(2t) \max_{t \leq u \leq 2t} (\varphi'(u))^{-1} \ll t$. Тогда в статье получено, что при $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{T} \text{meas} \{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к некоторой в явном виде заданной вероятностной мере на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$.

Ключевые слова: дзета-функция Гурвица, мера Хаара, периодическая дзета-функция Гурвица, предельная теорема, слабая сходимость.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:

А. Римкявичене Обобщенная предельная теорема для периодической дзета-функции Гурвица
// Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 261–271.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-261-271

A generalized limit theorem for the periodic Hurwitz zeta-function

A. Rimkevičienė

Audronė Rimkevičienė — doctor of mathematics, associated professor, Šiauliai State College, Lithuania.

e-mail: a.rimkeviciene@svako.lt

Abstract

Probabilistic methods are used in the theory of zeta-functions since Bohr and Jessen time (1910–1935). In 1930, they proved the first theorem for the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, which is a prototype of modern limit theorems characterizing the behavior of $\zeta(s)$ by weakly convergent probability measures. More precisely, they obtained that, for $\sigma > 1$, there exists the limit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} J \{t \in [0, T] : \log \zeta(\sigma + it) \in R\},$$

where R is a rectangle on the complex plane with edges parallel to the axes, and $J A$ denotes the Jordan measure of a set $A \subset \mathbb{R}$. Two years latter, they extended the above result to the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$.

Ideas of Bohr and Jessen were developed by Wintner, Borchsenius, Jessen, Selberg and other famous mathematicians. Modern versions of the Bohr-Jessen theorems, for a wide class of zeta-functions, were obtained in the works of K. Matsumoto.

The theory of Bohr and Jessen is applicable, in general, for zeta-functions having Euler's product over primes. In the present paper, a limit theorem for a zeta-function without Euler's product is proved. This zeta-function is a generalization of the classical Hurwitz zeta-function. Let α , $0 < \alpha \leq 1$, be a fixed parameter, and $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ be a periodic sequence of complex numbers. The periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s},$$

and is meromorphically continued to the whole complex plane. Let $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ denote the Borel σ -field of the set of complex numbers, $\text{meas} A$ be the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$, and let the function $\varphi(t)$ for $t \geq T_0$ have the monotone positive derivative $\varphi'(t)$ such that $(\varphi'(t))^{-1} = o(t)$ and $\varphi(2t) \max_{t \leq u \leq 2t} (\varphi'(u))^{-1} \ll t$. Then it is obtained in the paper that, for $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{T} \text{meas} \{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

converges weakly to a certain explicitly given probability measure on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ as $T \rightarrow \infty$.

Keywords: Haar measure, Hurwitz zeta-function, limit theorem, periodic Hurwitz zeta-function, weak convergence.

Bibliography: 11 titles.

For citation:

A. Rimkevičienė, 2019, "A generalized limit theorem for the periodic Hurwitz zeta-function", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 261–271.

In honor of Professor Antanas Laurinčikas on the occasion of his 70th birthday

1. Introduction

The idea of application of probabilistic methods in the theory of zeta-functions is due to Bohr and Jessen. In [2], they proved a theorem for the Riemann zeta-function

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1,$$

which is a prototype of a modern limit theorems on weakly convergent probability measures. Denote by $\mathbf{J}A$ the Jordan measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$, and let R be a rectangle on the complex plane with edges parallel to the axis. Then they proved that, for $\sigma > 1$, there exists the limit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbf{J} \{t \in [0, T] : \log \zeta(\sigma + it) \in R\}.$$

Two years later, Bohr and Jessen extended [3] the above result to the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$. In this case, a problem arises because of possible zeros of $\zeta(s)$. Therefore, they defined the set

$$G = \left\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\right\} \setminus \bigcup_{s_j = \sigma_j + it_j} \left\{s = \sigma + it_j : \frac{1}{2} < \sigma < \sigma_j\right\},$$

where s_j runs over all zeros of $\zeta(s)$ in the region $\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, and proved that there exists the limit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbf{J} \{t \in [0, T] : \sigma + it \in G, \log \zeta(\sigma + it) \in R\}.$$

In the sixth decade of the last century, the theory of weak convergence of probability measures was created. Therefore, it became possible to state Bohr-Jessen type theorems in the sense of weakly convergent probability measures, for results, see [6] and [8].

The present note is devoted to limit theorems for the periodic Hurwitz zeta-function. Let α , $0 < \alpha \leq 1$ be a fixed parameter, and let $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with minimal period $q \in \mathbb{N}$. The periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ was introduced in [7], and is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}.$$

If $a_m \equiv 1$, then $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ becomes the classical Hurwitz zeta-function

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}, \quad \sigma > 1,$$

which has a meromorphic continuation to the whole complex plane with the unique simple pole at the point $s = 1$ with residue 1. The periodicity of the sequence $\mathbf{a}$ implies, for $\sigma > 1$, the equality

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \frac{1}{q^s} \sum_{l=0}^{q-1} a_l \zeta\left(s, \frac{l + \alpha}{q}\right).$$

Therefore, the function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ also can be continued meromorphically to the whole complex plane with the unique simple pole at the point $s = 1$ with residue

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{q} \sum_{l=0}^{q-1} a_l.$$

If $a = 0$, then the periodic Hurwitz zeta-function is entire.

In [4], [9] and [11], limit theorems on weakly convergent probability measures on the complex plane for the function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ were proved. Denote by $\mathcal{B}(X)$ the Borel σ -field of the space X . Then, for example, it was obtained in [10] that if the parameter α is transcendental and $\sigma > \frac{1}{2}$ is fixed, then, on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, there exists a probability measure P_σ such that

$$\frac{1}{T} \text{meas} \{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

converges weakly to P_σ as $T \rightarrow \infty$. Moreover, the measure P_σ is given explicitly.

The aim of this note is a generalization of the above theorem for

$$P_{T, \sigma, \alpha; \mathbf{a}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T - T_0} \text{meas} \{t \in [T_0, T] : \zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

for certain functions $\varphi(t)$ and $T_0 > 0$. For its statement, we need some notation and definitions.

Let γ be the unit circle on the complex plane, and

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

where $\gamma_m = \gamma$ for all $m \in \mathbb{N}_0$. With the product topology and pointwise multiplication, the torus Ω is a compact topological Abelian group. Therefore, on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, the probability Haar measure m_H can be defined. This gives the probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Denote by $\omega(m)$ the m th component, $m \in \mathbb{N}_0$, of an element $\omega \in \Omega$, and, on the probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ define, for $\sigma > \frac{1}{2}$, the complex-valued random element $\zeta(\sigma, \alpha; \mathbf{a})$

$$\zeta(\sigma, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega(m)}{(m + \alpha)^\sigma}.$$

Let $P_{\zeta, \sigma}$ be the distribution of the random element $\zeta(\sigma, \alpha; \mathbf{a})$, i.e.,

$$P_{\zeta, \sigma, \alpha; \mathbf{a}}(A) = m_H \{\omega \in \Omega : \zeta(\sigma, \alpha; \mathbf{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Now, define the class of functions. We say that $\varphi \in L(T_0)$ if φ is a real differentiable function for $t \geq T_0 > 0$ such that $\varphi'(t)$ is monotonic positive, $\frac{1}{\varphi'(t)} = o(t)$ and $\varphi(2t) \max_{t \leq u \leq 2t} \frac{1}{\varphi'(u)} \ll t$ as $t \rightarrow \infty$. For example, the function $\varphi(t) = t^4 + 2t^3 + t^2$ is an element of the class $L(1)$.

The main result of this note is the following theorem.

THEOREM 1. *Suppose that the parameter α is transcendental, $\sigma > \frac{1}{2}$ is fixed and $\varphi \in L(T_0)$. Then $P_{T, \sigma, \alpha; \mathbf{a}}$ converges weakly to the measure $P_{\zeta, \sigma, \alpha; \mathbf{a}}$ as $T \rightarrow \infty$.*

2. Lemmas

We start with a limit theorem for probability measures on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. For $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, let

$$Q_{T, \alpha}(A) = \frac{1}{T - T_0} \text{meas} \left\{ t \in [T_0, T] : ((m + \alpha)^{-i\varphi(t)} : m \in \mathbb{N}_0) \in A \right\}.$$

LEMMA 1. Suppose that $\varphi \in L(T_0)$. Then $Q_{T,\alpha}$ converges weakly to the Haar measure m_H as $T \rightarrow \infty$.

PROOF. We apply the Fourier transform method. Let the sign “'” mean that only a finite number of integers k_m are distinct from zero. Denote by $g_T(\underline{k})$, $\underline{k} = (k_m : k_m \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0)$ the Fourier transform of $Q_{T,\alpha}$. Then the definition of $Q_{T,\alpha}$ implies that

$$\begin{aligned} g_{T,\alpha}(\underline{k}) &= \int_{\Omega} \left(\prod_{m=0}^{\infty'} \omega^{k_m}(m) \right) dQ_{T,\alpha} = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \prod_{m=0}^{\infty'} (m + \alpha)^{-ik_m \varphi(t)} dt \\ &= \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \exp\{-i\varphi(t) \sum_{m=0}^{\infty'} k_m \log(m + \alpha)\} dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Clearly,

$$g_{T,\alpha}(\underline{0}) = 1. \quad (2)$$

Since α is transcendental, the set $\{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$ is linearly independent over the field of rational numbers, thus the finite sum

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty'} k_m \log(m + \alpha) \neq 0$$

for $\underline{k} \neq \underline{0}$. Obviously,

$$\int_{T_0}^T \exp\{-ir\varphi(t)\} dt = \int_{T_0}^T \cos(r\varphi(t)) dt - i \int_{T_0}^T \sin(r\varphi(t)) dt. \quad (3)$$

If the function $\varphi'(t)$ is decreasing, then $(\varphi'(t))^{-1}$ is increasing. Thus, by the mean value theorem for integrals,

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T \cos(r\varphi(t)) dt &= \frac{1}{r} \int_{T_0}^T \frac{r\varphi'(t) \cos(r\varphi(t))}{\varphi'(t)} dt = \frac{1}{r\varphi'(T)} \int_{\xi}^T \varphi'(t) \cos(r\varphi(t)) dt \\ &= \frac{1}{r\varphi'(T)} \int_{\xi}^T d \sin(r\varphi(t)) = o(T), \end{aligned} \quad (4)$$

as $T \rightarrow \infty$, where $T_0 \leq \xi \leq T$. Similarly, we find that

$$\int_{T_0}^T \sin(r\varphi(t)) dt = o(T), \quad T \rightarrow \infty. \quad (5)$$

If the function $\varphi'(t)$ is increasing, then $(\varphi'(t))^{-1}$ is decreasing, and we obtain by similar arguments that

$$\int_{T_0}^T \exp\{-ir\varphi(t)\} dt = O\left(\frac{1}{r\varphi'(T_0)}\right). \quad (6)$$

Now, the estimates (4)–(6), and equalities (3) and (1) show that

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_{T,\alpha}(\underline{k}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \underline{k} = \underline{0}, \\ 0 & \text{if } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

The right-hand side of the latter equality is the Fourier transform of the Haar measure m_H . This and a continuity theorem for probability measures on compact groups prove the lemma. $\square$

Now, we will deal with absolutely convergent Dirichlet series. Let $\theta > \frac{1}{2}$ be a fixed number, and

$$v_n(m, \alpha) = \exp \left\{ - \left(\frac{m + \alpha}{n + \alpha} \right)^\theta \right\}.$$

Define the functions

$$\zeta_n(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m v_n(m, \alpha)}{(m + \alpha)^s}$$

and

$$\zeta_n(s, \alpha, \omega; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega(m) v_n(m, \alpha)}{(m + \alpha)^s}.$$

We note that the above series are absolutely convergent for $\sigma > \frac{1}{2}$ [5]. Consider the function $u_{n, \sigma, \alpha; \mathbf{a}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ given by the formula

$$u_{n, \sigma, \alpha; \mathbf{a}}(\omega) = \zeta_n(\sigma, \alpha, \omega; \mathbf{a}), \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Then the function $u_{n, \sigma, \alpha; \mathbf{a}}$ is continuous. Moreover,

$$P_{T, n, \sigma, \alpha; \mathbf{a}} = Q_{T, \alpha} u_{n, \sigma, \alpha; \mathbf{a}}^{-1}.$$

This observation together with Theorem 5.1 of [1] gives the following assertion.

LEMMA 2. Suppose that $\varphi \in L(T_0)$. Then, for $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$P_{T, n, \sigma, \alpha; \mathbf{a}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T - T_0} \text{meas}\{t \in [T_0, T] : \zeta_n(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

converges weakly to measure $P_{n, \sigma, \alpha; \mathbf{a}} = m_H u_{n, \sigma, \alpha; \mathbf{a}}^{-1}$ as $T \rightarrow \infty$.

Now we will approximate $\zeta(\sigma, \alpha; \mathbf{a})$ by $\zeta_n(s, \alpha; \mathbf{a})$. For this, we need a mean square estimate.

LEMMA 3. Suppose that $\varphi \in L(T_0)$ and $\sigma > \frac{1}{2}$ is fixed. Then, for $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\int_{T_0}^T |\zeta(\sigma + i\tau + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})|^2 dt \ll_{\sigma, \alpha; \mathbf{a}} T(1 + |\tau|).$$

PROOF. Suppose that $T \geq T_0$. Then

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} |\zeta(\sigma + i\tau + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})|^2 dt &= \int_T^{2T} \frac{1}{\varphi'(t)} |\zeta(\sigma + i\tau + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})|^2 d\varphi(t) \\ &\ll \max_{T \leq t \leq 2T} \frac{1}{\varphi'(t)} \int_T^{2T} d \left(\int_{T_0}^{\tau + \varphi(t)} |\zeta(\sigma + iu, \alpha; \mathbf{a})|^2 du \right) \\ &\ll \max_{T \leq t \leq 2T} \frac{1}{\varphi'(t)} \left(\int_{T_0}^{\tau + \varphi(t)} |\zeta(\sigma + iu, \alpha; \mathbf{a})|^2 du \right) \Bigg|_T^{2T}. \end{aligned} \quad (7)$$

For $\sigma > \frac{1}{2}$, the estimate

$$\int_{T_0}^T |\zeta(\sigma + iu, \alpha; \mathbf{a})|^2 du \ll_{\sigma, \alpha; \mathbf{a}} T$$

is true [5]. Therefore,

$$\left(\int_{T_0}^{\tau+\varphi(t)} |\zeta(\sigma + iu, \alpha; \mathbf{a})|^2 du \right) \Big|_T^{2T} \ll_{\sigma, \alpha, \mathbf{a}} |\tau| + \varphi(2T).$$

This together with hypothesis that $\varphi(2T) \max_{T \leq t \leq 2T} \frac{1}{\varphi'(t)} \ll T$ and (7) gives

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} |\zeta(\sigma + i\tau + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})|^2 dt &\ll_{\sigma, \alpha, \mathbf{a}} |\tau| + \varphi(2T) \max_{T \leq t \leq 2T} \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &\ll_{\sigma, \alpha, \mathbf{a}} T + |\tau| \max_{T \leq t \leq 2T} \frac{1}{\varphi'(t)} \ll_{\sigma, \alpha, \mathbf{a}} T(1 + |\tau|). \end{aligned}$$

Taking $2^{-k-1}T$ in place of T and summing over $k \in \mathbb{N}$, gives the estimate of the lemma. $\square$

LEMMA 4. Suppose that $\varphi \in L(T_0)$ and $\sigma > \frac{1}{2}$. Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T |\zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a}) - \zeta_n(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})| dt = 0.$$

PROOF. Define the function

$$l_n(s, \alpha) = \frac{s}{\theta} \Gamma\left(\frac{s}{\theta}\right) (m + \alpha)^s,$$

where $\Gamma(s)$ is the Euler gamma-function, and the number θ comes from the definition of $v_n(m, \alpha)$. Then the function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ has the integral representation [5]

$$\zeta_n(s, \alpha; \mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta - i\infty}^{\theta + i\infty} \zeta(s + z, \alpha; \mathbf{a}) \frac{l_n(z, \alpha)}{z} dz.$$

Then, using the residue theorem and properties of the gamma-function, we obtain that

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T |\zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a}) - \zeta_n(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})| dt \\ &\ll_{\sigma, \alpha, \mathbf{a}} \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_1 + i\tau, \alpha)| \left(\frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T |\zeta(\sigma_2 + i\tau + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})| dt \right) d\tau + o(1) \end{aligned}$$

as $T \rightarrow \infty$, where $\sigma_1 < 0$ and $\sigma_2 > \frac{1}{2}$. Hence, in view of Lemma 3,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T |\zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a}) - \zeta_n(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})| dt \\ &\ll_{\sigma, \alpha, \mathbf{a}} \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_1 + i\tau, \alpha)| (1 + |\tau|) d\tau + o(1) \end{aligned}$$

as $T \rightarrow \infty$. Thus, by the properties of $l_n(s, \alpha)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T |\zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a}) - \zeta_n(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})| dt = 0.$$

$\square$

We recall that $P_{n, \sigma, \alpha; \mathbf{a}}$ is the limit measure in Lemma 2.

LEMMA 5. The sequence $\{P_{n, \sigma, \alpha; \mathbf{a}} : n \in \mathbb{N}\}$ is tight, i.e., for every $\varepsilon > 0$, there exists a compact set $K = K(\varepsilon) \subset \mathbb{C}$ such that

$$P_{n, \sigma, \alpha; \mathbf{a}}(K) > 1 - \varepsilon$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

PROOF. Let ξ be a random variable defined on a certain probability space with measure $\mathbb{P}$, and uniformly distributed on $[0, 1]$. Define the complex-valued random element $X_{T,n,\alpha;\mathbf{a}} = X_{T,n,\alpha;\mathbf{a}}(\sigma)$ by

$$X_{T,n,\alpha;\mathbf{a}} = \zeta_n(\sigma + i\varphi(\xi T), \alpha; \mathbf{a}).$$

Then the assertion of Lemma 2 is equivalent to the relation

$$X_{T,n,\alpha;\mathbf{a}} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} X_{n,\alpha;\mathbf{a}}, \quad (8)$$

where $X_{n,\alpha;\mathbf{a}}(\sigma)$ is the complex-valued random element having the distribution $P_{n,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$. By Lemma 3 with $\tau = 0$, for $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$\int_{T_0}^T |\zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})|^2 dt \ll_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}} T.$$

Hence, the Cauchy inequality implies

$$\int_{T_0}^T |\zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})|^2 dt \ll \left((T - T_0) \int_{T_0}^T |\zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})|^2 dt \right)^{1/2} \ll_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}} T.$$

Therefore, using Lemma 4, we obtain that, for $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T |\zeta_n(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})| dt \leq C_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}} < \infty. \quad (9)$$

Let $\varepsilon > 0$ be an arbitrary fixed number, and $M = M_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}}(\varepsilon) = C_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}}\varepsilon^{-1}$. Then, by (9),

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \limsup_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_{T,n,\alpha;\mathbf{a}}| > M) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - T_0} \text{meas} \{t \in [T_0, T] : |\zeta_n(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})| > M\} \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(T - T_0)M} \int_{T_0}^T |\zeta_n(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})| dt \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

This together with (8) shows that

$$\mathbb{P}(|X_{n,\alpha;\mathbf{a}}| > M) \leq \varepsilon \quad (10)$$

for all $n \in \mathbb{N}$. The set $K = K(\varepsilon) = \{s \in \mathbb{C} : |s| \leq M\}$ is compact, and, by (10),

$$\mathbb{P}(X_{n,\alpha;\mathbf{a}} \in K) \geq 1 - \varepsilon$$

for all $n \in \mathbb{N}$, or equivalently,

$$P_{n,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}(K) \geq 1 - \varepsilon$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Thus, the sequence $\{P_{n,\sigma,\alpha;\mathbf{a}} : n \in \mathbb{N}\}$ is tight. $\square$

3. Proof of Theorem 1

The existence of the limit measure for $P_{T,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$ as $T \rightarrow \infty$ easily follows from Lemmas 4 and 5, relation (8) and Theorem 4.2 of [1].

PROOF. [Proof of Theorem 1] By the Prokhorov theorem [1, Theorem 6.1], and Lemma 5, the sequence $\{P_{n,\sigma,\alpha;\mathbf{a}} : n \in \mathbb{N}\}$ is relatively compact, i.e., every subsequence $\{P_{n_k,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}\} \subset \{P_{n,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}\}$ contains a weakly convergent subsequence. Thus, there exists a subsequence $\{P_{n_r,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}\}$ such that $P_{n_r,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$ converges weakly to a certain probability measure $P_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$ on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ as $r \rightarrow \infty$. In other words,

$$X_{n_r,\alpha;\mathbf{a}}(\sigma) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}}. \quad (11)$$

Define one more complex-valued random element

$$X_{T,\alpha;\mathbf{a}} = X_{T,\alpha;\mathbf{a}}(\sigma) = \zeta(\sigma + i\varphi(\xi T), \alpha; \mathbf{a}).$$

Then Lemma 4 shows that, for every $\varepsilon > 0$ and $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_{T,\alpha;\mathbf{a}}(\sigma) - X_{T,n,\alpha;\mathbf{a}}(\sigma)| \geq \varepsilon) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - T_0} \text{meas} \{t \in [T_0, T] : |\zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a}) - \zeta_n(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})| \geq \varepsilon\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(T - T_0)\varepsilon} \int_{T_0}^T |\zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a}) - \zeta_n(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a})| dt = 0. \end{aligned}$$

The later equality, relations (8) and (11), and Theorem 4.2 of [1] prove that

$$X_{T,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}(\sigma) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}}. \quad (12)$$

in other words, $P_{T,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$ converges weakly to $P_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$ as $T \rightarrow \infty$. Moreover, relation (12) shows that the measure $P_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$ does not depend of the subsequence $P_{n_r\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$. Therefore, we have the relation

$$X_{n,\alpha;\mathbf{a}}(\sigma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}}.$$

This relation allows to identify the measure $P_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$. Namely, in [5], it was proved that, for $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{T} \text{meas} \{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

as $T \rightarrow \infty$, also converges weakly to the limit measure $P_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$ of $P_{n,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$ as $n \rightarrow \infty$, and that $P_{\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$ coincides with $P_{\zeta,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$. Therefore, $P_{T,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$ converges weakly to $P_{\zeta,\sigma,\alpha;\mathbf{a}}$ as $T \rightarrow \infty$. The theorem is proved. $\square$

4. Conclusions

In the paper, a generalized limit theorem for the periodic Hurwitz zeta-function

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}, \quad \text{Res} = \sigma > 1,$$

where $0 < \alpha \leq 1$ is a fixed transcendental parameter and $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ is a periodic sequence of complex numbers, is obtained. More precisely, it is proved that, for $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{T - T_0} \text{meas} \{t \in [T_0, T] : \zeta(\sigma + i\varphi(t), \alpha; \mathbf{a}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

converges weakly to the explicitly given probability measure on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ as $T \rightarrow \infty$. Here the function $\varphi(t)$ for $t \geq T_0$ has a monotone positive derivative $\varphi'(t)$ satisfying the estimates $(\varphi'(t))^{-1} = o(t)$ and $\varphi(2t) \max_{t \leq u \leq 2t} \frac{1}{\varphi'(u)} \ll t$ as $t \rightarrow \infty$. The theorem obtained generalized previous author's results with $\varphi(t) = t$. Moreover, it can be extended to a collection of periodic Hurwitz zeta-functions. Also, the case of rational α can be considered.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York: John Wiley and Sons, 1968.
2. Bohr H., Jessen B. Über die Wertverteilung der Riemanschen Zetafunktion, Erste Mitteilung // *Acta Math.* 1930. Vol. 54. P. 1–35.
3. Bohr H., Jessen B. ‘Über die Wertverteilung der Riemanschen Zetafunktion, Zweite Mitteilung // *Acta Math.* 1932. Vol. 58. P. 1–55.
4. Genienė D., Rimkevičienė A. A joint limit theorem for periodic Hurwitz zeta-functions with algebraic irrational parameters // *Math. Modelling and Analysis.* 2013. Vol. 18, no. 1. P. 149–159.
5. Javtokas A., Laurinčikas A. On the periodic Hurwitz zeta-function // *Hardy-Ramanujan J.* 2006. Vol. 29, no. 3. P. 18–36.
6. Laurinčikas A. Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function. Dordrecht, Boston, London: Kluwer, 1996.
7. Laurinčikas A. The joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions // *Analysis.* 2006. Vol. 26, no. 3, P. 419–428.
8. Matsumoto K. Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions // *Sugaku Expositions.* 2004. Vol. 17. P. 51–71.
9. Misevičius G., Rimkevičienė A. Joint limit theorems for periodic Hurwitz zeta-functions. II // *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 2013. Vol. 41. P. 173–185.
10. Rimkevičienė A. Limit theorems for the periodic Hurwitz zeta-function // *Šiauliai Math. Semin.* 2010. Vol. 5(13). P. 55–69.
11. Rimkevičienė A. Joint limit theorems for the periodic Hurwitz zeta-functions // *Šiauliai Math. Semin.* 2011. Vol. 6(14). P. 53–68.

REFERENCES

1. Billingsley, P. 1968, “Convergence of Probability Measures“, John Wiley and Sons, New York.
2. Bohr, H. & Jessen, B. 1930, “Über die Wertverteilung der Riemanschen Zetafunktion, Erste Mitteilung“, *Acta Math.*, vol. 54, pp. 1–35.
3. Bohr, H. & Jessen, B. 1932, “Über die Wertverteilung der Riemanschen Zetafunktion, Zweite Mitteilung“, *Acta Math.*, vol. 58, pp. 1–55.
4. Genienė, D. & Rimkevičienė, A. 2013, “A joint limit theorem for periodic Hurwitz zeta-functions with algebraic irrational parameters“, *Math. Modelling and Analysis*, vol. 18, no. 1, pp. 149–159.
5. Javtokas, A. & Laurinčikas, A. 2006, “On the periodic Hurwitz zeta-function“, *Hardy-Ramanujan J.*, vol. 29, no. 3, pp. 18–36.
6. Laurinčikas, A. 1996, “Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function“, Kluwer, Dordrecht, Boston, London.
7. Laurinčikas, A. 2006, “The joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions“, *Analysis*, vol. 26, no. 3, pp. 419–428.

8. Matsumoto, K. 2004, “Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions“, *Sugaku Expositions*, vol. 17, pp. 51–71.
9. Misevičius, G. & Rimkevičienė, A. 2013, “Joint limit theorems for periodic Hurwitz zeta-functions. II“, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, vol. 41, pp. 173–185.
10. Rimkevičienė, A. 2010, “Limit theorems for the periodic Hurwitz zeta-function“, *Šiauliai Math. Semin.*, vol. 5(13), pp. 55–69.
11. Rimkevičienė, A. 2011, “Joint limit theorems for the periodic Hurwitz zeta-functions“, *Šiauliai Math. Semin.* vol. 6(14), pp. 53–68.

Получено 05.12.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-272-283

**Рассеяние звуковых волн цилиндром
с радиально-неоднородным упругим покрытием
в плоском волноводе¹**

Л. А. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача рассеяния звуковых волн абсолютно жестким цилиндром с радиально-неоднородным изотропным упругим покрытием в плоском волноводе. Полагается, что волновод заполнен однородной идеальной жидкостью, одна его граница является абсолютно жесткой, а другая — акустически мягкой, законы неоднородности материала покрытия цилиндра описываются дифференцируемыми функциями, гармоническая звуковая волна возбуждается заданным распределением источников на сечении волновода.

В случае установившихся колебаний распространение малых возмущений в идеальной жидкости описывается уравнением Гельмгольца. Колебания неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя описываются общими уравнениями движения сплошной среды.

Для нахождения поля смещений в неоднородном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Первичное поле возмущений представлено совокупностью собственных волн волновода. Давление рассеянного цилиндрическим телом поля ищется в виде потенциала простого слоя.

Построена функция Грина для уравнения Гельмгольца, удовлетворяющая заданным граничным условиям на стенках волновода и условиям излучения на бесконечности. Функция плотности распределения источников ищется в виде разложения в ряд Фурье. Для нахождения коэффициентов этого разложения получена бесконечная линейная система уравнений. Проведено усечение бесконечной системы и ее решение найдено методом обратной матрицы.

Получены аналитические выражения для рассеянного акустического поля в разных областях волновода.

Ключевые слова: рассеяние, звуковые волны, цилиндр, неоднородное упругое покрытие, плоский волновод.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 272–283.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 1.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-272-283

**Scattering of sound waves by an cylinder with an radial
non-uniform elastic coating in a planar waveguide²**

L. A. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula state University, Tula.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Abstract

In paper the problem of sound wave scattering by absolutely rigid cylinder with radially inhomogeneous isotropic elastic coating in a planar waveguide is considered. It is believed that a waveguide filled with a homogeneous ideal fluid, one of its borders is absolutely rigid and the other — acoustically soft, heterogeneity laws of a coating material are described by differentiable functions, harmonic sound wave excited by a given distribution of sources in the section waveguide.

In the case of steady state oscillations the propagation of small perturbations in ideal fluid is described by the Helmholtz's equation. The oscillations of an inhomogeneous isotropic elastic cylindrical layer described by general motion equations of the continuous medium.

The boundary-value problem for the system of ordinary second order differential equations is constructed for determination of the displacement field in inhomogeneous coating.

The primary field of disturbances is represented by a set of its own waveguide waves. The pressure of the field scattered by the cylindrical body is sought as potential of a simple layer.

The Green function for the Helmholtz equation that satisfies the given boundary conditions on the waveguide walls and conditions of radiation at infinity is constructed. The function of distribution density of sources are sought as a Fourier series expansion. The infinite linear system of equations is obtained for determination of the coefficients of this decomposition. The solution of truncated infinite system is found by the inverse matrix method.

Analytical expressions for the scattered acoustic field in different areas of the waveguide are obtained.

Keywords: scattering, sound waves, cylinder, non-uniform elastic coating, planar waveguide.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, 2019, "Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 272–283.

1. Введение

Существует большое количество работ по дифракции акустических волн на телах разной формы в волноводах, в том числе плоскостойких. В ряде работ решение дифракционных задач находилось в предположении, что эффектами многократного переотражения звука между телом и границами волновода можно пренебречь. Однако учет многократного рассеяния является весьма существенным, хотя и усложняет решение задачи дифракции. Это связано с тем,

²The study was carried out at the expense of a grant from the Russian science Foundation (project 18-11-00199).

что акустическое поле должно удовлетворять граничным условиям на границах волновода и поверхности тела, которые имеют разную геометрию и свойства. Множественное рассеяние звуковых волн на теле произвольной формы и границах плоскостойного волновода рассматривалось, например, в [1-4], а в [5-8] изучалось распространение звуковых волн в плоских волноводах, содержащих цилиндрические тела. Дифракция звуковых волн на сплошном однородном упругом цилиндре в волноводе с идеальными границами исследована в [5, 6]. В [5] стенки волновода полагались абсолютно мягкими. В [6] рассматривался случай, когда одна граница волновода является абсолютно жесткой, а другая – акустически мягкой. Задачи дифракция звуковых волн на однородных упругих цилиндрах в волноводе с импедансными стенками решены в [7, 8]. Звукоотражающие характеристики рассеивателей можно изменять с помощью покрытий в виде непрерывно-неоднородного слоя (см., например, [9, 10]). В настоящей работе методом, предложенным в [5], решается задача дифракция звуковых волн на жестком цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе, у которого одна граница — абсолютно жесткая, а другая — акустически мягкая.

2. Постановка задачи

Рассмотрим плоский волновод шириной d , заполненный идеальной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c . Одна стенка волновода является абсолютно жесткой, а другая – акустически мягкой. В волновод помещен бесконечный абсолютно жесткий цилиндр радиуса r_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде коаксиального радиально-неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя с внешним радиусом r_1 . Материал покрытия характеризуется плотностью ρ и упругими постоянными λ и μ . Ось вращения цилиндра параллельна стенкам волновода. Вдоль стенок волновода перпендикулярно к оси цилиндрического тела распространяется гармоническая звуковая волна давления p_0 с круговой частотой ω , возбуждаемая заданным распределением источников на сечении волновода, расположенном на расстоянии X_0 от оси цилиндра. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать. Схема волноводной системы изображена на рисунке.

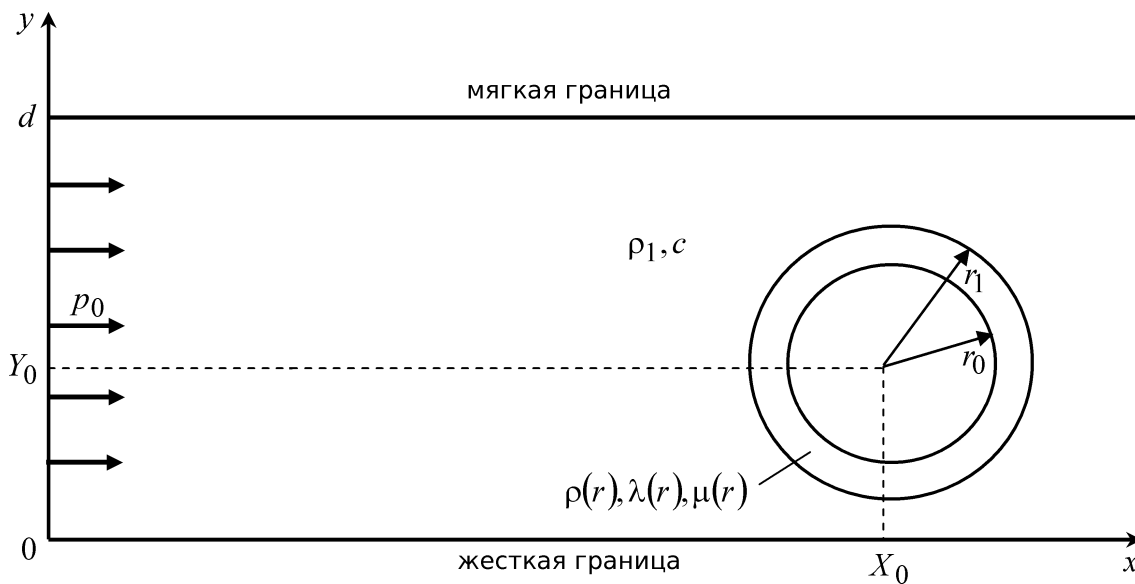


Рис. Схема волноводной системы

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z так, чтобы ось x проходила по нижней стенке волновода, ось y лежала в сечении волновода с заданным распределением

источников звука, а ось z была параллельна оси цилиндра. Пусть нижняя граница волновода, определяемая уравнением $y = 0$, является жесткой, а верхняя граница, определяемая уравнением $y = d$, — мягкой. Положение оси цилиндра определяется координатами

$$x = X_0, \quad y = Y_0, \quad -\infty < z < \infty.$$

Источники звука распределены по поперечному сечению волновода

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq d, \quad -\infty < z < \infty.$$

С цилиндром свяжем цилиндрическую систему координат r, φ, z .

Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией радиальной координаты r , а модули упругости покрытия λ и μ — дифференцируемыми функциями координаты r .

Определим акустическое поле в волноводе, а также найдем поле смещений в упругом покрытии.

3. Аналитическое решение задачи

Рассматриваемая задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты z .

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний в области $(r \geq r_1, 0 \leq y \leq d, -\infty < x < \infty)$ описывается уравнением Гельмгольца [11]

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (1)$$

где $p = p_0 + p_s$ — давление полного акустического поля в волноводе, p_s — давление акустического поля, рассеянного цилиндром с покрытием, $k = \omega/c$ — волновое число в жидкости.

При этом скорость частиц жидкости $\mathbf{v} = \frac{1}{i\rho_1\omega} \text{grad } p$.

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний в цилиндрической системе координат имеют вид [12]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

где u_r, u_φ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ частиц неоднородного слоя, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое, $\rho = \rho(r)$, $r_0 \leq r \leq r_1$.

На границах волновода должны выполняться краевые условия, которые заключаются в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости на нижней стенке и равенстве нулю акустического давления на верхней стенке:

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad p(x, d) = 0. \quad (3)$$

Граничные условия на внешней поверхности неоднородного покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$r = r_1 : \quad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad (4)$$

где $v_r = \frac{1}{i\rho_1\omega} \frac{\partial p}{\partial r}$.

На внутренней поверхности покрытия должен быть равен нулю вектор смещения частиц упругой среды

$$r = r_0 : \quad u_r = 0, \quad u_\varphi = 0. \quad (5)$$

Кроме того, необходимо выполнения условий излучения на бесконечности в направлении оси x

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r \left(\frac{\partial p_s}{\partial r} - ikp_s \right) = 0. \quad (6)$$

Первичное поле возмущений p_0 можно представить в виде разложения по полной системе собственных функций краевой задачи (1), (3)

$$p_n(x, y) = e^{\pm i\xi_n x} \cos \lambda_n y, \quad (7)$$

где $\xi_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}$ и $\lambda_n = \frac{\pi}{2d}(2n+1)$ — продольная и поперечная компоненты волнового числа k соответственно.

С помощью системы функций (7) в области $x > 0$ давление поля источников может быть представлено совокупностью собственных (нормальных) волн волновода, распространяющихся вдоль оси x

$$p_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\xi_n x} \cos \lambda_n y, \quad (8)$$

где A_n — заданные амплитуды.

Давление рассеянного цилиндром поля p_s представим в виде потенциала простого слоя [5]

$$p_s(x, y) = \int_{L_0} \nu_1(x_0, y_0) G(x, y|x_0, y_0) dl_0, \quad (9)$$

где $\nu_1(x_0, y_0)$ — неизвестная функция, описывающая распределение источников поля p_s на внешней поверхности неоднородного покрытия, $G(x, y|x_0, y_0)$ — функция Грина, L_0 — окружность радиуса r_1 с центром в точке (X_0, Y_0) , $dl_0 = r_1 d\varphi_0$ — элемент контура L_0 .

Функция $G(x, y|x_0, y_0)$ является решением краевой задачи

$$\Delta G + k^2 G = -\delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (10)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, 0|x_0, y_0) = 0, \quad G(x, d|x_0, y_0) = 0, \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} R \left(\frac{\partial G}{\partial R} - ikG \right) = 0, \quad (12)$$

где $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ — расстояние между точкой наблюдения (x, y) и источником поля (x_0, y_0) на контуре L_0 . Условия (11) и (12) записаны на основании условий (3) и (6).

Функцию Грина будем искать в виде

$$G(x, y|x_0, y_0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \cos \lambda_n y, \quad (13)$$

где $C_n(x) = c_n \begin{cases} e^{i\xi_n(x-x_0)}, & x \geq x_0 \\ e^{-i\xi_n(x-x_0)}, & x \leq x_0 \end{cases}$.

Для определения коэффициентов c_n сделаем следующие преобразования. Разложим дельта-функцию $\delta(y - y_0)$ в ряд Фурье по функциям $\cos \lambda_n y$

$$\delta(y - y_0) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos \lambda_n y.$$

Умножим обе части последнего уравнения на $\cos \lambda_q y$ и проинтегрируем по промежутку $[0, d]$. Находим коэффициенты d_n , учитывая, что по свойству δ -функции

$$\int_0^d \delta(y - y_0) \cos \lambda_q y \, dy = \cos \lambda_q y_0$$

и что

$$\int_0^d \cos \lambda_n y \cos \lambda_q y \, dy = \begin{cases} 0, & n \neq q, \\ 0, & n = q = 0, \\ d/2, & n = q \neq 0. \end{cases}$$

В результате получаем

$$\delta(y - y_0) = \frac{2}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0n}} \cos \lambda_n y \cos \lambda_n y_0. \quad (14)$$

Подставим разложения (13) и (14) в уравнение (10). Умножим обе части полученного уравнения на $\cos \lambda_q y$ и проинтегрируем по y в пределах от 0 до d . Приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 C_n(x)}{\partial x^2} + C_n(x) (k^2 - \lambda_n^2) = -\frac{2}{d(1 + \delta_{0n})} \cos \lambda_n y_0 \delta(x - x_0).$$

Проинтегрируем левую и правую части последнего уравнения по x по малой окрестности точки $x = x_0$. Учитывая, что $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x - x_0) \, dx = 1$, получим

$$\left. \frac{dC_n(x)}{dx} \right|_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} + (k^2 - \lambda_n^2) \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} C_n(x) \, dx = -\frac{2}{d(1 + \delta_{0n})} \cos \lambda_n y_0, \quad (15)$$

где $\frac{dC_n(x)}{dx} = c_n \begin{cases} i\xi_n e^{i\xi_n(x-x_0)}, & x \geq x_0 \\ -i\xi_n e^{-i\xi_n(x-x_0)}, & x \leq x_0 \end{cases}$.

Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как функция $C_n(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то второе слагаемое в уравнении (15) обращается в нуль при $\varepsilon \rightarrow 0$. Производная $\frac{dC_n(x)}{dx}$ в точке $x = x_0$ имеет разрыв первого рода, равный по величине $2i\xi_n c_n$. В результате находим

$$c_n = \frac{i}{\xi_n d(1 + \delta_{0n})} \cos \lambda_n y_0.$$

Таким образом, искомая функции Грина имеет вид

$$G(x, y | x_0, y_0) = \frac{i}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \delta_{0n}) \xi_n} \cos \lambda_n y \cos \lambda_n y_0 e^{i\xi_n |x-x_0|}. \quad (16)$$

Когда $\lambda_n > k$, $\xi_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}$ становится чисто мнимым. В этом случае для выполнения условий излучения (12) необходимо, чтобы $\text{Im } \xi_n > 0$, то есть $\xi_n = i\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}$.

Запишем поле источников (8) в полярной системе координат, связанной с цилиндром. Воспользуемся представлением $\cos \lambda_n y = (e^{i\lambda_n y} + e^{-i\lambda_n y})/2$ и учтем, что введенные прямоугольные и цилиндрические координаты связаны между собой соотношениями

$$x = X_0 + r \cos \varphi, \quad y = Y_0 + r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Так как $\frac{\xi_n^2}{k^2} + \frac{\lambda_n^2}{k^2} = 1$, то положим $\frac{\xi_n}{k} = \cos \psi$ и $\frac{\lambda_n}{k} = \sin \psi$. Тогда

$$\xi_n x \pm \lambda_n y = \xi_n X_0 \pm \lambda_n Y_0 + kr \cos(\varphi \mp \psi).$$

Используя формулу [13]

$$e^{ikr \cos \phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr) e^{im\phi},$$

получаем

$$p_0(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_m(kr) e^{im\varphi}, \quad (17)$$

где $J_m(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя порядка n ,

$$a_m = i^m \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\xi_n X_0} \cos(\lambda_n Y_0 - m\psi), \quad \psi = \arcsin \frac{\lambda_n}{k}.$$

Теперь запишем функцию Грина (16) в полярной системе координат. Для этого выразим через экспоненты $\cos \lambda_n y_0$ и проделаем преобразования, аналогичные приведенным выше. Получим

$$\begin{aligned} G(r, \varphi | r_0, \varphi_0) &= \frac{i}{2d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \delta_{0n}) \xi_n} e^{\pm i\xi_n (X_0 + r \cos \varphi)} \cos[\lambda_n (Y_0 + r \sin \varphi)] e^{\mp i\xi_n X_0} \times \\ &\times \left[e^{i\lambda_n Y_0 \mp ikr_1 \cos(\varphi_0 \pm \psi)} + e^{-i\lambda_n Y_0 \mp ikr_1 \cos(\varphi_0 \mp \psi)} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь верхний знак соответствует случаю $x > x_0$, а нижний — $x < x_0$.

Обозначая $\nu(x_0, y_0) = r_1 \nu_1(x_0, y_0)$ и переходя от декартовых координат x, y к полярным r, φ , выражение (9) представим в виде

$$p_s(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \nu(\varphi_0) G(r, \varphi | r_1, \varphi_0) d\varphi_0. \quad (19)$$

При этом функция плотности распределения источников ν на внешней поверхности покрытия цилиндра зависит только от одной угловой координаты, так как на этой поверхности радиальная координата постоянна и равна r_1 .

Функция $p_s(r, \varphi)$, определяемая формулой (19), удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1), краевым условиям (3) и условиям излучения на бесконечности (6). Таким образом, задача определения рассеянного поля p_s сводится к нахождению функция плотности распределения источников $\nu(\varphi_0)$, обеспечивающей выполнение граничных условий (4).

Функцию плотности распределения источников будем искать в виде разложения в ряд Фурье

$$\nu(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{im\varphi}, \quad (20)$$

где коэффициенты b_m подлежат определению.

Соотношения между компонентами тензора напряжений и вектора смещения в неоднородном покрытии записываются следующим образом [12]:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda + 2\mu}{r} \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + u_r \right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (21)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi}}{r} \right),$$

где $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$.

Используя соотношения (21), запишем уравнения (2) через компоненты вектора смещения u :

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 u_{\varphi}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \left(\lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r} \left(\lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right) \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \omega^2 \rho \right) u_r = 0, \\ \mu \frac{\partial^2 u_{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + \left(\mu' + \frac{\mu}{r} \right) \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r} \left(\mu' + \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \left(-\frac{\mu'}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \omega^2 \rho \right) u_{\varphi} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где штрих означает дифференцирование по r .

Компоненты вектора смещения u в упругом слое являются периодическими функциями координаты φ с периодом 2π . Поэтому функции $u_r(r, \varphi)$ и $u_{\varphi}(r, \varphi)$ будем искать в виде рядов Фурье

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{1m}(r) e^{im\varphi}; \quad u_{\varphi}(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{2m}(r) e^{im\varphi}. \quad (23)$$

Подставляя выражения (23) в уравнения (22), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $u_{1m}(r)$ и $u_{2m}(r)$ для каждого m :

$$\tilde{A}_m U_m'' + \tilde{B}_m U_m' + \tilde{C}_m U_m = 0, \quad (24)$$

где $U_m = (u_{1m}, u_{2m})^T$; $\tilde{A}_m, \tilde{B}_m, \tilde{C}_m$ — матрицы второго порядка

$$\begin{aligned} \tilde{A}_m = r^2 \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}; \quad \tilde{B}_m = \begin{pmatrix} (\lambda' + 2\mu')r^2 + (\lambda + 2\mu)r & im(\lambda + \mu)r \\ im(\lambda + \mu)r & \mu'r^2 + \mu r \end{pmatrix}; \\ \tilde{C}_m = \begin{pmatrix} \lambda'r - \lambda - (2 + m^2)\mu + \omega^2 \rho r^2 & im(\lambda'r - \lambda - 3\mu) \\ im(\mu'r + \lambda + 3\mu) & -\mu'r - m^2\lambda - (2m^2 + 1)\mu + \omega^2 \rho r^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача состоит в нахождении функций $u_{1m}(r)$ и $u_{2m}(r)$, обеспечивающих выполнение граничных условий (4) и (5).

Коэффициенты b_m и еще два краевых условия для нахождения частного решения системы (24) подлежат определению из трех граничных условий (4).

Воспользуемся первым их граничных условий (4). Будем учитывать, что нормальная производная от потенциала простого слоя на поверхности тела имеет разрыв первого рода, равный по величине $\pi\nu$ [14]. Тогда на внешней границе покрытия

$$\left. \frac{\partial p_s(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \pi\nu(\varphi) + \int_0^{2\pi} \nu(\varphi_0) M(\varphi, \varphi_0) d\varphi_0, \quad (25)$$

где $M(\varphi, \varphi_0) = \left. \frac{\partial}{\partial r} G(r, \varphi | r_1, \varphi_0) \right|_{r=r_1}$ (точка (r_1, φ) лежит на поверхности рассеивателя).

Интеграл в (25) следует понимать в смысле главного значения.

Таким образом, подставляя разложения (20) и (23) в первое условие (4) и учитывая (25), получаем бесконечную линейную систему уравнений относительно коэффициентов b_m , зависящих от $u_{1m}(r_1)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_{mn} + \alpha_{mn}) b_n = f_m^{(0)} + f_m^{(1)} u_{1m}(r_1) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (26),$$

где

$$\alpha_{mn} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M(\varphi, \varphi_0) e^{in\varphi_0} e^{-im\varphi} d\varphi_0 d\varphi,$$

$$f_m^{(0)} = -\frac{1}{\pi} a_m k J'_m(k r_1), \quad f_m^{(1)} = \frac{1}{\pi} \omega^2 \rho_1.$$

Из второго условия (4) получаем еще одну бесконечную систему уравнений

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{mn} b_n = g_m^{(0)} + g_m^{(1)} u_{1m}(r_1) + g_m^{(2)} u_{2m}(r_1) + g_m^{(3)} u'_{1m}(r_1) \quad (27)$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где

$$\beta_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\varphi, \varphi_0) e^{in\varphi_0} e^{-im\varphi} d\varphi_0 d\varphi, \quad K(\varphi, \varphi_0) = G(r, \varphi | r_1, \varphi_0)|_{r=r_1},$$

$$g_m^{(0)} = -a_m J_m(k r_1), \quad g_m^{(1)} = -\frac{\lambda(r_1)}{r_1}, \quad g_m^{(2)} = -\frac{im\lambda(r_1)}{r_1},$$

$$g_m^{(3)} = -[\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)].$$

Из последнего граничного условия (4) получаем соотношение

$$\frac{im}{r_1} u_{1m}(r_1) + u'_{2m}(r_1) - \frac{1}{r_1} u_{2m}(r_1) = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (28)$$

Из граничных условий (5) находим

$$r = r_0 : \quad u_{1m} = 0, \quad u_{2m} = 0. \quad (29)$$

Проведем усечение систем (26) и (27), выбрав порядок усечения N . В матричном виде усеченная система (26) будем иметь

$$Q b = f^{(0)} + f^{(1)} u_1,$$

где

$$Q = (\delta_{mn} + \alpha_{mn})_{(2N+1) \times (2N+1)}, \quad b = (b_{-N}, b_{-N+1}, \dots, b_0, b_1, \dots, b_N)^T,$$

$$f^{(0)} = (f_{-N}^{(0)}, f_{-N+1}^{(0)}, \dots, f_0^{(0)}, f_1^{(0)}, \dots, f_N^{(0)})^T,$$

$$f^{(1)} u_1 = (f_{-N}^{(1)} u_{1,-N}(r_1), f_{-N+1}^{(1)} u_{1,-N+1}(r_1), \dots, f_0^{(1)} u_{10}(r_1), \dots, f_N^{(1)} u_{1N}(r_1))^T.$$

Методом обратной матрицы находим

$$b = Q^{-1}(f^{(0)} + f^{(1)} u_1)$$

или в координатной форме

$$b_n = \sum_{j=-N}^N q_{nj} [f_j^{(0)} + f_j^{(1)} u_{1j}(r_1)] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N), \quad (30)$$

где q_{nj} — элементы обратной матрицы Q^{-1} .

Подставим (30) в усеченную систему (26). Получим

$$\begin{aligned} g_m^{(1)} u_{1m}(r_1) + g_m^{(2)} u_{2m}(r_1) + g_m^{(3)} u'_{1m}(r_1) - \sum_{n=-N}^N \beta_{mn} \sum_{j=-N}^N q_{nj} f_j^{(1)} u_{1j}(r_1) = \\ = \sum_{n=-N}^N \beta_{mn} \sum_{j=-N}^N q_{nj} f_j^{(0)} - g_m^{(0)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, получили четыре краевых условия (27-29), (31) которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (24).

Построенная краевая задача (24), (27-29), (31) может быть решена каким-либо методом. В результате находим поле смещений в неоднородном покрытии (23). Затем по формуле (30) вычисляем коэффициенты разложения функции плотности распределения источников (20). Аналитическое описание рассеянного акустического поля дается выражением (19).

Подставим (18) и (20) в (19) и воспользуемся формулой [15]

$$J_m(kr) e^{im\psi} = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{i[kr \cos(\psi - \varphi_0) + m\varphi_0]} d\varphi_0.$$

Переходя к декартовой системе координат, получим следующие выражения для рассеянного поля $p_s(x, y)$:

при $x \geq X_0 + r_1$

$$p_s(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^r e^{i\xi_n x} \cos \lambda_n y,$$

при $x \leq X_0 - r_1$

$$p_s(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^l e^{-i\xi_n x} \cos \lambda_n y,$$

где

$$A_n^r = \frac{2\pi i}{d(1 + \delta_{0n})\xi_n} e^{-i\xi_n X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m b_m J_m(kr_1) \cos(\lambda_n Y_0 - m\psi),$$

$$A_n^l = \frac{2\pi i}{d(1 + \delta_{0n})\xi_n} e^{i\xi_n X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m b_m J_m(kr_1) \cos(\lambda_n Y_0 + m\psi).$$

4. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи рассеяния звуковых волн акустически жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, находящимся в плоском волноводе с идеальными стенками. Подобный подход может быть использован при решении задач дифракции звуковых волн на абсолютно жестком и упругом цилиндрах с непрерывно-неоднородными и дискретно-неоднородными покрытиями в плоском волноводе с импедансными границами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hackman R. H., Sammelman G. S. Acoustic scattering in an inhomogeneous waveguide: Theory // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1986. V. 80, No. 5. P. 1447–1458.
2. Hackman R. H., Sammelman G. S. Multiple-scattering analysis for a target in oceanic waveguide // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1988. V. 84, No. 5. P. 1813–1825.
3. Кузькин В. М. Рассеяние звуковых волн на теле в плоскостойном волноводе // *Акустический журн.* 2003. Т. 49, № 1. С. 77–84.
4. Шарфарец Б. П. Метод расчета поля излучателя и поля рассеяния неоднородного включения в плоскостойных волноводах // *Акустический журн.* 2004. Т. 50, № 1. С. 123–128.
5. Белов В. Е., Горский С. М., Зиновьев А. Ю., Хилько А. И. Применение метода интегральных уравнений к задаче о дифракции акустических волн на упругих телах в слое жидкости // *Акустический журн.* 1994. Т. 40, № 4. С. 548–560.
6. Андрианова Т. А., Белов В. Е., Залезский А. А., Шаронов Г. А. Исследование модового состава и пространственного распределения акустического поля при различной локализации неоднородностей в слое жидкости // *Акустический журн.* 1996. Т. 42, № 4. С. 465–477.
7. Белов В. Е., Горский С. М., Залезский А. А., Зиновьев А. Ю., Хилько А. И. Рассеяние акустических волн упругими цилиндрами в многомодовых слоистых волноводах. // *Формирование акустических полей в океанических волноводах. Реконструкция неоднородностей.* Н. Новгород: ИПФ РАН, 1994. С. 63–88.
8. Belov V. E., Gorsky S. M., Zalezsky A. A., Zinovyev A. Yu. Application of the integral equation method to acoustic wave diffraction from elastic bodies in a fluid layer // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1994. Vol. 103, No 3. P. 1288–1295.
9. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // *Прикладная математика и механика.* 2011. Т. 75, № 5. С. 850–857.
10. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // *Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки.* 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265–274.
11. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
12. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
13. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 544 с.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
15. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

REFERENCES

1. Hackman, R. H. & Sammelman, G. S. 1986, “Acoustic scattering in an inhomogeneous waveguide: Theory“, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 80, no. 5, pp. 1447–1458.
2. Hackman R. H. & Sammelman G. S. 1988, “Multiple-scattering analysis for a target in oceanic waveguide“, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 84, no. 5, pp. 1813–1825.

3. Kuz'kin, V.M. 2003, "Sound scattering by a body in a planar layered waveguide", *Acoustical Physics*, vol. 49, no 1, pp. 68–74.
4. Sharfarets, B.P. 2004, "Method for calculating the field of an opaque source and the field scattered by an inhomogeneous inclusion in a planar layered waveguide", *Acoustical Physics*, vol. 50, no 1, pp. 107–111.
5. Belov, V.E., Gorskiy, S.M., Zinov'ev, A.Y. & Khil'ko, A.I. 1994, "Application of the method of integral equations to diffraction of acoustic waves at elastic bodies in a layer of liquid", *Acoustical Physics*, vol. 40, no 4, pp. 548–560.
6. Andrianova, T.A., Belov, V.E., Zalezsky, A.A. & Sharonov, G.A. 1996, "An analysis of the mode composition and spatial distribution of acoustic fields for different localizations of inhomogeneities in a liquid layer", *Acoustical Physics*, vol. 42, no 4, pp. 407–419.
7. Belov, V.E., Gorskiy, S.M., Zalezsky, A.A., Zinov'ev, A.Y. & Khil'ko, A.I. 1994, "Scattering of acoustic waves by elastic cylinders in multimode layered waveguides", in *Formation of acoustic fields in oceanic waveguides. Reconstruction of inhomogeneities*, Inst. Prikladnoj Fiziki RAN, Nizhnij Novgorod, pp. 63–88 [in Russian].
8. Belov, V.E., Gorskiy, S.M., Zalezsky, A.A. & Zinovyev, A.Yu. 1994, "Application of the integral equation method to acoustic wave diffraction from elastic bodies in a fluid layer" *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 103, no 3, pp. 1288–1295.
9. Romanov, A.G. & Tolokonnikov, L.A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595–600.
10. Tolokonnikov, L.A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265–274 [in Russian].
11. Shenderov, E.L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
12. Nowacki, W. 1975, "Teoria sprężystości", Mir, Moscow, 872 p. [in Russian].
13. Skudrzyk, E. 1976, "The Foundations of Acoustics", vol. 2, Mir, Moscow, 544 p. [in Russian].
14. Tikhonov, A.N & Samarskiy, A.A. 1972, "Equations of Mathematical Physics", Nauka, Moscow, 736 p. [in Russian].
15. Ivanov, E.A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p. [in Russian].

Получено 25.01.2019 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-284-293

Обобщённые суммы Гаусса и многочлены Бернулли

В. Н. Чубариков

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, г. Москва.

e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su chubarik2009@live.ru

Аннотация

Для периодической арифметической функции с периодом, равным простому числу q , при целых m, n вводится понятие обобщённой суммы Гаусса $G_f(m)$ с символом Лежандра $\left(\frac{n}{q}\right)$:

$$G_f(m) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) f\left(\frac{mn}{q}\right).$$

Рассмотрены частные случаи $f(x) = B_\nu(\{x\})$, $\nu \geq 1$, где $B_\nu(x)$ — многочлены Бернулли.

В работе используется техника конечных рядов Фурье. Если функция $f\left(\frac{k}{q}\right)$ определена в точках $k = 0, 1, \dots, q-1$, то её можно разложить в конечный ряд Фурье

$$f\left(\frac{k}{q}\right) = \sum_{m=0}^{q-1} c_m e^{2\pi i \frac{mk}{q}}, \quad c_m = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} f\left(\frac{k}{q}\right) e^{-2\pi i \frac{mk}{q}}.$$

С помощью разложения в конечный ряд Фурье обобщённой суммы Гаусса

$$G_\nu(m) = G_\nu(m; B_\nu) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) B_\nu\left(\left\{x + \frac{mn}{q}\right\}\right)$$

при $\nu = 1$ и $\nu = 2$ найдены новые формулы, выражающие значение символа Лежандра через полные суммы от периодических функций. Это обстоятельство позволяет получить новые аналитические свойства соответствующих рядов Дирихле и арифметических функций, что будет темой следующих работ.

В работе обнаружено важное свойство сумм G_1 и G_2 , а именно:

$G_1 \neq 0$, если $q \equiv 3 \pmod{4}$ и $G_1 = 0$, если $q \equiv 1 \pmod{4}$;

$G_2 = 0$, если $q \equiv 3 \pmod{4}$ и $G_2 = \frac{1}{q^2} \sum_{n=1}^{q-1} n^2 \left(\frac{n}{q}\right)$, если $q \equiv 1 \pmod{4}$.

Ключевые слова: Суммы Гаусса, многочлены Бернулли, символ Лежандра

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

В. Н. Чубариков. Обобщённые суммы Гаусса и многочлены Бернулли // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 284–293.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-284-293

Generalized Gaussian sums and Bernoulli polynomials

V. N. Chubarikov

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematical and Computer Methods of Analysis, Dean of the Mechanics and Mathematics Faculty of Moscow State University named after M. V. Lomonosov, Moscow
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su chubarik2009@live.ru

Abstract

The conception of Generalized Gaussian Sum $G_f(m)$ for a periodic arithmetical function with a period, is equal prime number q , for integers m, n is introduce:

$$G_f(m) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q} \right) f \left(\frac{mn}{q} \right).$$

Here are considered the particular cases $f(x) = B_\nu(\{x\})$, $\nu \geq 1$, where $B_\nu(x)$ — Bernoulli polynomials.

The paper uses the technique of finite Fourier series. If the function $f \left(\frac{k}{q} \right)$ is defined at $k = 0, 1, \dots, q-1$, it can be decomposed into a finite Fourier series

$$f \left(\frac{k}{q} \right) = \sum_{m=0}^{q-1} c_m e^{2\pi i \frac{mk}{q}}, \quad c_m = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} f \left(\frac{k}{q} \right) e^{-2\pi i \frac{mk}{q}}.$$

By decomposition into a finite Fourier series of a generalized Gauss sum

$$G_\nu(m) = G_\nu(m; B_\nu) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q} \right) B_\nu \left(\left\{ x + \frac{mn}{q} \right\} \right)$$

for $\nu = 1$ and $\nu = 2$, new formulas are found that Express the value of the Legendre symbol through the full sums of periodic functions. This circumstance makes it possible to obtain new analytical properties of the corresponding Dirichlet series and arithmetic functions, which will be the topic of the following works.

An important property of the sums G_1 and G_2 , namely:

$G_1 \neq 0$, if $q \equiv 3 \pmod{4}$ and $G_1 = 0$, if $q \equiv 1 \pmod{4}$;

$G_2 = 0$, if $q \equiv 3 \pmod{4}$ and $G_2 = \frac{1}{q^2} \sum_{n=1}^{q-1} n^2 \left(\frac{n}{q} \right)$, if $q \equiv 1 \pmod{4}$.

Keywords: Gaussian sums, Bernoulli polynomials, the Legendre symbol

Bibliography: 17 titles.

For citation:

V. N. Chubarikov, 2019, "Generalized Gaussian sums and Bernoulli polynomials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 284–293.

Введение

Пусть q — простое число, n — натуральное число, $\left(\frac{n}{q}\right)$ — символ Лежандра, $e_q(n) = e^{2\pi i \frac{n}{q}}$. Тогда сумма Гаусса имеет вид (см. [10]–[15])

$$G(m) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) e_q(mn) = \varepsilon \sqrt{q},$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } q \equiv 1 \pmod{4}, \\ i, & \text{если } q \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Далее определим многочлены Бернулли $B_\nu(x)$ с помощью производящей функции (см. [16]–[17])

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu(x)t^\nu}{\nu!}.$$

В частности, при $x = 0$ и при $|t| < 2\pi$ находим производящую функцию для чисел Бернулли B_ν :

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu t^\nu}{\nu!},$$

где

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2\nu} = \frac{(-1)^{\nu-1}(2\nu)!\zeta(2\nu)}{2^{2\nu-1}\pi^{2\nu}}, \quad B_{2\nu+1} = 0, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

$$B_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \left(\frac{\nu}{k}\right) B_k x^{\nu-k}, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Определим теперь обобщённую сумму Гаусса

$$G_\nu(m) = G_\nu(m; B_\nu) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) B_\nu\left(\left\{x + \frac{mn}{q}\right\}\right).$$

Предположим, что $G_\nu(1) = G_\nu \neq 0$. Тогда

$$\left(\frac{m}{q}\right) = \frac{1}{G_\nu} \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) B_\nu\left(\left\{x + \frac{mn}{q}\right\}\right)$$

и при $\text{Re } s > 0$ получим

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{q}\right) n^{-s} = \frac{1}{G_\nu} \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} B_\nu\left(\left\{x + \frac{mn}{q}\right\}\right).$$

Положим $x = 0$. Для функции $B_\nu\left(\frac{n}{q}\right)$ имеем разложение в конечный ряд Фурье (см. [15])

$$B_\nu\left(\frac{n}{q}\right) = \sum_{k=0}^{q-1} c_k e^{2\pi i \frac{kn}{q}},$$

где

$$c_k = c_k(\nu) = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} B_\nu\left(\frac{r}{q}\right) e^{-2\pi i \frac{kr}{q}}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{q-1} c_k e^{2\pi i \frac{kn}{q}} &= \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{r=0}^{q-1} B_\nu \left(\frac{r}{q} \right) e^{2\pi i \frac{k(n-r)}{q}} = \\ &= \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} B_\nu \left(\frac{r}{q} \right) \sum_{k=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{k(n-r)}{q}} = B_\nu \left(\frac{n}{q} \right).\end{aligned}$$

Используя это разложение, найдём

$$\begin{aligned}G_\nu &= \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q} \right) B_\nu \left(\frac{n}{q} \right) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q} \right) \sum_{k=0}^{q-1} c_k e^{2\pi i \frac{kn}{q}} = \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q} \right) e^{2\pi i \frac{kn}{q}} = \varepsilon \sqrt{q} \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right) c_k(\nu).\end{aligned}$$

Целью данной работы является доказательство следующих двух теорем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть q — простое число, $\left(\frac{k}{q} \right)$ — символ Лежандра, c_k — коэффициенты Фурье функции $G_1(x)$ при $x = 1$. Тогда

$$G_1 = \varepsilon \sqrt{q} \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right) c_k = \frac{\varepsilon}{\sqrt{q}} \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right) \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi i k}{q}}},$$

причём $G_1 \neq 0$, если $q \equiv 3 \pmod{4}$ и $G_1 = 0$, если $q \equiv 1 \pmod{4}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть q — простое число, $\left(\frac{k}{q} \right)$ — символ Лежандра, $c_k = c_k(2)$ — коэффициенты конечного ряда Фурье функции $G_2 = G_2(1)$. Тогда

$$G_2 = \varepsilon \sqrt{q} \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right) c_k(2) = -2\varepsilon q^{-3/2} \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right) \frac{e^{-2\pi i \frac{kr}{q}}}{\left(1 - e^{-2\pi i \frac{kr}{q}} \right)^2}.$$

причём $G_2 = 0$, если $q \equiv 3 \pmod{4}$ и $G_2 = \frac{1}{q^2} \sum_{n=1}^{q-1} n^2 \left(\frac{n}{q} \right)$, если $q \equiv 1 \pmod{4}$.

1. Леммы

Нам необходимы следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Для любого целого $q \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned}a) f_0 &= \sum_{r=1}^{q-1} z^r = \frac{z - z^q}{1 - z}, \\ b) f_1 &= \sum_{r=1}^{q-1} r z^r = z f'_0 = \frac{z - z^{q+1}}{(1 - z)^2} - \frac{q z^q}{1 - z}, \\ c) f_2 &= \sum_{r=1}^{q-1} r^2 z^r = z f'_1 = 2 \frac{z^2 - z^{q+2}}{(1 - z)^3} + \frac{z - (2q + 1) z^{q+1}}{(1 - z)^2} - \frac{q z^q}{1 - z}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) общеизвестно, б) следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} f_1 = zf'_0 &= z \frac{(1 - qz^{q-1})(1 - z) + (z - z^q)}{(1 - z)^2} = \frac{z - qz^q + (q - 1)z^{q+1}}{(1 - z)^2} = \\ &= \frac{z - z^{q+1}}{(1 - z)^2} - \frac{qz^q}{1 - z}. \end{aligned}$$

Утверждение с) находим из соотношений

$$\begin{aligned} f_2 = zf'_1 &= z \frac{(1 - (q + 1)z^q)(1 - z) + 2(z - z^{q+1})}{(1 - z)^3} - z \frac{q^2 z^{q-1}(1 - z) + qz^q}{(1 - z)^2} = \\ &= \frac{z + z^2 - (q + 1)z^{q+1} + (q - 1)z^{q+2}}{(1 - z)^3} - \frac{q^2 z^{q+1} - (q^2 - q)z^{q+1}}{(1 - z)^2} = \\ &= \frac{z + z^2 - q^2 z^q + (2q^2 - 2q - 1)z^{q+1} - (q^2 + 1)z^{q+2}}{(1 - z)^3} = \\ &= 2 \frac{z^2 - z^{q+2}}{(1 - z)^3} + \frac{z - (2q + 1)z^{q+1}}{(1 - z)^2} - \frac{qz^q}{1 - z}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть для любого простого числа $q > 2$

$$G_f(m) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q} \right) f \left(\left\{ x + \frac{mn}{q} \right\} \right),$$

где $f(x)$ — периодическая функция с периодом 1 и $\left(\frac{n}{q} \right)$ — символ Лежандра вычета n по модулю q .

Тогда имеем

$$\left(\frac{m}{q} \right) G_f(1) = G_f(m),$$

а при $\text{Res} > 1$ и при $G_f(1) \neq 0$ для L -ряда Дирихле справедлива формула

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{q} \right) n^{-s} = \frac{1}{G_f(1)} \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} f \left(\left\{ x + \frac{mn}{q} \right\} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену переменной суммирования, положив $k \equiv mn \pmod{q}$, получим $km^{-1} \equiv n \pmod{q}$ и в силу периодичности функции $f(x)$ имеем:

$$G_f(m) = \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{km^{-1}}{q} \right) f \left(\left\{ x + \frac{k}{q} \right\} \right) = \left(\frac{m}{q} \right) \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right) f \left(\left\{ x + \frac{k}{q} \right\} \right) = \left(\frac{m}{q} \right) G_f(1)$$

и первое утверждение леммы доказано.

Если $G_f(1) \neq 0$, то $\left(\frac{m}{q} \right) = \frac{G_f(m)}{G_f(1)}$. Отсюда следует, что

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{q} \right) n^{-s} = \frac{1}{G_f(1)} \sum_{n=1}^{\infty} G_f(n) n^{-s} = \frac{1}{G_f(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right) f \left(\left\{ x + \frac{kn}{q} \right\} \right) n^{-s}.$$

В силу абсолютной сходимости рядов можно переставить порядки суммирования, получим

$$L(s) = \frac{1}{G_f(1)} \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right) \sum_{n=1}^{\infty} f \left(\left\{ x + \frac{kn}{q} \right\} \right) n^{-s}$$

и лемма полностью доказана. $\square$

ЛЕММА 3. Пусть $q > 1, u$ — натуральные числа. Тогда имеем

$$B_1\left(\left\{\frac{u}{q}\right\}\right) = \left\{\frac{u}{q}\right\} - \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{q-1} c_k e_q(ku),$$

где $c_k = \frac{1}{q(e_q(-k)-1)}$ при $1 \leq k \leq q-1$ и $c_0 = -\frac{1}{2q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношение

$$\frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} e_q(am) = \begin{cases} 1, & \text{если } q \mid m, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

находим

$$\begin{aligned} B_1\left(\left\{\frac{u}{q}\right\}\right) &= \sum_{m=0}^{q-1} B_1\left(\left\{\frac{m}{q}\right\}\right) \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} e_q(a(u-m)) = \\ &= \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} e_q(au) \sum_{m=0}^{q-1} B_1\left(\left\{\frac{m}{q}\right\}\right) e_q(-am) = \sum_{a=0}^{q-1} c_a e_q au. \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты Фурье c_a . Имеем

$$c_0 = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} B_1\left(\left\{\frac{m}{q}\right\}\right) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} \left(\frac{m}{q} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2q},$$

при $1 \leq a \leq q-1$ из леммы 1б) получим

$$\begin{aligned} c_a &= \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} B_1\left(\left\{\frac{m}{q}\right\}\right) e_q(-am) = \frac{1}{q^2} \sum_{m=1}^{q-1} m e_q(-am) = \\ &= \frac{1}{q^2} \left(\frac{e_q(-a) - 1}{(1 - e_q(-a))^2} - \frac{q-1}{1 - e_q(-a)} \right) = \frac{1}{q(e_q(-a) - 1)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $q > 1, u$ — натуральные числа. Тогда имеем

$$B_2\left(\left\{\frac{u}{q}\right\}\right) = \left\{\frac{u}{q}\right\}^2 - \left\{\frac{u}{q}\right\} + \frac{1}{6} = \sum_{k=0}^{q-1} c_k e_q(ku),$$

где $c_k = c_k(2) = -2q^{-2} \frac{e^{-2\pi i \frac{kr}{q}}}{\left(1 - e^{-2\pi i \frac{kr}{q}}\right)^2}$ при $1 \leq k \leq q-1$ и $c_0 = -\frac{1}{6q^2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала вычислим $c_0 = c_0(2)$. Получим

$$c_0 = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} B_2\left(\frac{r}{q}\right) = \frac{1}{q^3} \sum_{r=1}^{q-1} r^2 - \frac{1}{q^2} \sum_{r=1}^{q-1} r + \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6q^2}.$$

Найдём коэффициенты Фурье $c_k = c_k(2)$ при $1 \leq k < q$. Имеем

$$c_k = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} B_2\left(\frac{r}{q}\right) e^{-2\pi i \frac{kr}{q}} = \frac{1}{q^3} \sum_{r=1}^{q-1} r^2 e^{-2\pi i \frac{kr}{q}} - \frac{1}{q^2} \sum_{r=1}^{q-1} r e^{-2\pi i \frac{kr}{q}} = \Sigma_1 - \Sigma_2.$$

Далее воспользуемся следующими формулами (лемма 1.б,в)

$$\sum_{r=1}^{q-1} r^2 z^r = \frac{z^2 - z^{q+2}}{(1-z)^3} + \frac{z - (2q+1)z^{q+1}}{(1-z)^2} - \frac{q^2 z^q}{1-z}$$

и

$$\sum_{r=1}^{q-1} r z^r = \frac{z - z^q}{(1-z)^2} - \frac{(q-1)z^q}{1-z}.$$

Получим

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= q^{-3} \sum_{r=1}^{q-1} r^2 e_q(-kr) = \frac{e_q(-k) - (2q+1)e_q(-k)}{q^3(1 - e_q(-k))^2} - \frac{1}{q(1 - e_q(-k))} = \\ &= -2 \frac{e_q(-k)}{q^2(1 - e_q(-k))^2} - \frac{1}{q(1 - e_q(-k))}, \\ \Sigma_2 &= \frac{e_q(-k) - 1}{q^2(1 - e_q(-k))^2} - \frac{q-1}{q^2(1 - e_q(-k))}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_k = c_k(2) = -2q^{-2} \frac{e^{-2\pi i \frac{kr}{q}}}{\left(1 - e^{-2\pi i \frac{kr}{q}}\right)^2}.$$

Лемма доказана. $\square$

2. Вычисление G_1 . Доказательство теоремы 1

Из определения G_1 находим

$$G_1 = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) B_1 \left(\frac{n}{q}\right) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) \left(\frac{n}{q} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{q-1} n \left(\frac{n}{q}\right).$$

Следовательно,

$$qG_1 = \sum_{n=1}^{q-1} n \left(\frac{n}{q}\right).$$

В частности, при $q \equiv 3 \pmod{4}$ получим цепочку сравнений

$$qG_1 \equiv \sum_{n=1}^{q-1} n \pmod{2}, \quad G_1 \equiv 1 \pmod{2}, \quad |G_1| \geq 1.$$

Далее при $q \equiv 1 \pmod{4}$ имеем

$$-qG_1 = \sum_{n=1}^{q-1} n \left(\frac{n}{q}\right) = q \sum_{n=1}^{(q-1)/2} \left(\frac{n}{q}\right) = 0.$$

Наконец, исходя из формулы а) леммы, при $1 \leq k < q$ получим

$$c_k = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} \left(\frac{r}{q} - \frac{1}{2}\right) e^{-2\pi i \frac{rk}{q}} = \frac{1}{q^2} \sum_{r=1}^{q-1} r e^{-\frac{2\pi i k}{q}} = \frac{1}{q \left(1 - e^{-\frac{2\pi i k}{q}}\right)}.$$

Отсюда, используя представление для G_1 , находим

$$G_1 = \varepsilon \sqrt{q} \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right) c_k = \frac{\varepsilon}{\sqrt{q}} \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right) \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi i k}{q}}}.$$

Все утверждения теоремы 1 доказаны. $\square$

3. Вычисление G_2 . Доказательство теоремы 2

Найдём разложение в конечный ряд Фурье суммы G_2 . Получим

$$G_2 = \varepsilon \sqrt{q} \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right) c_k(2) = -2\varepsilon q^{-3/2} \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{k}{q} \right) \frac{e^{-2\pi i \frac{kr}{q}}}{\left(1 - e^{-2\pi i \frac{kr}{q}}\right)^2}.$$

Далее вычислим G_2 при $q \equiv 3 \pmod{4}$. Имеем

$$\begin{aligned} G_2 &= \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q} \right) B_2 \left(\frac{n}{q} \right) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q} \right) \left(\left\{ \frac{n}{q} \right\}^2 - \left\{ \frac{n}{q} \right\} + \frac{1}{6} \right) = \\ &= \frac{1}{q^2} \sum_{n=1}^{q-1} n^2 \left(\frac{n}{q} \right) - \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{q-1} n \left(\frac{n}{q} \right). \end{aligned}$$

После замены переменной суммирования n на $q - n$ при $1 \leq n \leq q - 1$ находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{q-1} \frac{n^2}{q^2} \left(\frac{n}{q} \right) &= \sum_{n=1}^{q-1} \frac{(q-n)^2}{q^2} \left(\frac{q-n}{q} \right) = \\ &= - \sum_{n=1}^{q-1} \frac{(q-n)^2}{q^2} \left(\frac{n}{q} \right) = 2 \sum_{n=1}^{q-1} \frac{n}{q} \left(\frac{n}{q} \right) - \sum_{n=1}^{q-1} \frac{n^2}{q^2} \left(\frac{n}{q} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{q-1} \frac{n^2}{q^2} \left(\frac{n}{q} \right) = \sum_{n=1}^{q-1} \frac{n}{q} \left(\frac{n}{q} \right).$$

Отсюда получим, что $G_2 = 0$ при $q \equiv 3 \pmod{4}$.

Наконец вычислим G_2 при $q \equiv 1 \pmod{4}$. Имеем по теореме 1

$$G_2 = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q} \right) \left(\left\{ \frac{n}{q} \right\} \right)^2.$$

Теорема 2 доказана. $\square$

4. Заключение.

В настоящей статье найдены новые формулы, выражающие значение символа Лежандра через полные суммы от периодических функций. Последнее обстоятельство позволяет получить новые аналитические свойства соответствующих рядов Дирихле и арифметических функций (см. [1]–[9]).

Важную роль в получении основных результатов сыграла техника конечных рядов Фурье, которая позволяет находить простые формулы для некоторых теоретико-числовых функций удобные для исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2-е изд., Москва, Наука, 1980, 144 с.
2. Hua L.-K. Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.
3. Архипов Г. И. Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос.ун-та, 2013. 464 с.
4. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 с.
5. Chubarikov, V. N. Azerbaijan-Turkey-Ukrainian Int. Conf. "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications". Abstracts. (September 08–13, 2015, Baku—Azerbaijan). Linear arithmetic sums and Gaussian multiplication theorem. 2015, p. 38.
6. Чубариков В. Н. Элементарный вывод оценки полной рациональной арифметической суммы от многочлена // Чебышевский сборник. — 2015. — Т.16, №3(55). — С.452–461.
7. Чубариков В. Н. Показатель сходимости среднего значения полных рациональных арифметических сумм // Чебышевский сборник. — 2015. — Т.16, №4(56). — С.303–318.
8. Чубариков В. Н. Арифметические суммы от значений полинома // Докл. РАН — 2016. — Т.466, №2. — С.152–153.
9. Чубариков В. Н. Полные рациональные арифметические суммы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I, Математика, механика. 2015. №1. С. 60–61.
10. Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. — М.: Изд-во Академии наук СССР, 1959, 979 с.
11. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел.
12. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971,
13. Прахар К. Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967,
14. Хассе Г. Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953.
15. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.
16. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967. 376 с.
17. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. Method of Trigonometric Sums in Number Theory, 2nd Ed., M.: Nauka, 1980, pp. 144.
2. Hua L.-K. Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.
3. Arkhipov G. I. Selected Papers. Orjol: Publ. House of Orjol Univ., 2013. pp. 464.
4. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. pp. 554.

5. Chubarikov, V. N. Azerbaijan-Turkey-Ukrainian Int. Conf. "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications". Abstracts. (September 08–13, 2015, Baku—Azerbaijan). Linear arithmetic sums and Gaussian multiplication theorem. 2015, p. 38.
6. Chubarikov, V. N. An elementary deduction of the estimate of the complete rational arithmetical sum of polynomial // Chebyshev Sbornik. — 2015. — v.16, №3(55). — p.452–461.
7. Chubarikov, V. N. The exponent of a convergence of the mean value of the complete rational arithmetical sums // Chebyshev Sbornik. — 2015. — v.16, № 4(56). — p.303–318.
8. Chubarikov, V. N. Arithmetical sums of values of polynomial // Doklady of RAS — 2016. — v.466, № 2. — p.152–153.
9. Chubarikov, V. N. Complete rational arithmetical sums // Vestnik of Moscow State University. Seriya I. Math., Mech. 2015. № 1. p. 60–61.
10. Gauss K. F. Works on the Number Theory. — M.: Publ. House of Academy of Sci. USSR, 1959, 979 pp.
11. Ireland K., Rosen M. Classical introduction to modern number theory.
12. Davenport H. Multiplicative number theory, Markham Publ. Comp., Chicago, 1967.
13. Prachar K. Primzahlverteilung, Springer - Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1957,
14. Hasse H. Vorlesungen über zahlentheorie, Berlin, 1950.
15. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. Number theory. M: Nauka, 1985.
16. Gelfond A. O. Calculus of finite differences. — M.: Nauka, 1967. pp. 376.
17. Korobov N. M. Number-theoretical methods in numerical analysis. 2nd Ed. / M: MCCME, 2004. pp. 288.

Получено 01.02.2019 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-294-297

Об одном применении интеграла Дирихле

А. Гияси

Гияси Азар — кандидат физико-математических наук, кафедра математики, Факультет математики и компьютерных наук, Университет имени Алламе Табатабаи, г. Тегеран (Иран).
e-mail: azarghyasi@yahoo.com

Аннотация

Найдено преобразование Фурье одного разрывного множителя с остатком и для последнего получена оценка его преобразования Фурье.

Ключевые слова: интеграл Дирихле, разрывный множитель.

Библиография: 1 название.

Для цитирования:

А. Гияси. Об одном применении интеграла Дирихле // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 294–297.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-294-297

An one application of Dirichlet integral

A. Ghyasi

Ghyasi Azar — candidate of physical and mathematical sciences, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Sciences, Allameh Tabataba'i University, Tehran (Iran).
e-mail: azarghyasi@yahoo.com

Abstract

The Fourier transformation of a discontinuous factor with the remainder is found and for the last one the estimation of its Fourier transformation is obtained.

Keywords: Dirichlet integral, the breaking multiplier.

Bibliography: 1 title.

For citation:

A. Ghyasi, 2019, "An one application of Dirichlet integral", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 294–297.

Рассмотрим интеграл Дирихле вида

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi xy)}{y} dy = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

В настоящей работе будет дано еще одно применение этого интеграла $D(x)$ (см., например, [1]). Найденные ниже теоремы 1 и 2 являются полезным инструментом в диофантовом анализе.

Пусть $\Delta > 0$ — вещественное число, и пусть $h_{\Delta}(x)$ — индикаторная функция промежутка $[-\Delta, \Delta]$, т.е.

$$h_{\Delta}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < \Delta, \\ 1/2, & \text{если } |x| = \Delta, \\ 0, & \text{если } |x| > \Delta. \end{cases}$$

Тогда находим

$$h_{\Delta}(x) = \frac{1}{2} (D(x + \Delta) - D(x - \Delta)).$$

Воспользовавшись формулой для интеграла Дирихле $D(x)$, получим

$$h_{\Delta}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi\Delta y)}{y} \cos(2\pi xy) dy.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T\Delta \geq 1$. Тогда имеем

$$h_{\Delta}(x) = A(x, T) + R(x, T),$$

где

$$A(x, T) = \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{\sin(2\pi\Delta y)}{y} \cos(2\pi xy) dy = \frac{1}{2} (D_T(x + \Delta) - D_T(x - \Delta)),$$

$$D_T(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{\sin(2\pi uy)}{y} dy, \quad |R(x, T)| \leq \sigma(x, T) = \frac{8}{\sqrt{1 + T^2(\Delta - |x|)^2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем интеграл $R(x, T)$. Получим

$$R(x, T) = \frac{1}{\pi} \int_T^{\infty} (\sin(2\pi(x + \Delta)y) - \sin(2\pi(x - \Delta)y)) \frac{dy}{y} = R_1 - R_2.$$

Отсюда, используя вторую теорему о среднем, имеем

$$|R_1| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{2\pi T|x+\Delta|}^{\infty} \sin u \frac{du}{u} \right| \leq \frac{1}{\pi^2 T|x + \Delta|}, \quad |R_2| \leq \frac{1}{\pi^2 T|x - \Delta|}.$$

Таким образом, для любых вещественных x и положительных Δ, T с условием $|x| \neq \Delta$, находим

$$|R(x, T)| \leq |R_1| + |R_2| \leq \frac{2}{\pi^2 T|\Delta - |x||}.$$

Следовательно, при $|x - \Delta| \geq 1/T$ или $|x + \Delta| \geq 1/T$, получим $|R(x, T)| \leq \frac{2}{\pi^2}$.

Пусть, теперь, либо $|x - \Delta| \leq 1/T$, либо $|x + \Delta| \leq 1/T$. Тогда имеем

$$R(x, T) = h_\Delta(x) - A(x, T) = h_\Delta(x) - A_0 - \frac{1}{2} (A_1(x + \Delta) - A_1(x - \Delta)),$$

где

$$A_0 = A(x, \Delta^{-1}), A_1(u) = \frac{2}{\pi} \int_{\Delta^{-1}}^{\infty} \frac{\sin(2\pi uy)}{y} dy$$

Стало быть, справедливо неравенство

$$|R(x, T)| \leq h_\Delta(x) + |A_0| + \frac{1}{2} (|A_1(x + \Delta)| + |A_1(x - \Delta)|).$$

Далее, имеем

$$|A_0| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\Delta^{-1}} \frac{\sin(2\pi \Delta y)}{y} \cos(2\pi xy) dy \right| \leq \frac{2}{\pi},$$

$$|A_1(u)| = \left| \frac{2}{\pi} \int_{\Delta^{-1}}^T \frac{\sin(2\pi uy)}{y} dy \right| \leq \frac{2}{\pi^2 |u|}.$$

В случае $|u| \leq 1/T$ получим

$$|A_1(u)| \leq \frac{2}{\pi} |u| T \leq \frac{2}{\pi}.$$

Наконец, собирая вместе полученные неравенства и используя условие, что либо

$$x \in [-\Delta - 1/T, -\Delta + 1/T], \quad \text{либо} \quad x \in [\Delta - 1/T, \Delta + 1/T],$$

находим

$$|R(x, T)| \leq 1 + \frac{4}{\pi}.$$

Таким образом, для любых x и любых положительных T, Δ , справедливо неравенство

$$|R(x, T)| \leq 4 \min \left(1, \frac{1}{T|\Delta - |x||} \right) \leq \frac{8}{\sqrt{1 + T^2(\Delta - |x|)^2}}.$$

Теорема 1 доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 2. При $T\Delta \geq 1$ имеет место формула

$$\sigma(x, T) = \frac{8}{\sqrt{1 + T^2(\Delta - |x|)^2}} = \int_0^\infty f(y) \cos(2\pi xy) dy,$$

причем для $y \geq 0$ справедливо неравенство

$$|f(y)| \leq \frac{1 + \ln T}{T} e^{-y/T}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из интегральной формулы Фурье для функции $\sigma(x, T)$ находим формулу для функции $f(y)$. Имеем

$$f(y) = 2 \int_0^\infty \sigma(x, T) \cos 2\pi xy dx = 16\varepsilon \int_0^\infty \frac{\cos(2\pi xy)}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\Delta - x)^2}} dx = 16\varepsilon g(y),$$

где $\varepsilon = 1/T$.

Для оценки функции $g(y)$ нам необходимо рассмотреть функцию комплексного переменного

$$h(z) = \frac{\cos(2\pi zy)}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\Delta - z)^2}}$$

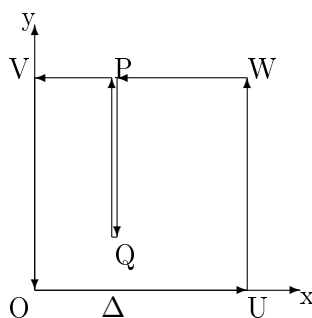
в области $\operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0$.

Заметим, что функция $h(z)$ будет однозначной аналитической функцией в этом первом квадранте с разрезом по лучу $(\Delta + i/T, \Delta + i\infty)$.

Построим замкнутый контур L , который обходится в положительном направлении, и состоит из семи отрезков

$$L_1 = [O, U], L_2 = [U, W], L_3 = [W, P], L_4 = [P, Q], L_5 = [Q, P], L_6 = [P, V], L_7 = [V, O]$$

(см. рис. ниже). Точка O — начало координат, точке U отвечает комплексное число u , точке V — число iv , точке W — число $u + iv$, точке P — число $\Delta + iv$, и, наконец, точке Q — число $\Delta + i/T$.



Стандартное применение теоремы Коши к функции $h(z)$ и рассматриваемому контуру L приводит к доказательству теоремы 2. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов, Г. И., Садовничий, В. А., Чубариков, В. Н. Лекции по математическому анализу, 6-е изд. — М.: Дрофа, 2008, 640 с.

Получено 05.12.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-298-306

О неполных частных одной цепной дроби¹

А. Н. Кормачева

Кормачева Антонина Николаевна — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: juska789@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам вычисления неполных частных разложения $\frac{a_m}{N_m}$ в цепную дробь, где a_m и N_m параметры параллелепипедальной сетки, которая является приближением квадратичной алгебраической сетки рациональной сеткой.

Результаты данной работы позволяют реализовать быстрые алгоритмы вычисления функции качества этих рациональных приближений.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:

А. Н. Кормачева. О неполных частных одной цепной дроби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 298–306.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-298-306

About the partial quotients of one of the continued fractions²

A. N. Kormacheva

Kormacheva Antonina Nikolaevna — Postgraduate Student, Department of Algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: juska789@mail.ru

Abstract

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_r_a.

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

This paper is devoted to the computation of partial quotients of decomposition of $\frac{a_m}{N_m}$ into a continued fraction, where a_m and N_m are parameters of a parallelepipedal grid, which is an approximation of a quadratic algebraic grid by a rational grid.

The results of this work allow us to implement fast algorithms for calculating the quality function of these rational approximations.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

Bibliography: 27 titles.

For citation:

A. N. Kormacheva, 2019, "About the partial quotients of one of the continued fractions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 298–306.

1. Введение

В работе [3] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod{4}$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля F :

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

Таким образом, $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{p}$, $\Theta^{(2)} = n - k\sqrt{p}$ $n, k \in \mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - 2nx + n^2 - pk^2 = 0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{p}, -\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda^*(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\vec{\lambda}_2^* = (\frac{\sqrt{p}}{2p}, -\frac{\sqrt{p}}{2p})$ и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2p}$.

Рассмотрим разложение $\sqrt{p}$ в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{p} = q_0 + [(q_1, \dots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

с периодом $(q_1, \dots, q_n, 2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается m -ая подходящая дробь к $\sqrt{p}$. Таким образом,

$$\sqrt{p} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \{(Q_m(n + k\sqrt{p}), Q_m(n - k\sqrt{p})) | n, k \in \mathbb{Z}\},$$

а через $\Lambda_m(p)$ — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m\sqrt{p}, -Q_m\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(F) = 2Q_m^2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(F)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}_{m,1}^* = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m} \right), \quad \vec{\lambda}_{m,2}^* = \left(\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m}, -\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m} \right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda_m^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2pQ_m^2}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(p)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(p) = 2Q_m P_m$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(p)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}_{m,1,Z}^* = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m} \right), \quad \vec{\lambda}_{m,2,Z}^* = \left(\frac{1}{2P_m}, -\frac{1}{2P_m} \right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda_m^*(p) = \frac{1}{2P_m Q_m}$.

Рассматриваются следующие две сетки:

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \Lambda_m^*(F) \cap [-1; 1]^s, \quad M(\Lambda_m(p)) = \Lambda_m^*(p) \cap [0; 1]^s.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} M_1(\Lambda_m(F)) &= \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m} \right) \middle| k \in A(n), |n| \leq 2Q_m - 1 \right\}, \\ A(n) &= \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} -2P_m < k < 2P_m, & \text{при } n = 0, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots, 2Q_m - 1, \\ -2P_m - \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = -1, \dots, -2Q_m + 1; \end{array} \right\}, \\ M(\Lambda_m(p)) &= \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \middle| k \in B(n), 0 \leq n \leq 2Q_m - 1 \right\}, \\ B(n) &= \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_m n}{Q_m} \leq k \leq \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots, Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \dots, 2Q_m - 1; \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Хорошо известно, что граничной функцией класса $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для параллелепипедальных сеток является функция $h(x, y) = 9(1 - 2\{x\})^2(1 - 2\{y\})^2$, поэтому для оценки качества сетки $M(\Lambda_m(p))$ в работе [3] предложено использовать функцию

$$H(M(\Lambda_m(p))) = \frac{9}{2P_m Q_m} \sum_{n=0}^{2Q_m-1} \sum_{k \in B(n)} \left(1 - 2 \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m} \right) \right)^2 \left(1 - 2 \left(\frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \right)^2,$$

которая для краткости названа функцией качества. Для вычисления функции качества обобщённой параллелепипедальной сетки $M(\Lambda_m(p))$ требуется $O(N(P_m, Q_m))$ арифметических операций, где $N(P_m, Q_m)$ — количество точек сетки $M(\Lambda_m(p))$. В работе [3] найден алгоритм вычисления функции качества за $O(\sqrt{N(P_m, Q_m)})$ арифметических операций, а в работе [4] построен алгоритм вычисления значений функции качества за $O(\ln N(P_m, Q_m))$ арифметических операций. Центральным моментом в этой работе было доказательство, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая алгебраическую квадратичную сетку, является параллелепипедальной сеткой. Оптимальный коэффициент a_m по модулю $N_m = 2P_m Q_m$ в этой работе задавался по формуле

$$a_m = \begin{cases} 2P_m Q_{m-1} - 1, & \text{при } m \text{ — нечётном} \\ 2P_m(Q_m - Q_{m-1}) - 1, & \text{при } m \text{ — четном.} \end{cases}$$

Цель данной работы — найти неполные частные разложения $\frac{a_m}{N_m}$ в цепную дробь:

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{1}{q_{1,m} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{l-1,m} + \frac{1}{q_{l,m}}}}}$$

длины $l = l(m)$.

2. Сведения из теории цепных дробей квадратичных иррациональностей

В этой работе нас будет интересовать только цепная дробь для $\sqrt{p}$. Согласно теории (см. [2], стр. 104, 111, 112) для простых вида $p \equiv 3 \pmod{4}$ цепная дробь для $\sqrt{p}$ имеет вид

$$\sqrt{p} = \overline{q_0, q_1, \dots, q_k, q_{k+1}, q_k, \dots, q_1, 2q_0}$$

и $n = 2k + 1$, где k может быть любым целым числом $k \geq 0$. Отсюда следует, что произвольная подходящая дробь $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу $\sqrt{p}$ имеет вид

$$\frac{P_m}{Q_m} = \frac{[q_0, \dots, q_m]_{(m+1)}}{[q_1, \dots, q_m]_{(m)}},$$

где скобки Эйлера $[b_1, \dots, b_n]_{(n)}$, определены рекуррентно

$$[]_{(-1)} = 0, \quad []_{(0)} = 1, \quad [b_1, \dots, b_n]_{(n)} = b_n[b_1, \dots, b_{n-1}]_{(n-1)} + [b_1, \dots, b_{n-2}]_{(n-2)} \quad (n \geq 1)$$

и неполные частные q_ν заданы равенствами

$$q_\nu = \begin{cases} q_0, & \text{при } \nu = 0 \\ q_\nu, & \text{при } 1 \leq \nu \leq 1 + k \\ q_{n+1-\nu}, & \text{при } 2 + k \leq \nu \leq n \\ 2q_0, & \text{при } \nu = n + 1 \\ q_{(n+1)\{\frac{\nu}{n+1}\}}, & \text{при } \left\{\frac{\nu}{n+1}\right\} > 0 \\ 2q_0, & \text{при } \left\{\frac{\nu}{n+1}\right\} = 0. \end{cases}$$

Напомним, что справедливо равенство

$$\frac{Q_{m-1}}{Q_m} = \frac{[q_1, \dots, q_{m-1}]_{(m-1)}}{[q_1, \dots, q_m]_{(m)}} = \frac{1}{q_m + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_1}}}}.$$

3. Случай нечетного номера подходящей дроби

Если m — нечетное, то

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{2P_m Q_{m-1} - 1}{2P_m Q_m} = \frac{Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}}{Q_m}.$$

Положим $R_\nu = Q_{m-\nu} + \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m}$, ($0 \leq \nu \leq m+1$). Ясно, что

$$\begin{aligned} R_0 &= Q_m, \quad R_1 = Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}, \quad \frac{a_m}{N_m} = \frac{R_1}{R_0}, \\ R_m &= 1 - \frac{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_2]_{(m-1)}}{2P_m}, \quad R_{m+1} = \frac{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_1]_{(m)}}{2P_m} = \frac{Q_m}{2P_m}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства $R_\nu = q_{m-\nu}R_{\nu+1} + R_{\nu+2}$, ($0 \leq \nu \leq m-1$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при $\nu = 0$ имеем:

$$R_0 = Q_m = q_m Q_{m-1} + Q_{m-2} = q_m \left(R_1 - \frac{(-1)^1 []_{(0)}}{2P_m} \right) + R_2 - \frac{(-1)^2 [q_m]_{(1)}}{2P_m} = q_m R_1 + R_2$$

и утверждение верно при $\nu = 0$.

Далее имеем при $\nu > 0$:

$$\begin{aligned} R_\nu &= Q_{m-\nu} + \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m} = \\ &= q_{m-\nu} Q_{m-\nu-1} + Q_{m-\nu-2} + \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m} = \\ &= q_{m-\nu} \left(R_{\nu+1} - \frac{(-1)^{\nu+1} [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+1-\nu}]_{(\nu)}}{2P_m} \right) + R_{\nu+2} - \frac{(-1)^{\nu+2} [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m-\nu}]_{(\nu+1)}}{2P_m} + \\ &\quad + \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m} = q_{m-\nu} R_{\nu+1} + R_{\nu+2}, \end{aligned}$$

так как

$$q_{m-\nu} [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+1-\nu}]_{(\nu)} + [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)} = [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m-\nu}]_{(\nu+1)}.$$

□

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$\frac{2P_m Q_{m-1} - 1}{2P_m Q_m} = \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_1 + \frac{R_{m+1}}{R_m}}}}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\frac{2P_m Q_{m-1} - 1}{2P_m Q_m} = \frac{Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}}{Q_m} = \frac{R_1}{R_0},$$

то по лемме 1 последовательно получим:

$$\begin{aligned} \frac{2P_m Q_{m-1} - 1}{2P_m Q_m} &= \frac{1}{q_m + \frac{R_2}{R_1}} = \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{R_3}{R_2}}} = \dots = \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_{m-2} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{m-\nu} + \frac{R_{\nu+2}}{R_{\nu+1}}}}}}} = \\ &= \dots = \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{q_{m-2} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_1 + \frac{R_{m+1}}{R_m}}}}} \end{aligned}$$

и лемма полностью доказана. $\square$

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$\frac{R_{m+1}}{R_m} = \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_m}}}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $Q_m = [q_1, \dots, q_m]_{(m)}$, $P_m = [q_0, \dots, q_m]_{(m+1)}$ и $P_m = q_0 Q_m + [q_2, \dots, q_m]_{(m-1)}$.

Отсюда следует, что

$$\frac{R_{m+1}}{R_m} = \frac{\frac{Q_m}{2P_m}}{1 - \frac{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_2]_{(m-1)}}{2P_m}} = \frac{Q_m}{2P_m - [q_m, q_{m-1}, \dots, q_2]_{(m-1)}} = \frac{Q_m}{2q_0 Q_m + [q_m, q_{m-1}, \dots, q_2]_{(m-1)}}.$$

Далее получим:

$$\frac{R_{m+1}}{R_m} = \frac{1}{2q_0 + \frac{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_2]_{(m-1)}}{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_1]_{(m)}}} = \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_m}}}}$$

и лемма полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 1. *При нечетном m справедливо равенство*

$$\frac{a_m}{N_m} =$$

$$= \frac{1}{q_m + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_m}}}}}}}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы непосредственно следует из лемм 2 и 3. $\square$

4. Случай четного номера подходящей дроби

Если m — четное, то

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{2P_m Q_m - 2P_m Q_{m-1} - 1}{2P_m Q_m} = \frac{Q_m - Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}}{Q_m} = \frac{1}{1 + \frac{Q_{m-1} + \frac{1}{2P_m}}{Q_m - Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}}}.$$

Здесь возможно два случая: $q_m = 1$ и $q_m > 1$.

Сначала рассмотрим второй случай $q_m > 1$. Тогда

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{1}{1 + \frac{Q_{m-1} + \frac{1}{2P_m}}{Q_m - Q_{m-1} - \frac{1}{2P_m}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{q_m - 1 + \frac{Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}}{Q_{m-1} + \frac{1}{2P_m}}}}.$$

Продолжая разложение, получим

$$\begin{aligned} \frac{Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}}{Q_{m-1} + \frac{1}{2P_m}} &= \frac{1}{q_{m-1} + \frac{Q_{m-3} + \frac{[q_m, q_{m-1}]_{(2)}}{2P_m}}{Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}}}, \\ \frac{a_m}{N_m} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{q_m - 1 + \frac{Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}}{Q_{m-1} + \frac{1}{2P_m}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{q_m - 1 + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{Q_{m-3} + \frac{[q_m, q_{m-1}]_{(2)}}{2P_m}}{Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}}}}}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $q_m = 1$, тогда

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{1}{1 + \frac{Q_{m-1} + \frac{1}{2P_m}}{Q_{m-2} - \frac{1}{2P_m}}} = \frac{1}{1 + q_{m-1} + \frac{Q_{m-3} + \frac{1+q_{m-1}}{2P_m}}{Q_{m-2} - \frac{1}{2P_m}}} = \frac{1}{1 + q_{m-1} + \frac{Q_{m-3} + \frac{[q_m, q_{m-1}]_{(2)}}{2P_m}}{Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}}}.$$

Положим $R_\nu^* = Q_{m-\nu} - \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m}$, ($2 \leq \nu \leq m+1$). Ясно, что

$$\begin{aligned} R_2^* &= Q_{m-2} - \frac{q_m}{2P_m}, \quad R_3^* = Q_{m-3} + \frac{[q_m, q_{m-1}]_{(2)}}{2P_m}, \\ R_m^* &= 1 - \frac{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_2]_{(m-1)}}{2P_m}, \quad R_{m+1}^* = \frac{[q_m, q_{m-1}, \dots, q_1]_{(m)}}{2P_m} = \frac{Q_m}{2P_m}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Справедливы равенства $R_\nu^* = q_{m-\nu} R_{\nu+1}^* + R_{\nu+2}^*$, ($2 \leq \nu \leq m-1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при $\nu > 1$:

$$\begin{aligned} R_\nu^* &= Q_{m-\nu} - \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m} = \\ &= q_{m-\nu} Q_{m-\nu-1} + Q_{m-\nu-2} - \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m} = \\ &= q_{m-\nu} \left(R_{\nu+1}^* + \frac{(-1)^{\nu+1} [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+1-\nu}]_{(\nu)}}{2P_m} \right) + R_{\nu+2}^* + \frac{(-1)^{\nu+2} [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m-\nu}]_{(\nu+1)}}{2P_m} - \\ &\quad - \frac{(-1)^\nu [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)}}{2P_m} = q_{m-\nu} R_{\nu+1}^* + R_{\nu+2}^*, \end{aligned}$$

так как

$$q_{m-\nu} [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+1-\nu}]_{(\nu)} + [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m+2-\nu}]_{(\nu-1)} = [q_m, q_{m-1}, \dots, q_{m-\nu}]_{(\nu+1)}.$$

□

Нетрудно видеть, что справедливы равенства

$$\frac{a_m}{N_m} = \begin{cases} \frac{1}{1 + \frac{1}{q_m - 1 + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{R_3^*}{R_2^*}}}}, & \text{при } q_m > 1 \\ \frac{1}{1 + q_{m-1} + \frac{R_3^*}{R_2^*}}, & \text{при } q_m = 1. \end{cases}$$

Ясно, что второе получается из первого при $q_m = 1$. Повторяя дословно рассуждения из предыдущего раздела, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. При четном m справедливо равенство

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{1}{1 + \frac{1}{q_m - 1 + \frac{1}{q_{m-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_m}}}}}}}}}}.$$

5. Заключение

Пусть α — произвольная вещественная иррациональность и решётка $\Lambda(\alpha)$ задана равенством

$$\Lambda(\alpha) = \{(n + k\alpha, n - k\alpha) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначает m -ю подходящая дробь к α . По аналогии с квадратичным случаем можно рассмотреть сетку

$$M(\Lambda_m(\alpha)) = \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \middle| k \in B(n), 0 \leq n \leq 2Q_m - 1 \right\},$$

$$B(n) = \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_m n}{Q_m} \leq k \leq \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots, Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \dots, 2Q_m - 1; \end{array} \right\}$$

Из результатов А. В. Михляевой [4] следует, что это всегда будет параллелепипедальная сетка. Качество этой сетки можно рассчитать с помощью быстрого алгоритма из работы [1]. Доказанные теоремы 1 и 2 дают всю необходимую информацию для этих алгоритмов.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.
2. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. — М.: Наука. 1965 г. — 176 с.
3. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.
4. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 307–312.

REFERENCES

1. Vronskaya, G. T., Dobrovol'skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids. monograph", edited by N. M. Dobrovol'skii. Tula.
2. Davenport, H., 1965, "The higher arithmetic", *Moscow, Nauka* — pp. 176.
3. Mikhlyayeva, A. V., 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.
4. Mikhlyayeva, A. V., 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 307–312.

Получено 25.12.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-307-312

**Функция качества для приближения квадратичных
алгебраических сеток¹**

А. В. Михляева

Михляева Анна Владимировна — аспирант кафедры алгебры и дискретной математики,
Оренбургский государственный университет, г. Оренбург.

e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам построения быстрых алгоритмов вычисления функции качества рациональных сеток, приближающих квадратичные алгебраические сетки.

Показано, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая квадратичную алгебраическую сетку, является параллелепипедальной. Как следствие построен алгоритм вычисления функции качества за $O(\ln N)$ арифметических операций.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:

А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток
// Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 307–312.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 511.9

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-307-312

Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets²

A. V. Mikhlyaeva

Mikhlyaeva Anna Vladimirovna — Postgraduate Student, Department of Algebra and discrete
mathematics, Orenburg state University, Orenburg.

e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Abstract

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта
№19-41-710004_r_a.

²Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

This work is devoted to the construction of fast algorithms for calculating the quality function of rational grids approximating quadratic algebraic nets.

It is shown that the generalized parallelepipedal net approximating the quadratic algebraic net is parallelepipedal. As a consequence, an algorithm for calculating the quality function for $O(\ln N)$ arithmetic operations is constructed.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

Bibliography: 27 titles.

For citation:

A. V. Mikhlyeva, 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 307–312.

1. Введение

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор

$$\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\}).$$

В работе [2] рассматривалось квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod{4}$. Для него кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначается алгебраическая решётка поля F :

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$$

и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

Таким образом, $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{p}$, $\Theta^{(2)} = n - k\sqrt{p}$, $n, k \in \mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2 - 2nx + n^2 - pk^2 = 0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{p}, -\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda^*(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\vec{\lambda}_2^* = (\frac{\sqrt{p}}{2p}, -\frac{\sqrt{p}}{2p})$ и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2p}$.

Рассмотрим разложение $\sqrt{p}$ в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{p} = q_0 + [(q_1, \dots, q_n, 2q_0)] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{2q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

с периодом $(q_1, \dots, q_n, 2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначается m -ая подходящая дробь к $\sqrt{p}$. Таким образом,

$$\sqrt{p} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Через $\Lambda_m(F)$ обозначается алгебраическая решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \{(Q_m(n + k\sqrt{p}), Q_m(n - k\sqrt{p})) | n, k \in \mathbb{Z}\},$$

а через $\Lambda_m(p)$ — целочисленная решётка, заданная равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m\sqrt{p}, -Q_m\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(F) = 2Q_m^2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(F)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}_{m,1}^* = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m} \right), \quad \vec{\lambda}_{m,2}^* = \left(\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m}, -\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m} \right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda_m^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2pQ_m^2}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(p)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det \Lambda_m(p) = 2Q_m P_m$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(p)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}_{m,1,Z}^* = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m} \right), \quad \vec{\lambda}_{m,2,Z}^* = \left(\frac{1}{2P_m}, -\frac{1}{2P_m} \right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det \Lambda_m^*(p) = \frac{1}{2P_m Q_m}$.

Рассматриваются следующие две сетки:

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \Lambda_m^*(F) \cap [-1; 1]^s, \quad M(\Lambda_m(p)) = \Lambda_m^*(p) \cap [0; 1]^s.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} M_1(\Lambda_m(F)) &= \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m} \right) \middle| k \in A(n), |n| \leq 2Q_m - 1 \right\}, \\ A(n) &= \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} -2P_m < k < 2P_m, & \text{при } n = 0, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots, 2Q_m - 1, \\ -2P_m - \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = -1, \dots, -2Q_m + 1; \end{array} \right\}, \\ M(\Lambda_m(p)) &= \left\{ \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \middle| k \in B(n), 0 \leq n \leq 2Q_m - 1 \right\}, \\ B(n) &= \left\{ k \middle| \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_m n}{Q_m} \leq k \leq \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = 1, \dots, Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_m n}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m, \dots, 2Q_m - 1; \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что граничной функцией класса $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для параллелепипедальных сеток является функция $h(x, y) = 9(1 - 2\{x\})^2(1 - 2\{y\})^2$, поэтому для оценки качества сетки $M(\Lambda_m(p))$ в работе [2] предложено использовать функцию

$$H(M(\Lambda_m(p))) = \frac{9}{2P_m Q_m} \sum_{n=0}^{2Q_m-1} \sum_{k \in B(n)} \left(1 - 2 \left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m} \right) \right)^2 \left(1 - 2 \left(\frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m} \right) \right)^2,$$

которая для краткости названа функцией качества. Для вычисления функции качества обобщённой параллелепипедальной сетки $M(\Lambda_m(p))$ требуется $O(N(P_m, Q_m))$ арифметических операций, где $N(P_m, Q_m)$ — количество точек сетки $M(\Lambda_m(p))$. В работе [2] найден алгоритм вычисления функции качества за $O(\sqrt{N(P_m, Q_m)})$ арифметических операций и сформулирована гипотеза, что можно построить алгоритм вычисления значений функции качества за $O(\ln N(P_m, Q_m))$ арифметических операций.

Цель данной работы — построить такой алгоритм.

2. Преобразование функции качества

Для количества слагаемых в выражении для функции качества, которое обозначим через $N = N(P, Q)$, где $P = P_m$, $Q = Q_m$, справедливо равенство $N = N(P, Q) = 2PQ$.

Наряду с обозначением $H(M(\Lambda_m(p)))$ будем использовать $H(P, Q)$:

$$H(P, Q) = \frac{9}{N} \sum_{n=0}^{2Q-1} \sum_{k \in B(n)} \left(1 - 2 \left(\frac{n}{2Q} + \frac{k}{2P} \right) \right)^2 \left(1 - 2 \left(\frac{n}{2Q} - \frac{k}{2P} \right) \right)^2.$$

Нетрудно видеть, что

$$H(P, Q) = \frac{9}{N} \sum_{n=0}^{2Q-1} \sum_{k \in B(n)} \left(\left(1 - \frac{n}{Q} \right)^2 - \left(\frac{k}{P} \right)^2 \right)^2.$$

Обозначим через $T(n)$ величину $T(n) = \left\lfloor \frac{P \cdot n}{Q} \right\rfloor$. Ясно, что $T(n + Q) = P + T(n)$. В работе [2] доказана теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} H(P, Q) = \frac{9}{N} & \left(\frac{2}{5}P + \frac{2}{3P} - \frac{1}{15P^3} + 2 \sum_{n=1}^{Q-1} \left(1 + 2T(n) - 2 \frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2} + \right. \right. \\ & + \frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)(3T^2(n)+3T(n)-1)}{15P^4} - \\ & - 4 \frac{n}{Q} \left(1 + 2T(n) - \frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2} \right) + \\ & + \left(\frac{n}{Q} \right)^2 \left(6(1+2T(n)) - 2 \frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2} \right) - \\ & \left. \left. - \left(\frac{n}{Q} \right)^3 4(1+2T(n)) + \left(\frac{n}{Q} \right)^4 (1+2T(n)) \right) \right). \end{aligned}$$

Это выражение и даёт алгоритм вычисления функции качества за $O(\sqrt{N(P_m, Q_m)})$ арифметических операций.

3. Новое выражение для функции качества

В данном разделе покажем, что обобщённая параллелепипедальная сетка $M(\Lambda_m(p))$ является параллелепипедальной сеткой.

Положим $N_m = 2P_m Q_m$ и целое a_m зададим равенством

$$a_m = \begin{cases} 2P_m Q_{m-1} - 1, & \text{при } m \text{— нечётном} \\ 2P_m(Q_m - Q_{m-1}) - 1, & \text{при } m \text{— чётном.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо равенство $M(\Lambda_m(p)) = M(a_m, N_m)$, где параллелепипедальная сетка $M(a_m, N_m)$ задаётся равенством*

$$M(a_m, N_m) = \left\{ \left(\frac{n}{N_m}, \left\{ \frac{a_m n}{N_m} \right\} \right) \mid n = 0, \dots, N_m - 1 \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отдельно случай чётного m и нечётного.

Пусть m — нечётное число, тогда $P_m Q_{m-1} - P_{m-1} Q_m = 1$. Положим $n = tP_m + kQ_m$, где $0 \leq t \leq 2Q_m - 1$ и $k \in B(n)$. Тогда

$$\frac{n}{N_m} = \frac{t}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \quad \left\{ \frac{a_m n}{N_m} \right\} = \left\{ \frac{(2P_m Q_{m-1} - 1)(tP_m + kQ_m)}{N_m} \right\}.$$

Преобразуем выражение под знаком дробной доли, получим:

$$\left\{ \frac{(2P_m Q_{m-1} - 1)(tP_m + kQ_m)}{N_m} \right\} = \left\{ \frac{(1 + 2P_{m-1} Q_m)tP_m - kQ_m}{N_m} \right\} = \frac{t}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m},$$

что доказывает утверждение теоремы для случая нечётного m .

Перейдем к случаю чётного m , тогда $P_m Q_{m-1} - P_{m-1} Q_m = -1$. Далее имеем:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{a_m n}{N_m} \right\} &= \left\{ \frac{(2P_m(Q_m - Q_{m-1}) - 1)(tP_m + kQ_m)}{N_m} \right\} = \left\{ \frac{(-2P_m Q_{m-1} - 1)tP_m}{N_m} - \frac{k}{2P_m} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{(-2(P_{m-1} Q_m - 1) - 1)tP_m}{N_m} - \frac{k}{2P_m} \right\} = \frac{t}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m}, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение теоремы для случая чётного m .

Теорема полностью доказана. $\square$

Рассмотрим разложение $\frac{a_m}{N_m}$ в цепную периодическую дробь:

$$\frac{a_m}{N_m} = \frac{1}{q_{1,m} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{l-1,m} + \frac{1}{q_{l,m}}}}}$$

длины $l = l(m)$.

Для дальнейшего нам потребуются скобки Эйлера $[b_1, \dots, b_n]_{(n)}$, которые определяются рекуррентно

$$[]_{(-1)} = 0, \quad []_{(0)} = 1, \quad [b_1, \dots, b_n]_{(n)} = b_n [b_1, \dots, b_{n-1}]_{(n-1)} + [b_1, \dots, b_{n-2}]_{(n-2)} \quad (n \geq 1).$$

В работе [1] для величин H_k , заданных равенствами

$$H_k = \frac{9}{Q_k} \sum_{n=0}^{Q_k-1} \left(1 - 2 \frac{n}{Q_k} \right)^2 \left(1 - 2 \left\{ \frac{P_k n}{Q_k} \right\} \right)^2,$$

доказана теорема

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} H_k &= 1 + \frac{4}{5Q_k^2} \left(10 + 5k + \sum_{\lambda=1}^k q_\lambda^2 - \frac{3(P_k^2 + Q_{k-1}^2)}{Q_k^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{Q_k} \left(2 \sum_{\lambda=1}^k q_\lambda (Q_\lambda T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2} T_{k,\lambda+1} + Q_{\lambda-2} T_{k,\lambda-1}) - 10 \sum_{\lambda=1}^{k-1} Q_{\lambda-1} T_{k,\lambda+1} \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь через $T_{k,\nu}$ обозначены величины $T_{k,\nu} = [q_{\nu+1}, \dots, q_k]_{(k-\nu)}$.

ТЕОРЕМА 4. Для функции качества $H(M(\Lambda_m(p)))$ справедливо равенство

$$H(M(\Lambda_m(p))) = 1 + \frac{4}{5N_m^2} \left(10 + 5l + \sum_{\lambda=1}^l q_{\lambda,m}^2 - \frac{3(P_{l,m}^2 + Q_{l-1,m}^2)}{Q_{l,m}^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{Q_{l,m}} \left(2 \sum_{\lambda=1}^l q_{\lambda,m} (Q_{\lambda,m} T_{l,\lambda+1}^* + Q_{\lambda-2,m} T_{l,\lambda+1}^* + Q_{\lambda-2,m} T_{l,\lambda-1}^*) - 10 \sum_{\lambda=1}^{l-1} Q_{\lambda-1,l} T_{l,\lambda+1}^* \right) \right),$$

где $\frac{P_{\lambda,m}}{Q_{\lambda,m}}$ — λ -ая подходящая дробь к числу $\frac{a_m}{N_m}$ ($\lambda = 0, 1, \dots, l$), $T_{l,\nu}^* = [q_{\nu+1,m}, \dots, q_{l,m}]_{(l-\nu)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 утверждение теоремы следует из теоремы 3 заменой k на l , $\frac{a}{N}$ на $\frac{a_m}{N_m}$, подходящих дробей и неполных частных к $\frac{a}{N}$ на соответствующие подходящие дроби и неполные частные к $\frac{a_m}{N_m}$. $\square$

4. Заключение

Теорема 1 из работы [2] позволяет вычислять значение функции качества за

$$O\left(\sqrt{N(P_m, Q_m)}\right)$$

арифметических операций. Доказанная теорема 4 позволяет это сделать за

$$O(\ln N(P_m, Q_m))$$

арифметических операций.

Основным моментом в нашей работе было доказательство, что обобщённая параллелепипедальная сетка, приближающая алгебраическую квадратичную сетку, является параллелепипедальной сеткой.

На тот факт, что сетка $M(\Lambda_m(p))$ является параллелепипедальной, обратил внимание А. В. Родионов, за что выражаю ему свою благодарность.

Также выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.
2. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

REFERENCES

1. Vronskaya, G. T., Dobvol'skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids. monograph edited by N. M. Dobvol'skii. Tula.
2. A. V. Mikhlyeva, 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.

Получено 15.11.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 512.554.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-313-353

Классические радикалы и центроид Мартиндейла артиновых и нётеровых алгебр Ли

А. Н. Благовисная

Благовисная Анна Николаевна — старший преподаватель, аспирант кафедры алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет, г. Оренбург.

e-mail: matmet@bk.ru

Аннотация

Работа относится к области изучения структуры алгебр Ли с помощью специальных объектов, позволяющих свести исследование исходных систем к более простым.

Структура данной работы выглядит следующим образом:

1. в первом разделе описываются понятия классических радикалов алгебр Ли, приводятся основные определения и свойства радикалов;
2. второй раздел посвящён слабо артиновым алгебрам Ли. Приведены примеры слабо артиновых алгебр Ли. Основными результатами являются доказательство свойства локальной нильпотентности первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли, а также решение проблемы А. В. Михалёва о разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли;
3. в третьем разделе рассматриваются вопросы применения центроида Мартиндейла к исследованию структуры нётеровых специальных алгебр Ли. Основным результатом является решение проблемы вложения любой нётеровой полупервичной специальной алгебры Ли в алгебру матриц над коммутативным кольцом, являющимся прямой суммой полей;
4. в четвёртом разделе рассмотрены свойства первичного радикала градуированных Ω -групп.

Результаты исследований отражены в 10 публикациях автора в период с 2015 по 2018 годы, которые выполнены во время обучения в аспирантуре под руководством доктора физико-математических наук, профессора С. А. Пихтилькова (02.03.1953–24.12.2015) и кандидата физико-математических наук, доцента О. А. Пихтильковой.

Ключевые слова: радикалы алгебр Ли, первичный радикал алгебр Ли, нильпотентные радикалы алгебр Ли, радикал Джекобсона, слабо артиновы алгебры Ли, проблема А. В. Михалёва, нётеровы алгебры Ли, центроид Мартиндейла алгебр Ли, проблема М. В. Зайцева, первичный радикал градуированных Ω -групп.

Библиография: 70 названий.

Для цитирования:

А. Н. Благовисная. Классические радикалы и центроид Мартиндейла артиновых и нётеровых алгебр Ли // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 313–353.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 512.554.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-313-353

Classical radicals and the Martindale centroid of Artin and Noetherian Lie algebras

A. N. Blagovisnay

Blagovisnay Anna Nikolaevna — Senior lecturer, Postgraduate Student, Department of Algebra and discrete mathematics, Orenburg state University, Orenburg.

e-mail: matmet@bk.ru

Abstract

The work relates to the study of the structure of Lie algebras.

The structure of this work is as follows:

- the first section describes the concepts of classical radicals of Lie algebras, the basic definitions and properties of radicals;
- the second section is devoted to the weakly artinian Lie algebras. The main results are the proof of the local nilpotence property of the prime radical of the weakly artinian Lie algebra and the solution of the A.V. Mikhalev problem;
- the third section deals with the application of the Martindale centroid to the study of the structure of Noetherian special Lie algebras. The main result is a solution to the problem of embedding Any Noetherian semiprime special Lie algebra into algebra of matrices over commutative ring which is the direct sum of fields;
- in the fourth section, the properties of the prime radical of graded Ω -groups are considered.

The research results are reflected in the 10 publications of the author in the period from 2015 to 2018, which were completed during graduate studies at the guidance of doctor of physical-mathematical Sciences, Professor S. A. pikhtil'kova (02.03.1953–24.12.2015) and candidate of physico-mathematical Sciences, associate Professor O. A. Pikhtilkova.

Keywords: radicals of Lie algebras, prime radical of Lie algebras, nilpotent radicals of Lie algebras, Jacobson radical, weakly Artinian Lie algebras, A.V. Mikhalev problem, Noetherian lie algebras, Martindale centroid of Lie algebras, M. V. Zaitsev problem, prime radical of graded Ω -groups.

Bibliography: 70 titles.

For citation:

A. N. Blagovisnay, 2019, "Classical radicals and the Martindale centroid of Artin and Noetherian Lie algebras", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 313–353.

Введение	315
1. Классические радикалы алгебр Ли	319
1.1 Понятие классических радикалов алгебр Ли	319
1.2 Первичный радикал алгебр Ли и его соотношения с разрешимыми радикалами	320
1.3 Нильпотентный и локально нильпотентный радикалы алгебр Ли	322
1.4 Радикал Джекобсона и связанные с ним радикалы алгебр Ли	325
2. Слабо артиновы алгебры Ли	326
2.1 Понятие и примеры слабо артиновых алгебр Ли	326
2.2 Локальная нильпотентность первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли	329
2.3 О проблеме А. В. Михалёва	331

3. Нётеровы алгебры Ли	335
3.1 Основные определения и свойства	335
3.2 Центроид Мартиндейла алгебр Ли	335
3.3 О проблеме М. В. Зайцева	338
4. Первичный радикал градуированных Ω -групп	339
4.1 Градуированные Ω -группы	339
4.2 О свойствах градуированного первичного радикала градуированных Ω -групп	341
Заключение	343
Список цитированной литературы	344
REFERENCES	349
Приложение А Список обозначений	353

Светлой памяти Сергея Алексеевича Пихтилькова посвящается.

Введение

Область исследования. Работа относится к области изучения структуры алгебр Ли. В теории алгебраических систем разработаны различные объекты, которые можно применять при построении структурной теории. К их числу относятся радикалы и центроид Мартиндейла, рассматриваемые в данной работе.

Актуальность темы диссертации. Изучение алгебраических систем является существенной частью современных исследований в общей алгебре. Одной из основных задач, возникающих при исследовании алгебраических систем, является построение структурной теории, позволяющей свести изучение исходной системы к более простой. Радикал является важным инструментом построения структурной теории алгебраических систем. С тех пор, как А. Г. Курош и С. Амицур ввели понятие радикала для колец и алгебр, теория радикалов распространилась и на другие алгебраические структуры, в числе которых алгебры Ли.

Результаты, получаемые при исследовании радикалов алгебр Ли, находят своё применение в различных областях математики, механики, что подтверждает **актуальность** изучения свойств радикалов и построения структурной теории алгебр Ли.

Теории групп и алгебр Ли посвящены исследования многих математиков. Начало создания структурной теории конечномерных алгебр Ли относится к концу XIX века и связано с классическими работами С. Ли, Ф. Энгеля, Э. Картана, В. Киллинга [7]. В XX веке началось изучение бесконечномерных алгебр Ли, возникающих при изучении векторных полей гладких многообразий. Вопросами теории бесконечномерных алгебр Ли занимались А. И. Кострикин, Ю. П. Размыслов, Ю. А. Бахтурин, С. П. Мищенко, М. В. Зайцев, А. В. Михалёв, Е. И. Зельманов.

Построение общей структурной теории для произвольных алгебр Ли затруднительно, поэтому выделяются специальные классы алгебр, для которых такую теорию построить возможно. Исследуются алгебры Ли, удовлетворяющие каким-либо условиям. В качестве дополнительных условий, накладываемых на алгебры Ли, рассматриваются условия обрыва возрастающих или убывающих цепей идеалов, подалгебр, подпространств (нётеровость и артиновость), выполнение полиномиального тождества и другие.

Понятие радикала позволяет из класса алгебраических систем выделить полупростые и радикальные системы, описать структуру которых значительно проще, чем исходную систему. Построение и исследование различных радикалов алгебр Ли проводилось в работах [2, 4, 5, 16, 17, 21, 27, 30, 31, 34, 35, 43, 53, 54, 59, 60].

Одним из радикалов, рассматриваемых в теории конечномерных алгебр Ли и отвечающих требованиям структурной теории, является наибольший разрешимый идеал [13]. В силу того,

что не всегда сумма разрешимых идеалов будет разрешимым идеалом в теории бесконечномерных алгебр Ли, такой подход к пониманию радикала не может быть верным.

В качестве аналога разрешимого радикала для бесконечномерных алгебр Ли можно было бы рассматривать локально разрешимый радикал. Однако в работе [20] представлено доказательство того, что локально разрешимый радикал не может быть единым для всех алгебр Ли.

Проблемой построения единого радикала для всех классов алгебр Ли занимался В. А. Парфёнов. В качестве такого радикала он предложил рассматривать наибольший слабо разрешимый идеал алгебры Ли и показал корректность его использования [27].

Кроме слабо разрешимого радикала, были найдены и другие радикалы алгебр Ли, удовлетворяющие требованиям структурной теории. Одним из таких радикалов является первичный радикал.

Исследование первичного радикала проводилось для алгебр Ли, удовлетворяющих различным дополнительным условиям. Так, в работах [2, 4, 5] проведено исследование свойств первичного радикала специальных алгебр Ли. Публикации [21, 37, 58] посвящены изучению свойств первичного радикала различных артиновых алгебр Ли.

Интерес представляют соотношения первичного радикала алгебр Ли с разрешимыми радикалами. В работе [34] доказано, что первичный радикал произвольной специальной алгебры Ли содержит локально нильпотентный радикал. Для обобщённо специальных алгебр Ли С. А. Пихтильниковым и К. И. Бейдаром было показано совпадение первичного радикала с наибольшим локально разрешимым идеалом и слабо разрешимым идеалом [4, 5].

Исследуются и свойства первичного радикала алгебр Ли. Особое внимание уделяется вопросам разрешимости первичного радикала. Так, в монографии [36, с. 111] представлено доказательство разрешимости первичного радикала нётеровой алгебры Ли, в статье [21] рассматривается доказательство разрешимости первичного радикала алгебр Ли, удовлетворяющих различным условиям артиновости. Разрешимость первичного радикала специальной артиновой алгебры Ли доказана в [33]. Публикация [37] посвящена доказательству свойства локальной разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли.

Таким образом, исследование свойств первичного радикала является одной из **актуальных задач** теории радикалов алгебр Ли.

В теории конечномерных алгебр Ли рассматриваются также нильпотентный радикал, радикал Джекобсона.

Применение нильпотентного радикала и радикала Джекобсона в теории бесконечномерных алгебр Ли также вызывает затруднения в силу невыполнения определённых требований, которым должен удовлетворять радикал алгебраической системы [35]. Поэтому **актуальным** является вопрос о том, какие радикалы бесконечномерных алгебр Ли будут удовлетворять свойствам, аналогичным свойствам нильпотентного радикала и радикала Джекобсона теории конечномерных алгебр Ли.

Другой конструкцией, используемой при изучении строения алгебр Ли, является центроид Мартиндейла. Полезной конструкцией центроида Мартиндейла оказалась при исследовании специальных алгебр Ли. Согласно работе [42] рассмотрение первичных специальных алгебр Ли над центроидом Мартиндейла может выступать как условие конечности. Благодаря этому, возможно исследование структуры первичных специальных алгебр Ли, а также применение первичного радикала при решении задач теории радикалов алгебр Ли. Например, поиск условий, при которых присоединённая алгебра AdL является первичной ассоциативной PI -алгеброй [36, с. 34], или существования наибольшего локально нильпотентного идеала в обобщённо специальной алгебре Ли [36, с. 59].

В настоящей работе продолжается изучение радикалов алгебр Ли, начатое С. А. Пихтильниковым. В частности, особое внимание уделено решению проблем А. В. Михалёва о разрешимо-

сти первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли и М. В. Зайцева о вложении нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц.

Цель работы — исследовать свойства объектов, применяемых при построении структурной теории артиновых и нётеровых алгебр Ли.

Задачи:

1. доказать локальную нильпотентность первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли;
2. решить проблему А. В. Михалёва для слабо артиновых алгебр Ли;
3. решить проблему М. В. Зайцева о вложении нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц;
4. исследовать свойства градуированного первичного радикала градуированных Ω -групп как более общего понятия первичного радикала алгебр Ли.

Научная новизна. В научно-квалификационной работе получены следующие основные результаты:

1. Доказана локальная нильпотентность первичного радикала слабо артиновых алгебр Ли.
2. Решена проблема А. В. Михалёва для слабо артиновых алгебр Ли.
3. Решена проблема М. В. Зайцева для полупервичных специальных нётеровых алгебр Ли.
4. Доказана локальная нильпотентность градуированного первичного радикала градуированных Ω -групп.

Практическая и теоретическая ценность. Работа имеет теоретическую направленность. Полученные результаты работы могут быть использованы для развития теории радикалов алгебр Ли, а также использоваться при решении проблем и задач, возникающих в теории алгебр Ли.

Апробация результатов. Результаты научно-квалификационной работы докладывались на следующих конференциях:

1. Всероссийской научно-практической конференции «Университет XXI века: научное измерение», Тула, Россия, 20–21 мая 2016 г.;
2. Международной научно-практической конференции «Алгебра и логика: теория и приложения», посвящённая 70-летию В. М. Левчука, Красноярск, Россия, 24–29 июля 2016 г.;
3. XIV международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 70-летию со дня рождения Г. И. Архипова и С. М. Воронина, Саратов, Россия, 12–15 сентября 2016 г.;
4. Шестой школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, Россия, 30 января – 6 февраля 2017 г.;
5. Всероссийской научно-практической конференции «Университетский комплекс как региональный центр развития образования, науки и культуры», Оренбург, Россия, 1–3 февраля 2017 г.;

6. Международной научно-практической конференции «Вопросы современных научных исследований», Омск, Россия, 27 декабря 2018 г.

Список публикаций состоит из 10 работ [61–70] (5 тезисов и 5 статей, две из которых опубликованы в журналах из перечня ВАК, одна – в журнале, индексируемом в Scopus) и приведён в конце работы.

Структура научно-квалификационной работы. Научно-квалификационная работа состоит из введения, четырёх разделов, разбитых на подразделы, заключения, списка литературы и приложения.

Первый раздел (стр. 319) носит вспомогательный характер и необходим для введения основных понятий теории классических радикалов алгебр Ли и систематизации сведений о них. Рассматриваются основные понятия теории классических радикалов алгебр Ли, которые в дальнейшем будут использоваться в работе при получении основных результатов.

В подразделе 1.1 (стр. 319) поясняется термин «классические радикалы».

В подразделе 1.2 (стр. 320) рассматривается первичный радикал алгебр Ли, формулируются свойства первичного радикала и приводятся известные факты о соотношениях первичного радикала и разрешимых радикалов алгебр Ли.

В подразделе 1.3 (стр. 322) рассматриваются понятия нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли и локально нильпотентного радикала бесконечномерных алгебр Ли. Приводится пример 2 (стр. 323) бесконечномерной локально нильпотентной алгебры Ли, которая не является нильпотентной. Данный пример показывает естественность введения локально нильпотентного радикала в теории бесконечномерных алгебр Ли.

Подраздел 1.4 (стр. 325) посвящён вопросам определения радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли, приводятся определения естественных, гомологически заданных радикалов алгебр Ли: неприводимо представленного радикала, PI -неприводимо представленного радикала и конечно неприводимо представленного радикала.

Второй раздел (стр. 326) посвящен слабо артиновым алгебрам Ли.

В подразделе 2.1 (стр. 326) приведены примеры бесконечномерных слабо артиновых алгебр Ли.

Главными результатами являются доказательство свойства локальной нильпотентности первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли (подраздел 2.2 (стр. 329)) и решение проблемы А. В. Михалёва о разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли (подраздел 2.3 (стр. 331)).

Основные результаты второго раздела сформулированы в виде следующих теорем.

ТЕОРЕМА 4 (стр. 329) Пусть L – слабо артинова алгебра Ли. Тогда её первичный радикал $P = P(L)$ – локально нильпотентен.

ТЕОРЕМА 6 (стр. 332) Пусть L – слабо артинова алгебра Ли. Тогда её первичный радикал $P = P(L)$ – разрешим.

В третьем разделе (стр. 335) рассматриваются вопросы применения центроида Мартиндейла к исследованию структуры нётеровых специальных алгебр Ли.

В подразделе 3.1 (стр. 335) сформулированы общие определения, используемые в главе.

В подразделе 3.2 (стр. 335) рассматриваются основные понятия и результаты, связанные с конструкцией центроида Мартиндейла.

В подразделе 3.3 (стр. 338) сформулирован и доказан основной результат раздела 3, заключающийся в решении проблемы вложения любой нётеровой полупервичной специальной алгебры Ли в алгебру матриц над коммутативным кольцом, являющемся прямой суммой полей.

В третьем разделе сформулированы и доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 11 (стр. 338) Пусть L – первичная специальная алгебра Ли. Тогда

1. L – матричная алгебра Ли;
2. если L имеет сложность n , то она конечномерна над своим центроидом Мартиндейла размерности не выше n^2 .

ТЕОРЕМА 12 (стр. 339) Пусть алгебра Ли L – полупервичная нётерова специальная. Тогда L вложена в алгебру $sl_m(F) \otimes_F C$, где C – прямая сумма полей.

Четвёртый раздел (стр. 339) является дополнением, в котором приведены результаты исследования первичного радикала градуированных Ω -групп.

Основным результатом является доказательство свойства локальной нильпотентности градуированного первичного радикала градуированной Ω -группы.

ТЕОРЕМА 13 (стр. 342) Пусть A – градуированная Ω -группа с условием конечности, удовлетворяющая условию обрыва цепочек убывающих градуированных идеалов. Тогда градуированный первичный радикал $P(A)$ градуированной Ω -группы A – локально нильпотентен.

1. Классические радикалы алгебр Ли

1.1. Понятие классических радикалов алгебр Ли

В работах, посвящённых структурной теории алгебр Ли, встречаются различные определения понятия радикала. Это обусловлено исследованием алгебр Ли многими авторами с разных точек зрения. Наиболее разработанной является теория конечномерных алгебр Ли, начало которой в конце XIX века положили работы С. Ли, Э. Картана, Ф. Энгеля, В. Киллинга. Тогда же появляется понятие радикала для конечномерных алгебр Ли, описанное в трудах В. Киллинга.

Радикал конечномерных алгебр Ли связан с понятием разрешимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ([13, с. 17]) Пусть L – алгебра Ли. Рассмотрим следующий ряд идеалов алгебры L :

$$L' = [L, L], \quad L'' = [L', L'], \quad \dots, \quad L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}], \quad \dots$$

Скажем, что L – разрешимая алгебра Ли, если $L^{(n)} = 0$ для некоторого натурального n .

Известно, что сумма конечного числа разрешимых идеалов алгебры Ли является разрешимым идеалом. Поэтому в конечномерной алгебре Ли существует наибольший разрешимый идеал.

Согласно современному пониманию объектов структурной теории алгебр Ли, радикал Киллинга – это наибольший разрешимый идеал в алгебре Ли.

В бесконечномерных алгебрах Ли сумма всех разрешимых идеалов не всегда является разрешимым идеалом. Существуют многочисленные публикации, в которых исследуются вопросы построения структурной теории алгебр Ли с помощью различных радикалов, как для конечномерных, так и для бесконечномерных случаев.

Естественным обобщением понятия разрешимого идеала является локально разрешимый идеал.

В 30-40 годах XX века в процессе исследования произвольных (бесконечномерных) колец и алгебр найдено несколько радикалов, удовлетворяющих требованиям структурной теории и совпадающих в классическом случае с классическим нильпотентным радикалом. К наиболее распространенным относятся нижний ниль-радикал Бэра, локально нильпотентный радикал Левицкого, верхний ниль-радикал Кёте и квазирегулярный радикал Перлиса—Джекобсона.

Перечисленные радикалы нашли применение в разных областях современной теории алгебраических систем. Они встречаются почти в любой монографии по теории колец или алгебр,

начиная с монографии Джекобсона [10]. Поэтому можно сказать, что указанные радикалы стали классическими. Такое название оправдывается и тем, что в классическом случае конечномерных алгебр и колец с условием минимальности все эти радикалы совпадают с классическим нильпотентным радикалом [1].

По аналогии с данным определением классических радикалов для произвольных алгебраических систем, рассмотрим радикалы, которые можно отнести к классическим радикалам алгебр Ли.

Далее рассмотрим необходимые сведения об определениях и свойствах радикалов алгебр Ли, которые можно относить к классическим.

1.2. Первичный радикал алгебр Ли и его соотношения с разрешимыми радикалами

Рассмотрение первичного радикала ряда алгебраических структур показало себя как один из плодотворных подходов к построению структурной теории алгебраических систем. Существуют многочисленные публикации, посвящённые изучению свойств первичного радикала таких алгебраических систем, как групп, колец, алгебр, решеток. В 1949 году Н. Маккой ввёл понятия первичного кольца и первичного идеала, с помощью которых определил первичный радикал как пересечение всех первичных идеалов кольца [55]. Далее теория первичного радикала была распространена и на другие алгебраические системы. В 1960 г. К. К. Шукин в работе « RI^* -разрешимый радикал групп» ввёл определение первичных нормальных делителей, первичной группы, а также первичного радикала группы [45]. Первичный радикал Ω -групп исследовался в работах А. В. Михалёва, С. А. Пихтилькова, И. Н. Балабы и других [26, 27, 49]. Рассматривались определения и свойства первичного радикала для таких алгебраических структур, как решёточно упорядоченные алгебраические системы [24, 25, 26, 28, 29], лупы и Ω -лупы [8, 9]. С. А. Пихтильковым, И. Н. Балабой и К. И. Бейдаром рассмотрен первичный радикал и его свойства для супералгебр Ли, специальных алгебр Ли [4, 5, 36, 37]. Ряд работ посвящён исследованиям первичного радикала алгебр Ли, на которые накладываются дополнительные условия: артиновость, нётеровость, локальная нильпотентность [21, 36, 37, 39].

Рассмотрим следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. ([37]) Алгебра Ли L называется *первичной*, если для любых двух её идеалов U и V из $[U, V] = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. ([37]) Идеал P алгебры Ли L называется *первичным*, если факторалгебра L/P – первична.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. ([37]) Первичным радикалом $P(L)$ алгебры Ли L называется пересечение всех её первичных идеалов или сама алгебра, если их нет.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим алгебру Ли $L = L_1 \oplus L_2$, где L_1 и L_2 – простые алгебры Ли. Тогда алгебра Ли L имеет только два нетривиальных собственных идеала: $I = \{(x_1, 0) : x_1 \in L_1\}$ и $J = \{(0, x_2) : x_2 \in L_2\}$.

Алгебра Ли L является первичной. Кроме того, первичными являются и идеалы I и J . При этом первичный радикал $P(L)$ равен нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. ([36, с. 154]) Алгебра называется *полупервичной*, если для любого её идеала I из того, что $I^2 = 0$ следует, что $I = 0$.

Определение 5 относится как к ассоциативным алгебрам, так и к алгебрам Ли. Оно эквивалентно равенству нулю первичного радикала.

Отметим некоторые свойства первичного радикала алгебр Ли.

Ш. Амицур [47] показал, что *если A – ассоциативная алгебра и $A[x]$ – кольцо многочленов над A , то $P(A[x]) = P(A)[x]$.*

Аналогичный результат получен и в случае, когда L – алгебра Ли и $L[x]$ – кольцо многочленов над L . В работе [40] доказано, что $P(L[x]) = P(L)[x]$. Кроме того, для кольца многочленов над L от n коммутирующих переменных $L[x_1, \dots, x_n]$ справедливо равенство $P(L[x_1, \dots, x_n]) = P(L)[x_1, \dots, x_n]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. ([7, с. 12]) *Идеал алгебры Ли, устойчивый относительно всех дифференцирований, называется характеристическим.*

Первичный радикал $P(L)$ произвольной алгебры Ли L над полем характеристики нуль является характеристическим [36, с. 43].

Актуальным является вопрос о разрешимости первичного радикала алгебр Ли. Исследования разрешимости первичного радикала алгебр Ли, на которые накладываются дополнительные условия, отражены в работах [2, 21, 39, 58].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. ([36, с. 30]) *Рассмотрим систему многочленов:*

$$f_0(x_1) = x_1, \quad f_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2], \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]], \dots, \\ f_{k+1}(x_1, \dots, x_{2^{k+1}}) = [f_k(x_1, \dots, x_{2^k}), f_k(x_{2^k+1}, \dots, x_{2^{k+1}})], \dots$$

Алгебра Ли L называется разрешимой степени s , если она удовлетворяет тождеству $f_s = 0$ и не удовлетворяет тождеству $f_{s-1} = 0$.

Алгебра Ли называется разрешимой, если она является разрешимой алгеброй некоторой степени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. ([36, с. 41]) *Алгебра Ли L называется слабо разрешимой, если для любого конечномерного подпространства $V \subseteq L$ существует такое k , что полином разрешимости f_k степени k обращается в нуль при подстановке любых элементов из V .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. ([36, с. 30]) *Алгебра Ли называется локально разрешимой, если любая её конечная подалгебра – разрешима.*

В. А. Парфёнов ввёл в рассмотрение для алгебр Ли слабо разрешимый радикал [30]. В работе [30] показано, что *расширение слабо разрешимой алгебры Ли при помощи слабо разрешимой является слабо разрешимой*. Тогда для произвольной алгебры Ли сумма слабо разрешимых идеалов является слабо разрешимым идеалом. В. А. Парфёнов также доказал, что *класс всех слабо разрешимых алгебр Ли является радикальным в универсальном классе всех алгебр Ли*.

Наибольший слабо разрешимый идеал $T(L)$ алгебры Ли L называется верхним слабо разрешимым радикалом алгебры Ли.

Как и для ассоциативных алгебр, для алгебр Ли определяются верхний и нижний ниль-радикалы.

Обозначим через $\rho(L)$ сумму разрешимых идеалов алгебры Ли L .

Сумма разрешимых идеалов является разрешимым идеалом, поэтому идеал $\rho(L)$ является локально разрешимым.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\rho(\alpha)$ следующим образом.

1. $\rho(0) = 0$.
2. Предположим, что $\rho(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\rho(\beta)$ следующим образом:

- а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\rho(\beta)$ – это такой идеал алгебры L , что $\rho(\beta)/\rho(\gamma) = \sigma(L/\rho(\gamma))$;
- б) если β – предельное порядковое число, то

$$\rho(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \rho(\gamma).$$

Расширение локально разрешимой алгебры Ли с помощью локально разрешимой алгебры не может быть локально разрешимым [46], но оно будет слабо разрешимым [30].

Из соображений мощности $\rho(\beta) = \rho(\beta + 1)$ для некоторого β . Скажем, что $\rho(\beta)$ – нижний слабо разрешимый радикал алгебры Ли L .

Слабо разрешимые алгебры Ли являются аналогом локально нильпотентных ассоциативных алгебр.

Известно, что для произвольной алгебры Ли выполняется соотношение, согласно которому первичный радикал содержится в наибольшем слабо разрешимом идеале. В монографии [36] получен результат о соотношении первичного радикала и слабо разрешимого радикала для произвольных алгебр Ли.

ТЕОРЕМА 1. ([36, с. 43]) *Первичный радикал произвольной алгебры Ли над полем F совпадает с нижним слабо разрешимым радикалом.*

1.3. Нильпотентный и локально нильпотентный радикалы алгебр Ли

Нильпотентный радикал алгебры Ли играет важную роль в теории полупростых конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуля.

Нильпотентный радикал алгебр Ли относится к классическим радикалам структурной теории конечномерных алгебр Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. ([13, с. 20]) *Определим по индукции нижний центральный ряд алгебры Ли L : $L_1 = L$, $L_2 = [L, L]$, ..., $L_{n+1} = [L, L_n]$, ...*

Алгебра L нильпотентна, если члены нижнего центрального ряда обращаются в 0 на некотором конечном шаге. Наименьшее натуральное n , для которого $L_n = 0$, называется длиной нильпотентности.

Другими словами, алгебра Ли L нильпотентна, если существует конечная убывающая цепочка её идеалов J_i , $i = 1, \dots, n$, такая, что $J_1 = L$, $J_n = \{0\}$ и $[L, J_{i-1}] \subset J_i$ для $i = 1, \dots, n$.

Примером нильпотентной алгебры Ли является коммутативная алгебра Ли. Известно [13], что если алгебра L нильпотентна, то она разрешима.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Идеал I алгебры Ли L называется нильпотентным, если он нильпотентен как алгебра Ли.*

Из классической теории конечномерных алгебр Ли ([7], [11]) известно, что в каждой конечномерной алгебре Ли существует единственный наибольший нильпотентный идеал. Однако он не является радикалом [36, с. 64].

Нильпотентный радикал алгебры Ли L вводится как пересечение ядер её неприводимых конечномерных представлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. ([15]) *Если модуль M – конечномерный, то наибольший идеал U алгебры L такой, что эндоморфизм x_M , соответствующий элементу x , является нильпотентным для всех $x \in L$ в алгебре $\text{End}(M)$, – называется наибольшим идеалом нильпотентности представления.*

Для конечномерной алгебры Ли L нильпотентный радикал $N(L)$ характеризуется эквивалентным образом не только как пересечение ядер конечномерных представлений, но и как пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений алгебры L [7].

ТЕОРЕМА 2. *(О нильпотентном радикале [7, с. 59]). Для произвольной конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль справедливо равенство $N(L) = [R(L), L]$, где $R(L)$ – разрешимый радикал.*

Нас интересует существование наибольшего нильпотентного идеала в случае бесконечномерных алгебр Ли. В работе [41] рассматриваются конечно порождённые специальные алгебры, для которых доказывается, что наибольший нильпотентный идеал существует. Также доказано, что такой идеал существует для конечно порождённых универсальных алгебр конечной сигнатуры, удовлетворяющих системе тождеств Капелли некоторого порядка [12].

С другой стороны, для бесконечномерных алгебр Ли нильпотентный в смысле приведённого определения радикал может не быть нильпотентным. Рассмотрим пример бесконечномерной локально нильпотентной алгебры Ли, которая не является нильпотентной.

ПРИМЕР 2. Пусть L – это алгебра Ли бесконечных верхнетреугольных матриц по отношению к операции коммутирования над полем F характеристики нуль, содержащих лишь конечное число элементов, отличных от нуля.

Пусть N – подалгебра матриц алгебры Ли L с нулевыми элементами на диагонали.

Пусть матрица $A \in N$ содержит ненулевые слагаемые $a_{ij_1}e_{ij_1}, a_{ij_2}e_{ij_2}, \dots, a_{ij_k}e_{ij_k}, i \neq j_1, i \neq j_2, \dots, i \neq j_k$, где e_{ij} – матричная единица.

Элементы $e_{ii}, e_{j_1j_1}$ принадлежат L . Тогда

$$[e_{ii}, A] = \sum_{s=1}^k a_{ijs}e_{ijs} \Rightarrow \sum_{s=1}^k a_{ijs}e_{ijs} \in N,$$

$$[[e_{ii}, A], e_{j_1j_1}] = a_{ij_1}e_{ij_1} \Rightarrow a_{ij_1}e_{ij_1} \in N.$$

Итак, $N \subset [L, N]$.

С другой стороны, N – идеал алгебры Ли L , то есть $[L, N] \subset N$.

Таким образом, $N = [L, N]$.

Так как любое конечное множество матриц алгебры Ли L может быть вложено в алгебру Ли матриц конечного порядка (предполагается, что при вложении можно отбросить бесконечное множество нулевых элементов), можно утверждать, что алгебра Ли L является разрешимой, а N – локально нильпотентной.

Рассмотрим конечномерное представление M алгебры Ли L .

Пусть $\bar{L}$ и $\bar{N}$ – гомоморфные образы алгебр Ли L и N в алгебре Ли $End(M)$.

Алгебра Ли $\bar{L}$ является конечномерной. Согласно теореме 2, нильпотентный радикал алгебры Ли $\bar{L}$ равен $N(\bar{L}) = \bar{N}$. Согласно определению нильпотентного радикала, эндоморфизм x_M , соответствующий элементу x , является нильпотентным для всех $x \in \bar{L}$, в алгебре $End(M)$. Следовательно, алгебра Ли N содержится в наибольшем идеале нильпотентности представления M .

Учитывая произвольность конечномерного представления M , мы получили включение $N \subset N(L)$.

Покажем, что пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений совпадает с N .

Пусть для матрицы A алгебры L слагаемое $a_{ii}e_{ii}$ не равно нулю.

Алгебра Ли L представлена эндоморфизмами бесконечномерного векторного пространства V и запись её элементов в виде матриц получается после выбора базиса $t_1, t_2, \dots$.

После соответствующей перенумерации элементов базиса можно получить, что $a_{11}e_{11} \neq 0$.

Рассмотрим подпространство W , являющееся линейной оболочкой базисных элементов $t_2, t_3, \dots$. Пусть $\bar{V} = V/W$ фактор-пространство.

Пусть матрицы действуют справа на векторы V .

Покажем, что подпространство W инвариантно относительно алгебры Ли L .

Алгебра Ли L является линейной оболочкой матричных единиц e_{ij} , $i \leq j$.

Тогда $t_k e_{ij} = \delta_{ki} t_j$, где δ_{ki} – символ Кронекера, $k \leq j$.

Можно считать, что L действует на фактор-пространстве $\bar{V}$.

Тогда $\bar{t}_1 A = a_{11} \bar{t}_1$. Отсюда следует, что $\bar{t}_1 A^n = a_{11}^n \bar{t}_1 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Итак, матрица A не лежит в наибольшем идеале нильпотентности представления алгебры Ли L в пространстве $\bar{V}$.

Так как A – произвольная матрица L с ненулевыми элементами на диагонали, то $N(L) \subset N$.

В результате получаем, что $N(L) = N$ и алгебра N не является нильпотентной.

Данный пример показывает естественность введения для бесконечномерных алгебр Ли понятия локально нильпотентного радикала. Такой радикал будет удовлетворять свойствам аналогичным свойствам нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Алгебра Ли называется локально нильпотентной, если любая её конечно порождённая подалгебра нильпотентна.*

Локально нильпотентным радикалом (или радикалом Левицкого) алгебры R называется её наибольший локально нильпотентный идеал [1]. Однако ситуация для бесконечномерных алгебр Ли в понимании подхода к определению локально нильпотентного радикала несколько иная.

Понятие локально нильпотентного радикала для бесконечномерных алгебр Ли является аналогом нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли.

В работе [35] введено понятие локально нильпотентного радикала специальной алгебры Ли.

Рассмотрим сначала понятие специальной алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. ([10, с. 323]) *Ассоциативная алгебра A называется PI-алгеброй, если существует некоммутативный полином $f(x_1, \dots, x_n) \in F(x)$, где $F(x)$ – свободная ассоциативная алгебра, такой, что*

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \text{для произвольных } a_1, \dots, a_n \in A.$$

В 1963 г. В. Н. Латышев определил специальную алгебру Ли [19].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. ([19]) *Алгебра Ли L называется специальной алгеброй или SPI-алгеброй, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.*

Для PI-представлений алгебр Ли аналог наибольшего идеала нильпотентности вводится следующим образом.

ТЕОРЕМА 3. ([36, с. 66-67]) *Пусть алгебра Ли L имеет PI-представление в кольце эндоморфизмов векторного пространства M . Тогда*

1. *все идеалы J алгебры L такие, что x_M нильпотентно для любого $x \in L$, содержатся в одном из них, например U ;*

2. образ $\bar{U}$ идеала U является локально нильпотентным в алгебре $\text{End}(M)$;
3. идеал U является множеством элементов $x \in L$ таких, что x_M принадлежит первичному радикалу P ассоциативной алгебры $A(L)$, ассоциированной с представлением алгебры L .

Тогда по аналогии с конечномерными алгебрами идеал U называется наибольшим идеалом локальной нильпотентности PI -представления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. ([35]) *Локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F называется пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI -представлений алгебры Ли L над полем F .*

В работе [35] доказаны свойства локально нильпотентного радикала $N(L)$ специальной алгебры Ли L . В частности, показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным.

1.4. Радикал Джекобсона и связанные с ним радикалы алгебр Ли

Радикал Джекобсона – классический радикал, удовлетворяющий требованиям структурной теории и рассматриваемый для различных алгебраических систем. В теории радикалов колец известен также как квазирегулярный радикал Перлиса–Джекобсона. Как правило, вводится в рассмотрение с помощью модулей.

Радикалом Джекобсона в теории ассоциативных колец называется пересечение всех максимальных правых идеалов кольца [44]. Радикал Джекобсона ассоциативной алгебры R определяется как пересечение аннуляторов правых (левых) неприводимых R -модулей [1]. Определение, эквивалентное данному, может быть сформулировано следующим образом: радикал Джекобсона ассоциативной алгебры R есть пересечение ядер всех неприводимых представлений.

Аналогичным образом определяется радикал Джекобсона алгебры Ли. Впервые для алгебр Ли определение радикала Джекобсона дано Е. Маршаллом. Для случая бесконечномерных алгебр Ли уточнено Ф. Кубо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. ([15]) *Радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L называется пересечение максимальных идеалов или сама алгебра, если их нет.*

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [56].

Е. Маршалл нашел условие, при котором радикал Джекобсона $J(L)$ конечномерной алгебры Ли L над полем совпадает с $[L, \sigma(L)]$, где $\sigma(L)$ является разрешимым радикалом алгебры Ли L . Таким условием является разложение Леви алгебры Ли L в прямую сумму $L = S \oplus \sigma(L)$, где S – полупростая алгебра [56].

Н. Камийя нашел условие представления радикала Джекобсона $J(L)$ не обязательно конечномерной алгебры Ли L в виде $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где $\sigma(L)$ – максимальный локально разрешимый идеал L . Для этого алгебра Ли L должна быть порождена конечномерными локальными подидеалами L [53]. Напомним, что идеал идеала алгебры Ли L называется подидеалом [15].

Свойства радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли исследовал Ф. Кубо [54]. Он показал, что результаты Е. Маршалла и Н. Камийя в общем случае неверны для бесконечномерных алгебр Ли даже в случае локально конечных алгебр. Им также изучены бесконечномерные алгебры Ли с нулевым радикалом Джекобсона.

Один из способов изучения свойств алгебр, а также их идеалов предполагает гомологическое описание идеалов алгебр. Под гомологическим описанием идеалов колец, алгебр, алгебр

Ли понимается их задание через модули [23]. Актуальным является вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли.

В работе [31] рассмотрены определения естественных, гомологически заданных радикалов алгебр Ли, а также приведены их сопоставления с радикалом Джекобсона. Приведем данные определения в соответствии с работой [31].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. *Обозначим через $\text{Irr}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых модулей над алгеброй Ли L и саму алгебру L , если их нет, и назовём неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. *Обозначим через $\text{IrrPI}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI -представлений алгебры Ли L и саму алгебру L , если их нет, и назовём PI -неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. *Обозначим через $\text{IrrFin}(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых конечномерных представлений алгебры Ли L и саму алгебру L , если их нет, и назовём конечно неприводимо представленным радикалом алгебры Ли.*

В работе [31] также исследованы свойства неприводимо представленных радикалов. В частности, доказано, что для произвольной алгебры Ли L неприводимо представленный радикал $\text{Irr}(L) = L \cap J(U(L))$, где $U(L)$ – универсальная обертывающая алгебра.

В случае конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль PI -неприводимо представленный радикал совпадает с нильпотентным радикалом алгебры Ли L .

Также исследованы соотношения между всеми гомологически заданными радикалами. Показано, что в случае, когда у основного поля характеристика равна нулю, имеют место следующие включения: $\text{Irr}(L) \subset \text{IrrPI}(L) \subset \text{IrrFin}(L)$.

Изучение свойств разрешимости PI -неприводимо представленного радикала показало, что в общем случае $\text{IrrPI}(L)$ не является локально разрешимым даже для специальных алгебр Ли.

В работе [31] сделан вывод о представлении радикала Джекобсона через модули, согласно которому для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль PI -неприводимо представленный радикал алгебры Ли совпадает с радикалом Джекобсона. Следовательно, радикал Джекобсона алгебры Ли L можно определить как пересечение аннуляторов всех неприводимых PI -представлений алгебры Ли и саму алгебру L , если их нет.

2. Слабо артиновы алгебры Ли

2.1. Понятие и примеры слабо артиновых алгебр Ли

Одним из условий конечности, накладываемых на алгебры Ли, является свойство артиновости.

Э. Артин впервые рассмотрел кольца с условием минимальности.

Для ассоциативных колец рассматривается понятие правой или левой артиновости. Если в ассоциативном кольце R любая убывающая цепочка его правых (левых) идеалов стабилизируется, то кольцо R называется право (лево) артиновым. Ассоциативное кольцо не обязательно обладает свойствами правой и левой артиновости одновременно. Известен пример Смолла [18, с. 122] кольца, которое является право артиновым, но не является лево артиновым.

Артиновость ассоциативных колец также может определяться и только для двусторонних идеалов. В этом случае возникает понятие слабой артиновости, которое слабее артиновости.

Заметим, что в алгебрах Ли все идеалы являются двусторонними идеалами, поэтому для алгебр Ли не вводятся понятия правой или левой артиновости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Пусть L – алгебра Ли. Если убывающая цепочка идеалов стабилизируется, то алгебра называется слабо артиновой.

Кроме подхода к определению артиновости для алгебр Ли, при котором используются идеалы алгебр Ли, существует подход, когда артиновость можно определить через подалгебры, внутренние идеалы. В работе [22] Е. В. Мещериной рассмотрены различные понятия артиновости для алгебр Ли.

В публикации [22] слабо артинова алгебра называется i -артиновой. Также в статье [22] рассмотрены понятия артиновости в случае обрыва убывающей цепочки алгебр и цепочки внутренних идеалов. Доказано, что из артиновости в смысле обрыва цепочки внутренних идеалов следует слабая артиновость алгебр Ли, из артиновости в смысле обрыва убывающей цепочки алгебр также следует слабая артиновость алгебры Ли.

Рассмотрим примеры слабо артиновых алгебр Ли.

Рассмотрим примеры бесконечномерных простых алгебр.

Любая простая алгебра будет слабо артиновой, так как у неё только два идеала – тривиальный и сама алгебра.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим поле F . Пусть $\text{char} F = 0$. Пусть K – бесконечномерное расширение поля F . Известно, что алгебра $sl_2(K)$ является простой и бесконечномерной.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим бесконечномерное векторное пространство V над полем F . Пусть $L = L(V)^{(-)}$ – алгебра Ли, полученная из полной алгебры линейных отображений V с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$. Известно, что L – простая алгебра.

Приведём другие примеры слабо артиновых алгебр Ли.

ПРИМЕР 5. Пусть F – поле характеристики нуль, $K = F(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ – поле рациональных функций от счётного числа коммутирующих переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Обозначим через L_1 алгебру Ли матриц порядка 2 над полем K со следом нуль $L_1 = sl_2(K)$. Будем рассматривать L_1 как алгебру Ли над полем K .

Пусть L_2 – любая неизоморфная L_1 алгебра Ли.

Рассмотрим алгебру Ли $L = L_1 \oplus L_2$. В алгебре L , кроме неё самой и нуля, существуют только 2 идеала, один из которых изоморфен L_1 , а другой – L_2 , тогда любая цепь идеалов обрывается, то есть алгебра Ли L является слабо артиновой.

ПРИМЕР 6. Пусть F – поле произвольной характеристики. M – простая алгебра Ли.

Известно, что простые алгебры Ли конечномерные и бесконечномерные существуют для полей любой характеристики.

Обозначим через M_i , $i = 1, 2, \dots$ алгебры Ли, изоморфные M .

Пусть $P = M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} \dots \dot{+} M_n \dot{+} \dots$ – прямая сумма векторных пространств.

Обозначим через x_k элемент $x \in M_k$.

Введём на P структуру алгебры с помощью операции

$$[a_i, b_j] = [a, b]_{\min(i,j)-1}.$$

Если $\min(i, j) - 1 < 1$, то произведение считается равным нулю.

На суммы $\sum_{i \in I} a_i$ и $\sum_{j \in J} b_j$ произведение распространяется по дистрибутивности.

Проверим антикоммутативность.

Пусть $i \leq j$. Тогда

$$[a_i, b_j] = [a, b]_{i-1} = -[b, a]_{i-1} = -[b_j, a_i].$$

Аналогично проверяется случай, когда $i > j$.

Проверим тождество Якоби.

Рассмотрим случай, когда $i \leq j \leq k$. Получим

$$[[a_i, b_j], c_k] + [b_j, [c_k, a_i]] + [[c_k, a_i], b_j] = [[a, b], c]_{i-1} + [b, [c, a]]_{i-1} + [[c, a], b]_{i-1} = 0.$$

Аналогично проверяются остальные случаи.

Итак, алгебра P является алгеброй Ли.

Определим действие алгебры M на P по формуле $[x, a_i] = [x, a]_i$, где $x \in M$.

Действие алгебры M на P задаёт гомоморфизм

$$\varphi: M \rightarrow \text{Der}P.$$

Действительно,

$$\varphi([x, y])(a_i) = [[x, y], a_i] = [[x, a]_i, [y, a]_i].$$

Пусть алгебра Ли $L = M \odot P$ является полупрямым произведением алгебр M и P . Данная алгебра L является слабо артиновой. Покажем это.

Покажем, что все идеалы алгебры Ли L имеют вид

$$L, \quad P = M_1 + M_2 + \dots + M_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть I – идеал алгебры Ли L , $a \in I$, a имеет вид

$$a = x + m_1 + \dots + m_k, \quad x \in M, \quad m_i \in M_i.$$

1. Предположим, что $x = 0$. Тогда $a = x + m_1 + \dots + m_k$, где $m_k \neq 0$.

Имеет смысл рассматривать только ненулевые элементы a . Произведём преобразования в несколько шагов.

Можно выбрать такой элемент $m \in M_k$, что $[m_i, m] \neq 0$. Тогда $[a, m] = x_1 + \dots + x_{k+1}$, где $x_i \in M_i$, $x_{k-1} \neq 0$. Отметим, что $[a, m] \in I$. И так далее, пока не придём к элементу $y \in M_1$, $y \neq 0$, $y \in I$.

Действуя на y элементами из M , получим все элементы M_1 . Здесь используется простота алгебры M и её неприводимость как модуля над M .

Итак, получили включение $M_1 \subset I$.

В качестве промежуточного элемента у нас был $z_1 + z_2 \in I$, $z_i \in M_i$, $z_2 \neq 0$. Мы уже установили, что $z_1 \in I$. Следовательно, $z_2 \in I$. Действуя на z_2 элементами из M , получим включение $M_2 \subset I$.

Продолжая аналогичные рассуждения, получим

$$M_1 + M_2 + \dots + M_k \subset I.$$

2. Предположим теперь, что $x \neq 0$. То есть $a = x + m_1 + \dots + m_k$.

Подберём $m \in M_k$ такое, что $[x, m] \neq 0$. Получим

$$[a, m] = [x, m] + [m_1, m] + \dots + [m_k, m].$$

Отметим, что $[a, m] \in M_k$, $[m_i, m] \in M_{i-1}$. Следовательно, $[a, m] \in I$ представимо в виде

$$[a, m] = x + m_1 + \dots + m_k, \quad x_i \in M_i, \quad x_k \neq 0.$$

Согласно 1, справедливо включение $M_1 + M_2 + \dots + M_k \subset I$. Получим $x = a - m_1 - \dots - m_k \in I$. Действуя на x элементами из M , получим включение $M \subset I$. Следовательно,

$$M_n = [M, M_n] \subset I$$

для $n = 1, 2, \dots$.

Итак, доказано включение $L \subset I$. Таким образом, алгебра L – слабо артинова. $\square$

2.2. Локальная нильпотентность первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. ([3, с. 34]) Алгебра Ли L называется нильпотентной степени s , если она удовлетворяет тождеству нильпотентности степени s

$$[x_1, \dots, x_s] = 0$$

с левонормированной расстановкой скобок и не удовлетворяет тождеству

$$[x_1, \dots, x_{s-1}] = 0.$$

Напомним, что алгебра Ли L называется локально нильпотентной, если любое её конечное множество элементов порождает в L нильпотентную подалгебру.

Приведём пример локально нильпотентной алгебры Ли.

ПРИМЕР 7. Пусть F – поле произвольной характеристики. Обозначим через $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ базис счётномерного векторного пространства V .

Рассмотрим систему векторных пространств $M_k = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$. Эти подпространства образуют возрастающую последовательность

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots$$

Рассмотрим алгебру A линейных отображений конечного ранга $f: V \rightarrow V$, удовлетворяющих условию $f(M_1) = 0$, $f(M_k) \subset M_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$.

Обозначим через P алгебру Ли $A^{(-)}$, полученную из A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.

Можно представлять себе элементы алгебры Ли P как бесконечные матрицы, у которых только конечное число столбцов отлично от нуля:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Построенная таким образом алгебра Ли P является локально нильпотентной.

ТЕОРЕМА 4. Пусть L – слабо артинова алгебра Ли. Тогда её первичный радикал $P = P(L)$ – локально нильпотентен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы нам потребуется представление первичного радикала алгебры Ли как нижнего слабо разрешимого радикала, которое рассмотрено в пункте 1.2 данной работы.

Пусть $\sigma(L)$ – это любой ненулевой абелев идеал из $P(L)$. Такой идеал существует, так как идеал $\sigma(L)$ содержится в первичном радикале.

Такой идеал содержится в любом ненулевом разрешимом идеале первичного радикала $P(L)$, который существует, согласно конструкции нижнего слабо разрешимого идеала, если $P(L) \neq 0$ [27] (в случае равенства $P(L) = 0$ утверждение теоремы выполнено).

Как известно [11], любой ненулевой разрешимый идеал содержит ненулевой абелев идеал.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\tau(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом.

1. $\tau(0) = 0$.
2. Предположим, что $\tau(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ следующим образом:
 - а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\tau(\beta)$ это такой идеал алгебры L , что $\tau(\beta)/\tau(\gamma) = \sigma(L/\tau(\gamma))$;
 - б) если β – предельное порядковое число, то

$$\tau(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \tau(\gamma).$$

Из соображений мощности $\tau(\beta) = \tau(\beta + 1)$ для некоторого β . Тогда $\tau(\beta) = P(L)$.

Построим ещё одно представление первичного радикала по нильпотентным идеалам.

Пусть $\sigma(L)$ – это сумма всех ненулевых абелевых идеалов из $P(L)$. Из слабой артиновости алгебры Ли L следует, что их конечное число.

В [11] показано, что сумма нильпотентных идеалов алгебры Ли – нильпотентна. Следовательно, идеал $\sigma(L)$ – нильпотентен.

Также как и раньше, с помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\sigma(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом.

1. $\sigma(0) = 0$.
2. Предположим, что $\sigma(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\sigma(\beta)$ следующим образом:
 - а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\sigma(\beta)$ это такой идеал алгебры L , что $\sigma(\beta)/\sigma(\gamma) = \sigma(L/\sigma(\gamma))$;
 - б) если β – предельное порядковое число, то

$$\sigma(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \sigma(\gamma).$$

Из соображений мощности $\sigma(\beta) = \sigma(\beta + 1)$ для некоторого β . Тогда $\sigma(\beta) = P(L)$.

Обозначим через $N(\sigma(L))$ степень нильпотентности идеала $\sigma(L)$.

Пусть $X \subset P(L)$ – непустое конечное множество. Докажем, что все произведения $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}]$, где $x_{i_k} \in X$ с левой расстановкой скобок равны 0 для некоторого натурального r .

Для каждого $x \in X$ обозначим через $\alpha(X)$ порядковое число α такое, что $x \in \sigma(\alpha) \setminus \sigma(\alpha - 1)$, если $\alpha - 1$ определено и α , если $x \in \sigma(\alpha)$ и $\alpha - 1$ не определено.

Введём множество $X_1 = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}] | x_{i_k} \in X, 1 \leq k \leq m\}$. Пусть

$$\alpha_1 = \max(\alpha([x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}] | x_{i_k} \in X)), \quad m_1 = N(\sigma(\alpha_1)).$$

Рассмотрим все произведения $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}]$. Они удовлетворяют условию

$$\alpha([x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}]) < \alpha_1.$$

Введём множество $X_2 = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m_1}}] | x_{i_k} \in X, 1 \leq k \leq m_1\}$. Пусть $\alpha_2 = \max_{x \in X_2}(\alpha(x))$, $m_2 = N(\sigma(\alpha_2))$. Из сказанного выше следует, что $\alpha_2 < \alpha_1$.

Введём множество $X_3 = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m_2}}] | x_{i_k} \in X, 1 \leq k \leq m_2\}$. Получим последовательность множеств $X_1, X_2, \dots$ и убывающую последовательность ординальных чисел $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, которая не может быть бесконечной.

Следовательно, для некоторого r все элементы множества X_r равны нулю.

Это означает нильпотентность алгебры Ли, порождённой множеством X , и локальную нильпотентность первичного радикала $P(L)$. $\square$

2.3. О проблеме А. В. Михалёва

Проблема А. В. Михалёва связана с вопросом разрешимости первичного радикала артиновых алгебр Ли.

Первичный радикал алгебры Ли L разрешим, если он является разрешимым как алгебра Ли некоторой степени.

Вопрос о разрешимости первичного радикала алгебр Ли рассматривался в работах [2, 21, 33, 39].

В случае произвольных алгебр Ли исследована слабая и локальная разрешимость первичного радикала.

Первичный радикал $P(L)$ алгебры Ли L является слабо разрешимым, если для любого конечномерного подпространства $V \subseteq P(L)$ существует такое k , что полином разрешимости f_k степени k обращается в нуль при подстановке любых элементов из V .

В работе [27] доказано, что первичный радикал алгебры Ли слабо разрешим.

Первичный радикал $P(L)$ алгебры Ли L является локально разрешимым, если любая её конечная подалгебра – разрешима.

В работе [27] показано, что первичный радикал алгебры Ли может не быть локально разрешимым.

Вопросам разрешимости первичного радикала, удовлетворяющего дополнительным условиям, посвящены работы [21, 36, 39].

Известно, что первичный радикал нётеровой алгебры Ли над полем является разрешимым [36, с. 111]. Возникает вопрос: *существует ли артинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым?* Вопрос о существовании слабо артиновой алгебры Ли, первичный радикал которой не является разрешимым, сформулирован А. В. Михалёвым в 2001 году на семинаре «Кольца и модули», проводимом на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

В процессе решения данной проблемы А. В. Михалёва получены следующие результаты. С. А. Пихтильков показал, что первичный радикал специальной слабо артиновой алгебры – разрешим [33]. Также разрешимость первичного радикала доказана для артиновых обобщённо специальных алгебр Ли. Данное свойство первичного радикала доказано и для супералгебр Ли [2]. Разрешимость первичного радикала также доказана для слабо артиновых локально нильпотентных алгебр Ли [39]. Ослабленная проблема А. В. Михалёва решена для первичного радикала алгебры Ли, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепочек внутренних идеалов или подалгебр [21].

Сначала отметим следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть I – ненулевой идеал слабо артиновой алгебры Ли L . Если I не является разрешимым, то существует нетривиальный идеал R , содержащийся в I , для которого $[R, R] = R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – слабо артинова алгебра Ли, I – её ненулевой идеал. Рассмотрим производный ряд $I' = [I, I], \dots, I^{(n+1)} = [I^n, I^n], \dots$.

Имеют место включения $I \supset I' \supset I'' \supset \dots \supset I^{(n)} \supset \dots$.

Так как алгебра Ли L является слабо артиновой, убывающая последовательность идеалов стабилизируется, то есть $R = I^{(n+1)} = I^{(n)}$. Получаем $[R, R] = R$.

Если $R = 0$, то $R = I^{(n)} = 0$, а это означает, что I является разрешимым идеалом, что противоречит условию. Тогда $[R, R] = R \neq 0$. $\square$

Далее нам понадобятся следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 5. ([13, с. 21]) Пусть I – идеал в алгебре Ли L . Предположим, что элемент $x \in L$ является произведением k элементов из L (при некоторой расстановке скобок), причём r из этих элементов содержатся в I . Тогда $x \in I^r$.

СЛЕДСТВИЕ 1. ([13, с. 21]) Для любого нильпотентного идеала I алгебры Ли L степени нильпотентности r произведение k элементов алгебры Ли при любой расстановке скобок равно нулю, если оно содержит r элементов из I .

ТЕОРЕМА 6. Пусть L – слабо артинова алгебра Ли. Тогда её первичный радикал $P = P(L)$ – разрешим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Рассмотрим производный ряд первичного радикала P

$$P' = [P, P], \dots, P^{(n+1)} = [P^{(n)}, P^{(n)}], \dots \quad (1)$$

Имеют место включения $P \supset P' \supset P'' \supset \dots \supset P^{(n)} \supset \dots$. Так как алгебра Ли является слабоартиновой, то убывающая последовательность идеалов стабилизируется, т.е. $R_1 = P^{(n+1)} = P^{(n)}$. Получаем $[R_1, R_1] = R_1$.

Если $R_1 = 0$, то первичный радикал P разрешим и утверждение имеет место.

Предположим, что $R_1 \neq 0$. Пусть идеал R_1 содержит собственный неразрешимый идеал P_1 .

Строим для P_1 производный ряд (1) и так же показываем существование идеала R_2 такого, что $[R_2, R_2] = R_2$.

Равенство $R_2 = 0$ противоречит неразрешимости P_1 .

Получили убывающую последовательность различных ненулевых идеалов

$$R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n \supset \dots,$$

удовлетворяющих условию $[R_k, R_k] = R_k$, $k = 1, 2, \dots$. Из слабой артиновости алгебры Ли L следует, что убывающая последовательность идеалов не может быть бесконечной.

Пусть $K = R_m$ – последний идеал убывающей цепи идеалов. Из построения идеалов $R_1, R_2, \dots$ следует, что $[K, K] = K$ и каждый собственный идеал K – разрешим.

2. Для доказательства теоремы нам потребуется представление первичного радикала алгебры Ли как нижнего слабо разрешимого радикала, которое было рассмотрено в разделе 1.2 данной работы.

Пусть $\sigma(L)$ – это любой ненулевой абелев идеал из L . Такой идеал существует, если первичный радикал ненулевой $P(L) \neq 0$, то есть алгебра L не является полупервичной [27].

Абелев идеал содержится в любом ненулевом разрешимом идеале первичного радикала $P(L)$, который существует согласно конструкции нижнего слабо разрешимого идеала, если $P(L) \neq 0$ [27] (в случае равенства $P(L) = 0$ утверждение теоремы выполнено).

Как известно [27], любой ненулевой разрешимый идеал содержит ненулевой абелев идеал.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\tau(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом.

1. $\tau(0) = 0$.
2. Предположим, что $\tau(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ следующим образом:
 - а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\tau(\beta)$ это такой идеал алгебры L , что $\tau(\beta)/\tau(\gamma) = \sigma(L/\tau(\gamma))$;
 - б) если β – предельное порядковое число, то

$$\tau(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \tau(\gamma).$$

Из соображений мощности $\tau(\beta) = \tau(\beta + 1)$ для некоторого β . Тогда $\tau(\beta) = P(L)$.

3. Покажем, что построенный в пункте 1 неразрешимый идеал $K = [K, K]$ равен $K = \tau(\omega)$, занумерован первым бесконечным порядковым числом.

Идеал K не может равняться $K = \tau(n)$, где n – натуральное. В этом случае идеал K разрешим как конечное последовательное расширение абелевых идеалов.

Заметим, что идеал $K = \tau(\omega)$ не является разрешимым и $K = \tau(\omega)$ – первый неразрешимый идеал в возрастающей последовательности идеалов $\tau(0) \subset \tau(1) \subset \dots$.

Разрешимый идеал S_1 слабо артиновой алгебры Ли ступени k является последовательным расширением конечного числа идеалов. У него конечное число n_1 абелевых идеалов, иначе нарушается слабая артиновость. Обозначим через J_1 сумму абелевых идеалов S_1 .

Рассмотрим фактор-алгебру $S_2 = S_1/J_1$. Обозначим через J_2 сумму n_2 абелевых идеалов S_2 .

Снова рассмотрим фактор-алгебру $S_3 = S_2/J_2$.

Нам придётся факторизовать по абелевым идеалам k раз, после чего получим нулевую алгебру.

Пересчитывая количество абелевых идеалов, получим

$$K = \tau(n), \tag{2}$$

где $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Равенство (2) противоречит предположению $K = \tau(\omega)$.

Итак, мы доказали, что идеал $K = \tau(\omega)$ не является разрешимым.

4. Построим ещё одно представление первичного радикала по нильпотентным идеалам.

Пусть $\varphi(L)$ – это сумма всех ненулевых абелевых идеалов из $P(L)$. Из слабой артиновости алгебры Ли L следует, что их конечное число.

В [13] показано, что сумма нильпотентных идеалов алгебры Ли – нильпотентна. Следовательно, идеал $\varphi(L)$ – нильпотентен.

Также как и раньше, с помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\rho(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом.

1. $\rho(0) = 0$.

2. Предположим, что $\rho(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\rho(\beta)$ следующим образом:

- а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\rho(\beta)$ это такой идеал алгебры L , что $\rho(\beta)/\rho(\gamma) = \sigma(L/\rho(\gamma))$;
- б) если β – предельное порядковое число, то

$$\rho(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \rho(\gamma).$$

Из соображений мощности $\rho(\beta) = \rho(\beta + 1)$ для некоторого β . Тогда $\rho(\beta) = P(L)$.

Расширение нильпотентной алгебры Ли при помощи нильпотентной является нильпотентной алгеброй Ли [13].

Так как идеалы $\{\rho(n) | n \in N\}$ являются конечной последовательностью расширений нильпотентных алгебр Ли, то все они нильпотентны.

Мы получили представление идеала K как последовательности возрастающих нильпотентных идеалов

$$\rho(0) \subset \rho(1) \subset \dots \subset \rho(n) \subset \dots,$$

при этом $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho(i)$.

Обозначим через $N(\rho(n))$ степень нильпотентности идеала $\rho(n)$.

Для каждого $x \in K$ обозначим через $\alpha(x)$ натуральное число α такое, что $x \in \rho(\alpha) \setminus \rho(\alpha - 1)$.

5. Далее будем использовать рассуждение из работы [39] и применим теорему 5 (стр. 332) и следствие 1 (стр. 332).

Напомним, что для идеала K выполнено условие $[K, K] = K$.

Пусть $b \in K$ – ненулевой элемент. Тогда $b = \sum_{i=1}^n [b_i, b'_i]$, где все элементы $b_i, b'_i \in K$. Тогда $[b_i, b'_i] \neq 0$ для некоторого i . Обозначим этот коммутатор $[b_1, b'_1]$.

Представляя далее b'_1 в виде суммы коммутаторов элементов из K и рассуждая аналогично, получим ненулевой коммутатор $[b_1, [b_2, b'_2]]$, где $b_1, b_2, b'_2 \in I$. В силу равенства $[b_1, [b_2, b'_2]] = [[b_1, b_2], b'_2] - [[b_1, b'_2], b_2]$, одно из слагаемых отлично от нуля. Обозначим его элементы $[b_1, [b_2, b'_2]]$.

Действуя аналогично, получим бесконечную последовательность $b_1, b_2, \dots \in K$ такую, что все конечные коммутаторы с левой расстановкой отличны от нуля $[b_1, b_2, \dots, b_n] \neq 0, n = 1, 2, \dots$

Рассмотрим цепочку идеалов J_k , порождённых элементами

$$J_k = ([b_1, \dots, b_k]), \quad k = 1, 2, \dots, \quad J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots \supseteq J_k \supseteq \dots$$

Из слабой артиновости алгебры Ли L следует существование натурального n такого, что $J_n = J_{n+1}$.

Введём обозначение $a = [b_1, b_2, \dots, b_n]$.

Пусть $\beta = \max(\alpha(a), \alpha(b_{n+1}))$. Обозначим через $m = N(\rho(\beta))$ степень нильпотентности идеала $\rho(\beta)$.

Отметим, что элемент a отличен от нуля.

Существуют натуральное число r и элементы

$$c_{ij} \in L, i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, k_i$$

такие, что

$$a = \sum_{i=1}^r [a, b_{n+1}, c_{i1}, \dots, c_{ik_i}].$$

Подставляя выражение элемента a в правую часть, получим

$$a = \sum_{i,j=1}^r [a, b_{n+1}, c_{i1}, \dots, c_{ik_i}, b_{n+1}, c_{j1}, \dots, c_{jk_j}].$$

Продолжая этот процесс m раз, получим в каждом коммутаторе под знаком суммы не менее m элементов вида a, b_{n+1} .

Напомним, что элементы a, b_{n+1} лежат в нильпотентном идеале $\rho(\beta)$ степени нильпотентности m .

Согласно следствию 1, все коммутаторы под знаком суммы и, следовательно, элемент a равны нулю.

Это противоречит предположению, сделанному выше о том, что элемент a – ненулевой, что и доказывает разрешимость первичного радикала. $\square$

3. Нётеровы алгебры Ли

3.1. Основные определения и свойства

В этом разделе рассмотрено решение проблемы вложения любой нётеровой специальной алгебры Ли в алгебру матриц над конечно порождённым коммутативным кольцом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. *Алгебра Ли называется нётеровой, если в ней стабилизируется любая возрастающая цепочка идеалов.*

Также, как и в случае со слабо артиновыми алгебрами Ли, очевидными примерами нётеровых алгебр Ли являются простые алгебры Ли, у которых только два идеала – тривиальный и сама алгебра Ли (примеры 3 (стр. 327) и 4 (стр. 327) данной работы).

Пусть $M = V \otimes_F C$, где V – конечномерное пространство над полем F , $C = C_1 \oplus \dots \oplus C_n$ – прямая сумма полей.

Введём понятие размерности над C . Каждый C -подмодуль W однозначно представим в виде прямой суммы подпространств $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ над полями C_k . Каждое подпространство W_k конечномерно над полем C_k .

Определим $\dim_C W = \dim_{C_1} W_1 + \dots + \dim_{C_n} W_n$.

ЛЕММА 1. *Пусть $M = V \otimes_F C$, где V – конечномерное пространство над полем F , $C = C_1 \oplus \dots \oplus C_n$ – прямая сумма полей. Пусть $K \subset L \subset M$ – C -подпространства.*

Тогда $K = L \iff \dim_C K = \dim_C L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $K = L \iff \dim_C K_i = \dim_C L_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Отличие подпространств K и L возможно только при отличии размерностей $\dim_C K = \dim_C L$. $\square$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется понятие центроида Мартиндейла.

3.2. Центроид Мартиндейла алгебр Ли

Конструкция центроида Мартиндейла используется при исследовании структуры специальных алгебр Ли. Для решения задач данного раздела также рассмотрим понятие центрального замыкания. При введении данных понятий будем использовать подход, единый, как для алгебр Ли, так и для ассоциативных алгебр. Результаты в неассоциативном случае рассмотрены в работах [42, с. 40], [48]. Вслед за Ю. П. Размысловым будем следовать подходу, описанному при рассмотрении универсальных алгебр [42, с. 51].

Для начала рассмотрим понятия инъективного модуля и инъективной оболочки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Модуль M над ассоциативной алгеброй с единицей A называется инъективным, если для любых двух модулей M_1, M_2 , любого мономорфизма $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ и любого гомоморфизма $\psi : M_1 \rightarrow M$ существует гомоморфизм $\rho : M_2 \rightarrow M$, для которого $\rho \circ \varphi = \psi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Подмодуль M модуля P называется большим в P , если любой ненулевой подмодуль в P имеет с M ненулевое пересечение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. A -модуль P называется инъективной оболочкой A -модуля M , если выполнены условия:

1. P – инъективный A -модуль;
2. M – подмодуль в P ;
3. M – большой подмодуль в P .

Инъективная оболочка существует для каждого модуля M , и она единственна с точностью до изоморфизма.

Ю. П. Размыслов для каждой F -алгебры L сигнатуры Ω определил связанную с ней ассоциативную подалгебру $A = A(L)$ в $End_F A$ ([42], с. 40). В случае лиевых алгебр алгебра $A(L)$ является присоединенной алгеброй AdL алгебры L , порождённой в $End_F L$ всеми внутренними дифференцированиями adx ($x \in L$). Если L – ассоциативная F -алгебра, то $A(L)$ является алгеброй умножений алгебры L , порождённой в $End_F L$ элементами вида r_a, l_b ($a, b \in L$), где

$$a, x \in L, \quad r_a(x) = xa, \quad l_a(x) = ax.$$

Пусть L – F -алгебра сигнатуры Ω и $A = A(L)$ – связанная с ней ассоциативная подалгебра в $End_F A$. Пусть P – инъективная оболочка A -модуля L . $E = End_A P$ – алгебра всех эндоморфизмов A -модуля P , $S = EL$ – A -подмодуль в P .

Далее относительно введенных объектов рассмотрим некоторые утверждения (без доказательства).

ЛЕММА 2. ([42, с. 42, лемма 3.1]) Пусть L – полупервичная F -алгебра сигнатуры Ω . Тогда ограничение ρ действия алгебры E на A -модуль S коммутативно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определение первичных и полупервичных алгебр для случая универсальных алгебр определяется аналогично этим понятиям в случае алгебр Ли и ассоциативных алгебр. Так как в дальнейшем эти понятия применяются только в случае ассоциативных алгебр и алгебр Ли, то отдельно для универсальных алгебр определения рассматривать нет необходимости.

Так как по определению $S = EL$ и согласно лемме 2 алгебра $C(L) = E/Ker \rho$ коммутативна, то мы можем продолжить все операции сигнатуры Ω по C -линейности с алгебры L на алгебру S и наделить S структурой Z -алгебры сигнатуры Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Алгебра $C = C(L)$ называется центроидом Мартиндейла полупервичной алгебры L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. C -алгебра S называется центральным замыканием алгебры L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. ([42, предложение 3.1]) Если L – полупервичная F -алгебра сигнатуры Ω , то центроид $C = C(L)$ и центральное замыкание $S = S(L)$ являются полупервичными алгебрами, характеризующимися следующими свойствами:

1. C – коммутативная F -алгебра с единицей и $S = CL$;
2. произвольный ненулевой A -подмодуль в S пересекается с L по ненулевому идеалу алгебры L ;
3. для любого A -гомоморфизма φ ненулевого A -подмодуля I и A -модуля S в S существует элемент $c \in C$, для которого $ci = \varphi(i)$, где i – произвольный элемент модуля I . Более того, если I – большой A -подмодуль в S , то элемент c однозначно определяется гомоморфизмом φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. ([42, предложение 3.2]) Если L – первичная F -алгебра сигнатуры Ω , то центроид $C(L)$ является полем, $S(L)$ – первичной F -алгеброй и C -алгебра S характеризуется следующими свойствами:

1. $S = CL$;
2. произвольный ненулевой A -подмодуль в S имеет ненулевое пересечение с L ;
3. любой частичный A -эндоморфизм φ ненулевого идеала I алгебры L в L однозначно определяет эндоморфизм $c \in C$, ограничение которого на I совпадает с φ .

Нам потребуется также теорема Познера.

ТЕОРЕМА 7. (Познера [52]). Пусть A – первичная ассоциативная PI -алгебра, K – поле частных центра $Z(A)$, $Q(A) = K \otimes_{Z(A)} A$ – алгебра центральных частных A . Тогда $Q(A)$ – простая алгебра, конечномерная над своим центром, и $Z(Q(A)) = K$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть A – первичная PI -алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени d . Тогда A конечномерна над своим центроидом Мартиндейла $C(A)$, и её размерность над C не превосходит $[d/2]^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. K – поле частных центра $Z(A)$, $Q(A) = K \otimes_{Z(A)} A$ – алгебра центральных частных A .

Так как $Q(A)$ является тензорным произведением алгебры A на коммутативную алгебру K , она удовлетворяет тому же тождеству степени d , что и A . Следовательно, согласно теореме Капланского, размерность $Q(A)$ над K не превосходит $[d/2]^2$. Так как $K \subseteq C(A)$, то размерность A над $C(A)$ также не превосходит $[d/2]^2$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Пусть A – ассоциативная PI -алгебра или алгебра Ли, удовлетворяющая тождественному соотношению. Назовём сложностью $n(A)$ алгебры A наименьший из порядков матричных алгебр, всем тождествам которой удовлетворяет фактор алгебры A по первичному радикалу. Скажем, что алгебра A нематричная, если $n(A) = 1$.

Аналог теоремы Познера для специальных алгебр Ли следует из теоремы Ю. П. Размылова о ранге. Хотя теорема о ранге справедлива даже для универсальных алгебр ([42, с. 47]), мы будем иметь в виду ассоциативные алгебры или алгебры Ли.

Пусть A – алгебра Ли или ассоциативная алгебра над полем F . Любой полином

$$d_k(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$$

из свободной алгебры Ли $F(X)$ или ассоциативной соответственно, который полилинеен и кососимметричен относительно $x_1, \dots, x_k$, называется полиномом Капелли порядка k . Пусть V – произвольное векторное F -подпространство в алгебре A . Скажем, что на V выполнены

все тождества Капелли порядка k , если для любого полинома Капелли порядка k и любых элементов

$$v_1, \dots, v_k \in V, \quad a_1, \dots, a_l \in A$$

в алгебре A выполняются равенства

$$d_k(v_1, \dots, v_k, a_1, \dots, a_l) = 0.$$

Рангом векторного F -подпространства V относительно алгебры A называется наименьшее число k , для которого на V выполняются все тождества Капелли порядка k . Это число обозначается $\text{rank}(A, V)$.

Легко заметить, что для конечномерной алгебры A размерности n над F ранг любого подпространства относительно алгебры A не превосходит $n + 1$. То же можно сказать и про все алгебры, лежащие в многообразии, порождённом алгеброй A .

ТЕОРЕМА 9. ([6]) Пусть L – специальная алгебра Ли.

1. Если L – первичная, то у неё существует первичная PI -оболочка, которая может быть получена как гомоморфный образ любой PI -оболочки.
2. У простой специальной алгебры Ли существует простая PI -оболочка, которая может быть получена как гомоморфный образ любой PI -оболочки.

ТЕОРЕМА 10. (Размыслова о ранге, [42, с. 47, теорема 4.1]) Пусть V – векторное F -подпространство в первичной ассоциативной алгебре A или алгебре Ли.

Если $\text{rank}(A, V) < \infty$, то в центральном замыкании $S(A)$ алгебры A справедливо равенство

$$\dim_{C(A)} C(A)V = \text{rank}(A, V) - 1.$$

ТЕОРЕМА 11. Пусть L – первичная специальная алгебра Ли. Тогда

1. L – матричная алгебра Ли;
2. если L имеет сложность n , то она конечномерна над своим центроидом Мартиндейла размерности не выше n^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. По условию теоремы L – специальная алгебра Ли. Тогда из теоремы 9 следует, что у алгебры L существует первичная PI -оболочка A .

Из теоремы Познера следует, что алгебра A удовлетворяет всем тождествам алгебры матриц некоторого порядка. Следовательно, и алгебра L удовлетворяет левым тождествам некоторой алгебры матриц, то есть является матричной алгеброй.

2. Пусть алгебра L имеет сложность n . Тогда она удовлетворяет всем левым тождествам алгебры матриц порядка n . Ранг любого подпространства V алгебры $sl_n(F)$ не превосходит $n^2 + 1$.

Согласно теореме 10, справедливо неравенство $\dim_{C(L)} L \leq n^2$. $\square$

3.3. О проблеме М. В. Зайцева

Пусть U – подмножество в алгебре Ли L . Ясно, что аннулятор $Z_L(U)$ – подалгебра в L .

Более того, если U – идеал в L , то $Z_L(U)$ также является идеалом в L .

Идеал U в L называется аннуляторным, если существует такой ненулевой идеал V в L , что $U = Z_L(U)$.

Если V – идеал в L и $U = Z_L(U)$, то $Z_L(Z_L(U)) = U$.

Действительно, $V \subseteq Z_L(U)$ и поэтому $U = Z_L(V) \supseteq Z_L(Z_L(U))$. С другой стороны, $[U, Z_L(U)] = 0$ и, следовательно, $U \subseteq Z_L(Z_L(U))$. $\square$

Пусть L – полупервичная алгебра Ли и V – идеал в L . Тогда $V \cap Z_L(V)$ – идеал с нулевым умножением. Следовательно, $V \cap Z_L(V) = 0$ в силу полупервичности L .

Аннуляторный идеал алгебры Ли L называется максимальным, если он не является собственным подмножеством любого другого аннуляторного идеала.

В [38] получен критерий представимости специальной алгебры Ли в виде конечного подпрямого произведения первичных алгебр.

ЛЕММА 3. Пусть L – полупервичная алгебра Ли. Тогда следующие условия эквивалентны:

- i. L не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов;
- ii. L не содержит бесконечных множеств ненулевых попарно непересекающихся идеалов;
- iii. L удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей аннуляторных идеалов;
- iv. каждый максимальный аннуляторный идеал в L является первичным;
- v. множество максимальных аннуляторных идеалов в L конечно и их пересечение равно нулю;
- vi. L представимо в виде конечного подпрямого произведения первичных алгебр Ли.

Проблема М. В. Зайцева формулируется следующим образом: верно ли, что любая нётерова специальная алгебра Ли вложена в алгебру матриц?

ТЕОРЕМА 12. Пусть алгебра Ли L – полупервичная нётерова специальная. Тогда L вложена в алгебру $sl_m(F) \otimes_F C$, где C – прямая сумма полей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По условию алгебра L – полупервичная и нётерова. Применяя пункт iii леммы 3 получим разложимость алгебры L в виде конечного подпрямого произведения первичных алгебр Ли.

Эти первичные алгебры являются SPI-алгебрами, поскольку лежат в многообразии, порождённом специальной алгеброй Ли и имеют тривиальные центры ([3, следствие 6.3.5]).

Тогда центроид $C(L)$ алгебры Ли L представим в виде прямой суммы центроидов первичных алгебр Ли, то есть полей.

Согласно теореме 11, размерности всех первичных алгебр над своими центроидами Мартиндейла не превосходят некоторой константы $m = [d/2]^2$, где d – степень тождества выполненного в PI-оболочке.

Можно считать, что L вложена в матричную алгебру порядка не выше m над центроидом Мартиндейла $C(L)$.

Таким образом, проблема М. В. Зайцева решена для полупервичных нётеровых специальных алгебр Ли. $\square$

4. Первичный радикал градуированных Ω -групп

4.1. Градуированные Ω -группы

Некоторые свойства первичного радикала слабо артиновых алгебр Ли верны и в более общей ситуации – для градуированных Ω -групп.

Далее рассмотрим изложение элементов теории Ω -групп в соответствии с работами [14], [27].

Нам потребуются следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. *Градуированной Ω -группой называется группа A с аддитивной записью и нейтральным элементом 0 , градуированная группой G , в которой задана помимо сложения еще система n -арных алгебраических операций Ω (при некоторых n , удовлетворяющих условию $n \geq 1$), причем для всех $\omega \in \Omega$ должно выполняться условие*

$$(0, 0, \dots, 0)\omega = 0.$$

Множество операций Ω – не пустое и содержит хотя бы одну n -арную операцию, у которой $n \geq 2$.

Группа A раскладывается в прямую сумму нормальных подгрупп A_g , $g \in G$, называемых однородными компонентами.

Для всех $a_1 \in A_{g_1}$, $a_2 \in A_{g_2}, \dots, a_n \in A_{g_n}$ и любой n -арной операции $\omega \in \Omega$ выполнено условие $(a_1, a_2, \dots, a_n)\omega \in A_{g_1 g_2 \dots g_n}$.

Если в дополнение к указанным свойствам выполнено следующее условие: для любого конечного множества $X \subseteq A$, для всех

$$n \geq 2, a_1, a_2, \dots, a_n \in X, \omega \in \Omega$$

множество элементов $(a_1, a_2, \dots, a_n)\omega$ – конечно, то скажем, что градуированная Ω -группа A удовлетворяет условию конечности.

Элементы множества $h(A) = \bigcup_{g \in G} A_g$ называются однородными элементами градуированной Ω -группы A , а отличный от 0 элемент $a_g \in A_g$ называется однородным элементом степени g .

Любой, отличный от 0 , элемент $a \in A$ имеет единственное представление в виде конечного произведения ненулевых однородных элементов, то есть

$$a = a_{g_1} + a_{g_2} + \dots + a_{g_n}, \quad \text{где } a_g \in A_g.$$

Элементы a_{g_i} в таком разложении называются однородными компонентами элемента a .

Градуированные Ω -группы могут удовлетворять также условиям, превращающим её в группу, ассоциативную алгебру, неассоциативную алгебру, супералгебру, конформную или вёртексную алгебры.

Для градуированных Ω -групп можно ввести понятие градуированного идеала, градуированного первичного радикала, разрешимой, нильпотентной, локально разрешимой и локально нильпотентной градуированных Ω -групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31. *Пусть A – градуированная Ω -группа. Непустое подмножество $I \subseteq A$ называется градуированным идеалом, если выполнены следующие условия:*

1. *подмножество I является нормальной подгруппой аддитивной группы A ;*
2. *для всякой n -арной операции $\omega \in \Omega$, любого элемента $a \in I$ и любых элементов $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ при $i = 1, 2, \dots, n$ должно иметь место включение*

$$-(x_1, x_2, \dots, x_n)\omega + (x_1, \dots, x_{i-1}, a + x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\omega \in I;$$

3. *если элемент $x \in I$ является суммой однородных элементов, то есть*

$$x = x_{g_1} + x_{g_2} + \dots + x_{g_n}, x_{g_i} \in A_{g_i}, g_i \in G,$$

4. *то все x_{g_i} принадлежат I .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. Пусть $I, J \subseteq A$ – градуированные Ω -подгруппы градуированной Ω -группы A . Взаимным коммутантом $[I, J]$ называется Ω -подгруппа Ω -группы A , порождённая в ней множеством элементов $(c_1, c_2, \dots, c_n)\omega$, где $n \geq 2$, $\omega \in \Omega$, элементы c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, принадлежат I или J , при этом элементы как I , так и J обязательно встречаются среди c_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Назовём градуированную Ω -группу A разрешимой степени k , если существует такое натуральное k , что $A^{(k)} = 0$, $A^{(k-1)} \neq 0$, где

$$A^{(0)} = A, \quad A^1 = [A^{(0)}, A^{(0)}], \quad \dots, \quad A^{(i+1)} = [A^{(i)}, A^{(i)}], \quad \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34. Назовём градуированную Ω -группу A нильпотентной степени k , если существует такое натуральное k , что $A_k = 0$, $A_{k-1} \neq 0$, где

$$A_0 = A, \quad A_1 = [A_0, A_0], \quad \dots, \quad A_{i+1} = [A_0, A_i], \quad \dots$$

4.2. О свойствах градуированного первичного радикала градуированных Ω -групп

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. Градуированная Ω -группа A называется первичной, если для любых двух градуированных идеалов $I, J \subseteq A$ из равенства $[I, J] = 0$ следует, что $I = 0$ или $J = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36. Градуированный идеал P градуированной Ω -группы A называется первичным, если Ω -фактор-группа A/P является первичной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. Назовём градуированным первичным радикалом $P(A)$ градуированной Ω -группы A пересечение всех градуированных первичных идеалов градуированной Ω -группы A .

Свойства градуированного первичного радикала градуированных Ω -групп рассмотрены в статье [27]. В частности, доказано, что градуированный первичный радикал произвольной градуированной Ω -группы с условием конечности совпадает с нижним градуированным слабо разрешимым радикалом, следовательно, является слабо разрешимым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38. Градуированная Ω -группа A называется абелевой, если $[A, A] = 0$.

ЛЕММА 4. Любой ненулевой разрешимый градуированный идеал градуированной Ω -группы A содержит ненулевой абелев градуированный идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – ненулевой разрешимый градуированный идеал градуированной Ω -группы A .

Так как I – разрешимый, то существует такое натуральное k , что $I^{(k)} = 0$. То есть $I^{(k)} = [I^{(k-1)}, I^{(k-1)}] = 0$, причём $I^{(k-1)} \neq 0$. Таким образом, $I^{(k-1)}$ является ненулевым абелевым градуированным идеалом. $\square$

ЛЕММА 5. Сумма нильпотентных градуированных идеалов градуированной Ω -группы A – нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай для суммы двух нильпотентных градуированных идеалов градуированной Ω -группы A .

Пусть I и J – нильпотентные градуированные идеалы градуированной Ω -группы A . Тогда существуют натуральные n и m , что $I_n = 0$, $I_{n-1} \neq 0$, $J_m = 0$, $J_{m-1} \neq 0$.

Пусть $l = \max(n, m)$. Рассмотрим градуированный идеал B . Для любой операции ω , элемент

$$(x_1^p, x_2^p, \dots, x_{k-1}^p (\dots (x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)\omega)\omega) \dots)\omega,$$

в котором s сомножителей из B , а остальные – из градуированной Ω -группы A , содержится в B_s . Тогда идеал $(I + J)_{2l}$ содержится в сумме элементов вида

$$y = (x_1^{2l}, x_2^{2l}, \dots, x_{k-1}^{2l} (\dots (x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1) \omega) \omega) \dots) \omega, \quad (3)$$

где x_i^j либо содержится в I , либо в J .

Каждый элемент y вида (3) содержит или l раз сомножителем I , или l раз сомножителем J . То есть y содержится в I_l или J_l . Отсюда следует, что

$$(I + J)_{2l} \subseteq I_l + J_l.$$

Так как $I_l = 0$ и $J_l = 0$, то $(I + J)_{2l} = 0$, то есть $I + J$ – нильпотентна. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39. *Градуированная Ω -группа называется локально нильпотентной, если любая её конечно порождённая градуированная Ω -подгруппа нильпотентна.*

ТЕОРЕМА 13. *Пусть A – градуированная Ω -группа с условием конечности удовлетворяющая условию обрыва цепочек убывающих градуированных идеалов. Тогда градуированный первичный радикал $P(A)$ градуированной Ω -группы A – локально нильпотентен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы нам потребуется представление градуированного первичного радикала градуированной Ω -группы как нижнего градуированного слабо разрешимого радикала, которое рассмотрено в [27].

Пусть $\sigma(A)$ – это любой ненулевой абелев градуированный идеал из $P(A)$. Такой идеал существует, так как идеал $\sigma(A)$ содержится в градуированном первичном радикале.

Такой идеал содержится в любом ненулевом разрешимом градуированном идеале градуированного первичного радикала $P(A)$, который существует, согласно конструкции нижнего градуированного слабо разрешимого идеала, если $P(A) \neq 0$ (в случае равенства $P(A) = 0$ утверждение теоремы выполнено).

Любой ненулевой разрешимый градуированный идеал содержит ненулевой абелев градуированный идеал.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α градуированный идеал $\tau(\alpha) \subset P(A)$ следующим образом.

1. $\tau(0) = 0$.
2. Предположим, что $\tau(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ следующим образом:
 - а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\tau(\beta)$ это такой идеал алгебры L , что $\tau(\beta)/\tau(\gamma) = \sigma(A/\tau(\gamma))$;
 - б) если β – предельное порядковое число, то

$$\tau(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \tau(\gamma).$$

Из соображений мощности $\tau(\beta) = \tau(\beta + 1)$ для некоторого β . Тогда $\tau(\beta) = P(A)$.

Построим ещё одно представление градуированного первичного радикала по нильпотентным идеалам.

Пусть $\sigma(A)$ – это сумма всех ненулевых абелевых градуированных идеалов из $P(A)$. Из того, что градуированная Ω -группа A удовлетворяет условию обрыва цепочек убывающих градуированных идеалов следует, что их конечное число.

Согласно лемме 5 (стр. 341) сумма нильпотентных градуированных идеалов градуированной Ω -группы A – нильпотентна. Следовательно, идеал $\sigma(A)$ – нильпотентен.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\sigma(\alpha) \subset P(A)$ следующим образом.

1. $\sigma(0) = 0$.
2. Предположим, что $\sigma(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\sigma(\beta)$ следующим образом:
 - а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\sigma(\beta)$ это такой идеал алгебры A , что $\sigma(\beta)/\sigma(\gamma) = \sigma(L/\sigma(\gamma))$;
 - б) если β – предельное порядковое число, то

$$\sigma(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \sigma(\gamma)$$

Из соображений мощности $\sigma(\beta) = \sigma(\beta + 1)$ для некоторого β . Тогда $\sigma(\beta) = P(A)$.

Обозначим через $N(\sigma(A))$ степень нильпотентности идеала $\sigma(A)$.

Пусть $X \subset P(A)$ – непустое конечное множество. Докажем, что все операции $\omega \in \Omega$ над элементами $x_1, x_2, \dots, x_l$ множества равны 0 для некоторого натурального l .

Для каждого $x \in X$ обозначим через $\alpha(X)$ порядковое число α такое, что $x \in \sigma(\alpha) \setminus \sigma(\alpha - 1)$, если $\alpha - 1$ определено и α , если $x \in \sigma(\alpha)$ и $\alpha - 1$ не определено.

Пусть

$$\alpha_1 = \max(\alpha((x_1^{2l}, x_2^{2l}, \dots, x_{k-1}^{2l}(\dots(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)\omega)\omega)\dots)\omega) | x_i^j \in X)),$$

$$m = N(\sigma(\alpha_1)).$$

Рассмотрим все элементы вида

$$y = (x_1^{2l}, x_2^{2l}, \dots, x_{k-1}^{2l}(\dots(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)\omega)\omega)\dots)\omega.$$

Они удовлетворяют условию

$$\alpha((x_1^{2l}, x_2^{2l}, \dots, x_{k-1}^{2l}(\dots(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)\omega)\omega)\dots)\omega) < \alpha_1.$$

Введём множество

$$X_2 = \{(x_1^{2l}, x_2^{2l}, \dots, x_{k-1}^{2l}(\dots(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, (x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)\omega)\omega)\dots)\omega | x_i^k \in X\}.$$

Пусть $\alpha_2 = \max_{x \in X_2}(\alpha(x))$, $m_2 = N(\sigma(\alpha_2))$. Из сказанного выше следует, что $\alpha_2 < \alpha_1$.

Аналогично введём множество X_3 . Получим последовательность множеств $X_1, X_2, \dots$ и убывающую последовательность ординальных чисел $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, которая не может быть бесконечной.

Следовательно, для некоторого s все элементы множества X_s равны нулю.

Это означает нильпотентность градуированной Ω -группы A , порождённой множеством X и локальную нильпотентность градуированного первичного радикала $P(A)$. $\square$

5. Заключение

Проведённое исследование по теме «Классические радикалы и центроид Мартиндейла артиновых и нётеровых алгебр Ли» позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, классические радикалы, построенные в теории конечномерных алгебр Ли, не всегда могут рассматриваться и применяться в качестве радикалов бесконечномерных алгебр Ли. В различных исследованиях приводятся примеры, доказывающие несостоятельность такого применения. В данной работе также приведён пример, согласно которому нильпотентный

радикал не может отвечать необходимым требованиям для его применения в теории бесконечномерных алгебр Ли.

Во-вторых, свойства радикалов конечномерных и бесконечномерных алгебр Ли могут существенно отличаться. Более того, свойства радикалов бесконечномерных алгебр Ли могут отличаться и в случае наложения на алгебры Ли различных дополнительных условий. Поэтому исследование свойств радикалов является актуальной задачей в области структурной теории бесконечномерных алгебр Ли. В работе рассмотрены свойства первичного радикала алгебр Ли, удовлетворяющих условию обрыва убывающих цепей идеалов. Доказано, что первичный радикал слабо артиновых алгебр Ли является локально нильпотентным. При решении проблемы А. В. Михалёва установлено свойство разрешимости первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли.

В-третьих, помимо радикалов, для изучения структуры алгебр Ли полезной оказывается конструкция центроида Мартиндейла, применение которой при решении проблемы М. В. Зайцева позволило доказать вложимость полупервичной нётеровой специальной алгебры Ли над полем F в алгебру $sl_m(F) \otimes_F C$, где C – прямая сумма полей.

В-четвёртых, некоторые свойства радикалов могут быть верны и в более общей ситуации. Так, свойство первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли быть локально нильпотентным оказалось справедливым и для градуированного первичного радикала градуированных Ω -групп.

Следует отметить, что в теории радикалов алгебр Ли остаются нерешёнными множество задач, среди которых интерес для дальнейших исследований представляют следующие:

1. Пусть $P(L)$ и $N(L)$ – первичный и локально нильпотентный радикалы специальной алгебры Ли L соответственно. Верно ли, что $N(L) \subset P(L)$?
2. Пусть $J(L)$ и $IrrPI(L)$ – радикал Джекобсона и неприводимо PI -представленный радикал алгебры Ли L соответственно. Для каких алгебр Ли верно, что $J(L) \subset IrrPI(L)$?
3. Можно ли привести пример алгебры Ли такой, что $N(L)$ не является локально разрешимым?
4. Является ли неприводимо PI -представленный радикал специальной алгебры Ли локально нильпотентным?
5. Является ли неприводимо PI -представленный радикал слабо артиновой (слабо нётеровой) алгебры Ли локально нильпотентным?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрунакиевич, В. А. Радикалы алгебр и структурная теория / В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин. – М.: Наука, 1979. – 495 с.
2. Балаба, И. Н. Первичный радикал специальных супералгебр Ли / И. Н. Балаба, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2003. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 51–60.
3. Бахтурин, Ю. А. Тожества в алгебрах Ли / Ю. А. Бахтурин. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
4. Бейдар, К. И. О первичном радикале специальных алгебр Ли / К. И. Бейдар, С. А. Пихтильков // Успехи матем. наук. – 1994. – № 1. – С. 233.
5. Бейдар, К. И. Первичный радикал специальных алгебр Ли / К. И. Бейдар, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2000. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 643–648.

6. Бейдар, К. И. О PI -оболочках специальных алгебр Ли / К. И. Бейдар, С. А. Пихтильников // Тезисы докладов международной конференции «Универсальная алгебра и ее приложения». – Волгоград, 1999. – С. 18–19.
7. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли: часть I / Н. Бурбаки. – М.: Книга по требованию, 2012. – 496 с.
8. Грибов, А. В. Первичный радикал для альтернативных колец и луп / А. В. Грибов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2015. – Т. 20. – Вып. 1. – С. 145–166.
9. Грибов, А. В. Первичный радикал для луп и Ω -луп. I / А. В. Грибов, А. В. Михалёв // Фундаментальная и прикладная математика. – 2014. – Т. 19. – Вып. 2. – С. 25–42.
10. Джекобсон, Н. Строение колец / Н. Джекобсон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 392 с.
11. Джекобсон, Н. Алгебры Ли / Н. Джекобсон. – М.: Мир, 1964. – 356 с.
12. Зубрилин, К. А. О наибольшем нильпотентном идеале в алгебрах, удовлетворяющих тождествам Капелли / К. А. Зубрилин // Математический сборник. – 1997. – Т. 188. – № 8. – С. 93–102.
13. Капланский, И. Алгебры Ли и локально компактные группы Ли / И. Капланский. – М.: Мир, 1974. – 150 с.
14. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
15. Кучеров, А. А. О почти локально разрешимых алгебрах Ли с нулевым радикалом Джекобсона и локально нильпотентном радикале для алгебр Ли / А. А. Кучеров // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2013. – № 1. – С. 121–125.
16. Кучеров, А. А. О гомологическом описании локально нильпотентного радикала для специальных алгебр Ли / А. А. Кучеров, С. А. Пихтильников, О. А. Пихтилькова // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2010. – № 9. – С. 40–43.
17. Кучеров, А. А. О гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли / А. А. Кучеров, С. А. Пихтильников, О. А. Пихтилькова // Чебышевский сборник. – 2010. – Т. 10. – Вып. 2. – С. 71–76.
18. Ламбек, И. Кольца и модули / И. Ламбек. – М.: Факториал Пресс, 2005. – 283 с.
19. Латышев, В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями / В. Н. Латышев // Сибирский математический журнал. – 1963. – Т. 4. – № 4. – С. 821–829.
20. Латышев, В. Н. О сумме локально разрешимых идеалов алгебр Ли / В. Н. Латышев, А. В. Михалёв, С. А. Пихтильников // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2003. – № 3. – С. 29–32.
21. Мещерина, Е. В. О проблеме А. В. Михалёва для алгебр Ли / Е. В. Мещерина, С. А. Пихтильников, О. А. Пихтилькова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – Вып. 4(2). – С. 84–89.
22. Мещерина, Е. В. Развитие понятия «артиновость» для алгебр Ли / Е. В. Мещерина, О. А. Пихтилькова // Чебышевский сборник. – 2018. – Т. 19. – Вып. 1. – С. 167–175.

23. Михалёв, А. В. Гомологическая классификация колец / А. В. Михалёв, Л. А. Скорняков // Математическая энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. – М.: Советская энциклопедия, 1977–1985. – Т.1: А–Г. – С. 1052.
24. Михалёв, А. В., Первичный радикал решёточно упорядоченных колец / А. В. Михалёв, М. А. Шаталова // Сборник работ по алгебре. – М.: Изд-во Московского университета, 1989. – С. 178–184.
25. Михалёв, А. В. Первичный радикал решёточно-упорядоченных групп / А. В. Михалёв, М. А. Шаталова // Вестник Московского университета. – 1990. – № 2. – С. 84–86.
26. Михалёв, А. В. Первичный радикал Ω -групп и Ω -I-групп / А. В. Михалёв, М. А. Шаталова // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4. – № 4. – С. 1405–1413.
27. Михалёв, А. В. Первичный радикал градуированных Ω -групп / А. В. Михалёв, И. Н. Балаба, С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – Вып. 2. – С. 159–174.
28. Михалёв, А. В. Первичные радикалы AO -групп / А. В. Михалёв, Е. Е. Ширшова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – Вып. 8. – С. 197–206.
29. Михалёв, А. В. Первичный радикал pl -групп / А. В. Михалёв, Е. Е. Ширшова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – Вып. 2. – С. 193–199.
30. Парфёнов, В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли / В. А. Парфёнов // Сибирский математический журнал. – 1971. – Т. 12. – № 1. – С. 171–176.
31. Пихтильков, С. А. О гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли и локально нильпотентного радикала для специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова, А. А. Горелик, Л. Б. Усова / Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18. – Вып. 2. – С. 195–204.
32. Пихтильков, С. А. Об использовании разрешимого радикала в теории многообразий алгебр Ли / С. А. Пихтильков // Межвузовский сборник «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп». – Тула: Изд-во ТГПУ, 1990. – С. 60–65.
33. Пихтильков, С. А. Артиновые специальные алгебры Ли / С. А. Пихтильков // Межвузовский сборник «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп». – Тула: Изд-во ТГПУ, 2001. – С. 189–194.
34. Пихтильков, С. А. О некоторых классических радикалах для специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова // Чебышевский сборник. – 2008. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 153–157.
35. Пихтильков, С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2002. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 769–782.
36. Пихтильков, С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков. – Оренбургский государственный университет, Оренбург – 2013. – 171 с.
37. Пихтильков, С. А. Локальная разрешимость первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / О. А. Пихтилькова, С. А. Пихтильков // Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57. – № 3. – С. 697–699.

38. Пихтилькова, О. А. О специальных алгебрах Ли, имеющих точный модуль с размерностью Крулля / О. А. Пихтилькова, С. А. Пихтильков // Известия РАН. Серия математика. – 2017. – Т. 81. – Вып. 1. – С. 93–100.
39. Поляков, В. М. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли / В. М. Поляков, С. А. Пихтильков // Чебышевский сборник. – 2005. – Т. 6. – Вып. 1. – С. 163–169.
40. Поляков, В. М. Об аналоге теоремы Амицура-Маккоя для алгебр Ли / В. М. Поляков, С. А. Пихтильков // Вестник ТГПУ им. Л.Н. Толстого. – 2005. – № 2. – С. 125–126.
41. Размыслов, Ю. П. О радикале Джекобсона в PI -алгебрах / Ю. П. Размыслов // Алгебра и логика. – 1974. – Т. 13. – № 3. – С. 337–360.
42. Размыслов, Ю. П. Тождества алгебр и их представления / Ю. П. Размыслов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
43. Симонян, Л. А. О радикале Джекобсона алгебры Ли / Л. А. Симонян // Латвийский математический ежегодник. – 1993. – Вып. 34. – С. 230–234.
44. Херстейн, И. Некоммутативные кольца / И. Херстейн. – М.: Мир, 1972. – 192 с.
45. Шукин, К. И. RI^* -разрешимый радикал групп / К. И. Шукин // Математический сборник. – 1960. – Т. 52. – № 4. – С. 1024–1031.
46. Amayo, R. Infinite dimensional Lie algebras / R. Amayo, I. Stewart. – Leyden: Noordhoof, 1974. – 436 p.
47. Amitsur, S. A. Radicals of polynomials rings / S. A. Amitsur // Canad. J. of Math. – 1956. – V. – 8. – P. 355–361.
48. Baxter, W. E. Central closure of semiprime nonassociative rings / W. E. Baxter, W. S. Martindale // Commun. of Algebra. – 1979. – V. 7. – N 11. – P. 1105–1132.
49. Buys, A. The prime radical for Ω -groups / A. Buys, G. K. Gerber // Commun. in Algebra. – 1982. – V. 10. – P. 1089–1099.
50. Cohen, M. Group-graded rings, smash products, and group action / M. Cohen, S. Montgomery // Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 282. – № 1. – P. 237–258.
51. Hartley, B. Locally nilpotent ideals of a Lie algebra / B. Hartley // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1967. – V. 63, part 2. – P. 257–272.
52. Jacobson, N. PI -algebras / N. Jacobson. – Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg, New York, 1975. – 120 p.
53. Kamiya, N. On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras / N. Kamiya // Hiroshima Math. J. – 1979. – V. 9. – P. 37–40.
54. Kubo, F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical / F. Kubo // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. – 1991. – V. 38. – P. 23–30.
55. McCoy, N. H. Prime ideals in general rings / N. H. McCoy // Amer. J. Math. – 1949. – № 71. – P. 823–833.
56. Marshall, E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra / E. I. Marshall // J. London Math. Soc. – 1967. – V. 42. – P. 416–422.

57. Pikhil'kov, S. A., Locally Nilpotent Ideals of Special Lie Algebras / S. A. Pikhil'kov // Comm. in Algebra. – 2001. – V. 29. – № 10. – P. 3781–3786.
58. Pikhil'kov, S. On a prime radical of algebras and superalgebras Lie / S. Pikhil'kov, V. Polyakov // Abstracts of International conference on radicals dedicated to the memory of Prof. V. Andrunakievich. – August 2003. – Chisinau, Moldova. – P. 33.
59. Togo, S. Radicals of infinite-dimensional Lie algebras / S. Togo // Hiroshima Math. J. – 1972. – V. 2. – P. 179–203.
60. Togo, S. Ascendantly coalescent classes and radicals of Lie algebras / S. Togo, N. Kavamoto // Hiroshima Math. J. – 1972. – V. 2. – P. 253–261.

Работы автора по теме диссертации

61. Blagovisnaya, A. A prime radical of weakly artinian Ω -groups with finite condition is locally nilpotent / A. Blagovisnaya, S. Pikhil'kov, O. Pikhil'kova // Journal of Generalized Lie Theory and Applications, 2015. – Vol. 9. – Iss. 2.
62. Pikhil'kov, S. A. On the embeddability of Noetherian semiprime special Lie algebra in $sl_m(F) \otimes_F C$ / S. A. Pikhil'kov, O. A. Pikhil'kova, A. N. Blagovisnaya // Алгебра и логика: теория и приложения: тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию В. М. Левчука. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2016. – P. 110–111.
63. Пихтильков, С. А. О локальной нильпотентности первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / С. А. Пихтильков, А. Н. Благовисная, О. А. Пихтилькова // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. – 2016. – № 8. – С. 121–122.
64. Пихтильков, С. А. О разрешимости первичного радикала слабоартиновых алгебр Ли / С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова, А. Н. Благовисная // Университет XXI века: научное измерение: материалы Всероссийской конференции. – Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2016. – С. 134–136.
65. Благовисная, А. Н. О проблеме М. В. Зайцева для нётеровых специальных алгебр Ли / А. Н. Благовисная, О. А. Пихтилькова, С. А. Пихтильков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2017. – № 5. – С. 26–31.
66. Пихтильков, С. А. О различных радикалах алгебр Ли / С. А. Пихтильков, А. Н. Благовисная, А. Н. Павленко // Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры: материалы Всероссийской научно-методической конференции. – Оренбург: ОГУ, 2017. – С. 3174–3177.
67. Пихтильков, С. А. О свойствах первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова, А. Н. Благовисная // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18. – № 1(61). – С. 134–142.
68. Пихтильков, С. А. Разрешимость первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли / С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова, А. Н. Благовисная // Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов: тезисы докладов 6-й школы-конференции. – Москва: МЦНМО, 2017. – С. 65–67.

69. Blagovisnaya, A. N. On the A.V. Mikhalev Problem for Weakly Artinian Lie Algebras / A. N. Blagovisnaya, O. A. Pikhtilkova, S. A. Pikhtilov // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2018. – Vol. 233. – Issue 5. – С. 635–639.
70. Благовисная, А. Н. О примерах построения артиновых алгебр Ли / А. Н. Благовисная, А. А. Горелик, О. А. Пихтилькова // Вестник современных исследований. – 2018. – №12.14(27). – С. 65–67.

REFERENCES

1. Andrunakievich, V. A. & Ryabukhin, Y. M. 1979, Radicals of algebras and structure theory, Nauka, Moscow, 495 p.
2. Balaba, I.N. & Pikhtilov, S.A. 2003 , “Prime radicals of special Lie superalgebras”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 9, no. 1, pp. 51–60. doi: 10.1007/s10958-005-0273-1
3. Bahturin, Y. A. 1985, Identities in algebras Lie, Science, Moscow, 448 p.
4. Beidar, K. I. & Pikhtilov, S. A. 1994, “On the prime radical of special Lie algebras”, UMN, No. 1, P. 233. doi: 10.1070/RM1994v049n01ABEH002144
5. Beidar, K. I. & Pikhtilov, S. A. 2000, “The prime radical of the special Lie algebras”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 6, no. 3, pp. 643–648.
6. Beidar, K. I. & Pikhtilov, S. A. 1999, “On PI-shells of the special Lie algebras”, Tezisy dokladov megdunarodnoi konferentsii “Universal’naya algebra i prilogeniya”. Volgograd, pp. 18–19.
7. Bourbaki, N. 2012, Lie groups and Lie algebras: part I, Izdat. po treb., Moscow, 496 p.
8. Gribov, A. V. 2015, “The prime radical of alternative rings and loops”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 20, no. 1, pp. 145–166.
9. Gribov, A. V. & Mikhalev, A. V. 2014, “Prime radical of loops and Ω -loops. I”, Fundam. Prikl. Mat., vol. 19, no. 2, pp. 25–42.
10. Jacobson, N. 1961, Structure of rings, Izdat. inostrannoi literatury, Moscow, 392 p.
11. Jacobson, N. 1964, Lie Algebras, Mir, Moscow, 356 p.
12. Zubrilin, K. A. 1997, “On the greatest nilpotent ideal in algebras satisfying Capelli identities”, Matematicheskii sb., Vol. 188. No. 8, pp. 93–102.
13. Kaplansky, I. 1974, Lie Algebras and Locally Compact Groups, Mir, Moscow, 150 p.
14. Kurosh, A. G. 1973, Lectures on General algebra, Science, Moscow, 150 p.
15. Kucherov, A. A. 2013, “On almost locally solvable Lie algebras with zero Jacobson radical and locally nilpotent radical for Lie algebras”, Vestnik Orenburgskogo gos. univ., no. 1, pp. 121–125.
16. Kucherov, A. A. & Pikhtilov, S. A. 2010, “On the homological description of a locally nilpotent radical for special Lie algebras”, Vestnik Orenburgskogo gos. univ., no. 9, pp. 40–43.
17. Kucherov, A. A., Pikhtilov, S. A. & Pikhtilkova, O. A. 2010, “On the homological description of the Jacobson radical for Lie algebras”, Chebyshevskii sb., vol. 10, no. 2, pp. 71–76.
18. Lambec, J. 2005, Rings and modules, Faktorial Press, Moscow, 150 p.

19. Latyshev, V. N. 1963, "On Lie algebras with identical relations", *Sib. Mat. Zh.*, vol. 4, no. 4, pp. 821–829.
20. Latyshev, V. N., Mikhalev, A.V. & Pikhtilov, S. A. 2003, "On the sum of locally solvable ideals of Lie algebras", *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seria 1. Matematika. Mekhanika*, no. 3, pp. 29–32.
21. Mescherina, E. V., Pikhtilkova, O. A. & Pikhtilov S. A. 2013. "On the A. V. Mikhalev's Problem for Lie Algebras" // *Izvestia Saratov. Universiteta: New ser. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, no. 4(2), pp. 84–89.
22. Mescherina, E.V. & Pikhtilkova, O. A. 2018, "The development of the concept of «artinian» for Lie algebras", *Chebyshevskii sb.*, vol. 19, no. 1, pp. 167–175.
23. Mikhalev, A.V. & Skornjakov S. A. 1977–1985. "Homological classification of rings", *Mathematical encyclopedia*, vol. 1, p. 1052.
24. Mikhalev, A. V. & Shatalova, M. A. 1989, "Prime radical of lattice-ordered rings", in: *Collection of works on algebra*, Izdat. Mosk. univ., Moscow, pp. 178–184.
25. Mikhalev, A. V. & Shatalova, M. A. 1990, "Prime radical of lattice-ordered groups", *Vestnik Moskoivskogo univ.*, no. 2, pp. 84–86.
26. Mikhalev, A. V. & Shatalova, M. A. 1998, "Prime radical of Ω -groups and Ω -l-groups", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 4, no 4, pp. 1405–1413.
27. Mikhalev, A. V., Balaba, I. N. & Pikhtilov, S. A. 2006, "Prime radicals of graded Ω -groups", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 12, no. 2, pp. 159–174. doi: 10.1007/s10958-008-0053-9
28. Mikhalev, A. V. & Shirshova, E. E. 2006, "Prime radicals of AO-groups", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 12, no. 8, pp. 197–206. doi: 10.1007/s10958-008-9057-8
29. Mikhalev, A. V. & Shirshova, E. E. 2006, "The prime radical of pl-groups", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 12, no. 2, pp. 193–199. doi: /10.1007/s10958-008-0055-7
30. Parfenov, V. A. 1971, "On weakly solvable radical of Lie algebras", *Sib. Mat. Zh.*, vol. 12, no. 1, pp. 71–176.
31. Pikhtilov, S. A., Pikhtilkova, O.A., Gorelik, A.A. & Usova L.B. 2017, "On the homological description of the Jacobson radical for Lie algebras and the locally nilpotent radical for special Lie algebras", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 18, no. 2, pp. 195–204. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-2-195-204
32. Pikhtilov, S. A. 1990, "On the use of the solvable radical in the theory of varieties of Lie algebras", in: *Algorithmic problems in group theory and semigroups*, Izdat. Tul'sk. Gos. Ped. Univ., Tula, pp. 60–65.
33. Pikhtilov, S. A. 2001, "Special Artinian Lie algebras", in: *Algorithmic problems in group theory and semigroups*, Izdat. Tul'sk. Gos. Ped. Univ., Tula, pp. 189–194.
34. Pikhtilov, S. A. & Pikhtilkova, O. A. 2008, "On some classical radicals for special Lie algebras", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 9, no. 1, pp. 153–157.
35. Pikhtilov, S. A. 2002, "On locally nilpotent radical of special Lie algebras", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 8, no. 3, pp. 769–782.

36. Pikhtil'kov, S. A. 2013, Structural theory of special Lie algebras, Orenburg State University, Orenburg, 171 p.
37. Pikhtilkova, O. A. & Pikhtil'kov, S. A. 2016, "Local solvability of the prime radical of a weakly artinian Lie algebra", *Sib. Mat. Zh.*, vol. 57, no. 3, pp. 697–699. doi: 10.17377/smzh.2016.57.318
38. Pikhtilkova, O. A. & Pikhtil'kov, S. A. 2017, "On special Lie algebras having a faithful module with Krull dimension", *Izv. Math.*, vol. 81, no. 1, pp. 93–100. doi: 10.4213/im8387
39. Polyakov, V. M. & Pikhtil'kov, S. A. 2005 "On locally nilpotent artinian Lie algebras", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 6, no. 1, pp. 163–169.
40. Polyakov, V. M. & Pikhtil'kov, S. A. 2005, "About the analogue of the Amitsur-McCoy theorem for Lie algebras", *Vestnik Tul'sk. Gos. Ped. Univ.*, no 2, pp. 125–126.
41. Razmyslov, Yu. P. 1974, "On the Jacobson radical in PI-algebras", *Algebra and Logic*, vol. 13, no 3, pp. 337–360.
42. Razmyslov, Yu. P. 1989, *Identities of Algebras and Their Representations*, Nauka, Moscow, 432 p.
43. Simonyan, L. A., 1993, "On the Jacobson radical of the Lie algebra", *Latvian Math. Yearbook*, no. 34, pp. 230–234.
44. Herstein, I. 1972, *Non-commutative Rings*, Mir, Moscow, 190 p.
45. Shchukin, K. K. 1960, "The RI^* -solvable radical of groups", *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 52(94), no. 4, pp. 1021–1031.
46. Amayo, R. & Stewart, I. 1974, *Infinite dimensional Lie algebras*, Leyden, Noordhoof, 436 p.
47. Amitsur, S. A. 1956 "Radicals of polynomials rings", *Canad. J. of Math.*, vol. 8, pp. 355–361.
48. Baxter, W. E. & Martindale, W. S. 1979, "Central closure of semiprime nonassociative rings", *Commun. Of Algebra*, vol. 7, no. 11, pp. 1105–1132.
49. Buys, A. & Gerber, G. K. 1982, "The prime radical for Ω -groups", *Commun. in Algebra*, vol. 10, pp. 1089–1099.
50. Cohen, M. & Montgomery, S. 1984, "Group-graded rings, smash products, and group action", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 282, no 1, pp. 237–258.
51. Hartley, B. 1967, "Locally nilpotent ideals of a Lie algebra", *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 63, part 2, pp. 257–272.
52. Jacobson, N. 1975, *PI-algebras*. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg, New York, 1975. 120 p.
53. Kamiya, N. 1979, "On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras", *Hiroshima Math. J.*, vol. 9, pp. 37–40.
54. Kubo, F. 1991, "Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical", *Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci.*, vol. 38, pp. 23–30.
55. McCoy, N. H. 1949, "Prime ideals in general rings", *Amer. J. Math.*, no. 71, pp. 823–833.
56. Marshall, E. I. 1967, "The Frattini subalgebras of a Lie algebra", *J. London Math. Soc.*, vol. 42, pp. 416–422.

57. Pikhtil'kov, S. A. 2001, "Locally Nilpotent Ideals of Special Lie Algebras", *Comm. in Algebra*, vol. 29, no 10, pp. 3781–3786.
58. Pikhtil'kov, S. & Polyakov, V. 2003, "On a prime radical of algebras and superalgebras Lie", *Abstracts of International conference on radicals dedicated to the memory of Prof. V. Andrunakievich*, August 2003. Chisinau, Moldova, pp. 33.
59. Togo, S. 1972. "Radicals of infinite-dimensional Lie algebras", *Hiroshima Math. J.*, vol. 2, pp. 179–203.
60. Togo, S. & Kavamoto, N. 1972, "Ascendantly coalescent classes and radicals of Lie algebra", *Hiroshima Math. J.*, vol. 2, pp. 253–261.

Works of the author on the topic of the thesis

61. Blagovisnaya, A., Pikhtil'kov, S. & Pikhtilkova, O. 2015, "A prime radical of weakly artinian Ω -groups with finite condition is locally nilpotent", *Journal of Generalized Lie Theory and Applications*, vol. 9, iss. 2. doi: 10.4172/1736-4337.1000237
62. Pikhtil'kov, S. A., Pikhtilkova, O. A. & Blagovisnaya, A. N. 2016, "On the embeddability of Noetherian semiprime special Lie algebra in ", *Tezisy dokladov megdunarodnoi konferentsii, posvyachennoi 70-letiyu V. M. Levchuka "Algebra i logika: teoriya i prilozheniya"*, Krasnoyarsk, pp. 110–111.
63. Pikhtil'kov, S. A., Blagovisnaya, A. N. & Pikhtilkova, O. A. 2016, "On the local nilpotence of the prime radical of a weakly artinian Lie algebra", *Research in algebra, number theory, functional analysis and related topics*, no. 8, pp. 121–122.
64. Pikhtil'kov, S. A., Pikhtilkova, O. A. & Blagovisnaya, A. N. 2016, "On the solvability of the primary radical of weakly artinian Lie algebras", *Materialy Vserossiiskoi konferencii "Universitet XXI veka: nauchnoe izmerenie"* Tula, pp. 134–136.
65. Blagovisnaya, A. N., Pikhtilkova, O. A. & Pikhtil'kov, S. A. 2017, "On the M.V. Zaicev problem for a Noetherian special Lie algebras", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, no. 5, pp. 26–31. doi: 10.3103/S1066369X17050036
66. Pikhtil'kov, S. A., Blagovisnaya, A. N. & Pavlenko, A. N. 2017, "On various radicals of Lie algebras", *Materialy Vserossiiskoi nauchno-metodicheskoi konferencii "Universitetskii kompleks kak regionalny centr obrazovaniya, nauki i kultury"*. Orenburg, pp. 3174–3177.
67. Pikhtil'kov, S.A., Pikhtilkova, O.A. & Blagovisnaya, A.N. 2017, "On the properties of the prime radical of a weakly artinian Lie algebra", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 1, pp. 134–142. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-1-134-142
68. Pikhtil'kov, S.A., Pikhtilkova, O.A. & Blagovisnaya, A.N. 2017, "Solvability of the prime radical of a weakly artinian Lie algebra", *Theses of reports of the 6th school conference "Lie algebras, algebraic groups and invariant theory"*. Moscow, pp. 65–67.
69. Blagovisnaya, A. N., Pikhtilkova, O. A. & Pikhtil'kov, S. A. 2018, "On the A.V. Mikhalev Problem for Weakly Artinian Lie Algebras" *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, vol. 233, i. 5, pp. 635–639. doi: 10.1007/s10958-018-3949-z
70. Blagovisnaya, A. N., Gorelik, A. A. & Pikhtilkova, O. A. 2018, "On examples of artinian Lie algebras", *Vestnik sovremennykh issledovaniy*, no. 12.14 (27), pp. 65–67.

Приложение А

(справочное)

Список обозначений

- $[a, b]$ – коммутатор элементов в ассоциативной алгебре или алгебре Ли
- $A^{(-)}$ – ассоциативная алгебра A по отношению к операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$
- $A(M)$ – ассоциированная алгебра представления, порождённая элементами алгебры L в алгебре $End(M)$ как ассоциативная алгебра, где M – L -модуль
- $Ad L$ – присоединённая ассоциативная алгебра для алгебры Ли L
- $C(L)$ – центроид Мартиндейла алгебры Ли L
- D_n – алгебра матриц порядка n над алгеброй D
- $Irr(L)$ – неприводимо представленный радикал алгебры Ли L
- $IrrFin(L)$ – конечно неприводимо представленный радикал алгебры Ли L
- $IrrPI(L)$ – PI -неприводимо представленный радикал алгебры Ли L
- $J(D)$ – радикал Джекобсона алгебры D
- L' или L^2 – коммутант алгебры Ли L
- $L^{(n)}$ – элементы производного ряда алгебры Ли L
- L_n – элементы нижнего центрального ряда алгебры Ли L
- $P(L)$ – первичный радикал алгебры Ли L
- $sl_n(F)$ – специальная линейная алгебра порядка n над полем F
- $span(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – линейная оболочка векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$
- SPI -алгебра Ли – специальная алгебра Ли
- $U(L)$ – универсальная обёртывающая алгебра алгебры Ли L
- $Z(D)$ – центр алгебры D

Получено 05.12.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 539.21:621.785

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-354-371

Из истории состояния сверхпластичности металлических систем¹

А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, А. Н. Чуканов, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий, Е. В. Цой,
А. А. Калинин

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Сергеев Александр Николаевич — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: ansergueev@gmail.com

Чуканов Александр Николаевич — доктор технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

Малий Дмитрий Владимирович — старший преподаватель кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Цой Евгений Владимирович — учебный мастер кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: aspiring94@yandex.ru

Калинин Антон Алексеевич — инженер, Тульский государственный университет, г. Тула.

e-mail: antony-ak@mail.ru

Аннотация

В статье представлена ретроспектива становления и развития одного из уникальных явлений металловедения и физики металлов — сверхпластичности. Дана историческая справка использования больших пластических деформаций в ранних технологиях человеческого общества. Очерчен круг материалов, демонстрирующих сверхпластичность. Приведен перечень основных исследований в области механики сверхпластичности, а также металловедения и физики сверхпластичных материалов. Раскрывается роль первых экспериментов Анри Эдуарда Треска (Tresca), Барре де Сен-Венана (Saint-Venant), Г. Д. Бенгаха. Представлены в качестве первопроходцев сверхпластичности: автор первой широко известной научной статьи о сверхпластичности — С. Е. Пирсон и советские ученые — авторы самого названия «сверхпластичность» — академик А. А. Бочвар и З. А. Свидерская. Описано современное состояние исследований в области сверхпластичности металлических систем

¹Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России по проекту №11.6682.2017/8.9.

(металлов, сталей, цветных сплавов), а также важность использования явления сверхпластичности в промышленных технологиях, при создании ресурсосберегающих процессов: обработки металлов и сплавов давлением (бесфильтрованного волочения, вакуумной и газовой формовки, объемного деформирования и формоизменения); объемной штамповки инструментальных углеродистых и высоколегированных металлорежущих сталей и порошковых сплавов; химикотермической, термоциклической, термомеханической и термической обработки металлических, композиционных и металлокерамических материалов; сварки металлов давлением в твердом состоянии; получения волокнистых композиционных материалов методами прокатки или горячего прессования пакетов из сверхпластичных металлических фольг, между которыми располагаются ряды высокопрочных керамических волокон. Примерами создания малоотходных технологий могут служить разработанные в Институте металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН малоотходные процессы сверхпластического деформирования быстрорежущих сталей разной металлургической природы и малопереходные процессы переработки порошков быстрорежущей стали, получаемых распылением или из стружечных отходов, в заготовки инструмента различного профиля.

Ключевые слова: сверхпластичность, материаловедение, механика, математика, физика металлов, деформация, пластическое формоизменение, ресурсосберегающие технологии, металлические системы.

Библиография: 62 названия.

Для цитирования:

А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, А. Н. Чуканов, С. Н. Кутепов, Д. В. Малий, Е. В. Цой, А. А. Калинин. Из истории состояния сверхпластичности металлических систем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 354–371.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 539.21:621.785

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-354-371

Excerpts on the history of superplasticity state of metal systems²

A. E. Gvozdev, A. N. Sergeev, A. N. Chukanov, S. N. Kutepov, D. V. Maliy, E. V. Tsoy,
A. A. Kalinin

Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Sergeev Aleksander Nikolaevich — Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: ansergueev@gmail.com

Chukanov Aleksander Nikolaevich — Doctor of technical sciences, Associate Professor, Leading Researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Kutepov Sergey Nikolaevich — Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

²The work has been prepared within the framework of the fulfillment of the state task of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on project No. 11.6682.2017 / 8.9.

Maliy Dmitry Vladimirovich — Senior Lecturer of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: maliydmityy@yandex.ru

Tsoy Evgeniy Vladimirovich — Lab Instructor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: aspiring94@yandex.ru

Kalinin Anton Alekseevich — Engineer, Tula State University, Tula.

e-mail: antony-ak@mail.ru

Abstract

The article presents a retrospective of the formation and development of one of the unique phenomena in metal science and metal physics – superplasticity. The paper gives historical background on the use of large plastic deformations in the early technologies of human society. It delineates a range of superplastic materials. The article provides a list of the basic studies in the field of superplasticity mechanics, as well as the science and physics of superplastic materials. The paper explains the role of the first experiments by Henri Edouard Tresca, Barre de Saint-Venant, G. D. Bengough. The article presents the following authors as pioneers of superplasticity: S.E. Pearson, who is the author of the first well-known scientific paper on superplasticity, and the Soviet scientists – academician A. A. Bochvar and Z. A. Sviderskaya, who are the authors of the term ‘superplasticity’. The article describes the current state of research in the field of superplasticity of metal systems (metals, steels, non-ferrous alloys), as well as the importance of using the phenomenon of superplasticity in industrial technologies when creating resource-saving processes: processing of metals and alloys by pressure (filter-free drawing, vacuum and gas forming, volumetric deformation and forming); volume stamping of tool carbon and high-alloy metal-cutting steels and powder alloys; chemical-thermal, thermocyclic, thermomechanical and thermal treatments of metal, composite and metal-ceramic materials; welding of metals by pressure in a solid state; production of fibrous composite materials by rolling or hot pressing of packages made of superplastic metal foils between which there are rows of high-strength ceramic fibers. As the examples of low-waste technologies, the authors refer to the developed at the Institution of Russian Academy of Sciences A.A. Baikov Institute of Metallurgy and Material Science RAS low-waste processes of superplastic deformation of high-speed steels of different metallurgical nature and low-pass processes of processing of high-speed steel powders obtained by spraying or from chip waste into tool blanks of various profiles.

Keywords: superplasticity, metallurgy, mechanics, mathematics, metal physics, deformation, plastic forming, resource-saving technologies, metal systems.

Bibliography: 62 titles.

For citation:

A. E. Gvozdev, A. N. Sergeev, A. N. Chukanov, S. N. Kutepov, D. V. Maliy, E. V. Tsoy, A. A. Kalinin, 2019, "Excerpts on the history of superplasticity state of metal systems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 354–371.

1. Введение

Явление сверхпластичности (СП) материалов связано с использованием больших и очень больших пластических деформаций. Их применение началось с начала нашей эры. Ещё в древнем Китае вырабатывали сложноузорчатую декоративную ткань – парчу, включающую в себя тончайшие нити из золота, серебра или имитирующих их металлов. Получение этих нитей было неразрывно связано с реализацией значительных пластических деформаций, сопоставимых по величине с характерными для СП. Богатейшее шитье золотыми и серебряными нитями, имевшееся во всех дореволюционных христианских монастырях и храмах, – это были дары

именитых вкладчиков или результаты искусного труда местных монахинь. Золотые купола храмов – еще один пример использования СП. Купола покрывали тончайшими листами так называемого сусального золота. Эти листочки получали путем «расковки» горошины золота маленькими молоточками, так что исходная толщина горошины-«заготовки» уменьшалась в тысячу раз. В конце 1940-х – начале 50-х годов «книжечки» сусального золота свободно и недорого продавались в отечественных ювелирных магазинах.

С точки зрения современной науки о металлах сверхпластичность (англ. *superplasticity*) – это состояние материала, имеющего кристаллическую структуру, которое допускает деформации, на порядок превышающие максимально возможные для этого материала в обычном состоянии [1]. СП характеризуется рядом признаков: – аномально высоким ресурсом деформационной способности; – напряжением течения материала в несколько раз меньше предела текучести, характеризующего пластическое состояние данного материала; – крайне незначительным деформационным упрочнением; – повышенной чувствительностью напряжения течения материала к изменению скорости деформации. СП обычно наступает при температурах, превышающих половину температуры плавления по абсолютной шкале. Образцы в состоянии СП при растяжении, как правило, не образуют «шейки» и не подвержены инерциальной кавитации, что имеет место при разрушении образцов в состоянии обычной пластичности. Многие аморфные материалы (например, стёкла и полимеры) также демонстрируют возможность больших деформаций при повышенных температурах, однако их состояние не относится к СП, так как эти материалы не кристаллические вещества. Их состояние описывается законами поведения ньютоновской жидкости.

Состояние СП характерно для металлов и керамик с мелким размером зерна, обычно меньше 20 мкм. Кроме достаточно мелкого зерна, от материала для достижения состояния сверхпластичности требуется высокая однородность распределения по объему термопластичных компонентов, которые связывают между собой границы зерен в процессе пластического течения, позволяя материалу сохранять свою кристаллическую структуру. Для металлов до сих пор нет однозначно принятого мнения о механизме возникновения состояния СП. Считается, что он лежит в области явлений атомарной диффузии и проскальзывания зерен относительно друг друга.

Цель данной работы – осветить основные моменты в истории открытия, исследований и научного обоснования явления СП металлов, представить имена знаковых ученых, развивших направление СП, представить пути промышленного использования различных граней явления сверхпластичности металлических сплавов.

Основная идея. Для научных сообществ, работающих в близких областях с одними и теми же материалами характерна, к сожалению, некоторая разобщенность в методах исследований, анализа и даже языке изложения результатов. Этот негативный факт мешает ученым активно сотрудничать даже в смежных областях и просто понимать друг друга. Это явление сыграло свою роль и в истории открытия и анализа явления СП. Противоречивые, а зачастую просто взаимно исключающие теоретические обоснования СП, развивали, каждые со своей стороны, как ученые-механики, так и металловеды.

2. История открытия явления сверхпластичности

Наиболее ярким примером самых ранних исследований СП учеными-механиками являются опыты Анри Эдуарда Треска (Tresca H.) с 1864 по 1872 гг. по течению твердых тел [3]. Краткое описание этих опытов приводится в книге Дж. Ф. Белла [4]. За 8 лет Треска провел необычайно большое число экспериментов по пластическому деформированию множества твердых тел, – от свинца и меди до льда, парафина и керамической пасты. Он продемонстрировал, что существуют измеримые и воспроизводимые параметры, которые могли создать основу для

теории больших пластических деформаций в твердых телах.

Большую часть опытов Треска выполнил на свинце. Он выбивал из листов цилиндрические элементы при помощи закаленного стального стержня (пуансона) меньшего диаметра; выдавливал цилиндрические образцы через круглые, треугольные и прямоугольные сквозные отверстия и в тупиковые углубления; сжимал цилиндрические образцы кругового сечения, помещенные между закаленными плитами; исследовал обратную экструзию сплошных цилиндров различной толщины при наличии и отсутствии бокового стеснения и т. п. Для того, чтобы наблюдать течение, он создал образцы в виде пакета отдельных пластин. Измерения состояли в фиксации приложенного давления и соответствующих изменений в форме и положении отдельных пластин. Поперечные разрезы пакета, производившиеся в конце каждого из опытов, позволяли ему детально описать, где каждое сечение тела текло в процессе эксперимента данного типа. Для более мягких материалов (глина, парафин и др.) он использовал слоистые маркеры различных цветов, чтобы проследить путь течения.

Основными открытиями А. Э. Треска Дж. Белл считал следующие выводы:

- 1) твердые тела при достаточных уровнях давления могут течь подобно жидкостям;
- 2) существует промежуточная область пластического упрочнения, имеющая место за пределом упругости и до того, как начинается постоянное течение;
- 3) существует характеристика материала (коэффициент K), выражающая максимальное касательное напряжение, при котором независимо от типа опыта твердое тело течет;
- 4) при пробивке цилиндрическим пуансоном цилиндрического блока длина выбиваемой части L связана с радиусом штампа R_1 и радиусом образца R зависимостью: $L = R_1 \times [1 + \lg(R/R_1)]$;
- 5) пластическое течение твердых тел происходит без изменения объема (является изохорическим).

Несмотря на то, что один из создателей теории пластичности Барре де Сен-Венан сразу признал и восторженно описал как выдающееся достижение третье из этих открытий, продемонстрировавшее важность критерия предельного касательного напряжения при построении теории пластичности [5, 6]. Сам же А. Э. Треска, по-видимому, считал своим наибольшим достижением формулу для длины выбиваемой части стержня [3].

Первые научные сообщения металлургов об удивительной способности некоторых металлических материалов к большим пластическим деформациям появились, в 10-30-х гг. прошлого столетия.

Наиболее ранним сообщением является, опубликованная в 1912 г. работа Г. Д. Бенгаха (*Bengough G. D.*) [7], в которой на образцах из латуни при температуре 700 °С была достигнута относительная деформация 163 %.

В 1920 г. известный английский металлург Розенгейн (*Rosenghain*) [8] исследовал поведение сплава цинка, алюминия и меди, прокатанного при 250 °С. Он установил, что величина удлинения до разрыва образцов, изготовленных из этого материала, существенно зависит от скорости нагружения. При быстром нагружении образцы проявляли обычное поведение. При медленном – квазистатическом нагружении до небольших значений нагрузки они начинали вести себя так, как если бы были изготовлены из смолы или дегтя. Были достигнуты удлинения в сотни процентов, что для того времени было совершенно новым и удивительным фактом.

Никто тогда не мог и предположить, что металлический сплав может вести себя, как вязкая жидкость. Этот факт требовал своего объяснения.

Розенгейн предположил, что такое удивительное изменение свойств кристаллического материала как СП является следствием прокатки – она частично аморфизует структуру материала. Не соглашаясь с этой точкой зрения, З. Джеффри и Р. С. Арчер (*Jeffries Z. and Archer R. S.*) [9], одними из первых обратили внимание на то, что кажущаяся аморфизация структуры материала связана с имеющим место при прокатке измельчением зерна, что

приводит к резкому усилению влияния границ зерен. С. Н. Дженкинс (*Jenkins C. N.*) [10] в 1928 г. при растяжении образцов, изготовленных из предварительно прокатанных сплавов кадмий-цинк и олово-свинец, установил, что удлинение до разрыва сильно зависит от скорости приложения нагрузки и ее величины. Для сплава олово-свинец были достигнуты удлинения вплоть до 400 %. Ф. Харгривс (*Hargreaves F.*) [11, 12], исследуя методом Бринелля твердость легкоплавких эвтектических сплавов, установил, что она может быть существенно уменьшена посредством предварительнойковки.

В 1934 г. была опубликована работа преподавателя металлургии в Армстронг-Колледже (Великобритания) С. Е. Пирсона (*Pearson C. E.*) [13], которая сейчас признана классической, несмотря на то, что она была полностью забыта в конце 30-х гг. Известный польский исследователь Мацей Грабский приписывает Пирсону в своей книге [14] честь открытия явления СП.

Пирсон исследовал механическое поведение сплавов на основе олова: олово-свинец (*Sn-Pb*) и олово-висмут (*Sn-Bi*). Из слитков методом обратного выдавливания Пирсон получал пруток. Цилиндрические образцы испытывались на растяжение при различных условиях нагружения и разном времени выдержки после экструзии. Из полученных результатов следовало, что величина удлинения до разрыва растет по мере снижения нагрузки и уменьшения времени выдержки после экструзии. Для достижения еще больших удлинений Пирсон предложил проводить испытание при постоянном напряжении течения. С этой целью он уменьшал величину приложенной к образцу нагрузки по мере уменьшения площади его поперечного сечения, что позволило достичь рекордного значения удлинения в 1950 % для сплава *Sn-Bi*. Для того чтобы сфотографировать полученный в итоге образец, длина которого составила 82,1 дюйма (при исходной длине рабочей части 4 дюйма), его пришлось свернуть в спираль. Эта фотография стала классическим примером СП и приводится теперь во многих учебниках.

Несомненной заслугой С. Е. Пирсона является и то, что он впервые провел систематические микроструктурные исследования. С. Е. Пирсон отметил, что, несмотря на чрезвычайно большие удлинения (вплоть до 2000 %), он не обнаружил при микроскопическом исследовании полос сдвига внутри зерен. Кроме того, размер зерен не менялся в ходе деформации. Все это позволило не только подтвердить гипотезу З. Джеффри и Р. С. Арчера [9] о том, что предварительная обработка (прокатка или экструзия) измельчает зерно, но также и выдвинуть гипотезу о том, что основным механизмом деформации является зернограницное скольжение (ЗГС). С. Е. Пирсон установил, что наблюдаемая «вязкая» деформация не является ньютоновским течением. Напряжение не было прямо пропорционально скорости деформации и материал вел себя так, как если бы его вязкость уменьшалась с увеличением напряжения течения. В этом смысле поведение исследуемых сплавов напоминает поведение коллоидных растворов и некоторых дисперсных систем, например, суспензий частиц микроскопических размеров.

Как и всякая классическая работа, статья С. Е. Пирсона и сейчас, спустя 60 лет, не утратила своего значения и представляет несомненный практический интерес для всех исследователей, изучающих явление СП. В 1994 г. Манчестерский университет провел даже специальную международную конференцию, посвященную 60-летию выхода в свет работы С. Е. Пирсона. Эмблемой конференции был знаменитый образец С. Е. Пирсона (рис.1).

Работа С. Е. Пирсона была незаслуженно забыта в конце 1930-х гг. Исторически сложилось так, что развитие дальнейших исследований явления сверхпластичности связано с именами наших соотечественников – советских ученых – академика А. А. Бочвара и его сотрудницы З. А. Свидерской.

А. А. Бочвар и З. А. Свидерская обнаружили очень странное поведение литых сплавов цинка с 15-20 % алюминия (*Zn-22 % Al* («цинкаль»)) при дилатометрическом анализе: закаленные образцы при нагреве до температур выше 150 °С становились такими мягкими,

что спрессовывались под действием пружинок оптического дилатометра. При этом твердость сплава монотектоидного состава оказалась на порядок меньше, чем у чистых компонентов сплава: цинка и алюминия, а относительное удлинение достигло 450 %, что было совершенно необычно для литого материала [15].



Рис.1: Образец С. Е. Пирсона – эмблема международной конференции ICSAM (International Conference on Superplasticity in Advanced Materials), посвященной 60-летию выхода в свет его работы

А. А. Бочвар был первым, кто понял, что перечисленные факты указывают на существование нового явления, названного им «сверхпластичностью». Этот термин стал международным. Чтобы объяснить экспериментально наблюдаемые большие деформации при исчезающе малых напряжениях, предложил теорию [15, 16], суть которой заключалась в том, что в двухфазных материалах типа цинкала изменение формы образца может осуществляться за счет направленного диффузионного переноса массы. А. А. Бочвар первым указал на то, что при сверхпластической деформации (СПД) должен протекать еще один процесс, который был назван им «залечиванием» очагов разрушения при перемещениях. Таким образом, в работах А. А. Бочвара в 40-е годы XX века было вновь открыто явление СП. Нашими соотечественниками было введено в науку само это понятие, сформулированы основные требования к структуре двухфазных сверхпластичных сплавов и выдвинута гипотеза о механизме СПД, которая была подтверждена результатами более поздних исследований.

Классическое определение сверхпластичности было дано учеником А. А. Бочвара профессором И. И. Новиковым [17]. Сверхпластичность – это способность металлических тел квазиравномерно удлиняться с высокой скоростной чувствительностью напряжения течения ($m > 0,2...0,3$) Установлены два типа сверхпластичности: структурная (изотермическая) сверхпластичность материалов с ультрамелким зерном и сверхпластичность превращения, обусловленная фазовым превращением и наиболее ярко проявляющаяся при циклических изменениях температуры. Далее будет рассмотрена только структурная сверхпластичность.

Эта тема была продолжена А. А. Пресняковым. В конце 50-х – начале 60-х годов А. А. Пресняков с сотрудниками обнаружил СП во многих системах. Им было опубликовано множество работ, в частности книга [18], переизданная в 1976 г. в Великобритании. Он одним из первых сформулировал и стал неутомимо пропагандировать представление о механизме и сути того, как, происходит само деформирование при СП. Он утверждал, что при больших пластических деформациях, несмотря на то, что достигаются удивительно большие относительные удлинения вплоть до нескольких тысяч процентов, происходит локализация деформации. Концепция получила название «бегающей шейки» при растяжении.

Вплоть до начала 1960-х гг. большинство исследователей относилось к СП, как к экзотическому явлению, которое может наблюдаться только у крайне ограниченного числа материалов, в чрезвычайно узком температурном диапазоне; в связи с чем СП может рассматриваться не более, как некий «фокус», довольно занимательный, но вряд ли имеющий какое-либо практическое значение. Положение коренным образом изменилось после того, как в 1964 г. группа

исследователей под руководством В. А. Бекофена (*Backofen W. A., Turner G. R., Avery D. H.*) из Массачусетского технологического института опубликовала работу [19], в которой исследовалась сверхпластичность цинкала в плане ее практического освоения. С этой целью из листовой заготовки толщиной 0,76 мм через матрицу диаметром 100 мм методом свободного выдувания были отформованы купола большего диаметра, чем диаметр матрицы. Стало очевидным, что явление СП может быть использовано в технологических процессах обработки металлов давлением. Это привело к бурному развитию исследований природы и механизмов СП; в периодической печати стало появляться столько публикаций по СП, что к концу 60-х гг. ситуация приобрела характер информационного «взрыва».

Значение работы [19] настолько велико, что М. Грабский в [14] называет ее «вторым открытием сверхпластичности» (напомним, что честь первого открытия сверхпластичности, по его мнению, принадлежит Пирсону).

В 1964 В. А. Бэкофен с сотрудниками большое сопротивление образованию шейки при растяжении сверхпластичного материала объяснили высокой чувствительностью напряжения течения к скорости деформации. В этой же работе сообщалось о сенсационном эксперименте с выдувкой под небольшим газовым давлением куполообразной детали из сплава Zn – 22% Al [20]. Вскоре после этой публикации появились многочисленные предложения технологического использования сверхпластичности: пневмоформовка из листа изделий сложной формы (по аналогии с формованием изделий из термопластиков), объемная изотермическая штамповка труднодеформируемых сплавов и др.

3. Современное состояние проблемы сверхпластичности

Огромный интерес к проблеме сверхпластичности проявился в резком числе публикаций в 60-х годах. Начиная с 1964 г. ведет свой отсчет история широкомасштабных исследований явления СП, которое находит все большее применение в различных отраслях промышленности. Количество публикаций, посвященных исследованию СП, растет с каждым годом. На сегодняшний день проведено уже восемь международных конференций по СП, которые носят краткое название ICSAM (International Conference on Superplasticity in Advanced Materials): ICSAMг – Сан-Диего, Калифорния, США; ICSAM – Гренобль, Франция; ICSAM – Блэйн, Вашингтон, США; ICSAM – Осака, Япония; ICSAM 1994 г. – Москва, Россия.

Выбор в 1994 году Москвы в качестве места проведения представительного международного форума не случаен. Известный американский ученый Теренс Лэнгдон пишет в предисловии к сборнику трудов этой конференции: «Хотя явление сверхпластичности впервые было продемонстрировано в научных экспериментах, проведенных в Великобритании, большая часть систематических научных исследований этого явления была проведена в России. Действительно, даже сам международный термин «superplasticity» является прямым переводом русского слова «сверхпластичность» ...» [21].

Анализ представленных на Московскую конференцию ICSAM в 1994 г. докладов дает достаточно полное представление о современном состоянии и масштабах исследований по сверхпластичности: и о богатом тематическом разнообразии, и о широкой географии участников. Основные направления: фундаментальные аспекты СП, СП нанокристаллических материалов, СП металлов, СП керамик, СП интерметаллидов, СП композитов с металлической матрицей, реология, механика и основы обработки, практическое применение СП. Страны участники: Великобритания, Германия, Дания, Индия, Италия, Казахстан, Канада, Китай, Кыргызстан, Латвия, Польша, Россия, Сингапур, США, Украина, Франция, Южная Корея, Япония.

В качестве ведущих научных центров СП в России можно назвать следующие: ВИАМ – Всероссийский институт авиационных материалов, г. Москва; ВИАЛС – Всероссийский институт легких сплавов, г. Москва; Институт физики твердого тела РАН, г. Черноголовка; Ин-

ститут физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск; Институт гидродинамики СО РАН, г. Новосибирск; Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа; Московский институт стали и сплавов; Нижегородский государственный университет; Научно-исследовательский институт авиационной технологии, г. Москва; «Прометей» – Центральный научно-исследовательский институт конструкционных материалов, г. Санкт-Петербург; Санкт-Петербургский Государственный университет.

Перечисление, только основных работ, ведущих советских и Российских ученых-механиков и металлургов, внесших вклад и развивающих сейчас исследования СП, займет целую страницу. Это Михлин С. Г. [22], Ильюшин А. А. [23-27], Кайбышев О. А. [28, 29], Валиев Р. З. [30], Рабинович М. Х. [31, 32], Работнов Ю. Н. [33, 34], М. Х. Шоршоров [35], Тихонов А. С. [36], Смирнов О. М. [37], Гохфельд Д. А. [38], Поздеев А. А. [39], Лойцянский Л. Г. [40], Малинин Н. Н. [41], Партон В. З. [42], Гвоздев А. Е. [43]. Труды этих и многих других исследователей построены на физическом основании теории СП. Это прежде всего работы основоположников теории дефектов кристаллического строения Френкеля Я. М. [44], Ландау Л. Д., Лившица Е. М., [45, 46], Полухина П. И., Горелика С. С., Воронцова В. К. [47], Воыновой Т. Ф. [50], Бернштейна М. Л. [51], Штремеля М. А. [52, 53], Гуляева А. П. [54], Новикова И. И., Партнова В. К. [55], Преснякова А. А. [18] и др. [56-62]. Их работы позволили разработать новые методики и приборы анализа СП [48, 49] и использовать его в промышленности.

4. Выводы

На основании приведенного далеко не полного списка можно сделать следующие выводы. Явление СП исследуют во всем мире ученые самых различных специальностей. При этом, как правило, каждый исследовательский центр концентрирует свое внимание на той или иной стороне явления СП. Например, в Гренобле (Франция) основное внимание уделяется физическому аспекту природы СП; профессор Мак-Куин из Канады специализируется на исследовании особенностей протекания процессов динамической рекристаллизации в металлах и сплавах и т. д. Но в мире нет таких научных центров, в которых явление СП исследовалось бы комплексно, на различных масштабных уровнях, с привлечением ведущих специалистов самого различного профиля. Нет нигде – кроме России. В 1985 г. было принято решение о создании в СССР уникального мирового научного центра – Института проблем сверхпластичности металлов (ИПСМ). Для более успешного развития научных изысканий и непосредственной связи их результатов с производством в организационную структуру Института при его создании была заложена способствующая этому схема – соединение научно-исследовательского и конструкторско-технологического отделений и опытного производства. В ИПСМ работают известные у нас в стране и за рубежом исследователи. Уникальность ИПСМ состоит в том, что здесь рядом, в соседних лабораториях, работают ученые самых различных специальностей: физики, материаловеды, механики, технологи.

5. Заключение

Механика сверхпластичности еще не построена, но существует механика сверхпластичности в том смысле, что проводятся механические эксперименты для отыскания режима СП, определения скоростной чувствительности материала и т.д. Подтверждением сказанному служит и краткий исторический экскурс, проведенный в этой работе. Действительно, С. Е. Пирсон проводил интересные механические эксперименты и даже выяснил характер скоростной зависимости напряжений, но основная заслуга его состоит в том, что он первым сформулировал основной механизм СПД – зернограницное проскальзывание; предложил теорию диффузионного переноса массы; настаивает на механизме локализации деформации; В. Бэкофен

с коллегами осуществляет «второе открытие СП», отформовав купол методом свободного выдувания... Не кажется ли, что в изложении истории открытия и освоения СП чувствуется «рука» физика-материаловеда?

Явление сверхпластичности быстрорежущих сталей целесообразно применять в обработке давлением. При этом реализуются следующие преимущества:

- эффект сверхпластичности позволяет получать готовые детали сложной формы при меньшем числе операций, например, при штамповке или формовке;
- при деформации в условиях сверхпластичности существенно снижаются энергозатраты, что позволяет использовать оборудование меньшей мощности;
- снижаются стоимость инструмента и его износ в процессе эксплуатации;
- обработка давлением металлических материалов в режимах СП приводит к повышению таких технологических характеристик, как свариваемость, коррозионная стойкость, износостойкость;
- после деформирования в условиях СП в деталях снижаются остаточные напряжения, что обеспечивает высокую стабильность размеров изделий;
- в некоторых случаях СП является единственным источником повышения пластичности таких традиционно малопластичных материалов, каковыми являются металлокерамика и дисперсно-упрочненные сплавы.

На базе эффекта сверхпластичности разработаны принципиально новые процессы обработки давлением: бесфиллерное волочение, вакуумная и газовая формовка. В нашей стране впервые эти работы получили развитие в Московском институте сталей и сплавов под руководством Я. И. Охрименко и О. М. Смирнова. Наряду с этими процессами значительный интерес представляет и формообразование в жестких штампах. Под руководством О. А. Кайбышева разработаны промышленная технология и оснастка для глубокой вытяжки деталей из нержавеющей стали и трудно деформируемых сплавов. Аналогичные работы по объемной штамповке инструментальных углеродистых и сложнoleгированных металлорежущих сталей выполнены в ТулГУ и ТГПУ им. Л. Н. Толстого. В последнем случае наряду с обычными заготовками использованы и полуфабрикаты, полученные с применением порошковой металлургии.

Благодаря особой способности активировать состояние материалов, явление сверхпластичности может найти широкое применение в процессах химикотермической, термоциклической, термомеханической, термической и др. обработок металлических, композиционных и металлокерамических материалов.

Сверхпластическое деформирование является основой для разработки малоотходных ресурсосберегающих технологических процессов.

Примерами создания малоотходных технологий могут служить разработанные в Институте металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН и в базовой лаборатории ИМЕТ в ТулГУ «Новые процессы формоизменения металлических материалов специального назначения» малоотходные процессы сверхпластического деформирования быстрорежущих сталей разной металлургической природы и малопереходные процессы переработки порошков быстрорежущей стали, получаемых распылением или из стружечных отходов, в заготовки инструмента различного профиля. Эти процессы исключают операцию спекания. К ним относятся шаговая прокатка полосы, экструзия и изотермическая штамповка в режимах сверхпластической деформации. Первые два процесса позволяют получать длинномерные заготовки под сверла, развертки, метчики, а третий – заготовки под фрезы широкой номенклатуры и типов-размеров. Благодаря тому, что во всех случаях обеспечивается высокая дисперсность карбидных фаз и фрагментарная структура ферритной и мартенситной составляющих, характерных для термомеханической обработки, стойкость инструмента возрастает в 1,8...2,2 раза, а коэффициент использования материалов – до 0,87.

Кроме указанных выше преимуществ обработки давлением в режимах СП следует особо отметить повышение таких технологических характеристик как возможность получения изделий сложной формы при меньшем числе операций, например, при штамповке и формовке, снижение энергозатрат, возможность использования менее мощного оборудования, уменьшение стоимости инструмента, отсутствие остаточных напряжений, повышение ряда свойств изделий (коррозионная стойкость, износостойкость), улучшение свариваемости и т.д. В некоторых случаях СП служит единственным ресурсом повышения деформационной способности таких традиционно малопластичных материалов как металлокерамика и дисперсно-упрочненные Ni-Cr сплавы, например, типа ЖС6КП, инструментальные стали У8, Р6М5 и т.п. С применением СПД для термомеханического упрочнения $\alpha+\beta$ титановых сплавов и сталей получено рекордное сочетание прочности, пластичности и вязкости разрушения благодаря формированию мелкоблочной структуры. Одной из основных задач практического применения СП является получение достаточно мелкого зерна в заготовке для последующей обработки давлением в режимах СПД. Помимо обработки давлением и термомеханического упрочнения эффект СП используется и для сварки металлов давлением в твердом состоянии и получения волокнистых композиционных материалов методами прокатки или горячего прессования пакетов из СП металлических фольг, между которыми располагаются ряды высокопрочных керамических волокон. Эти процессы являются прямым следствием особо активированного состояния металлических сплавов при СПД. В отличие от традиционных методов сварки давлением сварка в режимах СП обеспечивает следующие преимущества: температура процесса снижается на 100-150 град, в несколько раз уменьшаются необходимые усилия, и в десятки раз сокращается длительность сварки. При получении композиционных материалов практически исключается дробление хрупких волокон [61].

Предыдущие исследования СП проводились физиками и материаловедом. Все эти исследования, как правило, включают в себя элемент механических испытаний и опираются на них. Однако получилось так, что рассказывали об этих испытаниях сами же материаловеды, поэтому они, как правило, не обращали внимания на механические детали и использовались результаты механических испытаний только как подтверждение своих гипотез, касающихся особенностей структурного поведения материалов при пластической деформации и формоизменения.

Обычно все исследования по феноменологии СП включают в себя механический аспект, и в этой связи можно говорить о том, насколько грамотно (с механической точки зрения) они поставлены, насколько аккуратно (с математической точки зрения) обработаны полученные результаты, связанные с решением комплексных краевых задач механики, металловедения, физики конденсированного состояния и насколько корректно сформулированы полученные выводы.

При этом важно, чтобы краевые задачи были грамотно поставлены и корректно решены. В этом и состоит совместная комплексная работа механиков с физиками, математиками, специалистами по компьютерному моделированию, металловедами, материаловедами и технологами по созданию ресурсосберегающих технологий обработки сверхпластичных металлических систем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быля О. В., Васин Р. А., Ермаченко А. Г. и др. О корреляции истории нагружения материала и эволюции его структуры в режиме сверхпластичности // В сборнике материалов IX Конференции по прочности и пластичности. – Москва, Россия, 22–26 января 1996. Т. 2. С. 33–38.
2. Гегузин Я. Е. Живой кристалл. – М.: Наука, 1987. 192 с.

3. Tresca H. Memoire sur lecoulement des corps solides soumis a 'des fortes pressions // Comptes Rendus de L'Academie des Sciences. Paris, 1864. V.59.
4. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел: В 2 ч. / Пер. с англ. – М.: Наука, 1984. Ч. 1. 596 с.; Ч. 2. 431 с.
5. Сен-Венан Б. Об установлении внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости / Теория пластичности. – М.: ИЛ, 1948. С. 11–19.
6. Сен-Венан Б. Дифференциальные уравнения внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах, и граничные условия для этих тел. Некоторые приложения / Теория пластичности. – М.: ИЛ, 1948. С. 24–33.
7. Bengough G. D. J. Inst. Metals. 1912. V. 7. P. 123.
8. Rosenghain, Haughton, and Bingham // J. Inst. Metals. 1920. V. 23. P. 261144. Superplasticity in advanced materials / Ed.by Shigenori Hori, Masahary Tokizane, Norio Furushiro, JSRS, Japan. Osaka, June 3–6, 1991.
9. Jeffries Z. and Archer R. S. The science of metals. N. Y.: McGraw-Hill, 1924. 76 p.
10. Jenkins C. N. // J. Inst. Metals. 1928. V. 40. P. 21.
11. Hargreaves F. // J. Inst. Metals. 1928. V. 38. P. 315; V. 39. P. 301.
12. Hargreaves F. and Hills R. J. // J. Inst. Metals. 1928. V. 40. P. 41; 1929. V. 41. P. 257.
13. Pearson C. E. The viscous properties of extruded eutectic alloys of lead-tin and bismuth-tin // J. Inst. Metals. 1934. V. 54. P. 111–123.
14. Грабский М. В. Структурная сверхпластичность металлов / Пер. с польск. – М.: Металлургия, 1975. 272 с.
15. Бочвар А. А. О разных механизмах пластичности в металлических сплавах // Изв. АН СССР. ОТН. 1948. № 5. С. 649–653.
16. Бочвар А. А., Свицерская З. А. Явление сверхпластичности в сплавах цинка с алюминием // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. № 9. С. 821–824.
17. Новиков И. И. Теория термической обработки металлов. – М.: Металлургия, 1986. 480 с.
18. Пресняков А. А. Сверхпластичность металлов и сплавов. – Алма-Ата: Наука, 1969. 203 с.
19. Backofen W. A., Turner G. R., Avery D. H. Superplasticity in an Al-Zn alloy // Trans. Americ. Soc. Metals. 1964. V. 57. P. 980–990.
20. Бэкофен В. Процессы деформации. – М.: Металлургия, 1977. 288 с.
21. Superplasticity in advanced materials / Proceedings of 1994 Int. Conf. on Superplasticity in Advanced Materials (ICSAM-94) Moscow on May 24–26, 1994 / Editor T. G. Langdon. Switzerland – Germany – UK – USA. Trans. Tech. Publ.
22. Михлин С. Г. Основные уравнения математической теории пластичности. – Л.: АН СССР, 1934. 71 с.
23. Ильюшин А. А. Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.

24. Ильюшин А. А. Некоторые основные задачи теории пластичности // Изв. АН СССР. ОТН. 1949. № 12.
25. Ильюшин А. А. Замечания о некоторых статьях, посвященных критике теории пластичности // Изв. АН СССР. ОТН. 1950. № 6. С. 940–951.
26. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: АН СССР, 1963. 271 с.
27. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
28. Кайбышев О. А. Пластичность и сверхпластичность металлов. – М.: Металлургия, 1975. 279 с.
29. Кайбышев О. А. Сверхпластичность промышленных сплавов. – М.: Металлургия, 1984. 264 с.
30. Кайбышев О. А., Валиев Р. З. Границы зерен и свойства металлов. – М.: Металлургия, 1987. 214 с.
31. Рабинович М. Х. Прочность и сверхпрочность металлов. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. 200 с.
32. Рабинович М. Х. Прочность, температура, время. – М.: Наука, 1968. 160 с.
33. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. 752 с.
34. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. 744 с.
35. Сверхпластичность металлических материалов / М. Х. Шоршоров, А. С. Тихонов, С. И. Булат и др. – М.: Наука, 1973. 220 с.
36. Тихонов А. С. Эффект сверхпластичности металлов и сплавов. – М.: Наука, 1978. С. 142.
37. Смирнов О. М. Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности. – М.: Машиностроение, 1979. 184 с.
38. Гохфельд Д. А., Садаков О. С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. – М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
39. Поздеев А. А., Трусков П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. 232 с.
40. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. 840 с.
41. Малинин Н. Н. Ползучесть в обработке металлов. – М.: Машиностроение, 1986. 216 с.
42. Партон В. З. Механика разрушения: От теории к практике. – М.: Наука, 1990. 240 с.
43. Гвоздев А. Е. Производства заготовок быстрорежущего инструмента в условиях сверхпластичности. – М.: Машиностроение, 1992. 176 с.
44. Френкель Я. М. Собрание избранных трудов. Т. 2. – Л.: Изд-во АН СССР, 1959. 470 с.
45. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. 736 с.

46. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. 248 с.
47. Полухин П. И., Горелик С. С., Воронцов В. К. Физические основы пластической деформации. – М.: Металлургия, 1982. 584 с.
48. Методы контроля и исследования легких сплавов: Справочник / А. М. Вассерман, В. А. Данилкин, О. С. Коробов и др. – М.: Металлургия, 1985. 510 с.
49. Приборы и методы физического металловедения: Вып. 1. – М.: Мир, 1973. 428 с.; Вып. 2. – М.: Мир, 1974. 366 с.
50. Воынова Т. Ф. Высокомарганцовистые стали и сплавы / Т. Ф. Воынова. – М.: Металлургия, 1988. 341 с.
51. Бернштейн М. Л. Структура деформированных металлов. – М.: Металлургия, 1977. 431 с.
52. Штремель М. А. Прочность сплавов. Ч. 2. Деформация. – МИСИС, 1997. 527 с.
53. Штремель М. А. Прочность сплавов. Ч. 1. Дефекты решетки. – МИСИС, 1999. 384 с.
54. Гуляев А. П. Сверхпластичность сталей: монография. – М.: Металлургия, 1982. 56 с.
55. Новиков И. И., Партной В. К. Сверхпластичность сталей с ультрамелким зерном. – М.: Металлургия, 1981. 168 с.
56. Гвоздев А. Е., Сергеев Н. Н., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Хонелидзе Д. М., Сапожников С. В. Аномальные механические свойства некоторых металлических систем: монография / Под ред. д-ра техн. наук, проф. А. Е. Гвоздева. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 149 с.
57. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Кузовлева О. В., Селедкин Е. М., Клементьев Д. С., Калинин А. А. Моделирование процессов ресурсосберегающей обработки слитковых, порошковых, наноструктурных и композиционных материалов: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 359 с.
58. Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Кузовлева О. В. Основы формирования состояния высокой деформационной способности металлических систем: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 382 с.
59. Шоршоров М. Х., Базык А. С., Казаков М. В., Гвоздев А. Е., Пустовгар А. С., Егоров Е. В., Герасин А. Н., Сидоров Б. П. Сверхпластичность сталей и сплавов и ресурсосберегающие технологии процессов обработки металлов давлением: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 158 с.
60. Гвоздев А. Е., Бреки А. Д., Дорохин Ю. С., Журавлев Г. М., Клементьев Д. С., Кутепов С. Н., Малий Д. В., Медведев П. Н., Минаев И. В., Сергеев А. Н., Хонелидзе Д. М. Программный комплекс расчета мощности сил, определяющих процессы пластического деформирования, поверхностного формоизменения и фрикционного взаимодействия слитковых, порошковых и нанокпозиционных металлических систем // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018661010 31.07.2018.
61. Гвоздев А. Е., Стариков Н. Е., Сергеев Н. Н., Кутепов С. Н., Сапожников С. В., Калинин А. А., Клементьев Д. С. Основы ресурсосберегающих процессов получения быстрорежущего инструмента: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 209 с.

62. Гвоздев А. Е., Стариков Н. Е., Сергеев Н. Н., Золотухин В. И., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Бреки А. Д. Технология конструкционных, эксплуатационных и инструментальных материалов: учебник. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 406 с.

REFERENCES

1. Bylia, O. V., Vasin, R. A., Ermachenko, A. G., et al. 1996, “On the correlation of the history of loading of the material and the evolution of its structure in the superplasticity regime” *In proceedings of IX Conferences on strength and ductility*. – Moskva, vol. 2. pp. 33–38.
2. Geguzin, Ya. E. 1987, “Zhivoj kristal” [Living crystal], *Nauka, Moskva, Rossiya*, 192 p.
3. Tresca, H. 1864, “Memoire sur lecoulement des corps solides soumis a ‘des fortes pressions’”, *Comptes Rendus de L’Academie des Sciences*, Paris, 59 p.
4. Bell, Dzh. F. 1984, “Eksperimental’nye osnovy mekhaniki deformiruemyh tverdyh tel” [Experimental bases of mechanics of deformable solids], *Nauka, Moskva, Rossiya*, vol. 1, 596 p., vol. 2, 431 p.
5. Saint-Venant, B. 1948, “On the establishment of internal motions arising in rigid plastic bodies beyond the limits of elasticity”, *Teoriya plastichnosti (Theory of plasticity)*, *Moskva, Rossiya*, pp. 11–19.
6. Saint-Venant, B. 1948, “Differential equations of internal motions arising in rigid plastic bodies and boundary conditions for these bodies. Some applications”, *Teoriya plastichnosti (Theory of plasticity)*, *Moskva, Rossiya*, pp. 24–33.
7. Bengough, G. D. 1912, *Inst. Metals*, vol. 7, 123 p.
8. Rosenghain, Haughton, and Bingham 1920, *Inst. Metals*, vol.23. pp. 261–144. Superplasticity in advanced materials / Ed. by Shigenori Hori, Masahary Tokizane, Norio Furushiro, JSRS, Japan. Osaka, June 3-6, 1991.
9. Jeffries, Z., Archer R. S., 1924, *The science of metals*. N.Y.: McGraw-Hill. 76 p.
10. Jenkins, C. N., 1928, *Inst. Metals*, vol. 40, 21 p.
11. Hargreaves, F., 1928, *Inst. Metals*, vol. 38, 315 p., vol. 39, 301 p.
12. Hargreaves, F., Hills, R. J., 1928, 1929, *Inst. Metals*, vol. 40, 41 p., vol. 41, 257 p.
13. Pearson, C. E., 1934, “The viscous properties of extruded eutectic alloys of lead-tin and bismuth-tin”, *Inst. Metals*, vol. 54, pp. 111–123.
14. Grabskii, M. V., 1975, “Strukturnaya sverhplastichnost’ metallov” [Structural superplasticity of metals] / perevod s pol’sk, *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 272 p.
15. Bochvar, A. A., 1948, “On different mechanisms of plasticity in metal alloys”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, otdelenie tekhnicheskikh nauk*, no. 5, pp. 649–653.
16. Bochvar, A. A., Sviderskaia, Z. A., 1945, “Phenomenon of superplasticity in zinc-aluminum alloys”, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, otdelenie tekhnicheskikh nauk*, no. 9, pp. 821–824.
17. Novikov, I. I., 1986, “Teoriya termicheskoy obrabotki metallov” [Theory of heat treatment of metals], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 480 p.

18. Presniakov, A. A., 1959, "Sverhplastichnost' metallov i splavov" [Superplasticity of metals and alloys], *Nauka, Alma-Ata, Rossiya*, 203 p.
19. Backofen, W. A., Turner, G. R., Avery, D. H., 1964, "Superplasticity in an Al-Zn alloy" *Trans. Americ. Soc. Metals*, vol. 57, pp. 980–990.
20. Backofen, W. A., 1977, "Processy deformacii" [Deformation processes], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 288 p.
21. Langdon, T. G., 1994, "Superplasticity in advanced materials" *In proceedings of Int. Conf. on Superplasticity in Advanced Materials (ICSAM-94)*. – Switzerland, Germany, UK, USA. Trans. Tech. Publ.
22. Mikhlin, S. G., 1934, "Osnovnye uravneniya matematicheskoy teorii plastichnosti" [Basic equations of mathematical theory of plasticity], *Akademii Nauk SSSR, Leningrad*, 71 p.
23. Iliushin, A. A., 1948, "Plastichnost" [Plasticity], *Gostekhizdat, Moskva, Rossiya*, 376 p.
24. Iliushin, A. A., 1949, "Nekotorye osnovnye zadachi teorii plastichnosti" [Some basic problems of plasticity theory], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, otделение tekhnicheskikh nauk*, no. 12.
25. Iliushin, A. A., 1950, "Zamechaniya o nekotorykh stat'yah, posvyashchennykh kritike teorii plastichnosti" [Remarks on some papers criticizing the theory of plasticity], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, otделение tekhnicheskikh nauk*, no. 6, pp. 940-951.
26. Iliushin, A. A., 1963, "Plastichnost'. Osnovy obshchej matematicheskoy teorii" [Plasticity. Fundamentals of General mathematical theory], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Moskva, Rossiya*, 271 p.
27. Iliushin, A. A., 1990, "Mekhanika sploshnoj sredy" [Continuum mechanics], *Moskovskii gosudarstvennyi universitet, Moskva, Rossiya*, 310 p.
28. Kaibyshev, O. A., 1975, "Plastichnost' i sverhplastichnost' metallov" [Plasticity and superplasticity of metals], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 279 p.
29. Kaibyshev, O. A., 1984, "Sverhplastichnost' promyshlennykh splavov" [Superplasticity of industrial alloys], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 264 p.
30. Kaibyshev, O. A., Valiev, R. Z., 1987, "Granicy zeren i svoystva metallov" [Grain boundaries and properties of metals], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 214 p.
31. Rabinovich, M. Kh., 1963, "Prochnost' i sverhprochnost' metallov" [Strength and super strength of metals], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Moskva, Rossiya*, 200 p.
32. Rabinovich, M. Kh., 1968, "Prochnost', temperatura, vremya" [Strength, temperature, time], *Nauka, Moskva, Rossiya*, 160 p.
33. Rabotnov, U. N., 1966, "Polzuchest' ehlementov konstrukcij" [Creep of structural elements], *Nauka, Moskva, Rossiya*, 752 p.
34. Rabotnov, U. N., 1979, "Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela" [Mechanics of deformable solids], *Nauka, Moskva, Rossiya*, 744 p.
35. Shorshorov, M. Kh., Tikhonov, A. S., Bulat, S. I., et al., 1973, "Sverhplastichnost' metallicheskih materialov" [Superplasticity of metal materials], *Nauka, Moskva, Rossiya*, 220 p.

36. Tikhonov, A. S., 1978, "Effekt sverhplastichnosti metallov i splavov" [Effect of superplasticity of metals and alloys], *Nauka, Moskva, Rossiya*, 142 p.
37. Cmirnov, O. M., 1979, "Effekt sverhplastichnosti metallov i splavov" [Treatment of metals by pressure in a state of superplasticity], *Mashinostroenie, Moskva, Rossiya*, 184 p.
38. Gokhfeld, D. A., Sadakov, O. S., 1984, "Plastichnost' i polzuchest' ehlementov konstrukcij pri povtornyh nagruzheniyah" [Plasticity and creep of structural elements under repeated loads], *Mashinostroenie, Moskva, Rossiya*, 256 p.
39. Pozdeev, A. A., Trusov, P. V., Niashin, U. I., 1986, "Bol'shie uprugoplasticheskie deformacii: teoriya, algoritmy, prilozheniya" [Large elastic-plastic deformations: theory, algorithms, applications], *Nauka, Moskva, Rossiya*, 232 p.
40. Loitsianskii, L. G., 1987, "Mekhanika zhidkosti i gaza" [Fluid and gas mechanics], *Nauka, Moskva, Rossiya*, 840 p.
41. Malinin, N. N., 1986, "Polzuchest' v obrabotke metallov" [Creep in metal processing], *Mashinostroenie, Moskva, Rossiya*, 216 p.
42. Parton, V. Z., 1990, "Mekhanika razrusheniya: Ot teorii k praktike" [Fracture mechanics: from theory to practice], *Nauka, Moskva, Rossiya*, 240 p.
43. Gvozdev, A. E., 1992, "Proizvodstva zagotovok bystrorezhushchego instrumenta v usloviyah sverhplastichnosti" [Production of blanks of the high-speed tool in the conditions of superplasticity], *Mashinostroenie, Moskva, Rossiya*, 176 p.
44. Frenkel, Ia. M., 1959, "Sobranie izbrannyh trudov" [Collection of selected works], *Akademii Nauk SSSR, Leningrad*, vol. 2, 470 p.
45. Landau, L. D., Lifshits, E. M., 1988, "Teoreticheskaya fizika. Gidrodinamika" [Theoretical physics. Hydrodynamics], *Nauka, Moskva, Rossiya*, vol. 6, 736 p.
46. Landau, L. D., Lifshits, E. M., 1987, "Teoreticheskaya fizika. Teoriya uprugosti" [Theoretical physics. Theory of elasticity], *Nauka, Moskva, Rossiya*, vol. 7, 248 p.
47. Polukhin, P. I., Gorelik, S. S., Vorontsov, V. K., 1982, "Fizicheskie osnovy plasticheskoy deformacii" [Physical basis of plastic deformation], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 584 p.
48. Vasserman, A. M., Danilkin, V. A., Korobov, O. S., et al., 1985, "Metody kontrolya i issledovaniya legkih splavov: Spravochnik" [Methods of control and research of light alloys: Handbook], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 510 p.
49. Devices and methods of physical metallurgy "Pribory i metody fizicheskogo metallovedeniya", *Mir, Moskva, Rossiya*, 1973, no. 1, 428 p., 1974, no. 2, 366 p.
50. Volynova, T. F., 1988, "Vysokomargancovistye stali i splavy" [High-manganese steels and alloys], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 341 p.
51. Bernshtein, M. L., 1977, "Struktura deformirovannyh metallov" [Structure of deformed metals], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 431 p.
52. Shtremel, M. A., 1997, "Prochnost' splavov. Deformatsiya" [The strength of the alloys. Deformation], *MISIS, Moskva, Rossiya*, vol. 2, 527 p.

53. Shtremel, M. A., 1982, "Prochnost' splavov. Defekty reshetki" [The strength of the alloys. Lattice defects], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, vol.1, 278 p.
54. Guliaev, A. P., 1982, "Sverhplastichnost' stalej" [Superplasticity of steels], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, 56 p.
55. Novikov, I. I., Partnoi, V. K., 1981, "Sverhplastichnost' stalej s ul'tromelkim zernom" [Superplasticity of steels with ultrafine grain], *Metallurgiya, Moskva, Rossiya*, vol. 1, 168 p.
56. Gvozdev, A. E., Sergeev, N. N., Sergeev, A. N., et al., 2018, "Anomal'nye mekhanicheskie svoystva nekotoryh metallicheskih sistem" [Abnormal mechanical properties of some metal systems], *TulGU, Tula, Rossiya*, 149 p.
57. Shorshorov, M. Kh., Gvozdev, A. E., Sergeev, A. N., et al., 2018, "Modelirovanie processov resursosberegayushchej obrabotki slitkovykh, poroshkovykh, nanostrukturnykh i kompozicionnykh materialov" [Modeling of processes of resource-saving processing of ingot, powder, nanostructured and composite materials], *TulGU, Tula, Rossiya*, 359 p.
58. Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., Kuzovleva, O. V., 2018, "Osnovy formirovaniya sostoyaniya vysokoj deformacionnoj sposobnosti metallicheskih sistem" [Bases of formation of the state of high deformation ability of metal systems], *TulGU, Tula, Rossiya*, 382 p.
59. Shorshorov, M. Kh., Bazyk, A. S., Kazakov, M. V., 2018, "Sverhplastichnost' stalej i splavov i resursosberegayushchie tekhnologii processov obrabotki metallov davleniem" [Superplasticity of steels and alloys and resource-saving technologies of metal forming processes], *TulGU, Tula, Rossiya*, 158 p.
60. Gvozdev, A. E., Breki, A. D., Dorokhin, U. S., 2018, "Programmnyj kompleks rascheta moshchnosti sil, opredelyayushchih processy plasticheskogo deformirovaniya, poverhnostnogo formoizmeneniya i frikcionnogo vzaimodejstviya slitkovykh, poroshkovykh i nanokompozicionnykh metallicheskih sistem" [Software package for calculating the power of forces determining the processes of plastic deformation, surface shaping and friction interaction of ingot, powder and nanocomposite metal systems] / *Svidetel'stvo o registracii programmy dlya EVM № 2018661010*.
61. Gvozdev, A. E., Starikov, N. E., Sergeev, N. N., 2018, "Osnovy resursosberegayushchih processov polucheniya bystrorezhushchego instrumenta" [Basics of resource-saving processes for obtaining high-speed tools], *TulGU, Tula, Rossiya*, 209 p.
62. Gvozdev, A. E., Starikov, N. E., Sergeev, N. N., 2018, "Tekhnologiya konstrukcionnykh, ehkspluatacionnykh i instrumental'nykh materialov" [The technology of construction, operation and tool materials], *TulGU, Tula, Rossiya*, 406 p.

Получено 25.12.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 519.8, 519.2, 330.4

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-372-390

**Некоторые задачи оптимизации управления
социо-эколого-экономическими системами**

Р. А. Жуков

Жуков Роман Александрович — доцент кафедры Математики и информатики, Тульский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, г. Тула.
e-mail: cpluzh@mail.ru

Аннотация

Предложен подход к формированию и решению класса задач многокритериальной оптимизации, расширяющий методологию анализа среды функционирования сложных систем, рассматриваемых как социо-эколого-экономические системы (СЭЭС). Подход включает в себя формирование частных и интегральных показателей результативности, отличием которого является вычисление собственного норматива для каждого из рассматриваемых объектов исследования. Алгоритм конструирования индикаторов на основании статистической обработки данных и эконометрического моделирования обеспечивает учет взаимосвязи как частных показателей оценки, так и конкретных существенных условий функционирования СЭЭС (факторов состояния и воздействия). Представлена методика формирования коэффициента гармоничности, характеризующего сбалансированность уровня развития СЭЭС, которая является одним из критериев устойчивости сложных систем. Осуществлена постановка задачи оптимизации критерия результативности функционирования СЭЭС за счет поиска факторов состояния и воздействия, при которых норматив может быть достигнут. В общем случае такая задача сводится к нелинейной задаче многокритериальной оптимизации с ограничениями. Критерий оптимальности выбирается в зависимости от целей субъектов управления СЭЭС. Рассмотрен частный случай решения задачи оптимизации для регионов Центрального федерального округа с использованием данных Росстата за 2007-2015 годы.

Ключевые слова: эконометрическое моделирование, интегральный показатель, социо-эколого-экономические системы (СЭЭС), многокритериальная оптимизация.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

Р. А. Жуков. Некоторые задачи оптимизации управления социо-эколого-экономическими системами // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 372–390.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 519.8, 519.2, 330.4

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-372-390

**Some optimization problems of the management of
socio-ecological-economic systems**

R. A. Zhukov

Zhukov Roman Aleksandrovich — associate Professor of Mathematics and Informatics, Tula branch of the Financial University under the Government of the Russian Federation, Tula.
e-mail: cplusz@mail.ru

Abstract

An approach to the formation and solution of a class of multicriteria optimization problems is proposed, extending the methodology of analysis of the environment of functioning of complex systems considered as socio-ecological and economic systems (sees). The approach includes the formation of individual and integral performance indicators, the difference of which is the calculation of its own standard for each of the objects of study. The algorithm for constructing indicators on the basis of statistical data processing and econometric modeling provides for taking into account the relationship between the particular indicators of evaluation and the specific essential conditions of the sees functioning (state and impact factors). The technique of formation of the coefficient of harmony, which characterizes the balance of the level of development of sees, which is one of the criteria for the stability of complex systems. The statement of the problem of optimization of the sees performance criterion is carried out due to the search for the state and impact factors in which the standard can be achieved. In the General case, this problem reduces to a nonlinear multi-objective optimization problem with constraints. The optimality criterion is selected depending on the objectives of the sees management entities. A special case of the solution of problem for regions of the Central Federal district with the use of Rosstat data for 2007-2015 is considered.

Keywords: econometric modeling, integral index, socio-ecologo-economic system (SEES), multicriteria optimization.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

R. A. Zhukov, 2019, "Some optimization problems of the management of socio-ecological-economic systems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 372–390.

1. Введение

Проблеме оценки состояния и функционирования сложных систем, рассматриваемых как социо-эколого-экономические системы (СЭЭС), посвящены многие работы российских и зарубежных авторов, касающиеся как методов формирования частных и интегральных индикаторов, так и поиска оптимальных решений, при которых сложная система переходит на оптимальный и устойчивый режим. Идентификация СЭЭС, их анализ и оценка зависят от точек зрения, используемых подходов и методов обработки и представления данных, что демонстрируется наличием их большого разнообразия. Выбор показателей оценки состояния регионов современными учеными экономистами, социологами и географами определяется прикладными задачами и сформулированными целями исследования, а также общностью изучаемой категории и экспертными заключениями [1]. Это и определяет наличие разнообразных подходов, методик, моделей, а также используемых частных и интегральных индикаторов. Традиционным подходом формирования интегральных индикаторов для анализа социо-эколого-экономических систем является процедура усреднения частных показателей, например, вычисление средних характеристик [2], метод (Data Envelopment Analysis) DEA [3, 4] и его российский аналог АСФ, предложенный В.Е. Кривоножкой и А.В. Лычевым [5], а также его модификация в части формирования эталонных границ эффективности, разработанная Е.П. Моргуновым [6]. Для оценки качества жизни населения А.С. Айвазяном был использован метод главных компонент с целью формирования интегрального индикатора оценки, относящегося к синтетической латентной категории [7]. Применяются методы многомерного статистического анализа и имитационного моделирования [8].

Для оценки устойчивости СЭЭС и принятия решений используются подходы, основанные на идеях П. Дойла, М. Портера, А.А. Томпсона, Р.А. Фатхутдинова и ряда других авторов [9]. При этом решаются классические задачи оптимизации, в большинстве своем сводящиеся к задачам линейного или нелинейного программирования [10], в том числе с использованием методов тропической оптимизации [11]. Для принятия решений в сфере управления СЭЭС более применимы методы многокритериальной оптимизации, когда экспертное оценивание альтернатив может быть формализовано или заменено строгой математической постановкой или поиском Парето-оптимального множества [12]. При этом возникает вопрос оценки важности критериев, выбора их весовых коэффициентов и методов решения [13, 14, 15], что на сегодняшний день является открытой проблемой.

2. Конструирование критериев оценки

Пусть имеются подмножества X_j факторов состояния $x_j(t) \in X_j = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ множества $X \supseteq X_j$ причем $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \subseteq \text{Re}$, где X_i в общем случае пересекающиеся подмножества, имеющие социальный, экономический и экологический смысл ($j = 1..n$ - количество факторов состояния), а также подмножества Z_s факторов воздействия $z_s(t) \in Z_s \subseteq Z \subseteq \text{Re}$ ($s = 1..u$, u - количество факторов воздействия), t - параметр времени ($t = 1..T$). Введем множества Y_i и $\hat{Y}_i$ результатов $y_i(t) \in Y_i = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \subseteq \text{Re}$ и $\hat{y}_i(t) \in \hat{Y}_i = \hat{Y}_1 \cup \hat{Y}_2 \cup \hat{Y}_3 \subseteq \text{Re}$ ($i = 1..m$, m - число результативных признаков) соответственно, где последнее определяется некоторой функцией $f_i(X, Z)$ такой, что $f : X \cup Z \rightarrow \hat{Y}_i$. Каждое из подмножеств $x_j(t)$, $z_s(t)$, $y_i(t)$ и $\hat{y}_i(t)$ представляют собой набор показателей переменных, полученных в момент времени t с характеристиками: математические ожидания $M(x_j(t))$, $M(z_s(t))$, $M(y_i(t))$, $M(\hat{y}_i(t))$ и среднеквадратические отклонения $\sigma(x_j(t))$, $\sigma(z_s(t))$, $\sigma(y_i(t))$, $\sigma(\hat{y}_i(t))$. Тогда элементами подмножеств с индексом (*) (X_j^* , Z_s^* , Y_i^* , $\hat{Y}_i^*$) будут:

$$x_{k,j}^*(t) = \frac{x_{k,j} - M(x_j(t))}{\sigma(x_j(t))}, \quad (1)$$

$$z_{k,s}^*(t) = \frac{z_{k,s} - M(z_s(t))}{\sigma(z_s(t))}, \quad (2)$$

$$y_{k,i}^*(t) = \frac{y_{k,i} - M(y_i(t))}{\sigma(y_i(t))}, \quad (3)$$

$$\hat{y}_{k,i}^*(t) = \frac{\hat{y}_{k,i} - M(\hat{y}_i(t))}{\sigma(\hat{y}_i(t))}, \quad (4)$$

где k -тый элемент множества K (объекта исследования (СЭЭС)) содержит в себе элементы подмножеств $y_{k,i}(t) \in Y_k$, $\hat{y}_{k,i}(t) \in \hat{Y}_k$, $x_{k,j}(t) \in X_{k,j}$, $z_{k,s}(t) \in Z_{k,s}$ ($k = 1..N$, N - число рассматриваемых объектов). При этом выполняются условия:

$$Y_i = \sum_{k=1}^m Y_{k,i}, \hat{Y}_i = \sum_{k=1}^m \hat{Y}_{k,i}, X_j = \sum_{k=1}^m X_{k,j}, Z_s = \sum_{k=1}^m Z_{k,s}. \quad (5)$$

В качестве объекта может выступать хозяйствующий субъект, муниципальное образование, регион и т.п. Определим элементы подмножеств с индексом (0) (Y_i^0 , $\hat{Y}_i^0$) как:

$$y_{k,i}^0 = \frac{y_{k,i}^* - \min\{y_{k,i}^*, \hat{y}_{k,i}^*\}}{\max\{y_{k,i}^*, \hat{y}_{k,i}^*\} - \min\{y_{k,i}^*, \hat{y}_{k,i}^*\}}, \quad (6)$$

$$\hat{y}_{k,i}^0 = \frac{\hat{y}_{k,i}^* - \min\{y_{k,i}^*, \hat{y}_{k,i}^*\}}{\max\{y_{k,i}^*, \hat{y}_{k,i}^*\} - \min\{y_{k,i}^*, \hat{y}_{k,i}^*\}}. \quad (7)$$

Тогда частными индикаторами результативности k -того элемента множества K можно считать отношение:

$$\xi_{k,i}(t) = \frac{y_{k,i}^0(t)}{\hat{y}_{k,i}^0(t)}, \quad (8)$$

образующими множество $\Xi^{(0)}$. Определим числа, которые характеризуют связь между p -тыми $Y_p^0, \hat{Y}_p^0$ и q -тыми $Y_q^0, \hat{Y}_q^0$ подмножествами $r_{pq}, \hat{r}_{pq}$ в виде:

$$r_{pq} = \frac{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^T y_{k,p}^*(t) \cdot y_{k,q}^*(t)}{\sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{k,p}^*(t))^2} \cdot \sqrt{\sum_{q=1}^m \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{k,q}^*(t))^2}}, \quad (9)$$

$$\hat{r}_{pq} = \frac{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{y}_{k,p}^*(t) \cdot \hat{y}_{k,q}^*(t)}{\sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^T (\hat{y}_{k,p}^*(t))^2} \cdot \sqrt{\sum_{q=1}^m \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^T (\hat{y}_{k,q}^*(t))^2}}. \quad (10)$$

Очевидно, что эти значения будут одинаковыми для подмножеств $Y_p^*, \hat{Y}_p^*$ и $Y_q^*, \hat{Y}_q^*$, а также $Y_p, \hat{Y}_p$.

Определим множество $\Xi^{(1)}$, элементами которого являются обобщенные индикаторы результативности $\xi_k(t)$, полученные из соотношения:

$$\xi_k(t) = \frac{\sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m r_{pq} \cdot y_{k,p}^0(t) \cdot y_{k,q}^0(t)}}{\sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \hat{r}_{pq} \cdot \hat{y}_{k,p}^0(t) \cdot \hat{y}_{k,q}^0(t)}}. \quad (11)$$

В общем случае совсем не обязательно определять множество $\Xi^{(1)}$, в состав которого входят все m результативных признаков, а составлять подмножества $\Xi^{(p)}$ из набора $m_i \leq m$ элементов в случае, если возникает необходимость оценивать результаты функционирования системы по ее структурным или функциональным элементам (например, отрасль, сектор экономики, сфера деятельности и т.п), а затем уже проводить обобщение (11) по уже сформированным на предыдущем шаге индикаторам, формируя, тем самым, многоуровневую схему оценки.

Вид и состав функций $f_i : X \cup Z \rightarrow \hat{Y}_i$, являющихся представлениями многофакторных регрессионных моделей, определяются решением проблемы их спецификации, на основе F -статистики и t -оценки параметров.

Выражение (11), являющееся, по сути, процедурой свертки данных, можно описать и в терминах векторного анализа. Каждое значение $y_{k,p}^0(t)$ можно считать компонентой вектора $\vec{y}_k^0$ в m -мерном пространстве с косоугольным базисом, образованным единичными ортами $\vec{y}_p^0$, причем угол между соответствующими осями можно представить в виде:

$$\cos \varphi_{pq} = \frac{\vec{y}_p^0 \cdot \vec{y}_q^0}{|\vec{y}_p^0| \cdot |\vec{y}_q^0|}. \quad (12)$$

Тогда длину вектора $\vec{y}_k^0$, которая в принципе не зависит от выбора базиса, можно определить как:

$$|\vec{y}_k^0| = \sqrt{\vec{y}_k^0 \cdot R \cdot \vec{y}_k^0} = \sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m r_{pq} \cdot y_{k,p}^0 \cdot y_{k,q}^0}, \quad (13)$$

что совпадает с числителем в (11). Таким же образом интерпретируется и знаменатель в (11). Их отношение и определяет количественную оценку результатов функционирования k -того

элемента множества K . Если $\xi_k(t) \geq 1$, то можно считать, что они являются удовлетворительными, в противном случае необходимо принять меры, направленные на достижение норматива, который рассчитан для каждого k -того объекта.

Возможность использования предложенного подхода позволяет удовлетворить всем требованиям, предъявляемым к интегральным индикаторам оценки. Многоуровневая схема обосновывает его универсальность, выражения (1)–(4) определяет безразмерность, а (6)–(7) – нормализацию. Соотношения (8)–(11) обеспечивают условие нормализации, причем последнее осуществляет учет взаимосвязи частных показателей (индикаторов) результативности. Входящие в состав нормативные значения показателей результативности из множеств $\hat{Y}_i^*$ позволяют учесть конкретные факторы состояния и воздействия для объектов из множества K .

3. Модели формирования нормативов

Для формирования нормативов можно использовать модели произвольного вида. Наиболее распространенными являются модели линейного типа:

$$\hat{y}_i^* = \sum_{j=1}^n C_{i,j} \cdot x_j^* + \sum_{s=1}^s D_{i,s} \cdot z_s^*, \quad (14)$$

для обобщенного норматива:

$$\hat{y}_i^* = \left[\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \hat{r}_{pq} \cdot \left(\sum_{i=1}^n C_{p,i} \cdot x_{k,i}^* + \sum_{i=1}^s D_{p,i} \cdot z_{k,i}^* \right)^0 \cdot \left(\sum_{j=1}^n C_{p,j} \cdot x_{k,j}^* + \sum_{j=1}^s D_{p,j} \cdot z_{k,j}^* \right)^0 \right]^{1/2}. \quad (15)$$

где m – число результативных признаков; n – число факторов состояния, s – число факторов воздействия; p, q – индексы p -того и q -того результативного признаков; i, j – индексы i -того и j -того факторных признаков; k – индекс рассматриваемой единицы совокупности; $\hat{r}_{pq}$ – парный коэффициент корреляции между p -тым и q -тым результативным признаками; $C_{p,i}, C_{q,j}, D_{p,i}, D_{q,j}$ – соответствующие весовые коэффициентами между p -тым, q -тым результативным и i -тым и j -тым факторами состояния и воздействия соответственно; $x_{k,i}^*, x_{k,j}^*, z_{k,i}^*, z_{k,j}^*$ – соответствующие им фактические стандартизованные значения; индекс (0) показывает, что проведена процедура нормализации для в соответствии с (6)–(7).

Также распространено использование нелинейных моделей мультипликативного типа или их логарифмических аналогов:

$$\ln \hat{y}_i^* = \sum_{j=1}^n C_{i,j} \cdot \ln x_j^* + \sum_{s=1}^s D_{i,s} \cdot \ln z_s^*, \quad (16)$$

что является равносильным представлению нелинейных моделей, а в случае использования труда и капитала в качестве объясняющих переменных, – в форме Кобба-Дугласа [16]:

$$\hat{y}_i^* = \prod_{j=1}^n x_j^{*C_{i,j}} \cdot \prod_{s=1}^s z_s^{*D_{i,s}} \quad (17)$$

Весовые коэффициенты $C_{p,i}, C_{q,j}, D_{p,i}, D_{q,j}$ находятся с помощью метода наименьших квадратов (МНК) или пошагового МНК [17].

Факторы воздействия включают в себя как факторы естественного, так и антропогенного характера, последние из которых могут быть управляемыми и неуправляемыми. Управляемые факторы позволяют перевести систему в желаемое состояние и заданное ее функционирование.

4. Критерий гармоничности

Гармоничное состояние, функционирование и развитие социо-эколого-экономической системы являются одними из свойств ее устойчивости. Это понятие связано со сбалансированным ростом, то есть равномерным положительным изменением ключевых показателей, характеризующих СЭЭС. Показатель должен удовлетворять условиям безразмерности и нормализации. При этом требование равномерного роста предопределяет необходимость равенства значений обобщенных показателей (формулы (2), (11)) по каждому из направлений (отсутствие асинхронности). Понятно, что такая ситуация возможна только в идеальном случае, и практически не реализуема, однако можно определить меру, которая позволяет оценить степень равномерности (гармоничности) состояния, функционирования и развития СЭЭС. Такой подход применим и к оценке отдельных составляющих (социальная, экологическая или экономическая), что определяет его универсальность. Коэффициент гармоничности можно представить как [18]:

$$K_k(t) = 1 - \frac{\sigma(\xi_{k,i}(t))}{M(\xi_{k,i}(t))}, \quad (18)$$

$M(\xi_{k,i}(t))$ – математическое ожидание, $\sigma(\xi_{k,i}(t))$ – среднеквадратическое отклонение, определяемые по формулам:

$$M(\xi_{k,i}(t)) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi_{k,i}(t), \quad (19)$$

$$\sigma(\xi_{k,i}(t)) = \sqrt{\frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m \xi_{k,i}(t) - M(\xi_{k,i}(t)) \right)^2}. \quad (20)$$

Чем ближе к единице K_k , тем гармоничнее функционирует объект исследования. Данный индикатор не характеризует его специализацию, а указывает степень соответствия рассматриваемых индикаторов нормативам, с учетом конкретных условий. В (18) вычитаемое есть ни что иное как первый коэффициент вариации, характеризующий величину разброса значений показателей относительно среднего значения. Известно, что коэффициент вариации оценивает степень однородности совокупности, в данном случае показателей результативности СЭЭС. Если коэффициент вариации не превышает 10%, то считают, что степень рассеяния незначительна. При превышении 33% можно говорить о неоднородной совокупности. Аналогичную градацию можно сделать для коэффициента гармоничности: 1 – идеальный (гармоничный); 0,9..1 – высокий; 0,8..0,9 – средний; 0,66..0,8 – низкий; <0,66 – несбалансированный (негармоничный).

В случае равенства всех составляющих $\xi_{k,i}(t)$, $\sigma(\xi_{k,i}(t))$ будет равно 0, а, следовательно, коэффициент гармоничности примет значение 1, что будет соответствовать идеальному состоянию (функционированию) СЭЭС. В данном случае, коэффициент гармоничности представлен в статическом варианте, то есть его значение характеризует не сбалансированный рост, а сбалансированность сложной системы в заданный период времени по выбранным показателям оценки.

5. Постановка задач оптимизации

В случае несоответствия показателей функционирования сложной системы нормативам, когда значения $\xi_{k,i}(t)$, $\xi_k(t)$, рассчитанные соответственно по (8) и (11), меньше единицы, необходимо изменить факторы состояния и управляемые факторы воздействия с целью достижения требуемых значений индикаторов результативности. Это возможно осуществить за

счет проведения процедуры оптимизации целевой функции по соответствующим управляющим компонентам модели.

В зависимости от целей управляющих воздействий можно сформулировать несколько типов задач.

Задача 1. Оптимизация частных показателей результативности.

Пусть i -тый норматив (частный показатель результативности) для k -того элемента совокупности $\hat{y}_{k,i}^0(t)$ может быть представлен в общем виде как:

$$\hat{y}_{k,i}^0(t) = f(x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t), z_{k,i,s}^*(t) + \Delta z_{k,i,s}^*(t))^0, \quad (21)$$

где j, s — индексы факторов состояния $x_{k,i,j}^*(t)$ и воздействия $z_{k,i,s}^*(t)$; $\Delta x_{k,i,j}^*(t)$ и $\Delta z_{k,i,s}^*(t)$ — их соответствующие возможные приращения (стандартизованные); t — время (период); процедура нормализации обозначена верхним индексом (0). Вид функции f — может быть произвольным (линейным (14), (16) или нелинейным, например (17)).

Ставится задача: при каких возможных значениях $x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t)$, $z_{k,i,s}^*(t) + \Delta z_{k,i,s}^*(t)$ выражение (8) стремилось бы к единице. То есть:

$$\frac{y_{k,i}^0}{\hat{y}_{k,i}^0} \rightarrow 1, \quad (22)$$

где i — индекс частного показателя результативности; $y_{k,i}^0$, $\hat{y}_{k,i}^0$ — соответственно нормативные и фактические значения индикатора.

На основании этого требования можно представить целевую функцию в виде разности фактического и расчетного значений частного показателя результативности, полученной из соотношения (22):

$$F(t) = \hat{y}_{k,i}^0 - y_{k,i}^0 \rightarrow \min. \quad (23)$$

Пусть имеются ограничения в общем случае нелинейного вида:

$$g_l(x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t), z_{k,i,p}^*(t) + \Delta z_{k,i,p}^*(t), z_{k,i,q}^*(t) + \Delta z_{k,i,q}^*(t)) = 0, \quad (24)$$

причем l — число ограничений, j — индекс факторов состояния, p, q — индексы неуправляемых и управляемых факторов воздействия s соответственно, а $z_{k,i,s}^* = z_{k,i,p}^* \cup z_{k,i,q}^*$.

Требуется найти такое решение $\Delta x_{k,i}^*(t), \Delta z_{k,i}^*(t) = \{\Delta x_{k,i,j}^*(t), \Delta z_{k,i,q}^*(t)\}$, при котором функция (23) при наличии ограничений (24) принимала бы минимальное значение.

То есть процедура оптимизации в данном случае сводится к задаче нелинейного программирования, которая может быть решена методом Лагранжа [19].

Решение такой задачи можно качественно интерпретировать следующим образом.

Интерпретация 1: насколько наблюдается $\Delta x_{k,i,j}^*(t), \Delta z_{k,i,q}^*(t)$ перерасход (недоиспользование) факторов состояния и воздействия в k -той СЭЭС.

Интерпретация 2: насколько $\Delta x_{k,i,j}^*(t), \Delta z_{k,i,q}^*(t)$ необходимо интенсифицировать использование $x_{k,i,j}^*(t)$ и рационализировать $z_{k,i,q}^*(t)$, чтобы норматив в k -той СЭЭС был достигнут.

Данная постановка применима в случае, если для органов управления приоритетом является улучшение одной из характеристик функционирования социо-эколого-экономической системы при максимально допустимых расходах на реализацию мероприятий, направленных на изменения факторов состояния и воздействия.

В линейном случае решение задачи оптимизации сводится к общей задаче линейного программирования:

$$\left[\sum_{j=1}^n C_{i,j} \cdot (x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t)) + \sum_{s=1}^s D_{i,s} \cdot (z_{k,i,s}^*(t) + \Delta z_{k,i,s}^*(t)) \right]^0 - y_{k,i}^0 \rightarrow \min, \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{k,i,j} \cdot (x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t)) + \sum_{s=1}^s d_{k,i,s} \cdot (z_{k,i,s}^*(t) + \Delta z_{k,i,s}^*(t)) \geq (\leq, =) b_i. \quad (26)$$

Здесь $a_{k,i,j}$, $d_{k,i,s}$, b_i - соответствующие коэффициенты системы ограничений.

Задача 2. Оптимизация факторов состояния и воздействия для частного показателя результативности.

Данная задача аналогична предыдущей, однако вид целевой функции определяется суммой приращения факторов состояния и воздействия. Такая постановка может применима в случае, если приоритетом органов управления является минимизация затрат на реализацию мероприятий, направленных на сокращение разницы между фактическим и нормативным значениями частного показателя результативности.

В этом случае целевая функция может быть представлена как:

$$F(t) = \sum_{i=1}^n |\Delta x_{k,i,j}^*(t)| + \sum_{s=1}^s |\Delta z_{k,i,q}^*(t)| \rightarrow \min. \quad (27)$$

Тогда выражение (23) должно быть включено в систему ограничений:

$$\hat{y}_{k,i}^0 - y_{k,i}^0 \geq 0, \quad (28)$$

$$g_l(x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t), z_{k,i,p}^*(t) + \Delta z_{k,i,p}^*(t), z_{k,i,q}^*(t) + \Delta z_{k,i,q}^*(t)) = 0. \quad (29)$$

Решение такой задачи может быть осуществлено методами, описанными в задаче 1.

Задача 3. Многокритериальная оптимизация для частных показателей результативности.

Потребуем, чтобы одновременно выполнялись условия (23) и (27), что подразумевает обеспечение требуемого норматива и минимизации затрат со стороны органов управления. В этом случае задача сводится к многопараметрической оптимизации двух целевых функций при наличии системы ограничений (29).

$$F(t) = \hat{y}_{k,i}^0 - y_{k,i}^0 \rightarrow \min. \quad (30)$$

$$F(t) = \sum_{i=1}^n |\Delta x_{k,i,j}^*(t)| + \sum_{s=1}^s |\Delta z_{k,i,q}^*(t)| \rightarrow \min. \quad (31)$$

$$g_l(x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t), z_{k,i,p}^*(t) + \Delta z_{k,i,p}^*(t), z_{k,i,q}^*(t) + \Delta z_{k,i,q}^*(t)) = 0. \quad (32)$$

Для решения такой задачи можно воспользоваться широко известными методами, например: метод взвешенных сумм с точечным оцениванием весов, метод свертывания частных критериев в суперкритерий (коэффициенты находятся экспертно либо с помощью метода Лагранжа), метод Парето.

Задача 4. Оптимизация обобщенного показателя результативности.

Как и в предыдущих задачах, целевую функцию можно представить в виде разности фактического и расчетного значений обобщенного (частного) показателя результативности, полученную из соотношения (8) или (11) для выбранного k -того элемента совокупности. Тогда для обобщенного вида можно записать:

$$F(t) = Y_{k,norm} - Y_{k,fact} \quad (33)$$

или:

$$F(t) = \sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \hat{r}_{pq} \cdot \hat{y}_{k,p}^0(t) \cdot \hat{y}_{k,q}^0(t)} - \sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m r_{pq} \cdot y_{k,p}^0(t) \cdot y_{k,q}^0(t)} \rightarrow \min, \quad (34)$$

где $\hat{y}_{k,p}^0(t)$ может определяться соотношениями (17) и процедурой нормализации (7).

Ограничения имеют вид (24).

Такая задача может быть поставлена в случае, если органам управления необходимо улучшить комплексную составляющую функционирования СЭЭС, например, отрасль либо обобщенные характеристики экономики экологии или социального развития. Для линейного вида нормативов и системы ограничений можно воспользоваться алгоритмом, предложенным в [20]. В данном контексте факторные признаки не разделяются на факторы состояния и воздействия и обозначены одинаково (x_j).

Потребуем, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\xi_{k,fact}}{\xi_{k,norm}} = 1. \quad (35)$$

Рассматривая ресурсный потенциал как совокупность факторных признаков x_j , можно предположить, что при неэффективном управлении один или несколько факторных признаков используются нерационально. Следовательно, существуют потери при использовании j -того фактора, которые можно учесть посредством введения соответствующих коэффициентов K_j , имеющих смысл мультипликаторов (акселераторов). При достижении "нормативного" значения результативного признака, K_j должны принять значение, равное единице. Если коэффициенты в (15) $C_{j,j} < 0$, то $K_j > 1$ и, если $C_{j,j} > 0$, то $K_j < 1$.

В первом случае очевидно, что чем выше значение K_j , тем менее рационально используется j -тый фактор, во втором случае: чем меньше значение K_j , тем хуже используется j -тый фактор. В этом смысле представим фактическое значение $\xi_{k,fact}$, используя форму (15) и включив в нее мультипликаторы (акселераторы):

$$\xi_{k,fact} = \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n r_{i,j} \cdot C_{i,p} \cdot C_{j,q} \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot \frac{x_{k,q}}{K_{k,q}} \right]^{1/2}, \quad (36)$$

где m – число результативных признаков, n – число факторных признаков, i – индекс i -того результативного признака, j – индекс j -того результативного признака, p, q – индекс p -того (q -того) факторного признака, k – индекс рассматриваемой единицы совокупности, $r_{i,j}$ – парный коэффициент корреляции между i -тым и j -тым результативным признаком, вычисленный по (9), $C_{i,p}$, $C_{j,q}$ – "весовой" коэффициент между i -тым (j -тым) результативным и p -тым (q -тым) факторным признаками, $x_{k,p}$ ($x_{k,q}$) – фактическое значение стандартизованного p -того (q -того) факторного признака для k -той единицы совокупности, $K_{k,p}$ ($K_{k,q}$) – акселератор p -того (q -того) факторного признака для k -той единицы совокупности. Очевидно, что выражение (36) является положительно определенным.

Отсюда сформулируем основную задачу органов власти в части государственного управления и контроля: выявление наиболее низких значений (или высоких значений в случае отрицательности коэффициента в (36)) акселераторов, а также причины, которые повлияли на их формирование. Причины могут быть определены посредством анализа методом экспертных оценок, в результате чего оказывается возможным разработать рекомендации для хозяйствующих субъектов с целью повышения эффективности использования ресурсного потенциала. Уравнение (36) имеет множество решений. Следовательно, наиболее целесообразным представляется выявить тот фактор, у которого акселератор минимален (в случае $C_{i,p}(C_{j,q}) > 0$) либо максимален (в случае $C_{i,p}(C_{j,q}) < 0$).

С этой целью определим направление, в котором правая часть уравнения (56) увеличивается наискорейшим образом. Для этого вычислим частные производные по параметрам - акселераторам - и выделим из них максимальное значение. После некоторых преобразований

получим:

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial K_s} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^n r_{i,j} [C_{i,p} \cdot C_{j,s} + C_{j,p} \cdot C_{i,s}] \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot \frac{x_{k,s}}{K_{k,s}^2}}{\left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n r_{i,j} \cdot C_{i,p} \cdot C_{j,q} \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot \frac{x_{k,q}}{K_{k,q}} \right]^{1/2}}. \quad (37)$$

Здесь i, j, p – индексы суммирования, s – индекс s -того акселератора, k – индекс рассматриваемой единицы совокупности, по которому берется частная производная. Определим s -тый индекс из условия:

$$s = \max_s \left[\frac{\partial \xi_k}{\partial K_{k,s}} \right] = \min_s \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^n r_{i,j} [C_{i,p} \cdot C_{j,s} + C_{j,p} \cdot C_{i,s}] \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot x_{k,s}. \quad (38)$$

Определив s -тый индекс, можно переходить к определению s -того акселератора, приняв, что на первом шаге все остальные значения акселераторов равны единице. Решение сводится к определению корней квадратного уравнения из (36), где неизвестным параметром будет $K_{k,s}$, т. е.:

$$a_k \cdot K_{k,s}^2 + b_k \cdot K_{k,s} + c_k = 0, \quad (39)$$

где

$$a_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m r_{i,j} \left[\sum_{p=1}^n \left[\sum_{q=1}^n C_{i,p} \cdot C_{j,q} \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot \frac{x_{k,q}}{K_{k,q}} - (C_{i,p} \cdot C_{j,s} + C_{i,s} \cdot C_{j,p}) \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot x_{k,s} \right] - \right. \\ \left. - C_{i,s} \cdot C_{j,s} \cdot x_{k,s}^2 \right], \quad (40)$$

$$b_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m r_{i,j} \sum_{p=1}^n [C_{i,p} \cdot C_{j,s} + C_{j,p} \cdot C_{i,s}] \cdot \frac{x_{k,p}}{K_{k,p}} \cdot x_{k,s}, \quad (41)$$

$$c_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m r_{i,j} \cdot C_{i,s} \cdot C_{j,s} \cdot x_{k,s}^2 - \xi_{k,norm}^2 \quad (42)$$

Корень уравнения выбираем из условия неотрицательности акселератора.

Таким образом, можно оценить наибольшие потери при использовании s -того фактора и принять меры по их устранению, то есть обеспечить выполнение равенства:

$$\xi_{k,fact} = \xi_{k,norm}. \quad (43)$$

Полученное количественное выражение для $K_{k,s}$ определяет максимально возможные потери производителя при использовании s -того фактора при условии, что все остальные факторные признаки используются рационально.

Возможен случай, когда уравнение (39) не имеет решения. В этом случае можно потребовать, чтобы:

$$a_k \cdot K_{k,s}^2 + b_k \cdot K_{k,s} + c_k \rightarrow \min. \quad (44)$$

Из (39) очевидно, что $a_k > 0$, следовательно, левая часть – суть парабола, ветви которой направлены вверх, а (44) имеет единственный минимум на всей области определения $K_{k,s}$. Из условия минимума найдем, что

$$K_{k,s} = -\frac{b_k}{2 \cdot a_k} \quad (45)$$

Далее, подставив данное выражение в (36), найдем $\xi_{k,fact}$. Проранжировав ряд частных производных по условию (38), найдем следующий индекс s . И так, используя описанную методику, найдем последующие значения с учетом найденного на предыдущем шаге значения

акселератора. Процесс продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено равенство (43), после чего процедура поиска завершается.

Поиск есть не что иное, как выявление причин, вызвавших "неотягивание" результатов деятельности производителей сельскохозяйственной продукции до "нормативных" параметров. Производится оценка степени потерь при использовании s -того фактора. Также очевидно, что потери - это излишние затраты на единицу используемого факторного признака. Следовательно, акселератор $K_{k,s}$ показывает, как необходимо сократить (увеличить при $K_{k,s} > 1$) расходы на s -тый факторный признак для достижения "нормативных" показателей. Это и определяет сущность практических рекомендаций для k -той единицы совокупности.

Задача 5. Оптимизация факторов состояния и воздействия для обобщенного показателя результативности.

В отличие от задачи 2, в систему ограничений будет включено выражение (34). В этом случае постановка задачи будет выглядеть следующим образом:

$$F(t) = \sum_{i=1}^n |\Delta x_{k,i,j}^*(t)| + \sum_{s=1}^s |\Delta z_{k,i,q}^*(t)| \rightarrow \min. \quad (46)$$

Тогда выражение (34) должно быть включено в систему ограничений:

$$\sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \hat{r}_{pq} \cdot \hat{y}_{k,p}^0(t) \cdot \hat{y}_{k,q}^0(t)} - \sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m r_{pq} \cdot y_{k,p}^0(t) \cdot y_{k,q}^0(t)} \geq 0, \quad (47)$$

$$g_l(x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t), z_{k,i,p}^*(t) + \Delta z_{k,i,p}^*(t), z_{k,i,q}^*(t) + \Delta z_{k,i,q}^*(t)) = 0. \quad (48)$$

Решение такой задачи может быть осуществлено методами, описанными в задачах 1, 4.

Задача 6. Многокритериальная оптимизация для частных показателей результативности.

В такой постановке уже необходимо оптимизировать факторы состояния и воздействия, а также обобщенный и частные показатели результативности:

$$\sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \hat{r}_{pq} \cdot \hat{y}_{k,p}^0(t) \cdot \hat{y}_{k,q}^0(t)} - \sqrt{\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m r_{pq} \cdot y_{k,p}^0(t) \cdot y_{k,q}^0(t)} \rightarrow \min, \quad (49)$$

$$\hat{y}_{k,i}^0 - y_{k,i}^0 \rightarrow \min, \quad (50)$$

$$\sum_{i=1}^n |\Delta x_{k,i,j}^*(t)| + \sum_{s=1}^s |\Delta z_{k,i,q}^*(t)| \rightarrow \min, \quad (51)$$

$$g_l(x_{k,i,j}^*(t) + \Delta x_{k,i,j}^*(t), z_{k,i,p}^*(t) + \Delta z_{k,i,p}^*(t), z_{k,i,q}^*(t) + \Delta z_{k,i,q}^*(t)) = 0. \quad (52)$$

Решение задачи может быть осуществлено методами, предложенными в задаче 3. Однако оно будет связано с вводом дополнительных допущений относительно значимости каждого из критериев (49)–(52).

В данном случае можно предложить расширить метод, основанный на методологии АСФ (анализ среды функционирования), предложенный В. Е. Кривоножкой и А. В. Лычевым [5] и методе Лагранжа.

Составим целевую функцию в виде:

$$F(t) = \frac{\mu \cdot (y_k^0(t) - \hat{y}_k^0(t)) + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot (y_{k,i}^0(t) - \hat{y}_{k,i}^0(t))}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} \cdot |\Delta x_{k,i,j}^0(t)| + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^s \eta_{i,s} \cdot |\Delta z_{k,i,s}^0(t)|} \rightarrow \max, \quad (53)$$

где $\mu, \mu_i, \omega_{i,j}, \eta_{i,s}$ - соответствующие весовые коэффициенты обобщенного и частных показателей результативности, а также факторов состояния и воздействия. В данном соотношении приращения факторных признаков будем считать нормализованными, то есть приведенными к интервалу от 0 до 1 в соответствии с аналогичными соотношениями (6), (7), что в предыдущих задачах не является обязательным. Числитель представляет собой сумму разностей фактического и нормативного значений для обобщенного и частных показателей результативности, которые должны стремиться к максимуму. Знаменатель по сути есть требование минимизации затрат на реализацию мероприятий, направленных на достижение нормативных значений функционирования рассматриваемой сложной системы.

Дополним систему ограничений (52) условиями:

$$\mu + \sum_{i=1}^m \mu_i = 1, \quad (54)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^s \eta_{i,s} = 1. \quad (55)$$

Составим функционал в виде суммы соотношения (53) и ограничений (52), (54) и (55):

$$L(t) = F(t) + \lambda_\mu \cdot (\mu + \sum_{i=1}^m \mu_i - 1) + \lambda_{\omega\eta} \cdot (\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^s \eta_{i,s} - 1) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot g_i, \quad (56)$$

где g_i определяется соотношением (52), а $\lambda_\mu, \lambda_{\omega\eta}, \lambda_i$ - параметры (множители) Лагранжа. Для упрощения выражения для весовых коэффициентов и множителей индекс k и период t опущен. Взяв частные производные по каждому из весовых коэффициентов, множителям Лагранжа, а также по факторам состояния и воздействия и приравняв их к 0, получим систему уравнений, разрешимую относительно неизвестных, включенных в (56):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(t)}{\partial \mu_i} = 0 \\ \frac{\partial L(t)}{\partial \omega_{i,j}} = 0 \\ \frac{\partial L(t)}{\partial \eta_{i,s}} = 0 \\ \frac{\partial L(t)}{\partial \lambda_i} = 0 \\ \frac{\partial L(t)}{\partial \Delta x_{k,i,j}^0} = 0 \\ \frac{\partial L(t)}{\partial \Delta z_{k,i,s}^0} = 0 \end{array} \right. \cdot \quad (57)$$

В соотношении (53) можно исключить знаменатель и привести его к линейному виду посредством преобразования Чарнеса и Купера для задач дробно-линейного программирования [4].

Если ввести некоторый параметр τ , такой что знаменатель выражения (53) станет равным единице:

$$\tau \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} \cdot |\Delta x_{k,i,j}^0(t)| + \tau \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^s \eta_{i,s} \cdot |\Delta z_{k,i,s}^0(t)| = 1, \quad (58)$$

то, умножив числитель и знаменатель на τ , можно сделать следующую замену переменных:

$$v_{i,j} = \tau \cdot \omega_{i,j} \cdot |\Delta x_{k,i,j}^0(t)|, \quad (59)$$

$$v_{i,s} = \tau \cdot \eta_{i,s} \cdot |\Delta z_{k,i,s}^0(t)|, \quad (60)$$

$$\vartheta_\mu = \tau \cdot \mu \cdot (y_k^0(t) - \hat{y}_k^0(t)), \quad (61)$$

$$\vartheta_i = \tau \cdot \mu_i \cdot (y_{k,i}^0(t) - \hat{y}_{k,i}^0(t)). \quad (62)$$

Тогда выражение (53) можно представить в виде:

$$F(t) = \vartheta_\mu + \sum_{i=1}^m \vartheta_i \rightarrow \max \quad (63)$$

Понятно, что ϑ_μ нелинейно зависит от $v_{i,j}$ и $v_{i,s}$. Тогда система ограничений будет следующей:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v_{i,j} + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^s v_{i,s} = 1, \quad (64)$$

$$g_l(v_{i,j}, v_{i,s}) = 0. \quad (65)$$

В случае линейного вида (65) процедура поиска решения упрощается.

Задача 7. Оптимизация коэффициента гармоничности.

Решение данной задачи направлено на обеспечение сбалансированного (гармоничного) функционирования СЭЭС. Задача также может быть сформулирована в трех вариантах: максимизация коэффициента гармоничности, минимизации затрат на выравнивание асимметрии и многокритериальная оптимизация, которая может быть сведена к формированию единой целевой функции, в общем случае нелинейной, и решена с помощью описанного выше алгоритма.

В общем виде соотношения имеют вид:

$$F(t) = \frac{\mu_k \cdot K_k + \mu \cdot (y_k^0(t) - \hat{y}_k^0(t)) + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot (y_{k,i}^0(t) - \hat{y}_{k,i}^0(t))}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} \cdot |\Delta x_{k,i,j}^0(t)| + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^s \eta_{i,s} \cdot |\Delta z_{k,i,s}^0(t)|} \rightarrow \max, \quad (66)$$

где K_k определяется соотношением (18).

Последняя постановка применима в случае, если приоритетом органов управления является обеспечение сбалансированного функционирования СЭЭС, максимизации обобщенного и частного показателей результативности при минимизации затрат на реализацию соответствующих мероприятий.

Преимущество подхода, представленного выражениями (53) и (66) заключается в том, что весовые коэффициенты критериев определяются не экспертно, а на основании решения математической задачи оптимизации (в настоящее время, с использованием численных методов).

6. Практическая реализация некоторых задач оптимизации

В рамках исследования была решена 1 задача оптимизации (оптимизация частных показателей результативности) для экономической составляющей функционирования СЭЭС в линейном случае (формулы (25), (26)). Построение индикаторов оценки и их оптимизация представлены в [21, 22] (экологическая составляющая), [23] (социальная составляющая) и [10] (составляющие экономики). В качестве информационной базы были использованы данные Росстата за 2007-2015 годы для регионов Центрального федерального округа [24]. Расчет проводился с помощью авторской экспертной системы [25]. Была проведена оптимизация частных показателей результативности валового регионального продукта по отдельным видам экономической деятельности. Некоторые результаты расчета представлены в таблице 2.

Данные таблицы показывают: на сколько в среднем наблюдается перерасход ("—") или излишек ("+") факторного признака, в связи с чем норматив не достигается. Знак ("—") означает, что оптимизация не требуется, (">100") — оптимизация по данному фактору не

Таблица 2: Требуемые изменения факторных признаков для достижения норматива (фрагмент), %

Субъект/Показатель	$\Delta\xi_2(\Delta z_{2,1}^0)$	$\Delta\xi_{4.2}(\Delta z_{4.2,1}^0)$	$\Delta\xi_{4.5}(\Delta z_{4.5,1}^0)$
Белгородская область	-	-	-
Брянская область	-	-	-0,730
Владимирская область	>100	-86,672	>100
Воронежская область	-	-	-
Ивановская область	>100	-	-
Калужская область	>100	-36,387	-
Костромская область	-	-	-
Курская область	-	-	-
Липецкая область	-	-48,930	-
Московская область	>100	>100	-
Орловская область	-	-	>100
Рязанская область	-	-	-
Тамбовская область	-	-10,277	-
Тверская область	-	-	-
Тульская область	-	-3,243	-
Ярославская область	>100	-11,715	-

реализуема. Здесь ξ_2 , $\xi_{4.2}$, $\xi_{4.5}$ – частные показатели результативности ВРП по видам деятельности "Раздел D. Обрабатывающие производства"; "Раздел H. Гостиницы и рестораны"; "Раздел K. Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг" соответственно; $z_{2,1}^0$, $z_{4.2,1}^0$, $z_{4.5,1}^0$ – факторы воздействия (инвестиции в основной капитал по видам экономической деятельности) для выбранных разделов. Нормативные значения соответствующих показателей результативности были вычислены на основании построенных линейных моделей с использованием пошагового метода наименьших квадратов:

$$\hat{y}_2 = 0,396 \cdot x_{2,1}^* + 0,395 \cdot x_{2,2}^* + 0,226 \cdot z_{2,1}^* (R^2 = 0,964), \quad (67)$$

$$\hat{y}_{4.2} = 0,758 \cdot x_{4.2,2}^* + 0,229 \cdot z_{4.2,1}^* (R^2 = 0,942), \quad (68)$$

$$\hat{y}_{4.5} = 0,576 \cdot x_{4.5,2}^* + 0,408 \cdot z_{4.5,1}^* (R^2 = 0,908), \quad (69)$$

где $x_{2,1}^*$ – стоимость основных фондов по полной учетной стоимости на конец года по виду экономической деятельности (Раздел D); $x_{2,2}^*$, $x_{4.2,2}^*$, $x_{4.5,2}^*$ – среднегодовая численность занятых по видам экономической деятельности (разделы D, H и K соответственно).

Наиболее оптимальное решение предполагает изменение факторов на 10–15%.

По результатам, представленным в таблице 2, можно судить о необходимости решения задачи оптимизации по нескольким параметрам для регионов со значением >100.

7. Заключение

В результате проведенного исследования представлена методика конструирования частных и интегральных показателей результативности функционирования сложных систем. Индикаторы обладают свойствами универсальности (процедура стандартизации позволяет сравнивать признаки, имеющие разный характер и относящихся к разным процессам (например, экологический, экономический и социальный)); нормализации (приведение показателей к шкале

от 0 до 1 обеспечивает их одинаковый масштаб и наглядность представления данных); нормируемости (реализует возможность сравнения фактических данных с нормативом, который рассчитывается для конкретной СЭЭС, функционирующей в характерной для нее условиях); учета взаимосвязи частных показателей результативности, необходимость которого обосновывается рассмотрением объекта исследования как сложной системы, а также учета конкретных условий функционирования (предполагает учет факторов состояния СЭЭС при количественной оценке частных и интегральных показателей).

Представлена методика формирования коэффициента гармоничности, характеризующего сбалансированность функционирования сложной системы.

Также рассмотрены 7 вариантов математической постановки задачи оптимизации в зависимости от целей субъектов управления СЭЭС. Наиболее общая задача многокритериальной оптимизации является расширением методологии АСФ и позволяет исключить экспертный подбор весовых коэффициентов в целевой функции.

Представлено решение задачи оптимизации частных показателей результативности для регионов ЦФО.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С. А. Анализ качества и образа жизни населения. — М.: Наука, 2012. — 432 с.
2. Mishra S., Nathan H. S. K. Measuring Human Development Index: The old, the new and the elegant // Indira Gandhi Institute of Development Research, Mumbai. October, 2013 [Electronic source]. URL: <http://www.igidr.ac.in/pdf/publication/WP-2013-020.pdf>.
3. Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units // European Journal of Operational Research. 1978. 2 (6). P. 429–444.
4. Charnes A., Cooper W. W., Huang Z. M., Sun D. B. Polyhedral Cone-Ratio DEA Models with an Illustrative Application to Large Commercial Banks // Journal of Econometrics. 1990. Vol. 46, no. 1–2. Pp. 73–91.
5. Кривоножко В. Е., Лычев А. В. Анализ деятельности сложных социально-экономических систем. — М: Макс Пресс, 2010. — 208 с.
6. Моргунов Е.П. Многомерная классификация на основе аналитического метода оценки эффективности сложных систем: дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук. Красноярск, 2003. — 160 с.
7. Айвазян С. А. Эмпирический анализ синтетических категорий качества жизни населения // Экономика и математические методы. 2003. Т. 39. № 3. С. 19–53.
8. Шабашев В. А., Шорохов С. И., Верховина М. Ф. Структурное моделирование связей экономических, социальных и демографических факторов // Региональная экономика: теория и практика. 2016. № 10(433). С. 169–179.
9. Магретта, Д. Ключевые идеи. Майкл Портер. - М.: Манн, Иванов и Фербер, 2013. — 272 с.
10. Жуков Р. А. Оценка объема платных услуг населению как составляющей экономики регионов на основе экономико-математического моделирования // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 3: Экономика. Экология. 2017. Т. 19. № 2. С. 58–68.
11. Кривулин Н. К., Романовский И. В. Решение задач математического программирования с использованием методов тропической оптимизации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4. № 3. С. 448–458.

12. Томашевский И. Л. Многокритериальная оптимизация с логическим взаимодействием критериев и альтернатив // Экономика и математические методы. 2017. Т. 53. № 4. С. 105–113.
13. Анохин А. М., Глотов В. А., Павельев В. В., Черкашин А. М. Методы определения коэффициентов важности критериев // Автоматика и телемеханика. 1997. № 8. С. 3–35.
14. Подиновский В. В., Потапов В. А. Метод взвешенной суммы критериев в анализе многокритериальных решений: pro et contra // Бизнес-информатика. 2013. №3. С. 41–48.
15. Соболев И. М., Статников Р. Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Дрофа, 2006. – 175 с.
16. Cobb C. W., Douglas P. H. A Theory of Production // American Economic Review. 1928. No. 18. Pp. 139–165.
17. Кремер Н. Ф., Путко Б. А. Эконометрика. – М: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 311 с.
18. Жуков Р. А., Кузнецов Г. В., Манохин Е. В. К вопросу о формировании критерия оценки гармоничного развития территорий // Современная математика и концепции инновационного математического образования. 2016. Т. 3. № 1. С. 151–155.
19. Кремер Н. Ф., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Исследование операций в экономике. М: ЮНИТИ, 2003. – 407 с.
20. Журавлев С. Д., Жуков Р. А., Киселев В. Д. Теоретические и методологические основы повышения эффективности функционирования систем государственного управления использованием земель сельскохозяйственного назначения в России: монография / С. Д. Журавлев, Р. А. Жуков, В. Д. Киселев. – Тула: Федеральное гос. бюджетное образовательное учреждение высш. проф. образования Российская акад. нар. хоз-ва и гос. службы при Президенте Российской Федерации, Тульский фил., 2011. Сер. Вып. 1 Актуальные вопросы государственного и муниципального управления. – 212 с.
21. Жуков Р. А. Оценка состояния атмосферного воздуха в регионах ЦФО в рамках фундаментального подхода к оценке эффективности деятельности субъектов управления социо-эколого-экономическими системами // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 3: Экономика. Экология. 2016. № 3(36). С. 177–184.
22. Жуков Р. А. Оценка состояния сложных систем на примере регионов Центрального федерального округа: эколого-экономический аспект // Региональные исследования. 2016. № 4(54). С. 81–89.
23. Жуков Р. А. Некоторые аспекты оценки качества жизни и управления в социо-эколого-экономических системах: регионы Центрального федерального округа // Региональная экономика: теория и практика. 2017. Т. 15. № 7(442). С. 1261–1275.
24. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс].
URL: <http://www.gks.ru/>
25. Жуков Р. А. Внедрение программных экономико-математических комплексов в практику деятельности органов государственного управления // Фундаментальные исследования. 2015. №9–3. С. 555–559.

REFERENCES

1. Aivazian, S. A., 2012, "Analiz kachestva i obraza zhizni naseleniya" [*Analysis of the quality and lifestyle of the population*], Moscow, Nauka, 432 p.
2. Mishra, S., Nathan, H.S.K., 2012 "Measuring Human Development Index: The old, the new and the elegant", *Indira Gandhi Institute of Development Research*, Mumbai, [online], URL: <http://www.igidr.ac.in/pdf/publication/WP-2013-020.pdf>.
3. Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E., 1978, "Measuring the efficiency of decision making units", *European Journal of Operational Research*, 2(6), pp. 429-444.
4. Charnes A., Cooper W. W., Huang Z. M., Sun D. B., 1990, "Polyhedral Cone-Ratio DEA Models with an Illustrative Application to Large Commercial Banks", *Journal of Econometrics*, vol. 46, no. 1-2, pp. 73-91.
5. Krivonozhko, V.E., Lychev, A.V., 2010, "Analiz deyatel'nosti slozhnykh socialno-ekonomicheskikh sistem" [*Analysis of activity of complex socio-economic systems*], Moscow, Maks Press, 208 p.
6. Morgunov, E.P., 2003, "Mnogomernaya klassifikatsiya na osnove analiticheskogo metoda otsenki effektivnosti sistem" [*Multivariate classification based on the analytical method of assessing the effectiveness of systems*], the dissertation on competition of a scientific degree of Candidate of technical sciences, Krasnoyarsk, 160 p.
7. Aivazyan, S. A., 2003, "Empiricheskiy analiz sinteticheskikh kategoriy kachestva zhizni naseleniya" [Empirical analysis of synthetic categories of the quality of life of the population], *Economics and mathematical methods*, vol. 39, no. 3, pp. 19-53.
8. Shabashev, V. A., Shorohov, S. I., Verhozina, M. F., 2016, "Strukturnoe modelirovanie svyazey ekonomicheskikh, socialnykh i demograficheskikh faktorov" [Structural modeling of the relations of economic, social and demographic factors], *Regionalnaya ekonomika: teoriya i praktika* [*Regional economy: theory and practice*], no. 10(433), pp. 169-179.
9. Magretta, D., 2013, "Klyuchevyye idei. Maykl Porter" [*Key Ideas. Michael Porter*], Moscow: Mann, Ivanov and Ferber, 272 p.
10. Zhukov, R. A., 2017, "Otsenka ob'yema platnykh uslug naseleniyu kak sostavlyayushchey ekonomiki regionov na osnove ekonomiko-matematicheskogo modelirovaniya" [Estimation of the volume of paid services to the population as a component of the economy of regions on the basis of economic and mathematical modeling], *Science Journal of VolSU. Global Economic System*, vol. 19, no. 2, pp. 58-68.
11. Krivulin, N. K., Romanovsky, I. V., 2017, "Resheniye zadach matematicheskogo programmirovaniya s ispol'zovaniyem metodov tropicheskoy optimizatsii" [Solving the problems of mathematical programming using the methods of tropical optimization], *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, vol. 4, no. 3, pp. 448-458.
12. Tomashevsky, I. L., 2017, "Mnogokriterial'naya optimizatsiya s logicheskimi vzaimodeystviyem kriteriyev i al'ternativ" [Multicriteria optimization with logical interaction of criteria and alternatives], *Ekonomika i matematicheskiye metody* [*Economics and mathematical methods*], vol. 53, no. 4, pp. 105-113.
13. Anokhin A. M., Glotov V. A., Pavelev V. V., Cherkashin A. M., 1997, "Metody opredeleniya koeffitsiyentov vazhnosti kriteriyev" [Methods for determining the coefficients of importance of criteria], *Avtomatika i telemekhanika*, no. 8, pp. 3-35.

14. Podinovskiy V. V., Potapov V. A., 2013, "Metod vzveshennoy summy kriteriyev v analize mnogokriterial'nykh resheniy: pro et contra" [Weighted sum of criteria in the analysis of multicriteria solutions: pro et contra], *Biznes-informatika*, no. 3, pp. 41-48.
15. Sobol I. M., Statnikov R. B., 2006, "Vybora optimal'nykh parametrov v zadachakh so mnogimi kriteriyami" [Choice of optimal parameters in problems with many criteria], Moscow, Drofa, 175 p.
16. Cobb C. W., Douglas P. H., 1928, "A Theory of Production", *American Economic Review*, no. 18, pp. 139-165.
17. Kremer N. F., Putko B. A., 2005, "Ekonometrika" [Econometrics], Moscow, YUNITI-DANA, 311 p.
18. Zhukov R. A., Kuznetsov G. V., Manokhin E. V., 2016, "K voprosu o formirovani kriteriya otsenki garmonichnogo razvitiya territoriy" [To the question of the formation of the criterion for assessing the harmonious development of territories], *Sovremennaya matematika i kontseptsii innovatsionnogo matematicheskogo obrazovaniya*, vol. 3, no. 1, pp. 151-155.
19. Kremer N. F., Putko B. A., Trishin I. M., Fridman M. N., 2003, "Issledovaniye operatsiy v ekonomike" [Research of operations in the economy], Moscow, YUNITI, 407 p.
20. Zhuravlev S. D., Zhukov R. A., Kiselev V. D., 2011, "Teoreticheskiye i metodologicheskiye osnovy povysheniya effektivnosti funktsionirovaniya sistem gosudarstvennogo upravleniya ispol'zovaniyem zemel' sel'skokhozyaystvennogo naznacheniya v Rossii: monografiya" [Theoretical and methodological foundations of increasing the effectiveness of the functioning of public administration systems for the use of agricultural land in Russia: monograph], Tula, Federal'noye gos. byudzhethnoye obrazovatel'noye uchrezhdeniye vyssh. prof. obrazovaniya "Rossiyskaya akad. nar. khoz-va i gos. sluzhby pri Prezidente Rossiyskoy Federatsii Tul'skiy fil., Ser. Vyp. 1, Aktual'nyye voprosy gosudarstvennogo i munitsipal'nogo upravleniya, 212 p.
21. Zhukov, R. A., 2016, "Otsenka sostoyaniya atmosfernogo vozdukha v regionakh TSFO v ramkakh fundamental'nogo podkhoda k otsenke effektivnosti deyatelnosti sub'yektov upravleniya sotsio-ekologo-ekonomicheskimi sistemami" [Assessment of the state of atmospheric air in the regions of the Central Federal District within the framework of a fundamental approach to assessing the effectiveness of the subjects of management of socio-ecological and economic systems], *Science Journal of VolSU. Global Economic System*, no. 3(36), pp. 177-184.
22. Zhukov R. A., 2016, "Otsenka sostoyaniya slozhnykh sistem na primere regionov Tsentral'nogo federal'nogo okruga: ekologo-ekonomicheskii aspekt" [An estimation of a condition of difficult systems on an example of regions of the Central federal district: an ekologo-economic aspect], *Regional'nyye issledovaniya*, no. 4(54), pp. 81-89.
23. Zhukov R. A., 2017, "Nekotoryye aspekty otsenki kachestva zhizni i upravleniya v sotsio-ekologo-ekonomicheskikh sistemakh: regiony Tsentral'nogo federal'nogo okruga" [Some aspects of assessing the quality of life and management in socio-ecological and economic systems: the regions of the Central Federal District], *Regional'naya ekonomika: teoriya i praktika [Regional economy: theory and practice]*, vol. 15, no. 7 (442), pp. 1261-1275.
24. Federal State Statistics Service of the Russian Federation (ROSSTAT) [online].
URL: <http://www.gks.ru>.

25. Zhukov R. A., 2015, “Vnedreniye programmnykh ekonomiko-matematicheskikh kompleksov v praktiku deyatel’nosti organov gosudarstvennogo upravleniya” [Introduction of programmed economic and mathematical complexes into the practice of government bodies], *Fundamental’nyye issledovaniya [Fundamental research]*, no. 9-3, pp. 555-559.

Получено 27.02.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 51 (091)

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-391-404

Религиозно-правовой аспект алгебры ал-Хорезми и её статус в иерархии наук ал-Фараби ¹

И. О. Лютер

Лютер Ирина Олеговна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова Российской академии наук, г. Москва.

e-mail: bastet_13@list.ru

Аннотация

В настоящей работе речь идет о исламской научной дисциплине — науке о расчете долей наследства (‘илм ал-фара’ид) — и приложениях арифметики и алгебры к проблемам распределения наследства по правилам, разрабатываемым в рамках этой дисциплины. Кроме соответствующих глав «Краткой книги об исчислении алгебры и алмукабалы» ал-Хорезми, в которых алгебраические методы применяются для подсчета законных долей наследников, в качестве основных источников рассмотрены трактат о наследственном праве «Сираджийа» ас-Саджаванди, а также сочинение «Перечисление наук» ал-Фараби, в котором дается философское осмысление статуса алгебры и ее предмета.

Ключевые слова: алгебра ал-Хорезми, мусульманское наследственное право, расчет долей наследства, «Сираджийа» ас-Саджаванди, классификация математических наук ал-Фараби.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

И. О. Лютер Религиозно-правовой аспект алгебры ал-Хорезми и её статус в иерархии наук ал-Фараби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 391–404.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 51 (091)

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-1-391-404

The religious and legal aspect of al-Khwarizmi's algebra and its status in the hierarchy of sciences of al-Farabi ²

I. O. Lyuter

¹ Некоторые результаты работы докладывались на XV международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, секция «История математики»" [1].

² Some results of the work were presented at the XV international conference "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications, section «History of mathematics»" [1].

Lyuter Irina Olegovna — candidate of physical and mathematical Sciences, senior researcher, Institute of history of natural science and technology S. I. Vavilov Russian Academy of Sciences, Moscow.

e-mail: bastet_13@list.ru

Abstract

The paper deals with a genuine Islamic scientific discipline, the science of the calculation of inheritance shares ('Ilm al-Fara'id), and the applications of arithmetic and algebra to the problems of the distribution of inheritance according to the rules developed in this discipline. The main treatises considered in this regard are the relevant chapters of "The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing" by al-Khwarizmi, in which algebraic methods have been applied to the computation of the legal shares of legacy, the treatise on the law of inheritance "Sirajiyya" of al-Sajawandi, as well as the "Enumeration of Sciences" of al-Farabi, who provides a philosophical understanding of the status and nature of algebra.

Keywords: algebra of al-Khwarizmi, Islamic inheritance law, «Sirajiyah» of al-Sajawandi, classification of mathematical sciences of al-Farabi.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

I. O. Lyuter, 2019, "The religious and legal aspect of al-Khwarizmi's algebra and its status in the hierarchy of sciences of al-Farabi", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 391–404.

1. Введение

Происходящее в VIII в. культурное и институциональное становление исламской империи привело к появлению многих научных дисциплин. Проводились и развивались коранические, лингвистические, юридические, исторические и теологические исследования, непосредственно связанные с новым обществом, его идеологией и организацией. Эти исследования сделали возможным не только создание условий и средств, необходимых для появления и интеграции других наук, в том числе математических и философских, но также обусловили потребность в них и формирование их контекста.

В связи с алгеброй особый интерес представляет одна из этих новых собственно исламских дисциплин – наука о наследственном праве или наука о расчете долей наследства ('илм ал-фара'ид)³. Эта возникшая в рамках мусульманского гражданского права научная дисциплина не только обеспечила алгебру областями применения, тем самым дав ей социальное обоснование, но и участвовала в VIII в. в формировании одного из ее разделов – речь идет о приложениях алгебры к проблемам распределения наследства (подсчету законных долей наследников) по разрабатываемым в рамках наследственного права правилам.

2. Алгебра ал-Хорезми

Впервые как самостоятельная математическая дисциплина об общих методах решения линейных и квадратных уравнений со своей особой лексикой алгебра предстает в «Краткой книге об исчислении алгебры и алмукабалы»⁴ («Ал-китаб ал-мухтасар фи хисаб ал-джабр

³ Термин «ал-фара'ид» – множественное число от арабского слова «ал-фарида», означающего обязательное предписание Аллаха, религиозную обязанность, – в исламской юриспруденции означает «наследственные доли имущества».

⁴ Далее по тексту просто «Алгебра». Напомним, в математическом контексте слова «ал-джабр» и «ал-мукабала» означают названия двух алгебраических операций – соответственно «восполнения» уравнения (перенос вычитаемых членов из одной части равенства в другую) и «противопоставления» (сокращение равных

ва-л-мукабала») одного из крупнейших среднеазиатских ученых (математика, астронома, географа, историка) IX в. Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми (ок. 780–ок. 850) (русский перевод см. [2]).

Книга ал-Хорезми была написана около 820 г. Примерно тогда же он был назначен астрономом и главой библиотеки Дома мудрости (Байт ал-хикма). Эта своего рода научная академия была основана в Багдаде, финансировалась и контролировалась седьмым халифом династии Аббасидов ал-Мамун (правившим с 813 по 833), известным своим покровительством науке и искусствам. Халиф ал-Мамун лично участвовал в повседневной жизни Дома мудрости, регулярно посещая работающих в нем ученых и интересуясь их деятельностью, участвуя в различных дискуссиях и научных обсуждениях. Об этом свидетельствует и характеристика ал-Мамуна, данная ал-Хорезми во введении к алгебраическому трактату, в которой отмечаются свойственные халифу «любовь к науке и стремление приближать к себе ученых, простирая над ними крыло своего покровительства и помогая им в разъяснении того, что для них неясно, и в облегчении того, что для них затруднительно» [2, с. 21].⁵

В этом же введении ал-Хорезми, говоря о предназначении своего сочинения, отмечает прикладной характер новой дисциплины, области приложения которой охватывают и арифметические и геометрические проблемы: «Я составил краткую книгу об исчислении алгебры и алмукабалы, заключающую в себе простые и сложные вопросы арифметики, ибо это необходимо людям при дележе наследства, составлении завещаний, разделе имущества и судебных делах, в торговле и всевозможных сделках, а также при измерении земель, проведении каналов, геометрии и прочих разновидностях подобных дел» [2, с. 21].

Трактат ал-Хорезми состоит из двух частей – теоретической и практической. В первой из них излагается теория линейных и квадратных уравнений, а также затрагиваются некоторые вопросы геометрии. Во второй части алгебраические методы применяются к решению конкретных бытовых, торговых и юридических проблем.

3. Наследственное право и алгебра ал-Хорезми

«Дележу наследства, составлению завещаний, разделу имущества», отмеченным ал-Хорезми во введении к «Алгебре», посвящена большая часть его трактата, включающая «Книгу

членов в обеих частях равенства), с помощью которых алгебраические уравнения приводились к шести каноническим видам ($bx = c$, $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 = bx + c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 + bx = c$, $a > 0, b > 0, c > 0$), решаемым по правилам, определенным априори ал-Хорезми. Впервые используемые вместе в трактате ал-Хорезми эти термины дали математической дисциплине название «исчисление алгебры и алмукабалы», которое впоследствии сократилось до «алгебры». Практикующих же алгебру математиков стали называть «людьми алгебры» (такое выражение встречается уже у Сабита ибн Корры (826–901), позднее у Омара Хайяма (1048–1181)).

⁵Основной целью деятельности Дома мудрости были переводы на арабский язык с греческого, персидского, санскрита (также с арамейского, иврита, латыни) научных и философских сочинений, а также их комментирование. Ко второй половине IX в. Дом мудрости ал-Мамуна стал крупнейшим хранилищем книг в мире (фонды его библиотеки собирались тремя поколениями аббасидских халифов: прадедом, дедом и отцом ал-Мамуна халифом Харуном ар-Рашидом) и одним из самых прославленных центров интеллектуальной деятельности в Средние века, куда приглашались самые лучшие переводчики и ученые из разных стран, прежде всего из тех, что вошли в состав Арабского халифата (Сирии, Египта, Персии, Хорасана, Мавераннахра и др.). Сотрудниками Дома мудрости в разное время были такие выдающиеся математики и астрономы, как ал-Фергани, ал-Джаухари, ал-Кинди, братья Бану Муса, ал-Махани, Сабит ибн Корра, Куста ибн Лука, Абу-л-Вафа ал-Бузджани, ал-Кухи и др. В результате, к середине IX в. уже существовали арабские версии «Начал» Евклида, нескольких работ Архимеда, «Конических сечений» Аполлония, «Альмагеста» Птолемея и др. Ученые, приглашенные в Дом мудрости осуществляли и самостоятельные исследования, получая при этом, подобно ал-Хорезми, оригинальные результаты во многих областях знания. В 1258 г. Дом мудрости был разрушен армией монгольского правителя Хулагу-хана (внука Чингис-хана), захватившей Багдад. Книги из городских библиотек, в том числе библиотеки Дома мудрости, были брошены в реку Тигр в таком количестве, что, как свидетельствуют некоторые источники, вода в реке почернела от чернил из книг.

завещаний» («Китаб ал-васайа») из 8 глав и «Исчисление кругооборотов»⁶ («Хисаб ад-даур») из 4 глав и ставшая впоследствии практическим руководством для исламских правоведов, занимавшихся разделом имущества. Со временем содержание этой части трактата приведет к алгебраической дисциплине под названием «исчисление завещаний» (хисаб ал-васайа) или «исчисление долей наследства» (хисаб ал-фара'ид), которая будет преподаваться как область исследований для алгебраистов и юристов после создания в XI в. школ права, таких как Низамия.⁷

Наследственные правила, согласно которым определяются доли наследников оставленного имущества, закреплены в двух основных источниках исламского богословия и права – Коране и Сунне⁸ – и являются важной частью исламского права (фикх), а также фундаментальной и обязательной частью шариата⁹.

В Коране содержатся более 30 стихов (аятов), относящихся к разделу наследства. В трех основных из них доли наследства описываются обстоятельно:

«Завещает вам Аллах относительно ваших детей: сыну – долю, подобную доле двух дочерей. А если они (дети) – женщины, числом больше двух, то им – две трети того, что он оставил, а если одна, то ей – половина. А родителям его, каждому из двух – одна шестая того, что он оставил, если у него есть ребенок. А если у него нет ребенка и ему наследуют его родители, то матери – одна треть. А если есть у него братья, то матери – одна шестая после завещанного, которое он завещает, или долга. Родители ваши или ваши сыновья – вы не знаете, кто из них ближе к вам по пользе, как установлено Аллахом. Поистине, Аллах – знающ, мудр!» (Коран, сура 4, аят 12 (11)) [3, с. 82];

«Вам – половина того, что оставили ваши супруги, если у них нет ребенка. А если у них есть ребенок, то вам – четверть того, что они оставили после завещанного, которое они завещают, или долга» (там же, аят 13 (12)) [3, с. 82];

«... Аллах дает вам решение о боковой линии. Если человек погибнет и нет у него ребенка, а есть у него сестра, то ей половина того, что он оставил, и он наследует после нее, если у нее нет ребенка. А если их – две, то им обеим две трети того, что он оставил. А если они – братья, мужчины и женщины, то мужскому полу столько же, сколько доля двух женщин» (там же, аят 175 (176)) [3, с. 101].

Неудивительно, что главы трактата ал-Хорезми о завещаниях и разделе имущества, определяемые нормами мусульманского наследственного права, в свою очередь, основанными на важнейших источниках религии ислама, не были включены ни в один из латинских переводов «Алгебры» ал-Хорезми.¹⁰

Как следует из приведенных стихов Корана, чтобы применить данные в них предписания по распределению имущества между различными родственниками, необходимо знание арифметики. Иначе говоря, решение религиозно-правовой проблемы наследования предполагает знание арифметики и элементарной теории чисел.

Когда же какая-то часть наследства при определенных условиях завещается постороннему

⁶ «Кругообороты» (араб. «даур») – не предусмотренные ранее обстоятельства, меняющие местами положение лиц, например, когда наследник становится завещателем.

⁷ Медресе Низамия – школы исламского права, построенные по инициативе знаменитого государственного деятеля, визиря сельджукских султанов Низам ал-Мулка (1018–1092) в XI в. в крупных городах Ирана, Ирака и Сирии. Самая первая и известная – Низамия в Багдаде, в течение нескольких столетий остававшаяся ведущим учебным заведением и образцом для многих правовых школ во всем исламском мире.

⁸ Сунна (араб. «обычай, практика, предание, закон») – мусульманское священное предание, основанное на устно переданной сподвижниками пророка Мухаммада записи его дел и высказываний.

⁹ Шариат (араб. «прямой путь») – комплекс правил поведения члена мусульманской общины, установленных фикхом.

¹⁰ Сохранились три латинских перевода трактата ал-Хорезми: Роберта Честерского (ок. 1145), Герарда Крёмонского (ок. 1150) и предположительно Гульельмо де Луниса (ок. 1250), с последнего перевода в 1313 г. был сделан анонимный итальянский перевод.

человеку, задача осложняется и необходимо умение составлять и решать линейные и неопределенные уравнения, то есть необходимо некоторое исчисление, алгебраическое по сути. Поясним это, обратившись к двум проблемам из «Алгебры» ал-Хорезми, точнее из входящей в нее «Книги о завещаниях».

В «Книге о завещаниях» рассматриваются проблемы, в которых часть наследства завещается посторонним. Рассматриваются не простые случаи законных долей, которые могут быть решены с помощью элементарных арифметических операций с дробями, а более сложные случаи наследования, требующие знания алгебраических операций с неизвестными величинами.

Характерно, что в большинстве случаев ал-Хорезми решает наследственные проблемы без обращения к юридической стороне вопроса – правилам наследования, регулирующим величину законных долей и ограниченную величину завещанного наследства.¹¹ С нормами наследственного права были знакомы не только правоведы, но и каждый образованный мусульманин, поскольку они излагались в специальных учебных пособиях, изучавшихся в начальных школах. Зная это, ал-Хорезми, видимо, полагал, что любой, кто изучает его алгебру, уже знаком с правилами наследования и простыми случаями подсчета законных долей. Поэтому-то он и не конкретизировал правовые положения (не указывал законную долю каждого наследника, не объяснял, как должен распределяться остаток средств, какова законная доля каждого наследника в особых случаях, как находить общий знаменатель долей).

Итак, первый пример: «Если он оставил трех сыновей и завещал одну пятую своего имущества без дирхема, причем он оставил десять дирхемов в наличности и отданное в долг, равное доле одного из сыновей, то правило: прими получаемое из долга за вещь и прибавь это к десяти. Будет десять и вещь. Вычти одну пятую этого как завещанное. Это два дирхема и одна пятая вещи. Останется восемь дирхемов и четыре пятых вещи. Затем прибавь дирхем, так как было сказано: без дирхема. Получится девять дирхемов и четыре пятых вещи. Раздели это между сыновьями. У каждого сына будет три дирхема и одна пятая с третью одной пятой вещи, Это равно вещи. Противопоставь одну пятую с третью одной пятой вещи одной вещи. Останется: одиннадцать пятнадцатых вещи равны трем дирхемам. Ты нуждаешься в дополнении вещи. Прибавь к ней четыре пятнадцатых вещи и прибавь равное этому к трем дирхемам. Это дирхем с одной одиннадцатой. Поэтому четыре и одна одиннадцатая дирхема равны вещи. Это и есть то, что получается из долга» [2, с.54–55].

Решение этой проблемы сводится, в современной терминологии, к простому линейному уравнению: пусть x – «вещь»¹² – отданное в долг, тогда все имущество – $(x + 10)$, а завещанное без дирхема – $\frac{1}{5}(x + 10) - 1 = \frac{1}{5}x + 1$; в таком случае три сына наследуют $(x + 10) - (\frac{1}{5}x + 1) = \frac{4}{5}x + 9$, а каждый сын – $\frac{4}{15}x + 3$; доля каждого сына, по условию, равна «вещи», таким образом, получаем линейное уравнение $\frac{4}{15}x + 3 = x$, откуда $x = 4\frac{1}{11}$.

Второй пример: «Женщина умерла, оставив двух дочерей, мать и мужа, и завещала одному человеку равное доле матери и другому человеку – одну девятую всего имущества. Правило таково: установи число частей необходимого наследства, это тринадцать частей, для матери

¹¹ Не менее семи стихов Корана (2: 180–182, 2: 240, 4: 33, 5: 106–107) имеют прямое отношение к завещательному распоряжению. Общие правила завещаний небезынтересны во многих отношениях: завещанная доля (васаи) не должна превышать 1/3 всего имущества завещателя; завещанная доля не может быть передана человеку, который уже является наследником; завещанная доля не может быть направлена на деятельность или фонд, не соответствующие нормам шариата. Любому человеку может случиться пожертвовать более трети своего имущества в виде подарка. Но, если такое пожертвование делает смертельно больной человек, то это пожертвование считается наследством и как таковое недействительно на величину, превышающую 1/3 всего имущества, которую необходимо вернуть законным наследникам.

¹² Напомним, что термином «вещь» (араб. «шай») ал-Хорезми называет неизвестную величину. В теоретической же части «Алгебры» в этом же значении он применяет термин «корень» (джизр) и дает следующее определение: «Корень – это всякая вещь, умножаемая на себя, будь то число, равное или большее единицы, или дробь, меньшая ее» [2, с. 21]. Определение становится более понятным, если учесть, что при решении уравнений в те времена искали не только x , но и x^2 , а неизвестную рассматривали как корень из квадрата неизвестной.

из них две части. Теперь ты знаешь, что завещанное есть две части и одна девятая всего имущества. Остается от него, восемь девятых имущества без двух частей для наследников. Восполни твое имущество, считая восемь девятых без двух частей тринадцатую частями, то есть прибавь к этому две части, так что получится: пятнадцать равно восьми девятым имущества. Затем прибавь к этому одну восьмую его, и к пятнадцати – их одну восьмую, то есть одну и семь восьмых части, для того, кому завещана одна девятая, ему одна и семь восьмых доли. Другому, кому завещана доля матери, – две части. Останутся тринадцать частей, они делятся между наследниками по их долям. Это станет целым, если будет сто тридцать пять частей» [2, с. 58].

Согласно Корану, мать должна получить $\frac{1}{6}$ долю имущества, муж – $\frac{1}{4}$, две дочери – $\frac{2}{3}$. В таком случае наследство делилось бы на 12 частей (12 – наименьший общий знаменатель долей) и доли наследников были бы соответственно $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$ и $\frac{8}{12}$. В сумме эти доли дают $\frac{13}{12}$, следовательно, они не могут быть выданы полностью. В подобных случаях, согласно наследственному правилу, если сумма числителей долей больше, чем знаменатель, то он должен быть увеличен так, чтобы быть равным этой сумме. Такое правило-поправка называется «отклонением» (ал-‘аул) от первоначального правила [4, с. 331]. При этом законные доли наследников остаются с неизменными числителями, но с новым знаменателем¹³. Ал-Хорезми без ссылок на это правило увеличивает знаменатель до 13, при этом мать и муж по-прежнему получают 2 и 3 части соответственно, а каждая дочь – по 4 части. Доля, завещанная одному постороннему человеку равна, по условию, доле матери и составляет 2 части; доля, завещанная другому постороннему человеку равна, по условию, $\frac{1}{9}$ всего имущества. Имущество включает 15 частей, 13 из которых наследуют родственники и 2 части, завещаны одному из посторонних наследователей. Поскольку $\frac{1}{9}$ часть имущества завещана второму постороннему человеку, то те 15 частей составляют $\frac{8}{9}$ имущества. Тогда $\frac{1}{9}$ имущества составляет $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ частей, все же имущество содержит $\frac{135}{8}$ частей. Таким образом, решение проблемы сводится к неопределенному уравнению $x = 2y + 3y + 8y + 2y + \frac{1}{9}x$, где x – все имущество, y – величина одной части наследства; следовательно, $\frac{8}{9}x = 15y$ и $x = \frac{135}{8}y$. Ал-Хорезми полагает, что все имущество состоит из 135 частей, в таком случае мать получает 16 частей, муж – 24 части, каждая из дочерей – по 32 части, первая завещанная доля равна 16 частям, а вторая – 15.

Историк средневековой арабской и еврейской математики и астрономии С. Гандз (1883–1954) назвал «Книгу о завещаниях» из «Алгебры» ал-Хорезми, включающую две рассмотренные нами проблемы, «алгеброй наследования» [4, с. 328].

4. Трактат о наследственном праве ас-Саджаванди

В тех редких случаях, когда ал-Хорезми все-таки ссылается на конкретные юридические принципы, они оказываются положениями, принадлежащими выдающемуся исламскому богослову и правоведу Абу Ханифе (699–767), что непосредственно свидетельствует об основном знании ал-Хорезми юридической стороны проблем.

Абу Ханифа был основателем школы ханафитов – одной из трех канонических суннитских религиозно-правовых школ (мазхабов), основанных в VIII в. Две другие – это школа маликитов, основатель Малик ибн Анас (711–795), и школа шафиитов, основатель Мухаммад ибн Идрис аш-Шафии (767–820). Этим знаменитым правоведам и их ученикам принадлежат и сочинения по мусульманскому наследственному праву.¹⁴ Так, Р. Рашед отмечает трактат

¹³В комментариях к этой проблеме Б. А. Розенфельд (также автор русского перевода алгебраического трактата ал-Хорезми) не совсем верно объясняет выбор знаменателя 13, исходя из доли каждой из дочерей в случае знаменателя 12, равной $3\frac{1}{2}$ части: «чтобы избежать дробей, ал-Хорезми делит необходимое имущество на 13 частей, причем мать и муж по-прежнему получают 2 и 3 части, а каждая дочь – по 4 части» [2, с. 134].

¹⁴Принципы вынесения правовых решений этих школ расходились и в отношении некоторых аспектов мусульманского наследственного права, отчасти из-за различий в толковании Корана и Сунны.

«Исчисление завещаний» («Хисаб ал-васайя») известного исламского правоведа Мухаммада ибн Хасана аш-Шайбани (749–805), ученика Абу Ханифы и Малика ибн Анаса [5, с. 107]. В подобных трактатах, составленных не только до написания «Алгебры» ал-Хорезми, но и позднее, рассматривалось, как правило, общее наследственное право и проблемы, ограничивающиеся вычислением наследственных долей с помощью элементарных арифметических операций с дробями, без применения алгебраических уравнений с неизвестными величинами.¹⁵ Одной из важнейших работ в этой области был трактат математика, астролога, географа, представителя ханафитского мазхаба, знатока наследственного права Сирадж ад-Дина ас-Саджаванди (ум. ок. 1203) «Книга наследственного права Сирадж ад-Дина» («Китаб ал-фара'ид ас-сираджиййа») или просто «Сираджиййа».¹⁶ Ему принадлежат также математические «Уподобление об арифметике» и «Трактат об алгебре и алмукабале», составленные в традициях арифметического¹⁷ и алгебраического трактатов ал-Хорезми. Все три сочинения ас-Саджаванди включались во многие сборники по разделу наследства вплоть до XIX в. А сам трактат «Сираджиййа» неоднократно комментировался, в том числе и самим автором.

Во введении ас-Саджаванди указывает важность науки о наследственном праве («илм ал-фара'ид»): «Изучайте правила наследования и обучайте [этим правилам] людей, ибо они [правила] – одна половина полезного знания» [7, с. 11].

В книге рассматриваются многие юридические положения науки о наследственном праве, включая препятствия к получению наследства (в частности, иное вероисповедание), учение о долях и лицах, имеющих на них право, о разделе имущества среди наследников и среди кредиторов, о случаях возврата, о классах наследников и о дальних родственниках.

Чтобы иметь представление о математической составляющей сочинений о наследственном праве, подобных «Сираджиййи», рассмотрим более детально некоторые элементы этого сочинения, относящиеся к арифметике дробей, характеризующейся в данном случае специфической лексикой и отличной от математической логикой рассуждений и умозаключений.

Указывая, что, согласно Корану, наследственных долей шесть (половина, четверть, восьмая, шестая, две третьих и одна третья), ас-Саджаванди подразделяет их на два вида: три, в нашей терминологии, со знаменателем, представляющим собой степени 2, и три – одна треть и две доли, получающиеся из нее удвоением и раздвоением.

Далее ас-Саджаванди приводит для этого набора долей правило (1), согласно которому, имущество делится на число частей, равное, в современной терминологии, наименьшему общему знаменателю любого набора наследственных долей, случившихся вместе: «когда половина, которая есть доля первого вида, смешивается со всеми долями второго вида или некоторыми из них, то деление имущества должно быть на шесть; когда четвертая доля смешивается со всеми долями второго вида или несколькими из них, то деление должно быть на 12; и когда восьмая доля смешивается со всеми долями второго вида или некоторыми из них, то это должно быть на 4 и 20 частей» [7, с. 29]. Как уже отмечалось, это правило молчаливо применяется в решениях многих наследственных задач из «Алгебры» ал-Хорезми.

¹⁵Из-за сложности расчетов и относительно большого количества стихов Корана, связанных с разделом наследства, «илм ал-фара'ид (наука о наследственном праве) рассматривалась исламскими правоведами как особенно доходная область права, что обуславливало написание соответствующих работ.

¹⁶В 1792 г. в Калькутте индийской ветвью издательской компании «Thacker & Company» (Лондон) – «Thacker, Spink & Company» – был опубликован первый английский перевод «Сираджиййи», выполненный английским филологом и юристом У. Джонсом (1746–1794). В 1869 и 1890 гг. там же последовали два переиздания этого перевода с введением и примечаниями А. Рамси (1825–1899), адвоката и профессора индийской юриспруденции в Королевском колледже Лондонского университета. Эти переиздания использовались в судах Британской Индии. Заметим, что часть тиража издания 1831 г. первого английского перевода «Алгебры» ал-Хорезми, осуществленного немецким ориенталистом Ф. Розеном, была распространена в Калькутте также компанией «Thacker & Company» [6].

¹⁷Напомним, что ал-Хорезми принадлежит арифметический трактат под названием «Книга об индийском счете», в которой впервые систематически излагается индийская позиционная система записи чисел, используется ноль для обозначения пустого разряда, а также рассматриваются различные арифметические методы.

Следующее правило (2) относится к случаю, когда сумма всех долей есть некоторая неправильная дробь. В используемом нами английском переводе «Сираджийи» это правило названо «увеличением» («increase»). Это – то же самое правило, что и правило, называющиеся «отклонением» («deviation», араб. «ал-‘аул») в статье С. Гандза [4, с. 331] (см. наш комментарий ко второму примеру из «Алгебры» ал-Хорезми). Напомним само правило: если сумма числителей долей больше, чем знаменатель, последний увеличивается так, чтобы быть равным этой сумме.

Затем приводится список специальных терминов для обозначения отношений между числами:

- 1) для равенства двух чисел – «тамасул» (араб. «идентичность, сходство»);
- 2) тадахул (араб. «взаимопроникновение») – для случая, «когда меньшее из двух чисел точно измеряет большее, или исчерпывает его; ... когда большее из двух чисел точно делится меньшим; или мы можем определить это так, когда большее превышает меньшее на одно число, равное ему [меньшему], или более... или когда меньшее есть аликвотная часть большего, как 3 для 9» [7, с. 31];
- 3) «тавафук» (араб. «соответствие, согласие») – согласие двух чисел, когда «меньшее точно не измеряет большее, но третье число измеряет их оба, как 8 и 20, каждое из которых измеряется 4; они согласуются в четвертой, поскольку число, измеряющее их, есть знаменатель дроби общей для них» [7, с. 31], то есть речь идет о соизмеримости двух чисел;
- 4) «табайун» (араб. «различие, противоречие, несоразмерность») – «когда нет третьего числа как-либо измеряющего два несогласующихся числа, [таких] как 9 и 10» [7, с. 31], здесь под «несогласием» двух чисел, очевидно, подразумевается их несоизмеримость.

Обратим внимание, что данная терминология отличается от терминологии, принятой в теоретической арифметике того времени (по «форме» и смыслу совпадает лишь термин «табайун», означающий в математике «несоизмеримость»). Приведенные термины можно рассматривать как своеобразные юридическо-арифметические эквиваленты соответствующих математических терминов.

Еще одно правило (3) описывает «способ познания согласия и несогласия между двумя количествами» и равносильно методу нахождения наибольшего общего делителя двух чисел с помощью последовательного вычитания¹⁸: «большее уменьшается меньшим количеством с двух сторон одинажды или больше[е число раз], пока они не согласуются в одном пункте; и если они согласуются только в единице, между ними нет числового согласия; но если они согласуются в каком-либо числе, то они согласуются в дроби, у которой это число знаменатель» [7, с. 32].

Отметим также правило (4) «установки»¹⁹ наименьшего общего знаменателя долей наследников для случаев, когда имеется несколько претендентов на определенную долю, например, несколько жен, которым полагается $1/8$ наследства, или несколько сестер, претендующих на $2/3$ наследства. Это правило состоит из 7 положений.

Рассмотрим второе положение (4.2) правила «установки»: «если доли одного класса [наследников] дробные, при этом есть согласие между их частями и их лицами, то мера числа лиц, доли которых дробные, должна быть умножена на корень (то есть знаменатель. – И.Л.) случая и его увеличение (ал-‘аул), если это случай увеличения» [7, с. 33].

Применим это положение к конкретной проблеме: мужчина оставляет наследство роди-

¹⁸Заметим, что Евклид, изложивший метод нахождения наибольшего общего делителя двух чисел a и b , известный как алгоритм Евклида, в книге VII (предложения 1, 2) «Начал», также не делит a на b , а вычитает b последовательно несколько раз из a , пока не получит остаток $c_1 < b$, таким же образом вычитает из b несколько раз c_1 , пока не получит $c_2 < c_1$ и т.д. Применение вычитания Евклидом объясняется тем, что любые операции над числами он мыслил геометрически, представляя числа в виде отрезков.

¹⁹Переводчик «Сираджийи» У.Джонс перевел арабское слово для названия этого правила как «arrangement», не найдя соответствующего арифметического термина.

телям и 10 дочерям. В этом случае отец должен получить законную $1/6$ долю наследуемого имущества, мать – также $1/6$, 10 дочерей – $2/3$ или $4/6$ (по правилу 1).

Следуем положению 4.2:

- 1) по правилу 3, 10 (число дочерей) согласуется с 4 (число наследуемых ими частей) в 2 (другими словами, наибольший общий делитель 10 и 4 есть 2);
- 2) тогда мера числа лиц²⁰ будет $10 : 2 = 5$;
- 3) и наконец, 5 (мера числа лиц) умножается на корень (знаменатель) 6 и получается 30;
- 4) в таком случае 30 – наименьший общий знаменатель наследуемых долей $1/6$, $1/6$ и $1/15$, следовательно, наследство надо разделить на 30 частей, при этом мать и отец получают по 5 частей, 10 дочерей – по 2 части.

Заметим, что в пунктах 1)–3) фактически находится доля одной дочери:

$$\frac{4}{10 \cdot 6} = \frac{2}{5 \cdot 6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

Арифметические методы «Сираджийи» излагаются в контексте правовых положений, которые регулируют распределение наследства при наличии тех или иных ситуаций (при наличии долга, излишка наследуемого имущества, в случае возврата наследства) и с учетом различных жизненных обстоятельств (количества наследников, степени родства, гендерной принадлежности (особый случай – случай гермафродита), беременности (поскольку пол ребенка еще не известен) и др.). В результате такого «сосуществования» арифметических и юридических правил, характерных для подобных «Сираджийи» трактатов, создавались новые методы представления, расчета и решения проблем наследования, создавалась «арифметика наследования».

5. Алгебра в классификации наук ал-Фараби

Продолженные и расширенные в IX в. исследования, указанные во введении, привели к двум фундаментальным эпистемологическим результатам: новой классификации наук и новой концепции энциклопедии знаний. Ведущую роль в этой новой классификации среди математических наук играла алгебра. Этот факт нашел отражение в трактате «Перечисление наук» («Ихса' ал-'улум») выдающегося ученого-энциклопедиста (математика, астронома, теоретика музыки, одного из крупнейших представителей восточного перипатетизма с элементами неоплатонизма) Абу Насра Мухаммада ибн Мухаммада ал-Фараби (872–950). Известный в средневековой арабской философской традиции как «Второй учитель» после Аристотеля, ал-Фараби органично объединил в своей классификации греческие науки и исламские дисциплины.

К математическим наукам кроме традиционного квадривиума – арифметики, геометрии, астрономии и музыки – он относит также оптику, науку о весах и так называемую науку об искусных приемах ('илм ал-хийал)²¹.

В отличие от Аристотеля, ал-Фараби подразделяет арифметику, геометрию и музыку на практическую и теоретическую. Так, теоретическая арифметика²² (по сути, теория чисел)

²⁰ Термин «мера числа» не определяется ас-Саджаванди, тем не менее, как следует из текста трактата, это – частное от деления одного из двух чисел (в данном случае числа сестер) обладающих наибольшим общим делителем (находящихся в согласии) на этот делитель.

²¹ «Наука об искусных приемах» ал-Фараби – это «учение о том, каким образом надо поступать, чтобы привести в соответствие и воплотить в естественных телах все то, чье существование доказано в математических науках путем рассуждений и доказательств», учение, дающее «разные способы и приемы для нахождения искусственным путем применения математики на практике в естественных и ощущаемых телах» [8, с. 31–33]. Эта совокупность дисциплин, которые в большинстве своем будут известны впоследствии как науки «смешанные» (мумтазадж, термин встречается у Ибн Сины) или «промежуточные» (mediae у Фомы Аквинского), включает искусство руководства строительством, «искусные приемы» измерения различных видов тел, изготовления различных инструментов и приборов для различных ремесел, в том числе зеркал и весов, то есть то, что мы бы назвали инженерными и прикладными науками.

²² Примечательна философская интерпретация ал-Фараби причин возникновения арифметики, представлен-

изучает «числа в абсолютном смысле, отвлеченные разумом от тел и всего, что поддается в них счету... числа здесь выступают как общие как для воспринимаемых, так и для не воспринимаемых чувствами предметов; эта наука проникает во все науки» [8, с. 17–18]. Теоретическая арифметика изучает «все то, что присуще их [чисел] индивидуальным сущностям, без соотнесения одних к другим» (то есть свойства чисел), изучает то, «что свойственно им при соотнесении одних к другим» (то есть различные отношения между числами), изучает операции над числами и «все то, что вытекает из этого при соотнесении одних к другим, и объясняет, каким образом числа находятся по каким-то неизвестным числам» [8, с. 18–19]. Практическая арифметика (‘илм ал-‘адад ал-‘амали), по ал-Фараби, изучает число конкретных пересчитываемых предметов и применяется в торговых и гражданских делах. К гражданским делам (му‘амалат маданийа), относятся и проблемы раздела наследства. Таким образом, расчет долей наследства с помощью арифметики ал-Фараби рассматривается как раздел математики.

В «Книге букв» ал-Фараби утверждает: «Вещью можно назвать любую вещь, которая обладает чтойностью (лат. “quidditas”. – И.Л.), независимо от того будет ли она внешней по отношению к душе или просто мыслимой каким-либо образом... сущее же всегда сказывается о любой вещи, обладающей чтойностью, внешней к душе, и не может сказываться о чтойности, только умозрительной. На этом основании вещь – более общее понятие, чем сущее» [10, с. 21].

Интересны комментарии Х. Тахири к этим рассуждениям ал-Фараби, собственно и обратившего наше внимание на них: «... ал-Фараби нападает на старую метафизику [Аристотеля], утверждая поразительное, что вещь – более общая, чем сущее. Это как если бы то, что можно назвать наукой о вещи, было бы более универсальным, чем наука о бытии [метафизика]. Есть ли наука, чьим объектом является вещь? Традиционный философ, знания которого ограничены греческим научным и философским результатом, был бы озадачен, услышав, что есть что-то, подобное науке о вещи. Он потерпел бы поражение, если бы попытался найти подобную в классификации наук ал-Фараби, поскольку не мог знать, что автор “Перечисления наук” поместил ее в новую категорию под названием “наука о искусных приемах”» [10, с. 21].

Итак, если, как утверждает ал-Фараби, вещь – более универсальное понятие, чем сущее, то если бы была «наука о вещи», она была бы более универсальной, чем наука о сущем, то есть метафизика.

Однако ал-Фараби не только не отрицает универсальность метафизики, но, следуя Аристотелю, утверждает это в своем трактате «Цель “Метафизики”»: эта наука «рассматривает то, что присуще всему сущему» и ее первый предмет – «абсолютное бытие, подобное всеобщности, а именно, единое» [11, с. 335–337]. Более того, ал-Фараби утверждает единственность универсальной науки, поскольку «если бы их было две, то каждая из них должна была бы иметь отдельный предмет исследования и не охватывать предмет какой-либо другой науки, то есть являться частной. В этом случае обе эти науки были бы частными, а это вызвало бы противоречие» [11, с. 335–337].

Несмотря на это, «наукой о вещи», образно говоря, оказывается алгебра – относительно новая во времена ал-Фараби математическая дисциплина, в рамках которой формируется новая математическая объединяющая концепция – «алгебраическое неизвестное», для обозначения которого ал-Хорезми и применил арабский термин «шай», то есть «вещь». Ал-Фараби относит алгебру к числовым приемам, входящим в его «науку об искусных приемах», и характеризует

ная в его трактате «О происхождении наук»: «... число, которое представляет собой множество, составленное из единиц, возникло благодаря тому, что субстанция может быть разделена многими способами, и содержит различные части. Так как субстанция по своей природе может быть потенциально разделена до бесконечности, то и число потенциально бесконечно. Наука о числе – это наука об умножении одних частей субстанций на другие, о делении одних на другие, о прибавлении одних к другим, об отнятии одних от других, о нахождении корня всех тех частей, которые имеют корни, о нахождении их пропорций и т. д. Отсюда ясно, каким образом было получено число, откуда оно возникло и стало умножаться, какова была причина, благодаря которой оно получило бытие, перешло от возможности к действительности и от небытия к бытию. Эту науку греческие мудрецы называют арифметикой» [9, с. 92–93].

эту дисциплину как «общую и для чисел, и для геометрии» [8, с. 33].

Особенности предмета алгебры ал-Фараби описывает следующим образом: «Она [алгебра] содержит искусные приемы нахождения и применения чисел, основы которых для рациональных и иррациональных величин даны в десятой книге “Начал” и в том, что не упомянуто Евклидом. Поскольку рациональные и иррациональные величины относятся одни к другим, как числа к числам, то каждое число будет соответствовать рациональной или иррациональной величине. Если находятся числа, которые соответствуют некоторым величинам, находящимся в пропорции, то каким-то способом найдутся и эти величины. Поэтому мы постулируем, что определенные рациональные числа соответствуют рациональным величинам, а определенные иррациональные числа соответствуют иррациональным величинам»²³ [8, с. 33–34].

Из этого фрагмента следует, что коэффициентами алгебраических уравнений могут быть не только натуральные числа, но и непрерывные геометрические величины. Более того, появление у ал-Фараби терминов «рациональные числа» и «иррациональные числа», а также его утверждение, что отношения несоизмеримых величин соответствуют отношениям натуральных чисел, свидетельствуют о том, что под числами он понимает не только натуральные числа.

Тот факт, что алгебра применяется в равной мере в двух науках – арифметике и геометрии, алгебраическая «вещь» – современное алгебраическое неизвестное – может быть и числом и геометрической величиной, противоречит, однако, тезису Аристотеля о несоизмеримости видов, лежащему в основе его классификации наук, другими словами, тезису о недопустимости перехода от одной науки к другой в процессе доказательства: «Нельзя доказать посредством одной науки положения другой, за исключением тех случаев, когда науки так относятся друг к другу, что одна подчинена другой, каково отношение, например, оптики к геометрии и гармонии – к арифметике» (Аристотель, «Вторая аналитика», 75a14–16). Аристотель отрицает возможность взаимодействия не только различных наук, но также и наук в рамках одной научной дисциплины (об этом более подробно см. [14; 15]).

Ал-Фараби осознавал далеко идущие философские последствия переосмысления математики. Появление новых математических дисциплин, таких как практическая арифметика, алгебра, «наука об искусных приемах» определило необходимость новой классификации наук и неаристотелевской онтологии, позволяющей познавать объект без возможности точного представления о нем.

6. Заключение

Изложенные факты свидетельствуют о появлении и существовании особой научной традиции, характерной исключительно для средневековой арабо-мусульманской науки и заключающейся во взаимодействии арифметики и алгебры с наукой о наследственном праве или наукой о расчете долей наследства (‘илм ал-фара’ид). Оформившаяся в VIII в. в рамках мусульманского гражданского права эта дисциплина, правила которой определяются предписаниями Корана и Сунны, участвовала в формировании одного из разделов алгебры – «алгебры наследования». И «арифметика наследования» и «алгебра наследования» основываются на разрабатываемых в наследственном праве правилах, регулирующих размер законных долей и ограниченный объем завещанного наследства с учетом различных жизненных обстоятельств. «Алгебра наследования», в отличие от «арифметики наследования», имеет дело не с простыми случаями распределения законных долей, которые могут быть решены с помощью элементарных арифметических операций с дробями, но с более сложными случаями деления

²³Представленный перевод этого фрагмента основан на русском переводе А. Кубесова и И. О. Мохаммеда арабского текста этого фрагмента [8, с. 33–34] и русском переводе Г. П. Матвиевской средневековой латинской версии [12, с. 246]. Несколько отличный английский перевод дан в [13, с. 168].

наследства, решение которых производится с помощью алгебраических методов, сводящихся к линейным и неопределенным уравнениям, при этом юридические стороны решаемых проблем не затрагиваются. Такая «алгебра наследования» составляет большую часть написанной в первой четверти IX в. «Краткой книги об исчислении алгебры и алмукабалы» выдающегося среднеазиатского математика ал-Хорезми. Наследственное право разрабатывалось в процессе формирования различных религиозно-правовых школ и становления норм исламского права. Учеными-правоведами, представителями этих школ, составлялись трактаты по наследственному праву с VIII в. В таких сочинениях, подобно наиболее значимой из них «Сираджийи» ас-Саджаванди (XII в.), арифметические правила расчета долей наследников рассматривались в контексте общего наследственного права и принятых в нем положений. В итоге, средневековые исламские юристы-математики и математики получали новые методы представления, расчета и решения наследственных проблем, сочетающие элементы таких неродственных дисциплин, как юриспруденция и математика, создавая научную традицию, основанную на сосуществовании математической и юридической дисциплин.²⁴

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лютер И. О. Алгебра в классификации наук ал-Фараби // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова (28–31 мая 2018). Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 358–360.
2. Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми. Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы / Пер. Б. А. Розенфельда // Математические трактаты. Ташкент: Фан, 1983. С. 20–81. 306с.
3. Коран / Перевод с араб. акад. И. Ю. Крачковского; предисл. к изд. 1986 г. П. Грязневича; предисл. к изд. 1963 г. В. Беляева. М.: АНС-Принт, 1990. 512 с.
4. Gandz S. The Algebra of Inheritance: A Rehabilitation of Al-Khuwarizmi // Osiris. 1938. Vol. 5. P. 319–391.
5. Rashed R. Classical Mathematics from Al-Khwarizmi to Descartes / Transl. by M. H. Shank // Culture and Civilization in the Middle East Series: vol.44. London and New York: Routledge, 2015. 749 p.
6. The Algebra of Mohammed ben Musa. Edited and translated by Frederic Rosen. London: J.L. Cox, 1831.
7. Al-Sirajiyah or the Mahommedan law of inheritance / Repr. from the transl. of Sir W. Jones, published in Calcutta, in 1792; with notes and appendix of A. Rumsey. Calcutta–Bombay: Thacker, Spink, and Co., 1890.
8. Аль-Фараби. Перечисление наук (математика) // Математические трактаты. Алма-Ата: Наука, 1972. С. 17–51.
9. Аль-Фараби. О происхождении наук // Естественные-научные трактаты. Алма-Ата: Наука, 1987. С. 89–104.
10. Tahiri H. Mathematics and the Mind. An Introduction into Ibn Sina's Theory of Knowledge. Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer, 2016. 75 p.

²⁴ Дальнейшее развитие этой традиции в работах йеменского ученого Абу Якуба Юсуфа ас-Сардафи (ум. 1105) и тунисского ученого Абу ал-Хасана ибн 'Али ал-Каласади (ум. 1486) проанализировано в [16].

11. Аль-Фараби. О целях Аристотеля в «Метафизике» // Историко-философские трактаты. – Алма-Ата: Наука, 1985. С. 331–341.
12. Матвиевская Г. П. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. Ташкент: Фан, 1967. 344 с.
13. Rashed R. Philosophy of mathematics // The unity of science in the Arabic tradition: science: logic, epistemology and their interactions / Ed by S. Rahman, T. Street, H. Tahiri. Vol. 11. Berlin: Springer, 2008. P. 153–182.
14. Лютер И. О. Классификация наук ал-Фараби и комментариев ал-Хайсама к теории отношений Евклида // Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании: сборник докладов Международной школы-конференции молодых ученых (Москва, 12–15 декабря 2016 г.). Москва: МИРЭА, 2016 г. С. 186–187.
15. Лютер И. О. Вводные комментарии Ибн ал-Хайсама к пятой книге «Начал» Евклида // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 16(51). Москва: Янус-К, 2018. С. 240–265.
16. Rebstock U. Arithmetik (Hisab) und Erbteilungslehre ('Ilm al-fara'id). Symbiose einer islamischen Wissenschaftsdisziplin // Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften. Bd. 18. Frankfurt am Main: Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, 2008/2009. S. 269–295.

REFERENCES

1. Lyuter, I.O. 2018, “Algebra in the classification of sciences of al-Farabi”, *Materialy XV mezhdunarodnoi konferenzii “Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennyye problemy i prilozheniya”* [Proceedings of the XV International Conference «Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications»], Tula, pp. 358–360.
2. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi. 1983, “Kratkaja kniga ob ischislenii algebrы i almukabaly” [“The brief book on calculation of algebra and almuqabala”], Russian transl. by B.A. Rosenfeld, *Matematicheskie traktaty* [Mathematical treatises], Fan, Tashkent, pp. 20–81.
3. *Quran*, 1990, Trans. by I.Yu. Krachkovskii, ANS-Print, Moscow, 512 p.
4. Gandz, S. 1938, “The Algebra of Inheritance: A Rehabilitation of Al-Khuwarizmi”, *Osiris*, vol. 5, pp. 319–391.
5. Rashed, R. 2015, *Classical Mathematics from Al-Khwarizmi to Descartes*, Transl. by M. H. Shank, Culture and Civilization in the Middle East Series, vol. 44, Routledge, London and New York, 749 p.
6. *The Algebra of Mohammed ben Musa. Edited and translated by Frederic Rosen*. 1831, Printed for the Oriental Translation Fund, J.L. Cox, London.
7. *Al-Sirajiyah or the Mahomedan Law of Inheritance*. 1890, Repr. from the Transl. of Sir W. Jones, published at Calcutta, in 1792, with Notes and Appendix of A. Rumsey, Thacker, Spink, and Co., Calcutta.
8. Al-Farabi. 1972, “Enumeration of sciences (mathematics)”, *Matematicheskie traktaty* [Mathematical treatises], Nauka, Alma-Ata, pp. 17–51.

9. Al-Farabi. 1987, “O proiskhozhdenii nauk” [“On the origin of sciences”], *Estestvenno-nauchnye traktaty* [Natural science treatises], Nauka, Alma-Ata, pp. 89–104.
10. Tahiri, H. 2016, *Mathematics and the Mind. An Introduction into Ibn Sina’s Theory of Knowledge*, Springer, Heidelberg–New York–Dordrecht–London, 75 p.
11. Al-Farabi. 1985, “O tseljakh Aristotelja v «Metafizike»” [“On Aristotle’s aims in ‘Metaphysics’”] // *Istoriko-filosofskie traktaty* [Historical and philosophical treatises], Nauka, Alma-Ata, pp. 331–341.
12. Rashed, R. 2008, “Philosophy of mathematics”, *The unity of science in the Arabic tradition: science: logic, epistemology and their interactions*, vol. 11. Springer, Berlin, pp. 153–182.
13. Matvijevskaja, G.P. 1967, *Uchenie o chisle na srednevekovom Blizhnem i Srednem Vostoke* [The teaching on number in the medieval Middle and Near East], Fan, Tashkent, 344 p.
14. Lyuter, I. O. 2016, “Classification of sciences of al-Farabi and al-Haytham’s commentary on Euclid’s ratio theory”, *Matematika, fizika, informatika i ikh prilozheniya v nauke i obrazovanii: Sbornik dokladov mezhdunarodnoy shkoly-konferentsii molodykh uchenykh* [Mathematics, physics, computer science and their applications in science and education: Proceedings of the International School Conference of Young Scientists], Moscow, pp. 186–187.
15. Lyuter, I. O. 2018, “Ibn al-Haytham’s introductory commentaries on the fifth book of Euclid’s «Elements»”, *Istoriko-matematicheskiye issledovaniya* [Historical and mathematical investigations], Second Series, Iss. 16(51), Yanus-K, Moscow, pp. 240–265.
16. Rebstock, U. 2008/2009, “Arithmetik (Hisab) und Erbteilungslehre (‘Ilm al-fara’id). Symbiose einer islamischen Wissenschaftsdisziplin”, *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, Bd. 18, Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, S. 269–295.

Получено 10.12.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 539.21:621.785

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-405-423

Исторические аспекты математического анализа диаграмм деформации металлических материалов¹

А. Н. Чуканов, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, П. Н. Медведев, Д. В. Малий,
А. А. Яковенко, И. Ф. Широкий

Чуканов Александр Николаевич — доктор технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Сергеев Александр Николаевич — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: ansergieev@gmail.com

Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

Медведев Павел Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: medvedeff_82@mail.ru

Малий Дмитрий Владимирович — старший преподаватель кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: maliydmiriy@yandex.ru

Яковенко Александра Александровна — кандидат технических наук, инженер-технолог, ООО «Металлург-Туламаш», г. Тула.

e-mail: alexyakovenk@gmail.com

Широкий Илья Федорович — стажер кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: skyshiroky@list.ru

Аннотация

В статье представлена ретроспектива становления и развития одного из методов изучения деформационного упрочнения материалов – математического анализа диаграмм деформации. Подробно рассмотрено важнейшее математически обоснованное направление

¹Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

анализа диаграмм деформации, базирующееся на использовании их перестроения в координатах, обусловленных определёнными модельными представлениями, описывающими процесс деформационного упрочнения. Проиллюстрировано изменение методик анализа кривых растяжения (нагрузка-удлинение) и их математического описания от представлений XVII-XVIII века, работ Л. да Винчи, Р. Гука, И. Ньютона до современности. Описано поэтапное развитие математического описания деформационного упрочнения с использованием диаграмм деформации от феноменологических подходов в рамках теорий Людвига, Холломоны, Жауля-Крюссара до современных физических теорий деформационного упрочнения Дж. Тейлора, Н. Ф. Мотта, Е. Орована, Я. И. Френкеля, Я. Б. Фридмана, А. Зегера, А. Коттрелла, Дж. Рида, базирующихся на анализе эволюции комплексов дефектов строения, результатах металлографически обоснованных тонких металлофизических экспериментов. Дан критический анализ недостатков современных математических методов оценки параметров диаграмм деформации с точки зрения развития деградации и разрушения (повреждаемости) в процессе испытаний. Приведены примеры расчета параметров поврежденности на основе подхода анализа диаграмм деформации Одина И. А., Либера Ю. П., Ровинского Б. М., Рыбаковой Л. М., Блантера М. Е. На примере малоуглеродистой стали проведена экспериментальная апробация использования перечисленных модельных представлений в сравнении с подходами Людвига, Холломоны, Жауля-Крюссара для оценки их соответствия современным представлениям о вкладе деградационных и разрушительных процессов (повреждаемости) в деформационное упрочнение. Выполнен количественный анализ коэффициентов упрочнения, добротности и разрушения, позволивший связать стадийность деформационного упрочнения с параллельным развитием двух основных процессов: трансформацией дислокационной субструктуры и развитием деформационной поврежденности типа микротрещин и пор. Выявлены критические значения деформации, определяющие границы диапазонов резкого изменения параметров деформационного упрочнения и разрушения.

Ключевые слова: металлические сплавы, упрочнение, деформация, математический анализ, диаграмма, растяжение, поврежденность, сталь, математическая модель, разрушение, нагрузка, пластичность.

Библиография: 34 названия.

Для цитирования:

А. Н. Чуканов, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, П. Н. Медведев, Д. В. Малий, А. А. Яковенко, И. Ф. Широкий. Исторические аспекты математического анализа диаграмм деформации металлических материалов // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 405–423.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 539.21:621.785

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-405-423

Historical aspects of mathematical analysis of metal material deformation diagrams²

Chukanov Aleksander Nikolaevich — Doctor of technical sciences, Associate Professor, Leading Researcher of the Chair of Technology and Service of the Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

²The work was carried out within the framework of the Federal target program "Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014–2020" (unique project ID RFMEF 157717X0271).

e-mail: alexchukanov@yandex.ru

Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

Sergeev Aleksander Nikolaevich — Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: ansergueev@gmail.com

Kutepov Sergey Nikolaevich — Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

Medvedev Pavel Nikolaevich — Candidate of Pedagogical Science, Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: medvedeff_82@mail.ru

Maliy Dmitry Vladimirovich — Senior Lecturer of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: maliydmity@yandex.ru

Yakovenko Aleksandra Aleksandrovna — Candidate of Technical Sciences, Process Engineer, “OOO Metallurg-Tulamash” Ltd, Tula.

e-mail: alexyakovenk@gmail.com

Shiroky Ilya Fedorovich — Trainee of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: skyshiroky@list.ru

Abstract

The article presents a retrospective of the formation and development of one of the methods to study the materials strain hardening – mathematical analysis of strain diagrams. Discussed in detail the most important mathematically reasonable direction of the analysis of the diagrams of deformation based on the use of their rebuild in the coordinates, due to the defined model representations, describe the process of strain hardening. The paper illustrates changing of analysis methods of stretching curves (load-elongation) and their mathematical description starting from representations of the 17th–18th centuries in the works by L. da Vinci, R. Hooke, I. Newton up to the present day. A phased development of the mathematical description of strain hardening using strain diagrams from phenomenological approaches within the theories of Ludwik, Hollomon, Jaul-Krussard to modern physical theories of strain hardening by J. Taylor, N.F. Mott, E. Orovana, Ya.I. Frenkel, Ya.B. Friedman, A. Zeger, A. Cottrell, J. Reed, based on the analysis of the evolution of complexes of structural defects, the results of metallographic grounded thin metalphysical experiments. A critical analysis of the shortcomings of modern mathematical methods for estimating the parameters of strain diagrams in terms of the degradation and destruction (damage) development in the testing process is given. For example, mild steel experimental testing of the use of the listed model representations in comparison with the approaches Ludvika, Hollomon, Joule-Crosara to assess their conformity with modern views on the contribution of degradation and destruction processes (damage) to work hardening. The quantitative analysis of the coefficients of hardening, q-factor and destruction, which allowed to link the stages of deformation hardening with the parallel development of two main processes: the transformation of dislocation substructure and the development of deformation damage such as microcracks and pores. The critical values of deformation determining the boundaries of the ranges of sharp changes in the parameters of deformation hardening and destruction are revealed.

Keywords: metal alloys, hardening, strain, mathematical analysis, diagram, tensile, damage, steel, mathematical model, fracture, load, plasticity.

Bibliography: 34 titles.

For citation:

A. N. Chukanov, A. E. Gvozdev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, P. N. Medvedev, D. V. Maliy, A. A. Yakovenko, I. F. Shiroky, 2019, "Historical aspects of mathematical analysis of metal material deformation diagrams", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 405–423.

1. Введение

Диаграммы деформации (или машинные кривые), полученные при испытаниях на одноосное растяжение по ГОСТ 1497-84, являются основной базой экспериментальных результатов, необходимых для анализа свойств и структуры материалов и изделий из них. Методика анализа кривых растяжения (нагрузка-удлинение) и их математическое описание уходят корнями в XVII-XVIII века к работам Л. да Винчи, Р. Гука, И. Ньютона. Несколько тысяч лет задолго рассчитывали прочность, главным образом, опираясь на интуицию. С опытов Леонардо начался экспериментальный период в развитии строительной механики. Галилей свел большой круг вопросов, связанных с прочностью и разрушением материалов, в одну область знания. Он впервые указал на необходимость построения собственной теории, создания собственной науки – сопротивления материалов. Позднее, с появлением понятия «напряжения» (σ) и диаграмм «напряжение-деформация» ($\sigma=f(\varepsilon)$) оформились понятия «условной» ($\sigma=f(\varepsilon)$) и «истинной» ($S=f(e)$) диаграмм деформации. Выделилось обоснованное математически направление анализа этих диаграмм с использованием их перестроения в координатах, обусловленных определёнными модельными представлениями, описывающими процесс деформационного упрочнения [1].

Вначале (XVIII-XIX вв.) это были простые феноменологические модели. По мере совершенствования в XX в. физических представлений о дефектах строения, техники металлофизического эксперимента, методик анализа его результатов был осуществлён переход к физически обоснованным и металлографически (оптически, электронно-микроскопически) подтвержденным теориям деформационного упрочнения Дж. Тейлора, Н.Ф. Мотта, Е. Орована, Я.И. Френкеля, Я.Б. Фридмана, А. Зегера, А. Коттрелла, Дж. Рида [2].

По существу, историография методик математического анализа диаграмм деформации отражает эволюцию взглядов на процессы упрочнения при деформировании материалов. Постепенно выкристаллизовались стандартизованные характеристики механических свойств, определяемые из анализа диаграмм деформации. Прочности: предел прочности, физический (условный) предел текучести. Упругости: модуль упругости (первого и второго рода – Юнга, сдвига), предел упругости. Пластичности: относительное удлинение (упругое, равномерное, сосредоточенное, общее), относительное сужение.

Для металлических материалов (металлов и их сплавов) наиболее часто при анализе условных и истинных диаграмм деформации исследователями используются модели аппроксимации Людвига, Холломоуна, Жауля-Крюссара. Аналитические выражения для описания условной $\sigma - \varepsilon$ или истинной $S - e$ диаграмм деформации оценивают по качеству аппроксимации. Наиболее распространенные представления: Людвига $S = S_0 + Ke^n$; Холломоуна $S = S_0 \cdot e^n$ и производные от них Жауля – Крюссара $dS/de = D_0 \cdot e^{n-1}$ ($D_0 = n \cdot S_0$), описывая изменения вида кривых нагружения, к сожалению не отражают процесс деструкции (накопления повреждений) в деформируемом металле.

Для получения более надежных сведений о механизмах пластического течения и накопления деформационной повреждаемости в 60-х годах советскими учеными Одингом И.А., Либеровым Ю.П., Ровинским Б.М., Рыбаковой Л.М., Блантером М.Е. был проведен ряд исследований [3-8]. Главным инструментом исследований являлось подробное аналитическое и графическое изучение механизма, формирующего соотношения истинных напряжений и деформаций, получаемых в ходе статического и усталостного разрушения. Для экспериментов использовали образцы сталей различных составов, медь, алюминий, никель, армко-железо,

сплавы на основе никеля, меди и др. в различных состояниях.

В работе [9] было показано, что при статическом растяжении величины истинных напряжений течения S в алюминии и малоуглеродистой стали определяются величинами субзерен и блоков ε в металле и соотношение между ними выражается следующей формулой

$$S = \alpha \cdot \varepsilon^{-1/2} \quad (1)$$

При анализе экспериментальных данных работы [7] авторами была выявлена простая зависимость между истинной остаточной деформацией δ и величиной блоков ε , из которой, принимая во внимание (1), следует, что истинные напряжения в металлическом образце при простом растяжении находятся в следующем соотношении с истинной остаточной деформацией

$$S = S_e + \gamma \cdot \delta^{1/2}, \quad (2)$$

где S_e – физический предел упругости, т.е. напряжение ниже которого при данной скорости деформирования в металле не происходят структурные изменения, а γ – коэффициент пластичности ($\gamma = 1/\delta$, где δ – интенсивность деформационного упрочнения).

Данные, полученные из экспериментов на статическое одноосное растяжение, были использованы для построения диаграмм в координатах $S - \delta^{1/2}$, где S – истинное напряжение, δ – истинная остаточная деформация.

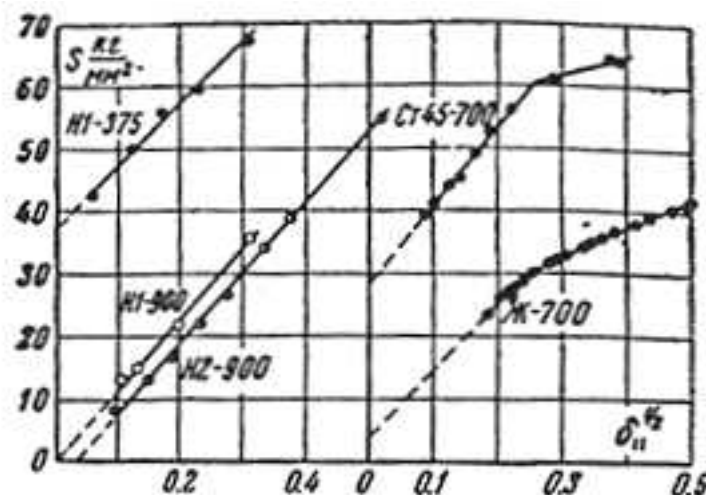


Рис. 1. Диаграммы растяжения никеля (Н1, Н2), армо-железа (Ж) и стали 45 (Ст45) в координатах $S - \delta^{1/2}$ (цифры у марок – температура предварительного отжига) [10].

В результате проведенных экспериментов и анализа указанных диаграмм было обнаружено, что на диаграммах в параболических координатах в области пластической деформации наблюдаются один или два прямолинейных участка (рис. 1).

Было высказано предположение о возможной связи выявленной стадийности S (5) с развитием поврежденности. Для анализа этого предположения изучали соотношение напряжений и деформаций при циклическом нагружении [11]. В результате экспериментов на образцах технического железа зафиксировали три линейных участка (рис. 2).

Исследование этих диаграмм, а также металлографические исследования (рис. 3) показали, что характер их определяется механизмом пластической деформации и кинетикой деструкции материала. Основной вывод, к которому приводят авторов их дальнейшие исследования

показывает, что процесс деформирования можно разделить условно на три основные стадии накопления микроразрушений, каждая из которых характеризуется определенным механизмом и степенью развития (рис. 4).

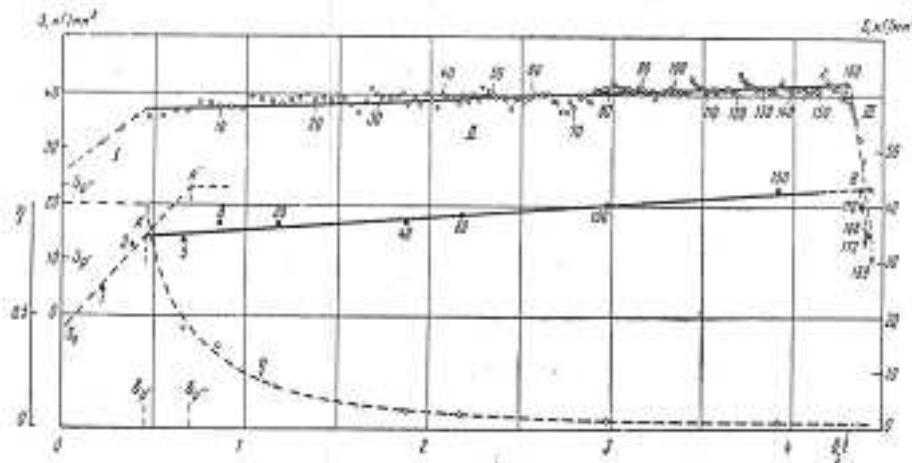


Рис. 2. Диаграмма знакопеременной деформации образцов из технического железа в координатах $S - \delta^{1/2}$ [10].

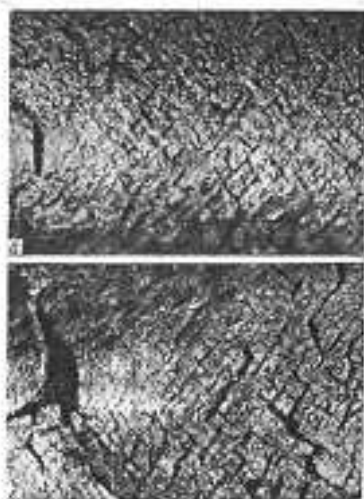


Рис. 3. Микрофотографии поверхности образца $\times 30$: а – после 120 полных циклов сжатия и растяжения; б – после 166 полных циклов [10].

На первом участке (рис. 4) процесс деформации практически полностью пластический. На этой стадии вся или подавляющая часть деформации обусловлена движением и размножением дислокаций.

На втором линейном участке накопление изменений, отражающих пластическую компоненту макроскопической остаточной деформации твердого тела, резко снижается. При этом на механизм деформации значительное влияние начинает оказывать развитие нарушений сплошности и образование микротрещин. Этот этап определяется в основном деформацией пластико – деструкционного характера.

На третьем участке деформация в подавляющей части деструкционная и при этом она постепенно локализуется в узкой области концентрации напряжения продвижения магистральной трещины, что приводит к окончательному разрушению растягиваемого образца.

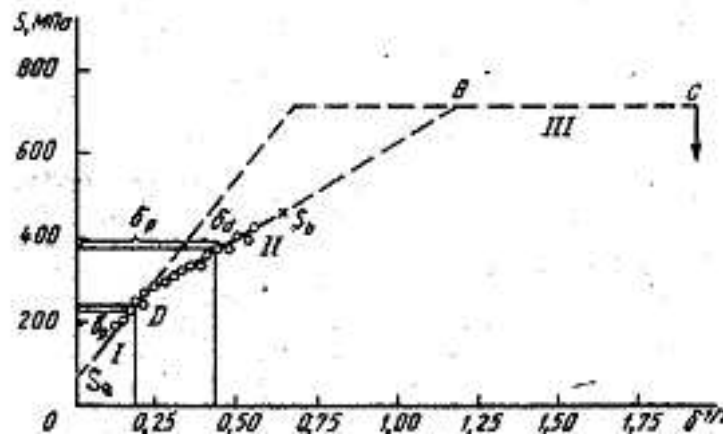


Рис. 4. Полная диаграмма растяжения железа в координатах $S - \delta^{1/2}$ [11].

В работах Л. М. Рыбаковой с сотрудниками [11] была предложена классификация выявленной стадийности участков кривой нагружения. Точка, разделяющая первый и второй участки (точка D рис. 4) была предложена как характеристика деформационной деструкции. Физическая сущность этой характеристики – начало развития деструкционного процесса пластического деформирования. Значения этой характеристики изменяются для разных материалов в широкой области. Так точка начала деструкции наблюдается для алюминия при 5% остаточной деформации, для железа при 8%, для меди при деформации $> 30\%$.

Авторами [11] было предложено выделить в общей остаточной деформации за точкой D две компоненты: пластическую $\delta_{@}$ (не связанную с микроразрушениями) и деструкционную δ_d (определяемую развитием микротрещин). Параметры диаграммы $S - \delta^{1/2}$ позволяют выявить изменение соотношения пластической и деструкционной составляющих с ростом деформации: уменьшение пластической и увеличение деструкционной составляющих, уменьшение коэффициента деформационного упрочнения – угол наклона отрезков $S - \delta^{1/2}$.

Такой анализ диаграмм растяжения позволяет характеризовать состояние твердого тела при заданной остаточной деформации следующими параметрами поврежденности (рис. 5): η – коэффициентом добротности:

$$\frac{\delta_{@}}{\delta} = \eta, \quad (3)$$

и $\Delta = \eta^{-1} - 1$ – коэффициентом деструкции:

$$\frac{\delta_d}{\delta_{@}} = \Delta, \quad (4)$$

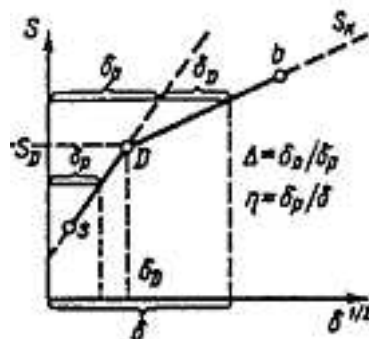


Рис. 5. Схема определения характеристик поврежденности η и Δ [11].

(Приведена символика оригинала статьи [11])

Цель работы: оценить применимость перечисленных моделей, учитывающих процесс деформации с классическими представлениями Людвики, Холломоны, Жауля-Крюссара для анализа диаграмм деформации. В качестве объектов использовали образцы сталей Ст3, 05, 45, 25Г2, У7. Основным объектом являлись образцы малоуглеродистой стали Ст3, обладающей протяженной областью равномерной и сосредоточенной деформации, удобной для графического и аналитического анализа структурной деградации.

Стадийность деформационного упрочнения углеродистых сталей часто изучают, применяя следующие аналитические зависимости:

$$S = S_0 + K_1 \cdot e^m; \quad (5)$$

$$S = K_2 \cdot e^n, \quad (6)$$

где S и e – истинные напряжение и деформация; S_0 , K_1 , K_2 , m , n – постоянные.

Основная идея. Параметры, входящие в выражения (5) и (6), не имеют строгого физического смысла. Величины m и n трактуют как показатели или коэффициенты деформационного упрочнения, а коэффициенты K_1 и K_2 – как показатели скорости деформационного упрочнения. Данные о преимуществах того или иного уравнения в литературе противоречивы. По мнению авторов [8], более достоверным является уравнение (5), по мнению авторов [12,13] – уравнение (6). Кроме того, при описании кривых упрочнения многих металлов используют также параболическое уравнение [14,15]:

$$S = S_{\infty} + qe^{1/2}, \quad (7)$$

где S_{∞} и q – постоянные. В отличие от (5) и (6) уравнение (7) можно вывести теоретически [14].

2. Механические испытания

Одним из процессов, позволяющих осуществить переход материала в предельное состояние, является деформация. Деформацию путем статического одноосного растяжения проводили на испытательной машине Р-5 (масштаб записи диаграмм 50:1 со скоростью $1 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$) и волочением через калиброванные фильеры. Результаты, полученные в ходе предварительных нагружений и собственно испытаний, использовали для получения характеристик упругости, прочности, пластичности и вязкости.

Измерения после растяжения осуществляли в соответствии с ГОСТ 1497-84 при комнатной температуре с записью диаграммы деформации. Для испытаний на статическое растяжение использовали 5-ти и 10-ти кратные (l/d) гладкие цилиндрические образцы из сталей марок Ст3, 05, 45, 25Г2, У7 диаметром 5 мм и расчетной длиной 25 мм и образцы из стали марки Ст3, диаметром 8 мм и расчетной длиной 90 мм. Образцы изготавливали из прутков в состоянии поставки: подвергнутых горячей прокатке (охлаждение на воздухе), а также отожженных (табл.1).

Механические свойства исследуемых сталей
в состоянии поставки

Таблица 1.

Марка стали	Характеристика			
	НВ	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_b , МПа	δ_5 , %
Ст3	100	195	360	22*)
05	125	295	440	35
45	143	300	635	29
У7	187	325	765	7
25Г2	200	600	630	13

*) δ_{10}

Основные исследования осуществляли в области равномерной деформации, предполагая, что на этом участке объем металла практически постоянен.

Из диаграмм деформации, обработанных по стандартным методикам, определяли характеристики упругости (статический модуль нормальной упругости $E = \sigma/\epsilon = \frac{P \cdot l_0}{F_0 \cdot \Delta l}$; пределы пропорциональности $\sigma_{p,Fi}$ и упругости $\sigma_{0,05}$); прочности (условный предел текучести $\sigma_{0,2}$ и предел прочности σ_2), а также характеристики пластичности относительное сужение $\psi = \frac{F_0 - F_2}{F_0}$ и относительное удлинение при разрыве $\delta = \frac{l_2 - l_0}{l_0} \cdot 100\%$) и вязкости (рис. 6).

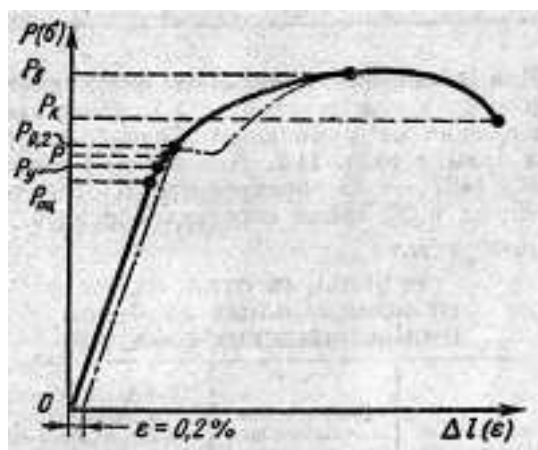


Рис. 6. Характерные участки и точки диаграммы растяжения. (На рисунке совмещены диаграммы с постепенным и резким переходом в пластическую область).

Кроме стандартных характеристик определяли параметры деформационного упрочнения и деформационной поврежденности.

3. Определение параметров деформационного упрочнения

В результате испытаний на растяжение получали машинную кривую растяжения в координатах $P - \Delta l$. Для определения параметров деформационного упрочнения машинную кривую растяжения перестраивали за площадкой текучести (при ее наличии) или за условным пределом текучести в параболических координатах $S - e^{1/2}$ по методике [2, 6]:

$$S_i = \frac{P_i(l_0 + \Delta l_i)}{F_0 \cdot l_0}, \quad (8)$$

$$e_i^{1/2} = \sqrt{\ln(1 + \frac{\Delta l_i}{l_0})}, \quad (9)$$

где S_i , $e_i^{1/2}$, P_i , Δl_i – текущие значения истинного напряжения, истинной остаточной деформации, нагрузки, удлинения образца соответственно; l_0 и F_0 – начальные длина образца и площадь его поперечного сечения.

Таким образом получали линеаризованную диаграмму деформации. Полученные линейные участки с различным наклоном с использованием линейного регрессионного анализа аппроксимировали линейными зависимостями вида $y = ax + b$, где $b = S_{0i}$ – напряжение, необходимое для продолжения деформационного упрочнения с заданной интенсивностью от нулевой деформации; $a = K_i$ – коэффициент деформационного упрочнения на соответствующем участке. Коэффициенты a и b получали с использованием программ *Statgraphics*, *Statistica* и электронных таблиц “*EXCEL*”.

4. Оценка поврежденности. Определение характеристик деформационной деструкции

Характеристики поврежденности S_D , e_D , Δ , η определяли из испытаний на одноосное растяжение, анализируя линеаризованные диаграммы деформации (рис. 6) в соответствии с методикой [2,6] по формулам (10) и (11).

Параметры диаграммы S – $e^{1/2}$ [6] позволяли выявить: 1) характерные участки упрочнения; 2) параметры упрочнения на данных участках; 3) соотношение пластической и деструкционной компонент деформации.

Такой анализ диаграмм растяжения позволяет характеризовать состояние твердого тела при заданной остаточной деформации следующими коэффициентами:

$$\frac{e_{\text{д}}}{e} = \eta, \quad (10)$$

$$\frac{e_d}{e_{\text{д}}} = \Delta, \quad (11)$$

где η – коэффициент добротности; $\Delta = \eta^{-1} - 1$ – коэффициент деструкции (рис. 5). Далее для обозначения диаграмм $S(\delta)$ использовали обозначения $S(e)$.

В соответствии с целью в данной работе провели экспериментальную проверку выражений (5) – (7). Машинные кривые перестраивали в истинных координатах в соответствии с методикой [16]. На рис. 7 представлена типичная диаграмма деформации стали Ст3 в истинных координатах. Явно фиксируется площадка текучести. Часть диаграммы за ней может быть описана одним из представленных выше параболических выражений.

Для аппроксимации кривых растяжения и вычисления параметров, входящих в уравнения (5) – (7), истинные диаграммы перестраивали так, чтобы графически они были представлены линейными зависимостями. Так, достоверность выражения (7) проверяли путем перестройки кривой растяжения в координатах $S - e^{1/2}$ (рис. 7).

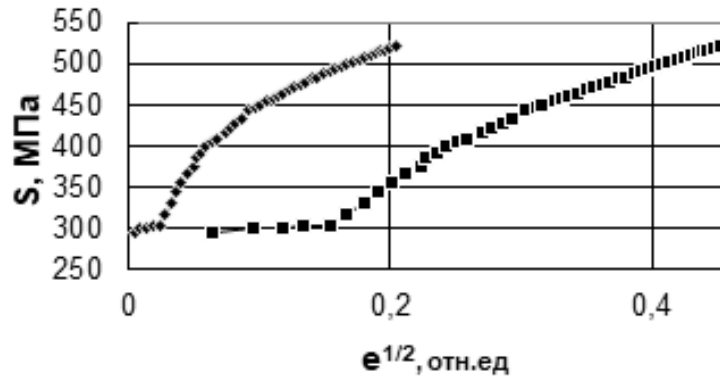


Рис. 7. Диаграммы деформации стали Ст.3 в координатах $S - e$ и $S - e^{1/2}$.

Как видно, экспериментальные точки хорошо укладываются на три прямолинейных отрезка с разными значениями параметров S_0 и q (табл.2, строка1), что свидетельствует о стадийности упрочнения во время деформирования. Переход от одной стадии к другой происходит при деформациях $e_{\text{ж}} \approx 6,3$ и 10% .

Значения параметров упрочнения различных моделей. Таблица 2.

№№	Исходное уравнение	Преобразованное уравнение	Параметр	Первая стадия	Вторая стадия	Третья стадия
1	$S = S_n + qe^{1/2}$	$S = S_n + qe^{1/2}$	S_n , МПа q , МПа $e_{кр}$, %	140 1060 2,5	240 660 6,5	280 530 10,0
2	$S = K_2 e^n$	$\ln S = \ln K_2 + n \ln(e)$	K_2 , МПа N	925 0,3	730 0,2	725 0,2
3	$S = S_0 + K_1 e^m$ $S_0 = S_{n1}$	$\ln(S - S_{n1}) = \ln K_1 + m \ln(e)$	K_1 , МПа M	1065 0,5	6400,3	605 0,3
4	$S = S_0 + K_1 e^m$ $S_0 = S_{ni}$	$\ln(S - S_{ni}) = \ln K_1 + m \ln(e)$ $i = 1; 2; 3$	K_1 , МПа M	1065 0,5	655 0,5	530 0,5
5	$S = S_0 + K_1 e^m$	$\ln(dS/de) = \ln(K_1 m) + (m-1) \ln(e)$	K_1 , МПа M	1060 0,5	660 0,5	530 0,5

Для получения линейной зависимости уравнение (6) преобразовывали к виду

$$\ln S = \ln K_2 + n \cdot \ln e.$$

На рис.8 представлена кривая растяжения в координатах $\ln S - \ln e$. В этом случае экспериментальные точки не укладываются на одну прямую линию. Это говорит о том, что параметр n не является постоянной величиной, а зависит от степени деформации. Выделили три стадии с разными значениями постоянных (табл.2 строка 2). В работе [16] на мелкозернистой углеродистой стали 30 выделяли только две стадии. Переход от одной стадии упрочнения к другой происходил при тех же значениях $e_{\text{ж}}$, что и в случае использования уравнения (7). В тоже же время на диаграммах крупнозернистых образцов этой стали выделяли три стадии.

Обработку кривых растяжения с помощью уравнения (5) проводили двумя способами. В первом случае предполагали, что величина S_0 известна и выражение (5) преобразовывали к виду $\ln(S - S_0) = \ln K_1 + m \cdot \ln e$. Параметр S_0 определяли экстраполяцией диаграммы деформации к нулевой пластичности при представлении её в координатах $S - e^{1/2}$ [12,13]. При этом $S_0 = S_{=}$. Зависимость $\ln(S - S_0) - \ln e$ представлена на рис. 8.

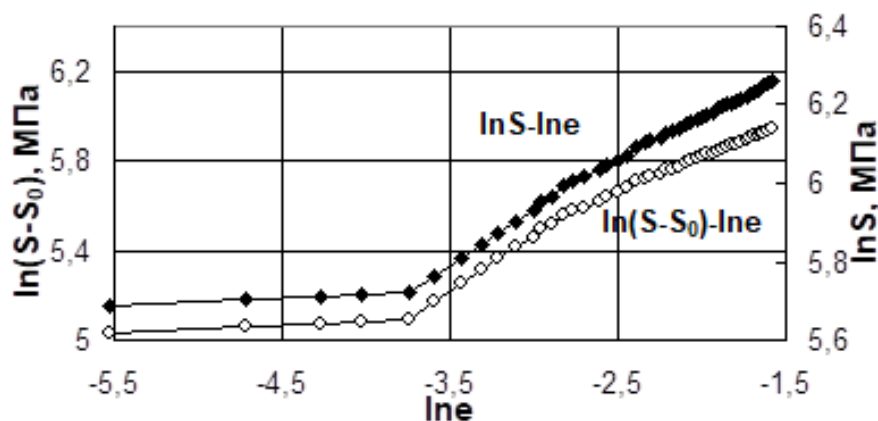


Рис. 8. Диаграммы деформации в координатах $\ln S = f[\ln(e)]$ и $\ln(S - S_0) = f[\ln(e)]$

На начальном участке первой стадии упрочнения параметр $m = 0,5$, а $K_1 = q_1$, затем кривая наклоняется подобно зависимости $\ln S = f[\ln(e)]$, и параметры K_1 и m имеют другие значения. Однако, если в выражение (5) вместо S_0 подставить значения $S_{=i}$, вычисленные по уравнению (7) и соответствующие второй и третьей стадиям упрочнения, то участки прямых $\ln(S - S_0) = f[\ln(e)]$ размещаются под наклоном 0,5, а величина K_1 равна параметру q на всех трех стадиях (табл.2, строка 4).

Второй способ предполагает, что величина S_0 есть некоторая неизвестная постоянная. В этом случае уравнение (5) преобразовывали к виду $\ln(dS/de) = \ln(K_1 m) + (m - 1) \ln e$.

Величину dS/de (коэффициент деформационного упрочнения) определяли численным дифференцированием кривой растяжения, полагая $dS/de \approx \Delta S/\Delta e$. Полученные значения dS/de (рис.9) проанализировать довольно затруднительно. Большое рассеяние данных вызвано тем, что изменение напряжения течения в близлежащих диапазонах деформаций сравнимо с точностью определения их значений (± 1 МПа). Коэффициент деформационного упрочнения определяли более точно, дифференцированием выражения:

$$dS/de = q/e^{1/2} \cdot 2. \quad (12)$$

Значения dS/de вычисляли с учетом того, что параметр q на каждой стадии упрочнения принимает разные значения. Полученные данные хорошо укладываются на три прямолинейных участка (рис.9).

Если заранее известна зависимость $\ln dS/de = f[\ln(e)]$, то можно видеть, что и значения $\ln dS/de$, рассчитанные численным дифференцированием диаграммы деформации, подчиняются этой зависимости. Результаты укладываются на три прямолинейных участка с наклоном $(m - 1)$, равным -0,5 (табл.2, строка 5).

Таким образом, при описании кривых растяжения с помощью уравнений (5) – (7) наблюдаются общие закономерности. Одну и ту же кривую можно описать разными уравнениями при близких значениях достоверности аппроксимации ($R^2 \approx 0,9934...0,9999$). Упрочнение изученных малоуглеродистых сталей происходит в три стадии, интенсивность упрочнения с каждой последующей стадией понижается. Однако между соотношениями (5) – (7) имеются существенные различия, особенно между выражениями (6) и (7). Так, для описания диаграммы упрочнения выражением (6) ее необходимо представить в двойных логарифмических координатах, вследствие чего трудно выявить стадийность упрочнения.

В ходе исследований подтверждено, что при деформировании металла параметры упрочнения, входящие в уравнения (6) и (7), изменяют свои значения в соответствии со стадийностью (иногда полагают, что параметр n может монотонно изменяться с деформацией [17]).

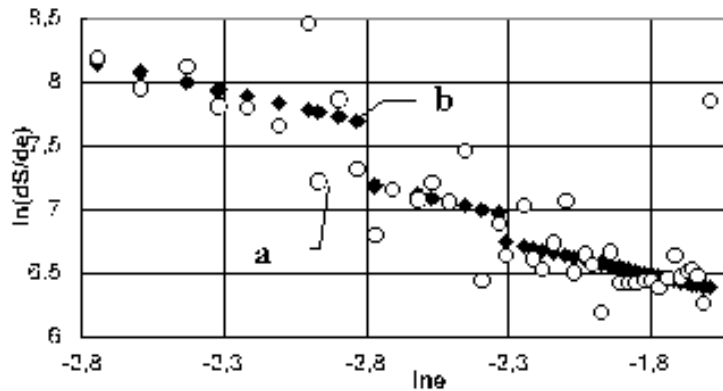


Рис. 9. Зависимость коэффициентов деформационного упрочнения, рассчитанных численным дифференцированием (а) и по уравнению (12) – (b).

Соответственно, для двух стадий упрочнения выражения (6) и (7) можно было записать следующим образом:

$$S = K'_2 \cdot e^{n'}; \quad (13)$$

$$S = K''_2 \cdot e^{n''}; \quad (14)$$

$$S = S'_n + q' \cdot e^{\frac{1}{2}}; \quad (15)$$

$$S = S''_n + q'' \cdot e^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) представляли собой одну и ту же параболу с разными численными значениями коэффициентов, что указывает на единый для них механизм упрочнения. Выражения же (13) и (14), также являясь некоторыми параболой, отличаются между собой не только численными коэффициентами (табл.2, строка 1), но и функционально. Механизм упрочнения на первой и второй стадиях подчиняется разным закономерностям, что при относительно небольших степенях деформации маловероятно. Это позволяет говорить о наложении на дислокационный механизм пластического течения дополнительного (деструкционного) процесса [1].

Отличительная особенность выражения (6) – отсутствие физического смысла входящих в него постоянных (параметр K_2 характеризует то напряжение, которое может быть достигнуто при деформации 100 %). Параметры же S'_n и q в (7) имеют строгий физический смысл. Для металла с постоянным размером зерна величина q описывается следующим образом [18]:

$$q = \alpha G b \sqrt{\rho/\epsilon}, \quad (17)$$

где α – геометрический фактор; G – модуль сдвига; b – вектор Бюргера; ρ – плотность дислокаций. Из выражения (17) следует, что параметр q определяется интенсивностью накопления дислокаций в процессе деформации. Параметр S'_n характеризует то начальное напряжение, которое имело бы место при упрочнении с данной интенсивностью от нулевой деформации. В данном исследовании анализ выражений (5) – (7) позволил отметить во всех случаях резкое снижение (в 1,6 раза) интенсивности упрочнения при переходе ко второй стадии при почти двукратном росте S'_n .

5. Выводы

Зафиксированное изменение параметров упрочнения в изученных углеродистых сталях объяснимо только с точки зрения наложения на процесс пластической деформации деструк-

тивного процесса, связанного с развитием повреждаемости. Этот вывод подтверждается удовлетворительным выполнением уравнений (5) – (7) на первой стадии упрочнения и резким изменением параметров упрочнения на второй и третьей стадиях. Описанное поведение параметров диаграмм деформации трудно объяснить с позиций дислокационных моделей изменения параметров деформационного упрочнения и не может быть связано только с изменением дислокационного ансамбля в процессе деформирования, а также с созданием ячеистой структуры [19]. Переход ко второй стадии деформационного упрочнения отражает не только изменение вклада различных систем скольжения, но и развитие дефектов поврежденности типа субмикротрещин в процессе деформирования [18]. Металлографический анализ, анализ данных электронной микроскопии [5,20], а также оцененное в данной работе изменение параметров деструкции (рис. 10) подтверждают это.

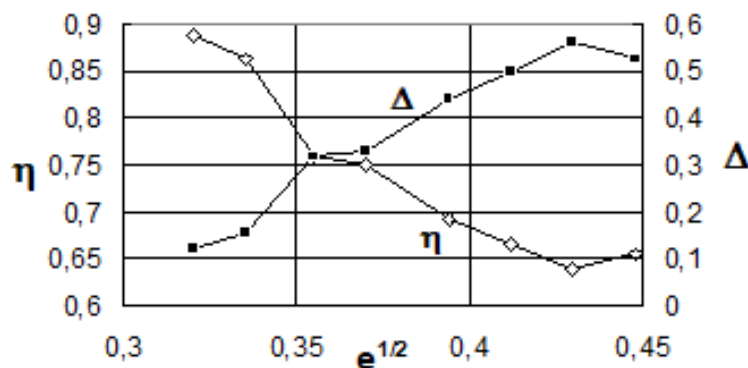


Рис. 10. Изменение коэффициентов добротности η и деструкции Δ (сталь Ст3)

Начало интенсивного снижения коэффициента добротности η и рост коэффициента деструкции Δ наблюдали именно в диапазоне резкого снижения интенсивности деформационного упрочнения, связанного с выходом дислокаций на развивающиеся внутренние поверхности [21–26].

6. Заключение

1. Проведенный сравнительный анализ моделей деформационного упрочнения Людвига, Холломоны, Жауля-Крюссара, а также количественный анализ коэффициентов упрочнения (K_i), добротности (η) и деструкции (Δ), позволил связать ранее зафиксированное снижение интенсивности деформационного упрочнения на II стадии параболического упрочнения с развитием двух основных процессов: трансформацией дислокационной субструктуры и развитием дефектов деформационной поврежденности типа микротрещин и пор.

2. Выявлены критические значения действующего фактора ($\varepsilon_{\text{крит}}$), определяющие границы диапазонов резкого изменения параметров деформационного упрочнения (K_i , S_{0i}) и деструкции (η , Δ , S_D , e_D).

3. Для изученных сталей получены новые данные об изменении параметров деструкции (Δ , η) и деформационного упрочнения (K_i , S_{0i}) в изученных сталях.

4. На основе подходов микромеханики разрушения и выполненного комплекса собственных исследований предложен критерий дефектостойкости материалов D_{eD} , учитывающий реальные фактически зафиксированные параметры процесса начала активного микроразрушения.

Полученные результаты могут быть использованы для создания ресурсосберегающих технологий обработки металлических и композиционных материалов с применением новых наноконпозиционных смазок и покрытий [27–34].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуканов А. Н. Физико-механические закономерности формирования предельного состояния и развития локального разрушения в металлических материалах: Дис. ... д-ра техн. наук. – Тула: ТулГУ, 2001. 381 с.
2. Физика конденсированного состояния: дефекты строения и создание теорий упрочнения материалов: учеб. пособие / А. Н. Чуканов, Н. Н. Сергеев, А. Е. Гвоздев, А. Н. Сергеев, П. Н. Медведев, Ю. С. Дорохин, С. Н. Кутепов, А. А. Яковенко, Д. В. Малий. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. 298 с.
3. Одинг И. А. Допускаемые напряжения в машиностроении и циклическая прочность металлов. – М.: Машгиз, 1961. 258 с.
4. Одинг И. А., Либеров Ю. П. Развитие повреждаемости в никеле при статическом растяжении // Изв. АН СССР. Metallургия и топливо. 1962. – № 6. – С. 125–130.
5. Одинг И. А., Либеров Ю. П. Накопление дефектов и образование субмикротрещин при статическом растяжении армко-железа // Изв. АН СССР. Metallургия и горное дело. 1964. – № 1. – С. 113–116.
6. Одинг И. А., Либеров Ю. П. Появление субмикроскопических трещин в статически деформируемых пластичных материалах // Metallургия и горное дело. 1964. – № 2. – С. 85–91.
7. Ровинский Б. М., Рыбакова Л. М. Напряжения, деформации и структурные изменения в техническом железе при циклической деформации // Изв. АН СССР. Металлы. 1965. – № 3. – С. 164–171.
8. Бабич В. К., Пирогов В. А., Вакуленко И. А. Влияние содержания углерода и структурного состояния на характеристики деформационного упрочнения углеродистых сталей // Проблемы прочности. 1984. – № 4. – С. 52–55.
9. Ровинский Б. М., Рыбакова Л. М. Об остаточной деформации, получаемой при одноосном растяжении // Машиноведение. 1969. – № 5. С. 51–60.
10. Ровинский Б. М., Рыбакова Л. М. О напряжениях и необратимых деформациях в пластичных металлах при простом растяжении // Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение. 1962. – № 5. С. 68–74.
11. Рыбакова Л. М. Деструкция металла при объемном и поверхностном пластическом деформировании // МиТОМ. 1980. – № 8. – С. 17–22.
12. Поляков С. Н., Кудлай А. С., Наугольникова Л. М., Нечипоренко И. Г. Методы построения и анализа истинных диаграмм растяжения // Завод. лабор. 1966. – № 6. С. 741–744.
13. Поляков С. Н., Наугольникова Л. М., Кудлай А. С. О методике анализа истинных диаграмм растяжения // Завод. лабор. 1969. – № 3. – С. 347–349.
14. Conrad H., Fenerstein S., Rice L. Effect of grain size on the dislocation density and flow stress of niobium // Mater. Sci. Eng. 1967. – № 3. – P. 157–168.
15. Van den Beukel A. Grain size dependence of the dislocation in cold worked metals // Scripta met. 1978. – № 9. – P. 809–813.

16. Прусаков Б. А., Сурин А. И., Тронза Е. И. Методика определения деструкционных характеристик механических свойств металлических материалов // Завод. лабор. 1991. – С. 69–71.
17. Гриффитс А. А. Явления разрушения и течения в твердых телах // МиТОМ. 1995. – № 1. – С. 9–14.
18. Калачев М. И. Деформационное упрочнение металлов. – Минск: Наука и техника, 1980. 256 с.
19. Деформационное упрочнение и разрушение поликристаллических металлов / Трефилов В. И., Моисеев В. Ф., Печковский Э. П. и др.; / Под ред. Трефилова В. И. – Киев: Наук. думка, 1987. 248 с.
20. Меренкова Р. Ф., Кошелев П. Ф. Микроструктурная картина пластического и квазихрупкого разрушения армко-железа // Проблемы прочности. 1975. – № 9. – С. 73–77.
21. Чуканов А. Н., Солдатова Е. И. Аналитическое описание диаграмм деформации и накопление повреждаемости малоуглеродистой стали // Изв. ТулГУ. Сер.: Материаловедение. – 2000. – Вып. 1. – С. 151–155.
22. Chukanov A. N., Levin D. M., Yakovenko A. A. Use and Prospects for the Internal Friction Method in Assessing the Degradation and Destruction of Iron-Carbon Alloys // ISSN1062-8738. Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics, 2011. Vol. 75. No 10, pp. 1340–1344.
23. Шоршоров М. Х., Гвоздев А. Е., Сергеев А. Н., Кутепов С. Н., Кузовлева О. В., Селедкин Е. М., Клементьев Д. С., Калинин А. А. Моделирование процессов ресурсосберегающей обработки слитковых, порошковых, наноструктурных и композиционных материалов: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 359 с.
24. Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Кузовлева О. В. Основы формирования состояния высокой деформационной способности металлических систем: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 382 с.
25. Журавлев Г. М., Гвоздев А. Е. Пластическая дилатансия и деформационная повреждаемость металлов и сплавов: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. 114 с.
26. Журавлев Г. М., Гвоздев А. Е. Обработка сталей и сплавов в интервале температур фазовых превращений: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 320 с.
27. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М. Теория пластичности дилатирующих сред: монография / Под ред. А. Е. Гвоздева. – 2-е изд., перераб. и доп. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. 337 с.
28. Gvozdev A. E., Bogolyubova D. N., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. – Т. 6. – № 1. – С. 32–40.
29. Gvozdev A. E., Minaev I. V., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low- and medium-carbon low-alloy steels // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. – Т. 6. – № 1. – С. 41–44.
30. Gvozdev A. E., Sergeyev N. N., Minayev I. V., Kolmakov A. G., Tikhonova I. V. Role of nucleation in the development of first-order phase transformations // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. – Т. 6. – № 4. – С. 283–288.

31. Gvozdev A. E., Golyshev I. V., Minayev I. V., Sergeyev A. N., Sergeyev N. N., Tikhonova I. V., Khonelidze D. M., Kolmakov A. G. Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2015. – T. 6. – № 4. – С. 305–310.
32. Breki A. D., Medvedeva V. V., Krylov N. A., Aleksandrov S. E., Kolmakov A. G., Gvozdev A. E., Sergeyev N. N., Provotorov D. A., Fadin Y. A. Antiwear properties of composite greases “litol-24 – magnesium hydrosilicate particles” // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2018. – T. 9. – № 1. – С. 21–25.
33. Sergeyev N. N., Minaev I. V., Gvozdev A. E., Cheglov A. E., Tsyganov I. A., Tikhonova I. V., Alyavdina E. S., Gubanov O. M., Breki A. D. Decarburization and the influence of laser cutting on steel structure // *Steel in Translation*. 2018. – T. 48. – № 5. – С. 313–319.
34. Breki A. D., Kol'tsova T. S., Skvortsova A. N., Tolochko O. V., Aleksandrov S. E., Kolmakov A. G., Lisenkov A. A., Fadin Y. A., Gvozdev A. E., Provotorov D. A. Tribotechnical properties of composite material “aluminum-carbon nanofibers” under friction on steels 12KH1 and SHKH15 // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2018. – T. 9. – № 4. – С. 639–643.

REFERENCES

1. Chukanov, A. N., 2001, “Physical and mechanical regularities of the formation of the limit state and the development of local destruction in metal materials”, The dissertation on competition of a scientific degree. doctor of technology degree, *TulGU, Tula, Rossiya*, 381 p.
2. Chukanov A. N., Sergeyev N. N., Gvozdev A. E., et al., 2017, “Fizika kondensirovannogo sostoyaniya: defekty stroeniya i sozдание teorii uprochneniya materialov” [Condensed matter physics: structural defects and creation of theories of materials hardening], *TulGU, Tula, Rossiya*, 298 p.
3. Oding, I. A., 1961, “Dopuskaemye napryazheniya v mashinostroenii i ciklicheskaya prochnost' metallov” [Permissible stresses in mechanical engineering and cyclic strength of metals], *Mashgiz, Moskva, Rossiya*, 258 p.
4. Oding, I. A., Liberov, Y. P., 1962, “Razvitie povrezhdaemosti v nikle pri staticheskom rastyazhenii” [Development of damage in Nickel under static tension], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Metallurgiya i toplivo*, no. 6, pp. 125–130.
5. Oding, I. A., Liberov, Y. P., 1964, “Nakoplenie defektov i obrazovanie submikrotreshchin pri staticheskom rastyazhenii armko-zheleza” [Accumulation of defects and formation of submicrocracks under static Armco-iron tension], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Metallurgiya i gornoe delo*, no. 1, pp. 113–116.
6. Oding, I. A., Liberov, Y. P., 1964, “Poyavlenie submikroskopicheskikh treshchin v staticheski deformiruemykh plastichnykh materialah” [Appearance of submicroscopic cracks in statically deformable plastic materials], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Metallurgiya i gornoe delo*, no. 2, pp. 85–91.
7. Rovinskii, B. M., Rybakova, L. M., 1965 “Napryazheniya, deformacii i strukturnye izmeneniya v tekhnicheskom zheleze pri ciklicheskoj deformacii” [Stress, strain and structural changes in technical iron during cyclic deformation], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Metally*, no. 3, pp. 164–171.

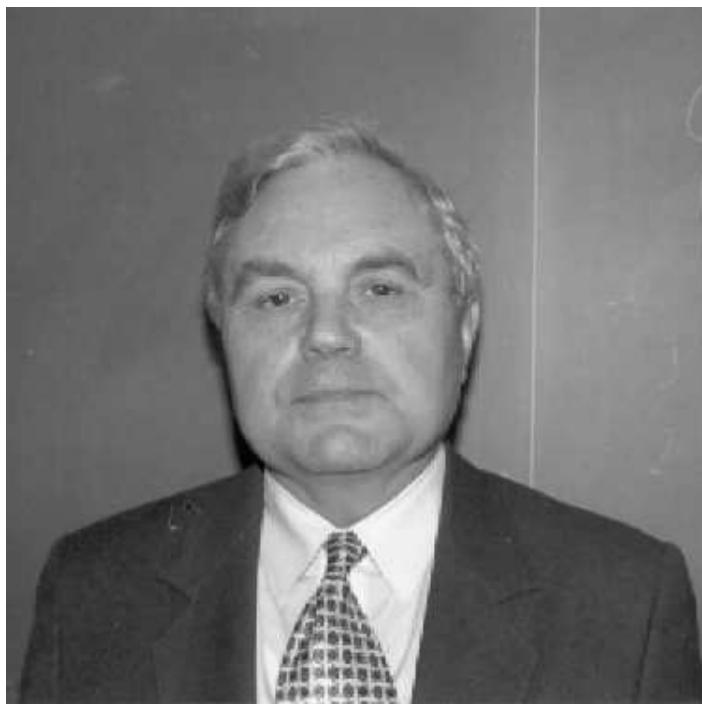
8. Babich, V. K., Pirogov, V. A., Vakulenko, I. A., 1984, "Vliyanie sodержaniya ugleroda i strukturnogo sostoyaniya na harakteristiki deformacionnogo uprochneniya uglerodistykh stalej" [Effect of carbon content and structural state on the strain hardening characteristics of carbon steels], *Strength of Materials*, no. 4, pp. 52–55.
9. Rovinskii, B.M., Rybakova, L.M., 1969, "Ob ostatocnoy deformacii, poluchaemoj pri odnoosnom rastyazhenii" [On the residual strain obtained in uniaxial tension], *Engineering Science*, no. 5, pp. 51–60.
10. Rovinskii, B. M., Rybakova, L. M., 1962, "O napryazheniyah i neobratimyh deformatsiyah v plastichnykh metallakh pri prostom rastyazhenii" [About the stress and the irreversible plastic deformation in metals under simple tension], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, otdelenie tekhnicheskikh nauk*, no. 5, pp. 68–74.
11. Rybakova, L. M., 1980, "Destrukciya metalla pri ob"emnom i poverhnostnom plasticheskom deformirovanii" [Degradation of metals in bulk and surface plastic deformation], *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov*, no. 8, pp. 17–22.
12. Poliakov, S. N., Kudlai, A. S., Naugolnikova, L. M., et al., 1966, "Metody postroeniya i analiza istinnykh diagramm rastyazheniya" [Methods of constructing and analyzing true stretching diagrams], *Zavod. labor.*, no. 6, pp. 741–744.
13. Polyakov, S. N., Naugolnykh, L. M., Kudlay, A. S., 1969, "O metodike analiza istinnykh diagramm rastyazheniya" [Methods of analysis of the true tensile diagrams], *Zavod. labor.*, no. 3, pp. 347–349.
14. Conrad, H., Fenerstein, S., Rice, L., 1967, Effect of grain size on the dislocation density and flow stress of niobium, *Mater. Sci. Eng.*, no. 3, pp. 157–168.
15. Van den Beukel, A., 1978, Grain size dependence of the dislocation in cold worked metals, *Scripta met.*, no. 9, pp. 809–813.
16. Prusakov, B. A., Surin, A. I., Tronza, E. I., 1991, "Metodika opredeleniya destrukcionnykh harakteristik mekhanicheskikh svoystv metallicheskih materialov" [The method of determining the destructive characteristics of mechanical properties of metallic materials], *Zavod. labor.*, no. 8, pp. 69–71.
17. Griffiths, A. A., 1995, "Yavleniya razrusheniya i techeniya v tverdykh telakh" [The phenomena of fracture and flow in solids], *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov*, no. 1, pp. 9–14.
18. Kalachev, M. I., 1980, "Deformacionnoe uprochnenie metallov" [Deformation hardening of metals], *Science and Technology, Minsk*, 256 p.
19. Trefilov, V. I., Moiseev, V. F., Pechkovskii, E. P., et al., 1987, "Deformacionnoe uprochnenie i razrushenie polikristallicheskih metallov" [Strain hardening and fracture of polycrystalline metals], *Nauk. Dumka, Kiev*, 248 p.
20. Merenkova, R. F., Koshelev, P. F., 1975, "Mikrostrukturnaia kartina plasticheskogo i kvazikhрупкого razrusheniia armko-zheleza" [Microstructure picture in plastic and of Quasibrittle fracture of Armco-iron], *Problemy prochnosti*, no. 9, pp. 73–77.
21. Chukanov, A. N., Soldatova, E. I., 2000, "Analiticheskoe opisanie diagramm deformatsii i nakoplenie povrezhdaemosti malouglerodistoi stali" [Analytical description of the diagrams of strain and accumulation of damage to mild steel], *Izvestiya TulGU. Materialovedenie*, no. 1, pp. 151–155.

22. Chukanov, A. N., Levin, D. M., Yakovenko, A. A., 2011, Use and Prospects for the Internal Friction Method in Assessing the Degradation and Destruction of Iron-Carbon Alloys, *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*, vol. 75, no. 10, pp. 1340–1344.
23. Shorshorov, M. Kh., Gvozdev, A. E., Sergeev, A. N., et al., 2018, “Modelirovanie processov resursosberegayushchej obrabotki slitkovykh, poroshkovykh, nanostrukturnykh i kompozicionnykh materialov” [Modeling of processes of resource-saving processing of ingot, powder, nanostructured and composite materials], *TulGU, Tula, Rossiya*, 359 p.
24. Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., Kuzovleva, O. V., 2018, “Osnovy formirovaniya sostoyaniya vysokoj deformacionnoj sposobnosti metallicheskih sistem” [Bases of formation of the state of high deformation ability of metal systems], *TulGU, Tula, Rossiya*, 382 p.
25. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., 2014, “Plasticheskaya dilatatsiya i deformacionnaya povrezhdaemost’ metallov i splavov” [Plastic dilatancy and deformation damage of metals and alloys], *TulGU, Tula, Rossiya*, 114 p.
26. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., 2016, “Obrabotka stalej i splavov v intervale temperatur fazovykh prevrashchenij” [Processing of steels and alloys in the temperature range of phase transformations], *TulGU, Tula, Rossiya*, 320 p.
27. Makarov, E. S., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., 2015, “Teoriya plastichnosti dilatiruyushchih sred” [Theory of plasticity gelatinous environments], *TulGU, Tula, Rossiya*, 337 p.
28. Gvozdev, A. E., Bogolyubova, D. N., Sergeev, N. N., et al., 2015, Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation, *Inorganic Materials: Applied Research*, vol. 6, no. 1, pp. 32–40.
29. Gvozdev, A. E., Minaev, I. V., Sergeev, N. N., et al., 2015, Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low- and medium-carbon low-alloy steels, *Inorganic Materials: Applied Research*, vol. 6, no. 1, pp. 41–44.
30. Gvozdev, A. E., Sergeyev, N. N., Minayev, I. V., et al., 2015, Role of nucleation in the development of first-order phase transformations, *Inorganic Materials: Applied Research*, vol. 6, no. 4, pp. 283–288.
31. Gvozdev, A. E., Golyshev, I. V., Minayev, I. V., et al., 2015, Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets, *Inorganic Materials: Applied Research*, vol. 6, no. 4, pp. 305–310.
32. Breki, A. D., Medvedeva, V. V., Krylov, N. A., et al., 2018, Antiwear properties of composite greases “Litol-24 – magnesium hydrosilicate particles”, *Inorganic Materials: Applied Research*, vol. 9, no. 1, pp. 21–25.
33. Sergeev, N. N., Minaev, I. V., Gvozdev, A. E., et al., 2018, Decarburization and the influence of laser cutting on steel structure, *Steel in Translation*, vol. 48, no. 5, pp. 313–319.
34. Breki, A. D., Kol’tsova, T. S., Skvortsova, A. N., et al., 2018, Tribotechnical properties of composite material “Aluminum-carbon nanofibers” under friction on steels 12KH1 and SHKH15, *Inorganic Materials: Applied Research*, vol. 9, no. 4, pp. 639–643.

Получено 25.12.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ВИКТОР НИКОЛАЕВИЧ ЛАТЫШЕВ: к 85-летию



Редакционная коллегия поздравляет заведующего кафедрой высшей алгебры, доктора физико-математических наук, почетного профессора Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова Виктора Николаевича Латышева с восьмидесятипятилетием.

Вся математическая общественность хорошо знает его как блестящего российского математика, ведущего специалиста в области многообразий алгебр, распознавания свойств конечно определенных алгебр с канонизацией.

Многие ученики с благодарностью вспоминают замечательные лекции по алгебре и спецкурсы, которые читал Виктор Николаевич.

Фундаментальные результаты по теории многообразий алгебр и распознавания свойств конечно определенных алгебр с канонизацией послужили основой для дальнейших исследований в этих областях. Вклад Латышева и его учеников в решение проблемы Шпехта по достоинству высоко оценен мировой математической общественностью.

В. Н. Латышев подготовил более 25 кандидатов физико-математических наук. Долгие годы Вы плодотворно руководили семинаром по теории колец, на котором были воспитаны несколько докторов физико-математических наук.

Виктор Николаевич участвовал в создании Ульяновского университета, механико-математический факультет которого в настоящее время превратился в крупный алгебраический центр, где работают 10 докторов наук.

Желаем своему коллеге крепкого здоровья, дальнейших плодотворных научных изысканий, талантливых учеников, счастья и исполнения всех желаний!

Получено 05.01.2019 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

К 80-летию Раиса Сальмановича Исмагилова

Ю. А. Неретин, А. М. Стёпин

Настоящий очерк написан в связи с юбилеем нашего знаменитого коллеги, выпускника кафедры ТФФА механико-математического факультета МГУ, профессора МГТУ им. Н. Э. Баумана. Мы хотели бы дополнить характеристику его математического творчества, данную в статье в Успехах математических наук 2018 г. Основные темы настоящего текста – недавние статьи Исмагилова по теории представлений и спектральной теории дифференциальных операторов.

Мы начнем с группы работ по *операторам Рака*. Сначала напомним, как появились классические многочлены Рака (G. Racah). Обозначим через $SU(2)$ группу унитарных матриц размера 2 с определителем 1, а через V_k ее неприводимое представление размерности $k + 1$. Известно, что тензорное произведение двух таких представлений раскладывается в однократную прямую сумму

$$V_k \otimes V_l = \sum_{p: |k-l| \leq p \leq k+l, k+l+p \text{ чётно}} V_p, \quad (18)$$

это разложение легко строится явно. Рассмотрим теперь тройное произведение

$$(V_k \otimes V_k) \otimes V_m = V_k \otimes (V_k \otimes V_m) = \oplus_j a_j V_j = \oplus_j (\mathbb{C}^{a_j} \otimes V_j), \quad (19)$$

где a_j – кратности вхождения V_j в тензорное произведение. Такое разложение можно построить разными способами. Можно сначала разложить $V_k \otimes V_l$ в прямую сумму (18)

$$(V_k \otimes V_k) \otimes V_m = (\oplus_p V_p) \otimes V_m = \oplus_p (V_p \otimes V_m),$$

а потом раскладывать каждое слагаемое $V_p \otimes V_m$ все по тому же правилу (18). Но можно начать с разложения $V_k \otimes V_m$

В итоге мы получим два разных разложения одного и того же унитарного представления. Они будут связаны линейным оператором в правой части (19), он уважает слагаемые $\mathbb{C}^{a_j} \otimes V_j$ и фактически действует в каждом «пространстве кратностей» $\mathbb{C}^{a_j}$, назовем его *оператором Рака* R_j (его матричные элементы называются *6j-символами*). По построению, этот оператор унитарен, но если явно выписать его матрицу, то унитарность оказывается весьма нетривиальным фактом.

Оказывается, что строчки матрицы R_j могут быть записаны как конечная система ортогональных многочленов дискретного переменного (так называемые *многочлены Рака*), эта система зависит от четырех целых параметров k, l, m, j . Первые три параметра легко сделать вещественными, для этого надо рассмотреть универсальную накрывающую группы $SL(2, \mathbb{R}) = SU(1, 1)$ и ее представления со старшим весом.

В итоге получается ортогональная система гипергеометрических многочленов типа ${}_4F_3[\dots; 1]$, зависящая от 3 вещественных и одного дискретного параметра (в полной общности ее ввел W. Wilson в 1978г.). Напомним, что классические многочлены Якоби являются вырождениями многочленов Рака.

Естественно пытаться обобщить эту конструкцию. Однако уже для группы $SU(3)$ мы столкнемся с тем, что тензорное произведение двух неприводимых представлений имеет кратности, а поэтому возникают сложности с вычислением операторов Рака (хотя формально их несложно определить).

Вопрос об аналоге операторов Рака для бесконечномерных унитарных представлений был задан одновременно Исмагиловым [ФА2006] и W. Groenevelt'ом (Acta Appl. Math., 2006). В

этом случае вместо конечномерных унитарных матриц возникают унитарные операторы. Основная трудность в задачах о тензорных произведениях - что кратности в их разложениях почти всегда не единичные, и, что хуже, они часто (или даже обычно) оказываются бесконечными.

Кратность два возникает даже в обманчиво кажущемся простым случае $SL(2, \mathbb{R})$. Спектры для этой задачи были найдены Л. Пуканским в 1961г., а спектральные меры – В. Ф. Молчановым [ИАН1979]. Позже этой задаче обращались и другие авторы (Е. Koelink, W. Groenevelt, Н. Rosengren [Dev. Math, 2006], Ю. А. Неретин [ФА2005]), но до полной ясности она не доведена, и возможности для свободного оперирования этими объектами, по-видимому, пока нет, и было бы желательно эту задачу доделать. Грунвелт построил операторы Рака для $SL(2, \mathbb{R})$ в случае, когда по крайней мере два сомножителя принадлежат дискретным сериям (в этом случае кратности в тройном произведении не появляются).

Исмагилов вычислил операторы Рака для случая основных серий группы $SL(2, \mathbb{C})$, а также представлений групп движений пространств $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ (и в этих случаях кратности не появляются³). Обсудим неожиданные спецфункциональные и геометрические явления, появившиеся в этих работах.

Во-первых, в формулах появляются необычные интегралы типа Меллина-Барнса. Пусть $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r \in \mathbb{C}$, причем $\operatorname{Re} a_j, \operatorname{Re} b_j \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим следующий интеграл

$${}_rF_{r-1}[a, b] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^r \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(a_k + m) - is\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(b_k + m) + is\right) ds}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\bar{a}_k + m) + is\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(\bar{b}_k + m) + 1 - is\right)}. \quad (20)$$

Интегральные ядра для операторов Рака выражаются через функции ${}_rF_{r-1}$ при $r = 4$. Выражение (20) является гибридом двустороннего гипергеометрического ряда по k и барнсовского интеграла по s . Оно оказывается более ручным объектом, чем может показаться, например, как выяснил Р.С. в [МС62007], оно представимо в виде

$$\sum_{j=1}^r C_j(\dots) {}_rF_{r-1}[\dots; 1] {}_rF_{r-1}[\dots; 1],$$

где ${}_rF_{r-1}[\dots; 1]$ – обычные обобщенные гипергеометрические функции, параметры которых выражаются через a_p, b_p , а C_j произведения гамма-функций (чьи аргументы тоже выражаются через a_p, b_p). По-видимому, функции ${}_rF_{r-1}$ заслуживают отдельного изучения. Естественно предполагать здесь существования надстройки над классической теорией гипергеометрических функций, в частности новых бета-интегралов и связанных с ними явно решаемых разностных задач типа Штурма–Лиувилля.

Второе неожиданное явление связано с пространствами шарнирных многоугольников, которые были введены А. А. Клячко (работа опубликовано в трудах конференции Algebraic geometry and its applications (Yaroslavl, 1992), 1994, впоследствии эти пространства стали предметом многочисленных исследований). А именно, берется множество

$$\operatorname{Kl}_n = \operatorname{Kl}(a_1, \dots, a_n)$$

всех замкнутых n -звенных ломаных в $\mathbb{R}^3$ с фиксированными длинами $a_1, \dots, a_n$ звеньев, ломаные определены с точностью до движений $\mathbb{R}^3$. Как обнаружил Клячко, это пространство обладает неожиданной и богатой геометрией. Оно обладает естественной структурой

³Тензорные произведения унитарных представлений $SL(2, \mathbb{C})$ были разложены М.А.Наймарком в публикациях 1961-1963гг.

симплектического⁴ и, более того, кэлерова многообразия. На нем действует гамильтоновыми векторными полями алгебра Ли группы кос⁵. Кроме того инварианты n -кратных тензорных произведений $V_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes V_{\alpha_n}$ конечномерных представлений $SU(2)$ отождествляются с сечениями естественных линейных расслоений на пространстве многоугольников (для случая целых длин сторон $a_1, \dots, a_n$).

Пространство шарнирных четырехугольников естественно появилось в работах Исмаилова [ФА2008], [ММЖ2014] в связи операторами Рака для групп движений пространств $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$. Оказалось, что операторы Рака красиво выражаются с помощью замен координат на Kl_4 . В связи с этим естественно задуматься о кратных тензорных произведениях унитарных представлений. Аналогичные объекты для представлений $SU(2)$ (и представлений $SU(1, 1)$ со старшим весом) – т.н. *3nj-символы* – много исследовались.

Во всяком случае эти работы дают новые возможности для теории унитарных представлений и для ее приложений к теории специальных функций.

Другая недавняя теоретико-представленческая работа Р.С.Исмаилова посвящена *аналогам характеров для групп диффеоморфизмов*. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, группу $\text{Diff}(\Omega)$ ее диффеоморфизмов, сохраняющих ориентацию, и ее унитарное представление ρ_σ в $L^2(\Omega)$, заданное формулой

$$\rho_\sigma(q)f(x) = f(q(x)) \det J(q(x))^{1/2+i\sigma},$$

где σ – вещественный параметр, $q \in \text{Diff}(\Omega)$, а J – матрица Якоби. Давно известно (и одновременно малоизвестно), что это у этих представлений есть аналоги характеров. А именно рассмотрим отображение h из компактной области $\mathbb{R}^N$ в $\text{Diff}(\Omega)$, пусть $\phi(t)$ – гладкая функция на $\mathbb{R}^N$ с компактным носителем. Тогда

$$\text{tr} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(t) \rho_\sigma(h(t)) dt = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(t) \chi_\sigma(h(t)) dt, \quad (21)$$

где

$$\chi_\sigma(q) = \sum_{x: q(x)=x} \frac{\det(J(q(x)))^{1/2+i\sigma}}{\det(J(x) - 1)} \quad (22)$$

(суммирование ведется по всем неподвижным точкам диффеоморфизма, для семейств h общего положения эта формула имеет смысл). Однако эту конструкцию не удастся пошевелить, даже для тензорных произведений представлений вида ρ_σ характеров в таком смысле нет. В статье [МС62015] предлагается конструкция гибрида характера в упомянутом смысле со сферическими функциями, а именно показывается, что для некоторого класса представлений представлений групп диффеоморфизмов для некоторых канонически определенных проекторов P можно написать для следов

$$\text{tr} \left(P \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \phi(t) \rho(q) dt \cdot P \right)$$

формулы похожие на (21)–(22), причем получаемые функции однозначно определяют представления.

Перейдем ко второй части нашего очерка. Исследованию *спектральных свойств операторов Штурма-Лиувилля* $L_q = -d^2/dx^2 + q(x)$ на полусоси $(0, \infty)$ с быстро осциллирующими

⁴Рассмотрим триангуляцию n -угольника набором диагоналей, обозначим через ℓ_j длины диагоналей, через ϕ_j – двугранные углы. Симплектическая форма определяется как $\sum d\ell_j \wedge d\phi_j$. Эта форма не зависит выбора триангуляции, проверка этого утверждения оказывается неожиданно нетривиальной даже для четырехзвенных ломаных.

⁵Группа кос дискретна, но у нее есть каноническое пополнение по Мальцеву, которое является «бесконечномерной группой Ли». Алгебра Ли этой группы была описана Т. Коппо.

(вещественными и непрерывными) потенциалами посвящена работа Р.С.Исмагилова, опубликованная в Journal of Spectral Theory (2016). Предыстория рассматриваемого вопроса такова. В случае, когда $q(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$ и, стало быть, спектр оператора L_q дискретен, асимптотическая формула для соответствующей считающей функции была вычислена Титчмаршем и содержится в его известной монографии 1946 года. Исследование асимптотического поведения собственных значений L_q в более сложном случае, когда $q(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \infty$ было предпринято Хейвудом в 1954 г., а также Аткинсоном и Фултоном в 1982 г.

Вопрос об асимптотике спектров L_q с быстро осциллирующими потенциалами на примере $q(x) = hx \cos x^2$ впервые рассмотрен Исмагиловым в работе 1985 года.

В упомянутой выше недавней его публикации дискретность спектра L_q доказана для потенциалов вида $h(v'(x))^2 \cos v(x)$, где $h \in (1/2, 1)$, v и v' неограниченно возрастают и $v''/(v')^2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$; установлены также спектральные асимптотики $N(0, t) \asymp \sqrt{t}w(\sqrt{t})$ и $N(-t, 0) \asymp v(w(\sqrt{t}))$, здесь $w = (v')^{-1}$.

Этот результат обобщает факт из [МЗ, 1985] о существовании коэффициентов h , для которых оператор L_q с $q(x) = hx \cos x^2$ имеет дискретный спектр с указанным асимптотическим поведением.

Ключевым при доказательстве этих фактов служит следующее (см. [МЗ, 1985]) предложение об оценке числа $N(\alpha, \beta)$ точек спектра оператора L_q принадлежащих интервалу (α, β) . Пусть $\lambda_1([a, b])$ — наименьшее собственное значение задачи $L_q y = \lambda y, y(a) = y(b) = 0$, последовательности $0 = a_0 < a_1 < \dots$, $0 = b_0 < b_1 < \dots$ стремятся к бесконечности, A и B их функции распределения соответственно. Если $\lambda_1([a_{k-1}, a_k]) \leq \alpha$ и $\lambda_1([b_{k-1}, b_k]) \geq \beta$ при $k \geq 1$, то $N(\alpha, \beta) \leq \liminf (B(x) - A(x)) + 1$; если же $\lambda_1([a_{k-1}, a_k]) \geq \alpha$ и $\lambda_1([b_{k-1}, b_k]) \leq \beta$ при $k \geq 1$, то $N(\alpha, \beta) \geq \limsup (B(x) - A(x)) - 1$. Вывод этого предложения в некотором смысле родственен доказательству достаточного условия существенной самосопряженности L_q выводимой Раисом Сальмановичем (см. [УМН, 1963]) из информации об ограничении потенциала q на непересекающиеся отрезки, уходящие в бесконечность.

В работе Исмагилова "О возмущении спектра, вызванном ограниченным возмущением потенциала" [МЗ, 2014] рассматривается отображение Φ , сопоставляющее возмущению $f \in C^b[0, \infty)$ потенциала гармонического осциллятора на полуоси соответствующее возмущение спектра, т.е. элемент из пространства l^∞ . Обсуждается вопрос о том, в каком смысле отображение Φ , может быть аппроксимировано линейным. С учетом того, что Φ , переводит класс смежности $f + C_0[0, \infty)$ в класс смежности $\Phi(f) + l_0$ сформулирована гипотеза о линейности отображения $\Phi^0 : C^b[0, \infty)/C_0[0, \infty) \rightarrow l^\infty/l_0$. Эта задача представляет интерес по двум причинам. Во-первых, если непрерывный и возрастающий к бесконечности потенциал q оператора Штурма-Лиувилля $L_q y = -y'' + qy$ на полуоси $[0, \infty)$ с краевым условием $y(0) = 0$ таков, что спектр L_q достаточно разрежен (например, выполнено условие $\lambda_n \sim n^{3/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$), то отображение Φ^0 линейно; впрочем, это верно и не только для операторов Штурма-Лиувилля. Во-вторых, в случае потенциала x^2 найдутся линейное отображение $R : C^b[0, \infty) \rightarrow l^\infty$ и подпространство $l_1 \subset l^\infty$ такие, что $\text{Ran}(\Phi - R) \subset l_1$. Доказательство этого утверждения основано на использовании следующего результата Исмагилова и Костюченко [ФА, 2009]. Пусть A, B — самосопряженные операторы, A имеет дискретный спектр $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, $\lambda_k \rightarrow \infty$, B — ограничен, $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots$ — спектр оператора $A + B$; тогда при $t \in [0, 1]$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{\lambda}_k - \lambda_k) \exp(-t\lambda_k) = \text{Tr}(B \exp(-tA)) + O(t \text{Tr} \exp(-tA)).$$

Статья Исмагилова и его ученика Султанова [МЗ, 2011] посвящена классификации дифференциальных операторов второго порядка, действующих в пространствах Понтрягина 2π -

периодических функций на $\mathbb{R}$ и симметрических относительно соответствующей индефинитной эрмитовой формы $[x, y] = (Jx, y)$. Полученный авторами результат ставит задачу отыскания условий J -самосопряженности найденных операторов. Пусть $\mathcal{D}$ — пространство основных функций на окружности, $\mathcal{D}'$ — соответствующее пространство обобщенных функций. Индефинитная форма в $\mathcal{D}$, имеющая конечный ранг индефинитности, задается элементом $q \in \mathcal{D}'$, для которого $q(t) = q(-t) = \bar{q}(t)$, причем коэффициенты Фурье $q_k = \langle q, e^{ikt} \rangle$ отрицательны лишь для k из некоторого конечного непустого набора и $q_k > 0$ для всех остальных k . Пополнение $\mathcal{H}'$ пространства $\mathcal{D}$ относительно скалярного произведения $(u, v) = \sum |q_k| u_k \bar{v}_k$ (здесь $u = \sum u_k e^{ikt}$) есть пространство Понтрягина с индефинитной формой $[u, v] = \sum q_k u_k \bar{v}_k$. Для дифференциального оператора $L = p_0 \frac{d^2}{dt^2} + p_1 \frac{d}{dt} + p_2$ с $D_L = \mathcal{D}$ пара (q, L) называется элементарной, если q имеет конечный ранг индефинитности и коэффициенты p_i имеют наименьший общий период 2π . В [МЗ, 2011] получен список таких пар; они могут быть трех типов: 1) с рациональной зависимостью q_k от k ; 2) с q_k , выражающимися через значения Γ -функции; 3) постоянные q_k при $k > k_0$.

Отметим здесь также явную формулу для спектра оператора второй производной на конечном графе G , опубликованную Исмагиловым в [ФА, 2012]. Точнее, пусть $G = (V, E)$ — связный неориентированный конечный граф без петель и кратных ребер. Если, отождествляя ребро $l \in E$ с некоторым отрезком, ввести на l метрику d и соответствующую ориентацию, то для $f(x)$, $x \in l$, определена производная; при этом вторая производная не зависит от ориентации. Для концевых вершин a, b ребра l определены односторонние производные

$$f'_l(a) = \lim_{l \ni x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{d(x, a)}, \quad f'_l(b) = \lim_{l \ni x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{d(x, b)}.$$

Зафиксировав числа $p(l) = p(a, b) = p(b, a) > 0$, $l = \{a, b\} \in E$ (для несмежных вершин $p(a, b) = 0$), на пространстве функций класса C^2 на G , удовлетворяющих условиям $\sum_b p(a, b) u'_l(a) = 0$, $l = \{a, b\}$, получаем оператор $A : u \mapsto -u''$; он симметричен и существенно самосопряжен в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(f_1, f_2) = \sum_{l \in E} p(l) \int_l f_1(x) \bar{f}_2(x) dx$. Оказывается, что целая функция $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda^2 / \lambda_k^2)$, сопоставляемая множеству $\{\lambda_k^2\}$ ненулевых собственных значений оператора A с точностью до фиксированного множителя совпадает с многочленом от переменных $p(l)$, коэффициентами которого служат тригонометрические многочлены $R_f(\lambda)$, явно выписываемые по таким отображениям $f : V \rightarrow V$, для которых $(v, f(v)) \in E$.

Для комплекснозначных функций на p -адическом поле, по-видимому, нет естественного аналога оператора дифференцирования. Однако есть прямые аналоги операторов дробного дифференцирования, хорошо известные специалистам. А именно, рассматриваются сверточные операторы вида

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{O}_p} |x - y|^{-1-\alpha} f(y) dy.$$

Соответственно появляются p -адические аналоги дифференциальных операторов задаваемые формулами типа $L : I_\alpha + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — вещественная функция ("потенциал"). Спектральная теория таких операторов оказывается значительно более простой, чем для классических операторов Шредингера. Исмагилов получил формулы для асимптотики выражений $\text{Tr} \exp(-tL)$ при $t \rightarrow +0$, что в свою очередь позволяет получить асимптотику собственных чисел оператора L . Оказывается, что эти результаты допускают распространение на широкий класс сверточных операторов.

Наконец, отметим результат Исмагилова о представлении в виде произведения Рисса спектральной меры σ потока, возникающего при ограничении действия $\mathbb{R}$ на остаточную σ -

алгебру стационарного случайного блуждания по $\mathbb{R}$. Это произведение Рисса имеет вид

$$\prod_{k=1}^{\infty} |\sqrt{p_k} + \sqrt{1-p_k} e^{i\xi h_k}|^2,$$

где $p_k \in (0, 1)$ и $h_k \in \mathbb{R}$ суть параметры блуждания (вероятность неподвижности на k -ом шаге и соответственно величина смещения в противном случае). Найдено достаточное условие сингулярности меры σ .

Впервые связь произведений Рисса со спектральными мерами рассматривали Ф.Ледрапье (1970) и Ив Мейер (1974). К середине 80-х накопились разнообразные факты, развивающие эту связь применительно к самоподобным динамическим системам; они изложены в монографии Мартины Квефелек "Substitution dynamical systems - Spectral analysis опубликованной в серии Lecture Notes in Mathematics (1987). В последствии Ж.Бурген применил произведения Рисса к изучению динамических систем аппроксимационного ранга 1. Интересное применение произведений Рисса к построению $\mathbb{R}$ -действий спектральной кратности 1, обладающих свойством быстрого убывания корреляций, разработал А.Приходько.

В завершение нашего очерка мы желаем Раису Сальмановичу крепкого здоровья и новых математических воодушевлений.

Получено 05.11.2018 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

Михаил Михайлович Глухов (некролог)



20 ноября 1930 г. – 9 декабря 2018 г.

Ушёл из жизни замечательный человек, выдающийся математик, действительный член академии криптографии РФ, профессор Михаил Михайлович ГЛУХОВ.

Результаты М. М. Глухова по алгебре, по теории чисел, а также по их приложениям внесли замечательный вклад в развитие как теоретических, так и практических разделов математики. Его многогранная научно-организаторская деятельность и редакторская работа в журналах "Дискретная математика" и "Чебышевский сборник" всегда способствовали углублению отечественных научных исследований и притоку молодых научных кадров.

Получено 15.01.2019 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

Борис Анатольевич Дубровин (некролог)



6 апреля 1950 года — 19 марта 2019 года

19 марта 2019 года скончался профессор Борис Анатольевич Дубровин, заведующий лабораторией геометрических методов математической физики имени Н. Н. Боголюбова.

Борис Анатольевич в 1972 году окончил механико-математический факультет. В 1976 году защитил кандидатскую диссертацию. В этот же год был удостоен премии Московского математического общества. В 1984 году стал доктором наук.

Борис Анатольевич с 1975 года по 1993 работал на кафедре высшей геометрии и топологии. С 1993 года — профессор в SISSA, Триест (Италия).

С 2010 года заведовал лабораторией геометрических методов математической физики имени Н. Н. Боголюбова, созданной после объявления победителей гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих учёных в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования.

Мировую известность ему принесли совместные с С. П. Новиковым работы по теории периодических решений уравнения Кортевега–де Фриза и конечно-зонных периодических потенциалов в квантовой механике, а также работы, в которых были открыты скобки Пуассона гидродинамического типа, важные для теории солитонов. Широкую известность получили его работы по топологической квантовой теории поля, включающие созданную им теорию фробениусовых многообразий. Он нашел важные применения теории уравнения Пенлеве-I в задаче об опрокидывании в системах с малой дисперсией.

Выражаем глубокие соболезнования родным и близким покойного.

Получено 29.03.2019 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

Альберт Рубенович Есаян (некролог)



10 ноября 1937 года – 4 декабря 2018 года

Редакция Чебышевского сборника с глубоким прискорбием сообщают, что 4 декабря 2018 года на 82-году ушел из жизни Есаян Альберт Рубенович — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры информатики и информационных технологий, ведущий научный сотрудник Центра теории и методики обучения математике и информатике "Института стратегии развития образования РАО".

Альберт Рубенович Есаян в 1960 г. с отличием окончил Таджикский государственный университет с присуждением квалификации "Математик. Учитель математики средней школы". В 1964 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. В 1966 году получил звание доцента по кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского государственного университета. С 1968 года работал в Тульском государственном педагогическом университете им. Л. Н. Толстого.

Мы запоем его настоящим профессионалом своего дела, талантливым руководителем, добрым отзывчивым человеком.

Выражаем искреннее соболезнования семье, родным, близким, друзьям Альберта Рубеновича.

Получено 07.01.2019 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 1.

УДК 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-434-438

**Жизнь и научная деятельность
Альберта Рубеновича Есяяна**

Н. М. Добровольский, И. В. Денисов

Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Денисов Игорь Васильевич — доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.

*e-mail: den_tspu@mail.ru***Аннотация**

В статье приводятся краткие сведения о жизни и научной деятельности Альберта Рубеновича Есяяна.

Ключевые слова: Есяян А. Р., Красносельский М. А., Крейн С. Г., Симонов А. С.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:

Н. М. Добровольский, И. В. Денисов. Жизнь и научная деятельность Альберта Рубеновича Есяяна // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 434–438.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 1.

UDC 51(092)

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-1-434-438

**The life and scientific work of
Albert Rubenovich Esayan**

N. M. Dobrovol'skii, I. V. Denisov

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Denisov Igory Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.

e-mail: den_tspu@mail.ru

Abstract

The article provides brief information about the life and scientific activities of Albert Rubenovich Esayan.

Keywords: Esayan A. R., Krasnosel'skii M. A., Krein S. G., Simonov A. S.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

N. M. Dobrovol'skii, I. V. Denisov, 2019, "The life and scientific work of Albert Rubenovich Esayan", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 434–438.

В своей автобиографии, хранящейся в личном деле, Альберт Рубенович Есаян указал, что родился 10 ноября 1937 г. в г. Душанбе (город с 1929-го по 1961 год назывался Стали-набад). Здесь он окончил школу и в 1960 году – Таджикский государственный университет им. В. И. Ленина (образован в марте 1947 года, с 2008 года – Таджикский национальный университет) с присуждением квалификации "Математик. Учитель математики средней школы". Был оставлен на кафедре дифференциальных уравнений, где работал ассистентом в 1960–1961 гг. Параллельно в 1961–1962 гг. возглавлял станцию визуальных наблюдений искусственных спутников Земли.

В 1962 г. А. Р. Есаян поступил в аспирантуру Воронежского государственного университета (создан в 1918 году на базе Императорского Юрьевского университета, который был эвакуирован из Юрьева (ныне Тарту) в 1918 году в связи с угрозой германской интервенции. Дерптский (позже Юрьевский) университет в городе Дерпте был основан в 1802 году указом Александра I (первооснователем является шведский король Густав II Адольф, основавший его еще в 1632 году).

К началу 1960-х годов оформилась воронежская математическая школа, связанная в основном с именами Красносельского – Крейна – Соболева. История школы начинается с 1952 года, когда в Воронеж по приглашению В. И. Соболева приезжает Марк Александрович Красносельский (1920–1997, ученик М. Г. Крейна, один из создателей основ современного подхода к задачам нелинейного функционального анализа). Энергия М. А. Красносельского, искрящаяся доброжелательность и авторитет способствовали тому, что в скором времени в Воронеже оказалась замечательная плеяда талантливых математиков: С. Г. Крейн, Ю. Г. Борисович, Я. Б. Рутецкий, П. Е. Соболевский. Вокруг М. А. Красносельского бурлит математическая жизнь в университете и в городе.

В 1954 году в Воронеж приезжает Селим Григорьевич Крейн (1917–1999, ученик Н. Н. Боголюбова, специалист в области функционального анализа, теории вязкой жидкости, уравнениям в частных производных, один из создателей теории интерполяции линейных операторов). У него с М. А. Красносельским почти "родственные" отношения: старший брат С. Г. Крейна, признанный авторитет в области функционального анализа М. Г. Крейн, был научным руководителем М. А. Красносельского в Киевском университете. Два замечательных математика, две яркие личности сохранили добрые чувства друг к другу на протяжении всей своей жизни. Это в огромной степени способствовало той прекрасной одухотворённой атмосфере, которая царила в университете в это время.

Третьей личностью, которая создавала и поддерживала этот климат, был В. И. Соболев (1913–1995, ученик Л. А. Люстерника, специалист в области функционального анализа, автор широко известных учебников по функциональному анализу), человек редкой душевной красоты.

Это было время идей и их воплощения в жизнь. При университете благодаря методической настойчивости и целеустремлённости С. Г. Крейна был создан математический институт. С. Г. Крейн сумел создать и такое восхитительное явление как Воронежская Зимняя Математическая школа. Общеизвестно, что М. А. Красносельский и С. Г. Крейн сформировали

известную во всем мире школу по нелинейному анализу и операторным уравнениям. Однако, в конце 60-ых годов к огромной печали воронежских математиков состоялся переезд М. А. Красносельского в Москву, в Институт автоматики и телемеханики Академии наук СССР.

А. Р. Есаян оказался в Воронеже как раз в период расцвета математической школы. В 1962 г. он поступил в аспирантуру, где обучался по специальности "Функциональный анализ" под руководством профессора М. А. Красносельского. В 1964 г. досрочно была защищена диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по теме "Оценки спектра линейных положительных операторов". В том же году А. Р. Есаян вернулся в Душанбе и продолжил работу в Таджикском государственном университете им. В. И. Ленина уже в должности старшего преподавателя кафедры дифференциальных уравнений и заместителя декана физико-математического факультета.

Научная деятельность А. Р. Есаяна протекала в рамках активно развивающейся теории полуупорядоченных пространств и пространств с конусом. Характеристика этого направления подробно изложена в [1]. Отметим основные этапы проводимых исследований. В 1935 г. Л. В. Канторовичем была дана развернутая аксиоматика полуупорядоченных пространств. Его фундаментальные исследования легли в основу последующих многочисленных работ советских и зарубежных математиков.

Геометрический аспект теории полуупорядоченных пространств был развит М. Г. Крейном (1937 г.) в связи с некоторыми задачами проблемы моментов, теории интегральных операторов с положительными ядрами и матриц с положительными элементами. Конусом называется такое замкнутое выпуклое множество банахова пространства, которое вместе с каждым элементом x содержит весь луч $\lambda x : 0 \leq \lambda < \infty$, и которое не содержит полностью ни одну прямую. Конус K порождает полуупорядоченность: $x \leq y$, если $y - x \in K$.

М. Г. Крейн, его ученики и последователи установили ряд интересных и важных для приложений фактов, связанных с геометрическими свойствами конусов. В частности, в пространствах с конусом исследовались линейные положительные операторы. Линейный оператор, действующий в пространстве с выделенным конусом, называется положительным, если он оставляет этот конус инвариантным. В случае конечномерного пространства с конусом векторов с неотрицательными координатами класс положительных линейных операторов совпадает с классом операторов, порожденных матрицами из неотрицательных элементов. Интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds,$$

действующий в пространстве непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с выделенным конусом неотрицательных функций, положителен, если ядро $K(t, s)$ неотрицательно.

Для матриц с положительными элементами в силу теоремы Фробениуса — Перрона есть единственное собственное значение λ_0 , которому соответствует собственный вектор с положительными координатами. Абсолютные величины остальных собственных значений меньше λ_0 . Теорема Фробениуса — Перрона была перенесена на интегральные операторы с положительными непрерывными ядрами Ентчем, что послужило отправной точкой для серии работ по теории линейных положительных операторов. В этих работах были выделены различные классы положительных операторов, имеющих, по крайней мере, один собственный вектор в конусе; классы операторов, у которых такой собственный вектор единственен; исследована кратность соответствующего собственного числа; проведено сравнение с другими собственными значениями. Первые результаты для вполне непрерывных операторов были получены М. А. Рутманом (1938 г.), затем важные теоремы доказал М. Г. Крейн (1939—1940 гг.). Новые классы операторов изучались в работах М. А. Красносельского, Л. А. Ладыженского, И. А. Бахтина, В. Я. Стеценко, А. Р. Есаяна, С. Н. Мухтарова и др. (1954—1966 гг.).

Теория полуупорядоченных пространств получила свое развитие как в направлении решения внутренних задач этой теории, так и в направлении применений ее к самым различным задачам. В Душанбе А. Р. Есяян, С. Н. Мухтаров и другие применяли методы теории конусов для получения оценок спектральных радиусов операторов и для решения других задач.

В 1965 г. А. Р. Есяян получил диплом кандидата физико-математических наук и возглавил кафедру функционального анализа и дифференциальных уравнений Душанбинского государственного университета. В 1966 г. А. Р. Есяяну присвоено ученое звание доцента.

В 1966 г. А. Р. Есяян участвовал в работе Международного конгресса математиков в г. Москве, где совместно с В. Я. Стеценко представил научное сообщение по теме "Локализация спектра линейного оператора".

В 1968 г. А. Р. Есяян уезжает из Душанбе, и на этом заканчивается первый период его научной деятельности, связанный с оценками спектров операторов. В этот период с 1963 по 1967 г., согласно [2], им опубликовано 25 научных работ: в ДАН ТаджССР (13 работ), в Докладах АН СССР (1 работа), в Успехах математических наук (1 работа), в Математическом сборнике (1 работа), в Сибирском математическом журнале (1 работа) и в других изданиях. 7 работ не имеют соавторов, 12 работ – в соавторстве с В. Я. Стеценко (1935–2006, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Таджикской АН, с 2000 года работал в Ставропольском государственном университете на кафедре математического анализа), 4 работы – в соавторстве с Тимуром Сабировым (1940, кандидат физико-математических наук).

С сентября 1968 года начинается тульский период жизни и деятельности А. Р. Есяяна, который продолжался до сентября 2018 года, ровно пятьдесят лет! В 1968 г. он поступает на должность доцента кафедры элементарной математики Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого (основан в 1938 г.). С 1969 г. — доцент кафедры высшей алгебры и геометрии, с 1972 г. — заведующий кафедрой алгебры и вычислительной математики.

Тульский период связан с подготовкой учителей математики и информатики. В 1986 г. А. Р. Есяяном была создана кафедра информатики и вычислительной техники, разработан курс вычислительной математики и программирования, а позже курс "Основы информатики и вычислительной техники". В 1991 г. им было опубликовано учебное пособие для студентов, изданное в издательстве "Просвещение" [3].

Говоря об Альберте Рубеновиче, нельзя не вспомнить еще об одном представителе воронежской математической школы — А. С. Симонове (1932–2013, ученик Л. М. Лихтарникова и С. Г. Крейна, кандидат физико-математических и доктор педагогических наук), который переехал в Тулу в 1967 году. Несомненно, что дух воронежской школы сопровождал А. Р. Есяяна и А. С. Симонова на протяжении всей их жизни. Вокруг этих людей все время бурлила творческая деятельность. Оба они любили работать с молодежью и приобщать студентов к научным исследованиям. Не прерывалась и связь с воронежской математической школой. Были организованы поездки студентов и молодых преподавателей математического факультета ТГПУ им. Л. Н. Толстого в Воронежскую Зимнюю Математическую школу. Это принесло свои плоды: один из выпускников ТГПУ стал учеником С. Г. Крейна, кандидатом и доктором физико-математических наук.

В 1994 г. при кафедре информатики и вычислительной техники была открыта аспирантура по специальности 13.00.02 — теория и методика обучения и воспитания (информатика). Среди учеников А. Р. Есяяна — доценты Шлапаков И. М., Мартынюк Ю. М., Ваныкина Г. В., Сундукова Т. О., кандидаты педагогических наук Соловьева Т. А., Даниленко С. В. и представитель Республики Йемен Галейб Нашван. Долгое время А. Р. Есяян руководил семинаром по информационным технологиям для учителей г. Тулы и области.

В 1991 г. Альберту Рубеновичу было присвоено звание профессора. В 2001 г. он успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора педагогических наук по теме "Теория и методика обучения алгоритмизации на основе рекурсии в курсе информатики педагогического вуза" по специальности 13.00.02 — теория и методика обучения и воспитания (информатика). В том же году он стал действительным членом Академии информатизации образования.

В последние годы научные интересы А. Р. Есяяна были связаны с исследованием возможностей использования современных вычислительных систем типа Maple, Mathematica, РТС Mathcad Prime, MATLAB, Maxima и др. в обучении информатике и математике в школе и в вузе, а также с гнездовыми массивами и рекурсивными методами решения задач.

С 2002 г. по 2018 г. А. Р. Есяян являлся ведущим исполнителем ряда проектов, поддержанных грантами РФФИ. В рамках выполнения этих проектов им был написан целый ряд учебных пособий и монографий по математическим пакетам (см. [4]), которые пользуются большим спросом среди преподавателей и студентов различных вузов страны.

А. Р. Есяян был членом Диссертационного совета при Московском городском педагогическом университете.

С июня 2015 г. А. Р. Есяян работал также ведущим научным сотрудником Центра теории и методики обучения математике и информатике ФГБНУ ИСРО РАО.

Научные и педагогические успехи А. Р. Есяяна отмечены рядом поощрений и наград:

1. Значок "Отличник народного просвещения".
2. Ветеран труда.
3. Грант губернатора "Почетный работник высшего образования в сфере науки и техники" за "Разработку рекурсивных и адаптивных алгоритмов численного интегрирования некоторых многомерных физических задач с использованием систем компьютерной математики".
4. Диплом фонда развития отечественного образования за лучшую научную работу среди преподавателей ВУЗов.
5. Почетная грамота Департамента образования Тульской области.

4 декабря 2018 г. Альберт Рубенович ушел из жизни. Он умер в с. Ромашково Одинцовского района Московской области, похоронен в г. Туле.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. История отечественной математики. В четырех томах. Том 4, книга 1. 1917 – 1967. Киев, 1970.
2. Математика в СССР 1958–1967. Том 2. Биобиблиография. Выпуск 1.
3. Есяян А. Р., Ефимов В. И., Пащенко Э. А., Добровольский Н. М., Лапицкая Л. П. Информатика: Учебное пособие для педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1991.
4. АЛЬБЕРТ РУБЕНОВИЧ ЕСАЯН (к семидесятипятилетию). Добровольский Н. М., Лапицкая Л. П., Мартынюк Ю. М., Реброва И. Ю., Торина Е. Г., Чубариков В. Н. // Чебышевский сборник. 2012. – Т. 13. – № 3 (43). – С. 106–110.

Получено 28.02.2019 г.

Принято в печать 10.04.2019 г.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 20 Выпуск 1

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: chubarik2009@live.ru

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.

e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Артамонов Вячеслав Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН) по научной работе, директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.

e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологии и сервиса Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры Математика 1 Финансового университета при Правительстве РФ, профессор механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, зав. Отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН, Главный редактор «Историко-математических исследований», Президент Международной Академии истории науки.

e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Ярославского государственного университета.

e-mail: durnev@univ.uniya.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, заведующий Отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Карташов Владимир Константинович — кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Волгоградского государственного социально-педагогического университета.

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета им. Ю. А. Гагарина.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Латышев Виктор Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения

Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.

e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского Государственного университета им. Х. М. Бербекова.

e-mail: urusbi@rambler.ru

Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры Московского педагогического государственного университета.

e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана, Рамат-Ган, Израиль.

e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович (Белоруссия) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси.

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Касьянов Павел Олегович (Украина) — доктор физико-математических наук, профессор, Учебно-научный комплекс «Институт прикладного системного анализа» НТУУ «КПИ» МОН и НАН Украины.

e-mail: kasyanov@i.ua

Лауринчикас Антанас (Литва) — доктор физико-математических наук, профессор, Действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета.

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин (Китай) — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета.

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов (Азербайджан) — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

e-mail: rmi@lan.ab.az

Рахмонов Зарулло Хусейнович (Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН.

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур (Ливан) — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз.

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло (Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана, ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки.

e-mail: rektor@kgu.tj

THE EDITORIAL BOARD

Volume 20, Issue 1

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2009@live.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of theoretical Informatics of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — doctor of pedagogical sciences, professor, head of chair of the mathematical physics of the Moscow Pedagogical State University, honored worker of the higher school of the Russian Federation.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

THE EXECUTIVE SECRETARY

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science of the Tula State University; associate Professor of algebra, mathematical analysis and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

THE MEMBERS OF THE EDITORIAL BOARD:

Artamonov Vyacheslav Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of Higher algebra's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Bykovsky Victor Alekseevich — doctor of physico-mathematical Sciences, correspondent member of RAS, Deputy Director of the Federal state institution of science, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS) on scientific work, Director of the Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor of algebra and number theory Department of St. Petersburg University, President of the Foundation. L. Euler.
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of technical sciences, professor, professor of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Chair of Elasticity at Mechanical and Mathematical Department of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gritsenko Sergey Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the chair Mathematics of the 1 Financial University under the Government of the Russian Federation, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the department of probability theory of mechanics and mathematics of Moscow state University, head of the cabinet of history and methodology of mathematics and mechanics, head. department of history of physical and mathematical sciences of the Institute of history of science and technology RAS, editor-in-chief of "Historical and mathematical research president of the International Academy of history of science.

e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of computer security and mathematical methods of data processing of the Yaroslavl state a public University. P. G. Demidov.

e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the Academy of cryptography of the Russian Federation, head of the chair of mathematical statistics and random processes mechanics and mathematics faculty Moscow state University of a name of M. of Century University, head of the Department of discrete mathematics Mathematical Institute. Century A. Steklov mathematical Institute RAS.

e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Valery Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of applied mathematics and Informatics of Institute of Applied Mathematics and Computer Science of the Tula State University.

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Kartashov Vladimir Konstantinovich — candidate of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra, geometry and Informatics of the Volgograd State Social and Pedagogical University.

e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, the leading researcher of the Department of Algebra and Number Theory of Steklov Mathematical Institute of RAS.

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, professor of the department of applied mathematics and systems analysis, Saratov State Technical University.

e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Latyshev Viktor Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of Russian Academy of Sciences, RAS Counselor of St. Petersburg department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, president of the St. Petersburg Mathematical society.

e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor, Department of applied mathematics of the Ulyanovsk State University.

e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yuriy Valentinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of RAS, head of number theory's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member Russian Academy of Natural Sciences, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.

e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of algebra and differential equations Kabardino-Balkar State University. After H. M. Berbekov

e-mail: urusbi@rambler.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, head of number theory's chair of the Moscow Pedagogical State University, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor, professor Bar Ilan University, Ramat Gan, Israel.

e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich (Belorussia) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, the main researcher of the Belorussia Institute of Mathematics of NAS.

e-mail: bernik@im.bas-net.by

Kasyanov Pavel Olegovich (Ukraine) — doctor of physical and mathematical Sciences, head of the research department at Educational and Scientific Complex "Institute for Applied System Analysis" of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Politechnic Institute" of the MES of Ukraine and NAS of Ukraine.

e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas (Lithuania) — Full member of the AS in Lithuania, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of probability theory's and number theory's chair of the Vilnius University.

e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping (China) — Ph.D, professor, head of the Research Center for Modern Analysis of Mathematics of the Beijing Normal University.

e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Misir Jumayil oglu Mardanov (Azerbaijan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director of the institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan.

e-mail: rmi@lan.ab.az

Rahmonov Zarullo Huseinovich (Tajikistan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the Republic of Tajikistan AS, director of the Institute of Mathematics of the Tajik AS.

e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Saliba Holem Mansour (Lebanon) — Ph.D. Assistant Professors of faculty of natural & applied sciences of Notre Dame University Louaize

e-mail: qwe123@rocketmail.com

Tabari Abdullo Habibullo (Tajikistan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Republic of Tajikistan AS, rector of the Kulob State University named after Abuabdulloh Rudaki.

e-mail: rektor@kgu.tj

TABLE OF CONTENTS

Volume 20 Issue 1

From the editor	3
СОДЕРЖАНИЕ	4
A. Dubickas, R. Macaitienė. Some Moments in the Life of Antanas Laurinčikas: the Search for Universality	6
A. Balčiūnas, R. Macaitienė, D. Šiaučiūnas. Joint discrete universality for L -functions from the Selberg class and periodic Hurwitz zeta-functions	46
Yu. A. Basalov. Estimation of the constant of the best simultaneous diophantine approximations for $n = 5$ and $n = 6$	66
A. Vaiginytė. Extension of the Laurinčikas — Matsumoto theorem	82
A. D. Gvishiani, S. M. Agayan, Sh. R. Bogoutdinov. Investigation of systems of real functions on two-dimensional grids using fuzzy sets	94
N. M. Glazunov. p -adic L -functions and p -adic multiple zeta values	112
D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov. Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential	131
N. N. Dobrovol'skii. One model Zeta function of the monoid of natural numbers	148
N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov. Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis	164
N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova. Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers	180
A. Dubickas. On Newman polynomials without roots on the unit circle	197
E. I. Kompantseva, T. Q. T. Nguyen. Algebraically compact abelian TI -groups	204
E. I. Kompantseva. Multiplications on mixed abelian groups	214
M. B. Levin. On a bounded remainder set for (t, s) sequences I	224
V. P. Platonov, G. V. Fedorov. The criterion of periodicity of continued fractions of key elements in hyperelliptic fields	248
A. Rimkevičienė. A generalized limit theorem for the periodic Hurwitz zeta-function	261
L. A. Tolokonnikov. Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide	272
V. N. Chubarikov. Generalized Gaussian sums and Bernoulli polynomials	284
BRIEF MESSAGE	
A. Ghyasi. An one application of Dirichlet integral	294

A. N. Kormacheva. About the partial quotients of one of the continued fractions	298
A. V. Mikhlyayeva. Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets	307
REPORTS BY YOUNG SCIENTISTS	
A. N. Blagovisnay. Classical radicals and the Martindale centroid of Artin and Noetherian Lie algebras	313
HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS	
A. E. Gvozdev, A. N. Sergeev, A. N. Chukanov, S. N. Kutepov, D. V. Maliy, E. V. Tsoy, A. A. Kalinin. Excerpts on the history of superplasticity state of metal systems	354
R. A. Zhukov. Some optimization problems of the management of socio-ecological-economic systems	372
I. O. Lyuter. The religious and legal aspect of al-Khwarizmi's algebra and its status in the hierarchy of sciences of al-Farabi	391
A. N. Chukanov, A. E. Gvozdev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, P. N. Medvedev, D. V. Maliy, A. A. Yakovenko, I. F. Shiroky. Historical aspects of mathematical analysis of metal material deformation diagrams	405
MEMORABLE DATE	
Victor Nikolaevich Latyshev — to 85-th anniversary	424
Yu. A. Neretin, A. M. Stepin. To the 80th anniversary of Rais Salmanovich Ismagilov	425
Mikhail Mikhailovich Glukhov (obituary)	431
Boris Anatolyevich Dubrovin (obituary)	432
Albert Rubenovich Esayan (obituary)	433
N. M. Dobrovol'skii, I. V. Denisov. The life and scientific work of Albert Rubenovich Esayan	434
РЕДКОЛЛЕГИЯ	439
THE EDITORIAL BOARD	443