ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 4 раза в год

Свидетельство о регистрации
СМИ: ПИ № ФС77-47855
ISSN 2226-8383

Том XVIII

Выпуск 4 (64)

Тула
2017

Учредитель: ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026,

г. Тула, пр. Ленина, 125, каб. 310

Тел: +79156812638, 8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL: http://www.chebsbornik.ru

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др.
Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Выпуск осуществлен при финансовой поддержке РФФИ, грант 15-01-01540а.

Журнал выходит под эгидой Министерства образования и науки Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического университета, Тульского государственного университета.

---

[1]Полные сведения см. стр. 356, 359.

От редакции

Данный выпуск Чебышевского сборника посвящен столетию со дня рождения выдающегося советского и российского математика, доктора физико-математических наук, профессора Николая Михайловича Коробова (23.11.1917 — 25.10.2004).

Сборник открывается статьёй о теоретико-числовом методе в приближенном анализе, в которой приводятся сведения о жизни и научной деятельности Николая Михайловича Коробова.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 18 Выпуск 4

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3+511.9.+51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-6-85

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОЙ МЕТОД В ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИЗЕ[1]

С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков (г. Москва), И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов (г. Тула), О. А. Пихтилькова (г. Оренбург)

Аннотация

В обзоре рассматриваются вопросы истории и современного развития теоретико-числового метода в приближенном анализе, основанного в работах Н. М. Коробова и его учеников. Рассмотрена связь теории равномерного распределения и теоретико-числового метода в приближенном анализе. Показано, что предпосылкой возникновения теоретико-числового метода был интегральный критерий Г. Вейля. Разобраны основные типы теоретико-числовых сеток: неравномерные, параллелепипедальные и алгебраические. Освящена деятельность семинара **трёх К**, приводятся биографические сведения о Н. М. Коробове и краткие сведения о руководителях семинара и его участниках.

Описаны основные направления исследований по теоретико-числовому методу в приближенном анализе. Рассмотрены вопросы информационного обеспечения теоретико-числового метода в приближенном анализе с помощью ПОИВС ТМК.

Более подробно в обзоре излагаются вопросы поиска оптимальных коэффициентов для параллелепипедальных сеток, теории гиперболической дзета-функции решёток, теории алгебраических сеток и её связь с теорией диофантовых приближений.

В частности, обсуждается алгебраическая теория полиномов Туэ. Построение теории опирается на изучение подмодулей $\mathbb{Z}[t]$-модуля $\mathbb{Z}[t]^2$. Рассматриваются подмодули, заданные одним определяющим соотношением и одним определяющим соотношением k-ого порядка. Более сложным подмодулем является подмодуль заданный одним полиномиальным соотношением. Подмодули пар Туэ j-ого порядка напрямую связаны с полиномами Туэ j-ого порядка. С помощью алгебраической теории подмодулей пар Туэ j-ого порядка удалось получить новое доказательство теоремы М. Н. Добровольского (старшего) о том, что для каждого порядка j существуют два основных полинома Туэ j-ого порядка, через которые выражаются все остальные. Основные полиномы определяются с точностью до унимодулярной многочленной матрицы над кольцом целочисленных многочленов.

Рассматриваются дробно-линейные преобразования ТДП-форм. Показано, что при переходе от ТДП-формы, связанной с алгебраическим числом α к ТДП-форме, связанной с остаточной дробью к алгебраическому числу α, ТДП-форма преобразуется по закону, аналогичному преобразованию минимальных многочленов, а числители и знаменатели соответствующих пар Туэ преобразуются с помощью дробно-линейного преобразования второго рода.

Кроме этого, обсуждается новая классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей на основе их разложения в цепные дроби.

Показано, что для чисто-вещественных алгебраических иррациональностей α степени $n \geqslant 2$, начиная с некоторого номера $m_0 = m_0(\alpha)$, последовательность остаточных дробей α_m является последовательностью приведённых алгебраических иррациональностей.

Найдены рекуррентные формулы для нахождения минимальных многочленов остаточных дробей с помощью дробно-линейных преобразований. Композиция этих дробно-линейных преобразований является дробно-линейным преобразование, переводящем систе-

[1]Работа выполнена по грантам РФФИ № 15-01-01540а, №16-41-710194р_центр_а

му сопряжённых к алгебраической иррациональности α в систему сопряжённых к остаточной дроби, обладающую ярко выраженным эффектом концентрации около рациональной дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

Установлено, что последовательность минимальных многочленов для остаточных дробей образует последовательность многочленов с равными дискриминантами.

Перечислены некоторые наиболее актуальные нерешенные проблемы.

Ключевые слова: теоретико-числовой метод, равномерное распределение, неравномерные сетки, параллелепипедальные сетки, алгебраические сетки, гиперболическая дзета-функция решётки, алгебраическая теория полиномов Туэ, приведённые алгебраические иррациональности, классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей.

Библиография: 238 названий.

NUMBER-THEORETIC METHOD IN APPROXIMATE ANALYSIS

S. S. Demidov, E. A. Morozova, V. N. Chubarikov (Moscow), I. Yu. Rebrov, I. N. Balaba, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, L. P. Dobrovol'skaya, A. V. Rodionov (Tula), O. A. Pikhtil'kova (Orenburg)

Abstract

Into the image it is considered issues of history and the modern development of number-theoretic method in the approximate analysis which based in the work of N. M. Korobov and his disciples. It is reviewed the connection of the theory of uniform distribution and theoretical-numeric method in approximate analysis. It is shown that the condition for the theoretical-numeric method was the integral criterion G. Weyl. It is disassembled main types of number-theoretic nets: uneven, parallelepipedal and algebraic. It is consecrated the activities of the workshop **three K**, it is explored the biographical information about N. M. Korobov and brief information about the leaders of the seminar and its participants.

It is described the main directions of research in theoretical-numeric method in approximate analysis. It is examined the issues of information security theoretic-numeric method in approximate analysis using POIS TMK.

More detailed it is outlined the issues of finding the optimal coefficients for parallelepipedal nets, the theory of the hyperbolic Zeta function of lattices, the theory of algebraic nets and its relationship with the theory of Diophantine approximations.

In particular, we discuss the algebraic theory of polynomials Tue. The theory is based on the study of submodules of $\mathbb{Z}[t]$-module $\mathbb{Z}[t]^2$. It is considered of submodules that are defined by one defining relation and one defining relation k-th order. More complex submodule is the submodule given by one polynomial relation. Sub par Tue j-the order are directly connected with polynomials Tue j-th order. Using the algebraic theory of pairs of submodules of Tue j-th order is managed to obtain a new proof of the theorem of M. N. Dobrowolski (senior) that for each j there are two fundamental polynomial Tue j-th order, which are expressed through others. Basic polynomials are determined with an accuracy of unimodular polynomial matrices over the ring of integer polynomials.

It is discussed the fractional-linear transformation of TDP-forms. It is shown that the transition from TDP-forms associated with an algebraic number α to TDP-the form associated with the residual fraction to algebraic number α, TDP-form is converted under the law, similar to the transformation of minimal polynomials and the numerators and denominators of the respective pairs of Tue is converted using the linear-fractional transformations of the second kind. Besides, we discuss the new classification of purely real algebraic irrationalities which based on their expansion in continued fractions. It is shown that for purely real algebraic irrationalities α of degree $n \geqslant 2$, starting from some numbers $m_0 = m_0(\alpha)$, the sequence of residual fractions α_m is a sequence given the algebraic irrationalities.

It is found recurrence the formula for finding the minimal polynomials of the residual fractions using the linear-fractional transformations. The compositions of these linear-fractional transformations is a linear-fractional transformation that maps the system conjugate to algebraic irrationascenic spots α in the system of associated to the residual fraction, with a pronounced effect of concentration nearly rational fraction $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

It is established that the sequence of minimal polynomials for residual fractions forms a sequence of polynomials with equal discriminants.

Lists some of the most pressing unsolved problems.

Keywords: number-theoretic method, uniform distribution,nonuniform grid, parallelepipedal nets, algebraic nets, hyperbolic dzeta-function of lattices, algebraic theory of polynomials Tue, given an algebraic irrationality, the classification of purely real algebraic irrationalities.

Bibliography: 238 titles.

Посвящается 100-летию со дня рождения
профессора Николая Михайловича Коробова
и 25-летию памяти
профессора Николая Николаевича Ченцова

1. Введение

Эта обзорная работа посвящёна столетию со дня рождения Н. М. Коробова и 25-летию памяти Н. Н. Ченцова, которые вместе с Н. С. Бахваловым были основателями теоретико-числового метода в приближенном анализе.

Теоретико-числовой метод приближенного анализа был создан в конце 50-ых — начале 60-ых годов в рамках работы семинара под руководством Н. С. Бахвалова, Н. М. Коробова и Н. Н. Ченцова (семинар **трёх К**). Этот семинар был организован по предложению Н. Н. Ченцова, который работал в группе И. М. Гельфанда по математическому обеспечению отечественного атомного проекта.

Выделение класса E_s^α периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье позволило, используя средства гармонического анализа и аналитической теории чисел, получить оптимальные результаты в теории многомерных квадратурных формул. В этой области работали многие известные математики в нашей стране и за рубежом: Н. М. Коробов [117]–[140], Н. С. Бахвалов [4]–[7], Н. Н. Ченцов [193], Хуа Ло Кен [223], Э. Главка [221]–[222], К. К. Фролов [189]–[192], В. А. Быковский [15]–[20] и многие другие.

Вопросы построения многомерных квадратурных формул тесно связаны с теорией равномерного распределения, основанной Г. Вейлем [237]. В этой области хорошо известны фундаментальные работы К. Рота по оценке квадратичного отклонения [229]–[230] и В. Шмидта по оценке q-ого отклонения [231]–[232].

Теоретико-числовые алгоритмы численного интегрирования имеют существенное значение при расчете интегралов взаимодействия в квантовой химии [141] и при расчете наноразмерных ферромагнитных гетеросистем. Другой класс интегралов, где применимы эти методы, возникает в физике высоких энергий.

За рубежом аналог метода оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова был предложен на три года позже (1962 г.) Е. Главкой [221]. Он назвал параллелепипедальные сетки с оптимальными коэффициентами сетками с "хорошими точками". В результате, один и тот же объект вошел в позднейшие публикации и вычислительную практику с различными названиями и ссылками на разных авторов, хотя в последнее время даже австрийские математики ссылаются на работы Н. М. Коробова, восстанавливая историческую справедливость.

Результаты работы семинара **трех К** за первые шесть лет работы были отражены в монографии Н. М. Коробова в 1963 г. [127] (второе издание вышло в 2004 г. [140]). За рубежом этой проблеме были посвящены различные монографии [222], [223], [234].

Таким образом, мы видим, что мотивом организации научной деятельности по разработке новых многомерных квадратурных формул было решение жизненно важных проблем вычислительной практики, возникших в ходе выполнения отечественного атомного проекта. Поэтому история развития теоретико-числового метода в приближенном анализе делится на две части.

Первая часть — это открытая теоретическая часть, в которой и были получены первые результаты, и которая продолжала успешно развиваться все прошедшие 60 лет.

И вторая часть — это прикладная, закрытая часть, о которой можно только догадываться.

На первый взгляд, мы сталкиваемся с парадоксальной ситуацией разрыва связи между мотивирующей причиной исследований и самими исследованиями. Но здесь вступает в силу общий методологический закон научных исследований — внутренняя логика предметной области является движущей силой дальнейшего развития.

Дело всё в том, что были достаточно быстро выделены фундаментальные проблемы, с которыми связано решение основных задач, стоящих перед теоретико-числовым методом в приближенном анализе, многие из которых остаются открытыми и по настоящее время.

Отметим ещё один важный методологический момент истории становления теоретико-числового метода в приближенном анализе. Семинар **трех К** был эффективной формой организации исследований. Сейчас трудно судить об административно-организационных аспектах функционирования данного семинара. Вопрос о существовании или отсутствии в архивах Математического института соответствующих документов остается открытым, а участников тех событий практически не осталось, но можно и по тем крохам доступной информации делать вывод, что по современным понятиям семинар был успешной формой организации инновационной деятельности. Надо отметить, что такая организация исследований была и остается типичной формой организации научных исследований как на мехмате МГУ, так и в Математическом институте им. В. А. Стеклова.

В настоящее время у некоторых исследователей возникает иллюзия, что если не хватает точности вычислений для расчета многомерных задач, то надо перейти к использованию более производительной техники и проблема будет решена, но это глубокое заблуждение. Теоретический анализ вычислительных проблем показывает, что «проклятие размерности» реально существующий феномен, связанный с экспоненциальным ростом трудоемкости вычисления многомерных интегралов. Как показано в работах И. М. Гельфанда и Н. Н. Ченцова при вычислениях континуальных интегралов возникает необходимость численного вычисления 100 и 400-кратных интегралов [39]–[40], [193]. Правильно построенные вычислительные схемы позволяли решать такие задачи на вычислительной технике 60-ых годов, а лобовое решение этих задач невозможно даже на современных суперкомпьютерах.

Цель данного обзора — рассмотреть основные этапы становления метода оптимальных коэффициентов в работах отечественных математиков, представителей научной школы профессора Н. М. Коробова. При этом мы будем делать и некоторые методологические комментарии.

Уже из краткого перечисления основных направлений исследований по теоретико-числовому методу в приближенном анализе видно, что исследования в этой области носили интегративный характер, требующий привлечения методов различных математических теорий. Уже в следующем разделе мы покажем как потребности практики, продиктованные решением жизненно важных проблем, привели к возникновению нового направления исследований в математике.

2. Теория равномерного распределения и теоретико-числовой метод в приближенном анализе

За шестьдесят лет развития теоретико-числового метода с 1957 года, когда вышла первая работа [117] Н. М. Коробова по этому направлению исследований, с которой и начинается отсчёт в становлении теоретико-числового метода в приближенном анализе, было сделано значительное количество работ десятков авторов и в нашей стране и зарубежом. Краткая история возникновения этого метода описана её основателем в статье [134].

2.1. Теоретические предпосылки

Теоретические предпосылки теоретико-числового метода восходят ещё к работе [237] Г. Вейля, вышедшей в 1916 году, в которой, с одной стороны, содержался интегральный критерий равномерного распределения последовательности по модулю 1, с другой стороны, в этой работе были получены первые нетривиальные оценки тригонометрических сумм.

Именно применение оценок А. Вейля [235] рациональных тригонометрических сумм было основополагающим при исследование первого класса теоретико-числовых сеток — неравномерных сеток.

Существенное изменение теории и практики вычисления кратных интегралов связано с появлением метода оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова. Центральной проблемой в этом направлении исследований остается вопрос о построении экономных алгоритмов вычисления оптимальных коэффициентов и оценка их качества.

В 1916 году в работе [237], с которой обычно ведется отсчет теории равномерного распределения, Г. Вейль установил интегральный критерий равномерного распределения бесконечной последовательности точек в многомерном единичном кубе, который устанавливает принципиальную связь между понятием равномерного распределения и вопросами численного вычисления определенных интегралов по многомерному кубу. Он даже не формулирует этот критерий в виде теоремы.

"Для получения критерия равномерного распределения предположим, что числа $\alpha_n \mod 1$ *этому закону удовлетворяют. Я утверждаю тогда, что для любой ограниченной, интегрируемой в смысле Римана периодической с периодом 1 функции* $f(x)$ *можно сделать вывод о существовании предельного равенства*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} f(\alpha_h) = \int\limits_0^1 f(x)dx; \tag{1}$$

т. е. образованное при помощи дискретной совокупности чисел α_n *среднее значение функции совпадает с непрерывным средним значением* $\int\limits_0^1 f(x)dx$*. "*[2]

Многомерный случай данного интегрального критерия вообще не упоминается в этой работе ни в каком виде, хотя подразумевается, что он справедлив.

Необходимо отметить, что вопросы численного интегрирования не были предметом этой работы Г. Вейля, а появление интегрального критерия являлось важной ступенькой в доказательстве критерия равномерного распределения последовательности, выраженного в терминах тригонометрических сумм.

Теорема 1. [3]*(***Критерий Г. Вейля***) Если для каждого целого числа* $m \neq 0$ *выполняется предельное соотношение* [4]

$$\sum_{h=1}^{n} e(m\alpha_h) = o(n), \tag{2}$$

то числа $\alpha_n \mod 1$ *удовлетворяют закону всюду равномерного плотного распределения.*

А также многомерного критерия Г. Вейля.

Теорема 2. [5] *(***Многомерный критерий Г. Вейля***) Последовательность точек* $\alpha(n)$ *заполняет* $\Re_p$ *всюду равномерно плотно, если для любой системы целых, не обращающихся одновременно в нуль чисел* $m_1, m_2, \ldots, m_p$ *выполняется предельное соотношение*

$$\sum_{h=1}^{n} e(m_1\alpha_1(h) + m_2\alpha_2(h) + m_p\alpha_p(h)) = o(n). \tag{3}$$

Таким образом, вопрос о равномерном распределении последовательностей свелся к вопросу об оценке модуля соответствующих тригонометрических сумм. И в этой работе Г. Вейль предложил новый метод получения нетривиальных оценок тригонометрических сумм с полиномами. Эти суммы стали называться суммами Г. Вейля, а метод их оценки — методом Г. Вейля.

Именно оценки Г. Вейля тригонометрических сумм стали фундаментом одного из общих и универсальных методов теории чисел — метода тригонометрических сумм.

[2][237], стр. 58

[3][237], стр. 59 — 60

[4]Здесь и далее $e(x) = e^{2\pi i x}$.

[5][237], стр. 63, через $\Re_p$ Г. Вейль обозначает замкнутое p-мерное многообразие, получающиеся из обычного p-мерного пространства путем объединения в одну-единственную "точку" каждую систему сравнимых по модулю 1 точек (см. стр. 62).

Теория равномерного распределения традиционно относится к теории чисел, поэтому не случайно, что именно Н. М. Коробову — специалисту по теории чисел и тригонометрическим суммам принадлежит выдающийся вклад в теорию построения многомерных квадратурных формул (говорят еще — кубатурных).

Отметим, что это произошло в период, когда вычислительная практика с помощью ЭВМ приступила к решению сложных многомерных задач, а никаких алгоритмов, успешно справляющихся с проклятием размерности[6], кроме метода Монте-Карло с вероятностной погрешностью $O(N^{-\frac{1}{2}})$, не было.

Прежде чем двигаться дальше в описание теоретико-числового метода в приближенном анализе, дадим краткий обзор собственно теории равномерного распределения по модулю 1.

Теория равномерного распределения возникла в связи с поставленным Лагранжем вопроса о наложении колебаний, который возник в астрономии при изучении вековых изменений величин перегелия и долготы узла (см. [237], стр. 68). В этой области работали П. Боль [210], В. Серпинский [233], Г. Вейль [236].

Важным этапом в теории равномерного распределения стало введение ван дер Корпутом [214] понятия отклонения и формулировка вопроса об ограниченности отклонения. Отрицательный ответ на этот вопрос дала Ардене-Эренфест в 1949 г. [207]. Существенно более сильный результат получил К. Рот в 1954 г. [229] в работе, в которой он ввёл понятие квадратичного отклонения сетки и доказал что для произвольной сетки из N точек справедлива оценка снизу $D_{s,2}(N) >> \ln^{s-1} N$, где $D_{s,2}(N)$ — квадратичное отклонение сетки из N точек в s-мерном кубе $G_s = [0;1)^s$.

В 1916 году в работе [237], с которой обычно ведется отсчет теории равномерного распределения, Г.Вейль установил интегральный критерий равномерного распределения бесконечной последовательности точек в s-мерном единичном кубе G_s. Согласно этому критерию бесконечная последовательность точек $X = \{\vec{x}_0, \ldots, \vec{x}_N, \ldots\}$ из G_s равномерно распределена тогда и только тогда, когда для любой интегрируемой по Риману функции $f(\vec{x})$ справедливо равенство

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\vec{x_k}) = \iint\limits_{Gs} f(\vec{x}) d\vec{x}. \tag{4}$$

Равенство (4) можно переписать в виде квадратурной формулы

$$\iint\limits_{Gs} f(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\vec{x}_k) - R_N(f), \qquad \lim_{N\to\infty} R_N(f) = 0. \tag{5}$$

Если в равенстве (5) взять в качестве $f(\vec{x})$ характеристическую функцию $\chi(\vec{x}, \vec{\alpha})$ прямоугольной области $\Pi(\vec{\alpha}) = [0; \alpha_1) \times \ldots \times [0; \alpha_s)$, то получим связь между погрешностью квадратурной формулы и локальным отклонением $D(X_N, \vec{\alpha})$:

$$R_N[\chi] = \frac{1}{N} D(X_N, \vec{\alpha}),$$

$$D(X_N, \vec{\alpha}) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi(\vec{x_k}, \vec{\alpha}) - N \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_s,$$

где $X_N = \{\vec{x}_0, \ldots, \vec{x}_{N-1}\}$ – сетка, образованная из первых N членов бесконечной последовательности X. Здесь сразу необходимо подчеркнуть, что понятие последовательности допускает

[6]Под проклятием размерности специалисты подразумевают ситуацию, когда погрешность приближенного интегрирования порядка $O(N^{-\alpha})$, где N — количество узлов квадратурной формулы, а $\alpha > 1$ — параметр гладкости интегрируемой функции, в одномерном случае заменяется на $O(N^{-\frac{\alpha}{s}})$ в s-мерном случае.

повторение точек, а понятие сетки, как произвольного множества точек из G_s, такого повторения не допускает. Такое несоответствие легко преодолеть, перейдя к понятию сетки с весами $(X, \vec{\rho})$, где

$$X = \{\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{N-1}\} \subset G_s, \quad \vec{\rho} = (\rho_0, \dots, \rho_{N-1}, \rho) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{6}$$

Рассмотрим произвольную s–мерную сетку

$$X = \{(x_{k1}, ..., x_{ks}) \mid k = 0, ..., N-1\}$$

из s–мерного единичного куба $G_s = [0; 1)^s$. Для $q \geqslant 0$ q–отклонением сетки X с весом $\vec{\rho}$ называется величина

$$D_{s,q}(X, \vec{\rho}) = \int_0^1 \dots \int_0^1 |D(X, \vec{\alpha}, \vec{\rho})|^q d\vec{\alpha},$$

где

$$D(X, \vec{\alpha}, \vec{\rho}) = \sum_{k=0}^{N-1} \rho_k \prod_{j=1}^{s} \chi(x_{kj}, \alpha_j) - \rho \cdot N \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_s$$

— функция локального отклонения сетки X и $\chi(x, \alpha)$ — характеристическая функция промежутка $[0; \alpha)$.

Другой способ преодолеть это затруднение ("подъем размерности") впервые использовал К. Рот в работе [229]. Суть этого приема состоит в том, что начальному отрезку из N членов s-мерной последовательности X ставится в соответствие $s+1$-мерная сетка

$$Y_N = \left\{ \left(x_{j\,1}, \dots, x_{j\,s}, \frac{j}{N} \right) \middle| \, j = 0, \dots, N-1 \right\}.$$

Из определения сразу видно, что справедливо равенство

$$D(X_K, \vec{\alpha}) = D(Y_N, \vec{\beta}(\vec{\alpha}, K, N)), \quad \text{при} \quad \vec{\beta}(\vec{\alpha}, K, N) = \left(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \frac{K}{N} \right).$$

При $\rho = \rho_0 = \dots = \rho_{N-1} = 1$ будем писать просто $D_{s,q}(X)$. Относительно $D_{s,q}(X)$ известны следующие результаты.

В 1954 году К. Рот [229] доказал: существует константа $c(s) > 0$ такая, что для любой сетки X из N точек справедлива оценка снизу

$$D_{s,2}(X) \geqslant c(s) \ln^{s-1} N. \tag{7}$$

В 1977 году В. Шмидт [232] установил существование $c(s, q) > 0$ такой, что для любой сетки X из N точек справедлива оценка снизу

$$D_{s,q}(X) \geqslant c(s, q) \ln^{(s-1) \cdot q/2} N, \quad q > 1. \tag{8}$$

В 1980 году К. Рот [230], рассмотрев преобразования сеток Хэммерсли и усредняя по непрерывному параметру квадратичное отклонение преобразования сеток, доказал существование для любого N сетки из N точек, для которой верхняя оценка квадратичного отклонения по порядку совпадает с оценкой (7). Тем самым была доказана неулучшаемость нижней оценки К. Рота.

Можно показать, что при подходящем выборе нормированного пространства функций норма линейного функционала погрешности квадратурной формулы (5) будет выражаться через соответствующую норму локального отклонения сетки с весами, делённую на количество точек сетки. При таком взгляде на различные виды отклонения оказываются сравнимы общий метод Колмогорова — получения оценок снизу для норм погрешностей квадратурных формул и частный метод Рота — оценок квадратичного отклонения. Такой подход позволяет доказать обобщение теоремы Рота об оценке квадратичного отклонения снизу на случай произвольной сетки с весами.

В работах [212], [213] Чень обобщил результат К. Рота для произвольного q–отклонения и, таким образом, доказал неулучшаемость нижней оценки (8). Чень использовал преобразования Рота для сеток Хэммерсли и ввел новые, дискретные преобразования для множеств Фора.

По теории равномерного распределения опубликовано много различных работ (см. [18, 21]–[28],[32]–[38],[53, 62]–[64, 70]–[72, 83]–[85, 87, 97, 113, 142, 161]– [164, 192, 207, 211]–[215, 217]–[219, 224, 226]–[232]), имеется специализированный журнал Uniform Distribution Theory, издаваемый в Австрии.

В работах [62], [63] Н. М. Добровольский предложил дискретные преобразования сеток Хэммерсли, с помощью которых доказал верхние оценки Рота и Ченя с лучшими константами. В ряде работ [63], [87], [83], [26] изучались алгоритмические вопросы поиска оптимальных преобразований сеток Хэммерсли.

Нетрудно показать, что множество преобразований, предложенных К. Ротом, образуют бесконечную группу преобразований сеток Хэммерсли. Аналогично, преобразования Ченя [213] множеств Фора и преобразования из работы [62] относительно композиции являются конечными группами.

В работе [27] В. С. Ваньковой, Н. М. Добровольского, А. Р. Есаяна был введен класс рациональных $\vec{p}$–ичных сеток, и для них определены две группы преобразований: группы арифметических сдвигов и группы поразрядных сдвигов.

Группа арифметических сдвигов является обобщением конструкции из работ [62], [63] для сеток Хэммерсли, а группа поразрядных сдвигов — обобщение конструкции Ченя из работы [213] для множества Фора.

Метод доказательства существования сетки с правильным квадратичным отклонением или q-отклонения в работах [213], [62], [63] состоял в оценке среднего q-отклонения по орбите сетки Хэммерсли или сетки Фора.

В работе Н. М. Добровольского [70] было установлено, что для произвольной рациональной $\vec{p}$-ичной сетки среднее арифметическое квадратичных отклонений сеток из орбиты для группы арифметических сдвигов совпадает со средним арифметическим квадратичных отклонений сеток из орбиты для группы поразрядных сдвигов. Тем самым было показано, что для квадратичного отклонения подходы из работ [213] и [62] дают для одной и той же исходной сетки одинаковые результаты. Кроме этого, в работе [27] были рассмотрены алгоритмические проблемы поиска сетки из орбиты с квадратичным отклонением, не превосходящим среднего арифметического по орбите.

В работах В. С. Ваньковой [21]–[23], [25] и ее кандидатской диссертации [24] были разработаны основные направления теории квадратичного отклонения $\vec{p}$–ичных сеток.

В работе Н. М. Добровольского [70] был предложен способ определения двух групп преобразования арифметических сдвигов и поразрядных сдвигов для произвольных сеток, при этом свойство равенства средних по орбитам квадратичных отклонений сохраняется для этих групп.

Более подробно суть этих конструкций в следующем. Пусть $p_1, ..., p_s$ — фиксированные натуральные числа, отличные от 1, и натуральные числа $h_1, ..., h_s, P_1, ..., P_s$ связаны соотношениями $P_j = p_j^{h_j} (j = 1, ..., s)$. В работе рассматриваются две группы преобразований:

$$G(\vec{P}) = \{g(\vec{t})|0 \leqslant t_j \leqslant P_{j-1}, j = 1, ..., s\}$$

и

$$G^*(\vec{P}) = \{g^*(\vec{t})|0 \leqslant t_j \leqslant P_{j-1}, j = 1, ..., s\}$$

куба G_s.

Группа арифметических сдвигов

$$G(\vec{P}) \simeq (Z/P_1Z) \times \cdots \times (Z/P_sZ),$$

группа поразрядных сдвигов

$$G^*(\vec{P}) \simeq (Z/p_1Z)^{h_1} \times \cdots \times (Z/p_sZ)^{h_s}.$$

Пусть $X(\vec{t})$ — образ сетки X под действием преобразования $g(\vec{t}) \in G(\vec{P})$, а $XC(\vec{t})$ — преобразования $g_*(\vec{t}) \in G^*(\vec{P})$; $G(\vec{P})X$ и $G^*(\vec{P})X$ соответствующие орбиты;

$$\sigma_{s,q}\left(G(\vec{P})X\right) = \frac{1}{P_1...P_s} \sum_{g(\vec{t}) \in G(\vec{P})} D_{s,q}\left(X(\vec{t}), \vec{\rho}\right),$$

$$\sigma_{s,q}\left(G^*(\vec{P})X\right) = \frac{1}{P_1...P_s} \sum_{g^*(\vec{t}) \in G^*(\vec{P})} D_{s,q}\left(XC(\vec{t}), \vec{\rho}\right)$$

— средние арифметические по орбитам.

Справедлив следующий основной результат: для любой сетки X справедливо равенство

$$\sigma_{s,q}\left(G(\vec{P})X\right) = \sigma_{s,q}\left(G^*(\vec{P})X\right).$$

Таким образом с точки зрения величины среднего арифметического q—ого отклонения эти две группы преобразований равноправны. Остается открытым вопрос о величине минимального отклонения в каждой из орбит для заданного типа сеток.

Другой сложный вопрос — это построение экономных алгоритмов поиска сеток из орбиты с минимальным или близким к минимальному значению q—ого отклонения.

2.2. Неравномерные сетки

В 1957 — 1959 годах вышли первые работы Н. М. Коробова [117], [118], в которых были применены методы теории чисел к вопросам численного интегрирования кратных интегралов. Выделение класса периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье позволило для оценки погрешности приближенного интегрирования использовать методы гармонического анализа и теорию тригонометрических сумм, важный раздел аналитической теории чисел (см. монографии [132], [2]).

Первая работа Н. М. Коробова [117], с которой и ведется отсчёт становления теоретико-числового метода в приближенном анализе, опиралась на глубокие оценки А. Вейля рациональных тригонометрических сумм для простого модуля, которые потребовались при изучении введенных в этой работе Н. М. Коробовым новых сеток, названных им неравномерными.

Неравномерные сетки $M(P; b_1, \ldots, b_s)$ имеют простой вид. Для любого набора целых b_1, $\ldots, b_s$, взаимно простых с P ($(b_j, P) = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$) неравномерная сетка $M(P; b_1, \ldots, b_s)$ состоит из точек, координаты которых выражаются через степенные функции по модулю P:

$$M_k = \left(\left\{\frac{b_1 k}{P}\right\}, \left\{\frac{b_2 k^2}{P}\right\}, \ldots, \left\{\frac{b_s k^s}{P}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, P), \tag{9}$$

где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число, $p > s$.

Характерной чертой творчества профессора Н. М. Коробова было стремление к максимальной простоте изложения. В то время ещё не было известно элементарного доказательства оценок А. Вейля рациональных тригонометрических сумм. Такие доказательства появились только в семидесятых годах XX столетия (см. [185], [144]).

Н. М. Коробов рассматривает два варианта неравномерных сеток: по простому модулю и по квадрату простого модуля. Второй вариант обладает сразу двумя достоинствами.

Во-первых, он опирается на аналогичную оценку рациональных тригонометрических сумм по модулю квадрата простого, которая получается совершенно элементарно (см. [127], с. 68).

Во-вторых, он позволяет пользоваться небольшими таблицами простых чисел, например, таблицей из учебника А. А. Бухштаба [14], в которой простые числа не превосходят 6000, что позволяет строить сетки интегрирования с количеством точек до 36 000 000, которое является достаточно существенным и сейчас.

2.3. Метод оптимальных коэффициентов

Наиболее плодотворным оказался метод оптимальных коэффициентов построения для многомерного куба многомерных квадратурных формул с параллелепипедальными сетками, фактически основанный на самых простых фактах теории сравнений. Этот метод был заложен Н. М. Коробовым в работах [118], [121], [122], и его развитие продолжается и по настоящее время.

Важной особенностью метода оптимальных коэффициентов является тот факт, что алгоритм численного интегрирования с помощью квадратурных формул с параллелепипедальными сетками является ненасыщаемым. Свойства алгоритма быть ненасыщаемым относится к числу его важных качеств (более подробно см. [3] и [143]), и заключается в том, что точность алгоритма связана с гладкостью функции и не имеет ограничений на параметр гладкости.

Параллелепипедальные сетки $M(\vec{a}, p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{10}$$

имеют ещё более простой вид, чем неравномерные сетки (9), но уже требуется не только условие взаимной простоты коэффициентов сетки ($(a_j, p) = 1$ $(j = = 1, 2, \ldots, s)$), но и выполнение принципиального условия оптимальности, которое формулируется в терминах основной меры качества $S_p(a_1, \ldots, a_s)$ набора коэффициентов $(a_1, \ldots, a_s)$. $S_p(z_1, \ldots, z_s)$ выражается через сумму[7]

$$S_p(z_1, \ldots, z_s) = \sideset{}{'}\sum_{m_1, \ldots, m_s = -p_1}^{p_2} \frac{\delta_p(z_1 m_1 + \ldots + z_s m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}, \tag{11}$$

где $z_1, \ldots, z_s$ – произвольные целые, $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m, $p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$, $p_2 = \left[\frac{p}{2}\right]$ и символ Коробова $\delta_p(b)$ задан равенствами

$$\delta_p(b) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad b \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ 1, & \text{если} \quad b \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases} \tag{12}$$

.

Согласно определению, *если существуют константы $\beta = \beta(s)$ и $B = B(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений p выполняется неравенство*

$$S_p(a_1, \ldots, a_s) \leqslant B \frac{\ln^\beta p}{p}, \tag{13}$$

[7]Здесь $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

то целые $a_1, \ldots, a_s$ *называются оптимальными коэффициентами индекса* β *по модулю* p.

Известно (см.[140] стр. 81), что для любых целых $a_1, \ldots, a_s$ выполняется оценка

$$S_p(a_1, \ldots, a_s) \geqslant B_0 \frac{\ln^s p}{p}, \tag{14}$$

с некоторой константой B_0.

Интересно отметить, что на совсем других теоретико-числовых соображениях основана серия важных работ по применению теории дивизоров для поиска оптимальных коэффициентов для параллелепипедальных сеток, выполненных С. М. Ворониным и Н. Т. Тимергалиевым (см. [29], [30], [31]). Фактически в этих работах указаны алгоритмы поиска целочисленных решеток с большим значением гиперболического параметра решетки.[8]

2.4. Квадратурные формулы с обобщёнными параллелепипедальными сетками

В данном разделе рассматриваются вопросы приближенного интегрирования функций многих переменных по единичному $s-$мерному кубу

$$\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s\}, \quad G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu < 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s\}$$

по методу К. К. Фролова [189], [191] в модификации Н. М. Добровольского ([65] — [69]) для непрерывных периодических функций с периодом равным единице по каждой из переменных x_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, s$), принадлежащих классу $E_s^\alpha(C)$, который состоит из периодических функций

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})},$$

для которых

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \quad (\alpha > 1)$$

и $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор

$$\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\}).$$

Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$. Целой частью вектора называется вектор $[\vec{x}] = \vec{x} - \{\vec{x}\}$. Через $p(\vec{x}) = \left[\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right]$ обозначим ближайший целый вектор в смысле нормы $\|\vec{x}\|_1 = \max(|x_1|, \ldots, |x_s|)$. Для нормы вектора отклонения от ближайшего целого $\delta(\vec{x})$, заданного равенством

$$\delta(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{x} = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) - \left\{\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right\},$$

справедливо неравенство $\|\delta(\vec{x})\|_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s\,|\,m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\},$$

где $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$.

Напомним определения трех типов обобщенных параллелепипедальных сеток: $M(\Lambda)$, $M_1(\Lambda)$ и $M'(\Lambda)$ решетки Λ (см. [66], [140] стр. 204), которые определяются через взаимную решетку $\Lambda^* = \{\vec{x}\,|\,\forall \vec{y} \in \Lambda\ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$.

[8]Определение гиперболического параметра $q(\Lambda)$ решётки Λ см. далее стр. 39.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Модификация Н. М. Добровольского метода К. К. Фролова опирается на следующую общую конструкцию (см. [66], [140] стр. 247–248).

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s,$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} \notin (-1;1)^s,$$

$$\left| \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{\sigma},\vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s.$$

Определение 3. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det\Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f], \tag{15}$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y}\in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\}=\vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant CB \cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где} \quad c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

Рассмотрим для произвольного вектора $\vec{z}$ сдвинутую решетку $\Lambda + \vec{z}$ и дадим следующие определения.

Определение 4. *Для произвольной решетки Λ и произвольного $\vec{z}$ модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda, \vec{z})$ назовем множество*

$$M(\Lambda, \vec{z}) = (\Lambda^* + \vec{z}) \cap G_s.$$

Сетка $M_1(\Lambda, \vec{z}) = (\Lambda^* + \vec{z}) \cap [-1;1)^s$.

Модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda, \vec{z})$ назовем множество $M'(\Lambda, \vec{z}) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda, \vec{z})\}$.

Определение 5. *Квадратурной формулой с модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ назовем формулу вида*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = (\det\Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda,\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f],$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y}\in M_1(\Lambda,\vec{z}),\{\vec{y}\}=\vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda,\vec{z}) = |M'(\Lambda,\vec{z})|,$$

$R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f]$ *— погрешность квадратурной формулы.*

Квадратурные формулы с модифицированной обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ естественным образом возникают в следующей ситуации. Пусть имеется решетка Λ и её подрешетка $\Lambda_1 \subset \Lambda$ и $t = \dfrac{\det\Lambda_1}{\det\Lambda}$ — индекс подрешетки Λ_1 решетки Λ. Обозначим через $K(\Lambda,\Lambda_1)$ полный набор представителей по одному из каждого класса решетки Λ по подрешетке Λ_1, тогда $|K(\Lambda,\Lambda_1)| = t$ и справедливо представление

$$\Lambda = \bigcup_{\vec{z}\in K(\Lambda,\Lambda_1)} (\Lambda_1 + \vec{z}).$$

Переходя к взаимным решеткам получим: $\Lambda^* \subset \Lambda_1^*$,

$$\Lambda_1^* = \bigcup_{\vec{z}\in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} (\Lambda^* + \vec{z}), \quad M'(\Lambda_1) = \bigcup_{\vec{z}\in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} M'(\Lambda,\vec{z}).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = \frac{1}{t} \sum_{\vec{z}\in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} \left((\det\Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda,\vec{z})} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f] \right), \tag{16}$$

$$R_{N'(\Lambda_1)}[f] = \frac{1}{t} \sum_{\vec{z}\in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f]. \tag{17}$$

Формулы (16) — (17) являются основой для концентрических алгоритмов численного интегрирования с квадратурными формулами по обобщенным параллелепипедальным сеткам (см. [49], стр. 192, 193).

Определение 6. *Для концентрической пары обобщенных параллелепипедальных сеток II типа $M'(\Lambda) \subset M'(\Lambda_1)$ и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ мультипликативной дискретной дисперсией $\Delta = \Delta(M'(\Lambda), M'(\Lambda_1), \rho(\vec{x}), f(\vec{x}))$ назовем величину*

$$\Delta = \frac{1}{t} \sum_{\vec{z}\in K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)} |R_{N'(\Lambda,\vec{z})}[f] - R_{N'(\Lambda_1)}[f]|^2. \tag{18}$$

Нетрудно понять, что определение 6 согласуется с аналогичным определение из работы [49] (см. стр. 204), так как сетка $M'(\Lambda_1)$ является произведением сетки $M'(\Lambda)$ и сетки $K(\Lambda_1^*,\Lambda^*)$.

2.5. Алгебраические сетки

Назовём вектор $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(s)})$ целым алгебраическим, если многочлен

$$f_{\vec{\lambda}}(x) = (x - \lambda^{(1)}) \ldots (x - \lambda^{(s)}) \in \mathbb{Z}[x].$$

Вектор $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(s)})$ назовём алгебраическим, если найдется натуральное число n такое, что вектор $\vec{\lambda}_1 = n\vec{\lambda}$ будет целым алгебраическим вектором.

Решётка Λ называется алгебраической, если любой вектор $\lambda \in \Lambda$ будет алгебраическим вектором.

В работе [172] показано, что для любого чисто-вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ множество алгебраических решёток $\mathbb{A}(F_s)$ всюду плотно в метрическом пространстве PR_s.

Отсюда следует, что множество алгебраических сеток всюду плотно в метрическом пространстве обобщенных параллелепипедальных сеток. В настоящее время изучена только гиперболическая дзета-функция растянутой алгебраической решётки, соответствующей кольцу целых алгебраических чисел произвольного чисто-вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Вопрос об оптимальном выборе такого поля или выборе других алгебраических решёток и сеток остается открытым.

3. Семинар трех К

Все эти события по становлению нового направления математических исследований происходили в стенах Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР в рамках работы семинара по теоретико-числовым методам в приближенном анализе, организованного в 1956 году. Как указывает сам Н. М. Коробов в работе [134], "Заседание семинара проводилось под председательством одного из трех его руководителей — Н. С. Бахвалова (МГУ), Н. Н. Ченцова (ИПМ АН СССР) и Н. М. Коробова (МИ АН СССР)".

Интересен состав руководителей этого семинара. Н. М. Коробову шёл уже сороковой год, и он уже 4 года как был доктором физико-математических наук, а в 1955 году ему было присвоено звание профессора. Будущему академику Н. С. Бахвалову в то время было только 22 года, и он ещё работал над кандидатской диссертацией, которую защитил в 1958 году, а уже в 1964 году защитил докторскую диссертацию [6]. Будущему дважды лауреату государственных премий Н. Н. Ченцову было 26 лет, и он тоже защитил свою кандидатскую диссертацию только в 1958 году, но уже в 1956 году был награжден орденом Трудового Красного Знамени за выполнение важных прикладных работ. Свою докторскую диссертацию на тему "Общая теория статистического вывода" Н. Н. Ченцов защитил в 1969 г. [194].

По словам доцента Е. А. Морозовой, вдовы Н. Н. Ченцова, инициатива организации такого семинара исходила от Николая Николаевича Ченцова, который в это время работал в группе И. М. Гельфанда, занимающейся вычислительными проблемами отечественного атомного проекта. За пять лет участники семинара проделали значительную работу, о которой руководители докладывали на Четвертом Всесоюзном математическом съезде в 1961 году в Ленинграде. От имени руководителей доклад делал Н. Н. Ченцов [7]. В докладе приводился список публикаций из 27 наименований, из которых 12 в Докладах АН [4], [5], [13], [39], [40], [117]–[126], [157]–[159], [174], [178]-[179], [181], [193], [196], [199]–[201].

За рубежом аналог метода оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова был предложен на три года позже (1962 г.) Е. Главкой [221]. Он назвал параллелепипедальные сетки с оптимальными коэффициентами сетками с "хорошими точками". В результате, один и тот же объект вошел в позднейшие публикации и вычислительную практику с различными названиями и ссылками на разных авторов, хотя в последнее время даже австрийские математики ссылаются на работы Н. М. Коробова, восстанавливая историческую справедливость.

Результаты работы семинара **трех К** за первые шесть лет работы были отражены в монографии Н. М. Коробова [127] в 1963 г. (второе издание вышло в 2004 г. [140]). За рубежом этой проблеме были посвящены монографии [222], [223].

3.1. Биографические сведения о Н. М. Коробове

Николай Михайлович Коробов родился в Москве 23 ноября 1917 года в семье служащих, ответственных работников почтамта — Варвары Георгиевны Георгиевой и Михаила Никитича Коробова.

Родители Н. М. Коробова

Виктор и Николай Коробовы

Рис. 1: Семья Коробовых

Старший брат Николая Михайловича Виктор родился на четыре года раньше, до Первой мировой войны, в 1913 году.

Отец — Коробов Михаил Никитич (1882 – 1940) — работал на Московском почтамте на Мясницкой улице одним из ведущих инженеров связи.

Михаил Никитич на почтамте

С отцом Михаилом Никитичем

Рис. 2: Отец и сын

Варвара Георгиевна

Коля Коробов с мамой

Рис. 3: Мать и сын

Мать — Варвара Георгиевна Георгиева (1888 – 1962) — родилась в Москве, окончила 3 класса, после чего работала швеей. В 1904 году поступила на Пречистинские вечерние рабочие курсы (2 года общеобразовательные и 3 года специализированные математические курсы).

В 1908 году Варвара Георгиевна выдержала экстерном экзамены на звание учителя математики (алгебра и геометрия). Именно она сформировала интерес к математике у Николая Коробова. В 1909 году Варвара Георгиевна поступила работать на Московский почтамт.

С 1924 по 1935 годы Николай Михайлович учился в 24-ой школе Бауманского района города Москвы.

Школьные друзья

Организационным Комитетом Первой Московской Математической Олимпиады в заседании 11 июня 1935 г.
Коробов Николай Михайлович
признан победителем в Олимпиаде и награжден
первой премией

Председатель Оргкомитета
член-корреспондент Академии Наук СССР:
П. Александров /Александров/
Секретарь: А. Эйгес

Решение Организационного Комитета

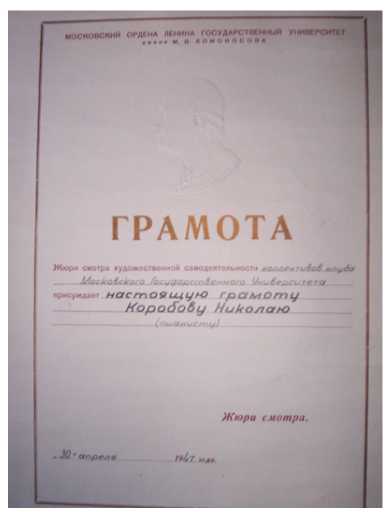
Рис. 4: Школьные годы

В июне 1935 года Николай Коробов принял участие в Первой Московской Математической Олимпиаде, где был награжден первой премией.

В 1935 году Николай Михайлович Коробов поступил на механико-математический факультет Московского Государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Здесь, будучи еще студентом, Николай Коробов начал свою педагогическую деятельность, работая со школьниками в математическом кружке при МГУ.

Студент университета Коробов



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ГРАМОТА

Жюри смотра художественной самодеятельности коллективов клуба Московского Государственного Университета
присуждает настоящую грамоту
Коробову Николаю
(пианисту)

Жюри смотра.

«30» апреля 1947 года.

Музыкальные успехи

Рис. 5: Студенческие годы

Музыка, розы и математика были источником духовных сил Николая Михайловича Коробова на протяжении всей его жизни.

Встреча на четвертом курсе со своим будущим учителем и научным руководителем, членом-корреспондентом АН СССР Александром Осиповичем Гельфондом определила круг научных интересов Н. М. Коробова.

Теория чисел стала основным полем его научной и педагогической деятельности.

Рис. 6: А. О. Гельфонд — научный руководитель Н. М. Коробова

В 1940 году Н. М. Коробов окончил с отличием университет. В апреле 1941 года у него родилась старшая дочь Анна. После войны у него родились два сына Олег и Андрей и две дочери Зоя и Александра.

Рис. 7: Н. М. Коробов с дочерью Аней

В годы Великой Отечественной войны Николай Михайлович Коробов служил в рядах Красной Армии — преподавал высшую математику в Ленинградской военно-воздушной академии.

Как вспоминал Н. М. Коробов, осенью 1941 года он прибыл в Москву, ждал направление на фронт. Зашёл на родной факультет, встретил там Андрея Николаевича Колмогорова, рассказал ему о своей жизни. И вдруг неожиданно через неделю или две его отправляют в Елабугу преподавать в Ленинградской военно-воздушной академии, которая была туда эвакуирована. Он так и не знал до конца своей жизни, как встреча с А. Н. Колмогоровым в МГУ была связана с этим неожиданным изменением в его жизни.

После демобилизации в 1945 году Николай Михайлович поступил в аспирантуру МГУ к Александру Осиповичу Гельфонду и в 1948 году защитил кандидатскую диссертацию по теме «Некоторые вопросы равномерного распределения».

В 1953 году Н. М. Коробов получил степень доктора физико-математических наук, защитив диссертацию по теме «Об арифметических свойствах показательных функций». Оппонен-

Н. М. Коробов, 1943 год

Рис. 8: Служба в Ленинградской академии

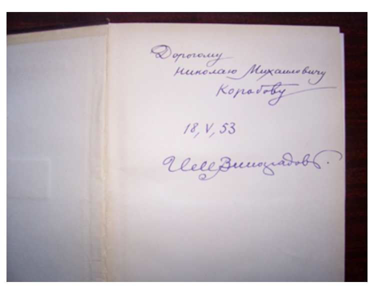
тами по докторской диссертации были выдающиеся специалисты по теории чисел Ю. В. Линник, А. Я. Хинчин и Н. Г. Чудаков.

Ю. В. Линник

А. Я. Хинчин

Н. Г. Чудаков

Рис. 9: Оппоненты по докторской диссертации



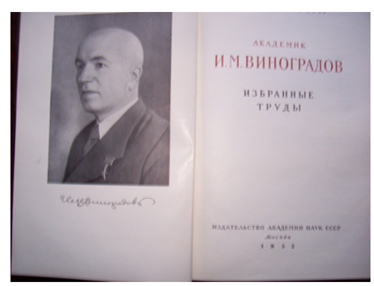


Рис. 10: Подарок академика И. М. Виноградова

В 1948 году Николай Михайлович начал преподавать на кафедре теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Здесь в 1955 году ему было присвоено звание профессора.

Мастерство педагога и филигранные лекции Коробова были достоянием широкой студенческой аудитории в Московском механическом институте, Московском энергетическом институте, Московском государственном педагогическом институте им. В. И. Ленина и МВТУ им. Н. Э. Баумана.

Однако научная деятельность Н. М. Коробова была связана не только с Московским государственным университетом. На протяжении пятидесяти семи лет он проработал в системе Академии Наук:

- 1948–1972 — Математический институт АН СССР им. В. А. Стеклова;

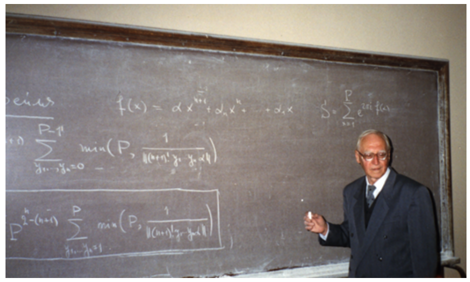


Рис. 11: Лекторское мастерство

- 1979–1988 — Вычислительный центр АН СССР;
- 1988–2004 — Институт истории естествознания и техники АН СССР — РАН им. С. И. Вавилова.

Научная деятельность Николая Михайловича Коробова развивалась в трех направлениях, в каждом из которых он добился выдающихся результатов:

1. Исследование вопросов распределения дробных долей;
2. Исследование и оценки тригонометрических сумм и применение этих оценок к различным вопросам аналитической теории чисел;
3. Исследование вопросов приближённого вычисления кратных интегралов.

В рамках исследования вопросов распределения дробных долей Н. М. Коробовым: было введено понятие вполне равномерного распределения; были построены примеры вполне равномерно распределенных функций; были установлены связи между вполне равномерным распределением и свойствами чисел, нормальных по Борелю.

Николаем Михайловичем было также введено понятие совместно нормальных чисел, построены примеры таких чисел и указаны связи между вполне равномерным распределением и теорией совместно нормальных чисел.

Н. М. Коробов провел детальное изучение нормальных периодических систем и с их помощью получил неулучшаемые оценки в вопросе о суммах дробных долей показательных функций.

При исследовании тригонометрических сумм Коробовым впервые были рассмотрены тригонометрические суммы с так называемыми рекуррентными функциями. Для таких сумм он получил неулучшаемые оценки и применил их к исследованию распределения невычетов и первообразных корней в рекуррентных последовательностях.

Коробов впервые рассмотрел тригонометрические суммы с показательными функциями и получил полное описание сумм такого вида.

Им была получена также оценка суммы характеров, расширяющая область нетривиальности оценок Хассе-Вейля. Эта оценка показывает, что имеется интерференция для нулей локальной дзета-функции Римана кривой

$$y^2 \equiv f(x) \pmod p,$$

где p — простое, а $f(x)$ — полином нечётной степени.

Николаем Михайловичем был предложен новый подход для усиления оценок классических сумм Вейля.

Эти оценки позволили ему существенно уточнить границу нулей дзета-функции Римана и усилить оценку остаточного члена в законе распределения простых чисел.

Оценку

$$\zeta(1+it) = O\left(\ln^{\frac{2}{3}}|t|\right), \quad t \to \infty,$$

опубликованную Н. М. Коробовым в работе 1958 года, не удалось усилить до сих пор. Эта работа оказала большое влияние на дальнейшее развитие метода тригонометрических сумм.

Одновременно с Николаем Михайловичем Коробовым подобные результаты в рамках проблемы оценок сумм Вейля были получены великим российским математиком Иваном Матвеевичем Виноградовым, о чем говорится во второй главе монографии А. Вальфиша «Welsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie», опубликованной в Берлине в 1963 году.

Рис. 12: И. М. Виноградов

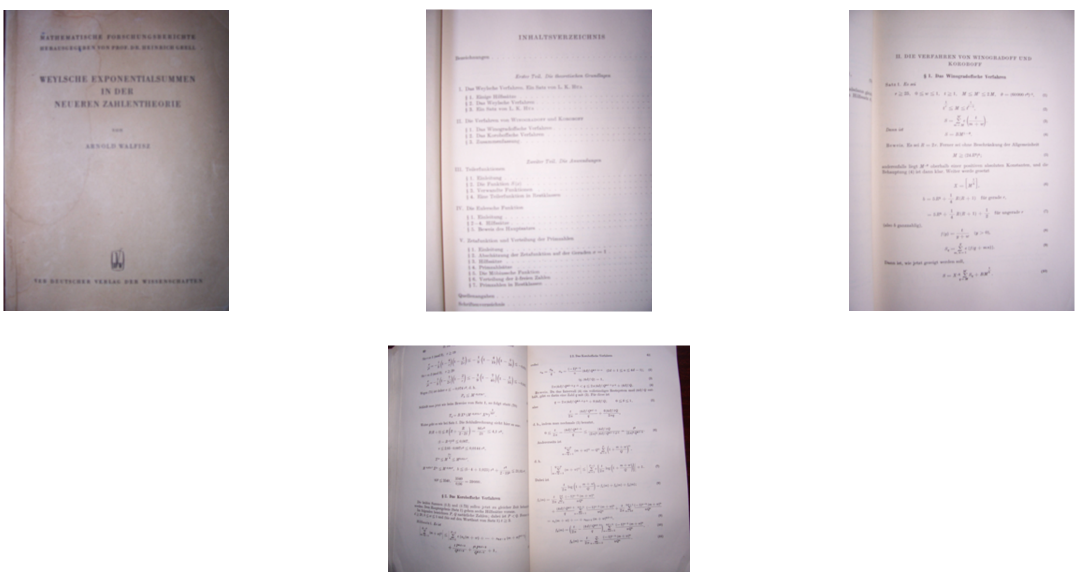


Рис. 13: Монография А. Вальфиша

Третий цикл работ Николая Михайловича посвящен вопросам приближенного вычисления кратных интегралов. Введение неравномерных сеток для построения многомерных квадратурных формул позволило с помощью оценок полных рациональных тригонометрических сумм получить гарантированную оценку погрешности приближенного интегрирования, аналогичную оценке для метода Монте-Карло.

Соображения о сравнениях специального вида, не рассматривавшихся ранее, были им применены к построению многомерных квадратурных формул. Эти формулы являются оптимальными по порядку остаточного члена как для функций малой гладкости, так и для гладких периодических функций.

Теоретико-числовые квадратурные формулы он применил к вопросам интерполяции функций многих переменных и к приближённому решению интегральных уравнений.

Николай Михайлович предложил также экономные алгоритмы для получения оптимальных коэффициентов теоретико-числовых сеток.

Признанием научных заслуг Н. М. Коробова являются премия им. П. Л. Чебышёва АН СССР (1958) и исполнение им обязанностей учёного секретаря оргкомитета III Всесоюзного математического съезда в Москве в 1956 году, на котором председателем оргкомитета был академик И. М. Виноградов.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРЕЗИДИУМ АКАДЕМИИ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

в заседании своем от 31 января 1958 года присудил

ДОКТОРУ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Николаю Михайловичу

КОРОБОВУ

ПРЕМИЮ имени П. Л. ЧЕБЫШЕВА

в размере 20000 рублей

ЗА РАБОТЫ:

«ЧИСЛА С ОГРАНИЧЕННЫМ ОТНОШЕНИЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ВОПРОСАМ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ»,

«О ВПОЛНЕ РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ И СОВМЕСТНО НОРМАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ»,

«ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ»

ПРЕЗИДЕНТ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ГЛАВНЫЙ УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ ПРЕЗИДИУМА АКАДЕМИИ НАУК СССР

27 марта 1958 г. *г. МОСКВА*

№ 223

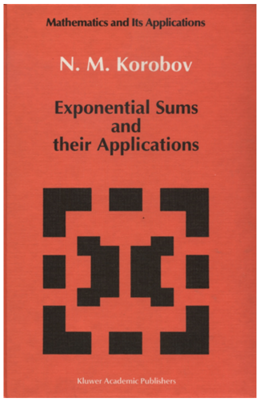
Рис. 14: Решение президиума АН СССР

Николай Михайлович Коробов — автор более 70 научных работ, в том числе двух монографий, в которых ярко раскрывается педагогический талант крупного учёного — понятно и просто излагать сложные и трудные вопросы теории чисел и её приложений к приближённому анализу.

Первая монография — «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе» — вышла двумя изданиями: в 1963 году и переработанное в 2004 году.

Вторая монография Коробова — «Тригонометрические суммы и их приложения» — вышла на русском языке в 1989 году, переведена на английский язык в 1992 году и на испанский язык в 1993 году.

Рис. 15: Монографии Н. М. Коробова



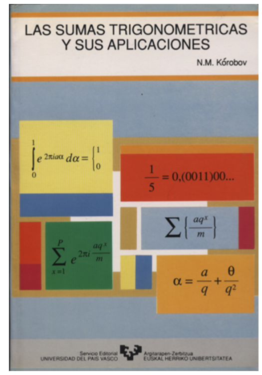


Рис. 16: Переводы монографий Н. М. Коробова

Являясь долгие годы соруководителем научно-исследовательского семинара кафедры теории чисел МГУ, он остался в памяти участников как заинтересованный, внимательный, но строгий авторитет по оценке научной деятельности многих математиков из периферийных вузов, выступавших на семинаре в Москве.

Создание теоретико-числового метода в приближённом анализе неразрывно связано с работой в 1957–1961 годах в Математическом институте АН СССР семинара, которым руководили Н. М. Коробов, Н. С. Бахвалов и Н. Н. Ченцов.

Тридцать лет без перерыва в МГУ им. Ломоносова работал под руководством Николая Михайловича Коробова семинар по тригонометрическим суммам и их приложениям для студентов, аспирантов и научных работников.

За годы педагогической деятельности Н. М. Коробов подготовил многих учеников: более 20-ти из них защитили кандидатские диссертации, а 8 – докторские. Среди них:

- доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом теории чисел Математического института им. В. А. Стеклова РАН А. А. Карацуба.

- доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета Д. А. Митькин.

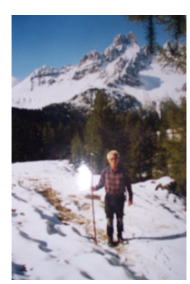
- член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук, директор Хабаровского отделения Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН В. А. Быковский.

- иностранный ученик, профессор Питер Цинтерхоф, возглавляющий Исследовательский институт программных технологий Зальцбургского университета в Австрии.

А. А. Карацуба

Д. А. Митькин

В. А. Быковский



П. Цинтерхоф

Рис. 17: Ученики Н. М. Коробова

С 1 февраля 1988 года Н. М. Коробов по приглашению Адольфа Павловича Юшкевича начал работать в секторе истории математики Института истории естествознания и техники РАН им. С. И. Вавилова. Сотрудничество Николая Михайловича с Институтом не только не прекратило его теоретико-числовых исследований, но и расширило их за счёт исторических аспектов.

Работы Николая Михайловича Коробова в области истории математики такие, как «О теоретико-числовых методах приближенного интегрирования» (1994) и «О теоретико-числовых интерполяционных формулах» (2001), способствовали появлению интересных исследований по истории математического анализа и теории чисел.

В последние годы жизни Николай Михайлович Коробов:

- разрабатывал новые направления исследований по развитию теоретико-числового метода – специальные полиномы и комбинированные сетки
- совершенствовал алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов
- получал новые оценки погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками
- изучал глубокие вопросы поведения неполных частных цепных дробей.

В 1994 году Николаю Михайловичу Коробову было присвоено звание заслуженного Соросовского профессора.

Рис. 18: Заслуженный Соросовский профессор

Николай Михайлович Коробов прожил долгую насыщенную жизнь ученого (23.11.1917–25.10.2004), не дожив 29 дней до своего 87-летия.

Рис. 19: Николай Михайлович Коробов дома, 2004 год

3.2. Биографические сведения о Н. Н. Ченцове

Рис. 20: Н. Н. Ченцов (19.02.1930–5.07.1992)

Николай Николаевич Ченцов родился 19 февраля 1930 года в Москве в семье научного сотрудника ЦАГИ. Его отец — Николай Гаврилович Ченцов (1882-1968) — окончил математическое отделение физико-математического факультета Московского университета, был учеником и сотрудником Николая Егоровича Жуковского, проработал в ЦАГИ 40 лет с начала его открытия в 1918 году до своего 76-летия в 1958 году. Профессор Высшего технического училища, Герой социалистического труда Николай Гаврилович занимался теорией упругости, теорией композитов и газовой динамикой. Несомненно, его труд был направлен на обеспечение обороноспособности страны. Его сын достойно продолжил дело своего отца.

Коля Ченцов ещё в школе проявил интерес к математике, и, также как его будущий старший товарищ Н. М. Коробов, стал в 1947 году победителем X Московской математической олимпиады по десятым классам. После этого прямая дорога была на мехмат МГУ имени М. В. Ломоносова, который он с отличием закончил в 1952 году. По распоряжению ректора МГУ, академика И. Г. Петровского Николай Ченцов был направлен в расчётное бюро Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, при этом в порядке исключения ему было разрешено учиться в заочной аспирантуре МИАН. За плодотворную работу в группе член-корреспондента АН СССР И. М. Гельфанда Н. Н. Ченцов в 1956 году был награждён орденом Трудового Красного Знамени, а в последствии в составе авторского коллектива в 1972 году Государственной премией.

Н. Н. Ченцов был ведущим специалистом в стране по методу Монте-Карло, но он внёс и в теоретико-числовой метод в приближенном анализе существенный вклад.

Во-первых, ему принадлежит очень важный результат, что если имеется бесконечная последовательность точек в единичном s-мерном кубе, то погрешность многомерной квадратурной формулы, составленной из первых N точек этой последовательности не может быть порядка $o(N^{-1})$.

Во-вторых, он существенно расширил класс функций, к которому применим теоретико-числовой метод в приближенном анализе. Первоначально метод Коробова был пригоден только на классе периодических функций. Н. Н. Ченцов предложил периодизацию функций. Таким образом, появилось понятие простейшей периодизации и полной периодизации функций для задач численного интегрирования функций многих переменных.

В-третьих, ему принадлежит важный результат об интегрировании функций от бесконечного числа переменных. В этой проблеме наиболее трудной задачей было выделить и описать класс функций с бесконечным числом переменных, для которых задача численного интегрирования является содержательной и допускает эффективное решение. Эту проблему Н. Н. Ченцов успешно решил в работе [193].

Подробнее о научном творчестве Н. Н. Ченцове можно узнать на сайте института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН http://www.keldysh.ru/memory/chentsov/bio_och.htm. и в книге Н. Н. Ченцов "Избранные труды: Математика."[195].

3.3. Биографические сведения о Н. С. Бахвалове

Рис. 21: Н. С. Бахвалов

Николай Сергеевич Бахвалов родился 29 мая 1934 года в Москве в семье профессора Московского университета, доктора физ.мат. наук Сергея Владимировича Бахвалова (1898-1963). В шестнадцать лет Николай Бахвалов закончил школу и стал студентом мех-мата МГУ, который закончил в 1955 году. В 1957 году он закончил аспирантуру и в 1958 году защитил кандидатскую диссертацию под руководством академика С. Л. Соболева. Интересно, что в Новосибирске С. Л. Соболев в начале шестидесятых годов начал цикл работ по кубатурным формулам. Результаты этих исследований С. Л. Соболева и его учеников были отражены в фундаментальной монографии [177].

Н. С. Бахвалов также был учеником академика А. Н. Колмогорова, и при оценке погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α он использовал идеи метода Колмогорова. Надо отметить, что наилучшие неулучшаемые оценки снизу на этом классе получил другой участник семинара **трёх K** — И. Ф. Шарыгин, который, дополнив метод Колмогорова и подходы Бахвалова идей близкой к методу К. Рота, получил улучшение оценки Бахвалова на множитель $\ln^{s-1} N$ (см. [197], [140]).

Н. С. Бахвалову принадлежит важный вклад в метод оптимальных коэффициентов. В работе [4] он ввёл важную характеристику, которая позднее была названа гиперболическим параметром решётки (см. [64, 65, 140]). Гиперболический параметр решётки позволил ему получить оценку гиперболической дзета-функции решётки решений линейного сравнения от многих переменных, которое соответствовало параллелепипедальной сетке. Позднее эта оценка была перенесена на случай произвольной решётки (см. [65, 140]).

Отметим, что Н. С. Бахвалов был одним из комментаторов к Избранным трудам Н. Н. Ченцова.

3.4. Участники семинара

Как указывает Н. М. Коробов в своей работе [134] значительный вклад в развитие теоретико-числового метода в приближенном анализе внесли другие участники семинара: И. И. Пятецкий-Шапиро, В. С. Рябенький, В. М. Солодов, И. Ф. Шарыгин и Ю. Н. Шахов. Кроме того, А. И. Салтыков выполнил большой объем вычислений по составлению первых таблиц оптимальных коэффициентов. По тем временам это была, действительно, большая и сложная работа, требующая от исполнителей значительных творческих, организационных и временных усилий. Остановимся кратко на характеристики некоторых работ участников семинара.

И. И. Пятецкий-Шапиро (30.03.1929–21.02.2009) ученик А. О. Гельфонда, А. А. Бухштаба и И. Р. Шафаревича доказал существование квадратурных формул с погрешностью интегрирования $O\left(N^{-1}\ln N\right)$. Эта работа стимулировала Н. М. Коробова на создание метода оптимальных коэффициентов (подробнее об этом в пятом разделе).

В. С. Рябенький — ученик И. Г. Петровского, родился 20 марта 1923 года, главный научный сотрудник ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, был личным другом Н. М. Коробова до конца его дней. В теоретико-числовом методе в приближённом анализе он открыл два новых направления исследования: интерполяция функций многих переменных с помощью теоретико-числовых сеток [157, 159] и решение дифференциальных уравнений с частными производными с помощью теоретико-числовых сеток [158].

В. М. Солодов — ученик Н. М. Коробова, к.ф.-м.н., д.т.н., научный руководитель К. К. Фролова — занимался вопросами расширения области применения теоретико-числового метода вычисления кратных интегралов [181, 182, 183, 184].

И. Ф. Шарыгин (13.02.1937–12.03.2004) — ученик Н. С. Бахвалова — занимался вопросами периодизации задач интегрирования [196] и оценками снизу величины погрешности приближенного интегрирования [197, 198]. Обе его оценки снизу относятся к числу неулучшаемых.

Ю. Н. Шахов — ученик Н. М. Коробова — занимался применением теоретико-числовых сеток к интегральным уравнениям и другим вычислительным задачам [199]–[206].

4. Основные направления исследований по теоретико-числовому методу в приближенном анализе

Первый этап истории развития теоретико-числового метода в приближенном анализе естественно отсчитывать от 1957 года, когда вышла первая работа Н. М. Коробова [117], до 1963 года, когда вышла его монография [127].

Можно констатировать, что уже на этом первом этапе определились следующие четыре основных направления исследований:

- Построение многомерных теоретико-числовых квадратурных формул для периодических функций и методы периодизации задач численного интегрирования (см. [4] — [13], [15], [17], [19], [20], [35], [40], [66], [81], [100], [104], [117] — [127], [139], [181], [190], [234], [238]).

- Построение многомерных интерполяционных формул периодических функций (см. [157], [159], [123], [137], [127] стр. 168 — 185, [174] — [176], [223] стр. 183 — 203).

- Построение теоретико-числовых методов решения интегральных уравнений (см. [119], [123], [199] — [202], [127] стр. 190 — 213, [223] стр. 204 — 217).

- Построение теоретико-числовых методов решения некоторых классов уравнений в частных производных (см. [158], [127] стр. 185 — 190, [223] стр. 217 — 222).

Кроме этого к этим четырем направлениям следует отнести и пятое —

- Построение различных многомерных теоретико-числовых сеток и оценка их отклонения.

Как уже отмечалось выше, теория равномерного распределения по модулю 1 является идейной основой теоретико-числового метода в приближенном анализе. В теории равномерного распределения после введения ван дер Корпутом [214] понятия отклонения наряду с качественными аспектами, когда устанавливается только факт равномерного распределения, стали играть центральную роль количественные аспекты, когда необходимо оценить величину отклонения равномерно распределенной последовательности. Его гипотезу о неограниченности величины отклонения первая решила Ардене-Эренфест [207].

В 1954 году вышла знаменитая работа К. Рота [229], в которой было введено понятие квадратичного отклонения для произвольной сетки M в s-мерном кубе. Он показал, что для квадратичного отклонения любой сетки M справедлива оценка снизу

$$D_2(M) >> \ln^{s-1}|M|.$$

Вопрос о точности этой оценки удалось решить К. Роту [230] только через 26 лет в 1980 году.

Эта тематика выросла в целое направление — теория нерегулярности распределения (см. [18], [21] — [28], [32] — [35], [38], [52], [53], [62] — [64], [70] — [72], [83] — [85], [97], [113], [142], [161] — [167], [192], [211] — [217], [226] — [232]).

Важность этих исследований обусловлена тем фактом, что через каждый вид отклонения выражается норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по соответствующей квадратурной формуле на подходящем классе функций (подробнее см. [74], [75]).

В рамках теоретико-числового метода в приближенном анализе выделились два важных направления:

- свойства оптимальных коэффициентов и алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов (см. [9], [11], [12], [29] — [31], [55], [94], [98], [99], [122], [129], [160], [186], [225]),
- теория гиперболической дзета-функции решёток (см. [56] — [58], [65], [82], [86], [103], [108], [109], [148] — [150], [156], [191], [68], [73] — [75]).

К ним примыкают ещё три направления, которые пока далеки от завершения:

- алгоритмы вычисления различных характеристик параллелепипедальных сеток (см. [95], [96]),
- определение количества точек решетки в гиперболическом кресте (см. [54], [107], [111], [153] — [155]),
- суммы дробных долей и их приложения (см. [50] — [53], [151]).

В последние годы своей жизни Н. М. Коробов особое внимание уделял новому направлению исследований:

- специальные полиномы и их приложения к приближенному анализу (см. [131], [135], [138], [187], [188]).

Наконец, отметим ряд отдельных работ, которые либо тесно связаны с теоретико-числовым методом в приближенном анализе, либо используются в этих исследованиях [16], [101], [102], [136], [209].

5. Метод оптимальных коэффициентов

Как рассказывал в феврале 1983 года сам Н. М. Коробов одному из авторов данной работы, метод оптимальных коэффициентов появился в результате поиска рационального варианта теоремы И. И. Пятецкого-Шапиро, в которой доказывалось существование действительных чисел $\theta_1, \ldots, \theta_s$, притом для каждой периодической функции и для каждого количества узлов N квадратурной формулы, вообще говоря, своих значений $\theta_1, \ldots, \theta_s$ таких, что квадратурная формула с узлами $(\{k\theta_1\}, \ldots, \{k\theta_s\})$ $(k = 1, \ldots, N)$ имеет порядок погрешности приближенного интегрирования $O\left(N^{-1}\ln N\right)$ (см. [127], стр. 85 — 87).

Позднее этот результат И. И. Пятецкого-Шапиро был уточнен. Были указаны арифметические свойства этих действительных чисел такие, что более точная оценка $O\left(N^{-1}\right)$ справедлива для любой функции на классе E_s^α $(\alpha > 1)$ гладких периодических функций и для любого количества узлов (см. [127], стр. 89 — 95). Но и этот важный теоретический результат имел существенный недостаток для вычислительной практики, так как относился к числу теорем существования, и он не давал алгоритма вычисления конкретных чисел $\theta_1, \ldots, \theta_s$, кроме случая $s = 2$.

Здесь мы видим ещё один методологический пример организации математических исследований. Получен важный теоретический результат о существовании нового математического объекта, но потребности практики требуют нахождения способов эффективого вычисления этого объекта. Так появляются алгоритмические проблемы теоретико-числового метода приближенного анализа. Надо подчеркнуть, что с самого начала проблема, стоящая перед исследователями, была алгоритмическая. Необходимо было найти эффективные методы численного решения сложных многомерных задач, доведя их до конкретных вычислительных программ, реализованных на компьютерах.

Первые результаты по применению теоретико-числовых сеток для вычисления интегралов произвольной кратности были получены в работе [117] для периодических функций, разлагающихся в абсолютно сходящийся ряд Фурье.

В связи с изучением погрешности приближенного интегрирования для квадратурных формул с параллелепипедальными сетками на классе периодических функций с быстро убывающими коэффициентами Фурье, в работе Н. М. Коробова [118] впервые встречается частный случай гиперболической дзета-функции решетки. Гиперболическая дзета-функция встречается в работах многих исследователей в связи с оценкой погрешности многомерных квадратурных формул с параллелепипедальными сетками на классе гладких периодических функций. В частности, Н. С. Бахвалов доказал общую оценку сверху величины гиперболической дзета-функции через гиперболический параметр решетки, а Н. М. Коробов получил оценку снизу через детерминант решетки. Были построены алгоритмы нахождения оптимальных коэффициентов с малой величиной гиперболической дзета-функции решетки.

В общем виде гиперболическая дзета-функция решеток встречается в работах К. К. Фролова [189], [191]. Рассмотрев алгебраическую решетку, образованную целыми алгебраическими числами чисто вещественного алгебраического поля степени, равной размерности области интегрирования, К. К. Фролов показал, что для таких решеток оценки сверху и снизу для величины гиперболической дзета-функции совпадают по порядку. Отсюда и из результатов И. Ф. Шарыгина [197] следует, что квадратурные формулы с узлами из взаимной решетки к алгебраической решетке будут оптимальными по порядку убывания погрешности приближенного интегрирования на классе гладких периодических функций.

Развитие метода К. К. Фролова содержится в работах В. А. Быковского [15], [17], [19] и работах Н. М. Добровольского [64] — [69]. Дальнейший анализ продемонстрировал, что методы Н. М. Коробова и К. К. Фролова являются двумя противоположными полюсами теории квадратурных формул с обобщенными параллелепипедальными сетками и весовой функцией специального вида. При этом задача о вычислении погрешности приближенного интегрирования по таким формулам один раз сводится к теоретико-числовой задаче об оценке гиперболической дзета-функции соответствующей решетки, и не требуется каждый раз заново проводить оценку нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования для каждого нового типа обобщенной параллелепипедальной сетки.

Важной особенностью всех этих исследований является тот факт, что наряду с нахождением новых научных фактов происходил непрерывный процесс создания новых математических объектов, которые до этого не рассматривались в других исследованиях. Формирование нового языка — набора новых терминов и выделение новых направлений дальнейших исследований — является другим метологическим примером научной действительности.

В 60-х годах XX столетия, отвечая на запросы вычислительной практики, появились и другие подходы к построению многомерных квадратурных формул для различных классов функций (см. [174] — [180], [218], [219]). В связи с этим приведем весьма характерное высказывание академика С. Л. Соболева из [177] (с. 654): "Выбор пространства B, как это по большей части бывает в теории вычислений, в какой-то степени произволен и зависит в практических случаях от интуиции и вкуса исследователя. К сожалению, этот выбор частично диктуется желанием получить задачу, поддающуюся исследованию тем методом, который задуман автором, ибо самая естественная постановка может оказаться слишком трудной".

В настоящее время мы наблюдаем интересное явление, связанное с перемещением исследований по теоретико-числовым методам в приближенном анализе из Москвы в провинцию. Этот метод стал результатом работы семинара, организованного в МИАН им. В. А. Стеклова в 1957 году, которым руководили Н. С. Бахвалов, Н. М. Коробов и Н. Н. Ченцов. Позднее эти исследования сконцентрировались исключительно в МГУ в рамках семинара по тригонометрическим суммам и их приложениям под руководством Н. М. Коробова. В последнее время работа этого семинара продолжается под руководством учеников Н. М. Коробова, но его тематика сместилась в сторону тригонометрических сумм и геометрии чисел.

Непродолжительный период в стенах МИАН им. В. А. Стеклова под руководством С. М. Воронина с конца 80-х годов до последних дней Сергея Михайловича функционировала группа, исследования которой по теоретико-числовым квадратурам были поддержаны грантом РФФИ.

По разным оценкам сейчас в стране постоянно развитием данной теории занимается не более пяти человек, около которых концентрируются на некоторое время аспиранты и студенты, привлекаемые к этой тематике в той или иной мере. Хотя важность теории можно проиллюстрировать защитой по этой тематике за последние двадцать лет двух докторских [19], [73] и более десяти кандидатских диссертаций [202], [191], [67], [24], [156], [116], [150], [152], [34], [61], [42], [41], [147], [114], а также переизданием Н. М. Коробовым монографии [127], которое поддержано грантом РФФИ.

Таким образом, можно констатировать, что теоретико-числовой метод относится к числу актуальных направлений исследования, но в нашей стране его дальнейшая судьба неопределенная в силу малочисленности групп исследователей, занимающихся его развитием. В следующем разделе мы рассмотрим возможные пути решения этой проблемы, которыми может воспользоваться второе поколение исследователей, принявших эстафету от основателей направления.

6. ПОИВС для ТМК в приближенном анализе

В предыдущем разделе была кратко описана история возникновения и становления теоретико-числового метода в приближенном анализе, которая насчитывает уже 60 лет. Даже для специалиста в этой области ориентироваться во всем многообразии работ по этой теме крайне сложно. Согласно библиографии, составленной А. В. Устиновым по просьбе Н. М. Коробова для работы над вторым изданием его монографии, которая вышла в 2004 году, за последние 10 лет XX столетия за рубежом вышло более 500 работ по вопросам численного интегрирования.

В такой ситуации пользователю, например, специалисту по квантовой химии, в которой необходимо рассчитывать многомерные интегралы взаимодействия (см. [141]), или физику, занимающемуся физикой высоких энергий, для которой классы рассчитываемых интегралов существенно другие, или геофизику, решающему задачу минимизации сложной функции методом пвседослучайного поиска (см. [145], [146]), разобраться в этих методах практически невозможно.

Либо он должен забросить свое основное дело и разбираться в геометрии чисел, в теории чисто вещественных алгебраических расширений поля рациональных чисел, в распределении дивизоров и других нетривиальных вопросах теории чисел, либо довериться представителям чуждых для него научных направлений и принять их рецепты на веру, при условии, что они ему встретились.

Но и специалисту по этим методам разобраться во всех областях или в некоторых из них, где могут найти применение результаты его работы, также очень сложно.

Отсюда напрашивается вывод, что необходимо создать проблемно- ориентированную информационную систему (ПОИС) по теоретико-числовым методам в приближенном анализе.

В приложениях теории многомерных квадратурных формул особенную роль играет вычислительный эксперимент. Дело в том, что результаты о величине погрешности этих формул выражаются в терминах норм линейного функционала погрешности на некотором функциональном пространстве и нормы функции, определенной на нем. А, как правило, норма функции неизвестна и ее вычисление более сложная задача, чем вычисление интеграла. Таким образом, мы сталкиваемся с той самой естественной постановкой задачи, о которой писал академик С. Л. Соболев. Теория нам дает ориентиры, где надо искать удовлетворительное решение проблемы, а уже далее, на основании вычислительного эксперимента вырабатываются рекомендации для конкретного класса задач в конкретной предметной области — какой метод и с какими параметрами дает удовлетворительные, достоверные результаты.

Естественные науки сформулировали важнейший критерий научного метода — это воспроизводимость эксперимента. Любой пользователь программной реализации алгоритма должен иметь объективные критерии проверки достоверности полученных результатов. Остановимся на этом подробнее применительно к вопросу о вычислении многомерных интегралов.

Метод оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова обладает очень важным свойством ненасыщаемости алгоритма интегрирования (см. [3]), но это справедливо только для периодических функций. Н. Н. Ченцов предложил делать предварительную периодизацию задачи. Таким образом, мы получаем два параметра метода, количество точек сетки (узлов квадратурной формулы) и метод периодизации, если он требуется. Можно использовать другие методы численного интегрирования, которые приведены в библиографии. Вопрос об их объективном сравнении, насколько нам известно, комплексно не рассматривался. Вполне возможно, что это цеховая тайна специалистов крупных академических вычислительных центров, но такое положение тормозит развитие теории, хотя может быть имеет оправдание, исходящее из каких-то высших интересов.

Есть еще одна немаловажная проблема. В работах представителей разных научных школ используются разные обозначения и математический аппарат из далеких областей науки. Поэтому сопоставление их результатов, чем они себя, как правило, не утруждали, ложится на плечи пользователей этих теорий. Мы сталкиваемся с проблемой омертвления научного достояния. Это усугубляется тем, что телеграфный стиль научных публикаций, а, иногда, и другие соображения, заставляли авторов пренебрегать, осознанно или неумышленно, важным предостережением Дж. Литлвуда, что две пропущенные тривиальности могут в совокупности образовать непреодолимое препятствие.

Информационные технологии и стремительно развивающиеся возможности памяти на машинных носителях снимают ограничения на объем излагаемого материала и дают принципиальную возможность создавать полное и самодостаточное изложение любого материала. Например, можно в полном объеме предоставлять результаты любого эксперимента, в том числе и численного.

В последнее время идея практического создания информационных ресурсов по теории чисел и теоретико-числовым методам в приближенном анализе обогатилась сотрудничеством со студентами выпускного курса мех-мата ТулГУ, которые в рамках выполнения контрольно-практических работ по дисциплине "История и методология прикладной математики и информатики" создали ряд сайтов о крупных отечественных ученых. В это же время в ТГПУ на кафедрах информатики и информационных технологий создается сайт по теоретико-числовым методам в приближенном анализе, который размещен на факультетском сервере, приобретенном для этих целей на средства гранта РФФИ по теоретико-числовым методам приближенного анализа.

Подводя итог обсуждения в данном разделе, мы можем констатировать ещё один важный метологический аспект организации современных научных исследований — это необходимость информационной поддержки, по-видимому, любого научного исследования. На первый взгляд может показаться, что современные информационные ресурсы, широко представленные в Интернете, решают возникающие задачи, но более пристальный анализ показывает, что актуальным является создание всевозможных ПОИВС. Проблемно ориентированные информационно-вычислительные системы могут являться эффективной современной иновационной формой организации исследований, имеющей важные социальные аспекты.

7. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов

Одной из центральных проблем метода оптимальных коэффициентов остается вопрос о построении эффективных алгоритмов вычисления оптимальных коэффициентов. Все известные алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов, кроме случая двумерных коэффициентов, можно отнести к различным вариантам метода полного перебора дискретного аргумента из некоторой области для поиска минимального значения специально построенной функции или нескольких функций.

Суть одной группы этих алгоритмов состоит в следующем. Выбирается один из классов E_s^α и в нем граничная функция класса, то есть такая функция, для которой погрешность приближенного интегрирования по квадратурной формуле с параллелепипедальной сеткой максимальна, а значение интеграла известно. После этого методом перебора в некоторой области коэффициентов находится набор, на котором эта величина минимальна. Такой набор и берется в качестве набора оптимальных коэффициентов, если имеется соответствующая теорема о существовании в заданной области оптимальных коэффициентов.

Поиск оптимальных коэффициентов существенно сокращается, если удается доказать, что их можно вычислять последовательно. Имеется два варианта такого последовательного вычисления — покоординатное, когда постепенно увеличивается размерность набора, и модульное, когда поиск для составного модуля основан на результатах поиска наборов для модуля-делителя этого составного модуля.

Суть других алгоритмов состоит в том, что на основании критериев оптимальности, например основанных на теореме Гельфонда, строится функция, для которой минимальное значение достигается на наборе оптимальных коэффициентов. Как показывают исследования, проводимые в рамках выполнения гранта РФФИ 05-01-00672, для широкого класса специальных составных модулей удается получить алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов за $O(N)$ арифметических операций для произвольной размерности. Как подчеркивал Н. М. Коробов в беседах на эту тему, такая трудоемкость вычисления оптимальных коэффициентов соизмерима с трудоемкостью численного интегрирования по параллелепипедальным сеткам, а значит, может считаться приемлемой.

8. Меры качества оптимальных коэффициентов

После достаточно длинного этапа исследований стало ясно, что необходимо рассмотрение различных мер качества оптимальных коэффициентов и их интерпретации как нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования или приближенного суммирования в подходящем функциональном пространстве.

В 1959 году Н.М.Коробов в работе "Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов" ввел сетки вида

$$M(\vec{a},N)=\left\{M_k=\left(\left\{\frac{a_1k}{N}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{N}\right\}\right)\middle| k=1,2,\ldots,N\right\}, \tag{19}$$

где $\vec{a}=(a_1,\ldots,a_s)$, $a_1,\ldots,a_s$ — целые числа, взаимно простые с N. Такие сетки он назвал *параллелепипедальными*. В этой работе [121] Н. М. Коробовым было введено понятие оптимальных коэффициентов и указано их значение для приближенного вычисления многомерных интегралов произвольной кратности s от периодических гладких функций.

Пусть целое $N>1$, $N_1=\left[\dfrac{N-1}{2}\right]$, $N_2=\left[\dfrac{N}{2}\right]$, $a_\nu=a_\nu(N)$ – целые, взаимно простые с N $(\nu=1,\ldots,s)$ и символ Коробова $\delta_N(b)$ задан равенствами

$$\delta_N(b)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad b\not\equiv 0 \pmod N,\\ 1, & \text{если}\quad b\equiv 0 \pmod N.\end{cases} \tag{20}$$

Обозначим через $S_N(z_1,\ldots,z_s)$ сумму[9]

$$S_N(z_1,\ldots,z_s)=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-N_1}^{N_2}{}' \frac{\delta_N(z_1m_1+\ldots+z_sm_s)}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}, \tag{21}$$

где z_1, …, z_s – произвольные целые, $\overline{m}=\max(1,|m|)$ для любого вещественного m.

Согласно определению, *если существуют константы $\beta=\beta(s)$ и $B=B(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений N выполняется неравенство*

$$S_N(a_1,\ldots,a_s)\leqslant B\frac{\ln^\beta N}{N}, \tag{22}$$

то целые $a_1,\ldots,a_s$ называются оптимальными коэффициентами индекса β по модулю N.

Величину $S_N(a_1,\ldots,a_s)$ называют основной мерой качества набора оптимальных коэффициентов. Известно (см. [140] стр. 81), что для любых целых $a_1,\ldots,a_s$ выполняется оценка

$$S_N(a_1,\ldots,a_s)\geqslant B_0\frac{\ln^s N}{N}, \tag{23}$$

с некоторой константой B_0.

Отметим, что основная мера качества является нормой линейного функционала приближенного суммирования на классе $E_{s,p}$ и, как показал И. Ф. Шарыгин [198], ни при каком выборе сетки эту оценку улучшить нельзя.

Для $\sigma(N)$ — *среднего арифметического основной меры качества набора коэффициентов по всем параллелепипедальным сеткам*, заданного равенством

$$\sigma(N)=\frac{1}{\varphi^s(N)}\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_s=1\\ (a_v,N)=1\,(v=1,\ldots,s)}}^{N-1} S_N(a_1,\ldots,a_s), \tag{24}$$

и для любого составного модуля N справедливо асимптотическое равенство

$$\sigma(N)=\frac{2^s\ln^s N}{N}+O\left(\frac{\ln^{s-1}N}{N}\right). \tag{25}$$

Доказательство этой асимптотической формулы достаточно сложно (см. [106], [36], [37]). Из неё следует существование оптимальных коэффициентов для любого составного модуля N.

[9]Здесь $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1,\ldots,m_s)\neq(0,\ldots,0)$.

Различные критерии оптимальных коэффициентов, на которых основаны алгоритмы их вычисления, приведены в работах [122], [127] и [128]. В качестве критериев оптимальности набора естественно рассматривать различные количественные меры качества. В качестве меры качества можно брать погрешность приближенного интегрирования или суммирования граничной функции класса. Удается в явном виде в конечной форме найти граничные функции некоторых классов. Для этого требуется доказать ряд лемм о логарифмах произведения синусов, которые позволяют просуммировать некоторый класс конечных сумм.

9. Теорема А. О. Гельфонда и оптимальные коэффициенты

Важную роль имеет применение теоремы А. О. Гельфонда о связи решетки $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, \ldots, a_s; N)$ решений линейного сравнения и присоединенной решетки $\Lambda^{(p)}$ решений системы линейных сравнений к вопросу о построении набора оптимальных коэффициентов параллелепипедальной сетки для любого составного модуля N.

В 1982 году Н. М. Коробов в работе [129] построил наиболее быстрый из известных алгоритм вычисления оптимальных коэффициентов по модулю, равному степени двойки (см. [12] с обобщением алгоритма Коробова). Этот алгоритм был основан на теореме А. О. Гельфонда, связывающей между собой величины гиперболического параметра $q(\Lambda)$ решетки $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$ решений линейного сравнения

$$m + a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod N \tag{26}$$

и аналогичного параметра $Q(\Lambda)$ присоединенной решетки $\Lambda^{(p)}$ решений системы линейных сравнений

$$\begin{cases} k_1 \equiv a_1 k \\ \ldots\ldots\ldots \\ k_s \equiv a_s k \end{cases} \pmod N. \tag{27}$$

Согласно теореме А. О. Гельфонда (см. [128], [130], [80], [140]) для величин

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{m} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \overline{m}\,\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s, \qquad Q(\Lambda) = \min_{\substack{\vec{k} \in \Lambda^{(p)}, \\ k \not\equiv 0 \pmod N}} |k||k_1| \ldots |k_s| \tag{28}$$

справедливы неравенства

$$Q(\Lambda) \geqslant C_1(s) q(\Lambda)^s, \qquad q(\Lambda) \geqslant C_1(s) \frac{Q(\Lambda)^s}{N^{s^2-1}},$$
$$C_1 = \min\left(\frac{1}{(2s+3)^{s+1}}, \frac{1}{5^{2s}}\right). \tag{29}$$

Будем как обычно через $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$ обозначать расстояние до ближайщего целого.

Обозначим через $S^*_N(z_1, \ldots, z_s)$ сумму

$$S^*_N(z_1, \ldots, z_s) = \sum_{k=1}^{N_2} \frac{1}{k \left\| \frac{z_1 k}{N} \right\| \ldots \left\| \frac{z_s k}{N} \right\|}, \tag{30}$$

где z_1, …, z_s – произвольные целые. Величину функции $S^*_N(z_1, \ldots, z_s)$ будем называть присоединенной мерой качества.

Л. П. Бочарова доказала ряд теорем (см. [9]):

Теорема 3. *Целые $1, z_1, \ldots, z_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю N тогда, и только тогда, когда существуют константы $\beta_2 = \beta_2(s)$ и $B_2 = B_2(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений N выполняется неравенство*

$$S_N^*(z_1, \ldots, z_s) \leqslant B_2 \ln^{\beta_2} N.$$

Теорема 4. *Для любого натурального $N > 2$ существует набор оптимальных коэффициентов $1, a_1, \ldots, a_s$ по модулю N с*

$$S^*(a_1, \ldots, a_s) \leqslant (2\ln N + 2(C - \ln 2) + 3)^s (\ln N + C - \ln 2).$$

Таким образом, последняя теорема дает новое, достаточно простое доказательство существования оптимальных коэффициентов по любому составному модулю, а следующая теорема дает способ их вычисления.

Теорема 5. *Для любого натурального $N > 2$ определим последовательно целые числа $a_1^*, \ldots, a_s^*$ из условий*

$$S^*(a_1^*, \ldots, a_j^*) = \min_{\substack{1 \leqslant a \leqslant N-1,\\ (a,N)=1}} S^*(a_1^*, \ldots, a_{j-1}^*, a),$$
$$1 \leqslant a_j \leqslant N - 1, \quad (a_j, N) = 1 \quad (j = 1, \ldots, s),$$

тогда набор $1, a_1^*, \ldots, a_j^*$ является набором оптимальных коэффициентов по модулю N с

$$S^*(a_1^*, \ldots, a_j^*) \leqslant (2\ln N + 2(C - \ln 2) + 3)^j (\ln N + C - \ln 2)$$

при любом j с $1 \leqslant j \leqslant s$.

10. Алгоритмы поиска для произвольного модуля

Л. П. Бочаровой удалось построить алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов параллелепипедальных сеток и комбинированных сеток для произвольного N (см. [11]).

Множество $M_N(a_1, \ldots, a_s)$ из N точек $M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right)$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$, как уже указывалось выше, называется параллелепипедальной сеткой и используется для построения многомерных квадратурных формул вида:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x})\, d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) - R_N[f],$$

где $R_N[f]$ – погрешность квадратурной формулы.

Рассмотрим две функции

$$T_N^*(a_1, \ldots, a_s) = \sum_{t=1}^{N-1} \prod_{\nu=1}^{s} \left(1 - 2\ln\left(2\sin\left(\pi\left\{\frac{a_\nu t}{N}\right\}\right)\right)\right),$$
$$T_N(a_1, \ldots, a_s) = \sum_{t=1}^{N-1} \prod_{\nu=1}^{s} \left(\ln N - 2\ln\left(2\sin\left(\pi\left\{\frac{a_\nu t}{N}\right\}\right)\right)\right),$$

первая из которых называется логарифмической мерой качества, а вторая — усиленной логарифмической мерой качества набора коэффициентов $a_1, \ldots, a_s$ по модулю N.

Если рассмотреть обобщенную логарифмическую меру качества с константой $A \geqslant 1$, заданную равенством

$$T_{N,A}(a_1,\ldots,a_s) = \sum_{t=1}^{N-1}\prod_{\nu=1}^{s}\left(A - 2\ln\left(2\sin\left(\pi\left\{\frac{a_\nu t}{N}\right\}\right)\right)\right), \tag{31}$$

то справедливы равенства

$$T_N^*(a_1,\ldots,a_s) = T_{N,1}(a_1,\ldots,a_s), \quad T_N(a_1,\ldots,a_s) = T_{N,\ln N}(a_1,\ldots,a_s).$$

Прежде всего заметим, что логарифмическая и усиленная логарифмическая меры качества набора коэффициентов имеют простой смысл в терминах приближенных формул суммирования. Рассмотрим среднее-арифметическое значение по узлам равномерной сетки, лежащим в открытом единичном s-мерном кубе $(0;1)^s$, для функций

$$f_1(x_1,\ldots,x_s) = \prod_{j=1}^{s}(1 - 2\ln(2\sin(\pi x_j)))$$

и

$$f_2(x_1,\ldots,x_s) = \prod_{j=1}^{s}(\ln N - 2\ln(2\sin(\pi x_j))),$$

а именно,

$$\sigma_1 = \frac{1}{(N-1)^s}\sum_{t_1,\ldots,t_s=1}^{N-1} f_1\left(\frac{t_1}{N},\ldots,\frac{t_s}{N}\right)$$

$$\text{и } \sigma_2 = \frac{1}{(N-1)^s}\sum_{t_1,\ldots,t_s=1}^{N-1} f_2\left(\frac{t_1}{N},\ldots,\frac{t_s}{N}\right).$$

Согласно лемме о произведении синусов (см. [127], стр. 115)

$$\prod_{k=1}^{N-1} 2\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right) = N, \tag{32}$$

справедливы равенства

$$\sigma_1 = \left(1 - \frac{2\ln N}{N-1}\right)^s = 1 - O\left(\frac{\ln N}{N}\right)$$

и

$$\sigma_2 = \left(\ln N - \frac{2\ln N}{N-1}\right)^s = \ln^s N - O\left(\frac{\ln^s N}{N}\right).$$

Если рассмотреть формулу приближенного суммирования с параллелепипедальной сеткой без нулевой точки

$$\frac{1}{(N-1)^s}\sum_{t_1,\ldots,t_s=1}^{N-1} f\left(\frac{t_1}{N},\ldots,\frac{t_s}{N}\right) =$$
$$= \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N-1} f\left(\left\{\frac{a_1 t}{N}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_s t}{N}\right\}\right) - R[f],$$

то при $f(x_1,\dots,x_s)=f_1(x_1,\dots,x_s)$ получим

$$R[f_1]=\frac{T_N^*(a_1,\dots,a_s)}{N-1}-\left(1-\frac{2\ln N}{N-1}\right)^s=$$
$$=\frac{T_N^*(a_1,\dots,a_s)-N}{N-1}+O\left(\frac{\ln N}{N}\right),$$

а при $f(x_1,\dots,x_s)=f_2(x_1,\dots,x_s)$ находим

$$R[f_2]=\frac{T_N(a_1,\dots,a_s)}{N-1}-\left(\ln N-\frac{2\ln N}{N-1}\right)^s=$$
$$=\frac{T_N(a_1,\dots,a_s)-N\ln^s N}{N-1}+O\left(\frac{\ln^s N}{N}\right).$$

Ясно, что эти формулы являются частным случаем связи погрешности приближенного суммирования с обобщенной логарифмической мерой качества с константой A. Если рассмотрим среднее-арифметическое значение по узлам равномерной сетки, лежащим в открытом единичном s-мерном кубе $(0;1)^s$, для функции

$$f(x_1,\dots,x_s;A)=\prod_{j=1}^{s}(A-2\ln(2\sin(\pi x_j)))$$

а именно,

$$\sigma(A)=\frac{1}{(N-1)^s}\sum_{t_1,\dots,t_s=1}^{N-1}f\left(\frac{t_1}{N},\dots,\frac{t_s}{N};A\right),$$

то при $A\geqslant 1$

$$\sigma(A)=\left(A-\frac{2\ln N}{N-1}\right)^s=A^s-O\left(\frac{A^{s-1}\ln N}{N}\right).$$

Поэтому, если рассмотреть формулу приближенного суммирования с параллелепипедальной сеткой без нулевой точки

$$\frac{1}{(N-1)^s}\sum_{t_1,\dots,t_s=1}^{N-1}f\left(\frac{t_1}{N},\dots,\frac{t_s}{N};A\right)=$$
$$=\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N-1}f\left(\left\{\frac{a_1t}{N}\right\},\dots,\left\{\frac{a_st}{N}\right\};A\right)-R[f(\vec{x};A)],$$

то получим

$$R[f(\vec{x};A)]=\frac{T_{N,A}(a_1,\dots,a_s)}{N-1}-\left(A-\frac{2\ln N}{N-1}\right)^s=$$
$$=\frac{T_{N,A}(a_1,\dots,a_s)-A^sN}{N-1}+O\left(\frac{A^{s-1}\ln N+A^s}{N}\right).$$

В работе [127] (см. стр. 117) показано, что необходимым и достаточным условием того, чтобы целые $a_1,\dots,a_s$ были оптимальными коэффициентами, является существование констант $\beta_1=\beta_1(s)$ и $c_1=c_1(s)$ таких, чтобы для логарифмической меры качества оценка

$$T_N^*(a_1,\dots,a_s)\leqslant N+c_1\ln^{\beta_1}N$$

выполнялась для бесконечной последовательности целых N.

Аналогичный результат для $T_N(a_1, \ldots, a_s)$ — усиленной логарифмической меры качества доказан в работе [99].

Критерий оптимальности. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы целые $a_1, \ldots, a_s$ были оптимальными коэффициентами, является существование констант $\beta_2 = \beta_2(s)$ и $c_2 = c_2(s)$ таких, чтобы оценка*

$$T_N(a_1, \ldots, a_s) \leqslant N \ln^s N + c_2 \ln^{\beta_2} N \tag{33}$$

выполнялась для бесконечной последовательности целых N.

При этом, если выполнена оценка (33), то каждый набор коэффициентов $a_{j_1}, \ldots, a_{j_t}$ $(1 \leqslant j_1 < \ldots < j_t \leqslant s)$, $t \geqslant 2$ будет оптимальным с индексом $max(t + \beta_2 - s, t)$.

Важную роль в методе оптимальных коэффициентов играют среднее арифметическое логарифмической меры качества и среднее арифметическое усиленной логарифмической меры качества по всем параллелепипедальным сеткам:

$$\begin{aligned} T_N^* &= \frac{1}{\varphi^s(N)} \sum_{\substack{1 \leqslant a_j \leqslant N-1,\, (a_j, N)=1 \\ (j=1,\ldots,s)}} T_N^*(a_1, \ldots, a_s), \\ T_N &= \frac{1}{\varphi^s(N)} \sum_{\substack{1 \leqslant a_j \leqslant N-1,\, (a_j, N)=1 \\ (j=1,\ldots,s)}} T_N(a_1, \ldots, a_s). \end{aligned} \tag{34}$$

Если рассмотреть среднее арифметическое обобщенной логарифмической меры качества с константой A по всем параллелепипедальным сеткам

$$T_{N,\,A} = \frac{1}{\varphi^s(N)} \sum_{\substack{1 \leqslant a_j \leqslant N-1,\, (a_j, N)=1 \\ (j=1,\ldots,s)}} T_{N,A}(a_1, \ldots, a_s), \tag{35}$$

то

$$T_N^* = T_{N,1}, \quad T_N = T_{N,\,\ln N}.$$

Как показал Н. М. Коробов ([127], стр. 122), при простом $N = p$ справедливо равенство

$$T_p^* = (p-1)\left(1 - \frac{2\ln p}{p-1}\right)^s.$$

Аналогичное равенство справедливо для усиленной логаримической меры качества

$$T_p = (p-1)\left(\ln p - \frac{2\ln p}{p-1}\right)^s \tag{36}$$

и для обобщенной логаримической меры качества с константой A

$$T_{p,\,A} = (p-1)\left(A - \frac{2\ln p}{p-1}\right)^s. \tag{37}$$

Каждое из этих равенств позволяет утверждать, что в основном все параллелепипедальные сетки по простому модулю являются оптимальными.

Заметим, что в работе [99] для простого p и $N = p^h$ доказана более общая формула

$$T_{p^h} = (p^h - 1)\ln^s p^h + \sum_{\lambda=1}^{h} \varphi\left(p^\lambda\right)\left(\left(\ln p^h - \frac{2\ln p}{\varphi\left(p^\lambda\right)}\right)^s - \ln^s p^h\right). \tag{38}$$

Удается доказать обобщенный критерий оптимальности набора коэффициентов по произвольному модулю N, выраженный в терминах величины обобщенной логарифмической меры качества $T_{N,A}(a_1, \ldots, a_s)$, и вычисляется среднее $T_{N,A}$.

Далее, центральное место в теории занимает алгоритм поиска значений $a_1, \ldots, a_s$ из приведенной системы вычетов по произвольному модулю N, таких что для обобщенной логарифмической меры качества $T_{N,A}(a_1, \ldots, a_s)$ выполнено неравенство

$$T_{N,A}(a_1, \ldots, a_s) \leqslant T_{N,A}. \tag{39}$$

В частности, при $A = \ln N$ получаем неравенство

$$T_N(a_1, \ldots, a_s) \leqslant N \ln^s N. \tag{40}$$

Значение именно таких наборов оптимальных коэффициентов для комбинированных сеток (см. [133])

$$M(k, k_1, \ldots, k_s) = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} + \frac{k_1}{M} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{N} + \frac{k_1}{M} \right\} \right)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, N-1; k_1, \ldots, k_s = 0, 1, \ldots, M-1),$$

где M — произвольное натуральное, взаимно простое с N, определяется следующим результатом из работы [99].

Если оптимальные коэффициенты $a_1, \ldots, a_s$ удовлетворяют условию (40), $M << \ln(N)$ и $f \in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности $R_{NM^s}[f]$ квадратурной формулы

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x})\, d\vec{x} =$$
$$= \frac{1}{NM^s} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{M-1} f\left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} + \frac{k_1}{M} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{N} + \frac{k_s}{M} \right\} \right) - R_{NM^s}[f],$$

выполняется оценка

$$|R_{NM^s}[f]| << \frac{\ln^{\alpha s} N}{(NM^s)^\alpha}.$$

Все известные алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов, кроме случая $s = 2$, можно отнести к различным вариантам метода полного перебора дискретного аргумента из некоторой области для поиска минимального значения специально построенной функции или нескольких функций. К такому же типу относится и предлагаемый ниже алгоритм. Так как для простых модулей N алгоритм Коробова из [127] (см. стр. 120 — 123) совпадает с нашим, а для модуля N, равного степени простого p, обобщение алгоритма Коробова содержится в работе [99], то далее будет предполагаться модуль N, имеющий хотя бы два различных простых делителей, то есть $v(N) > 1$. Для краткости далее везде $n = v(N) \geqslant 2$.

Напомним определение произведения двух сеток M_1 и M_2. Как известно (см. [59]),

$$M_1 \cdot M_2 = \{ \vec{z} = \{\vec{x} + \vec{y}\} |\, \vec{x} \in M_1,\, \vec{y} \in M_2 \},$$

где для любого вектора $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$.

Для нахождения оптимальных значений $a_1, \ldots, a_s$ переменных $X_1, \ldots, X_s$, пробегающих наименьшую приведенную систему вычетов по модулю $N = P_1 \cdot \ldots \cdot P_n$, где $P_\nu = p_\nu^{\alpha_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ и $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые в каноническом разложении числа

N, переходим к рассмотрению параллелепипедальной сетки по модулю N как произведения параллелепипедальных сеток по модулям $P_1,\ldots,P_n$:

$$M_N(a_1,\ldots,a_s)=\prod_{\nu=1}^{n}M_{P_\nu}(a_{1\nu},\ldots,a_{s\nu}),$$

где $a_{1\nu},\ldots,a_{s\nu}$ из приведенной системы вычетов по модулю P_ν $(\nu=1,\ldots,n)$. Такое представление параллелепипедальной сетки по модулю N как произведения параллелепипедальных сеток по модулям $P_1,\ldots,P_n$ приводит к поиску $a_1,\ldots,a_s$ в виде

$$a_j=N\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{j\nu}}{P_\nu}\right\}\quad(1\leqslant j\leqslant s),$$

а сама параллелепипедальная сетка $M_N(a_1,\ldots,a_s)$ допускает более удобную для дальнейшего кратную параметризацию точек

$$M_N(a_1,\ldots,a_s)=$$
$$=\left\{M(t_1,\ldots,t_n)=\left(\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{1\nu}t_\nu}{P_\nu}\right\},\ldots,\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{s\nu}t_\nu}{P_\nu}\right\}\right)\middle|\begin{array}{c}0\leqslant t_\nu\leqslant P_\nu-1\\ \nu=1,\ldots,n\end{array}\right\}.$$

Многие дальнейшие выкладки будут иметь геометрическую интерпретацию, если рассмотреть следующие произведения параллелепипедальных сеток:

$$M^{(\lambda)}=\prod_{\nu=1}^{\lambda}M_{P_\nu}(a_{1\nu},\ldots,a_{s\nu})=$$
$$=\left\{M(t_1,\ldots,t_\lambda)=\left(\left\{\sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{a_{1\nu}t_\nu}{P_\nu}\right\},\ldots,\left\{\sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{a_{s\nu}t_\nu}{P_\nu}\right\}\right)\middle|\begin{array}{c}0\leqslant t_\nu\leqslant P_\nu-1\\ \nu=1,\ldots,\lambda\end{array}\right\},$$
$$M^{(\lambda)*}=\prod_{\nu=\lambda+1}^{n}M_{P_\nu}(a_{1\nu},\ldots,a_{s\nu})=$$
$$=\left\{M(t_{\lambda+1},\ldots,t_n)=\left(\left\{\sum_{\nu=\lambda+1}^{n}\frac{a_{1\nu}t_\nu}{P_\nu}\right\},\ldots,\left\{\sum_{\nu=\lambda+1}^{n}\frac{a_{s\nu}t_\nu}{P_\nu}\right\}\right)\middle|\begin{array}{c}0\leqslant t_\nu\leqslant P_\nu-1\\ \nu=\lambda+1,\ldots,n\end{array}\right\},$$

$$M_N(a_1,\ldots,a_s)=M^{(\lambda)}\cdot M^{(\lambda)*}\quad(0\leqslant\lambda\leqslant n).\tag{41}$$

Здесь удобно считать, что $M^{(0)}=M^{(n)*}=\{\vec{0}\}$, кроме того полагаем $p_0=1$.

Такой подход приводит сначала к переходу к переменным $Z_{j\nu}$, пробегающим приведенные системы вычетов, соответственно, по модулю P_ν, с помощью формулы

$$X_j=N\left\{\frac{Z_{j1}}{P_1}+\ldots+\frac{Z_{jn}}{P_n}\right\}\quad(j=1,\ldots,s).$$

Затем рассмотрим каждую из параллелепипедальных сеток $M_{P_\nu}(a_{1\nu},\ldots,a_{s\nu})$ по модулю P_ν как произведение неполных параллелепипедальных сеток:

$$M_{P_\nu}(a_{1\nu},\ldots,a_{s\nu})=\prod_{\lambda=0}^{\alpha_\nu-1}M^*_{p_\nu^{\lambda+1}}\left(\sum_{\mu=0}^{\lambda}a_{1\nu\mu}p_\nu^\mu,\ldots,\sum_{\mu=0}^{\lambda}a_{s\nu\mu}p_\nu^\mu\right),$$

где неполная параллелепипедальная сетка

$$M^*_{p_\nu^{\lambda+1}}\left(\sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{1\nu\mu}p_\nu^\mu, \ldots, \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{s\nu\mu}p_\nu^\mu\right)$$

из p_ν точек имеет вид:

$$M^*_{p_\nu^{\lambda+1}}\left(\sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{1\nu\mu}p_\nu^\mu, \ldots, \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{s\nu\mu}p_\nu^\mu\right) =$$
$$= \left\{ M_\lambda(t_{\nu,\lambda}) = \left(\left\{ \frac{t_{\nu,\lambda}}{p_\nu^{\lambda+1}} \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{1\nu\mu}p_\nu^\mu \right\}, \ \ldots, \right.\right.$$
$$\left.\left. \ldots, \left\{ \frac{t_{\nu,\lambda}}{p_\nu^{\lambda+1}} \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{s\nu\mu}p_\nu^\mu \right\} \right) \middle| \, 0 \leqslant t_{\nu,\lambda} \leqslant p_\nu - 1 \right\}.$$

Таким образом приходим к p—ичным представлениям переменных $Z_{j\nu}$:

$$Z_{j\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\alpha_\nu - 1} z_{j\nu\lambda}p_\nu^\lambda \quad (j = 1, \ldots, s \quad \nu = 1, \ldots, n),$$

при этом величины $z_{j\nu\lambda}$ при $1 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_\nu - 1$ пробегают полные системы вычетов по модулю p_ν, а величина $z_{j\nu 0}$ — только приведенную систему вычетов.

Следовательно, задача о нахождении оптимальных значений $a_1, \ldots, a_s$ из достаточно сложной для программирования s—мерной области

$$1 \leqslant a_j \leqslant N - 1 \quad (a_j, N) = 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant s),$$

содержащей $\varphi^s(N)$ точек, где $\varphi(N)$ — функция Эйлера, сводится к задаче о нахождении значений

$$a_{j\nu\lambda} \quad (1 \leqslant j \leqslant s, 1 \leqslant \nu \leqslant n, 0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_\nu - 1)$$

из более простой $s(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$—мерной области

$$0 \leqslant a_{j\nu\lambda} \leqslant p_\nu - 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant s, 1 \leqslant \nu \leqslant n, 1 \leqslant \lambda \leqslant \alpha_\nu - 1),$$
$$1 \leqslant a_{j\nu 0} \leqslant p_\nu - 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant s, 1 \leqslant \nu \leqslant n),$$

в которой содержится то же самое количество точек.

Упорядочим множество индексов $(j\,\nu\,\lambda)$ по правилу:

$(j_1\,\nu_1\,\lambda_1) < (j\,\nu\,\lambda)$, если выполнено одно из трех условий:

$$\begin{cases} a) & \nu_1 < \nu; \\ b) & \nu_1 = \nu, \quad \lambda_1 < \lambda; \\ c) & \nu_1 = \nu, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad j_1 < j. \end{cases}$$

Условия $a), b), c)$ задают на множестве индексов линейный порядок, который с точностью до перестановки индексов является лексикографическим. Минимальным элементом является набор $(1\,1\,0)$, максимальным — $(s\,n\,\alpha_n{-}1)$.

На линейно упорядоченном множестве индексов можно ввести две функции: $(j\,\nu\,\lambda)'$ — следующий набор, $(j\,\nu\,\lambda)^*$ — предыдущий набор с помощью равенств

$$(j\,\nu\,\lambda)' = \begin{cases} (j+1\,\nu\,\lambda), & \text{если} \quad j < s, \\ (1\,\nu\,\lambda+1), & \text{если} \quad j = s, \lambda < \alpha_\nu - 1, \\ (1\,\nu+1\,0), & \text{если} \quad j = s, \lambda = \alpha_\nu - 1, \nu < n; \end{cases}$$

$$(j\,\nu\,\lambda)^* = \begin{cases} (j-1\,\nu\,\lambda), & \text{если} \quad j > 1, \\ (s\,\nu\,\lambda-1), & \text{если} \quad j = 1, \lambda > 0, \\ (s\,\nu-1\;\alpha_{\nu-1}-1), & \text{если} \quad j = 1, \lambda = 0, \nu > 1. \end{cases}$$

Для описания алгоритма вычисления $a_{j\nu\lambda}$ нам необходимо построить систему функций $T^{(j\nu\lambda)}_{N,\,A}(z)$, зависящих от параметров $a_{j_1\nu_1\lambda_1}$ со всеми наборами индексов $(j_1\,\nu_1\,\lambda_1) < (j\,\nu\,\lambda)$.

Удобно ввести ещё вспомогательные функции $T^{(0\nu\lambda)}_{N,\,A}(z) = T^{(1\nu\lambda)^*}_{N,\,A}(z)$.

Определим величины ε_λ и множества $B_{\nu\lambda}$ равенствами

$$\varepsilon_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \lambda = 0, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > 0, \end{cases} \qquad B_{\nu\lambda} = \{\varepsilon_\lambda, \ldots, p_\nu - 1\}.$$

Таким образом, множество $B_{\nu\lambda}$ — полная система вычетов по модулю p_ν при $\lambda > 0$ и приведенная при $\lambda = 0$.

Определение функций $T^{(j\nu\lambda)}_{N,\,A}(z)$, заданной на конечном множестве $B_{\nu\lambda}$, проведем последовательно, начиная с наибольшего набора индексов, следующим образом.

$$T^{(sn\alpha_n-1)}_{N,\,A}(z) = T_{N,\,A}\left(N\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{P_\nu}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_\nu-1} z_{1\nu\lambda}p_\nu^\lambda\right\}, \ldots, N\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{P_\nu}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_\nu-1} z_{s\nu\lambda}p_\nu^\lambda\right\}\right),$$

где $z = z_{sn\alpha_n-1}$, а все остальные $z_{j\nu\lambda}$ с меньшими наборами индексов являются параметрами.

Если функция $T^{(j\nu\lambda)}_{N,\,A}(z)$ уже определена, то следующая функция $T^{(j\nu\lambda)^*}_{N,\,A}(z)$ от $z = z_{(j\nu\lambda)^*}$ на конечном множестве $B_{\nu_1\lambda_1}$, где $(j_1\nu_1\lambda_1) = (j\nu\lambda)^*$, задается равенством

$$T^{(j\nu\lambda)^*}_{N,\,A}(z) = \frac{1}{p_\nu - \varepsilon_\lambda}\sum_{u=\varepsilon_\lambda}^{p_\nu-1} T^{(j\nu\lambda)}_{N,\,A}(u).$$

Построение набора функций $T^{(j\nu\lambda)}_{N,\,A}(z)$ для $(110) \leqslant (j\,\nu\,\lambda) \leqslant (s\,n\,\alpha_n-1)$ закончено.

Алгоритм вычисления величин $a_{110}, \ldots . a_{sn\alpha_n-1}$ проводится последовательно, исходя из соотношений:

$$\begin{cases} 1 \leqslant a_{110} \leqslant p_1 - 1, \\ T^{(110)}_{N,\,A}(a_{110}) = \min\limits_{1\leqslant z\leqslant p_1-1} T^{(110)}_{N,\,A}(z), \end{cases} \tag{42}$$

если $a_{110}, \ldots . a_{(j\nu\lambda)^*}$ уже определены, то $a_{j\nu\lambda}$ находится из условий

$$\begin{cases} \varepsilon_\lambda \leqslant a_{j\nu\lambda} \leqslant p_\nu - 1, \\ T^{(j\nu\lambda)}_{N,\,A}(a_{j\nu\lambda}) = \min\limits_{\varepsilon_\lambda\leqslant z\leqslant p_\nu-1} T^{(j\nu\lambda)}_{N,\,A}(z). \end{cases} \tag{43}$$

Для всех функций $T^{(j\nu\lambda)}_{N}(z)$, выполнив необходимые суммирования в конечном виде, удается получить явные формулы.

Центральным результатом здесь является следующая теорема:

Пусть $a_{110}, \ldots, a_{sn\alpha_n-1}$ найдены по алгоритму, заданному формулами (42, 43). Обозначим через $a_1, \ldots, a_s$ величины, заданные по формулам

$$a_j = N\left\{\frac{1}{P_1}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_1-1} a_{j1\lambda}p_1^\lambda + \ldots + \frac{1}{P_n}\sum_{\lambda=0}^{\alpha_n-1} a_{jn\lambda}p_n^\lambda\right\} \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{44}$$

Теорема 6. *Величины $a_1, \ldots, a_s$ заданные формулами (42, 43, 44) являются оптимальными коэффициентами по модулю N индекса s и для обобщенной логарифмической меры качества с константой A этого набора коэффициентов по модулю N справедливо неравенство*

$$T_{N,A}(a_1, \ldots, a_s) \leqslant A^s \cdot (N-1) + \sum_{p|N} \sum_{\nu=1}^{\nu_p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^\nu \left(\left(A - \frac{2p \ln p}{(p-1)p^\nu}\right)^s - A^s\right).$$

11. Алгоритмы поиска для специальных модулей

Оказалось, что постулат Бертрана, доказанный П. Л. Чебышевым, играет важную роль для построения быстрых алгоритмов вычисления оптимальных коэффициентов. Дается определение допустимой последовательности простых и специального модуля, для которых на основе общего алгоритма для $N = p_1 p_2 \ldots p_k$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — допустимая последовательность простых чисел, строится алгоритм вычисления за $O(N)$ арифметических операций значений $a_1, \ldots, a_s$ из приведенной системы вычетов по модулю N таких, что выполнено неравенство (39).

Пусть p — фиксированное нечетное простое число большее 3, например, любое нечетное простое число большее 3 и не превосходящее 100. Будем говорить, что монотонно возрастающая последовательность $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — допустимая последовательность простых чисел длины k для простого p, если для этой последовательности простых чисел выполнены условия

$$p_1 = p, \quad \frac{6p_1 \ldots p_{j-1}}{6^{j-1}} < p_j < \frac{12p_1 \ldots p_{j-1}}{6^{j-1}} \quad (2 \leqslant j \leqslant k). \tag{45}$$

Из постулата Бертрана легко следует, что для любого простого нечетного $p > 3$ существует допустимая последовательность простых чисел произвольной длины k.

Непосредственными вычислениями, используя таблицу простых, нетрудно проверить, что для простого $p = 5$ допустимой последовательностью простых длиной 6 будет последовательность $5, 7, 11, 17, 53, 307$, которая определяет модуль $N = 106493695$.

Для заданного фиксированного простого p, вообще говоря, существует несколько допустимых последовательностей простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$ первого типа длины k. Среди них можно выделить одну минимальную допустимую последовательность $p_1^{'}, p_2^{'}, \ldots, p_k^{'}$ и одну максимальную $p_1^{''}, p_2^{''}, \ldots, p_k^{''}$, которые обладают свойством

$$p_j^{'} < p_j < p_j^{''} \quad (3 \leqslant j \leqslant k) \tag{46}$$

для любой допустимой последовательности $p_1, p_2, \ldots, p_k$ с одним и тем же p. Тем самым определяется минимальный модуль $N_{p,k}^{'} = p_1^{'} \cdot p_2^{'} \cdot \ldots \cdot p_k^{'}$ и максимальный $N_{p,k}^{''} = p_1^{''} \cdot p_2^{''} \cdot \ldots \cdot p_k^{''}$.

Например, для $p = 5$ минимальной допустимой последовательностью длины 6 будет последовательность $5, 11, 43, 919$, а максимальной — $5, 7, 11, 19,\ 67, 751$. Соответственно, $N_{5,6}^{'} = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 89 = 10245235$ и $N_{5,6}^{''} = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 67 \cdot 751 = 368068855$.

Будем предполагать, что заранее перед выполнением алгоритма затабулирована таблица функции $\ln\left(2\sin\left(\pi\left\{\frac{k}{N}\right\}\right)\right)$ для $k = 1, 2, \ldots, N-1$, что потребует разового выполнения $C \cdot N$ машинных операций. Также будем предполагать, что имеется массив всех делителей числа $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, в котором 2^k различных элементов, а также массивы значений функции Мёбиуса и функции Эйлера для каждого из этих делителей. Вычисление этих массивов потребует не более $O(\sqrt{N})$ элементарных арифметических операций, а для хранения — не более $O(\sqrt{N})$ байтов объема оперативной памяти.

Таким образом, подготовительная часть нашего алгоритма имеет трудоемкость $O(N)$ элементарных арифметических операций, а для хранения вспомогательных таблиц необходимо $O(N)$ байтов объема оперативной памяти.

Теорема 7. *Пусть $K^*(N)$ — количество элементарных операций, необходимых для вычисления величин $a_1, \ldots, a_s$ оптимальных коэффициентов по специальному модулю N индекса s, тогда справедливо неравенство*

$$K^*(N) \leqslant 5s^2CN\left(\frac{7}{2}\cdot p + 32\frac{2}{5}\right) = 5\cdot C\cdot s^2\cdot N\cdot\left(\frac{7}{10}\cdot p + 6\frac{12}{25}\right), \tag{47}$$

где C — максимальное количество элементарных операций для вычисления и использования одного множителя вида $A - 2\ln\left(2\sin\left(\pi\left\{\frac{z_{j\nu}t}{p_\nu}\right\}\right)\right)$, а специальные модули N принадлежат показателю 0 с константой $\frac{7}{10}\cdot p + 6\frac{12}{25}$.

12. Гиперболическая дзета-функция решёток

Сейчас мы остановимся на нерешенных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток, которая задаётся в правой полуплоскости $\alpha > 1$ дзета рядом[10]

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}'(\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^{-\alpha}. \tag{48}$$

Очевидно, что при $s = 1$ гиперболическая дзета-функции решётки выражается через дзета-функцию Римана. В многомерном случае имеются свои существенно новые задачи, не имеющие аналогов в одномерном случае.

Впервые гиперболическая дзета-функция решёток возникла в работах Н. М. Коробова [118], [121] и Н. С. Бахвалова [4] в 1959 году для решёток решений линейного сравнения с несколькими переменными. В наиболее общем виде она появилась в работах К. К. Фролова [189], [191]. Сам термин гиперболическая дзета-функция решёток появился только в 1984 году в работе [65], в которой начато её изучение как самостоятельного объекта исследований.

В работе [76] были выделены следующие основные направления современных исследований:

1. Проблема правильного порядка убывания гиперболической дзета-функции при $\alpha \to \infty$;
2. Проблема существования аналитического продолжения в левую полуплоскость $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma \leqslant 1)$ гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$;
3. Аналитическое продолжение для случая решёток С. М. Воронина $\Lambda(F, q)$;
4. Аналитическое продолжение для случая решётки совместных приближений;
5. Аналитическое продолжение для случая алгебраической решётки $\Lambda(t, F) = t\Lambda(F)$;
6. Аналитическое продолжение для случая произвольной решётки Λ.;
7. Проблема поведения гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ в критической полосе;
8. Проблема значений тригонометрических сумм сеток.

Более подробно с состоянием теории гиперболической дзета-функции решёток можно познакомиться по работам [44, 45, 46, 65, 76, 86, 91, 92, 103, 109].

[10] Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

13. Диофантовы проблемы теории алгебраических чисел

На первый взгляд, диофантовы проблемы теории алгебраических чисел далеки от теоретико-числового метода в приближенном анализе, но это не так.

Во-первых, до сих пор ничего неизвестно про вещественные числа из теоремы Пятецкого-Шапиро. Естественно возникает вопрос, если такие числа имеют ненулевую меру Лебега, то входят ли в это множество алгебраические числа?

Как известно (см. [127], стр. 98), теореме Пятецкого-Шапиро удовлетворяют числа $\theta_1, \ldots, \theta_s$ такие, что для любых $m_1,\ldots,m_s$, не равных одновременно нулю, выполняется неравенство

$$\|\theta_1 m_1 + \ldots + \theta_s m_s\| \geqslant \frac{C_0}{\overline{m_1}\ldots\overline{m_s}\,(\ln(\overline{m_1}+1)\ldots\ln(\overline{m_s}+1))^{\gamma}},$$

где константы $\gamma \geqslant 0$ и $C_0 > 0$ не зависят от $m_1,\ldots,m_s$.

Ясно, что эти вопросы связаны со свойствами решётки совместных приближений Дирихле

$$\Lambda(\theta_1,\ldots,\theta_s) = \{(q, \theta_1 q - p_1, \ldots, \theta_s q - p_s) | q, p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{Z}\}$$

и взаимной решёткой

$$\Lambda^*(\theta_1,\ldots,\theta_s) = \{(q + \theta_1 p_1 + \ldots + \theta_s p_s, -p_1, \ldots, -p_s) | q, p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{Z}\}.$$

Поэтому, в частности, так важно изучить вопрос об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции решётки совместных приближений Дирихле, которая, вообще говоря, не является декартовой.

Во-вторых, как уже видно из предыдущего важным вопросом является приближение алгебраических решёток целочисленными решётками. Таким образом, мы получаем новую постановку о совместных приближениях алгебраических чисел. Поэтому неслучайным является возрождение в тульской школе теории чисел исследований, которые в 50-х — 60-х года вели В. Д. Подсыпанин и М. Н. Добровольский (старший).

Остановимся кратко на основных постановках и результатах, которые представлены в работах [77, 78, 88, 89, 90, 92, 93].

Прежде всего, заметим, что так как алгебраические решётки состоят из точек, координаты которых образуют полные наборы алгебраических сопряженных чисел, то все постановки задач, рассматриваемых в выше перечисленных работах рассматривались с точки зрения совокупности алгебраически сопряженных чисел. На этом пути было сформулировано как понятие приведенной алгебраической иррациональности чисто-вещественного алгебраического поля произвольной степени s, так и понятие обобщенного числа Пизо. Именно, такой подход позволил обнаружить фундаментальное свойство цепных дробей алгебраических иррациональностей:

Начиная с некоторого места все остаточные дроби чисто-вещественной алгебраической иррациональности становятся приведенными алгебраическими иррациональностями, а для произвольной алгебраической ираациональности — обобщенным числом Пизо.

Кроме этого, все алгебраически сопряженные числа к остаточной дроби α_m концентрируются около рациональной дроби $-\frac{Q_{m-2}}{Q_{m-1}}$.

Продолжая эти исследования в одной из последних работ дано определение

Определение 7. *Приведенная алгебраическая иррациональность n-ой степени $\alpha = \alpha^{(1)} \in \mathbb{F}_n^{(1)}$ называется приведенной алгебраической иррациональностью порядка m, если найдется последовательность приведенных алгебраических иррациональностей $\beta_m,\ldots,\beta_1$*

такая, что

$$\beta_\nu = q_\nu + \cfrac{1}{q_{\nu-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\alpha}}}} \quad (\nu = 1, \ldots, m) \tag{49}$$

и не существует приведённой алгебраической иррациональности β_{m+1}, для которой β_m — первая остаточная дробь.

Лемма 1. *Если α — приведённая алгебраическая иррациональность, то необходимым и достаточным условием существования приведённой алгебраической иррациональности β, для которой α — первая остаточная дробь, является существование натурального q, для которого выполнены условия*

$$-\frac{1}{q} < \alpha^{(\nu)} < -\frac{1}{q+1} \quad (2 \leqslant \nu \leqslant n), \tag{50}$$

тогда

$$\beta = q + \frac{1}{\alpha}. \tag{51}$$

Таким образом, если для приведенной алгебраической иррациональности α не выполнено условие леммы 1, то α имеет порядок 0. Все приведенные квадратические иррациональности имеют бесконечный порядок в силу периодичности цепной дроби.

Доказана теорема.

Теорема 8. *При $n \geqslant 3$ всякая приведённая алгебраическая иррациональность α степени n имеет конечный порядок $m \geqslant 0$.*

Другое направление исследований было посвящено построению современной алгебраической теории полиномов Туэ. Суть этого построения состоит в следующем.

Определение 8. *Упорядоченная пара многочленов с целыми коэффициентами*

$$T = \{P(t), Q(t)\}$$

называется парой Туэ. Многочлен $P(t)$ называется числителем пары Туэ. Через $m(T)$ обозначается степень числителя. Многочлен $Q(t)$ называется знаменателем пары Туэ. Через $l(T)$ обозначается степень знаменателя. Величина $k(T) = \max(m(T), l(T))$ называется степенью пары Туэ.

Ясно, что множество всех пар Туэ совпадает с $\mathbb{Z}[t]^2 = \mathbb{Z}[t] \times \mathbb{Z}[t]$.

Определение 9. *Модулем Туэ называется множество всех пар Туэ с естественной операцией сложения, когда числитель суммы двух пар Туэ равен сумме числителей слагаемых, а знаменатель суммы — сумме знаменателей. Числитель произведения пары Туэ на многочлен из $\mathbb{Z}[t]$ равен произведению числителя пары на этот многочлен, а знаменатель произведения — произведению знаменателя на тот же многочлен.*

Определение 10. *Пусть имеется k пар Туэ $T_1 = \{P_1(t), Q_1(t)\}, \ldots, T_k = \{P_k(t), Q_k(t)\}$. Говорят, что они линейно зависимые, если существуют многочлены с целыми коэффициентами $c_1(t), \ldots, c_k(t)$, не все равные нулю и такие, что имеет место равенство*

$$c_1(t)T_1 + \ldots + c_k(t)T_k = \{0, 0\}. \tag{52}$$

Замечание 1. *Линейная зависимость пар, вообще говоря, не позволяет выразить одну пару через другие, не выходя за пределы $\mathbb{Z}[t]$-модуля $\mathbb{Z}[t]^2$.*

Замечание 2. *Если среди k пар хотя бы одна нулевая, то, очевидно, что они линейно зависимы.*

Теорема 9. *Любые три пары Туэ линейно-зависимы.*

Определение 11. *Пусть $f(t)$ — унитарный, неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, а $(f(t)) = f(t)\mathbb{Z}[t]$ — главный идеал в $\mathbb{Z}[t]$, порожденный многочленом $f(t)$. Пусть $a(t)$, $b(t)$ — произвольные многочлены из $\mathbb{Z}[t]$. Будем говорить, что пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ удовлетворяет линейному определяющему соотношению, если $a(t)P(t) + b(t)Q(t) \in (f(x))$. Подмодулем с одним определяющим соотношением назовем множество*

$$M(a(t), b(t) \,|\, f(t)) = \{\, \{P(t), Q(t)\} \,|\, a(t)P(t) + b(t)Q(t) \in (f(x))\}$$

— всех пар Туэ, удовлетворяющих этому линейному определяющему соотношению.

Если $a(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$, то определяющему соотношению удовлетворяют все пары Туэ, и этот тривиальный случай исключается из дальнейших рассмотрений.

Теорема 10. *Существуют две линейно-независимые, примитивные пары Туэ T, U степени меньше n из $M(a(t), b(t) \,|\, f(t))$ такие, что любая пара Туэ V из $M(a(t), b(t) \,|\, f(t))$ однозначно представима в виде*

$$V = c_1(t)T + c_2(t)U, \tag{53}$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

Определение 12. *Пусть $f(t)$ — унитарный, неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, а $(f^k(t)) = f^k(t)\mathbb{Z}[t]$ — главный идеал в $\mathbb{Z}[t]$, порожденный k-ой степенью многочлена $f(t)$. Пусть $a(t)$, $b(t)$ — произвольные многочлены из $\mathbb{Z}[t]$. Будем говорить, что пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ удовлетворяет линейному определяющему соотношению k-ого порядка, если $a(t)P(t) + b(t)Q(t) \in (f^k(x))$. Подмодулем с одним определяющим соотношением k-ого порядка назовем множество $M(a(t), b(t) \,|\, f^k(t))$ всех пар Туэ, удовлетворяющих этому линейному определяющему соотношению k-ого порядка.*

Если $a(t) \equiv 0 \pmod{f^k(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f^k(t)}$, то определяющему соотношению k-ого порядка удовлетворяют все пары Туэ, и этот тривиальный случай исключается из дальнейших рассмотрений.

Пусть $a(t) \equiv 0 \pmod{f^k(t)}$ и $b(t) \not\equiv 0 \pmod{f^k(t)}$, тогда на числитель пары не накладывается никаких ограничений, а знаменатель будет принадлежать главному идеалу $(f^k(t))$. Если $a(t) \not\equiv 0 \pmod{f^k(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f^k(t)}$, то числитель и знаменатель пары Туэ меняются ролями.

Поэтому все перечисленные тривиальные случаи исключаются, и дальше рассматриваем только случай $a(t)b(t) \not\equiv 0 \pmod{f(t)}$.

Теорема 11. *Существуют две линейно-независимые, примитивные пары Туэ T_k, U_k степени меньше nk из подмодуля с одним определяющим соотношением k-ого порядка $M(a(t), b(t) \,|\, f^k(t))$ такие, что любая пара Туэ V из $M(a(t), b(t) \,|\, f^k(t))$ однозначно представима в виде*

$$V = c_1(t)T_k + c_2(t)U_k, \tag{54}$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

Определение 13. *Пусть $f(t)$ — унитарный, неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, а $(f(t)) = f(t)\mathbb{Z}[t]$ — главный идеал в $\mathbb{Z}[t]$, порожденный многочленом $f(t)$. Пусть $a(t)$, $b(t)$ — произвольные многочлены из $\mathbb{Z}[t]$. Будем говорить, что пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ удовлетворяет k линейным определяющим соотношениям, если $a(t)P^{(\nu)}(t) + b(t)Q^{(\nu)}(t) \in (f(x))$ для $\nu = 0, \ldots, k-1$. Подмодулем с k определяющими соотношениями назовем множество*

$$M(a(t), b(t) \,|\, f(t), k) = \Big\{ \{P(t), Q(t)\} \,|\, a(t)P^{(\nu)}(t) + b(t)Q^{(\nu)}(t) \in (f(x))\, (\nu = 0, \ldots, k-1) \Big\}$$

— всех пар Туэ, удовлетворяющих этим линейным определяющим соотношениям.

Если $a(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$ и $b(t) \equiv 0 \pmod{f(t)}$, то определяющим соотношениям удовлетворяют все пары Туэ, и этот тривиальный случай исключается из дальнейших рассмотрений.

Теорема 12. *Существуют две линейно-независимые пары Туэ T, U степени меньше nk из $M(a(t), b(t) \,|\, f(t), k)$ такие, что любая пара Туэ V из $M(a(t), b(t) \,|\, f(t), k)$ однозначно представима в виде*

$$V = c_1(t)T + c_2(t)U, \tag{55}$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

Определение 14. *Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен n-ой степени с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом равным 1, α_ν — корень этого многочлена, а $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Тогда $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu) = P(t) - \alpha_\nu Q(t)$ называется полиномом Туэ для α_ν.*

Таким образом, многочлены $P(t)$ и $Q(t)$ из $\mathbb{Z}[t]$, а полином Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu)$, вообще говоря, из его расширения $\mathbb{Z}[\alpha_\nu][t]$.

Другими словами можно сказать, что неприводимый многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}^*[x]$ задает отображение Туэ из декартового квадрата $\mathbb{Z}[t]^2$ в кольцо полиномов $\mathbb{Z}[\alpha_\nu][t]$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Образом произвольной пары многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ с целыми коэффициентами и будет полином Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu)$.

Ясно, что полиномы Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_1)$, …, $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu)$, …, $\mathcal{T}(t, \alpha_n)$ образуют полный набор сопряженных полиномов.

Определение 15. *Порядком полинома Туэ называется наивысшая степень $(t - \alpha_\nu)$, на которую этот полином делится. Полином Туэ j-го порядка обозначается через $\mathcal{T}_j(t, \alpha_\nu)$. Полином $R_j(t, \alpha_\nu)$, удовлетворяющий равенству $\mathcal{T}_j(t, \alpha_\nu) = (t - \alpha_\nu)^j R_j(t, \alpha_\nu)$, называется множителем Туэ порядка j для α_ν, а упорядоченная пара многочленов $T_j = \{P_j(t), Q_j(t)\}$ — парой Туэ порядка j. Многочлен $P_j(t)$ называется числителем пары Туэ. Через m_j обозначается степень числителя. Многочлен $Q_j(t)$ называется знаменателем пары Туэ. Через l_j обозначается степень знаменателя. Величина $k_j = \max(m_j, l_j)$ называется степенью пары Туэ.*

Таким образом, для произвольной пары Туэ T и соответствующего полинома Туэ $\mathcal{T}(t, \alpha_\nu)$ определены четыре функции:

- $j(T)$ — порядок пары Туэ.
- $m(T)$ — степень числителя пары.
- $l(T)$ — степень знаменателя пары.
- $k(T)$ — степень пары.

Единственным полиномом Туэ бесконечного порядка является нулевой полином:

$$\mathcal{T}_\infty(t, \alpha_\nu) = 0 = (t - \alpha_\nu)^j \cdot 0$$

для любого $j \geqslant 0$, соответствующая пара Туэ будет обозначаться $T_\infty = \{0, 0\}$. Примем естественное соглашение, что $j(\{0,0\}) = m(\{0,0\}) = l(\{0,0\}) = k(\{0,0\}) = \infty$.

Отметим семь простейших свойств полиномов Туэ, которые сразу вытекают из определения полинома Туэ порядка j.

1. $f^j(t)$ является полиномом Туэ порядка j.
2. Существуют полиномы Туэ любого порядка.
3. Произведение полиномов Туэ j-го порядка на многочлен с целыми коэффициентами есть также полином Туэ порядка не ниже j.
4. Сумма двух полиномов Туэ является также полиномом Туэ и его порядок не ниже наименьшего из порядков слагаемых.
5. Если α — алгебраическое число степени не ниже второй и полином Туэ $\mathcal{T}_j(t, \alpha) = P_j(t) - \alpha Q_j(t)$ делится на многочлен $\varphi(t)$ с целыми коэффициентами, то $P_j(t)$ и $Q_j(t)$ делятся на $\varphi(t)$ и частное от деления $\mathcal{T}_j(t, \alpha)$ на $\varphi(t)$ есть многочлен Туэ порядка не выше j.
6. Степень полинома Туэ j-го порядка не меньше j.
7. Полином Туэ имеет порядок не ниже j тогда и только тогда, когда он сам и все его производные до порядка $j-1$ включительно являются полиномами Туэ порядка не ниже 1.

Определение 16. *Формой А. Туэ — М. Н. Добровольского — В. Д. Подсыпанина называется бинарная полиномиальная форма $\mathcal{F}(P(t), Q(t))$, задаваемая равенством*

$$\mathcal{F}(P(t), Q(t)) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P^\nu(t) Q^{n-\nu}(t). \tag{56}$$

Из определения видно, что ТДП-форма задает отображение из декартового квадрата $\mathbb{Z}[t]^2$ в кольцо многочленов $\mathbb{Z}[t]$. Нетрудно видеть, что степень образа равна $n \cdot k$, где k — степень пары $\{P(t), Q(t)\}$.

С помощью ТДП-формы дается следующее определение.

Определение 17. *Пусть $f(t)$ — унитарный, неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, а $(f^k(t)) = f^k(t)\mathbb{Z}[t]$ — главный идеал в $\mathbb{Z}[t]$, порожденный k-ой степенью многочлена $f(t)$. Пусть $\mathcal{F}(P(t), Q(t))$ — соответствующая ТДП-форма. Будем говорить, что пара Туэ $T = \{P(t), Q(t)\}$ удовлетворяет полиномиальному определяющему соотношению k-ого порядка, если $\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \in (f^k(x))$. Подмодулем с одним определяющим полиномиальным соотношением k-ого порядка назовем множество $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \,|\, f^k(t))$ всех пар Туэ, удовлетворяющих этому полиномиальному определяющему соотношению k-ого порядка.*

Из определения непосредственно следует, что свободный модуль ранга 2

$$f^k(t)\mathbb{Z}[t]^2 \subset M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \,|\, f^k(t)).$$

В частности, линейно независимые пары $T_0 = \{f^k(t), 0\}$ и $T_1 = \{0, f^k(t)\}$ принадлежат $M(\mathcal{F}(P(t), Q(t)) \,|\, f^k(t))$.

Очевидно, что справедливо включение

$$M(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\,|\,f^{k+1}(t))\subset M(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\,|\,f^{k}(t))\subset M(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\,|\,f(t))$$

для любого унитарного, неприводимого многочлена $f(t)$ с целыми коэффициентами и любого натурального k.

Теорема 13. *Для любого унитарного, неприводимого многочлена $f(t)$ с целыми коэффициентами множество $M(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\,|\,f^{k}(t))$ всех пар Туэ, удовлетворяющих полиномиальному определяющему соотношению k-ого порядка $\mathcal{F}(P(t),Q(t))\in(f^{k}(x))$, является свободным $\mathbb{Z}[t]$-модулем ранга 2.*

Определение 18. *Основными парами Туэ для порядка j назовем две пары Туэ $T_{k,1}$ и $T_{m,2}$ порядка не ниже j, для которых любая пара Туэ $T_{l,3}$ порядка не ниже j представляется по формуле*

$$T_{l,3}=c_1(t)T_{k,1}+c_2(t)T_{m,2}, \tag{57}$$

где $c_1(t)$, $c_2(t)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Соответствующие полиномы Туэ будут называться основными для порядка j.

Из теоремы 13 (стр. 55) следует, что для любого порядка j существуют основные пары Туэ и соответствующие основные полиномы Туэ.

Так как значением бинарной полиномиальной формы $\mathcal{F}(P(t),Q(t))$ является многочлен, то к нему можно применить дробно-линейное преобразование M многочленов с произвольной невырожденной матрицей M из $\mathcal{M}_2^*(\mathbb{Z})$:

$$M\left(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\right)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu(Ct+D)^{n\cdot k}P^{\nu}\left(\frac{At+B}{Ct+D}\right)Q^{n-\nu}\left(\frac{At+B}{Ct+D}\right),$$

где k — степень пары Туэ $\{P(t),Q(t)\}$.

Через $\mathcal{F}_m(P(t),Q(t))$ будем обозначать ТДП-форму, соответствующую минимальному многочлену $f_m(x)$.

Теорема 14. *Справедливо равенство*

$$M\left(\mathcal{F}(P(t),Q(t))\right)=\mathcal{F}_m((Q_{m-2}M(P(t))-P_{m-2}M(Q(t))),(P_{m-1}M(Q(t))-Q_{m-1}M(P(t)))).$$

14. Актуальные нерешенные проблемы

В методе оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова остается ещё много нерешенных проблем. Центральной из них является проблема правильного порядка погрешности для параллелепипедальных сеток. Как известно, для алгебраических сеток порядок погрешности приближенного интегрирования для класса E_s^α имеет вид

$$R_N[f]=O\left(\|f\|_{E_s^\alpha}\frac{\ln^{s-1}N}{N^\alpha}\right),$$

где N — количество точек алгебраической сетки, а $\|f\|_{E_s^\alpha}$ — норма функции f в Банаховом пространстве E_s^α. Из результатов И. Ф. Шарыгина [197] следует, что это правильный порядок убывания погрешности на классе E_s^α и нижняя оценка для любых квадратурных формул имеет тот же порядок. Так как для параллелепипедальных сеток норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α в точности равна гиперболической дзета-функции целочисленной решетки Λ вида (26) (см. стр. 39), то проблему правильного порядка погрешности для параллелепипедальных сеток можно сформулировать в терминах гиперболической дзета-функции решеток следующим образом.

Существует ли бесконечная последовательность целочисленных решёток Λ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *с*

$$\lim_{n\to\infty} \det \Lambda_n = \infty$$

такая, что

$$\zeta_H(\Lambda_n|\alpha) = O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda_n}{\det^{\alpha}\Lambda_n}\right)?$$

Для алгебраических решеток эта формула справедлива в силу результатов К. К. Фролова (см. [189], [191], [65], [140], [75]). В силу непрерывности гиперболической дзета-функции решёток на метрическом пространстве решёток (см. [103], [109]) на классе рациональных решёток правильный порядок гиперболической дзета-функции решёток достижим. Действительно, достаточно брать последовательность рациональных решёток хорошо приближающих алгебраические решётки.

Положительное решение проблемы правильного порядка погрешности для параллелепипедальных сеток, по-видимому, очень сложная задача. Дело в том, что если такая последовательность существует, то тогда будет неверна гипотеза Литлвуда. Если гипотеза Литлвуда верна, то не существует указанной последовательности целочисленных решёток. В свою очередь, решение гипотезы Литлвуда, как показал Б. Ф. Скубенко, тесно связана с проблемой Опенгеймера о том, что все решётки с ненулевым норменным минимумом являются подобными алгебраическим решёткам. Подробней на эту тему смотрите [1], [168] — [171].

15. Заключение

Приведенное выше краткое описание истории и методологии теоретико-числового метода в приближенном анализе позволяет сделать следующие выводы:

1. История теоретико-числового метода в приближенном анализе достаточно насыщенная и требует специального исследования. Актуальность этих исследований обусловлена как важностью проблематики данного направления исследований, так и содержательностью самой этой истории.

2. Методологические проблемы теоретико-числового метода в приближенном анализе не потеряли своей актуальности, так как для успешности и непрерывности исследований в этой области математики необходимо на данном этапе для сохранения интеллектуальной эстафеты от одного поколения исследователей к следующему предусмотреть определенные меры.

3. Одним из актуальных направлений дальнейших усилий может являться разработка ПОИВС ТМК, которая позволит на новом уровне организации аккумулировать накопленные знания в области теоретико-числового метода в приближенном анализе. Таким образом, ПОИВС ТМК должна стать современным аккумулятором научного знания в этой области.

Данная работа является расширенным и переработанным вариантом работы [79].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акрамов У. А. Теорема изоляции для форм, отвечающих чисто вещественным алгебраическим полям, // Аналитическая теория чисел и теория функций: 10. Зап. науч. семинара. ЛОМИ. 1990. N 185. С. 5–12.

2. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. / М.: Наука, 1986.

3. Бабенко К. И. Основы численного анализа. / М.: Наука, 1986.

4. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

5. Бахвалов Н. С. Оценка в среднем остаточного члена квадратурных формул // Журн. вычислит. математики и математической физики. 1960. № 1. С. 64–77.

6. Бахвалов Н. С. Об оптимальных на классах функций способах интегрирования с заданным числом узлов. / Дис....док. физ.-мат. наук. Москва. Мгу 1964.

7. Бахвалов Н. С., Коробов Н. М., Ченцов Н. Н. Применение теоретико-числовых сеток к задачам приближенного анализа // Труды Четвертого Всесоюзного математического съезда. Л.: Наука, 1964. Т. II. С. 580–587.

8. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы Вычислений. — М.: Наука, 1966.

9. Бочарова Л. П. Теорема А. О. Гельфонда и оптимальные коэффициенты для составного модуля // Чебышевский сборник 2005. Т. 6, вып. 3(15). С. 34–50.

10. Бочарова Л. П. О граничных функциях некоторых классов // Наукоемкое образование. Традиции. Инновации. Перспективы 2006, Сборник межвузовских научных статей, С. 198–202.

11. Бочарова Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2007 Т. 8. Вып. 1(21). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4–109.

12. Бочарова Л. П., Ванькова В. С., Добровольский Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // Математические заметки. 1991. Т. 49. Вып. 2. С. 23–28.

13. Брушлинская О. В. Практическое применение метода оптимальных коэффициентов для вычисления кратных интегралов // Труды конф. по вычислит. математике и вычислит. технике. МГУ, 1959. Машгиз, 1962.

14. Бухштаб А. А. Теория чисел / М.: Учпедгиз 1960.

15. Быковский В. А. О правильном порядке погрешности оптимальных кубатурных формул в пространствах с доминирующей производной и квадратичных отклонениях сеток. / Препринт ДВНЦ АН СССР. Владивосток, 1985, с. 31.

16. Быковский В. А. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Математический сборник, 136(178), 4(8), 1988, С. 451–467.

17. Быковский В. А. Экстремальные кубатурные формулы для анизотропных классов. / Хабаровск, 1995. с. 13. (Препринт.)

18. Быковский В. А. Оценки отклонений оптимальных сеток в Lp-норме и теория квадратурных формул. // Analysis Mathematica, 22(1996), pp. 81–97.

19. Быковский В. А. Теоретико-числовые решетки в эвклидовых пространствах и их приложения. / Дис....док. физ.-мат. наук. Хабаровск. ИПМ ДВО АН СССР, 1990.

20. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник Тула. 2002. Т.3 вып. 2(4) С. 27–33.

21. Ванькова В. С. Оценка квадратичного отклонения сеток Холтона. / Деп. в ВИНИТИ 18.03.91, N 1157–В91.

22. Ванькова В. С. Квадратичное отклонение сеток Фора–Чена. / Деп. в ВИНИТИ 21.11.91, N 4372–В91.

23. Ванькова В. С. Об алгоритмах поиска оптимальных сеток Хэммерсли – Рота и Холтона. / Деп. в ВИНИТИ 21.11.91, N 4371–В91.

24. Ванькова В. С. Многомерные теоретико-числовые сетки: / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. // Моск. пед. гос. ун-т. М., 1992.

25. Ванькова В. С. О квадратичном отклонении q–регулярных p–ичных сеток // Соврем. проблемы теории чисел: Тез. докл. междунар. конф. Тула, 1993. С. 24.

26. Ванькова В. С., Добровольский Н. М. Об одном алгоритме для многомерных сеток // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. республик. конф. Ташкент, 1990. С. 23.

27. Ванькова В. С., Добровольский Н. М., Есаян А. Р. О преобразовании многомерных сеток. / Деп. в ВИНИТИ 22.01.91, N 447–91.

28. Виленкин И. В. О плоских сетках интегрирования // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1967. Т. 7. № 1. С. 189–196.

29. Воронин С. М. О квадратурных формулах // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58. № 5. С. 189–194.

30. Воронин С. М. О построении квадратурных формул // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59. № 4.

31. Воронин С. М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Мат. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 34–41.

32. Вронская Г. Т. О квадратичном отклонении плоских сеток Хэммерсли // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 9. Вып. 1. Тула, 2003. С. 23–62.

33. Вронская Г. Т. Квадратичное отклонение плоских сеток [Текст]/ автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: 01.06.06 / Г. Т. Вронская. — М., 2005. — 10 с.

34. Вронская Г. Т. Квадратичное отклонение плоских сеток / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 2005.

35. Вронская Г. Т., Добровольский Н. М. О двумерных сетках Воронина // Чебышевский сборник 2004 Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Изд-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 74–86.

36. Вронская Г. Т., Добровольский Н. М., Родионова О. В. Сравнения суммы и произведения (тезисы)// Материалы всероссийской конференции "Современные проблемы математики, механики и информатики"ТулГУ. Тула 2002.

37. Вронская Г. Т., Добровольский Н. М., Родионова О. В. Сравнения, суммы и произведения по приведенной системе вычетов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 8. Вып. 1. Тула, 2002. С. 10–28.

38. Вронская Г. Т., Родионова О. В. Квадратичное отклонение плоских сеток. Тула, Изд-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого, 2005.

39. Гельфанд, И. М. Применение метода случайных испытаний (метода Монте-Карло) для решения кинетического уравнения / И. М. Гельфанд, С. М. Фейнберг, А. С. Фролов, Н. Н. Ченцов // Тр. II Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958, Доклад 2141), — М.: Атомиздат, 1959. — Т. 2. — С. 628–633.

40. Гельфанд И. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н. Вычисление континуальных интегралов методом Монте-Карло // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5(6). С. 32–45.

41. Герцог, А. С. Чисто-вещественные биквадратичные алгебраические поля и их приложения. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула, 2012.

42. Добровольская Л. П. Алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула, 2009.

43. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Проблемно ориентированная информационно вычислительная система ТМК (теоретико-числовой метод Коробова) // Роль университетов в поддержке гуманитарных научных исследований: Материалы V Междунар. науч.-практ. конф.: В 2 т. / Отв. ред. О. Г. Вронский. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2010. Доп. том. С. 16–28.

44. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с. http://elibrary.ru/item.asp? id=20905960

45. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

46. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

47. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90–98.

48. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 13:4(2) (2013), 47–52.

49. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.

50. Добровольская В. Н. Неполные суммы дробных долей // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5, вып. 2 (10) С. 43–48.

51. Добровольская В. Н. Формула Пика и неполные суммы дробных долей // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Меха-ника. Информатика. Т. 10. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. С. 5–11.

52. Добровольская В. Н. Отклонение плоских параллелепипедальных сеток // Чебышевский сборник. Тула, 2005 Т. 6. Вып. 1 (13). С. 87–97.

53. Добровольская В. Н. Элементарный метод дробных долей Виноградова – Коробова и отклонение плоских сеток Бахвалова // Чебышевский сборник. 2005 Т. 6, вып. 2(14). С. 138 — 144.

54. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82–90.

55. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник 2004. Т. 5, вып. 1(9). С. 95–121.

56. Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // Чебышевский сборник 2006. Т. 3, вып. 2(4). С. 43–59.

57. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // ДАН. Т. 412, № 3, Январь 2007. С. 302–304.

58. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.

59. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГУ, 2002. С. 22–23.

60. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник 2002. Т. 3, вып. 2(4). С. 43–59.

61. Добровольский М. Н. Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МГУ 2009.

62. Добровольский Н. М. Эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении // УМН. Т. 39 (123). 1984. С. 155–156.

63. Добровольский Н. М. Оценки отклонений модифицированных сеток Хэммерсли — Рота. / Деп. в ВИНИТИ 23.02.84, N 1365–84.

64. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6089–84.

65. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

66. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6091–84.

67. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. / Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

68. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: / Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

69. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

70. Добровольский Н. М. Группы преобразований многомерных сеток // Современные проблемы теории чисел: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1993. С. 46.

71. Добровольский Н. М. Средние по орбитам многомерных сеток // Мат. заметки. 1995. Т. 58, вып. 1. С. 48–66.

72. Добровольский Н. М. Means over of Multidimensional Lattices. // Mathematical Notes. Vol. 58. No 1. 1995. P. 710–721.

73. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения: / Дис. ... док. физ.–мат. наук. Москва, 2000.

74. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико–числовые сетки и решетки и их приложения к приближенному анализу // В сб. IV Международная конференция „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова Тула, 10–15 сентября, 2001 Актуальные проблемы Ч. I, М., МГУ 2002 С. 54–80.

75. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

76. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

77. Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва, Н. Н. Добровольский, Е. А. Матвеева О дробно-линейных преобразованиях форм А. Туэ — М. Н. Добровольского — В. Д. Подсыпанина // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 2. С. 54–97.

78. N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, N. N. Dobrovol'skii On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2016. № 2. P. 27–39.

79. Добровольский Н. М., Бочарова Л. П. Пятьдесят лет теоретико-числовому методу в приближенном анализе // Наукоемкое образование. Традиции. Иновации. Перспективы. Сборник межвузовских научных статей. Тула, АНОВО "ТИНО" , 2006. С. 189–198.

80. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. Об одной лемме А. О. Гельфонда. / Деп. в ВИНИТИ 08.01.87, N 1467–B87.

81. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. Численный эксперимент по применению параллелепипедальных сеток // Алгоритмические проблемы теории групп и подгрупп: Сб. Тула, 1990. С. 153–155.

82. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. О гиперболической дзета-функции алгебраических решёток. // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. республик. конф. Ташкент, 1990. С. 22.

83. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. Новые оценки для модифицированных сеток Хеммерсли–Рота. / Деп. в ВИНИТИ 29.08.90, N 4992–B90.

84. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. О регулярных P-ичных сетках // Мат. заметки. 1993. Т. 54, вып. 6. С. 22–32.

85. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. Об отклонении q – регулярных сеток // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 52.

86. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета-функция алгебраических решёток. / Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, N 2327–B90.

87. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Пентон М. М. Алгоритм построения оптимальных модифицированных сеток Хеммерсли–Рота // Современные проблемы информатики, вычислительной техники и автоматизации: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тулаб 1989. С. 92–95.

88. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб., 2015. Т. 16, вып. 3. С. 147–182.

89. Nikolai M. Dobrovol'skii, Nikolai N. Dobrovolsky, Irina N. Balaba, Irina Yu. Rebrova, Dmitrii K. Sobolev and Valentina N. Soboleva Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition // Springer International Publishing Switzerland 2016 V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky (eds.), Advances in Dynamical Systems and Control, Studies in Systems, Decision and Control 69, DOI 10.1007/978-3-319-40673-2_5

90. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 2. С. 98–128.

91. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

92. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сб., 2015. Т. 16, вып. 4. С. 100–149.

93. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Е. И. Юшина О матричной форме теоремы Галуа о чисто периодических цепных дробях // Чебышевский сб., 2012. Т. 13, вып. 3 С. 47–52.

94. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.

95. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998.

96. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 3. Тула, 1999. С. 38–51.

97. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: Изд-во ТулГУ, 2002. С. 18–20.

98. Добровольский Н. М., Клепикова Н. Л. Таблица оптимальных коэффициентов для приближенного вычисления кратных интегралов // ИОФАН СССР. 63. Москва, 1990. (Препринт.)

99. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток. // Чебышевский сборник, Т. 2, Тула, 2001, С. 41–53.

100. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002 Т. 3, вып. 1(3). С. 41–48.

101. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.

102. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Аккуратова С. В. О некоторых свойствах нормированных пространств и алгебр сеток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 100–113.

103. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Мат. заметки. Т. 63, вып. 4. 1998. С. 522–526.

104. Добровольский Н. М., Родионова О. В. Квадратурные формулы с обобщенными параллелепипедальными сетками. // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 47–48.

105. Добровольский Н. М., Родионова О. В. Квадратурные формулы с обобщенными параллелепипедальными сетками // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 2, вып. 1. Тула, 1996. С. 71–77.

106. Добровольский Н. М., Родионова О. В. Об одном конечном ряде Фурье и его приложениях // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4, вып. 3. С. 68–79.

107. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

108. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции рациональных решёток // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 49.

109. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2, вып. 1. Тула: Изд–во ТулГУ, 1996. С. 77–87.

110. Н. М. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева О матричном разложении приведенной кубической иррациональности // Чебышевский сб., 2013. Т. 14, вып. 1. С. 34–55.

111. Добровольский Н. Н. О числе целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$ // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып.1. С. 91–95.

112. Добровольский Н. Н. О тригонометрическом полиноме сетки Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ. 2007. С. 34–36.

113. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110 — 152.

114. Добровольский Н. Н. Гиперболический параметр сеток с весами и его применение: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ имени М. В. Ломоносова. 2014.

115. Ермаков С. Н. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. — М.: Наука, 1971.

116. Кан И. Д. Рекуррентные последовательности и их приложения: / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. / Моск. ун–т. МГУ, М., 1997.

117. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. 115. № 6. С. 1062–1065.

118. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

119. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, № 2. С. 235–238.

120. Коробов Н. М. О некоторых теоретико-числовых методах приближенного вычисления кратных интегралов. Резюме докл. на заседании Моск. мат. об-ва. // УМН. 1959. Т. 14, вып. 2 (86). С. 227–230.

121. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

122. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.

123. Коробов Н. М. Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, 1961. Т. 60, Изд-во АН СССР, М., С. 195–210.

124. Коробов Н. М. О применении теоретико-числовых сеток // Вычислительные методы и программирование: // Сб. Моск. ун-т. 1962. С. 80–102.

125. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах в приближенном анализе // Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники. М.: Машгиз. 1963.

126. Коробов Н. М. О некоторых задачах теории чисел, возникающих из потребностей приближенного анализа: Сообщение на IV математическом съезде (не опубл.).

127. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.

128. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22, 3 (135). С. 83 — 118.

129. Коробов Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 267. 1982. N2. С. 289 — 292.

130. Коробов Н. М. Об одной оценке А. О. Гельфонда // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1983. N3. С. 3 — 7.

131. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // Тезисы докладов всесоюзной конференции „Теория трансцендентных чисел и ее приложения". 1983. С. 62.

132. Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.

133. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83 — 90.

134. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах приближенного интегрирования // Историко-матем. исследования. СПб., 1994. Вып. XXXV. С. 285—301.

135. Коробов Н. М. Специальные полиномы и их приложения // Диофантовы приближения. Матем. записки. 1996. Т. 2. С. 77-89.

136. Коробов Н. М. О конечных цепных дробях // УМН. 1998. Т. 52. 3. С. 167-168.

137. Коробов Н. М. О теоретико-числовых интерполяционных формулах // Историко-матем. исследования. М.: „Янус // К". 2001. Вып. 6 (41). С. 266-276.

138. Коробов Н. М. О некоторых свойствах специальных полиномов // Труды IV Международной конференции „Современные проблемы теории чисел и ее приложения" Чебышевский сборник. Тула. 2001. Т. 1. С. 40 – 49.

139. Коробов Н. М. Об одной оценке в методе оптимальных коэффициентов // Тезисы IV Всероссийской конференции „Современные проблемы математики, механики, информатики " Тула. 2002. с. 39–40.

140. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

141. Ю. А. Кругляк, Г. С. Гордадзе, Л. М. Подольская, С. Б. Цинаури, Г. Б. Шарашидзе Численный расчет молекулярных интегралов с функциями от межэлектронного расстояния I-II. - Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1971. - 136 с.

142. Лев В. Ф. Диофония и квадратичные отклонения многомерных сеток // Мат. заметки. 1990. Т. 47, N 6. С.45–54.

143. О. В. Локуциевский, М. Б. Гавриков Начала численного анализа / М.: ТОО "Янус" 1995

144. Митькин Д. А. Об элементарном доказательстве оценки А. Вейля для рациональных тригонометрических сумм с простым знаменателем // Изв. вузов. Математика. 1986. Т. 6. С. 14—17.

145. Никитин А. Н., Русакова Е. И., Пархоменко Э. И., Иванкина Т. И., Добровольский Н. М. О реконструкции палеотектонических напряжений по данным о пьезоэлектрических текстурах горных пород. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1988. N 9. С. 66–74.

146. Никитин А. Н., Русакова Е. И., Пархоменко Э. И., Иванкина Т. И., Добровольский Н. М. Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using Data on Piezoelectric Texstures of Rocks // Izvestiya Earth Physics Vol 24. 1988. No 9. С. 728–734.

147. Е. Д. Ребров Некоторые теоретико-числовые методы приближенных вычислений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2013.

148. Реброва И. Ю. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток Тез. докл. III Междунар. конф. // Современные проблемы теории чисел: Тула: Изд-во ТГПУ, 1996. С. 119.

149. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

150. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1999.

151. Родионова О. В. Рекуррентные формулы первого порядка для степенных сумм дробных долей //Сб.:"Всероссийская научная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики Тула, 2000 с. 50-51

152. Родионова О. В. Обобщенные параллелепипедальные сетки и их приложения / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 2000.

153. Рощеня А. Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек целочисленной решётки в гиперболическом кресте // Современные проблемы теории чисел и ее приложения": Тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 120.

154. Рощеня А. Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек сдвинутой решётки под гиперболой $x \cdot y = N$. Тула, 1996. Деп. в ВИНИТИ. N 2743-В-96.

155. Рощеня А. Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек целочисленной решётки в гиперболическом кресте. Тула, 1997. Деп. в ВИНИТИ. N 2087-N-97.

156. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток./ Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

157. Рябенький В. С. О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса// ДАН СССР. 1960. 131. № 5 С. 1025–1027.

158. Рябенький В. С. Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретико-числовых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232–237.

159. Рябенький В. С. Об экономном выборе сетки для табулирования функций. Сообщение на IV Всесоюзном математическом съезде (не опубл.).

160. Салтыков А. И. Таблицы для вычисления кратных интегралов методом оптиальных коэффициентов // Ж. вычисл. матем. и матем. физики № 1. 1963.

161. Скриганов М. М. Решётки в полях алгебраических чисел и равномерные распределения по mod 1. ЛОМИ Р-12-88. Л., 1988. (Препринт.)

162. Скриганов М. М. Равномерные распределения и геометрия чисел. ЛОМИ Р-6-91. Л., 1991. (Препринт.)

163. Skriganov M. M. On integer points in polygons. Ann. Inst. Fourier, 43, No. 2 (1993), P. 313–323.

164. Skriganov M. M. Constructions of uniform distributions in terms of geometry of numbers. Prepublication Inst. Fourier (1992). No. 200; Algebra Analiz. 6. 1994. No. 3. P. 200–230; Reprinted in St. Petersburg Math. J., 6. 1995. No. 3. P. 635–664.

165. Skriganov M. M. Ergodic theory on homogeneous spaces and the lattice point counting for polyhedra. Doklady RAN. (1996).

166. Skriganov M. M. Anomalies in spectral asymptotics. Doklady RAN. 340. 1995. No. 5. P. 597–599; English transl.: Doklady Mathematics, 51. 1995. No. 1. P. 104–106.

167. Skriganov M. M. On the Littlwood — Paley theory for multidimensional Fourier series. Zap. Nauchn. Semin. POMI, 226. 1996. P. 155–169; English transl.: Journal of Math. Sciences (Plenum Publish. Corporation).

168. Скубенко Б. Ф. О произведении n линейных форм от n переменных // Труды МИАН СССР. N 158. 1981. С. 175–179.

169. Скубенко Б. Ф. Теорема изоляции для разложимых форм чисто вещественных алгебраических полей степени $n \geqslant 3$ Аналитическая теория чисел и теория функций. 4. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 112. 1981. С. 167–171.

170. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных // Аналитическая теория чисел и теория функций. 9. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 168. 1988. С. 125–139.

171. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geqslant 3$ // Модулярные функции и квадратичные формы. 1. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 183. 1990. С. 142–154.

172. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сборник 2017. Т. 18, вып. 4(64). С. 325–337.

173. Смоляк С. А. ε-энтропия классов $E_s^{\alpha,k}(B)$ и $W_s^{\alpha}(B)$ в метрике L_2 // ДАН СССР. 1960. Т. 131. № 1. С. 30–33.

174. Смоляк С. А. Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^{α} и E_s^{α} // ДАН СССР. 1960. Т. 131. № 5. С. 1028–1031.

175. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР 1963 Т. 148, № 5. С. 1042–1045.

176. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1966.

177. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. / М.: Наука, 1974.

178. Соболь И. М. Точная оценка погрешности многомерных квадратурных формул для функции класса S_p // АН СССР. 1960. 132. № 5. С. 1041–1044.

179. Соболь И. М. К теории многомерных квадратурных формул. Доклады на IV Всесоюзном съезде (не опубл.).

180. Соболь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. / М.: Наука, 1969.

181. Солодов В. М. О вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. 127. № 4. С. 753–756.

182. Солодов В. М. О погрешности численного интегрирования // ДАН СССР. 1963. 148. № 2. С. 284–287.

183. Солодов В. М. Интегрирование по некоторым областям, отличным от единичного куба // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. 8. № 6. С. 1334–1341.

184. Солодов В. М. Применение метода оптимальных коэффициентов к численному интегрированию // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.. 1969. 9. № 1. С. 14–29.

185. Степанов С. А. О числе точек гиперэллиптической кривой над простым конечным полем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33. С. 1171–1181.

186. Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 4. С. 490–505.

187. Устинов А. В. О формулах суммирования и интерполяции // Труды IV Международной конференции „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ Чебышевский сборник 2001. Т. 2 С. 52–71.

188. Устинов А. В. Дискретный аналог формулы суммирования Эйлера // Матем. замет. 71, № 6, 2002, 931– 936.

189. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

190. Фролов К. К. О связи квадратурных формул и подрешеток решетки целых векторов // ДАН СССР. 232. 1977. № 1. С. 40 — 43.

191. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

192. Фролов К. К. Оценка сверху дискрепанса в метрике L_2 // ДАН СССР. 252. 1980. № 4. С. 805 — 807.

193. Ченцов Н. Н. О квадратурных формулах для функций бесконечно большого числа переменных // Журн. вычислит. математики и матем. физики. 1961. № 3.

194. Ченцов Н. Н. Общая теория статистического вывода. / Дис....док. физ.-мат. наук. Москва. Ин-т прикл. математики АН СССР. 1969.

195. Ченцов Н. Н. Избранные труды: Математика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 400 с.

196. Шарыгин И. Ф. О применении теоретико-числовых методов интегрирования в случае непериодических функций // ДАН СССР. 1960. 132. № 1. С. 71–74.

197. Шарыгин И. Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 7. 1963. № 4. С. 784 — 802.

198. Шарыгин И. Ф. Оценка снизу погрешности формулы приближенного суммирования на классе $E_{s,p}(C)$ //Математические заметки. 1977. Т. 21. Вып. 3. С. 371–375

199. Шахов Ю. Н. О приближенном решении уравнений Вольтерра II рода методом итераций // ДАН СССР. 1959. 128. № 6. С. 1136–1139.

200. Шахов Ю. Н. О приближенном решении уравнений Вольтерра II рода методом итераций // ДАН СССР. 1961. 136. № 6. С. 1302–1306.

201. Шахов Ю. Н. О численном решении многомерных линейных уравнений Вольтерра II рода методом итераций. Сообщение на IV математическом съезде (не опубл.).

202. Шахов Ю. Н. О численном решении многомерных линейных уравнений Вольтерра II рода методом итераций / Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1961.

203. Ю. Н. Шахов О вычислении интегралов растущей кратности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5, вып. 5. С. 911–916.

204. Ю. Н. Шахов О приближенном решении многомерных линейных уравнений Вольтерра II рода методом итераций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4, дополнение к № 4. С. 75–100.

205. Ю. Н. Шахов О вычислении собственных значений многомерного симметричного ядра с помощью теоретико-числовых сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3, №6. С. 988–997.

206. Ю. Н. Шахов О погрешности восстановления функций из некоторого класса по параллелепипедальным сеткам // Матем. заметки, 1974. Т. 15, №5. С. 749–756.

207. Aardenne-Ehrenfest On the impossibility of a just distribution // Indagationes Math. 11, 4 (1949) p. 264–269.

208. Applications of Number Theory to Numerical Analysis / Ed. Zaremba S. K. — N. Y., L., 1972.

209. Baker A. C. On some diophantine inequalities involving the exponential function // Canad. Journ. Math. 17, 4 (1965), p.616 – 626.

210. Bohl P. — Crelles J., 1909, Bd. 135, S. 189–283; s. 222.

211. Chaix H., Fauere H. Diskrepance and diaphonie des suites de van der Corput generalisees. II//C.r.Acad.sci.Ser.1. 1990. N 2 (311). P. 65–68.

212. Chen W. W. L. On irregularities of distribution // Mathematika. 27. 1980. N 2. P. 153–170.

213. Chen W. W. L. On irregularities of distribution II // Quart. J.Math. Oxford (2). 34. 1983. P. 257–279.

214. van der Corput J. G. Verteilungsfunktionen. I–VIII. Proc. Kon. Acad. Wetensch. Amsterdam, 1935. N 8 (38). P. 813–821; N10. P. 1058–1066.

215. Davenport H. Note on irregularities of distribution, // Mathematika. 3. 1956. P. 131–135.

216. Diophantine Approximation and its Applications / Ed. Osgood Ch. F. — N. Y., L., 1973.

217. Faure H. Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s) // Acta Arith. 41. 1982. P. 337–351.

218. Halton J. H. On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals. // Numerische Math. 27. № 2 (1960) 84 — 90 Bd 2 № 2.

219. Hammersley J. M. Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems // Proc. N 4. Acad. Sci. 1960.

220. Hammersley J. M., Handscomb D. Monte-Carlo methods. — L., N. Y., 1964.

221. Hlawka E. Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatshefte f ur Math. 66, 2. 1962, p. 140–151.

222. Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretiscne Methoden in der numerischen Matematik. / Wien, Mūnchen, Oldenbourg, 1981.

223. Hua Loo Keng, Wang Yuan Applications of Number Theory to Numerical Analysis, – Springer–Verlag Berlin, 1981.

224. Kuiper L., Niederreiter H. Uniform distribution of sequences. — London, Sidney, Toronto, 1974.

225. Larcher G. Niederreiter. Optional coefficients modulo prime powers in the three–dimensional case // Ann.mat.pura ed appl. 1989. N 155. P. 299–315.

226. Proinov P., Atanassov E. On the distibution of the van der Corput generalized sequences // C.r.Acad.Sci.Ser.1. 1988. N 18 (307). P. 895–900.

227. Proinov P., Grozdanov V. S. Symmetrization of the van der Corput–Halton sequence // Докл. Болг. АН. 1987. N 8 (40). С. 5–8.

228. Proinov P., Grozdanov V. S. On the diaphony of the van der Corput–Halton sequence // J. Number Theory. 1988. N 1 (30). С. 94–104.

229. Roth K. F. On irregularities of distribution // Mathematika. 1. 1954, P. 73–79.

230. Roth K. F. On irregularities of distribution – IV, // Acta Arithm. 37. 1980. P. 65–75.

231. Schmidt Wolfgang M. Irregularities of distribution – VII, // Acfa Arithm. 21. 1972. P. 45–50.

232. Schmidt Wolfgang M. Irregularities of distribution – X // Number Theory and Algebra (H.Zassenhaus ed.) New York: Academic Press. 1977. P. 311–329.

233. Sierpinski W. — Krakua. Akad. Anz., math.-naturwiss. Kl. (A), 1910, Jan., S. 9.

234. Wang Yuan О методах приближенного интегрирования // Тр. ин-та матем. Акад. наук КНР 1962

235. Weil A. On some exponentional sums // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1948. – V. 34, N 5. – P. 204 – 207.

236. Weyl H. — Rend. Circ. math.Palermo, 1910, vol. 30, p. 406.

237. Weyl H.Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313 — 352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984)

238. Zinterhof P. Über einige Abschatzungen bei der Approximation von Funktionen mit Gleichverteilungsmethoden // Sb. Osterr. Akad. Wiss. Math. –nath. Kl. 1976. № 185. S. 121–132.

REFERENCES

1. Akramov, U. A. 1990, “The isolation theorem for forms corresponding to purely real algebraic fields”, Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 10 Zap. nauchn. sem. LOMI, no. 185, pp. 5–12.

2. Arkhipov, G.I., Karachuba, A.A. & Chubarikov, V.N. 1986, Teoriya kratny‘x trigonometricheskix summ [The theory of multiple trigonometric sums], Nauka, Moscow, Russia.

3. Babenko, K.I. 1986, Osnovy chislennogo analiza [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.

4. Bakhvalov, N.S. 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

5. Bakhvalov, N.S. 1960, “The rating average of the remainder term of quadrature formulas”, Zhurnal vychislitel’noj matematiki i matematicheskoj fiziki, no. 1, pp. 64–77.

6. Bakhvalov, N.S. 1964, On optimal methods of integration with a given number of nodes on classes of functions, D. Sc. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

7. Bakhvalov, N.S., Korobov, N.M. & Chentsov, N.N. 1964, “Application of number-theoretic grids to problems of approximate analysis”, Trudy Chetvertogo Vsesoyuznogo matematicheskogo s"ezda (Proceedings of the Fourth all-Union mathematical Congress), vol. 2, pp. 580–587.

8. Berezin, I. S. & Zhidkov, N. P. 1966, Metody vychislenij [Calculation method], Nauka, Moscow, Russia.

9. Bocharova, L.P. 2005, “Theorem A. O. Gelfond and optimal coefficients for a composite module”, Chebyshevskij sbornik, vol. 6, no. 3(15), pp. 34–50.

10. Bocharova, L.P. 2006, “On the boundary of some classes of functions”, Naukoemkoe obrazovanie. Traditsii. Innovatsii. Perspektivy, Sbornik mezhvuzovskikh nauchnykh statej, pp.198–202.

11. Bocharova, L.P. 2007, “Algorithms for finding the optimal coefficients”, Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 1(21), pp. 4–109.

12. Bocharova, L.P., Van’kova, V.S. & Dobrovol’skii, N.M. 1991, “On the calculation of optimal coefficients”, Matematicheskie zametki, vol. 49, no. 2, pp. 23–28.

13. Brushlinskaya, O. V. 1963, “Practical application of the optimal coefficients method for computing multiple integrals”, Trudy konferentsii po vychislitel’noj matematike i vychislitel’noj tekhnike.

14. Bukhshtab, A.A. 1960, Teoriya chisel [Number theory], Uchpedgiz, Moscow, Russia.

15. Bykovskij, V.A 1985, O pravil’nom poryadke pogreshnosti optimal’nykh kubaturnykh formul v prostranstvakh s dominiruyushhej proizvodnoj i kvadratichnykh otkloneniyakh setok [About the right order of error of optimal cubature formulas in space with dominating derivative and quadratic deviations of grids], Preprint DVNTS AN SSSR, Vladivostok, Russia.

16. Bykovskij, V.A 1988, “Discrete Fourier transform and cyclic convolution on integer lattices”, Matematicheskij sbornik, vol. 136(178), no. 4(8), pp. 451–467.

17. Bykovskij, V.A 1995, Ehkstremal’nye kubaturnye formuly dlya anizotropnykh klassov [Extremal cubature formulas for anisotropic classes], Preprint, Khabarovsk, Russia.

18. Bykovskij, V.A 1996, “Evaluation of the deviations of optimal grids in the Lp-norm and the theory of quadrature formulas”, Analysis Mathematica, no. 22, pp. 81–97.

19. Bykovskij, V.A 1990, Number-theoretic lattices in Euclidean spaces and their applications, D. Sc. Thesis, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the USSR Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia.

20. Bykovskij, V.A 2002, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.

21. Van’kova, V.S. 1991, “Evaluation of the quadratic deviations of grids of Holton”, Dep. v VINITI, no. 1157– B91.

22. Van’kova, V.S. 1991, “Standard deviation grids Fora-Chan”, Dep. v VINITI, no. 4372– B91.

23. Van’kova, V.S. 1991, “On algorithms for finding optimal Hammersley-Roth and Holton grids”, Dep. v VINITI, no. 4371– B91.

24. Van’kova, V.S. 1992, Multidimensional number-theoretic grids, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

25. Van’kova, V.S. 1993, “On the quadratic deviation of q-regular p-ary grids”, Sovremennye problemy teorii chisel [Modern problems of number theory], Tula, Russia, p.24.

26. Van’kova, V.S. & Dobrovol’skii, N.M. 1990, “About one algorithm for multidimensional grids”, Teoriya chisel i ee prilozheniya [Number theory and its applications], Tashkent, USSR, p.23.

27. Van’kova, V.S., Dobrovol’skii, N.M. & Esayan, A.R. 1991, “On the transformation of multidimensional grids”, Dep. v VINITI, no. 447–91.

28. Vilenkin, I.V. 1967, “About flat integration meshes”, Zhurnal vychislitel’noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 7, no. 1, pp. 189–196.

29. Voronin, S.M. 1994, “On quadrature formulas”, Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya, vol. 58, no. 5, pp. 189–194.

30. Voronin, S.M. 1995, “About the construction of quadrature formulas”, Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya, vol. 59, no. 4.

31. Voronin, S.M. & Temirgaliev, N. 1989, “On quadrature formulas associated to divisors of the field of Gaussian numbers”, Matematicheskie zametki, vol. 46, no. 2, pp. 34–41.

32. Vronskaya, G.T. 2003, “About square deviation of flat grids Hammersly”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 9, no. 1, pp. 23–62.

33. Vronskaya, G.T. 2005, Standard deviation of a flat mesh, Abstract of Ph.D. dissertation, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

34. Vronskaya, G.T. 2005, Standard deviation of a flat mesh, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

35. Vronskaya, G.T. & Dobrovol'skii, N.M. 2004, "On two-dimensional grids Voronin", Chebyshevskij sbornik, vol. 5, no. 1(9), pp. 74–86.

36. Vronskaya, G.T., Dobrovol'skii, N.M. & Rodionova, O.V. 2002, "Comparison of sum and product", Materialy vserossijskoj konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki i informatiki" [Proceedings of the all-Russian conference "Modern problems of mathematics, mechanics and computer science"], Tula, Russia.

37. Vronskaya, G.T., Dobrovol'skii, N.M. & Rodionova, O.V. 2002, "Comparisons, sums and products on the reduced system of deductions", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 8, no. 1, pp. 10–28.

38. Vronskaya, G.T. & Rodionova, O.V. 2005, Kvadratichnoe otklonenie ploskikh setok [Standard deviation of a flat mesh], Izdatel'stvo TGPU im. L.N.Tolstogo, Tula, Russia.

39. Gel'fand, I. M., Fejnberg, S.M., Frolov, A.S. & Chentsov, N.N 1959, "Application of the random test method (Monte Carlo method) to solve the kinetic equation", Trudy II Mezhdunarodnoj konferentsii po mirnomu ispol'zovaniyu atomnoj ehnergii (Proceedings of the II international conference on the peaceful uses of atomic energy), vol. 2, pp. 628–633.

40. Gel'fand, I. M., Frolov, A.S. & Chentsov, N.N 1958, "The calculation of continual integrals by Monte Carlo", Izvestie vuzov. Matematika, no. 5(6), pp. 32–45.

41. Gertsog, A.S. 2012, Pure real biquadratic algebraic fields and their applications, Ph.D. Thesis, Tula State Pedagogical University, Tula, Russia.

42. Dobrovol'skaya, L.P. 2009, Algorithms for calculating optimal coefficients, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Tula, Russia.

43. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2010, "Problem-oriented computing system TMK (number-theoretic method of Korobov)", Rol' universitetov v podderzhke gumanitarnykh nauchnykh issledovanij: Materialy V Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferentsii [The role of universities in supporting Humanities research: Proceedings of the V international scientific and practical conference], Tula, Russia, pp.16–28.

44. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i algoritmy poiska optimal'nykh koehffitsientov [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding optimal coefficients], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. L.N. Tolstogo, Tula, Russia.

45. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

46. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 23–62.

47. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Ogorodnichuk, N. K., Rebrov, E. D. & Rebrova, I. YU. 2012, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis", Trudy X mezhdunarodnoj konferentsii "Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya" Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo

universiteta [Proceedings of the X international conference "Algebra and number theory: modern problems and applications"scientific notes of Orel state University], no. 6, part 2, pp. 90-98.

48. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., & Rebrova, I. YU. 2013, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis", Izvestie Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.13, no. 4(2), pp. 47-52.

49. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

50. Dobrovol'skaya, V. N. 2004, "Amount incomplete or fractions", Chebyshevskij sbornik, vol. 5, no. 2(10), pp. 43–48.

51. Dobrovol'skaya, V. N. 2004, "Peak formula and partial sums of fractional fractions", Izvestie Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.10, no. 1, pp. 5-11.

52. Dobrovol'skaya, V. N. 2005, "Deviation flat parallelepipedal grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 6, no. 1(13), pp. 87–97.

53. Dobrovol'skaya, V. N. 2005, "Elementary method of fractional shares Vinogradov-Korobov and deviation of plane grids Bakhvalov", Chebyshevskij sbornik, vol. 6, no. 2(14), pp. 138–144.

54. Dobrovol'skii, M. N. 2003, "Estimates of sums over a hyperbolic cross", Izvestie Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.9, no. 1, pp. 82-90.

55. Dobrovol'skii, M. N. 2004, "The optimum coefficients of the combined meshes", Chebyshevskij sbornik, vol. 5, no. 1(9), pp. 95–121.

56. Dobrovol'skii, M. N. 2006, "Dirichlet series with periodic coefficients and a functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.

57. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Doklady akademii nauk, vol. 412, no. 3, pp. 302–304.

58. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, no. 3, pp. 18–23.

59. Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Kiseleva, O.V. 2002, "On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices", Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki:Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii, Tula, Russia, pp. 22–23.

60. Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Kiseleva, O.V. 2002, "On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.

61. Dobrovol'skii, M. N. 2009, Some number-theoretic methods of approximate analysis, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

62. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "An effective proof of Roth's quadratic deviation theorem", Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 39(123), pp. 155–156.

63. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Estimates of variance of modified grids Hammersly Rota", Dep. v VINITI, no. 1365– 84.

64. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", Dep. v VINITI, no. 6089–84.

65. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.

66. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", Dep. v VINITI, no. 6091–84.

67. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Number-theoretic meshes and their applications", Ph.D. Thesis, Tula, Russia.

68. Dobrovol'skii, N. M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Abstract of Ph.D. dissertation, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

69. Dobrovol'skii, N. M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Teoriya chisel i ee prilozheniya: Tezisy dokladov Vsesoyuznoj konferentsii, Tbilisi, USSR, pp. 67–70.

70. Dobrovol'skii, N. M. 1993, "Groups of transformations of multidimensional grids", Sovremennye problemy teorii chisel: Tezisy dokladov Mezhdunarodnoj konferentsii, Tula, Russia, p. 46.

71. Dobrovol'skii, N. M. 1995, "The average orbits of multidimensional grids", Matematicheskie zametki, vol. 58, no. 1, pp. 48–66.

72. Dobrovol'skii, N. M. 1995, "Means over of Multidimensional Lattices", Mathematical Notes, vol. 58. no. 1, pp. 710–721.

73. Dobrovol'skii, N. M. 2000, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications", D. Sc. Thesis, Tula State Pedagogical University, Tula, Russia.

74. Dobrovol'skii, N. M. 2001, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications to approximate analysis", Sbornik IV Mezhdunarodnaya konferentsiya "Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya", posvyashhennaya 180-letiyu P. L. Chebysheva i 110-letiyu I. M. Vinogradova (A collection of the IV international conference "Modern problems of number theory and its applications", dedicated to 180th anniversary of P. L. Chebyshev and 110th anniversary of I. M. Vinogradov), Tula, Russia, 10-15 September, pp. 54–80.

75. Dobrovol'skii, N. M. 2005, Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i ikh prilozheniya [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni L.N.Tolstogo, Tula, Russia.

76. Dobrovol'skii, N. M. 2015, "On modern problems of the theory of hyperbolic Zeta function of lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 16, no. 1, pp. 176–190.

77. Dobrovol'skii, N. M., Balaba, I. N., Rebrova, I. YU., Dobrovol'skii, N. N. & Matveeva, E. A. 2017, "On linear-fractional transformations forms A. Tue-M.N. Dobrovolsky-V.D. Podsypanin", Chebyshevskij sbornik, vol. 18, no. 2, pp. 54–97.

78. Dobrovol'skii, N. M., Balaba, I. N., Rebrova, I. YU. & Dobrovol'skii, N. N. 2017, "On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities", Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., no.2, pp. 27–39.

79. Dobrovol'skii, N. M. & Bocharova, L.P. 2006, "Fifty years of the number-theoretic method in the approximate analysis", Naukoemkoe obrazovanie. Traditsii. Innovatsii. Perspektivy, Sbornik mezhvuzovskikh nauchnykh statej, pp.189–198.

80. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V.S. 1987, "On a Lemma of A. O. Gelfond", Dep. v VINITI, no. 1467– B87.

81. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V.S. 1990, "Numerical experiment on the use of parallelepipedal grids", Algoritmicheskie problemy teorii grupp i podgrupp, pp.153–155.

82. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V.S. 1990, "On the hyperbolic Zeta function of algebraic lattices", Teoriya chisel i ee prilozheniya: Tezisy dokladov respublikanskoj konferentsii, Tashkent, USSR, p.22.

83. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V.S. 1990, "New estimates for modified grids Hammersly Rota", Dep. v VINITI, no. 4992– B90.

84. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V.S. 1993, "On a regular P-ary meshes", Matematicheskie zametki, vol. 54, no. 6, pp. 22–32.

85. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V.S. 1995, "On the deviation of q - regular grids", Algebraicheskie, veroyatnostnye, geometricheskie, kombinatornye i funktsional'nye metody v teorii chisel: Sbornik tezisov doklada II Mezhdunarodnoj konferentsii [Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Proceedings of the II international conference], Voronezh, Russia, p. 52.

86. Dobrovol'skii, N. M., Van'kova, V.S. & Kozlova, S. L. 1990, "The hyperbolic Zeta function of algebraic lattices", Dep. v VINITI, no. 2327– B90.

87. Dobrovol'skii, N. M., Van'kova, V.S. & Penton, M.M. 1989, "Algorithm for constructing optimal modified Hammersley-Roth grids", Sovremennye problemy informatiki, vychislitel'noj tekhniki i avtomatizatsii: Tezisy dokladov Vsesoyuznoj konferentsii, Tula, Russia, pp. 92–95.

88. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N. 2015, "On minimal polynomials of residual fractions for algebraic irrationalities", Chebyshevskij sbornik, vol. 16, no. 3, pp. 147–182.

89. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Balaba, I. N., Rebrova, I. YU., Sobolev, D.K. & Soboleva, V.N. 2016, "Generalized Pisot Numbers and Matrix Decomposition", Advances in Dynamical Systems and Control, Springer Switzerland.

90. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Sobolev, D.K. & Soboleva, V.N. 2017, "Classification of pure-real algebraic irrationalities", Chebyshevskij sbornik, vol. 18, no. 2, pp. 98–128.

91. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Sobolev, D.K., Soboleva, V.N., Dobrovol'skaya, L. P. & Bocharova, O. E. 2016, "On the hyperbolic Hurwitz Zeta function ", Chebyshevskij sbornik, vol. 17, no. 3, pp. 72–105.

92. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Soboleva, V.N., Sobolev, D.K. & Yushina, E.I. 2015, "Hyperbolic dzeta-function of lattices of quadratic fields", Chebyshevskij sbornik, vol. 16, no. 4, pp. 100–149.

93. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N. & Yushina, E.I. 2012, "On the matrix form of Galois ' theorem on purely periodic continued fractions", Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 3, pp. 47–52.

94. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R., Pikhtil'kov, S.A., Rodionova, O.V. & Ustyan, A.E. 1999, "On a single algorithm for finding optimal coefficients", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 1, pp. 51–71.

95. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, "On a recursive algorithm for lattices", Teoriya priblizhenij i garmonicheskij analiz: Tezisy doklada Mezhdunarodnoj konferentsii (Approximation theory and harmonic analysis: proceedings of the International conference), Tula, Russia.

96. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, "On a recursive algorithm for lattices", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 3, pp. 38–51.

97. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Yafaeva, R. R. 2002, "On grids of Smolyak S. A.", Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii, Tula, Russia, pp. 18–20.

98. Dobrovol'skii, N. M. & Klepikova, N.L. 1990, "Table of optimal coefficients for approximate calculation of multiple integrals", Institut obshhej fiziki AN SSSR, Moscow, USSR.

99. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2001, "The optimal coefficients for mixed meshes", Chebyshevskij sbornik, vol. 2, pp. 41–53.

100. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2002, "On the error estimation of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 1(3), pp. 41–48.

101. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, "Banach spaces of periodic functions", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.

102. Dobrovol'skii, N. M., Manokhin, E.V., Rebrova, I. YU. & Akkuratova, S.V.1999, "On some properties of normed spaces and algebras of nets", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 1, pp. 100–113.

103. Dobrovol'skii, N. M., Rebrova, I. YU. & Roshhenya, A.L. 1998, "Continuity of the hyperbolic Zeta function of lattices", Matematicheskie zametki, vol. 63, no. 4, pp. 522–526.

104. Dobrovol'skii, N. M. & Rodionova, O. V.1996, "Quadrature formulas with generalized parallelepipedal grids", Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya: Sbornik tezisov dokladov III Mezhdunarodnoj konferentsii [Modern problems of number theory and its applications: proceedings of the third International conference], Tula, Russia, pp. 47–48.

105. Dobrovol'skii, N. M. & Rodionova, O. V.1996, "Quadrature formulas with generalized parallelepipedal grids", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 2, no. 1, pp. 71–77.

106. Dobrovol'skii, N. M. & Rodionova, O. V.1998, "On one finite Fourier series and its applications", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 68–79.

107. Dobrovol'skii, N. M. & Roshhenya, A.L. 1995, "On the number of lattice points in a hyperbolic cross", Algebraicheskie, veroyatnostnye, geometricheskie, kombinatornye i funktsional'nye metody v teorii chisel: Sbornik tezisov doklada II Mezhdunarodnoj konferentsii [Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Proceedings of the II international conference], Voronezh, Russia, p. 53.

108. Dobrovol'skii, N. M. & Roshhenya, A.L. 1996, "On the analytic continuation of the hyperbolic Zeta function of rational lattices", Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya: Sbornik tezisov doklada III Mezhdunarodnoj konferentsii [Modern problems of number theory and its applications: Proceedings of the III international conference], Tula, Russia, p. 49.

109. Dobrovol'skii, N. M. & Roshhenya, A.L. 1996, "On continuity of the hyperbolic Zeta function of lattices", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 2, no. 1, pp. 77–87.

110. Dobrovol'skii, N. M., Sobolev, D.K. & Soboleva, V.N. 2013, "On a matrix decomposition of the reduced cubic irrational", Chebyshevskij sbornik, vol. 14, no. 1, pp. 34–55.

111. Dobrovol'skii, N. N. 2003, "On the number of integer points in a hyperbolic cross at the values of $1 \leqslant t < 21$", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 9, no. 1, pp. 91–95.

112. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "A trigonometric polynomial on a grid of Smolyak", Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki" [Proceedings of the international scientific conference "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"], Tula, Russia, pp. 34–36.

113. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "Deviation of two-dimensional Smolyak grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 1(21), pp. 110–152.

114. Dobrovol'skii, N. N. 2014, Hyperbolic parameter of meshes with weights and its application, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

115. Ermakov, S.N. 1971, Metod Monte-Karlo i smezhnye voprosy [Monte Carlo method and related matters], Nauka, Moscow, Russia.

116. Kan, I.D. 1997, Recurrence sequences and their applications, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

117. Korobov, N.M. 1957, "Approximate evaluation of multiple integrals by using methods of the theory of numbers", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 115, no. 6, pp. 1062–1065.

118. Korobov, N.M. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.

119. Korobov, N.M. 1959, "On approximate solution of integral equations", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 128, no. 2, pp. 235–237.

120. Korobov, N.M. 1959, "On some number-theoretic methods for approximate computation of multiple integrals. Abstract of the report at the meeting of the Moscow mathematical society", Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 14, no. 2(86), pp. 227–230.

121. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

122. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

123. Korobov, N.M. 1961, "Application of number-theoretic nets to integral equations and interpolation formulas", Sbornik statej. Posvyashhaetsya akademiku Mikhailu Alekseevichu Lavrent'evu k ego shestidesyatiletiyu, Trudy MIAN SSSR, vol. 60, pp. 195–210.

124. Korobov, N.M. 1962, “On the application of number-theoretic grids”, Vychislitel’nye metody i programmirovanie, pp. 80–102.

125. Korobov, N.M. 1963, O teoretiko-chislovykh metodakh v priblizhennom analize [On number-theoretic methods in approximate analysis], Mashgiz, Moscow, Russia.

126. Korobov, N.M., “On some problems of number theory arising from the needs of approximate analysis”, Soobshhenie na IV matematicheskom s"ezde (ne opublikovano).

127. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

128. Korobov, N.M. 1967, “About some questions of the theory of Diophantine approximations”, Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 22, no. 3(135), pp. 83–118.

129. Korobov, N.M. 1982, “On the calculation of optimal coefficients”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 267, no. 2, pp. 289–292.

130. Korobov, N.M. 1983, “About one assessment of A. O. Gelfond”, Vestnik MGU. Seriya 1. Matematika, mekhanika, no. 3, pp. 3–7.

131. Korobov, N.M. 1983, “About some questions of the theory of Diophantine approximations”, Tezisy dokladov vsesoyuznoj konferentsii “Teoriya transtsendentnykh chisel i ee prilozheniya”, p. 62.

132. Korobov, N.M. 1989, Trigonometricheskie summy i ikh prilozheniya [Trigonometric sums and their applications], Nauka, Moscow, Russia.

133. Korobov, N.M. 1994, “Quadrature formulas with combined grids”, Matematicheskie zametki, vol. 55, no. 2, pp. 83–90.

134. Korobov, N.M. 1994, “On numerical-theoretic methods of approximate integration”, Istoriko-matematicheskie issledovaniya, no. XXXV, pp. 285–301.

135. Korobov, N.M. 1996, “Special polynomials and their applications”, Diofantovy priblizheniya. Matematicheskie zapiski, vol. 2, pp. 77–89.

136. Korobov, N.M. 1998, “About the end of the chain fractions”, Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 52, no. 2, pp. 167–168.

137. Korobov, N.M. 2001, “On number-theoretic interpolation formulas”, Istoriko-matematicheskie issledovaniya, no. 6(41), pp. 266–276.

138. Korobov, N.M. 2001, “On some properties of special polynomials”, Trudy IV Mezhdunarodnoj konferentsii “Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya” Chebyshevskij sbornik (Proceedings of the IV international conference "Modern problems of number theory and its applications” Chebyshev collection), vol. 1, pp. 40–49.

139. Korobov, N.M. 2002, “About one estimation in the method of optimal coefficients”, Tezisy IV Vserossijskoj konferentsii “Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki”, pp. 39–40.

140. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

141. Kruglyak, YU. A., Gordadze, G. S., Podol'skaya, L. M., Tsinauri, S. B. & Sharashidze, G.B. 1971, Chislennyj raschet molekulyarnykh integralov s funktsiyami ot mezhehlektronnogo rasstoyaniya I-II [Numerical calculation of molecular integrals with functions from the interelectronic distance I-II], Izdatel'stvo Tbilisskogo universiteta, Tbilisi, SSSR.

142. Lev, V.F. 1990, "Diaphonia and standard deviations of the multidimensional grids", Matematicheskie zametki, vol. 47, no. 6, pp. 45–54.

143. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, Nachala chislennogo analiza [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.

144. Mit'kin, D. A. 1986, "On an elementary proof of A. Weyl's estimate for rational trigonometric sums with a simple denominator", Izvestiya vuzov. Matematika, vol. 6, pp. 14–17.

145. Nikitin, A.N., Rusakova, E.I., Parkhomenko, EH.I., Ivankina, T.I. & Dobrovol'skij, N.M. 1988, "On the reconstruction of the paleotectonic stress according to the piezoelectric texture of the rocks", Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli, no. 9, pp. 66–74.

146. Nikitin, A.N., Rusakova, E.I., Parkhomenko, EH.I., Ivankina, T.I. & Dobrovol'skij, N.M. 1988, "Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using. Data on Piezoelectric Texstures of Rocks", Izvestiya Earth Physics, vol 24, no 9. pp. 728–734.

147. Rebrov, E.D. 2013, Some number-theoretic methods of approximate calculations, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

148. Rebrova, I.YU. 1996, "Continuity of the hyperbolic Zeta function of lattices", Tezisy dokladov III Mezhdunarodnoj konferentsii: Sovremennye problemy teorii chisel (Abstracts of the III international conference: modern problems of number theory), Tula, Russia, p. 119.

149. Rebrova, I.YU. 1998, "Continuity of the generalized hyperbolic lattice Zeta function and its analytic continuation", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 99–108.

150. Rebrova, I.YU. 1999, The space of lattices and functions on it, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

151. Rodionova, O. V. 2000, "First order recurrence formulas for power sums of fractional fractions", Vserossijskaya nauchnaya konferentsiya "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki", Tula, Russia, pp. 50–51.

152. Rodionova, O. V. 2000, Generalized parallelepipedal grids and their applications, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

153. Roshhenya, A.L. 1996, "Generalization of Dirichlet's theorem on the number of points of an integer lattice in a hyperbolic cross", Tezisy dokladov III Mezhdunarodnoj konferentsii: Sovremennye problemy teorii chisel (Abstracts of the III international conference: modern problems of number theory), Tula, Russia, p. 120.

154. Roshhenya, A.L. 1996, "A generalization of Dirichlet's theorem on the number of points of a shifted lattice under hyperbole $x \cdot y = N$", Dep. v VINITI, no. 2743–B–96.

155. Roshhenya, A.L. 1997, "Generalization of Dirichlet's theorem on the number of points of an integer lattice in a hyperbolic cross", Dep. v VINITI, no. 2087–N–97.

156. Roshhenya, A.L. 1998, Analytic continuation of the hyperbolic Zeta function of lattices, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

157. Ryaben'kij, V.S. 1960, "On tables and interpolation of functions from a certain class", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 131, no. 5, pp. 1025–1027.

158. Ryaben'kij, V.S. 1961, "On a method for obtaining difference schemes and on the use of number-theoretic grids for solving the Cauchy problem by the finite difference method", Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova, vol. 60, pp. 232–237.

159. Ryaben'kij, V.S., "The economical choice of the grid for tabulation of features", Soobshhenie na IV Vsesoyuznom matematicheskom s"ezde.

160. Saltykov, A.I. 1963, "Tables for computing multiple integrals by method of optimal coefficients", Zhurnal vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fiziki, no. 1.

161. Skriganov, M.M. 1988, Reshyotki v polyakh algebraicheskikh chisel i ravnomernye raspredeleniya po *mod* 1 [Lattices in algebraic number fields and uniform distribution *mod* 1], LOMI, Leningrad, SSSR.

162. Skriganov, M.M. 1991, Ravnomernye raspredeleniya i geometriya chisel [Uniform distributions and geometry of numbers], LOMI, Leningrad, SSSR.

163. Skriganov, M.M. 1993, "On integer points in polygons", Ann. Inst. Fourier, vol. 43, no. 2, pp. 313–323.

164. Skriganov, M.M. 1995, "Constructions of uniform distributions in terms of geometry of numbers", St. Petersburg Mathematical Journal, pp. 635–664.

165. Skriganov, M.M. 1996, "Ergodic theory on homogeneous spaces and the lattice point counting for polyhedra", Doklady RAN.

166. Skriganov, M.M. 1995, "Anomalies in spectral asymptotics", Doklady RAN, vol. 340, no. 5., pp. 597–599.

167. Skriganov, M.M. 1996, "On the Littlwood-Paley theory for multi-dimensional, Fourier series. Zap. Nauchn. Semin. POMI, vol. 226, pp. 155–169.

168. Skubenko, B.F. 1981, "On the product of n linear forms in n variables", Trudy MIAN SSSR, no. 158, pp. 175–179.

169. Skubenko, B.F. 1988, "An isolation theorem for decomposable forms of purely real algebraic fields of degree $n \geqslant 3$", Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 4. Zap. nauch. seminara LOMI, no. 112, pp. 167–171.

170. Skubenko, B.F. 1988, "The minima of decomposable cubic form of three variables", Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 9. Zap. nauch. seminara LOMI, no. 168, pp. 125–139.

171. Skubenko, B.F. 1990, "The minima of decomposable forms of degree n of n variables with $n \geqslant 3$", Modulyarnye funktsii i kvadratichnye formy. 1. Zap. nauch. seminara LOMI, no. 183, pp. 142–154.

172. Smirnova, E. N., Pikhtil'kova, O. A., Dobrovol'skij, N.N. & Dobrovol'skij, N.M. 2017, "Algebraic lattice in a metric space lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 19, no. 4(64).

173. Smolyak, S.A. 1960, “ε - entropy of the $E_s^{\alpha,k}(B)$ and $W_s^{\alpha}(B)$ classes in the $l_2$metric”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 131, no. 1, pp. 30–31.

174. Smolyak, S.A. 1960, “Interpolation and quadrature formulas on classes W_s^{α} and E_s^{α}”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 131, no. 5, pp. 1028–1031.

175. Smolyak, S.A. 1963, “Quadrature and interpolation formulas on tensor products of some classes of functions”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 148, no. 5, pp. 1042–1045.

176. Smolyak, S.A. 1966, On optimal recovery of functions and functionals from them, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, USSR.

177. Sobolev, S.L. 1974, Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul [Introduction to the theory of cubature formulas], Nauka, Moscow, USSR.

178. Sobol’, I.M. 1960, “An accurate error estimate for multidimensional quadrature formulae for functions of the class S_p”, Akademiya nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1041–1044.

179. Sobol’, I.M., “On the theory of multidimensional quadrature formulas”, Doklady na IV Vsesoyuznom s"ezde.

180. Sobol’, I.M. 1969, Mnogomernye kvadraturnye formuly i funktsii Khaara [Multidimensional quadrature formulas and Haar functions], Nauka, Moscow, USSR.

181. Solodov, V.M. 1959, “Calculation of multiple integrals”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 127, no. 4, pp. 753–756.

182. Solodov, V.M. 1963, “On the error of numerical integration”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 148, no. 2, pp. 284–287.

183. Solodov, V.M. 1968, “Integration in some areas other than a single cube”, Zhurnal vychislitel’noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 8, no. 6, pp.1334–1341.

184. Solodov, V.M. 1969, “Application of the method of optimal coefficients to numerical integration”, Zhurnal vychislitel’noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 9, no. 1, pp.14–29.

185. Stepanov, S.A. 1969, “On the number of points of a hyperelliptic curve over a simple finite field”, Izvestiya AN SSSR. Seriya matematika, vol.33, pp. 1171–1181.

186. Temirgaliev, N. 1990, “Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of many variables ”, Matematicheskij sbornik, vol.181, no. 4, pp. 490–505.

187. Ustinov, A. V. 2001, “On summation and interpolation formulas”, Trudy IV Mezhdunarodnoj konferentsii “Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya”, Chebyshevskij sbornik (Proceedings of the IV international conference "Modern problems of number theory and its applications Chebyshev collection), vol. 2, pp. 52-71.

188. Ustinov, A. V. 2002, “The discrete analogue of the summation formula of Euler”, Matematicheskie zametki, vol.71, no. 6, pp. 931–936.

189. Frolov, K.K. 1976, “Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 231, no.4, pp. 818–821.

190. Frolov, K.K. 1977, “About the connection of the quadrature formulas and sublattices of the lattice of integer vectors”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 232, no. 1, pp. 40–43.

191. Frolov, K.K. 1979, Quadrature formulas on classes of functions, Ph.D. Thesis, Vychislitel'nyj tsentr Akademii Nauk SSSR, Moscow, USSR.

192. Frolov, K.K. 1980, "The upper bound of discrepancy in the L_2 - metric", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 252, no. 4, pp. 805–807.

193. Chentsov, N. N. 1961, "On quadrature formulae for functions of an infinitely large number of variables", Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 1, no. 3, pp. 418–424

194. Chentsov, N. N. 1969, The General theory of statistical inference, D. Sc. Thesis, Institut prikladnoj matematiki AN SSSR, Moscow, USSR.

195. Chentsov, N. N. 2001, Izbrannye trudy: Matematika, [Selected works: Mathematics], FIZMATLIT, Moscow, Russia, p. 400.

196. Sharygin, I.F. 1960, "On application of number-theoretic integration methods in the case of non-periodic functions", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 1, pp. 71–74.

197. Sharygin, I.F. 1963, "Lower bounds for the error of quadrature formulas on function classes", Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 7, no. 4, pp. 784–802.

198. Sharygin, I.F. 1977, "The lower bound of the error of the formulas of approximate summation of the class $E_{s,p}(C)$", Matematicheskie zametki, vol.21, no. 3, pp. 371–375.

199. Shakhov, YU. N. 1959, "On the approximate solution of the Volterra equation of type II by the method of iterations", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 128, no. 6, pp. 1136–1139.

200. Shakhov, YU. N. 1961, "On the approximate solution of the Volterra equation of type II by the method of iterations", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 136, no. 6, pp. 1302–1306.

201. Shakhov, YU. N., "On the numerical solution of multidimensional linear Volterra equations of the II kind by iteration method", The message at the IV Congress of mathematical.

202. Shakhov, YU. N. 1961, On the numerical solution of multidimensional linear Volterra equations of the II kind by iteration method, Abstract of Ph.D. dissertation, Moscow, USSR.

203. Shakhov, YU. N. 1965, "Calculation of integrals of increasing multiplicity", Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 5, no. 5, pp. 911–916.

204. Shakhov, YU. N. 1964, "On the approximate solution of multidimensional linear Volterra equations of the II kind by iteration method", Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 4, no. 4, pp. 75–100.

205. Shakhov, YU. N. 1963, "On the calculation of eigenvalues of a multidimensional symmetric kernel using number-theoretic grids", Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, vol. 3, no. 6, pp. 988–997.

206. Shakhov, YU. N. 1974, "On the error of recovery of functions from a certain class on parallelepipedal grids", Matematicheskie zametki, vol.15, no. 5, pp. 749–756.

207. Aardenne-Ehrenfest 1949, "On the impossibility of a just distribution", Indagationes Math., vol. 11, no. 4 pp. 264–269.

208. Zaremba, S. K. (ed) 1972, Applications of Number Theory to Numerical Analysis, Academic Press, New York, USA.

209. Baker, A.C. 1965, "On some diophantine inequalities involving the exponential function", Canadian Journal of Mathematics vol. 17, no. 4, pp.616–626.

210. Bohl, P. 1909, "A in the theory of secular disturbances occurring Problem", Journal for pure and applied mathematics, vol. 135, pp. 189–283.

211. Chaix, H. & Fauere, H. 1990, "Diskrepance and diaphonie des suites de van der Corput generalisees", C.r.Acad.sci.Ser.1, no. 2(311), pp. 65–68.

212. Chen, W.W.L. 1980, "On irregularities of distribution II", Mathematika, vol. 27, no. 2. P. 153–170.

213. Chen, W.W.L. 1983, "On irregularities of distribution II", Quart. J.Math. Oxford (2). 34, pp. 257–279.

214. Van der Corput, J. G. 1935, Verteilungsfunktionen I–VIII, Proc. Kon. Ned. Acad. Wetensch. Amsterdam, vol. 38, no. 8, pp. 813–821.

215. Davenport, H. 1956, "Note on irregularities of distribution", Mathematika, vol. 3, pp. 131–135.

216. Osgood, Ch. F. (ed) 1973, Diophantine Approximation and its Applications, Academic Press, New York, USA.

217. Faure, H. 1982, "Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s)", Acta Arith, vol. 41, pp. 337–351.

218. Halton, J. H. 1960, "On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals", Numerische Math, vol. 27, no. 2, pp. 84–90.

219. Hammersley, J.M. 1960, "Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems", Ann. New York Acad. Sci., vol. 86, 844–874.

220. Hammersley, J.M. & Handscomb, D. 1964, Monte-Carlo methods, Chapman and Hall, London.

221. Hlawka, E. 1962, "For approximate calculation of multiple integrals", Monthly Bulletin of mathematics, vol. 66, no. 2. pp. 140–151.

222. Hlawka, E., Firneis, F. & Zinterhof, P. 1981, Zablentheoretiscbe methods in numerical mathematics, R. Oldenbourg Verlag, Wien.

223. Hua Loo Keng & Wang Yuan 1981, Applications of Number Theory to Numerical Analysis, Springer-Verlag Berlin.

224. Kuiper, L. & Niederreiter H. 1974, Uniform distribution of sequences, London, Sidney, Toronto.

225. Larcher, G. Niederreiter 1989, "Optional coefficients modulo prime powers in the three-dimensional case", Ann.mat.pura ed appl., no. 155, pp. 299–315.

226. Proinov, P. & Atanassov, E. 1988, "On the distibution of the van der Corput generalized sequences", C.r.Acad.Sci.Ser.1, no.18(307), pp. 895–900.

227. Proinov, P. & Grozdanov, V.S. 1987, "Symmetrization of the van der Corput–Halton sequence", Dokl. Bolg. AN, no. 8(40), pp. 5–8.

228. Proinov, P. & Grozdanov, V.S. 1988, "On the diaphony of the van der Corput-Halton sequence", J. Number Theory, no. 1(30), pp. 94–104.

229. Roth, K.F. 1954, "On irregularities of distribution", Mathematika, 1, pp. 73–79.

230. Roth, K.F. 1980, "On irregularities of distribution - IV", Acta Arithm, 37. pp. 65–75.

231. Schmidt Wolfgang, M. 1972, "Irregularities of distribution -VII", Acfa Arithm, 21, pp. 45–50.

232. Schmidt Wolfgang M. 1977, "Irregularities of distribution - X", Number Theory and Algebra (H.Zassenhaus ed.), pp. 311–329.

233. Sierpinski, W. 1910, — Krakua. Akad. Anz., math.-naturwiss. Kl. (A), 1910, Jan., S. 9.

234. Wang Yuan 1962, "On methods of approximate integration", Trudy instituta matematicheskoj Akademii nauk KNR.

235. Weil, A. 1948, "On some exponentional sums", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 34, no.5, pp. 204–207.

236. Weyl, H. 1910, "On the Gibbs phenomenon and related congruence phenomena", Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. 30, pp.377-407

237. Weyl H. 1916, "On the uniform distribution of Numbers mod. one", Math. Ann., vol. 77, pp. 313–352.

238. Zinterhof, P. 1976, "About some of the Timates for the Approximation of functions with the same distribution methods", Sb. Osterr. Akad. Wiss. Math. Kl., no. 185, pp. 121–132.

Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет
Институт экономики и управления
Оренбургский государственный университет
Поступило 23.11.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-86-96

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ДЛЯ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ

А. Бальчюнас (Вильнюс, Литва), Р. Мацайтене (Шяуляй, Литва)

Аннотация

Пустьχ характер Дирихле по модулю q. L- функция Дирихле $L(s,\chi)$ в полуплоскости $\sigma > 1$ определяемая рядом

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

и мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость. Если χ-неглавный характер, то функция $L(s,\chi)$ является целой. В случае главного характера функция $L(s,\chi)$ имеет единственный простой полюс в точке $s = 1$. L- функции Дирихле играют важную роль при исследовании распределения простых чисел в арифметических прогрессиях, поэтому их аналитические свойства заслуживают пристального внимания. В применениях часто нужны моменты L- функций Дирихле, асимптотическое поведение которых очень сложное. При исследовании моментов применяются различные методы, один из которых основан на применении преобразований Меллина. В свою очередь, преобразования Меллина используют преобразования Лапласа. В статье получены явные формулы для преобразования Лапласа функции $|L(s,\chi)|^2$ в критичеслой полосе. Эти формулы расширяют формулы, доказаные в [3] на критической прямой $\sigma = \frac{1}{2}$.

Ключевые слова: L-функция Дирихле, преобразование Лапласа, преобразование Меллина, дзета-функция Римана.

Библиография: 15 названий.

THE LAPLACE TRANSFORM OF DIRICHLET L-FUNCTIONS

A.Balčiūnas (Vilnius, Lithuania), R. Macaitienė (Šiauliai, Lithuania)

Abstract

Let χ be a Dirichlet character modulo q. The Dirichlet L-function $L(s,\chi)$ is defined in the half-plane $\sigma > 1$ by the series

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

and has a meromorphic continuation to the whole complex plane. If χ is a non-principal character, then the function $L(s,\chi)$ is entire one. In the case of the principal character, the function $L(s,\chi)$ has unique simple pole at the point $s = 1$. Dirichlet L- functions play an important role in the investigations of the distribution of prime numbers in arithmetical progresions, therefore, their analytic properties deserve a constant attention. In applications, often the moments of Dirichlet L-functions are used, whose asymptotic behaviour is very complicated. For investigation of moments, various methods are applied, one of them is based on the application of Mellin transforms. On the other hand, Mellin transforms use Laplace transforms. In the paper, the formulae for the Laplace transform of the function $|L(s,\chi)|^2$ in the critical strip are obtained. They extend the formulae obtained in [3] on the critical line $\sigma = \frac{1}{2}$.

Keywords: Dirichlet L-function, Laplace transform, Mellin transform, Riemann zeta-function.

Bibliography: 15 titles.

1. Introduction

Let $s=\sigma+it$ be a complex variable. The Laplace transform $\mathfrak{L}(s,f)$ of a function f is defined by

$$\mathfrak{L}(s,f)=\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

provided that the integral exists for $\sigma>\sigma_0$ with some $\sigma_0\in\mathbb{R}$. It is well known that Laplace transforms are very useful integral transforms having applications in various fields of mathematics and in practice. Analytic number theory is not an exception, here Laplace transforms are applied for the investigation of mean values (moments) of zeta and L-functions. The classical example given in the monograph [15] says that if $f(x)\geq 0$ for $x\in(0,\infty)$, and, for some $m\geq 0$,

$$\int_0^\infty f(x)e^{-\delta x}dx\sim\frac{1}{\delta}\log^m\frac{1}{\delta}$$

as $\delta\longrightarrow 0$, then

$$\int_0^T f(x)dx\sim T\log^m T$$

as $T\longrightarrow\infty$. This has been applied for the moments of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$

$$\int_0^T\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k}dt \tag{1}$$

with $k=1$ and $k=2$ in [15] and [1]. We remind that the function $\zeta(s)$ is defined, for $\sigma>1$, by the series

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m^s},$$

and by analytic continuation elsewhere. We observe that more precise formulae for moments (1) require those for $\mathfrak{L}(s,|\zeta|^{2k})$. In [9], applications of Laplace transforms for mean values of more general Dirichlet series are given. Let $d(m)$ be the number of divisors of m, γ denote the Euler constant, and let

$$\Delta(x)={\sum_{m\leq x}}'d(m)-x(\log x+2\gamma-1)-\frac{1}{4},$$

where "$'$"means that the last term in the sum is to be halved if x is an integer. In [6], an asymptotic formula for the Laplace transform

$$\int_0^\infty\Delta^2(x)e^{-\frac{x}{T}}dx$$

was obtained. In [5], the Laplace transform was applied to give a simple proof for the classical Voronoi identity

$$\Delta(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^\infty d(m)\left(\frac{x}{m}\right)^{1/2}\left(K_1\left(4\pi\sqrt{xm}\right)+\frac{\pi}{2}Y_1\left(4\pi\sqrt{xm}\right)\right),$$

where K_1 and Y_1 are the Bessel functions. A very good survey on applications of the Laplace transforms in the theory of the Riemann zeta-function is given in [7].

We remind one more formula used in [1] and [12] for the investigation of the mean square of $\zeta(s)$ on the critical line $\sigma=\frac{1}{2}$, namely,

$$\mathfrak{L}(s,|\zeta|^2)=ie^{is/2}\left(\gamma-\log 2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-s\right)i\right)+2\pi e^{-is/2}\sum_{m=1}^\infty d(m)e^{-2\pi ime^{-is}}+\lambda(s),$$

where the function $\lambda(s)$ is analytic in the strip $|\sigma| < \pi$. Moreover, in any fixed strip $|\sigma| \leqslant \theta$ with $0 < \theta < \pi$, the estimate

$$\lambda(s) = O((1+|s|)^{-1})$$

is true. In [10], the above formula was extended to the critical strip, i.e., the formula for $\int_0^\infty |\zeta(\varrho + ix)|^2 e^{-sx} dx$ with a fixed $\frac{1}{2} < \varrho < 1$ has been obtained.

Now let χ be a Dirichlet character modulo q, and let $L(s,\chi)$ denote the corresponding Dirichlet L-function defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

If χ is a non-principal character, then $L(s,\chi)$ is analytically continuable to an entire function, while if χ_0 the principal character modulo q, then

$$L(s,\chi_0) = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \zeta(s),$$

where p denotes a prime number, i.e. $L(s,\chi_0)$ can be analytically continued to the whole complex plane, except for a simple pole at the point $s = 1$ with residue

$$\prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Analytic theory of Dirichlet L-functions can be found in [4], [8] and [11]. In [3], the formulae for the Laplace transform

$$\mathfrak{L}\left(s, |L(\chi)|^2\right) = \int_0^\infty \left| L\left(\frac{1}{2} + ix, \chi\right) \right|^2 e^{-sx} dx.$$

were obtained. This note is a continuation of [3], and is devoted to the Lapkace transform

$$\mathfrak{L}_\varrho\left(s, |L(\chi)|^2\right) = \int_0^\infty \left| L\left(\varrho + ix, \chi\right) \right|^2 e^{-sx} dx,$$

where ϱ, $\frac{1}{2} < \varrho < 1$, is a fixed number.

For the statement of the results, we need some notation. Denote by $G(\chi)$ the Gauss sum, i.e.,

$$G(\chi) = \sum_{l=1}^{q} \chi(l) e^{2\pi i l/q}.$$

Let

$$a = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \chi(-1) = 1, \\ 1 & \text{if} \quad \chi(-1) = -1, \end{cases}$$

$$E(\chi) = \begin{cases} \epsilon(\chi) & \text{if} \quad a = 0, \\ \epsilon_1(\chi) & \text{if} \quad a = 1, \end{cases}$$

where

$$\epsilon(\chi) = \frac{G(\chi)}{\sqrt{q}}, \qquad \epsilon_1(\chi) = -\frac{G(\chi)}{\sqrt{q}}.$$

As usual, denote by $\Gamma(s)$ the Euler gamma-function, and by $\mu(m)$ the Möbius function. Moreover,

$$\sigma_\alpha(m) = \sum_{d|m} d^\alpha, \alpha \in \mathbb{C},$$

is the generalized divisor function.

Теорема 1. *Let $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < \pi\}$, ϱ, $\frac{1}{2} < \varrho < 1$, be a fixed number, and χ be a primitive character modulo $q > 1$. Then*

$$\mathfrak{L}_\varrho\left(s, |L(\chi)|^2\right) = \frac{2\pi i^a e^{-is(1-\varrho)}}{E(\chi)\sqrt{q}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\sigma_{2\varrho-1}(m)}{m^{2\varrho-1}} \exp\left\{ -\frac{2\pi i m}{q} e^{-is} \right\} + \lambda_\varrho(s, \chi),$$

where the function λ_ϱ is analytic in the strip $\{s \in \mathbb{C} : |\sigma| < \pi\}$, and, for $|\sigma| \leqslant \theta, 0 < \theta < \pi$, the estimate

$$\lambda_\varrho(s, \chi) = O((1 + |s|)^{-1})$$

is valid.

Теорема 2. *Let $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < \pi\}$, ϱ, $\frac{1}{2} < \varrho < 1$, be a fixed number, and χ_0 be a principal character modulo $q > 1$. Then*

$$\mathfrak{L}_\varrho\left(s, |L(\chi_0)|^2\right) = (2\pi i)^{2\varrho-1} i\Gamma(2-2\varrho)\zeta(2-2\varrho)e^{is(1-\varrho)} \sum_{m|q}\sum_{n|q} \frac{\mu(m)\mu(n)}{nm^{2\varrho-1}}$$
$$+ ie^{is\varrho}\zeta(2\varrho) \sum_{m|q}\sum_{n|q} \frac{\mu(m)\mu(n)}{n^{2\varrho}} + 2\pi e^{-is(1-\varrho)} \sum_{m|q}\sum_{n|q} \frac{\mu(m)\mu(n)}{mn^{2\varrho-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_{2\varrho-1}(k)}{k^{2\varrho-1}}$$
$$\exp\{-2\pi i e^{-is} \frac{nk}{m}\} + \lambda_\varrho(s, \chi_0).$$

where the function $\lambda_\varrho(s, \chi_0)$ has the same properties as $\lambda_\varrho(s, \chi)$ in Theorem 1.

Note that if $q = 1$, then the formula of Theorem 2 implies that of [10].

2. Lemmas

We remind the following results on the functions $L(s, \chi)$ and $\zeta(s)$.

Lemma 1. *If χ is a primitive character modulo q, then*

$$L(1-s, \bar{\chi}) = E^{-1}(\chi)2^{1-s}\pi^{-s}q^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi a}{2} - \frac{\pi s}{2}\right) L(s, \chi).$$

For the proof, see [13].

Lemma 2. *The function $\zeta(s)$ satisfies the functional equation*

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Proof of lemma is given, for example, in [15].

Lemma 3. *For any character χ modulo q, the estimate*

$$L(s, \chi) = O\left((q|t|)^c\right), \sigma \geqslant 1 - c,$$

where $0 < c \leqslant \frac{1}{2}$, and $|t| \geqslant 2$, is valid.

The lemma is Theorem 5.4 from [13].

Lemma 4. *If f is a multiplicative function, then*

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \prod_{p|n} (1 - f(p)).$$

The lemma is Theorem 2.18 in [2].
Now we recall the Mellin formula.

Lemma 5. *Suppose that $c > 0$. Then*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) b^{-s} ds = e^{-b}.$$

Proof of the formula can be found in [14].

Lemma 6. *For $\sigma > \max\{1, \Re(\alpha + 1)\}$,*

$$L(s,\chi)L(s-\alpha,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\sigma_\alpha(m)}{m^s},$$

and

$$\zeta(s)\zeta(s-\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(m)}{m^s}.$$

Proof. For $\sigma > \max\{1, \Re(\alpha + 1)\}$, we have that

$$\begin{aligned} L(s,\chi)L(s-\alpha,\chi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)k^\alpha}{k^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{d|m} \chi(d) d^\alpha \chi\left(\frac{m}{d}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s} \sum_{d|m} d^\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\sigma_\alpha(m)}{m^s}. \end{aligned}$$

The case of the Riemann zeta-function can be found in [15]. □

3. Proof of Theorems

It is sufficient to prove the theorems for a slightly different integrals. Доказательство. [Proof of Theorem 1] Consider the function

$$\begin{aligned} \lambda_\varrho(s,\chi) &= \int\limits_0^\infty \left|L\left(\varrho + ix, \chi\right)\right|^2 e^{-sx} dx \\ &- \frac{e^{-is(1-\varrho)}}{2i^{1-a}} \int\limits_{\varrho-i\infty}^{\varrho+i\infty} \frac{L(z,\chi)L(2\varrho - z, \bar{\chi}) e^{-i(1-2\varrho+z)(\frac{\pi}{2}-s)}}{\cos\left(\frac{\pi a}{2} - \frac{\pi(1-2\varrho+z)}{2}\right)} dz. \end{aligned} \tag{2}$$

Suppose $a = 0$, then we find that

$$\lambda_\varrho(s,\chi)=\int_0^\infty \left|L\left(\varrho+ix,\chi\right)\right|^2 e^{-sx}dx$$

$$-\,e^{-is(1-\varrho)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(\varrho+ix,\chi)L(\varrho-ix,\bar\chi)\exp\{-\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)+\frac{\pi x}{2}+is(1-\varrho)-sx\}}{\exp\{\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)-\frac{\pi x}{2}\}+\exp\{-\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)+\frac{\pi x}{2}\}}dx$$
$$=\int_0^\infty\frac{|L(\varrho+ix,\chi)|^2e^{-sx}\exp\{\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)-\frac{\pi x}{2}\}}{\exp\{\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)-\frac{\pi x}{2}\}+\exp\{-\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)+\frac{\pi x}{2}\}}dx$$
$$-\int_0^\infty\frac{|L(\varrho+ix,\bar\chi)|^2e^{sx}\exp\{-\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)-\frac{\pi x}{2}\}}{\exp\{\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)+\frac{\pi x}{2}\}+\exp\{-\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)-\frac{\pi x}{2}\}}dx. \tag{3}$$

If $a=1$, similarly as above, we find that

$$\lambda_\varrho(s,\chi)=\int_0^\infty\frac{|L(\varrho+ix,\chi)|^2e^{-sx}\exp\{\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)-\frac{\pi x}{2}\}}{\exp\{\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)-\frac{\pi x}{2}\}-\exp\{-\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)+\frac{\pi x}{2}\}}dx$$
$$+\int_0^\infty\frac{|L(\varrho+ix,\bar\chi)|^2e^{sx}\exp\{-\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)-\frac{\pi x}{2}\}}{\exp\{\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)+\frac{\pi x}{2}\}-\exp\{-\frac{\pi i}{2}(1-\varrho)-\frac{\pi x}{2}\}}dx. \tag{4}$$

By estimates for $L\left(s,\chi\right)$ from Lemma 3, both these integrals are uniformly convergent on compact subsets of the strip $\{s\in\mathbb{C}:|\sigma|<\pi\}$, thus, the function $\lambda_\varrho(s,\chi)$ is analytic in this region. Suppose that $|\sigma|\leqslant\theta$, where $0<\theta<\pi$ is fixed. If $|s|$ is small, then the integrals in (3) and(4) are bounded. If $|s|$ is large, then integrating by parts and using the estimate from Lemma 3, we obtain that

$$\lambda_\varrho(s,\chi)=O(|s|^{-1}).$$

So we have that, for $|\sigma|\leqslant\theta$, $0<\theta<\pi$,

$$\lambda_\varrho(s,\chi)=O((1+|s|)^{-1}).$$

From (2), we deduce that

$$\mathfrak{L}_\varrho\left(s,|L(\chi)|^2\right)=\frac{e^{-is(1-\varrho)}}{2i^{1-a}}\int_{\varrho-i\infty}^{\varrho+i\infty}\frac{L(z,\chi)L(2\varrho-z,\bar\chi)e^{-i(1-2\varrho+z)(\frac{\pi}{2}-s)}}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}-\frac{\pi(1-2\varrho+z)}{2}\right)}dz+\lambda_\varrho(s,\chi).$$

Therefore, using Lemma 1, we find that

$$\mathfrak{L}_\varrho\left(s,|L(\chi)|^2\right)=\frac{e^{-is(1-\varrho)}}{2i^{1-a}}\int_{\varrho-i\infty}^{\varrho+i\infty}\frac{L(z,\chi)L(2\varrho-z,\bar\chi)e^{-i(1-2\varrho+z)(\frac{\pi}{2}-s)}}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}-\frac{\pi(1-2\varrho+z)}{2}\right)}dz+\lambda_\varrho(s,\chi)$$

$$= \frac{e^{-is(1-\varrho)}}{E(\chi)\sqrt{q}i^{1-a}} \int\limits_{\varrho-i\infty}^{\varrho+i\infty} L(z,\chi)L(z-2\varrho+1,\chi)\Gamma(1-2\varrho+z)$$
$$\times \exp\left\{-i(1-2\varrho+z)\left(\frac{\pi}{2}-s\right)\right\} \frac{q^{1-2\varrho+z}}{2\pi^{1-2\varrho+z}} dz + \lambda_\varrho(s,\chi)$$
$$= \frac{e^{-is(1-\varrho)}}{E(\chi)\sqrt{q}i^{1-a}} \int\limits_{\varrho-i\infty}^{\varrho+i\infty} L(z,\chi)L(z-2\varrho+1,\chi)\Gamma(1-2\varrho+z)\left(\frac{2\pi i}{q}e^{-is}\right)^{-1+2\varrho-z} dz$$
$$+ \lambda_\varrho(s,\chi). \tag{5}$$

Now we move the line of integration in (5) to the right and use Lemma 5. If χ is a non-principal character, the integrand in (5) is a regular function. Therefore, by Lemma 6,

$$\frac{e^{-is(1-\varrho)}}{E(\chi)\sqrt{q}i^{1-a}} \int\limits_{\varrho-i\infty}^{\varrho+i\infty} L(z,\chi)L(z-2\varrho+1,\chi)\Gamma(1-2\varrho+z)\left(\frac{2\pi i}{q}e^{-is}\right)^{-1+2\varrho-z} dz + \lambda_\varrho(s,\chi)$$
$$= \frac{e^{-is(1-\varrho)}}{E(\chi)\sqrt{q}i^{1-a}} \int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} L(z,\chi)L(z-2\varrho+1,\chi)\Gamma(1-2\varrho+z)\left(\frac{2\pi i}{q}e^{-is}\right)^{-1+2\varrho-z} dz + \lambda_\varrho(s,\chi)$$
$$= \frac{e^{-is(1-\varrho)}}{E(\chi)\sqrt{q}i^{1-a}} \int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(1-2\varrho+z)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)\sigma_{2\varrho-1}(m)}{m^z}\left(\frac{2\pi i}{q}e^{-is}\right)^{-1+2\varrho-z} dz + \lambda_\varrho(s,\chi)$$
$$= \frac{e^{-is(1-\varrho)}}{E(\chi)\sqrt{q}i^{1-a}} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)\sigma_{2\varrho-1}(m)}{m^{2\varrho-1}} \int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(1-2\varrho+z)\left(\frac{2\pi i m}{q}e^{-is}\right)^{-1+2\varrho-z} dz + \lambda_\varrho(s,\chi)$$
$$= \frac{2\pi e^{-is(1-\varrho)}i^a}{E(\chi)\sqrt{q}} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)\sigma_{2\varrho-1}(m)}{m^{2\varrho-1}} \exp\left\{-\frac{2\pi i m}{q}e^{-is}\right\} + \lambda_\varrho(s,\chi).$$

□ This and (5) prove the theorem.

The proof of Theorem 2 is more complicated. Доказательство. [Proof of Theorem 2] Define

$$\lambda_\varrho(s,\chi_0) = \int\limits_0^\infty \left|L(\varrho+ix,\chi_0)\right|^2 e^{-sx}dx$$
$$- \frac{e^{-is(1-\varrho)}}{2i} \int\limits_{\varrho-i\infty}^{\varrho+i\infty} \frac{L(z,\chi_0)L(2\varrho-z,\chi_0)e^{-i(1-2\varrho+z)(\frac{\pi}{2}-s)}}{\cos\frac{\pi}{2}(1-2\varrho+z)} dz.$$

Then

$$\mathfrak{L}_\varrho\left(s,|L(\chi_0)|^2\right) = \int\limits_0^\infty \left|L(\varrho+ix,\chi_0)\right|^2 e^{-sx}dx$$
$$= \frac{e^{-is(1-\varrho)}}{2i} \int\limits_{\varrho-i\infty}^{\varrho+i\infty} \frac{L(z,\chi_0)L(2\varrho-z,\chi_0)e^{-i(1-2\varrho+z)(\frac{\pi}{2}-s)}}{\cos\frac{\pi}{2}(1-2\varrho+z)} dz + \lambda_\varrho(s,\chi_0). \tag{6}$$

Since

$$L(z,\chi_0)=\zeta(z)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^z}\right),$$

Lemma 2 implies

$$\begin{aligned}L(2\varrho-z,\chi_0)&=L(1-(1-2\varrho+z,\chi_0))\\&=2^{2\varrho-z}\pi^{-(1-2\varrho+z)}\cos\frac{\pi}{2}(1-2\varrho+z)\Gamma(1-2\varrho+z)\zeta(1-2\varrho+z)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^{2\varrho-z}}\right).\end{aligned}\tag{7}$$

Hence, in view of (6), we find

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}_\varrho\left(s,|L(\chi_0)|^2\right)\\&=\frac{e^{-is(1-\varrho)}}{i}\int\limits_{\varrho-i\infty}^{\varrho+i\infty}(2\pi)^{-1+2\varrho-z}\zeta(z)\zeta(1-2\varrho+z)\Gamma(1-2\varrho+z)e^{-i(1-2\varrho+z)(\frac{\pi}{2}-s)}\\&\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^{2\varrho-z}}\right)dz+\lambda_\varrho(s,\chi_0).\end{aligned}\tag{8}$$

Using Lemma 4, we write the products in (8) in the form

$$\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^{2\varrho-z}}\right)=\sum_{m|q}\sum_{n|q}\mu(m)\mu(n)\frac{1}{m^{2\varrho}}\left(\frac{m}{n}\right)^z.$$

Therefore,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}_\varrho\left(s,|L(\chi_0)|^2\right)=\frac{e^{-is(1-\varrho)}}{i}\sum_{m|q}\sum_{n|q}\frac{\mu(m)\mu(n)}{mn^{2\varrho-1}}\\&\int\limits_{\varrho-i\infty}^{\varrho+i\infty}\left(2\pi ie^{-is}\frac{n}{m}\right)^{-1+2\varrho-z}\zeta(z)\zeta(1-2\varrho+z)\Gamma(1-2\varrho+z)dz+\lambda_\varrho(s,\chi_0).\end{aligned}\tag{9}$$

Now we move the line of integration in the last integral to the right. The integrand in (9) has simple poles at the points $z=1$ and $z=2\varrho$. Clearly,

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Res}_{z=1}\Gamma(1-2\varrho+z)\zeta(z)\zeta(1-2\varrho+z)\left(2\pi ie^{-is}\frac{n}{m}\right)^{-1+2\varrho-z}\\&=\Gamma(2-2\varrho)\zeta(2-2\varrho)\left(2\pi ie^{-is}\frac{n}{m}\right)^{-2+2\varrho}\end{aligned}\tag{10}$$

and

$$\operatorname*{Res}_{z=2\varrho}\Gamma(1-2\varrho+z)\zeta(z)\zeta(1-2\varrho+z)\left(2\pi ie^{-is}\frac{n}{m}\right)^{-1+2\varrho-z}=\frac{\zeta(2\varrho)e^{is}m}{2\pi in}.\tag{11}$$

Finally, having in mind formulae (10), (11) and Lemma 6, we deduce from (9) that

$$\mathfrak{L}_\varrho\left(s, |L(\chi_0)|^2\right) = (2\pi i)^{2\varrho-1} i\Gamma(2-2\varrho)\zeta(2-2\varrho)e^{is(1-\varrho)} \sum_{m|q}\sum_{n|q} \frac{\mu(m)\mu(n)}{nm^{2\varrho-1}}$$
$$+ ie^{is\varrho}\zeta(2\varrho)\sum_{m|q}\sum_{n|q}\frac{\mu(m)\mu(n)}{n^{2\varrho}} + \frac{e^{-is(1-\varrho)}}{i}\sum_{m|q}\sum_{n|q}\frac{\mu(m)\mu(n)}{mn^{2\varrho-1}}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(2\pi i e^{-is}\frac{n}{m}\right)^{-1+2\varrho-z}$$
$$\times \zeta(z)\zeta(1-2\varrho+z)\Gamma(1-2\varrho+z)dz + \lambda_\varrho(s,\chi_0)$$
$$= (2\pi i)^{2\varrho-1} i\Gamma(2-2\varrho)\zeta(2-2\varrho)e^{is(1-\varrho)} \sum_{m|q}\sum_{n|q} \frac{\mu(m)\mu(n)}{nm^{2\varrho-1}}$$
$$+ ie^{is\varrho}\zeta(2\varrho)\sum_{m|q}\sum_{n|q}\frac{\mu(m)\mu(n)}{n^{2\varrho}} + \frac{e^{-is(1-\varrho)}}{i}\sum_{m|q}\sum_{n|q}\frac{\mu(m)\mu(n)}{mn^{2\varrho-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2\varrho-1}(k)}{k^{2\varrho-1}}$$
$$\times \int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Gamma(1-2\varrho+z)\left(2\pi i e^{-is}\frac{n}{m}k\right)^{-1+2\varrho-z} dz + \lambda_\varrho(s,\chi_0)$$
$$= (2\pi i)^{2\varrho-1} i\Gamma(2-2\varrho)\zeta(2-2\varrho)e^{is(1-\varrho)} \sum_{m|q}\sum_{n|q} \frac{\mu(m)\mu(n)}{nm^{2\varrho-1}}$$
$$+ ie^{is\varrho}\zeta(2\varrho)\sum_{m|q}\sum_{n|q}\frac{\mu(m)\mu(n)}{n^{2\varrho}} + \frac{e^{-is(1-\varrho)}}{i}\sum_{m|q}\sum_{n|q}\frac{\mu(m)\mu(n)}{mn^{2\varrho-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2\varrho-1}(k)}{k^{2\varrho-1}}$$
$$\times \exp\{-2\pi i e^{-is}\frac{nk}{m}\} + \lambda_\varrho(s,\chi_0).$$

□ The theorem is proved.

4. Conlusions

In the paper, it is obtained that the Laplace transform

$$\int_0^\infty \left|L\left(\varrho + ix, \chi\right)\right|^2 e^{-sx}dx$$

with a fixed ρ, $\frac{1}{2} < \rho < 1$, can be expressed by elementary functions including the generalized divisor function

$$\sum_{d|m} d^{2\rho-1}.$$

The formulae obtained have a different form for a primitive character and the principal character, and can be applied for the investigation of Mellin transforms of $\left|L\left(\varrho+ix,\chi\right)\right|^2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Atkinson A.A., The mean value of the zeta-function on the critical line // Quart. J. Math. Oxford. 1939. Vol. 10.P. 122-128.

2. Apostol T.M., Introduction to Analytic Number Theory, Springer, Berlin, 1976.

3. Balčiūnas A., Laurinčikas A. The Laplace transform of Dirichlet L-functions // Nonlinear Anal. Model. Control. 2012. Vol. 17. P.127-138.

4. Воронин А.А., Карацуба А.А., Дзета- функция Римана. Москва: Физматлит, 1994.
5. Ivič A., The Voronoi identity via the Laplace transform // Ramanujan J. 1988 Vol.2. P.39-45.
6. Ivič A., The Laplace transform of the square in the circle an divisor problems // Studia Sci. Math-Hung.1996. Vol.32. P.181-205.
7. Ivič A., The Laplace and Mellin transforms of powers of the Riemann zeta-function // Int. J. Math. Anal.2006. Vol.1-2 P.113-140.
8. Iwaniec H., Kowalski E., Analytic number theory Amer. Math. Soc., Colloq. Publ. Vol.53, 2004.
9. Jutila M., Mean values of Dirichlet series via Laplace transform, in Analytic number theory // London Math. Soc. Lecture Note, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. Vol. 247 P. 169-207.
10. Kačinskaitė R., Laurinčikas A., The Laplace transform of the Riemann zeta-function in the critical strip // Integral Transf. Spec. Funct. 2009. Vol.20 P. 643-648.
11. Карацуба А.А., Основы аналитической теории чисел. Москва: Наука 1983.
12. Lukkarinen M., The Mellin transform of the square of Riemann's zeta-function and Atkinson's formula Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss., Suomalainen Tiedeakatemia, Helsinki, 2005. Vol.140.
13. Prachar K., Primzahlverteilung. Götingen, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1957.
14. Titchmarsh E.C., Theory of Functions. Oxford University Press, Oxford, 1939.
15. Titchmarsh E.C., The Theory of the Riemann Zeta- Function 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Clarendon Press, Oxford, 1986.

REFERENCES

1. Atkinson A.A., The mean value of the zeta-function on the critical line // Quart. J. Math. Oxford. 1939. Vol. 10.P. 122-128.
2. Apostol T.M., Introduction to Analytic Number Theory, Springer, Berlin, 1976.
3. Balčiūnas A., Laurinčikas A. The Laplace transform of Dirichlet L-functions // Nonlinear Anal. Model. Control. 2012. Vol. 17. P.127-138.
4. Воронин А.А., Карацуба А.А., Дзета- функция Римана. Москва: Физматлит, 1994.
5. Ivič A., The Voronoi identity via the Laplace transform // Ramanujan J. 1988 Vol.2. P.39-45.
6. Ivič A., The Laplace transform of the square in the circle an divisor problems // Studia Sci. Math-Hung.1996. Vol.32. P.181-205.
7. Ivič A., The Laplace and Mellin transforms of powers of the Riemann zeta-function // Int. J. Math. Anal.2006. Vol.1-2 P.113-140.
8. Iwaniec H., Kowalski E., Analytic number theory Amer. Math. Soc., Colloq. Publ. Vol.53, 2004.
9. Jutila M., Mean values of Dirichlet series via Laplace transform, in Analytic number theory // London Math. Soc. Lecture Note, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. Vol. 247 P. 169-207.

10. Kačinskaitė R., Laurinčikas A., The Laplace transform of the Riemann zeta-function in the critical strip // Integral Transf. Spec. Funct. 2009. Vol.20 P. 643-648.

11. Карацуба А.А., Основы аналитической теории чисел. Москва: Наука 1983.

12. Lukkarinen M., The Mellin transform of the square of Riemann's zeta-function and Atkinson's formula Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss., Suomalainen Tiedeakatemia, Helsinki, 2005. Vol.140.

13. Prachar K., Primzahlverteilung. Götingen, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1957.

14. Titchmarsh E.C., Theory of Functions. Oxford University Press, Oxford, 1939.

15. Titchmarsh E.C., The Theory of the Riemann Zeta- Function 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Clarendon Press, Oxford, 1986.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.35, 517.15 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105

АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ БИТТИ

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин (г. Москва)

Аннотация

Последовательностями Битти в англоязычной литературе называют последовательности вида $[\alpha n]$ и, более общо, $[\alpha n+\beta]$, где α — некоторое положительное иррациональное число и β — некоторое вещественное число (если $\beta = 0$, то последовательность называется однородной, в противном случае — неоднородной). В отечественной литературе такие последовательности обычно называются антье-последовательностями специального вида или обобщёнными арифметическими прогрессиями. Изучение свойств этих последовательностей, начатое ещё в конце XIX века, активно продолжается и в наши дни. Настоящая статья содержит обзор основных направлений исследований последовательностей Битти с указанием ключевых результатов.

Исследование распределения простых чисел в последовательностях Битти, начатое в 1970-х годах, было продолжено в 2000-х, когда благодаря привлечению новых методов, удалось получить уточнения остаточных членов в асимптотических формулах. Широкий круг задач связан с суммами значений арифметических функций на последовательностях Битти. Рядом авторов получены асимптотические формулы для суммы значений функции делителей $\tau(n)$ и многомерной функции делителей $\tau_k(n)$, функции суммы делителей $\sigma(n)$, функции Эйлера $\varphi(n)$, характеров Дирихле, числа простых делителей $\omega(n)$. Помимо того, получен ряд результатов в задачах о квадратичных вычетах и невычетах в последовательностях Битти. С 1990-х годов актуальным направлением исследований стали аддитивные задачи, связанные с последовательностями Битти. Изучаются аналоги классических проблем гольдбахова типа, в которых простые числа принадлежат последовательностям Битти, а также иные задачи о представлении натуральных чисел в виде суммы, часть слагаемых которой является членами такой последовательности.

Ключевые слова: последовательность Битти, антье-последовательность, простые числа, среднее значение арифметической функции, суммы.

Библиография: 38 названий.

TOPICAL PROBLEMS CONCERNING BEATTY SEQUENCES

A. V. Begunts, D. V. Goryashin (Moscow)

Abstract

In English-language literature, Beatty sequence means a sequence of the form $[\alpha n]$ and, more generally, $[\alpha n+\beta]$, where α is a positive irrational number, β is a real number (if $\beta = 0$, then the sequence is called homogeneous, otherwise it is called non-homogeneous). In Russian literature, such sequences are usually referred to as greatest-integer sequences of a special form, or as generalized arithmetic progressions. The properties of these sequences have been under extensive study ever since late 19th century and up to nowadays. This paper contains a review of main directions in Beatty sequences research, and points out some key results.

The investigation of the distribution of prime numbers in Beatty sequences, once started in 1970s, was continued in 2000s, when due to application of new methods it became possible to improve estimates of remainder terms in asymptotic formulas. A wide range of tasks deal with sums of the values of arithmetical functions over Beatty sequences. Various authors obtained asymptotic formulas for sums of the values of divisor function $\tau(n)$ and multidimensional divisor function $\tau_k(n)$, of divisor-summing function $\sigma(n)$, of Euler function $\varphi(n)$, of Dirichlet characters, of prime divisor counting function $\omega(n)$. Besides that, there appeared various results concerning quadratic residues and nonresidues in Beatty sequences. Since 1990s additive tasks associated with Beatty sequences became a topical direction of study. Some analogues of classical Goldbach-type problems, where primes belong to Beatty sequences, are under research, along with tasks of representation of integers as a sum, a part of summands of which are members of such a sequence.

Keywords: Beatty sequences, integer sequence, prime numbers, mean value of a number-theoretic function, sums.

Bibliography: 38 titles.

Введение

Наряду с обычными арифметическими прогрессиями в последнее время активно изучаются свойства обобщённых арифметических прогрессий — антье-последовательностей вида $[\alpha n]$ и, более общо, $[\alpha n+\beta]$, где α — некоторое иррациональное число (аналог разности прогрессии), β — некоторое вещественное число (если $\beta=0$, то последовательность называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*). В англоязычной литературе последовательность чисел такого вида называют «Beatty sequence» по имени американского математика Сэмюэла Битти (Samuel Beatty), предложившего в 1926 г. в журнале American Mathematical Monthly [1] задачу о следующем свойстве таких последовательностей: если $\alpha,\beta>1$ — иррациональные числа и $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, то каждое натуральное число принадлежит ровно одной из последовательностей $[\alpha n]$ и $[\beta n]$, т. е. $\mathbb{N}=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}[\alpha n]\sqcup\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}[\beta n]$. За рубежом это утверждение часто называют не только теоремой Битти, но и теоремой Рейли, так как оно сформулировано в опубликованной в 1894 г. книге Дж. У. Стратта (барона Рейли) [2].

Для некоторых частных иррациональных значений α последовательности Битти $[\alpha n]$ были глубоко исследованы и оказались связанными с различными разделами математики, например, последовательность Битти для $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ называется последовательностью Витхоффа и нашла применение в теории игр [3]. Активное исследование последовательностей Битти и их свойств продолжается и в наши дни, при этом отдельно выделяется класс *медленных* последовательностей Битти, для которых $0<\alpha<1$ (см., например, [4]).

1. Простые числа в последовательности Битти

В 1975 г. Д. Лейтман и Д. Вольке [5] рассмотрели задачу о распределении простых чисел в последовательности Битти. Они установили, что если $\pi(N)$ — количество всех простых чисел, не превосходящих N, а $\pi(N,\alpha)$ — количество тех из них, которые принадлежат последовательности $[\alpha n]$, то для почти всех значений $\alpha>0$ при $N\to\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\pi(N,\alpha)=\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p=[\alpha n],n\in\mathbb{N}}}1=\frac{\pi(N)}{\alpha}+O(N^{7/8+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon>0$ произвольно. Таким образом, среди чисел вида $[\alpha n]$, $n\in\mathbb{N}$, содержится «правильная» доля всех простых чисел.

Отметим также, что для случая иррациональных алгебраических значений α Д. Лейтман и Д. Вольке получили асимптотическую формулу

$$\pi(N,\alpha) = \frac{\pi(N)}{\alpha} + O(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}),$$

где $c = c(\alpha) > 0$ — некоторая постоянная.

Отечественные исследования по этой тематике инициировали профессора Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков, поставившие своим ученикам ряд задач, связанных с изучением различных свойств анте-последовательностей. А. В. Бегунц [6, 7] получил новые оценки остаточного члена в асимптотических формулах для $\pi(N,\alpha)$. Его основной результат формулируется следующим образом. Пусть $\alpha > 0$ — иррациональное число, $\nu \geqslant 2$, и пусть неравенство

$$\left|\frac{1}{\alpha} - \frac{a}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^{\nu}}$$

имеет место для любых достаточно больших значений q и всех чисел a, взаимно простых с q. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\pi(N,\alpha) = \frac{\pi(N)}{\alpha} + O(N^{\varkappa+\varepsilon}),$$

где $\varkappa = \max(1 - \frac{1}{2\nu}; 0{,}8)$, а $\varepsilon > 0$ произвольно. В частности, оценка остаточного члена в этой формуле вида $O(N^{0{,}8+\varepsilon})$ верна в двух следующих случаях: а) если иррациональное число α имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим; б) для почти всех вещественных значений $\alpha > 0$.

В 2009 г. В. Д. Бэнкс и И. Е. Шпарлинский [8] рассматривали задачу о простых числах более общего вида $p = q[\alpha n + \beta] + a$, где q и a — фиксированные натуральные числа, а также о простых числах в последовательности Битти $[\alpha n + \beta]$, принадлежащих заданной арифметической прогрессии. Дальнейшее обобщение этой задачи в 2016 г. предложил М. Мкауар [9], рассмотрев задачу о простых числах вида $p = [\alpha n + \beta]$ с дополнительным ограничением вида $f(p) \equiv a \pmod b$, где f — сильно q-аддитивная функция (например, число цифр в q-ичной системе счисления).

В 2016 г. Й. Стединг и М. Текнау [10] доказали аналог теоремы Линника о наименьшем простом числе в арифметической прогрессии для последовательности Битти $[\alpha n + \beta]$, где $\alpha > 1$ иррационально.

2. Суммы значений арифметических функций на последовательности Битти

Распределение значений других арифметических функций на числах вида $[\alpha n]$ изучалось многими авторами, при этом основные результаты можно условно разделить на три направления:

— результаты, связанные с показателем иррациональности числа α, в частности, справедливые для алгебраических чисел или чисел с ограниченными неполными частными;

— результаты, справедливые для для почти всех вещественных значений $\alpha > 0$;

— результаты, общие для широкого класса арифметических функций на данном классе последовательностей Битти.

Исследованы суммы значений функции делителей $\tau(n)$ (А. Г. Аберкромби [11], А. В. Бегунц [12], Ж. С. Лю и В. Г. Жай [13]) и многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ (В. Г. Жай [14]), функции суммы делителей $\sigma(n)$ и функции Эйлера $\varphi(n)$ (А. В. Бегунц [15]), характеров Дирихле, числа простых делителей $\omega(n)$ (В. Д. Бэнкс и И. Е. Шпарлинский [16, 17, 18]).

Для всех перечисленных арифметических функций доказываются результаты вида

$$\sum_{n\leqslant N} f([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N} f(m) + R(N), \tag{1}$$

где $R(N)$ — остаточный член. Оценка величины $R(N)$, как правило, сводится к оценке тригонометрических сумм вида

$$\sum_{n\leqslant N} f(n)e^{2\pi i\alpha n}, \quad \sum_{m\leqslant M}\left|\sum_{n\leqslant N} f(n)e^{2\pi i\alpha mn}\right|. \tag{2}$$

В 2009 г. А. Г. Аберкромби, В. Д. Бэнкс и И. Е. Шпарлинский [19], применяя несколько другой подход, доказали асимптотическую формулу вида (1) для произвольной арифметической функции $f(n)$ и для почти всех значений $\alpha > 1$ со следующей оценкой остаточного члена:

$$R(N) \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}M(f,N),$$

где $M(f,N) = 1 + \max\{|f(n)|, n \leqslant N\}$. Отметим, что методы этой работы неприменимы для случая каких-либо конкретных иррациональных значений α (например, алгебраических).

В 2008 г. А. М. Гулоглу и К. В. Неванс [20], опираясь на оценку тригонометрических сумм вида (2) с мультипликативными коэффициентами $f(n)$, полученную Х. Монтгомери и Р. Воном [21], доказали следующую теорему: если $\alpha > 1$ — иррациональное число конечного типа[1], β — вещественное число и $f(n)$ — такая мультипликативная функция, что $|f(p)| \leqslant A$ для всех простых чисел p и $\sum\limits_{n\leqslant N} |f(n)|^2 \leqslant A^2N$ для всех натуральных N, где $A \geqslant 1$ — некоторая постоянная, то

$$\sum_{[\alpha n+\beta]\leqslant N} f([\alpha n+\beta]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n\leqslant N} f(n) + O\left(\frac{N\ln\ln N}{\ln N}\right). \tag{3}$$

Условиям этой теоремы удовлетворяют, например, характеристические функции чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, бесквадратных чисел и чисел, свободных от k-х степеней, а также функция $\frac{r_4(n)}{n}$, где $r_4(n)$ — количество представлений n в виде суммы четырех квадратов.

В 2013 г. Д.В. Горяшин рассмотрел двойственные задачи о распределении точных квадратов [22] и бесквадратных чисел [23] в последовательности Битти и получил асимптотические формулы с оценкой остатков (в частности, для случая бесквадратных чисел в формуле (3) получена более точная оценка остатка вида $O(N^{\frac{5}{6}+\varepsilon})$, если α — иррациональное алгебраическое число); им также доказано, что бесквадратные числа с чётным и нечётным числом простых делителей распределены в последовательности $[\alpha n]$ асимптотически поровну.

Ряд авторов рассматривали задачи о квадратичных вычетах и невычетах, а также первообразных корнях по заданному модулю в последовательности Битти (С. Н. Преображенский [24, 25, 26], М. З. Гараев [27], В. Д. Бэнкс и И. Е. Шпарлинский [16, 17]).

В 2008 г. В. Д. Бэнкс, М. З. Гараев, Д. Р. Хис-Браун и И. Е. Шпарлинский в совместной работе [28] доказали следующий результат: если α иррационально, то наименьший квадратичный невычет по модулю p в последовательности Битти $[\alpha n+\beta]$ не превосходит $p^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\varepsilon}$ для всех достаточно больших простых чисел p. Эта оценка соответствует известной границе Берджесса для наименьшего квадратичного невычета, являющейся наилучшей до сих пор.

[1]Числами конечного типа являются почти все вещественные числа, а также все алгебраические числа.

3. Аддитивные задачи, связанные с последовательностями Битти

В 1997 г. Г. И. Архипов, К. Буриев и В. Н. Чубариков [29] рассмотрели особое множество в бинарной проблеме гольдбахова типа — о представлении натурального числа N в виде $p_1 + [\alpha p_2]$, где p_1, p_2 — простые числа. Для его мощности они получили следующую оценку: если α — алгебраическое число, то $|E(N,\alpha)| \ll N^{\frac{7}{9}+\varepsilon}$. В 2000 г. Й. Брюдерн [30] показал, что из работы [31] вытекает оценка $|E(N,\alpha)| \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, и рассмотрел более общую задачу о представлении числа N в виде $[\lambda_1 p_1] + [\lambda_2 p_2]$, где p_1, p_2 — простые числа. Для особого множества в этой задаче он получил оценку $|E(N,\lambda_1,\lambda_2)| \ll N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, если $\lambda_1, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — алгебраические числа, причём $1, \lambda_1, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$. В 2002 г. Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков [32] при одном лишь условии, что $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — иррациональное алгебраическое число, получили более сильную оценку: $|E(N,\lambda_1,\lambda_2)| \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$. Существенную роль в её доказательстве играет лемма о мере множества «больших дуг» в разбиении Фарея (ее полное доказательство опубликовано в статье Г. И. Архипова и В. Н. Чубарикова [33]; см. также [31, лемма 4]).

В 1999 г. С. Ю. Фаткина [34] рассмотрела видоизмененную тернарную проблему Гольдбаха о числе представлений натурального числа N в виде $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$, где p_1, p_2, p_3 — простые числа, с почти равными слагаемыми, т. е. с условиями $\frac{N}{3} - U < p_1 < \frac{N}{3} + U$, $\frac{N}{3} - U < p_2 < \frac{N}{3} + U$, $\frac{N}{3} - U < [\sqrt{2}p_3] < \frac{N}{3} + U$. Пользуясь методами работ Г. И. Архипова, К. Буриева и В. Н. Чубарикова, при $U = N^{\frac{5}{8}} \ln^c N$ (c — некоторая константа) она доказала следующую асимптотическую формулу для количества таких представлений:

$$I(N,U,\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{U^2}{\ln^3 N} + O\left(\frac{U^2}{\ln^4 N}\right).$$

В. Д. Бэнкс, А. М. Гулоглу и К. В. Неванс [35] рассматривали задачу о представлении достаточно больших натуральных чисел в виде $N = p_1 + p_2 + \ldots + p_\nu$, где $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ — простые числа из последовательности $[\alpha n + \beta]$, $\nu \geqslant 3$, α — иррациональное число, $1 < \alpha < \nu$. А. Кумчев [36] обобщил их результаты на случай, когда каждое из простых чисел p_i принадлежит своей последовательности вида $[\alpha_i n + \beta_i]$, где хотя бы одно из отношений α_i/α_j иррационально, $1 \leqslant i, j \leqslant \nu$.

В работах [37, 38] Д. В. Горяшин получил асимптотические формулы со степенным понижением для количеств разбиений натурального числа N на одно и два бесквадратных слагаемых и слагаемое вида $[\alpha q]$, где q также бесквадратное, т. е. для количества представлений числа N в виде $q_1 + [\alpha q_2] = N$, и в виде $q_1 + q_2 + [\alpha q_3] = N$, соответственно, где q_1, q_2, q_3 — бесквадратные числа, $\alpha > 1$ — фиксированное иррациональное алгебраическое число.

Заключение

Обилие и разнообразие полученных в последнее время результатов свидетельствуют о том, что исследования, связанные с последовательностями Битти, по-прежнему актуальны. Можно ожидать, что применение новых методов позволить не только решить вновь поставленные задачи, но и улучшить результаты, достигнутые ранее.

В заключение авторы приносят благодарность своему научному руководителю профессору В. Н. Чубарикову, познакомившему их с этой тематикой, за полезные обсуждения при подготовке статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beatty S. Problem 3173 // Amer. Math. Monthly. 1926. Vol. 33, №3. P. 159.
2. Strutt J. W., 3rd Baron Rayleigh. The Theory of Sound. 1 (Second ed.). Macmillan. 1894. P. 123.
3. Wythoff, W. A. A modification of the game of nim // Nieuw Archief voor WisKunde. 1907. Vol. 7, №2. P. 199-202.
4. Kimberling C. and Stolarsky K. B. Slow Beatty sequences, devious convergence, and partitional divergence. // Amer. Math. Monthly. 2016. Vol. 123, №2. P. 267-273.
5. Leitman D., Wolke D. Primzahlen der Gestalt $[f(n)]$ // Math. Z. 1975. Vol. 45. P. 81-92.
6. Бегунц А. В. О простых числах в одной антье-последовательности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. №2. С. 71-74.
7. Бегунц А. В. О простых числах в антье-последовательности специального вида // Чебышевский сборник. 2006, Т. 7, №1. С. 163-171.
8. Banks W. D., Shparlinski I. E. Prime numbers with Beatty sequences // Colloq. Math. 2009. Vol. 115, №1. P. 9-16.
9. Mkaouar M. Beatty sequences and prime numbers with restrictions on strongly q-additive functions // Periodica Mathematica Hungarica. 2016. Vol. 72, №2. P. 139-150.
10. Steuding J., Technau M. The Least Prime Number in a Beatty Sequence // J. Number Theory. 2016. Vol. 169. P. 144-159.
11. Abercrombie A. G. Beatty sequences and multiplicative number theory // Acta Arith. 1995. Vol. 70. P. 195-207.
12. Бегунц А. В. Об одном аналоге проблемы делителей Дирихле // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. №6. P. 52-56.
13. Lü G. S., Zhai W. G. The divisor problem for the Beatty sequences // Acta Math. Sinica. 2004. Vol. 47. P. 1213-1216.
14. Zhai W. G. A note on a result of Abercrombie // Chinese Sci. Bull. 1997. Vol. 42. P. 1151-1154.
15. Бегунц А. В. О распределении значений сумм мультипликативных функций на обобщенных арифметических прогрессиях // Чебышевский сборник. 2005, Т. 6, №2. С. 52-74.
16. Banks W. D., Shparlinski I. E. Non-residues and primitive roots in Beatty sequences // Bull. Austral. Math. Soc. 2006. Vol. 73. P. 433-443.
17. Banks W. D., Shparlinski I. E. Short character sums with Beatty sequences // Math. Res. Lett. 2006. Vol. 13. P. 539-547.
18. Banks W. D., Shparlinski I. E. Prime divisors in Beatty sequences // J. Number Theory. 2007. Vol. 123, №2. P. 413-425.
19. Abercrombie A. G., Banks W. D., Shparlinski I. E. Arithmetic functions on Beatty sequences // Acta Arith. 2009. Vol. 136. №1. P. 81-89.

20. Güloğlu A. M., Nevans C. W. Sums of multiplicative functions over a Beatty sequence // Bull. Austral. Math. Soc. 2008. Vol. 78. P. 327-334.

21. Montgomery H. L., Vaughan R. C. Exponential sums with multiplicative coefficients // Invent. Math. 1977. Vol. 43 №1. P. 69-82.

22. Горяшин Д. В. Точные квадраты вида $[\alpha n]$ // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14. №2. С. 68-73.

23. Горяшин Д. В. Бесквадратные числа в последовательности $[\alpha n]$ // Чебышевский сборник. 2013, Т. 14. №3. С. 60-66.

24. Преображенский С. Н. О наименьшем квадратичном невычете в арифметической последовательности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2001. №1. С. 54-56.

25. Преображенский С. Н. О степенных невычетах по простому модулю в специальной антье-последовательности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2001. №4. С. 59-60.

26. Преображенский С. Н. О наименьшем степенном невычете в антье-последовательности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2004. №1. С. 48-49.

27. Garaev M. Z. A note on the least quadratic non-residue of the integer sequences // Bull. Austral. Math. Soc. 2003. Vol. 68. P. 1-11.

28. Banks W. D., Garaev M. Z., Heath-Brown D. R., Shparlinski I. E. Density of non-residues in Burgess-type intervals and applications // Bull. London Math. Soc. 2008. Vol. 40. P. 88-96.

29. Архипов Г. И., Буриев К., Чубариков В. Н. О мощности особого множества в бинарных аддитивных задачах с простыми числами // Труды МИАН. 1997. Т. 218. С. 28-57.

30. Brüdern J. Some additive problems of Goldbach's type // Funct. et Approx. Comment. Math. 2000. Vol. 28. P. 45-73.

31. Brüdern J., Cook R.J., Perelli A. The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments // Sieve Methods, Exponential Sums and Their Applications in Number Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1997. P. 87-100.

32. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об исключительном множестве в бинарной проблеме гольдбахова типа // Докл. АН. 2002. Т. 387. №3. С. 295-296.

33. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. О мере «больших дуг» в разбиении Фарея // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, №4. С. 35-38.

34. Фаткина С. Ю. О представлении натурального числа суммой трех почти равных слагаемых, порожденных простыми числами // УМН. 2000. Т. 55, №1. С. 197-198.

35. Banks W., Güloğlu A. M., Nevans C. W. Representations of integers as sums of primes from a Beatty sequence // Acta Arith. 2007. Vol. 130. P. 255-275.

36. Kumchev A. V. On sums of primes from Beatty sequences // Integers. 2008. Vol. 8. P. 1-12.

37. Горяшин Д. В. Об одной аддитивной задаче с бесквадратными числами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013, Т. 13. №4. С. 41-47.

38. Горяшин Д. В. Бинарная аддитивная задача с бесквадратными числами // Ученые записки Орловского гос. ун-та. 2013. №6 (56). С. 38-41.

REFERENCES

1. Beatty, S. 1926, “Problem 3173“, *Amer. Math. Monthly*, vol. 33, no. 3, p. 159.
2. Strutt, J. W., 3rd Baron Rayleigh. 1894, *The Theory of Sound*. 1 (Second ed.), Macmillan, London, p. 123.
3. Wythoff, W. A. 1907, “A modification of the game of nim“, *Nieuw Archief voor WisKunde*, vol. 7, no. 2, pp. 199-202.
4. Kimberling, C., Stolarsky, K. B. 2016, “Slow Beatty sequences, devious convergence, and partitional divergence“, *Amer. Math. Monthly*, vol. 123, no. 2, pp. 267-273.
5. Leitman, D., Wolke, D. 1975, “Primzahlen der Gestalt $[f(n)]$“, *Math. Z.*, vol. 45, pp. 81-92.
6. Begunts, A. V. 2004, “On prime numbers in an integer sequence“, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 59, no. 2, pp. 60–63.
7. Begunts, A. V. 2006, “On prime numbers in a greatest-integer sequence of a special form“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 7, no. 1, pp. 163-171. (Russian)
8. Banks, W. D., Shparlinski, I. E. 2009, “Prime numbers with Beatty sequences“, *Colloq. Math.*, vol. 115, no. 1, pp. 9-16.
9. Mkaouar, M. 2016, “Beatty sequences and prime numbers with restrictions on strongly q-additive functions“, *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 72, no. 2, pp. 139-150.
10. Steuding, J., Technau, M. 2016, “The Least Prime Number in a Beatty Sequence“, *J. Number Theory*, vol. 169, pp. 144-159.
11. Abercrombie, A. G. 1995, “Beatty sequences and multiplicative number theory“, *Acta Arith.*, vol. 70, pp. 195-207.
12. Begunts, A. V. 2004, “On an analogue of the dirichlet divisor problem“, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 59, no. 6, pp. 37–41.
13. Lü, G. S., Zhai, W. G. 2004, “The divisor problem for the Beatty sequences“, *Acta Math. Sinica*, vol. 47, pp. 1213-1216.
14. Zhai, W. G. 1997, “A note on a result of Abercrombie“, *Chinese Sci. Bull.*, vol. 42, pp. 1151-1154.
15. Begunts, A. V. 2005, “On the distribution of the values of sums of multiplicative functions on generalized arithmetic progressions“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 6, no. 2, pp. 52-74.
16. Banks, W. D., Shparlinski, I. E. 2006, “Non-residues and primitive roots in Beatty sequences“, *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 73, pp. 433-443.
17. Banks, W. D., Shparlinski, I. E. 2006, “Short character sums with Beatty sequences“, *Math. Res. Lett.*, vol. 13, pp. 539-547.
18. Banks, W. D., Shparlinski, I. E. 2007, “Prime divisors in Beatty sequences“, *J. Number Theory*, vol. 123, no. 2, pp. 413-425.
19. Abercrombie, A. G., Banks, W. D., Shparlinski, I. E. 2009, “Arithmetic functions on Beatty sequences“, *Acta Arith.*, vol. 136. no. 1, pp. 81-89.

20. Güloğlu, A. M., Nevans, C. W. 2008, “Sums of multiplicative functions over a Beatty sequence“, *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 78, pp. 327-334.

21. Montgomery, H. L., Vaughan, R. C. 1977, “Exponential sums with multiplicative coefficients“, *Invent. Math.*, vol. 43, no. 1, pp. 69-82.

22. Goryashin, D.V. 2013, “Perfect squares of the form $[\alpha n]$“. *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 14. no. 2, pp. 68-73. (Russian)

23. Goryashin, D.V. 2013, “Squarefree numbers in the sequence $[\alpha n]$“, *Chebyshevskii Sbornik*, 2013, vol. 14. no. 3, pp. 60-66. (Russian)

24. Preobrazhenskii, S. N. 2001, “On the least quadratic non-residue in an arithmetic sequence“, *Moscow Univ. Math. Bull.*, no. 56, pp. 44-46.

25. Preobrazhenskii, S. N. 2001, “On power non-residues modulo a prime number in a special integer sequence“, *Moscow Univ. Math. Bull.*, no. 56, pp. 41-42.

26. Preobrazhenskii, S. N. 2004, “On the least power non-residue in an integer sequence“, *Moscow Univ. Math. Bull.*, no. 59, pp. 33-35.

27. Garaev, M. Z. 2003, “A note on the least quadratic non-residue of the integer sequences“, *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 68, pp. 1-11.

28. Banks, W. D., Garaev, M. Z., Heath-Brown, D. R. & Shparlinski, I. E. 2008, “Density of non-residues in Burgess-type intervals and applications“, *Bull. London Math. Soc.*, vol. 40, pp. 88-96.

29. Arkhipov, G. I., Buriev, K., Chubarikov, V. N. 1997, “On the power of a singular set in binary additive problems with prime numbers”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 218, pp. 23-52.

30. Brüdern, J. 2000, “Some additive problems of Goldbach’s type“, *Funct. et Approx. Comment. Math.*, vol. 28, pp. 45-73.

31. Brüdern, J., Cook, R. J. & Perelli, A. 1997, “The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments“, *Sieve Methods, Exponential Sums and Their Applications in Number Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 87-100.

32. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N. 2002, “The exceptional set in a Goldbach–type binary problem”, *Doklady Mathematics*, vol. 66, no. 3, pp. 338–339.

33. Arkhipov, G. I., Chubarikov V. N. 2011. “On the measure of “large arcs” in the Farey partition”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 12, no. 4, pp. 39-42. (Russian)

34. Fatkina, S.Yu. 2000, “On the representation of a natural number as a sum of three almost equal terms generated by primes”, *Russian Math. Surveys*, vol. 55, no. 1, pp. 171–172.

35. Banks, W., Güloğlu, A. M. & Nevans, C. W. 2007, “Representations of integers as sums of primes from a Beatty sequence“, *Acta Arith.*, vol. 130, pp. 255-275.

36. Kumchev, A. V. 2008, “On sums of primes from Beatty sequences“, *Integers*, vol. 8, pp. 1-12.

37. Goryashin, D. V. 2013, “On an additive problem with squarefree numbers”, *Izv. Sarat. Univ. (N.S.), Ser. Mat. Mekh. Inform.*, vol. 13, no. 4(2), pp. 41-47. (Russian)

38. Goryashin D. V., 2013. “Binary additive problem with squarefree numbers”, *Sci. Notes Orel State Univ.*, 2013. vol. 6, no. 56, pp. 38-41. (Russian)

Механико-математический факультет
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-106-114

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА КОРОТКИХ ОТРЕЗКАХ

В.И. Берник (г. Минск), Н.В. Бударина (г. Москва), А.В. Луневич (г. Минск), Х. О'Доннел (г. Йорк)

Аннотация

В работе получены оценки сверху и снизу количества нулей функций специального вида, а также оценка меры множества точек в которых такие фукции принимают малые значения. Пусть $f_1(x), \ ..., \ f_n(x)$ функции определенные на интервале $I, \ n+1$ раз дифференцируемы и вронскиан из производных почти везде на I отличен от 0. Такие функции называются невырожденными. Задача о распределении нулей функции $F(x) = a_n f_n(x) + \ ... \ + a_1 f_1(x) + a_0, \ a_j \in Z, \ 1 \le j \le n$ имеет важное значение в метрической теории диофантовых приближений.

Пусть $Q > 1$ достаточно большое целое число, а интервал I имеет длину $Q^{-\gamma}, \ 0 \le \gamma < 1$. В работе получены оценки сверху и снизу для количества нулей функции $F(x)$ на интервале I, при $|a_j| \le Q, \ 0 \le \gamma < 1$. При $\gamma = 0$ такие оценкибыли получены А. С. Пяртли, В. Г. Спринджуком, В. И. Берником, В. В. Бересневичем, Н. В. Бударинoй.

Ключевые слова: невырожденные функции, нули невырожденных функций.

Библиография: 22 названия.

DISTRIBUTION OF ZEROS OF NONDEGENERATE FUNCTIONS ON SHORT CUTTINGS

V. I. Bernik (Minsk), N.V. Budarina (Moscow), A.V. Lunevich (Minsk), H. O'Donnel (York)

Abstract

The paper presents newly obtained upper and lower bounds for the number of zeros for functions of a special type, as well as an estimate for the measure of the set where these functions attain small values. Let $f_1(x), \ ..., \ f_n(x)$ be functions differentiable on the interval I, $n+1$ times and Wronskian from derivatives almost everywhere on I is different from 0. Such functions are called nondegenerate. The problem of the distribution of the zeros of the function $F(x) = a_n f_n(x) + \ ... \ + a_1 f_1(x) + a_0, \ a_j \in Z, \ 1 \le j \le n$ is important in the metric theory of Diophantine approximations.

Let $Q > 1$ be a sufficiently large integer, and the interval I has length $Q^{-\gamma}, \ 0 \le \gamma < 1$. We obtain upper and lower bounds for the number of zeros of the function $F(x)$ on the interval I, with $|a_j| \le Q, \ 0 \le \gamma < 1$. For $\gamma = 0$ such estimates were obtained by A. S. Pyartli, V. G. Sprindzhuk, V. I. Bernik, V. V. Beresnevitch, N. V. Budarina.

Keywords: nondegenerate functionsons, zeros of nondegenerate functionsons.

Bibliography: 22 titles.

1. Введение

К задаче о количестве и распределении действительных нулей многочленов

$$P = (x) = a_n x^n + a_{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

как в математическом анализе, теории чисел и теории вероятностей в последние годы приковано большое внимание [1, 2, 3, 18, 19, 20, 21, 22].

Основой результатов статей [4, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] является метрическая теорема о свойствах множеств разрешимости неравенств вида $|P_n(x)| < Q^{-w},\ w > 0$ и распределений действительных корней $P_n(x)$ при достаточно большом Q и многочленах $P_n(x)$ степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max\limits_{0\le j\le n} |a_j| \le Q$.

В данной работе мы обобщаем эти результаты на класс функций

$$\mathcal{F}_l\left(Q, \bar f\right) = \left\{F_n(x)\ :\ H(F_n) \le Q\right\},\ l_i = \max_{x\in I} |f_i(x)|,\ l = \max_{0\le i\le n}\{l_i\} \qquad (1)$$

где

$$F_n(x) = a_n f_n(x) + ... + a_1 f_1(x) + a_0,$$

функции $f_1(x),\ f_2(x),\ ...,\ f_n(x)$ — $n+1$-раз непрерывно-дифференцируемы и вронскиан их производных

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & ... & f_n'(x) \\ f_1''(x) & ... & f_n''(x) \\ . & . & . \\ f_1^n(x) & ... & f_n^n(x) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля для всех всех x (в смысле меры Лебега) на интервале I. Такие функции $f_1(x),\ ...,\ f_n(x)$ будем называть невырожденными на I.

2. Основной текст статьи

Теорема 1. *На любом интервале $I, \mu I = Q^{-\gamma},\ 0 \le \gamma \le 1$ количество нулей функций $F_n(x) \in \mathcal{F}_l\left(Q, \bar f\right)$ не превосходит $c_1 n l 2^{n+3} Q^{n+1} \mu I$.*

Теорема 2. *Существует $c_2 > 0$, что на любом интервале $I, \mu I = Q^{-\gamma},\ 0 < \gamma < \gamma_0$ не менее $c_2 Q^{n+1} \mu I$ количество нулей функций $F_2(x) \in \mathcal{F}_l\left(Q, \bar f\right)$.*

Теорема 3. *Обозначим через $M_2(I,\ Q)$ множество $x \in I$, для которых система неравенств*

$$(|F_2(x))| < Q^{-2},\ \left|F'(x)\right| < \delta_0 Q$$

имеет решение хотя бы для одной функции $F_2 \in \mathcal{F}_2(Q)$. Тогда при достаточно малом δ_0 справедливо неравенство

$$\mu M_2(I,\ Q) < \frac{1}{4}\mu I. \qquad (2)$$

Покажем как из теоремы 3 следует теорема 2. Введем множество $B_1 = I \backslash M_2(I,\ Q)$. Из (2) следует, что

$$\mu B_1 \ge \frac{3}{4}\mu I. \qquad (3)$$

Пусть $x \in B_1$. С помощью принципа ящиков Дирихле нетрудно доказать, что существует функция $F_2 \in \mathcal{F}_2(Q)$ такая, что

$$|F_2(x)| < c_3 Q^{-2}. \qquad (4)$$

Так как $x \in B_1$, то наряду с (4) верно неравенство

$$\left|F_2'\left(x\right)\right| \geq \delta_0 Q. \tag{5}$$

Неравенство (5) определяет интервал T_1 с центром в точке x_1 меры

$$\mu T_1 = 2c_3\delta_0^{-1}Q^{-3}. \tag{6}$$

Возьмем точку $x_2 \in B_2 \subset I \backslash M_2\left(I,\ Q\right) \backslash T_1$ и аналогичным образом найдем другую функцию $F_2 \in \mathcal{F}_2\left(Q\right)$, у которой действительный корень α_2 удовлетворяет неравенству

$$|x_2 - \alpha_2| < c_4\delta_0^{-1}Q^{-3}.$$

Такую процедуру можно продолжать и строить t нулей функции $F_2 \in \mathcal{F}_2\left(Q\right)$ до тех пор, пока выполняется неравенство $t \cdot 2c_5\delta_0^{-1}Q^{-3} < \frac{3}{4}\mu I$, откуда следует, что количество нулей не менее

$$|x_2 - \alpha_2| < c_5 2^3\delta_0^{-1}Q^{-3}\mu I.$$

Прежде, чем приступить к доказательству теорем приведем несколько лемм о невырожденных функциях. Всюду в дальнейшем

$$\max_{x\in(a,\ b)} \left|f'\left(x\right)\right| < c_6 \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть* $\alpha_0,\ ...,\ \alpha_{N-1},\ \beta_1,\ ...,\ \beta_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *таковы, что* $\alpha_0 > 0,\ \alpha_k > \beta_k \geq 0,$ $k = 1,\ ...,\ N-1$ *и* $0 < \beta < \infty$. *Пусть* $f\ :\ (a,\ b) \to \mathbb{R}$ *есть* N*-раз непрерывно дифференцируемая функция, такая, что* $\inf\limits_{x\in(a,\ b)}\left|f^{(N)}\left(x\right)\right| \geq \beta_n$. *Тогда множество* B_2 *тех* $x \in (a,\ b)$, *удовлетворяющих системе неравенств*

$$\left\{\begin{array}{l} |f\left(x\right) \leq \alpha_0| \\ \beta_k \leq \left|f^{(k)}\right| \leq \alpha_k\ \ (k = 1,\ ...,\ N-1) \end{array}\right).$$

является объединением не более $\left(N+1\right)/2$ *интервалов длины не более*

$$\min_{0\leq k\leq l\leq N} 3^{l-k+1}\left(\alpha_k/\beta_l\right)^{1/l-k}.$$

Лемма 1 следует из лемм 5 и 6 в [2].

Лемма 2 (6). *Существует постоянная* $\Delta_0 = \Delta_0\left(c_6,\ M\right)$ *такая, что для любого интервала* K *длиной не более* Δ_0 *для любой функции* $F_n\left(x\right) \in \mathcal{F}_I\left(Q, \bar{f}\right),\ H\left(F\right) \gg Q$,

$$\inf_{x\in I}\min_{1\leq j\leq n}\left|F^{(j)}\right| \gg Q.$$

Лемма 3 (6). *При условии* $x \in (a,\ b)$ *мера множества решений системы неравенств*

$$\left|F_n\left(x\right)\right| < \delta,\ \left|F'\left(x\right)\right| < K,\ H\left(F\right) \leq Q \tag{8}$$

не превосходит $c_7\left(\delta K Q^{n-1}\right)^{\frac{1}{(n+1)(2n-1)}}$.

При $n = 2$ показатель степени в (8) равен 1/9.

Доказательство теоремы 1. Разложим функции $F_j\left(x\right)$ на интервале I в ряд Тейлора в нуле α_{1j} функции $F_j\left(x\right)$, лежащем в I.

$$F_j(x) = F_j(\alpha_{1j}) + F'_j(\alpha_{1j})(x-\alpha_{1j}) + \frac{1}{2}F''_j(\xi)(x-\alpha_{1j})^2, \ \xi \in (x, \ \alpha_{1j}).$$

Так как $F(\alpha_{1j}) = 0, \ |x-\alpha_{1j}| \leq \mu I = Q^{-\gamma}$,

$$\left|F''_j(\xi_j)\right| < m_1 nQ, \ \left|F'_j(\alpha_{1j})(x-\alpha_{1j})\right| < nlQ^{1-\gamma},$$

то при достаточно большом Q имеем для всех $x \in I$ оценку

$$|F_j(x)| < 2nlQ^{1-\gamma}. \tag{9}$$

Введем вектор $\bar{b} = (a_n, \ ..., \ a_1)$, состоящий из коэффициентов функции $F_j(x)$ и множество функций $F_j(x)$ с одним и тем же вектором $\bar{b}$ обозначим $\mathcal{F}(\bar{b})$. При достаточно большом Q верно неравенство

$$\#\mathcal{F}(\bar{b}) = (2Q+1)^n < 2^{n+1}Q^n.$$

Занумеруем функции $F_j(x), \ j = 0, 1, ..., 2c_8 nl 2^{n+1}Q^{n+1}\mu I$, нули которых лежат на интервале I. образуем новые функции

$$R_j(x) = F_j(x) - F_0(x) = d_i$$

которые являются различными целыми числами и

$$\max|d_i| > 2nkQ^{1-\gamma}$$

вопреки (9). Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Доказательство теоремы 3 поделим на три этапа в зависимости от величин модуля производной $|F'_2(x)|$ на интервале I. Обозначим через $\mathcal{L}(I, \ Q)$ множество $x \in I$, для которого выполняется неравенство

$$|F_2(x)| < Q^{-2}, \ \left|F'(x)\right| < c_9 Q,$$

а через $\mathcal{L}_1(I, \ Q)$ множество $x \in I$, для которого выполняется система неравенств

$$|F_2(x)| < Q^{-2}, \ Q^{\frac{5}{8}} < \left|F'(x)\right| < \delta_0 Q, \tag{10}$$

Предложение 1. *Справедливо неравенство*

$$\mu\mathcal{L}_1(I, \ Q) < 2^{-4}\mu I. \tag{11}$$

Доказательство. Будем считать, что система неравенств (10) рассматривается на интервале монотонности функции $F_2(x)$. Тогда множество $x \in I$, для которых верна система неравенств (10) содержится в интервале, который можно записать в виде

$$\sigma(F) := \left\{x \in I \ : \ |x - \alpha_1(F)| < c_{10}Q^{-2}\left|F'(\beta_1)\right|\right\}). \tag{12}$$

Наряду с интервалами $\sigma(F)$ рассмотрим интервал

$$\sigma_1(F) := \left\{x \in I \ : \ |x - \alpha_1(F)| < c_{11}\left|F'(\beta_1)\right|\right\}). \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует неравенство

$$\mu\sigma(F) < c_{11}c_{10}^{-1}Q^{-2}\mu\sigma_1(F). \tag{14}$$

Зафиксируем вектор $\bar{b} = (a_1, \ a_2)$, координаты которого являются коэффициентами $F_2(x)$. Интервалы $\sigma_1(F)$, имеющие один и тот же вектор $\bar{b}$ объединим в один класс $\mathcal{F}_2(\bar{b})$. Покажем, что при подходящем выборе $c_1 0$ интервалы $\sigma_1(F_1)$ и $\sigma_1(F_2)$ не пересекаются. Предположим противное:

$$s_1 = \sigma_1(F_1) \cap \sigma_1(F_2) \neq$$

и $x_0 \in s_1$. Разложим функцию $F_j(x),\ j = 1,2$ на интервалах $\sigma_1(F_1)$ и $\sigma_1(F_2)$ в ряд Тейлора и оценим значения $|F_j(x_0)|$. Имеем

$$|F_j(x_0)| \leq |F_j(\alpha_1)| + \left|F_j'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + F_j(\xi_j)(x-\alpha_1)^2\right|,\ \xi_j \in (x_0,\ \alpha_1).$$

Нетрудно видеть, что

$$|F_j(x_0)| < 2c_{10}$$

и

$$\begin{gathered} R(x_0) = d \in \mathbb{Z},\ d \neq 0, \\ |R(x_0)| = |F_2(x_0) - F_1(x_0)| < 4c_{10}. \end{gathered} \tag{15}$$

Неравенство (15) при $c_{10} = \frac{1}{8}$ противоречиво. Из того, что интервалы $\sigma_1(F)$ не пересекаются следует, что

$$\sum_{F \in \mathcal{F}(\bar{b})} \mu\sigma_1(F) \leq \mu I. \tag{16}$$

Воспользуемся неравенством (16). тогда из (14) и (16) следует

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{F \in \mathcal{F}(\bar{b})} \mu\sigma(F) < 4c_{10}^{-1}\delta_0\mu I < 2^{-4}\mu I,$$

поскольку из неравенства $|F'(x)| < \delta_0 Q$ следует, что a_1 принимает не более δQ значений.

Предложение 2. *Обозначим через $\mathcal{L}(I,\ Q)$ множество $x \in I$ для которых система неравенств*

$$|F_2(x)| < Q^{-2},\ 1 \leq \left|F'(x)\right| \leq Q^{\frac{5}{8}}$$

имеет хотя бы одно решение в функциях $F_2(x) \in \mathcal{L}(I,\ Q)$. Тогда

$$\mu\mathcal{L}_2(I,\ Q) < 2^{-4}\mu I.$$

Доказательство. Введем при фиксированном $b = a_2$ класс функций с одним и тем же b, который обозначим $\mathcal{F}(b)$. Определим интервалы

$$\sigma_2 := \left\{x \in I\ :\ |x-\alpha_1|(F) < c_{12}Q^{-1}\left|F'(\beta_1)\right|^{-1}\right\} \tag{17}$$

из определения $\sigma(F)$ и $\sigma_2(F)$ следует

$$\mu\sigma(F) < c_{12}^{-1}\mu\sigma_2(F). \tag{18}$$

Интервал $\sigma_2(F_1)$ будем называть существенным, если не существует интервала $\sigma_2(F_2)$, $F_2 \in \mathcal{F}(b)$, такого что

$$\mu\sigma_2(F_1)\sup\sigma_2(F_2) > 0.5\mu\sigma_2(F_1). \tag{19}$$

Если же такой интервал найдется, т. е. при некотором $F_2(x) \in \mathcal{F}(b)$ выполняется неравенство

$$\mu\sigma_2(F_1)\sup\sigma_2(F_2) > 0.5\mu\sigma_2(F_1),$$

то интервал $\sigma_2(F_1)$ будем называть несущественным.

В случае существенных интервалов воспользуемся (18). Тогда из $\sum\limits_{F\in\mathcal{F}} \mu\sigma_2(F) < 2\mu I$ и (18) получим

$$\sum_b \sum_{F\in\mathcal{F}(b)} \mu\sigma(F) < c_{13}\mu I. \tag{20}$$

В случае несущественных интервалов разложим функции $F_2(x)$ и $F_2'(x)$ на интервале $\sigma_2(F)$ в ряд Тейлора и оценим их модули сверху пользуяс (6). Получим систему неравенств

$$|a_1x+b| < c_{14}Q^{-1},\ |a_1| < 2Q^{\frac{5}{8}},$$

откуда

$$\left|x+\frac{b_1}{a_1}\right| < c_{14}Q^{-1}a_1^{-1}. \tag{21}$$

Неравенство (21) выполняется для интервала с центром в точке $-\frac{b_1}{a_1}$ длиной $2c_{14}Q^{-1}a_1^{-1}$. Просуммируем эту величину по b_1, количество которых не превосходит $a_1\mu I$, а затем по $a_1,\ |a_1| < 2Q^{\frac{5}{8}}$. Получим оценку $c_{15}Q^{\frac{5}{8}-1}\mu I$, которая вместе с (20) завершает доказательство предложения 2.

Предложение 3. *Обозначим через B_3 множество решений системы неравенств*

$$|a_2f(x)+a_1x+a_0| < c_{16}Q^{-2},\ \left|a_2f'(x)\right| < c_{14}. \tag{22}$$

Тогда

$$\mu B_3 < 2^{-4}\mu I.$$

Для доказательства предложения 3 применим к системе неравенств (10), (20) лемму 3 при $\delta = Q^{-3},\ c_{16} = K$. Получим

$$\mu B_3 < 2^{-4}Q^{\frac{1}{9}}$$

что меньше $2^{-4}\mu I$ при $0 \le \gamma < \frac{1}{9}$ и достаточно большом Q. Из предложений 1—3 следует теорема 3.

3. Заключение

В дальнейших работах авторы предполагают привести применения результатов статьи в метрической теории диофантовых приближений и при получении оценок сверху для размерности Хаусдорфа резонансных множеств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов, И. А., Маслова, Н. Б. О среднем числе вещественных нулей случайных полиномов. II. Коэффициенты с ненулевым средним // Теория вероятн. и ее примен., 1971 vol. 16, P. 595-503

2. Запорожец, Д. Н. Ибрагимов, И. А. О площади случайной поверхности. Вероятность и статистика // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2010, vol. 384, P. 154-1750.

3. Берник, В. И., Гётце, Ф. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах // Изв. РАН. Сер. матем., 2015, vol. 79, no.1, P. 21-42.

4. Beresnevich, V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith, 1999, Vol. 90, no. 8, P. 97-112.

5. Beresnevich, V., Bernik V. On a metrical theorem of W. Shmidt. Acta Arith // Acta Arith, 1996, vol. 75, P. 219-233.

6. Beresnevich, V. A. Grasher type theorem for convergence on maifolds // Acta Matth. Hung, 2002, vol. 94(1—2), P. 99-130.

7. Baker, R. Metric diophantine aProximation on manifolds // J. Lond. Math. Soc., 1976, vol. 14, P. 43-48.

8. Berink, V. On the exact order of approximation of zero by the values of integer-valued polynomials // Acta. Arith., 1989, vol. 53, no. 1, P. 17-28.

9. Berink, V. Kleinbok, D., Marguli Y. 2001 Khinchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standart and multiplicative versions // Jntern. Math. Res., vol. 9, P. 453-486.

10. Berink, V., Götze, F. Distribution of real algebraic numbers of arbitary degree in short intervals // Jzv. Math. RAN., 2015, vol. 79, no. 1, P. 18-39.

11. Berink, V., Gusakova, A., Götze F. On ponts with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves // Moscow Journal of Combinations and Number Theory, 2016, vol. 6, iss. 2-3, P. 56-101.

12. Kleinbok, D., Margulis, G. Flow on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. of Math., 1998, vol. 148 no. 2, P. 339-360

13. Mahker K. Über das Mass der Menge aller S-Zhlen // Math. Ann.,1932, vol. 106, P. 131-139.

14. Pyartly, A. Diophantine approximation on submanifolds of euclidion space // Funk. Analis and its application, 1969, vol. 3, no. 4, P. 303-306

15. Shmidt, W. Metrische Satze über simultane Approximationen abhangiger Grossen // Monatsh. Math.,1964, vol. 68, P. 145-166

16. Sprindzuk, V. Achievements and problems of the theory of Diophantine approximations // Uspekhi mat. Baur.,1980, vol. 35, no. 4, P. 3-68.

17. Sprindzuk, V. Mahler problem in metric theory numbers, Eng. trans. // Amer. Math. Soc. Providence, 1969.

18. Götze, F. Koleda, D., Zaporozhets, D. Distribution of complex algebraic numbers // Proc. Amer. Math. Soc., 2017, vol. 145, no. 1, (), 61-71.

19. Bernik A., Götzeb F., Kukso O. Bad-approximable points and distribution of discriminants of the product of linear integer polynomials // Чебышевский сб., 2007m vol. 8, no. 2, P 140–147

20. Bernik A., Götzeb F., Gusakova A. On the distribution of points with algebraically conjugate coordinates in a neighborhood of smooth curves // Записки ПОМИ, 2016, P. 14-47

21. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. Integral polynomials with small discriminants and resultants // Adv. Math., 2016, vol. 298, P. 393-412.

22. Koleda, D. V. On the density function of the distribution of real algebraic numbers // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux, 2017, vol. 29, P. 179-200.

REFERENCES

1. Ibragimov, I. A., Maslova, N. B., 1971 “ On the Expected Number of Real Zeros of Random Polynomials. II. Coefficients With Non-Zero Means *Theory Probab. Appl.*, vol. 16, pp. 486-493

2. Zaporozhets, D. N. Ibragimov, I. A.2010 “On random surface area“ *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 176, pp. 190-202.

3. Берник, В. И., Гётце, Ф. 2015 “Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals“ *Izvestiya: Mathematics*, vol. 79, no.1, P. 21-42.

4. Beresnevich, V. 1999, “On approximation of real numbers by real algebraic numbers“, *Acta Arith* Vol. 90, no. 8, pp. 97-112.

5. Beresnevich, V., Bernik V. 1996 “On a metrical theorem of W. Shmidt. Acta Arith“ *Acta Arith*, vol. 75, pp. 219-233.

6. Beresnevich, V. A. 2002 “Grasher type theorem for convergence on maifolds“, *Acta Matth. Hung*, vol. 94(1—2), pp. 99-130.

7. Baker, R. 1976 “Metric diophantine approximation on manifolds“ *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 14, pp. 43-48.

8. Berink, V. 1989 “On the exact order of approximation of zero by the values of integer-valued polynomials“, *Acta. Arith.*, vol. 53, no. 1, pp. 17-28.

9. Berink, V. Kleinbok, D., Marguli Y. 2001 “Khinchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standart and multiplicative versions“, *Jntern. Math. Res.*, vol. 9, pp. 453-486.

10. Berink, V., Götze, F. 2015 “Distribution of real algebraic numbers of arbitary degree in short intervals“, *Jzv. Math. RAN.*, vol. 79, no. 1, pp. 18-39.

11. Berink, V., Gusakova, A., Götze F. 2016 “On ponts with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves“, *Moscow Journal of Combinations and Number Theory*, vol. 6, iss. 2-3, pp. 56-101.

12. Kleinbok, D., Margulis, G. 1998 “Flow on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds“, *Ann. of Math.*, vol. 148 no. 2, pp. 339-360

13. Mahker K. 1932 “Über das Mass der Menge aller S-Zhlen“, *Math. Ann.*, vol. 106, pp. 131-139.

14. Pyartly, A. 1969 “Diophantine approximation on submanifolds of euclidion space“, *Funk. Analis and its application*, vol. 3, no. 4, pp. 303-306

15. Shmidt, W. 1964 “Metrische Satze über simultane Approximationen abhangiger Grossen“, *Monatsh. Math.*, vol. 68, pp. 145-166

16. Sprindzuk, V. 1980 “Achievements and problems of the theory of Diophantine approximations“, *Uspekhi mat. Baur.* vol. 35, no. 4, pp. 3-68.

17. Sprindzuk, V. 1969 “Mahler problem in metric theory numbers“, Eng. trans. *Amer. Math. Soc. Providence*

18. Götze, F. Koleda, D., Zaporozhets, D. 2017 “Distribution of complex algebraic numbers“, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 145, no. 1, (), 61-71.

19. Bernik A., Götzeb F., Kukso O. 2007 "Bad-approximable points and distribution of discriminants of the product of linear integer polynomials", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 8, no. 2, pp. 140–147

20. Bernik A., Götzeb F., 2016 "Gusakova A. On the distribution of points with algebraically conjugate coordinates in a neighborhood of smooth curves", *Zapiski POMI*, pp. 14-47

21. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. 2016 "Integral polynomials with small discriminants and resultants", *Adv. Math.*, vol. 298, pp. 393-412.

22. Koleda, D. V. 2017 "On the density function of the distribution of real algebraic numbers" *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, vol. 29, pp. 179-200.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-115-126

ОЦЕНКИ СВЕРХУ И СНИЗУ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЧЕК В КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ

В. И. Берник (г. Минск), А. Г. Гусакова (г. Минск), А. С. Кудин (г. Минск)

Аннотация

Алгебраические числа распределены весьма причудливо. Видимо поэтому их практически никогда не используют в качестве всюду плотных множеств. Как доказали в 1970 году А. Бейкер и В. Шмидт, алгебраические числа все же обладают неким подобием равномерного распределения последовательностей на длинных интервалах, которое они назвали регулярностью. В последние годы появилось немало работ, в которых решались проблемы о длине интервалов, на которых проявляется регулярность распределения действительных алгебраических чисел. Было выяснено, что для любого целого $Q > 1$ существуют интервалы длины $0,5Q^{-1}$, внутри которых нет алгебраических чисел α любой степени n и высоты $H(\alpha) \leqslant Q$. В то же время можно найти величину $c_0 = c_0(n)$, что уже при $c > c_0$ лежащие на любом интервале I длины большей cQ^{-1} алгебраические числа обладают свойством регулярности. Такими "удобными" для алгебраических чисел оказались интервалы, свободные от рациональных чисел с малыми знаменателями и алгебраических чисел небольшой степени и малой высоты. Для нахождения алгебраических чисел с помощью теоремы Минковского о линейных формах строятся целочисленные многочлены с малыми значениями на интервале и с большой высотой. Оказывается, что для "большинства" точек x интервала эти многочлены имеют близкие и удобные характеристики (степень, высоту, величину значения модуля многочлена в точке x). Этих характеристик достаточно для построения на интервале алгебраических чисел. В данной статье мы доказываем существование алгебраических чисел большой степени на “очень коротких“ интервалах.

Ключевые слова: алгебраическое число, диофантовы приближения, регулярные системы точек, теорема Минковского о линейных формах.

Библиография: 24 названий.

UPPER AND LOWER ESTIMATES OF THE NUMBER OF ALGEBRAIC POINTS IN SHORT INTERVALS

V. I. Bernik (Minsk), A. G. Gusakova (Minsk), A. S. Kudin (Minsk)

Abstract

The distribution of algebraic numbers is quite complicated. Probably this is why they are rarely used as dense sets. Nevertheless, A. Baker and W. Schmidt proved in 1970 that the distribution of algebraic numbers still have some kind of uniformity on long intervals, which they called regularity. Recently many works have appeared addressing the problems concerning the lengths of the intervals on which real algebraic numbers have regularity property. It was discovered that for any integer $Q > 1$ there are intervals of length $0.5Q^{-1}$, which don't contain algebraic numbers of any degree n and of height $H(\alpha) \leqslant Q$. At the same time it's possible to find such $c_0 = c_0(n)$ that for any $c > c_0$ algebraic numbers on any interval of length exceeding cQ^{-1} have regularity property. Such "friendly" to algebraic numbers intervals are intervals free of rational numbers with small denominators and algebraic numbers of small degree and height. In order to find algebraic numbers we build integral polynomials with small values on an interval and large height using Minkowski's linear forms theorem. It turns out that for "most" points x of an interval these polynomials have similar and nice characteristics (degree, height, module of polynomial value at point x). These characteristics are sufficient for building algebraic numbers on an interval. In this paper we prove existence of algebraic numbers of high degree on "very short" intervals.

Keywords: algebraic number, Diophantine approximation, regular systems of points, Minkowski's linears form theorem.

Bibliography: 24 titles.

1. Введение

Существуют различные количественные формы для всюду плотных последовательностей на действительной прямой. Одна из них носит название равномерного распределения и берет свое начало с работы Г. Вейля [1, 13], в которой он ввел понятие равномерного распределения и доказал критерий Вейля о равномерном распределении. В частности, из его критерия легко следует, что дробные части последовательности $\{\alpha n\}$, $n = 1, 2, ...$ равномерно распределены на отрезке $[0, 1)$ тогда и только тогда, когда α — иррациональное число. Вторым важным понятием распределения последовательностей является понятие регулярности распределения, предложенное А. Бейкером и В. Шмидтом [2]. Это понятие показывает, как много первых членов последовательности надо взять, чтобы они содержались в малых подинтервалах заданного интервала и были не слишком близки друг к другу. Бейкер и Шмидт доказали регулярность множества действительных алгебраических чисел и нашли точную оценки снизу размерности Хаусдорфа множества действительных чисел, с заданным порядком приближаемых алгебраическими [2, 19]. В последующих работах понятие регулярности оказалось полезным при доказательстве аналога метрической теоремы А. Я. Хинчина [3] для многочленов [4, 5, 14], невырожденных кривых и поверхностей [6, 7, 8], а также обобщения теоремы Хинчина в полях комплексных и p-адических чисел [9, 10, 11, 12].

В настоящей работе мы покажем, что свойство регулярности обобщается и на интервалы малой длины. При этом мы имеем ввиду, что рассматривается K членов последовательности $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_K$, а лежат они на интервале S длины $\mu S = K^{-l}$, $l > 0$. Эта работа является естественным продолжением работ [16, 17, 18, 20].

Для многочлена

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n \neq 0,$$

обозначим через $\deg P = n$ степень $P(x)$, а через $H = H(P) = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$ высоту многочлена $P(x)$. При достаточно большом Q введем класс многочленов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leqslant n, H(P) \leqslant Q\}.$$

Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ корни многочлена $P(x)$. Пусть $c_1, c_2, ...$ — величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q; $\#A$ — количество элементов конечного множества A; μB — мера Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$. Множество всех корней многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ обозначим $T_n(Q)$. Ясно, что $\#\mathcal{P}_n(Q) \leqslant (2Q+1)^{n+1}$, и тогда $\#T_n(Q) \leqslant n(2Q+1)^{n+1}$. Известно [2], а для многочленов нечетной степени это очевидно, что $\#T_n(Q) \bigcap \mathbb{R} > c_1 Q^{n+1}$. В [17] доказано, что действительные алгебраические числа, упорядоченные по росту высоты минимальных многочленов, равномерно распределены только при $n = 1$, т.е. когда являются рациональными числами.

В данной работе будем изучать законы распределения множества $T_n(Q) \bigcap [0, 1)$ на коротких интервалах $I \subset [0, 1)$, $\mu I = Q^{-\gamma}$, $\gamma > 1$. Выбор интервала $[0, 1)$ не существенен, можно взять любой другой конечный интервал $[a,b)$. Выбор интервала $[0,1)$ упрощает вычисления. Некоторые теоремы могут быть обобщены с полиномов на невырожденные функции [5, 6, 7, 8].

В коротких интервалах алгебраические числа ведут себя по-разному. В недавней работе [16] доказано, что

а) существуют интервалы I_1 длины $\mu I_1 = 0,5Q^{-1}$ такие, что $T_n(Q)\bigcap I_1 = \emptyset$ при любом n;

б) при достаточно большой величине c_2 для любого интервала I_2, $\mu I_2 > c_2Q^{-1}$, при подходящей величине $c_3 > 0$ верно неравенство

$$\#T_n(Q)\bigcap I_2 > c_3Q^{n+1}\mu I_2.$$

Утверждение а) может быть доказано с помощью несложных рассуждений с многочленами и их корнями. Напротив, утверждение б) использует многие недавние теоремы метрической теории диофантовых приближений [16, 20].

Ясно, что интервалов типа I_1, не содержащих алгебраических чисел, немного, ведь известно [2], что

$$\#T_n(Q)\bigcap[0,1) > c_5Q^{n+1}.$$

В работе впервые дается ответ на вопрос, какие условия надо наложить на интервалы I длины $\mu I = Q^{-\gamma_1}$, чтобы при $\gamma_1 > 1$ интервалы I содержали алгебраические числа из $T_n(Q)$. В [18] такое условие приведено при $\gamma_1 = \frac{3}{2}$.

Из теоремы Минковского о линейных формах [23] следует, что при любом $x \in [0,1)$ и $Q > 1$ найдется целочисленный многочлен $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ такой, что

$$|P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}.$$

В этом неравенстве показатель степени $-n$ наилучший, т.к. при $x_1 = 2^{-\frac{1}{n+1}}$ верно неравенство $|P(x_1)| > c_5Q^{-n}$. Из теоремы В.Г. Спринджука [21, 22] следует, что неравенство $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > n$ может выполняться только для $x \in B_1 \subset [0,1)$, $\mu B_1 < \varepsilon_1$ при любом $\varepsilon_1 > 0$. Это означает, что если множество B_2 состоит из точек $x \in [0,1)$, для которых $|P_k(x)| < c_5Q^{-k-1}$ и Q велико, то $\mu B_2 < \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > 0$. Более того, известна оценка $\mu B_2 < c_6Q^{-\frac{1}{n}}$.

Докажем несколько теорем об оценках сверху для $\#T_n(Q)\bigcap I$.

Теорема 1. *При $\mu I_2 = Q^{-\gamma_2}$, $0 \leqslant \gamma_2 < 1$ справедливо неравенство*

$$\#T_n(Q)\bigcap I_2 > n^2 2^{n+5}Q^{n+1}\mu I_2.$$

Доказательство. Обозначим $c_7 = n^2 2^{n+5}$ и предположим противное. Это означает, что

$$\#T_n(Q)\bigcap I_2 > c_7Q^{n+1-\gamma_2}.$$

Возьмем вектор $\bar{b}_1 = (a_n, ..., a_1)$, координаты которого коэффициенты $P(x)$. Так как $\#\left\{\bar{b}_1\right\} = (2Q+1)^n < 2^{n+1}Q^n$ при $Q > Q_0$, то в классе полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, которые имеют корни $\alpha_1 \in T_n(Q)\bigcap I_2$, не менее $l_1 = c_7 2^{-n-1}Q^{1-\gamma_2}$ полиномов имеют один и тот же вектор $\bar{b}_1$ и, следовательно, их разность — целое число, не равное нулю. Если α_{1i} — корень $P_i(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, принадлежащий интервалу I_2, то из разложения $P_i(x)$ в ряд Тейлора на I_2 имеем

$$P_i(x) = P_i(\alpha_{1i}) + P_i^{'}(\alpha_{1i})(x-\alpha_{1i}) + \frac{1}{2}P_i^{''}(\alpha_{1i})(x-\alpha_{1i})^2 + ..., \ \ 1 \leqslant i \leqslant l_1, \tag{1}$$

$$P_i(\alpha_{1i}) = 0, \ \ \left|P_i^{'}(\alpha_{1i})(x-\alpha_{1i})\right| < n^2Q^{1-\gamma_2},$$

при $Q > Q_0$. Остальные члены разложения в (1) оцениваются по модулю величиной $nQ^{1-\gamma_2}$, поэтому

$$|P_i(x)| < 2n^2 Q^{1-\gamma_2}.$$

Образуем полиномы

$$R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x), 1 \leqslant j \leqslant l_1 - 1.$$

Полиномы $R_j(x)$ — различные целые, отличные от нуля числа, для которых справедливо

$$|R_j(x)| < 2n^2 Q^{1-\gamma_2}.$$

При достаточно большом l_1 среди них найдется число, по модулю большее $2n^2 Q^{1-\gamma_2}$, что противоречит предыдущему неравенству. □

В работах Спринджука [21, 22] показано, что метрические теоремы о целочисленных многочленах остаются верными при переходах от многочленов $P(x)$ к многочленам $P_1(x) = P(x-m)$, $m \in \mathbb{Z}$ и к многочленам $P_2(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$. Эти два преобразования позволяют перейти от произвольных многочленов к многочленам с условием

$$|a_n| > c_8 H(P). \tag{2}$$

При условии (2) нетрудно доказать [22, 14], что для всех корней α_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ полинома $P(x)$ верно неравенство $|\alpha_j| < c_9$. Поэтому в дальнейшем считаем, что для полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ выполнено условие (2) и все корни полиномов ограничены величиной, зависящей от n и не зависящей от H и Q.

Введем понятие типа интервала. Интервал I длины $|I| = Q^{-\gamma_1}$ называется интервалом типа (k, v), если на нем находится действительное алгебраическое число β_1 степени $\deg \beta_1 = k < n$ и высоты $H(\beta_1) \leqslant Q^v$, $0 \leqslant v \leqslant 1$.

Теорема 2. *При $\gamma_1 > k + nv$ интервалы I типа (k, v) не содержат действительных алгебраических точек α_1, $\deg \alpha_1 = n$, $H(\alpha_1) \leqslant Q$.*

Доказательство. Обозначим через $T_1(x) = b_k x^k + ... + b_1 x + b_0$ минимальный многочлен алгебраического числа β_1, а через $T_2(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ минимальный многочлен алгебраического числа α_1. Многочлены $T_1(x)$ и $T_2(x)$ не имеют общих корней, их старшие коэффициенты удовлетворяют (2) и, следовательно, корни $\beta_1, ..., \beta_k$ полинома $T_1(x)$ и корни $\alpha_1, ..., \alpha_n$ полинома $T_2(x)$ ограничены по модулю некоторой величиной c_9. Поэтому результант $R(T_1, T_2) \neq 0$. Корень $\beta_1 \in I$ определяет тип интервала I. Предположим, что $\alpha_1 \in I$. Тогда

$$1 \leqslant |R(T_1, T_2)| = a_n^k b_k^n \prod_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant k} (\alpha_i - \beta_j) \ll_n Q^{k+nv} |\alpha_1 - \beta_1| \ll_n Q^{k+nv-\gamma_1}. \tag{3}$$

По условию теоремы показатель степени в (3) отрицательный, и неравенство (3) при достаточно большом Q противоречиво. □

Если $\gamma_1 < k + nv$, то интервал I_1 может содержать алгебраические числа, однако, "не слишком много".

Теорема 3. *При $\gamma_3 > 1+v$ интервал I_3 длины $|I_3| = Q^{-\gamma_3}$ содержит не более $2^{n+7} Q^{n+1-\gamma_3}$ алгебраических чисел β_1, $\deg \beta_1 = n$, $H(\beta_1) \leqslant Q$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е.

$$\#\{\beta_1 \in I_3 : P(\beta_1) = 0, P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)\} > 2^{n+7} Q^{n+1-\gamma_3}.$$

Зафиксируем вектор $\bar{b}_2 = (a_n, ..., a_2)$, состоящий из коэффициентов многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Ясно, что

$$\#\left\{\bar{b}_2\right\} = (2Q+1)^{n-1} < 2^n Q^{n-1}, Q > Q_0(n).$$

Поэтому не менее $l_2 = 2^8 Q^{2-\gamma_3}$ многочленов имеют один и тот же вектор $\bar{b}_2$. Разложим каждый из таких многочленов $P_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant l_2$ в ряд Тейлора на отрезке I_3 в окрестности корня $\beta_1 = \beta_{1j}$ и оценим $P(x)$ сверху.

$$P_j(x) = P(\beta_1) + P^{'}(\beta_1)(x-\beta_1) + \frac{1}{2}P^{''}(\beta_1)(x-\beta_1)^2 + ... + \frac{1}{n!}P^{(n)}(\beta_1)(x-\beta_1)^n,$$
$$|P_j(x)| \leqslant n^2 Q^{1-\gamma_3} + n\frac{1}{n}Q^{1-\gamma_3} < 2n^2 Q^{1-\gamma_3}, Q > Q_0.$$

Образуем многочлены

$$R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x), 1 \leqslant j \leqslant l_2 - 1 \leqslant \frac{l_2}{2} = 2^6 Q^{1-\gamma_3}. \tag{4}$$

Количество различных многочленов в (4) не менее $2^7 Q^{2-\gamma_3}$. При этом, $\deg R_j \leqslant 1$, $H(R_j) \leqslant 2Q$ и

$$|a_j x + b_j| = |R_j(x)| < 4n^2 Q^{1-\gamma_3}, 1 \leqslant j \leqslant l_2 - 1 \leqslant \frac{l_2}{2} = 2^6 Q^{1-\gamma_3}. \tag{5}$$

Из (5) следует

$$\left| x + \frac{b_j}{a_j} \right| < 4n^2 Q^{1-\gamma_3} |a_j|^{-1} \leqslant 4n^2 Q^{1-\gamma_3}. \tag{6}$$

Если среди 2^7 многочленов $R_j(x) = a_j x + b_j$ найдется хотя бы один, корень которого, равный $-\frac{b_i}{a_i}$, не совпадает с $\beta_1 = -\frac{b_0}{a_0}$, то рассмотрим результант данного многочлена $a_i x + b_i$ и многочлена $R_0 = a_0 x + b_0$, определяющего тип интервала I_3.

$$1 \leqslant |R(R_0, R_j)| = \left| a_0 a_i \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_0}{a_0} \right) \right| \leqslant 8n^2 Q^{1+v-\gamma_3}. \tag{7}$$

Неравенство (7) при $\gamma_3 > 1+v$ и $Q > Q_0$ противоречиво. Если все линейные многочлены $R_j(x)$ различны и при этом имеют один и тот же корень $-\frac{b_0}{a_0}$, то они имеют вид

$$k(a_0 x + b_0), \ \ k \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Так как $|a_0| > 0,5Q^v$, и k можно взять больше $k_0 = \frac{l_2}{8}$, то одновременно должны выполняться неравенства

$$|a_0 k_0| > 8Q^{v+2-\gamma_3},$$
$$|a_0 k_0| < 4Q,$$

что невозможно при $\gamma_3 > 1 + v$. Теорема доказана. □

В следующей теореме на точки интервала I накладывается условие

$$\max_{x \in I} |P(x)| > c_{10} H(P)^{-\deg P - 1}, \deg P < n. \tag{9}$$

Это означает, что точки $x \in I$ не должны слишком хорошо приближаться алгебраическими числами α степени меньше n.

Теорема 4. *Пусть задан интервал I длины $\mu I = Q^{-\gamma_2}$, $\gamma_2 > 1$ точки которого удовлетворяют неравенству* (9). *Тогда при подходящем c_{11} верно неравенство*

$$\#T_n(Q)\bigcap I > c_{11}Q^{n+1-\gamma_2}\mu I.$$

Основой доказательства теоремы является следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть интервал I удовлетворяет условиям теоремы 4. Обозначим через B_3 множество точек $x \in I$, для которых система неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}, \\ |P'(x)| < \delta_0 Q^{-\gamma_2+1}, \end{cases} \tag{10}$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Тогда при достаточно малом δ_0 верно

$$\mu B_3 < \frac{1}{4}\mu I. \tag{11}$$

Для доказательства теоремы 5 необходимы следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть α_1 — ближайший к x корень полинома $P(x)$. Тогда при $P^{'}(x) \neq 0$ и $P^{'}(\alpha_1) \neq 0$ из* (10) *следует*

$$\begin{gathered} |x-\alpha_1| \leqslant n|P(x)||P'(x)|^{-1}, \\ |x-\alpha_1| \leqslant 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}. \end{gathered} \tag{12}$$

Лемма 1 хорошо известна [14, 21, 22].

Лемма 2. *Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — два целочисленных полинома без общих корней с условиями*

$$\deg P_1 \leqslant n,\ \ \deg P_2 \leqslant n,\ \ H(P_1) \leqslant Q,\ \ H(P_2) \leqslant Q,$$

которые на интервале J, $\mu J = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, удовлетворяют неравенствам

$$\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau},$$

при некотором $\tau > 0$. Тогда для любого $\delta > 0$ при $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau + 1 + 2\max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta.$$

Лемма 2 доказана в [4].

2. Доказательство теоремы 5

По лемме 1 система неравенств (10) выполняется на интервале

$$\sigma(P) = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-\alpha_1| < 2^{n-1}Q^{-n}|P'(\alpha_1)|^{-1}\right\}. \tag{13}$$

Наряду с интервалом $\sigma(P)$ рассмотрим интервал

$$\sigma_l(P) = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-\alpha_1| < c_{12}Q^{-l}|P'(\alpha_1)|^{-1}\right\},\ \ l \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Потребуем, чтобы интервал $\sigma_l(P)$ содержался в I. Для этого при некотором $\varepsilon_1 > 0$ должно выполняться неравенство

$$l \geq \gamma_2 + \lambda_0 + \varepsilon_1, \tag{15}$$

где λ_0 определяется из неравенства

$$Q^{-\lambda_0-\varepsilon_1} < |P'(\alpha_1)| < Q^{-\lambda_0}.$$

Зафиксируем вектор $\bar{b}_l = (a_n, ..., a_l)$, состоящий из $n-l+1$ старших коэффициентов полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Справедлива оценка

$$\#\left\{\bar{b}_l\right\} < 2^n Q^{n-l}. \tag{16}$$

Множество полиномов с одним и тем же вектором $\bar{b}_l$ обозначим $T\left(\bar{b}_l\right)$. Для натурального числа $m \geqslant 3$ интервал $\sigma_l(P_1)$, содержащий точки не менее m интервалов $\sigma_l(P_j)$, $2 \leqslant j \leqslant m+1$, $P_j \in T\left(\bar{b}_l\right)$ будем называть m-несущественным. Если же интервал $\sigma_l(P_1)$ кроме себя содержит точки других интервалов $\sigma_l(P_j)$, но в количестве меньшем m, то его будем называть m-существенным.

Существенные интервалы. Множество m-существенных интервалов обозначим $M_m(\bar{b}_l)$. Из определения имеем

$$\sum_{\sigma_l(P)\in M_m\left(\bar{b}_l\right)} \mu\sigma_l(P) \leqslant m\mu J. \tag{17}$$

Из (13) и (14) следует, что

$$\mu\sigma(P) \leqslant 2^{n-1} c_{12}^{-1} Q^{-n+l} \mu\sigma_l(P),$$

откуда с учетом (16) и (17) получаем

$$\sum_{\bar{b}_l} \sum_{\sigma_l(P)\in M_m\left(\bar{b}_l\right)} \mu\sigma(P) \leqslant m 2^{2n} c_{12}^{-1} < \frac{1}{2S}\mu I,$$

при подходящем выборе c_{12}.

Несущественные интервалы. Разложим многочлен $P(x)$ при $x \in \sigma_l(P)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и оценим $|P(x)|$ сверху:

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + \frac{1}{2}P''(\xi)(x-\alpha_1)^2,\ \ \xi \in (\alpha_1, x).$$

Величина $|x-\alpha_1|$ оценена в (14), откуда

$$\left|P'(\alpha_1)(x-\alpha_1)\right| < c_{12}Q^{-l},$$
$$\left|P''(\xi)(x-\alpha_1)^2\right| < c_{13}Q^{1-2l+2\lambda_0+2\varepsilon_1}.$$

Если

$$l > 2k + 1 + 2\varepsilon_1,$$

то при достаточно больших Q получаем

$$|P(x)| < 2c_{13}Q^{-l}. \tag{18}$$

На интервале $\sigma_l(P)$ имеется не менее $m-1$ многочленов $P_j(x) \in M_n\left(\bar{b}_l\right)$, $2 \leqslant j \leqslant m$, для которых и многочлена $P_1(x)$ справедливы неравенства (18). Первые коэффициенты многочленов $P_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant m$ совпадают и поэтому для многочленов $R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x)$ верны неравенства

$$|R_j(x)| < 4c_{13}Q^{-l}, \ \ 1 \leqslant j \leqslant m-1,$$
$$\deg R_j(x) \leqslant l, \ \ 1 \leqslant j \leqslant m-1.$$

Если среди многочленов $R_j(x)$ найдутся по крайней мере два неприводимых, то они не имеют общих корней, и к ним можно применить лемму 2. В данном случае

$$\tau = l, \ \ \eta = l - k - \varepsilon_1, \ \ \tau + 1 + 2(\tau + 1 - \eta) = l + 3 + 2k + 2\varepsilon_1, \tag{19}$$

что больше, чем $2l + \delta$ при $l < 2\lambda_0 + 3 + 2\varepsilon_1 - \delta$. Пришли к противоречию.

Возьмем $k = \gamma_2 - 1$. Натуральное число l должно по (15) и (19) удовлетворять неравенству

$$2\gamma_2 - 1 + 2\varepsilon_1 \leqslant l < 2\gamma_2 + 1 + 2\varepsilon_1 - \delta.$$

Получаем, что l находится в интервалах длины $2 - \delta > 1.9$ при $\delta < 0,1$. Поэтому, такое целое l всегда найдется.

Покажем сейчас, как провести доказательство, если величины $|P'(\alpha_1)|$ и $|P'(x)|$ имеют разные порядки. Это будет в случае

$$|P'(x)| < 2n^3 Q^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{20}$$

Из неравенства (20) получим неравенство

$$|P'(\alpha_1)| < 2^{n+6} Q^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{21}$$

Пусть неравенство (21) неверно, т.е.

$$|P'(\alpha_1)| \geqslant 2^{n+6} Q^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Тогда по лемме (1) из $|P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}$ имеем

$$|x - \alpha_1| < (n+1) Q^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Так как из представления

$$P'(\alpha_1) = P'(x) + P''(\xi_1)(x - \alpha_1), \ \ \xi_1 \in (x, \alpha_1), |x - \alpha_1| < (n+1) Q^{-\frac{n+1}{2}},$$

нетрудно получить

$$\left|P'(x) - P'(\xi_1)(x - \alpha_1)\right| < 2n^3 + 2n^3 = 4n^3,$$

получаем противоречие. При выполнении неравенства (21) доказательство теоремы может быть завершено как в работах [14, 19, 22].

Если среди $m-1$ многочленов $R_j(x)$ нельзя выбрать два неприводимых, то

$$R_j(x) = t_1(x) t_2(x).$$

Полиномы $t_1(x)$ и $t_2(x)$ можно выбрать без общих корней. Их степени и высоты связаны простыми известными соотношениями [14, 22]

$$\begin{gathered} \deg t_1 + \deg t_2 \leqslant l, \\ c_{14} H(R_j) < H(t_1) H(t_2) < c_{15} H(R_j). \end{gathered} \tag{22}$$

Обозначим $\deg t_1 = n_1$, $H(t_1) = Q^{\lambda_1}$. Тогда из (22) получим $\deg t_2 \leqslant l - n_1$, $H(t_2) < c_{16}Q^{1-\lambda_1}$. Найдем такое рациональное число a, что неравенство

$$|t_1(x)| < c_{17}Q^{-a} = c_{15}H(t_1)^{-\frac{a}{\lambda_1}}, \tag{23}$$

выполняется только для x из множества B, $\mu B > 0,5\mu\sigma_l(P)$, но уже неравенство

$$|t_1(x)| < c_{17}Q^{-a-\varepsilon_1}, \tag{24}$$

выполняется только для x из множества B, $\mu B \leqslant 0,5\mu\sigma_l(P)$. От неравенства (23) можно перейти к неравенству

$$|t_1(x)| < c_{18}Q^{-a}, \tag{25}$$

для всех $x \in \sigma_l(P)$ [14, 19]. Если $\frac{a}{\lambda_1} \geqslant n_1 + 1$, то это противоречит выбору интервала B. Если же $\frac{a}{\lambda_1} < n_1 + 1$, $a < \lambda_1(n_1 + 1)$, то $\frac{l-a}{1-\lambda_1} \geqslant l > l - n_1 + 1$ и уже многочлен $t_2(x)$ принимает для всех $x \in \sigma_l(P)$ значения меньше $c_{19}H(t_2)^{-(l-n_1)-1} = c_{19}H(t_2)^{-\deg t_2 - 1}$, что опять противоречит выбору интервала B.

3. Доказательство теоремы 4

Из теоремы 5 следует, что для точек $x_1 \in B_2$, $\mu B_2 \geqslant \frac{3}{4}\mu I$, выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}, \\ |P'(x)| > \delta_0 Q^{-\gamma_2+1}. \end{cases} \tag{26}$$

По лемме 1 находим корень α_1 полинома $P(x)$, удовлетворяющий неравенству

$$|x_1 - \alpha_1| < c_{20}Q^{-n-1+\gamma_2}.$$

Таким образом, все точки $x_1 \in B_2$ принадлежат подобным интервалам I_1, $\mu I_1 = 2c_{20}Q^{-n-1+\gamma_2}$ с центрами в корнях полиномов α_1. Покрывая множество B_2 подобными интервалами I_1, получим искомую нижнюю оценку.

4. Заключение

Хотя теорема 4 гарантирует существование алгебраических чисел произвольной степени на сколь угодно коротких интервалах, получить конструктивное описание интервалов со свойством (9) в этой работе не удалось. Авторы будут признательны другим математикам, которым удастся получить продвижение в этой задаче.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Mathematische Annalen. 1916. Т. 77. С. 313-352.

2. Baker A., Schmidt W. M. Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proc. London Math. Soc. (3). 1970. Т. 21. С. 1-11.

3. Khintchine A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // Mathematische Annalen. 1924. Т. 92. С. 115-125.

4. Bernik V. I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials // Acta Arith. 1989. T. 53, №1. C. 17-28.

5. Beresnevich V. V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arith. 1999. T. 50, №2. C. 97-112.

6. Beresnevich V. V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Math. Hungarica. 2002. T. 94, №1-2. C. 99-130.

7. Bernik V. I., Kleinbock D., Margulis G. A. Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions // Internat. Math. Res. Notices. 2001. №9. C. 453-486.

8. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kleinbock D., Margulis G. A. Metric Diophantine approximation: The Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds // Mosc. Math. J. 2002. T. 2, №2. C. 203-225.

9. Bernik V. I., Vasilyev D. V. A Khinchine-type theorem for integer-valued polynomials of a complex variable // Proc. Inst. Math. 1999. T. 3. C. 10-20.

10. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kovalevskaya E. I. Metric theorems on the approximation of p-adic numbers // J. Number Theory. 2005. T. 111, №1. C. 33-56.

11. Bernik V. I., Budarina N. V., Dickinson D. A divergent Khintchine theorem in the real, complex, and p-adic fields // Lith. Math. J. 2008. T. 48, №2. C. 158-173.

12. Bernik V. I., Budarina N. V., Dickinson D. Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex, and p-adic fields // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 2010. T. 149, №2. C. 193-216.

13. Kuipers L., Niederreiter H. Uniform distribution of sequences. New York: Wiley. 1974.

14. Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine Approximation on Manifolds (Cambridge Tracts in Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press. 1999.

15. Bugeaud Y. Approximation by Algebraic Numbers (Cambridge Tracts in Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press. 2004.

16. Bernik V. I., Götze F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals // Izvestiya: Mathematics. 2015. T. 79, №1. C. 18-39.

17. Kaliada D. Distribution of real algebraic numbers of a given degree // Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi. 2012. T. 56, №3. C. 28–33.

18. Bernik V. I., Götze F., Gusakova A. G. On points with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves // Moscow J. of Comb. and Numb. Theor. 2016. T. 6, №2-3. C. 57-100.

19. Bernik V. I., Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations // Acta Arith. 1983. T. 42, №3. C. 219-253.

20. Götze F., Gusakova A. On algebraic integers in short intervals & near smooth curves // Acta Arith. 2016. T. 60, №2. C. 219-253.

21. Sprindzhuk V. G. A proof of Mahler's conjecture on the measure of the set of S-numbers // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1965. T. 29, №2. C. 379-436.

22. Sprindzhuk V. G. Mahler's Problem in Metric Number Theory. Minsk: Nauka i Tehnika. 1967.

23. Cassels J. W. S. An Introduction to Diophantine Approximation (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, №45). Cambridge: Cambridge University Press. 1957.

24. Budarina N. V., Götze F. Distance between Conjugate Algebraic Numbers in Clusters // Mat. Zametki. 2013. T. 94, №5. C. 780-783.

REFERENCES

1. Weyl, H. 1916, "Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins", *Mathematische Annalen*, vol. 77, pp. 313-352.

2. Baker, A., Schmidt, W. M. 1970, "Diophantine approximation and Hausdorff dimension", *Proc. London Math. Soc. (3)*, vol. 21, pp. 1-11.

3. Khintchine, A. 1924, "Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen", *Mathematische Annalen*, vol. 92, pp. 115-125.

4. Bernik V. I. 1989, "The exact order of approximating zero by values of integral polynomials", *Acta Arith.*, vol. 53, no. 1, pp. 17-28.

5. Beresnevich V. V. 1999, "On approximation of real numbers by real algebraic numbers", *Acta Arith.*, vol. 50, no. 2, pp. 97-112.

6. Beresnevich V. V. 2002, "A Groshev type theorem for convergence on manifolds", *Acta Math. Hungarica.*, vol. 94, no. 1-2, pp. 99-130.

7. Bernik V. I., Kleinbock D. & Margulis G. A. 2001, "Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions", *Internat. Math. Res. Notices.*, no. 9, pp. 453-486.

8. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kleinbock D. & Margulis G. A. 2002, "Metric Diophantine approximation: The Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds", *Mosc. Math. J.*, vol. 2, no. 2, pp. 203-225.

9. Bernik V. I., Vasilyev D. V. 1999, "A Khinchine-type theorem for integer-valued polynomials of a complex variable", *Proc. Inst. Math.*, vol. 3, pp. 10-20.

10. Beresnevich V. V., Bernik V. I. & Kovalevskaya E. I. 2005, "Metric theorems on the approximation of p-adic numbers", *J. Number Theory.*, vol. 111, no. 1, pp. 33-56.

11. Bernik V. I., Budarina N. V. & Dickinson D. 2008, "A divergent Khintchine theorem in the real, complex, and p-adic fields", *Lith. Math. J.*, vol. 48, no. 2, pp. 158-173.

12. Bernik V. I., Budarina N. V. & Dickinson D. 2010, "Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex, and p-adic fields", *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 149, no. 2, pp. 193-216.

13. Kuipers L., Niederreiter H. 1974, "Uniform distribution of sequences", Wiley, New York, 390 pp.

14. Bernik V. I., Dodson M. M. 1999, "Metric Diophantine Approximation on Manifolds (Cambridge Tracts in Mathematics)", Cambridge University Press, Cambridge, 172 pp.

15. Bugeaud Y. 2004, "Approximation by Algebraic Numbers (Cambridge Tracts in Mathematics)", Cambridge University Press, Cambridge, 274 pp.

16. Bernik V. I., Götze F. 2015, “Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals“, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 79, no. 1, pp. 18-39.

17. Kaliada D. 2012, “Distribution of real algebraic numbers of a given degree“, *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, vol. 56, no. 3, pp. 28–33.

18. Bernik V. I., Götze F., Gusakova A. G. 2016, “On points with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves“, *Moscow J. of Comb. and Numb. Theor.*, vol. 6, no. 2-3, pp. 57-100.

19. Bernik V. I. 1983, “Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations“, *Acta Arith.*, vol. 42, no. 3, pp. 219-253.

20. Götze F., Gusakova A. 2016, “H. On algebraic integers in short intervals & near smooth curves“, *Acta Arith.*, vol. 60, no. 2, pp. 219-253.

21. Sprindzhuk V. G. 1965, “A proof of Mahler's conjecture on the measure of the set of S-numbers“, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 29, no. 2, pp. 379-436.

22. Sprindzhuk V. G. 1967, “Mahler's Problem in Metric Number Theory“, Nauka i Tehnika, Minsk, 184 pp.

23. Cassels J. W. S. 1957, “An Introduction to Diophantine Approximation (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, №45)“, Cambridge University Press, Cambridge, 168 pp.

24. Budarina N. V., Götze F. 2013, “Distance between Conjugate Algebraic Numbers in Clusters“, *Mat. Zametki.*, vol. 94, no. 5, pp. 780-783.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 517.925 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-127-138

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ-ХАМЕЛЕОНОВ

И. М. Буркин (Тула)

Аннотация

Сегодня хорошо известно, что динамические системы можно подразделить на системы с самовозбуждающимися и системы со скрытыми аттракторами. Самовозбуждающийся аттрактор имеет область притяжения, которая примыкает к неустойчивым состояниям равновесия системы, в то время как скрытые аттракторы имеют области притяжения, не пересекающиеся с малыми окрестностями ни одного из состояний равновесия. Скрытые аттракторы играют важную роль в инженерных приложениях, поскольку их наличие вызывает неожиданные и потенциально опасные ответы на возмущения, например, в таких структурах как мост, или крыло самолета. Кроме того, сложное поведения хаотических систем используют в различных областях, от таких, как изображения водяных знаков, аудио схема шифрования, хаотическая маскировка коммуникаций, до генераторов случайных чисел. Недавно исследователями были обнаружены так называемые "системы-хамелеоны". Эти системы были так названы потому, что они демонстрируют самовозбуждающиеся или скрытые колебания в зависимости от значений входящих в них параметров. В настоящей работе предлагается простой алгоритм синтезирования однопараметрических систем-хамелеонов. Отслеживается эволюция ляпуновских показателей и размерности Каплана-Йорке таких систем при изменении параметра.

Ключевые слова: самовозбуждающийся аттрактор, скрытый аттрактор, мультистабильность, цикл, бифуркация, система-хамелеон, показатели Ляпунова, размерность Каплана-Йорке.

Библиография: 21 названий.

ABOUT ONE APPROACH TO CONSTRUCTION OF CHAOTIC CHAMELEONS SYSTEMS

I. M. Burkin (Tula)

Abstract

Now it is well known that dynamical systems can be categorized into systems with self-excited attractors and systems with hidden attractors. A self-excited attractor has a basin of attraction that is associated with an unstable equilibrium, while a hidden attractor has a basin of attraction that does not intersect with small neighborhoods of any equilibrium points. Hidden attractors play the important role in engineering applications because they allow unexpected and potentially disastrous responses to perturbations in a structure like a bridge or an airplane wing. In addition, complex behaviors of chaotic systems have been applied in various areas from image watermarking, audio encryption scheme, asymmetric color pathological image encryption, chaotic masking communication to random number generator. Recently so-called chameleons systems have been found out by researchers. These systems were so are named for the reason, that they shows self-excited or hidden oscillations depending on the value of parameters entering into them. In the present work the simple algorithm of synthesizing of one-parametrical chameleons systems is offered. Evolution Lyapunov exponents and Kaplan-Yorke dimension of such systems at change of parameter is traced.

Keywords: self-excited attractor, hidden attractor, multistability, cycle, bifurcation, chameleon system, Lyapunov exponents, Kaplan–Yorke dimension.

Bibliography: 21 titles.

1. Введение

Колебания динамической системы могут быть легко локализованы численно, если все начальные данные из его открытой окрестности в фазовом пространстве (за исключением, может быть, конечного числа точек) приводят к переходному процессу, который приближается к колебанию. Такое колебание называют аттрактором, а его притягивающее множество, то есть множество точек, которые притягиваются к аттрактору, называют бассейном притяжения. На ранних этапах исследования реальных динамических систем их структура была, как правило, столь простой, что был очевидным факт ограниченности всех траекторий системы и возможность возбуждения колебаний только из окрестностей неустойчивых состояний равновесия [1–3]. Таким образом, ученые того времени могли легко вычислить аттракторы исследуемых систем, "запуская" вычислительную процедуру из малой окрестности неустойчивого состояния равновесия, отслеживая переходный процесс, который выводил на аттрактор и локализовал его. Аттракторы, бассейн притяжения которых содержит сколь угодно малые окрестности неустойчивых состояний равновесия, получили название "*самовозбуждающиеся аттракторы*". В настоящее время тысячи публикаций посвящены вычислению и анализу самовозбуждающихся хаотических колебаний динамических систем.

Дальнейшее изучение динамических систем показало, что самовоэбуждающиеся периодические и хаотические колебания не дают исчерпывающую информацию о возможных типах поведения динамических систем. Были найдены колебания другого типа, которые в работе [4] получили название "*скрытые колебания*" и "*скрытые аттракторы*". Так было предложено назвать аттракторы, бассейн притяжения которых не пересекается с малыми окрестностями состояний равновесия. Локализация и аналитическое изучение характеристик скрытых аттракторов представляет значительно более сложную проблему, поскольку невозможно использовать информацию о состояниях равновесия системы для организации переходных процессов с использованием стандартных вычислительных процедур. Более того, нет никакой гарантии, что вычислительная процедура "выйдет" на аттрактор, поскольку его область притяжения может быть очень малой, а его размерность может быть много меньше размерности изучаемой системы.

Системы, обладающие скрытыми аттракторами, являются мультистабильными, и потому контроль работы таких систем является достаточно сложной задачей [5,6]. Последнее обстоятельство побудило многих исследователей обратиться к поиску и исследованию особенности динамики систем, обладающих скрытыми аттракторами. Были, например, изучены системы, не имеющие состояний равновесия [7–9], имеющие единственное состояние равновесия [10,11], имеющие бесконечное число состояний равновесия [12,13]. Недавно в работе [14] были обнаружена гиперхаотическая четырехмерная система, обладающая одновременно самовозбуждающимися и скрытыми аттракторами. Наконец, в работе [15] было введено новое понятие "системы-хамелеоны". Так было предложено назвать системы, которые в зависимости от значений входящих в них параметров, могут обладать либо самовозбуждающимися, либо скрытыми аттракторами.

В настоящей работе предлагается использовать метод гомотопии для синтезирования однопараметрических систем-хамелеонов. Показано, что при изменении параметра в таких системах меняется не только тип аттрактора, но также его ляпуновские показатели и размерность Каплана–Йорке.

2. Основная идея

Основная идея использования метода гомотопии для построения систем-хамелеонов состоит в следующем. Рассматривается однопараметрическое семейство динамических систем

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \varepsilon \in [0, 1], x \in R^n \tag{1}$$

такое, что при малых $\varepsilon > 0$система (1) имеет легко обнаруживаемые самовозбуждающиеся орбитально асимптотически устойчивые циклы или самовозбуждающиеся хаотические аттракторы. Численно отслеживается эволюция этих циклов или аттракторов при возрастании ε до 1. При некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ происходит бифуркация, при которой меняется тип аттракторов системы. Например, некоторые состояния равновесия системы становятся устойчивыми в малом и из их окрестностей перестают возбуждаться аттракторы, а самовозбуждающиеся орбитально устойчивые циклы трансформируются в скрытые циклы или скрытые хаотические аттракторы. При $\varepsilon = 1$ все аттракторы системы являются скрытыми.

Ясно, что ключевым моментом в реализации описанной идеи является построение функции $f(x, \varepsilon)$, для которой имеет место описанный выше сценарий. Один из методов построения функции с нужными свойствами для класса систем вида

$$\frac{dX}{dt} = AX + B\xi,\ \xi = \varphi(\varepsilon, \sigma),\ \sigma = C^*X \tag{2}$$

предложен в работе [16]. В системе (2) A, B, C — вещественные постоянные матрицы порядков, соответственно, $n \times n$, $n \times m$ и $n \times m$, где $m \leqslant n$, $x \in R^n$,$\xi_j = \varphi_j(\varepsilon, \sigma_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Функции $\varphi_j(\varepsilon, \sigma_j)$– непрерывные, дифференцируемые при $\sigma_j = 0, \varepsilon \in [0, 1]$. Знак $(*)$ в записи (2) означает транспонирование, а ниже в комплексном случае — эрмитово сопряжение. Для упрощения дальнейшего изложения приведем здесь формулировку теоремы, доказанной в [16] в удобной для нас форме.

Обозначим через $W(p) = C^*(A - pI_n)^{-1}B$, где p — комплексная переменная, передаточную $m \times m$-матрицу системы (2). Относительно функций $\varphi_j(\varepsilon, \sigma_j)$ будем предполагать выполненными условия

$$\mu_j^1 \leqslant \frac{\varphi_j(\varepsilon, \sigma_{j2}) - \varphi_j(\varepsilon, \sigma_{j1})}{\sigma_{j2} - \sigma_{j1}} \leqslant \mu_j^2 \text{для всех} \sigma_j \in (-\infty, \infty), \sigma_{j1} \neq \sigma_{j2}, \varphi_j(\varepsilon, 0) = 0, j = 1, 2, \ldots, m, \tag{3}$$

Предположения (3), очевидно, означают, что система (2) имеет решение (точку покоя) $x = 0$. Ниже будем считать, что это единственная точка покоя системы (2) при $\varepsilon = \varepsilon_0 \in [0, 1]$. Условия, гарантирующие выполнение последнего предположения, приведены в [16, Лемма 2].

Теорема. Пусть для $\varepsilon = \varepsilon_0$нелинейности $\varphi_j(\varepsilon_0, \sigma_j)$ в системе (2) удовлетворяют соотношениям (3) и существует число $\lambda > 0$ такое, что выполнены следующие условия.

1) Матрица $A + B\varphi'(\varepsilon_0, 0)C^*$, где $\varphi'(\varepsilon_0, 0) = diag(\varphi_1'(\varepsilon_0, 0), \ldots, \varphi_m'(\varepsilon_0, 0))$, имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \leqslant Rep \leqslant 0$.

2) Система (2) диссипативна по Левинсону. Например, матрица $A + BhC^*$, где $h = diag(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ является гурвицевой и $|\varphi(\varepsilon_0, \sigma) - hC^*X| < \gamma < \infty$.

3) При всех $\omega \in [0, \infty)$ справедливо неравенство

$$\det Re[I_m + \mu^1 W(i\omega - \lambda)]^*[I_m + \mu^2 W(i\omega - \lambda)] \neq 0, \mu^k = diag(\mu_1^k, \mu_2^k, \ldots, \mu_m^k), k = 1, 2. \tag{4}$$

Тогда система (2) имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $X = 0$.

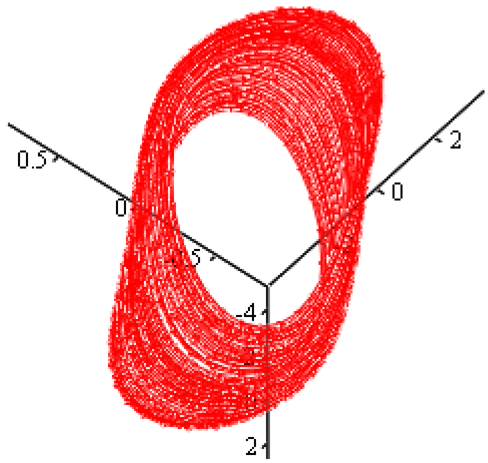


Рис. 22

Ниже будут продемонстрированы примеры построения систем-хамелеонов, опирающиеся на использование сформулированной теоремы.

3. Система-хамелеон с двумя нелинейностями

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1.241x_1 + 8.45x_2 - 8.45[\varepsilon \tfrac{x_1^4+0.2}{0.34x_1^4+0.2} \tanh x_1 + (1-\varepsilon)\psi_1(x_1)], \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 + 0.1[\varepsilon x_2^3 + (1-\varepsilon)\psi_2(x_2)], \\ \dot{x}_3 &= -12.1x_2 - 0.005x_3, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\psi_1(x_1) = \begin{cases} 0.18x_1 - 0.11\ ,\ x \leqslant -0.5, \\ 0.4x_1,\ |x| \leqslant 0.5, \\ 0.18x_1 + 0.11,\ x \geqslant 0.5, \end{cases}$, $\quad \psi_2(x_2) = 0.5x_2.$

Эта система может быть записана в виде (2) с

$$A = \begin{pmatrix} 1.241 & 8.45 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -12.1 & -0.005 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -8.45 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(\varepsilon, \sigma_1) = \varepsilon \tfrac{x_1^4+0.2}{0.34x_1^4+0.2} \tanh \sigma_1 + (1-\varepsilon)\psi_1(\sigma_1),\ \varphi_2(\varepsilon, \sigma_2) = \varepsilon\sigma_2^3 + (1-\varepsilon)\psi_2(\sigma_2).$$

Можно убедиться, что для рассматриваемой системы выполнено соотношение (4) для $\lambda = 0.6$, $\mu^2 = diag(0.77, 1).\mu^1 = diag(0.17, 0)$. Как нетрудно проверить, для системы (5) при $\varepsilon = 0$ выполнены все условия теоремы и, следовательно, она имеет самовозбуждающийся из ее единственного состояния равновесия $(0,0,0)$орбитально устойчивый цикл. При $\varepsilon \approx 0.827$ это состояние равновесия становится устойчивым в малом и появляется орбитально устойчивый скрытый цикл системы. Наконец, при$\varepsilon = 1$система имеет хаотический аттрактор, представленный на рисунке 1.

При этом система (5) имеет 3 состояния равновесия $(0,0,0)$ и $(\pm 3.3862, \pm 1.3987 \times 10^{-3}, \mp 3.3862)$. Нулевое состояние равновесия устойчиво в малом, а два других состояния равновесия являются седло-фокусами. Отметим, что точка с координатами $(3.386, 1.3987\times$

$\times 10^{-3}, -3.386)$ находится в области притяжения найденного аттрактора, тогда как траектория, начинающаяся в близкой точке $(3.386, 1.3987 \times 10^{-2}, -3.386)$ очень быстро "уходит на бесконечность". То есть аттрактор является скрытым.

Вычислим ляпуновские показатели и размерность Каплана-Йорке найденного при $\varepsilon = 1$ аттрактора. Напомним, что для вычисления размерности Каплана–Йорке D_{KY} необходимо вычислить ляпуновские показатели $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ системы. Тогда $D_{KY} = k + \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) |\lambda_{k+1}|^{-1}$, где число k такое, что $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \geqslant 0$, а $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i < 0$. Для аттрактора рассматриваемой системы находим $\lambda_1 = 0.2344862$, $\lambda_2 = -0.1387071$,$\lambda_3 = -1.1398013$,$D_{KY} = 2.0840314$. Наличие положительного старшего показателя Ляпунова и дробность размерности Каплана–Йорке свидетельствуют о том, что аттрактор, представленный на рис.1, является странным хаотическим аттрактором.

4. Система "гипертолчка"

Простейшими системами, в которых были обнаружены хаотические аттракторы, являются так называемые "системы толчка" (“Jerk Systems”) [17], которые описываются уравнениями вида $\frac{d^3x}{dt^3} = J\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x\right)$, где функцию J называют "толчком поскольку она порождается одной скалярной переменной x, а в системе Ньютона величины $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ и $\frac{d^3x}{dt^3}$ есть, соответственно, смещение скорости, ускорение и толчок. В работе [18] рассмотрена так называемая "система гипертолчка" ("Hyperjerk System") $\frac{d^4x}{dt^4} = J\left(\frac{d^3x}{dt^3}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x\right)$специального вида, в которой найден самовозбуждающийся из её единственного состояния равновесия хаотический аттрактор. С использованием результатов работы [18] ниже будет построена однопараметрическая система-хамелеон. Рассмотрим систему

$$\frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{dx}{dt} + x = -\varphi\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \varepsilon\right), \tag{6}$$

где функция $\varphi\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \varepsilon\right)$ будет построена ниже. Система (6) может быть записана в виде (2) где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dddot{x} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma = C^* X.(6')$$

Положим

$$\varphi(\sigma, \varepsilon) = 2\varepsilon \cdot arctg(4\sigma) \exp\left(\frac{\sigma}{3}\right) + (1 - \varepsilon)\frac{4(\sigma^3 + 3\sigma)}{\sigma^2 + 4} \tag{7}$$

Для рассматриваемой системы $W(p) = p^2(p^4 + p^3 + +3p + 1)^{-1}$. Для такой передаточной функции выполнено соотношение (4) при $\mu_1 = 3, \mu_2 = 4.5$, $\lambda = 0.3$. График функции (7) при $\varepsilon = 0$ имеет единственную точку пересечения $\sigma = 0$ с прямой $\sigma + W(0)\varphi = 0$. Поэтому при $\varepsilon = 0$ система (2)-(6′) имеет единственное состояние равновесия $X = 0$. Как нетрудно убедиться, при $\varepsilon = 0$ справедливы соотношения (3) с указанными μ_1и μ_2, а также условия 1) и 2) теоремы для $h = 4$. Поэтому, согласно утверждению теоремы, при $\varepsilon = 0$ система (2)-(6′) имеет сомовозбуждающийся аттрактор (цикл). Поскольку при всех $\varepsilon \in [0, 1]$ график функции $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ поочередно пребывает в секторах гурвицевости и неустойчивости степени 2 системы (2)-(6′), то из результатов работы [19] следует, что при всех $\varepsilon \in [0, 1]$ система (6) с

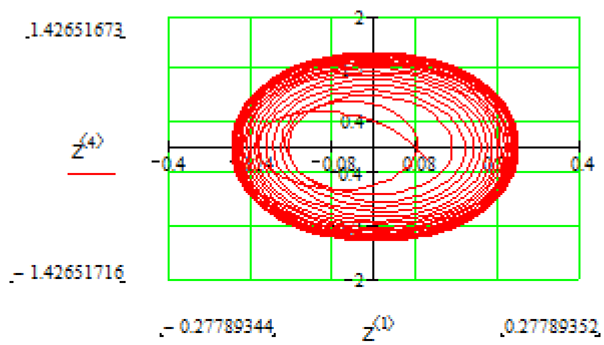


Рис. 23: ($\varepsilon = 0$)

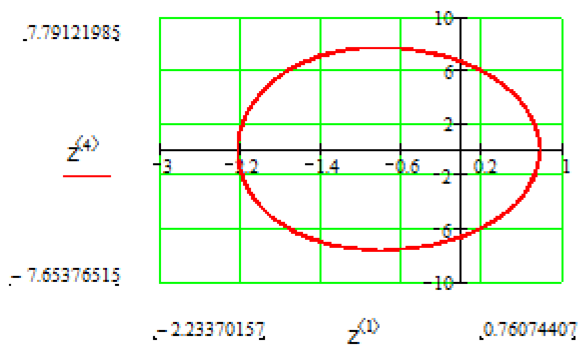


Рис. 24: ($\varepsilon = 0.2$)

нелинейностью (7) может иметь аттрактор (самовозбуждающийся при $\varepsilon \in [0, \frac{1}{15})$ и скрытый при $\varepsilon \in (\frac{1}{15}, 1]$).

Пользуясь приемом, предложенным в работе [16], отследим численно эволюцию существующего при $\varepsilon = 0$ самовозбуждающегося цикла системы при изменении ε от 0 до 1. На рисунке 2 представлена проекция на плоскость (x_1, x_4) самовозбуждающегося при $\varepsilon = 0$ цикла, полученного интегрированием системы с начальными условиями (0.1,0.1,-0.2,-0.2). На рисунке 3 проекция на ту же плоскость скрытого цикла при $\varepsilon = 0.2$.

При $\varepsilon \approx 0.637$ наблюдается удвоение периода скрытого цикла (рис.4), а при $\varepsilon \approx 0.826$ — учетверенный период (рис.5). Приведены проекции на плоскость (x_2, x_3).

На рисунках 6 и 7 представлены проекции на плоскость (x_1, x_4) скрытого странного аттрактора системы (6) при $\varepsilon = 0.88$ и $\varepsilon = 1$. Для этих аттракторов вычислены ляпуновские

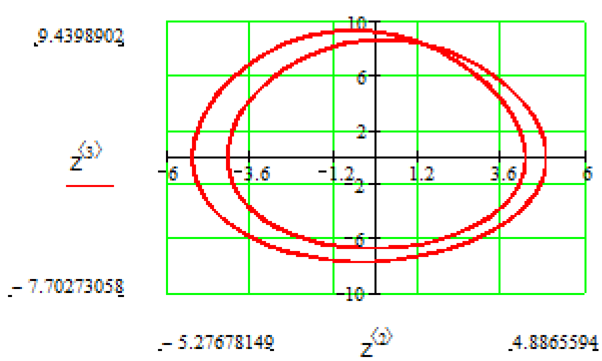


Рис. 25: ($\varepsilon = 0.637$)

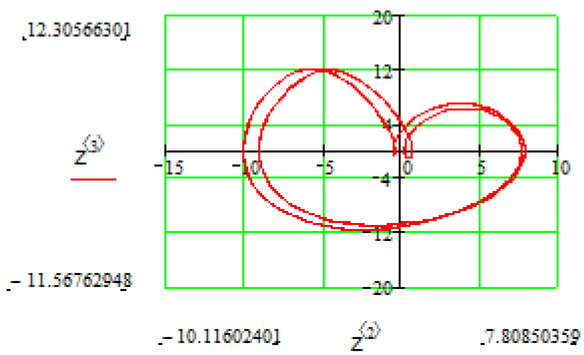


Рис. 26: ($\varepsilon = 0.826$)

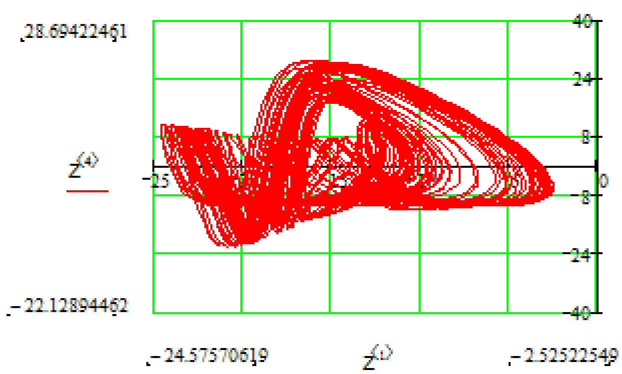


Рис. 27: ($\varepsilon = 0.88$)

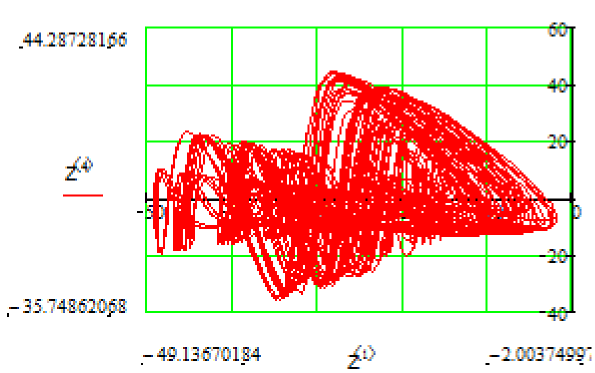


Рис. 28: ($\varepsilon = 1$)

показатели и размерности Каплана-Йорке, приведенные в таблице 1

Таблица 1

ε	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	D_{KY}
0.88	0,1045429	-0,0290923	-0,2226633	-0,8609476	2,3755037
1	0,0611581	-0,0132200	-0,1323177	-0,9156204	2,3622955

5. Системы-хамелеоны с бесконечным числом состояний равновесия

Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Pz + q\varphi(\sigma,\varepsilon), \\ \dot{\sigma} &= r^*z + \beta\varphi(\sigma,\varepsilon), \end{aligned} \tag{8}$$

где P– $(n-1)\times(n-1)$матрица, q и r — $(n-1)$-векторы, β — скаляр, $\varphi(\sigma,\varepsilon)$ — 2π-периодическая по σ функция. Уравнений вида (8) описывают широкий класс систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). В настоящее время различные модификации ФАПЧ широко используется в системах радиосвязи, телекоммуникационных системах, системах глобального позиционирования (GPS), компьютерных архитектурах и другие областях. Если функция $\varphi(\sigma,\varepsilon)$при некотором значении ε имеет нули на периоде $[0,2\pi)$, то система (8) имеет бесконечное число состояний равновесия.

В работе [20] найдены системы вида (8), обладающие бесконечным числом скрытых аттракторов. Опираясь на результаты этой работы, ниже построена система-хамелеон, демонстрирующая, при различных значения параметра ε, как самовозбуждающиеся мультивитковые аттракторы, так и скрытые аттракторы-близнецы.

Положим

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} -15.8 \\ -0.3 \end{pmatrix}, \beta = -3.2,$$

$$\varphi(\varepsilon,\sigma) = \tfrac{\pi}{6}[1.00052411\sin\sigma + \varepsilon(0.404720835\sin 2\sigma + 0.1798759\sin 3\sigma + 0.062532677\sin 4\sigma)]$$

При $\varepsilon \in [0, 0.78)$аттракторы самовозбуждаются из любой точки окрестностей всех состояний равновесия системы $z_1 = z_2 = 0, \sigma = \pi m, m \in Z$и являются мультивитковыми аттракторами. Пара таких аттракторов для $\varepsilon = 0.2$, возбуждающихся из окрестностей точки (0,0,0) (синий) и (0,0,π) (красный), представлена на рисунке 8.

При $\varepsilon \approx 0.78$ состояния равновесия (0,0, $2\pi m$) становятся устойчивыми в малом, а из окрестностей неустойчивых состояний равновесия $(0, 0, (2m+1)\pi)$возбуждаются аттракторы, представленные на рис.9.

При $\varepsilon = 1$ исследуемая система имеет бесконечное число скрытых аттракторов - близнецов, представленных на рис 10. Каждая пара этих аттракторов расположена в своей "полосе" $\pi(2k-1) < \sigma < \pi(2k+1), k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ Ляпуновские показатели и размерность Каплана-Йорке аттракторов, представленных на рисунках 8-10, приведены в таблице 2.

Таблица 2

ε	λ_1	λ_2	λ_3	D_{KY}
0.2	0.2226039	-0.0048410	-2.70566	2.0804842
0.78	0.4235692	-0.0539937	-1.2663746	2.2918375
1	0.666114	-0.0426294	-1.0348001	2.1055671

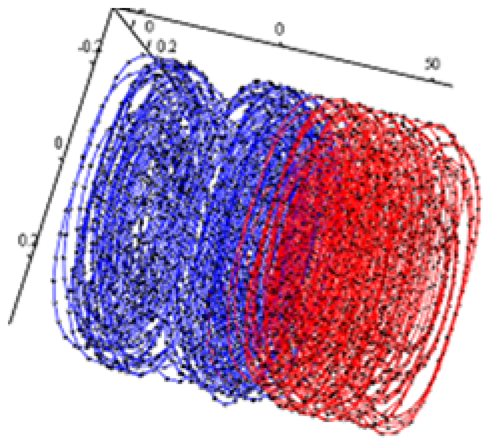


Рис. 29: ($\varepsilon = 0.2$)

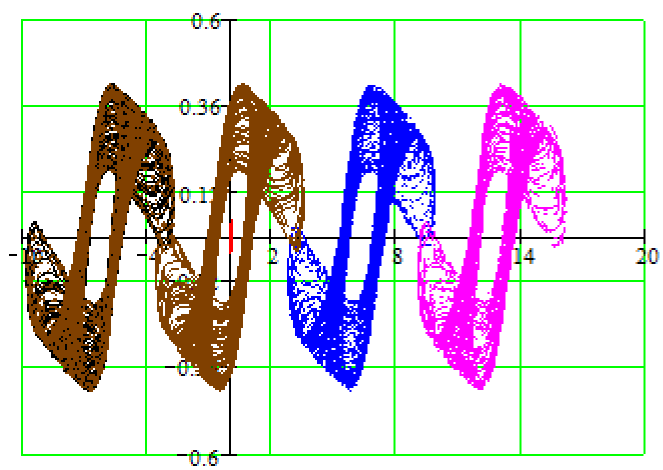


Рис. 30: ($\varepsilon = 0.78$, проекция на (z_2, σ))

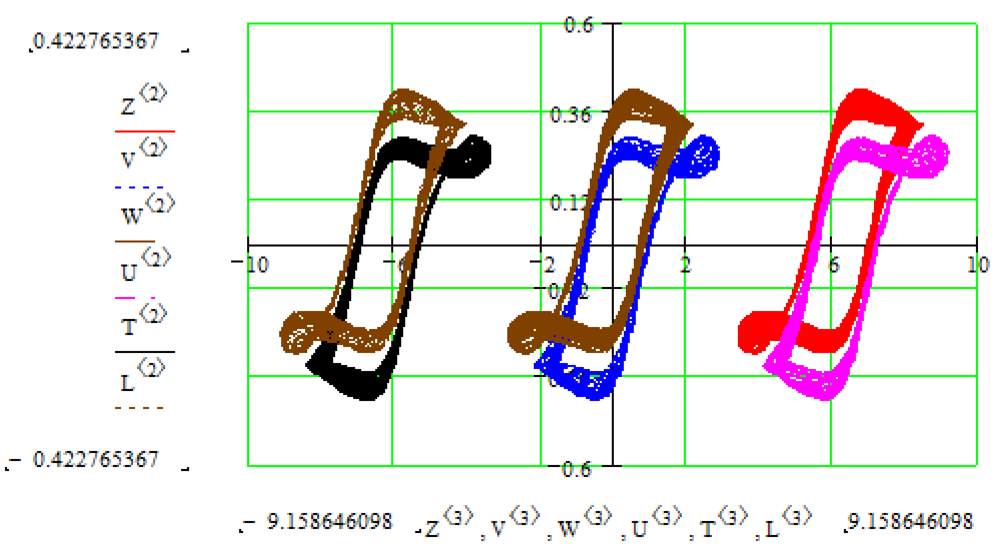


Рис. 31: Семейство скрытых аттракторов (проекция на плоскость (z_2, σ), $\varepsilon = 1$)

6. Заключение

В данной работе предложен алгоритм синтезирования однопараметрических динамических систем-хамелеонов вида (2). Автору известны примеры синтезирования систем-хамелеонов иного вида. Например, в работе [21], по сути дела, была построена система-хамелеон, которая при некоторых значениях параметра имеет самовозбуждающийся аттрактор, принадлежащий обобщенной системе Лоренца. При изменении параметра в некотором диапазоне указанный аттрактор трансформируется в скрытый аттрактор системы Глуховского–Должанского.

При наличии большого количества обнаруженных в настоящее время систем, обладающих как самовозбуждающимися, так и скрытыми аттракторами, остается открытым вопрос: можно ли локализовать скрытый аттрактор любой системы, отслеживая численно эволюцию самовозбуждающегося аттрактора некоторой вспомогательной системы при изменении ее параметров в некотором диапазоне?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lorenz, E. N. 1963, "Deterministic nonperiodic flow". J.Atmos.Sci., vol.20, pp.65 -75.

2. Rössler, O. E. 1976, "An Equation for Continuous Chaos". Physics Letters A, vol. 57, no.5, pp.397 -398.

3. Chua, L. O. 1992, "A zoo of Strange Attractors from the Canonical Chua's Circuits". Proc. Of the IEEE 35th Midwest Symp. on Circuits and Systems (Cat. No.92CH3099-9). Wash-ington, vol. 2, pp. 916 – 926.

4. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagaitsev V. I. 2011 "Localization of hidden Chua's at-tractors". Phys. Lett. A, vol. 375, pp.2230-2233.

5. Sharma P. R. , Shrimali M.D , Prasad A , Kuznetsov N.V , Leonov G.A. 2015, "Control of multistability in hidden attractors". Eur Phys J Spec Top; vol. 224,no.8, pp.1485–1491 .

6. Sharma P. R. , Shrimali M.D , Prasad A , Kuznetsov N.V , Leonov G.A . 2015, "Controlling dynamics of hidden attractors".Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 25, no.4:1550061.

7. Pham V-T, Volos C. , Jafari S. , Wei Z. , Wang X . 2014, "Constructing a novel no-equilib- rium chaotic system". Int J Bifurcation and Chaos, vol. 24,no.5:1450073 .

8. Tahir F. R. , Jafari S. , Pham V-T. , Volos C , Wang X . 2015, "A novel no-equilibrium chaot-ic system with multiwing butterfly attractors". Int J Bifurcation and Chaos, vol.25, no.4:1550056.

9. Jafari S, Pham V-T., Kapitaniak T . 2016, "Multiscroll chaotic sea obtained from a simple 3d system without equilibrium". Int J Bifurcation and Chaos, vol.26,no.2:1650031.

10. Molaie M., Jafari S., Sprott J. C., Golpayegani SMRH 2013, "Simple chaotic flows with one stable equilibrium". Int J Bifurcation and Chaos, vol.23, no.11:1350188.

11. Kingni S. T., Simo H., Woafo P. 2014, "Three-dimensional chaotic autonomous system with only one stable equilibrium: analysis, circuit design, parameter estimation, control, synchroni-zation and its fractional-order form". Eur Phys J Plus, vol.129, no.5, pp.1–16 .

12. Pham V-T , Jafari S., Volos C. , Giakoumis A/ , Vaidyanathan S. , Kapitaniak T. 2016, "A chaotic system with equilibria located on the rounded square loop and its circuit implementation". IEEE Trans Circuits Syst II, vol.63,no.9, pp.878–882.

13. Pham V-T., Jafari S., Volos C., 2017, "A novel chaotic system with heart-shaped equilibrium and its circuital implementation". Optik, vol. 131, pp. 343–349.

14. Rajagopal K., Karthikeyan A., Duraisamy P. 2017,"Hyperchaotic chameleon: fractional order FPGAimplementation". Complexity Volume 2017. Available at: https://www.hindawi.com/journals/complexity/aip/8979408/.

15. Rajagopal K., Akgul A. , Jafari S. , Karthikeyan A., Koyuncu I. 2017, " Chaotic chameleon: Dynamic analyses, circuit implementation, FPGA design and fractional-order form with basic analyses". Chaos, Solitons and Fractals, vol.103, pp.476-487.

16. Буркин И. М., Нгуен Нгок Хиен. Аналитико-численные методы поиска скрытых колебаний в многомерных динамических системах // Диф. уравнения, 2014, т. 50, № 13. С.1695–1717.

17. Sprott, J. C. 2011, “A new chaotic jerk circuit”. IEEE Trans. Circuits Syst.-II: Expr. Briefs, vol. 58, pp. 240–243.

18. Sprott, J. C., Fatma Y. D., 2016, "Simple Chaotic Hyperjerk System". Int. J. Bifurcation and Chaos,vol. 26, no.11: 1650189.

19. Буркин И. М. О явлении буферности в многомерных динамических системах // Диф. уравнения, 2002, т.38, №5. С. 615-625.

20. Буркин И. М. Скрытые аттракторы некоторых мультистабильных систем с бесконеч-ным числом состояний равновесия // Чебышевский сборник,2017,т.18. № 2 (62). С. 18-33.

21. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N. 2015, "Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion". The Eu-ropean Physical Journal Special Topics, Multistability: Uncovering Hidden Attractors, vol. 224, no. 8, pp. 1421–1458,doi:10.1140/epjst/e2015-02470-3.

REFERENCES

1. Lorenz, E. N. 1963, "Deterministic nonperiodic flow". *J.Atmos.Sci.*, vol.20, pp.65 -75.

2. Rössler, O. E. 1976, "An Equation for Continuous Chaos". *Physics Letters A*, vol. 57, no.5, pp.397 -398.

3. Chua, L. O. 1992, "A zoo of Strange Attractors from the Canonical Chua's Circuits". Proc. Of the IEEE 35th Midwest Symp. on Circuits and Systems (Cat. No.92CH3099-9). Wash-ington, vol. 2, pp. 916 – 926.

4. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagaitsev V. I. 2011 "Localization of hidden Chua's at-tractors". *Phys. Lett. A*, vol. 375, pp.2230-2233.

5. Sharma P. R. , Shrimali M. D. , Prasad A , Kuznetsov N. V , Leonov G. A. 2015, "Control of multistability in hidden attractors". *Eur Phys J Spec Top*; vol. 224,no.8, pp.1485–1491 .

6. Sharma P. R. , Shrimali M. D. , Prasad A , Kuznetsov N. V , Leonov G. A. 2015, "Controlling dynamics of hidden attractors". *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 25, no.4:1550061.

7. Pham V-T, Volos C. , Jafari S. , Wei Z. , Wang X . 2014, "Constructing a novel no-equilib- rium chaotic system". *Int J Bifurcation and Chaos*, vol. 24,no.5:1450073 .

8. Tahir F.R. , Jafari S. , Pham V-T. , Volos C , Wang X . 2015, "A novel no-equilibrium chaot-ic system with multiwing butterfly attractors". *Int J Bifurcation and Chaos*, vol.25, no.4:1550056.

9. Jafari S, Pham V-T., Kapitaniak T . 2016, "Multiscroll chaotic sea obtained from a simple 3d system without equilibrium". *Int J Bifurcation and Chaos*, vol.26,no.2:1650031.

10. Molaie M., Jafari S., Sprott J.C., Golpayegani SMRH 2013, "Simple chaotic flows with one stable equilibrium". *Int J Bifurcation and Chaos*, vol.23, no.11:1350188.

11. Kingni S.T.,., Simo H., Woafo P. 2014, "Three-dimensional chaotic autonomous system with only one stable equilibrium: analysis, circuit design, parameter estimation, control, synchronization and its fractional-order form". *Eur Phys J Plus*, vol.129, no.5, pp.1–16 .

12. Pham V-T , Jafari S., Volos C. , Giakoumis A/ , Vaidyanathan S. , Kapitaniak T. 2016, "A chaotic system with equilibria located on the rounded square loop and its circuit implementation". *IEEE Trans Circuits Syst II*, vol.63,no.9, pp.878–882.

13. Pham V-T., Jafari S., Volos C., 2017, "A novel chaotic system with heart-shaped equilibrium and its circuital implementation". *Optik*, vol. 131, pp. 343–349.

14. Rajagopal K., Karthikeyan A., Duraisamy P. 2017,"Hyperchaotic chameleon: fractional order FPGAimplementation". *Complexity Volume 2017.* Available at: https://www.hindawi.com/journals/complexity/aip/8979408/.

15. Rajagopal K., Akgul A. , Jafari S. , Karthikeyan A., Koyuncu I. 2017, "Chaotic chameleon: Dynamic analyses, circuit implementation, FPGA design and fractional-order form with basic analyses". *Chaos, Solitons and Fractals*, vol.103, pp.476-487.

16. Burkin I.M., Nguen N.K. 2014, "Analytical-Numerical Methods of Finding Hidden Oscilla-tions in Multidimensional Dynamical Systems". *Diff. Equations*, vol. 50, no. 13, pp. 1695–1717.

17. Sprott, J. C. 2011, “A new chaotic jerk circuit”. *IEEE Trans. Circuits Syst.-II: Expr. Briefs*, vol. 58, pp. 240–243.

18. Sprott, J. C., Fatma Y. D., 2016, "Simple Chaotic Hyperjerk System". *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 26, no.11: 1650189.

19. Burkin I.M. 2002, "The buffer phenomenon in multidimensional dynamical systems". *Diff. Equations*, vol.38, no.5, pp.615-625.

20. Burkin I.M. 2017, "Hidden attractors of some multistable systems with infinite number of equlibria". *Chebyshevskiy sbornik*, vol.18. no 2 (62), pp. 18-33.

21. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N. 2015, "Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion". *The Eu-ropean Physical Journal Special Topics, Multistability: Uncovering Hidden Attractors*, vol. 224, no. 8, pp. 1421–1458,doi:10.1140/epjst/e2015-02470-3.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-139-166

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ[1]

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, Е. П. Офицеров, О. И. Смирнов
(г. Тула)

Аннотация

Работа посвящена обзору основных результатов, полученных при решении экстремальных задач Турана и Дельсарта на торе; экстремальных задач Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана на евклидовом пространстве, полупрямой и гиперболоиде. Приводятся также результаты, полученные при решении близкой задачи об оптимальном аргументе в модуле непрерывности в точном неравенстве Джексона в пространстве L^2 на евклидовом пространстве и полупрямой. Большая часть результатов была получена авторами обзора. В основу обзора лег доклад, сделанный В.И. Ивановым на симпозиуме «6th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields, Pecs, Hungary, 24-31 August 2017». Решается также задача об оптимальном аргументе на гиперболоиде. В качестве основного аппарата при решении экстремальных задач на полупрямой используются квадратурные формулы Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Для многомерных экстремальных задач осуществляется редукция к одномерным задачам с помощью усреднения допустимых функций по евклидовой сфере. Во всех случаях экстремальная функция единственна.

Ключевые слова: преобразования Фурье, Ганкеля и Якоби, экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана, квадратурные формулы Гаусса и Маркова.

Библиография: 60 названий.

SOME EXTREMAL PROBLEMS OF HARMONIC ANALYSIS AND APPROXIMATION THEORY

D. V. Gorbachev, V.I. Ivanov, E. P. Ofitserov, O. I. Smirnov (Tula)

Abstract

The paper is devoted to a survey of the main results obtained in the solution of the Turán and Fejér extremal problems on the torus; the Turán, Delsarte, Bohmann, and Logan extremal problems on the Euclidean space, half-line, and hyperboloid. We also give results obtained when solving a similar problem on the optimal argument in the module of continuity in the sharp Jackson inequality in the space L^2 on the Euclidean space and half-line. Most of the results were obtained by the authors of the review. The survey is based on a talk made by V. I. Ivanov at the conference «6th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields, Pecs, Hungary, 24-31 August 2017». We solve also the problem of the optimal argument on the hyperboloid. As the basic apparatus for solving extremal problems on the half-line, we use the Gauss and Markov quadrature formulae on the half-line with respect to the zeros of the eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem. For multidimensional extremal problems we apply a reduction to one-dimensional problems by means of averaging of admissible functions over the Euclidean sphere. Extremal function is unique in all cases.

Keywords: Fourier, Hankel, and Jacobi transforms, Turán, Fejér, Delsarte, Bohman, and Logan extremal problems, Gauss and Markov quadrature formulae.

Bibliography: 60 titles.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-01-00308.

1. Введение

Работа посвящена обзору основных результатов, полученных при решении экстремальных задач Турана и Дельсарта на торе, экстремальных задач Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана на евклидовом пространстве, полупрямой и гиперболоиде. Приводятся также результаты, полученные при решении близкой задачи об оптимальном аргументе в точном неравенстве Джексона в пространстве L^2. В основу обзора лег доклад, сделанный В.И. Ивановым на конференции «6th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields, Pecs, Hungary, 24-31 August 2017».

Напомним историю этих задач для тора и евклидова пространства.

В 1970 году П. Тураном в частной беседе со С.Б. Стечкиным была поставлена экстремальная задача о наибольшем среднем значении четной непрерывной 1-периодической функции с неотрицательными коэффициентами Фурье, фиксированным значением в нуле и носителем на отрезке $[-h, h]$, $0 \leqslant h \leqslant 1/2$. Неотрицательность коэффициентов Фурье функции эквивалентна ее положительной определенности. Постановка этой задачи возникла в связи с приложениями в аналитической теории чисел. Следуя Стечкину, эту задачу стали называть задачей Турана.

С.Б. Стечкин [1] решил задачу Турана для рациональных $h = \frac{1}{q}$. Д.В. Горбачев и А.С. Маношина [2] свели задачу Турана для рациональных h к дискретному варианту известной задачи Фейера [3] и получили решение задачи Турана для ряда рациональных последовательностей h. Для всех рациональных h задачу Турана решили В.И. Иванов и Ю.Д. Рудомазина [4, 5]. Полное решение задачи Турана было получено В.И. Ивановым [6, 7]. Оно позволило решить и задачу Дельсарта, в которой условие равенства функции нулю вне отрезка $[-h, h]$ заменяется на менее ограничительное условие ее неположительности. Экстремальная функция в задаче Турана оказалась экстремальной и в задаче Дельсарта.

Н.Н. Андреев [8] рассмотрел многомерную периодическую задачу Турана для функций с носителем в кубе и ромбе. Д.В. Горбачев [9] доказал, что периодическая задача Турана для функций с носителем в выпуклом центрально-симметричном компактном теле асимптотически эквивалентна аналогичной непериодической задаче Турана на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$.

Непериодический вариант задачи Турана появился задолго до ее постановки в периодическом случае. Еще в 1935 году К.Л. Зигель [10] решил задачу о наибольшем среднем значении непрерывной в $\mathbb{R}^d$ функции, положительно определенной или, что тоже самое с неотрицательным преобразованием Фурье, фиксированным значением в нуле и носителем в евклидовом шаре. С помощью решения этой задачи Зигель предполагал получить точную форму теоремы Минковского о точке решетки. Однако решение Зигеля было не замечено. Оно было переоткрыто Р.П. Боасом и М. Кацем [11] в одномерном случае, и Д.В. Горбачевым [9] в многомерном случае. Другое доказательство было предложено М.Н. Колонзакисом и Сц.Д. Ревешем [12].

Задача Турана в $\mathbb{R}^d$ исследовалась и для других выпуклых центрально-симметричных компактных тел. В.В. Арестов и Е.Е. Бердышева [13, 14] решили задачу Турана для политопов, замощающих $\mathbb{R}^d$ с помощью решетки, а М.Н. Колонзакис и Сц.Д. Ревеш [12, 15, 16] — для спектральных тел. Отметим, что указанные политопы являются спектральными телами, но евклидов шар спектральным не является.

Во всех известных случаях решения задачи Турана в $\mathbb{R}^d$ экстремальное значение равно объему половины тела, а экстремальной функцией с точностью до постоянного положительного множителя является свертка характеристической функции половины тела с нею самой. Тела с такими свойствами были названы телами Турана. В настоящий момент не известно примеров тел, не являющихся телами Турана.

Если задачу Турана в $\mathbb{R}^d$ переформулировать, переходя от функций к их преобразованиям Фурье, то мы придем к экстремальной задаче Фейера для неотрицательных целых функций многих переменных экспоненциального типа. Для неотрицательных тригонометрических полиномов одной переменной она была поставлена и решена Л. Фейером [3]. Для неотрицательных целых функций одной переменной экспоненциального типа она была решена Р.П. Боасом и М. Кацем [11].

Если в задаче Турана для шара условие равенства функции нулю вне шара заменить на условие неположительности, мы получим задачу Дельсарта.

До последнего времени решение задачи Дельсарта было известно только в одномерном случае, когда экстремальная функция в задаче Турана является экстремальной и в задаче Дельсарта. В 2016 году М. Вязовская [17] решила задачу Дельсарта в размерности 8, а Х. Кон, А. Кумар, С. Миллер, Д. Радченко и М. Вязовская [18] решили ее в размерности 24. Это позволило им пполучить решение проблемы упаковки евклидова пространства в размерностях 8 и 24.

Множество целых функций экспоненциального типа плотно в пространстве $L(\mathbb{R}^d)$. Была надежда получить решение Дельсарта для шара на пути ее решения для целых функций произвольного экспоненциального сферического типа. Однако это удалось сделать только при одном соотношении между радиусом шара и типом функции. Этот вариант задачи Дельсарта решили Д.В. Горбачев [19] и независимо Х. Кон [20]. Экстремальная функция была построена ранее В.И. Левенштейном [21] и В.А. Юдиным [22].

В задаче Бомана необходимо вычислить наименьший второй момент для интегрируемых неотрицательных целых функций экспоненциального сферического типа с фиксированным нулевым моментом. Эта задача имеет приложения в теории вероятностей и теории приближений. Экстремальная функция является плотностью случайной величины с наименьшим вторым моментом. Ее преобразование Фурье является генератором хорошего линейного положительного метода приближения, известного как метод Бомана–Коровкина [23, 24].

Эта задача в одномерном случае была поставлена и решена Х. Боманом [25]. В многомерном случае она решена В. Эмом, Т. Гнейтингом и Д. Ричардсом [26].

В задаче Логана необходимо вычислить радиус наименьшего шара, вне которого нетривиальная положительно определенная целая функция экспоненциального сферического типа неположительна.

Эта задача в одномерном случае была поставлена и решена Б. Логаном [27, 28]. В многомерном случае она решена Д.В. Горбачевым [29]. Экстремальная функция в одномерном случае ранее была построена Н.И. Черных [30], а в многомерном случае — В.А. Юдиным [31]. Е.Е. Бердышева [32] решила эту задачу, когда шар заменяется на куб, используя конструкцию В.А. Юдина экстремальной функции. Она доказала, что для любого выпуклого центрально-симметричного компактного тела задача Логана эквивалентна задаче об оптимальном аргументе в модуле непрерывности, определяемом этим телом, в точном неравенстве Джексона в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство неравенств Джексона в пространствах L^2 с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности является важным направлением исследований по экстремальным задачам теории приближений. Первые результаты в этом направлении были получены Н.И. Черных [30, 33] для одномерного тора $\mathbb{T}$.

Точная константа в неравенстве Джексона в L^2, зависящая от приближающего подпространства и модуля непрерывности, имеет глобальный минимум. Если фиксировать приближающее подпространство, то минимальное значение аргумента в модуле непрерывности, при котором константа Джексона становится наименьшей, называется оптимальным аргументом.

В многомерном случае оптимальный аргумент зависит как от геометрии спектра V приближающих целых функций, так и геометрии окрестности нуля $U \subset \mathbb{R}^d$ в определении модуля непрерывности. Д.В. Горбачев [29] нашел оптимальный аргумент, когда оба тела являются евклидовыми шарами. Е.Е. Бердышева [32] нашла оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в $L^2(\mathbb{R}^d)$, когда тело V есть l_p^d-шар, $1 \leqslant p \leqslant 2$, а U — куб. А.В. Иванов и В.И. Иванов [34] перенесли ее результаты на случай параллелепипеда, который оказался сложнее и потребовал развития конструкции В.А. Юдина экстремальной функции в задаче Логана.

Перейдем к точным постановкам экстремальных задач и формулировкам результатов, полученных при их решении. Мы ограничимся экстремальными задачами на локально компактных многообразиях, имеющими общие подходы к их решению.

2. Экстремальные задачи для преобразования Фурье на $\mathbb{R}^d$

Пусть

$$\mathcal{F}f(y)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i(x,y)}\,dx$$

— преобразование Фурье функции f,

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dx$$

— свертка функций f и g, V — выпуклое центрально-симметричное компактное тело в $\mathbb{R}^d$, $|x|$ — евклидова длина вектора $x\in\mathbb{R}^d$, B_2^d — евклидов шар радиуса 1 с центром в нуле, χ_E — характеристическая функция множества E, $J_\alpha(t)$ — функция Бесселя порядка $\alpha\geqslant -1/2$, q_α — ее наименьший положительный нуль, $j_\alpha(t)=2^\alpha\Gamma(\alpha+1)J_\alpha(t)/t^\alpha$ — нормированная функция Бесселя.

Задача Турана. Вычислить величину

$$T(V,\mathbb{R}^d)=\sup\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx,$$

если

$$f\in C_b(\mathbb{R}^d),\quad f(0)=1,\quad \operatorname{supp} f\subset V,\quad \mathcal{F}f(y)\geqslant 0.$$

Задача Фейера. Вычислить величину

$$F(V,\mathbb{R}^d)=\sup g(0),$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}^d)\cap C_b(\mathbb{R}^d),\quad g(y)\geqslant 0,\quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,dy=1,\quad \operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}g\subset V.$$

По теореме Пэли–Винера множество допустимых функций в задаче Фейера совпадает с множеством неотрицательных целых функций экспоненциального типа, определяемого полярой тела V.

Допустимые функции в задаче Фейера являются преобразованиями Фурье допустимых функций в задаче Турана и обратно, поэтому

$$T(V,\mathbb{R}^d)=F(V,\mathbb{R}^d).$$

Напомним, что тело V называется замощающим, если $V+L=\mathbb{R}^d$ для некоторой решетки L и для любых различных $\lambda_1,\lambda_2\in L$ тела $V+\lambda_1$, $V+\lambda_2$ пересекаются по множеству меры нуль. Тело V называется спектральным, если для некоторого дискретного множества $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$ семейство экспонент $\{e^{i(\lambda,x)}:\ \lambda\in\Lambda\}$ является ортогональным базисом в пространстве $L_2(V)$.

Для простоты записи экстремальные функции будем указывать здесь и далее с точностью до положительного постоянного множителя.

Теорема 1 [10, 9, 11, 12, 14]. *Если тело V — евклидов шар или замощающее, или спектральное, то в задачах Турана и Дельсарта*

$$T(V,\mathbb{R}^d) = F(V,\mathbb{R}^d) = \Big|\frac{1}{2}V\Big| = \int_{\frac{1}{2}V} dx.$$

Единственные экстремальные функции имеют вид

$$f_V = \chi_{\frac{1}{2}V} * \chi_{\frac{1}{2}V}, \quad g_V = \mathcal{F} f_V.$$

Задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D(sB_2^d,\mathbb{R}^d) = \sup \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx,$$

если

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d),\ f(0)=1,\ f(x) \leqslant 0,\ |x| \geqslant s,\ \mathcal{F}f(y) \geqslant 0.$$

Величина $D(sB_2^d,\mathbb{R}^d)$ дает хорошую оценку сверху плотности упаковки пространства $\mathbb{R}^d$. Она вычислена только при $d=1,8,24$, когда получаемые оценки плотности упаковки точны.

Модифицированная задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D(rB_2^d, sB_2^d,\mathbb{R}^d) = \sup \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,dy,$$

если

$$g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d), \quad g(0)=1, \quad g(y) \leqslant 0,\ |y| \geqslant s,$$
$$\operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} g \subset rB_2^d, \quad \mathcal{F}^{-1} g(y) \geqslant 0.$$

По теореме Пэли–Винера функции в модифицированной задаче Дельсарта являются целыми функциями экспоненциального сферического типа не выше r, принадлежащими пространству $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Модифицированная задача Дельсарта решена только в единственном случае $s = 2q_{d/2}/r$.

Теорема 2 [19, 20]. *Если $s = 2q_{d/2}/r$, то в модифицированной задаче Дельсарта*

$$D(rB_2^d, sB_2^d,\mathbb{R}^d) = \Big(\int_{\frac{r}{2}B_2^d} dx\Big)^{-1}.$$

Единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(x) = \frac{j_{d/2}^2(|x|r/2)}{1-\Big(|x|r/2q_{d/2}\Big)^2}.$$

Задача Бомана. Вычислить величину

$$B(rB_2^d,\mathbb{R}^d) = \inf \int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 g(y)\,dy,$$

если

$$g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d),\ g(y) \geqslant 0,\ \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,dy = 1,\ \operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} g \subset rB_2^d.$$

По теореме Пэли–Винера функции g в задаче Бомана являются целыми функциями экспоненциального сферического типа не выше r, принадлежащие пространству $L^1(\mathbb{R}^d)$. Можно считать, что $|y|^2 g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, так как значение интеграла $\int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 g(y)\,dy = +\infty$ заведомо не является наименьшим.

Теорема 3 [25, 26]. *В задаче Бомана*

$$B(rB_2^d, \mathbb{R}^d) = \Big(\frac{2q_{d/2-1}}{r}\Big)^2.$$

Единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(x) = \frac{j_{d/2-1}^2(|x|r/2)}{\Big(1 - \Big(|x|r/2q_{d/2-1}\Big)^2\Big)^2}.$$

Пусть U, V — выпуклые центрально-симметричные компактные тела в $\mathbb{R}^d$, $|\cdot|_V, |\cdot|_U$ — нормы, определяемые этими телами, и

$$\Lambda(g, V) = \sup\{|y|_V : g(y) > 0\}.$$

Задача Логана. Вычислить величину

$$L(V, \tau U, \mathbb{R}^d) = \inf \Lambda(g, V),$$

если

$$g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d), \quad g \not\equiv 0, \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1} g \subset \tau U, \quad \mathcal{F}^{-1} g(y) \geqslant 0.$$

Для величины $L(V, \tau U, \mathbb{R}^d)$ справедливо равенство

$$L(V, \tau U, \mathbb{R}^d) = \frac{L(V, U, \mathbb{R}^d)}{\tau}.$$

Теорема 4 [27, 28, 29]. *Если $V = U = B_2^d$, то в задаче Логана*

$$L(B_2^d, B_2^d, \mathbb{R}^d) = 2q_{d/2-1}.$$

Единственная экстремальная функция имеет вид

$$g(x) = \frac{j_{d/2-1}^2(|x|/2)}{1 - \Big(|x|/2q_{d/2-1}\Big)^2}.$$

Пусть $a = (a_1, \dots, a_d)$, $a_j > 0$, $\Pi_a = \prod_{j=1}^d$ — параллелепипед,

$$b_a = \Big(\frac{\pi}{a_1}, \dots, \frac{\pi}{a_d}\Big), \ |x|_p = \Big(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\Big)^{1/p}, \ 1 \leqslant p < \infty, \ B_p^d = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x|_p \leqslant 1\}.$$

Теорема 5[32, 34]. *Если $1 \leqslant p \leqslant 2$, $V = B_p^d$, $U = \Pi_a$, то в задаче Логана*

$$L(B_p^d, \Pi_a, \mathbb{R}^d) = |b_a|_p.$$

Единственная экстремальная функция имеет вид

$$g(x) = \Big(|b_a|_p^p - \sum_{j=1}^{d} \Big(\frac{a_j}{\pi}\Big)^{2-p} x_j^2\Big) \prod_{j=1}^{d} \frac{\cos^2(a_j x_j/2)}{(1-(a_j x_j/\pi)^2)^2}.$$

Пусть для функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$E(f,\sigma V)_2 = \inf\big\{\|f-g\|_2 \colon g \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \operatorname{supp}\mathcal{F}g \subset \sigma V\big\}$$

— величина ее наилучшего приближения частичными интегралами преобразования Фурье со спектром в теле σV, где норма

$$\|f\|_2 = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

По теореме Пэли–Винера она совпадает с величиной наилучшего приближения классом целых функций экспоненциального типа, определяемого полярой σV^*, принадлежащих пространству $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Модуль непрерывности функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ определяется равенством

$$\omega(\tau U, f)_2 = \sup_{t \in \tau U} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+t)-f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Константа Джексона

$$D(\sigma V, \tau U, \mathbb{R}^d)_2 = \sup\Big\{\frac{E(f,\sigma V)_2}{\omega(\tau U, f)_2} \colon f \in L^2(\mathbb{R}^d)\Big\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E(f,\sigma V)_2 \leqslant D\omega(\tau U, f)_2.$$

Для константы Джексона справедливо равенство

$$D(\sigma V, \tau U, \mathbb{R}^d)_2 = D(V, \tfrac{\tau}{\sigma} U, \mathbb{R}^d)_2,$$

поэтому можно считать, что $\sigma = 1$.

Известно, что для всех V и U

$$D(V, \tau U, \mathbb{R}^d)_2 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Величина

$$\tau(V, U, \mathbb{R}^d) = \inf\big\{\tau > 0 \colon D(V, \tau U, \mathbb{R}^d)_2 = 2^{-1/2}\big\}$$

называется оптимальным аргументом.

Теорема 6 [32]. *Для всех тел V, U,*

$$\tau(V, U, \mathbb{R}^d) = L(V, U, \mathbb{R}^d).$$

Из теорем 5, 6 вытекают точные значения оптимальных аргументов для пар (B_2^d, B_2^d) и (B_p^d, Π_a), $1 \leqslant p \leqslant 2$.

3. Экстремальные задачи для преобразования Ганкеля на полупрямой $\mathbb{R}_+$

Экстремальные функции в задачах для евклидова шара являются радиальными. Усреднением функций по сфере с нормированной мерой $d\omega(x')$,

$$Sf(r) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(rx')\, d\omega(x'),$$

многомерные экстремальные задачи сводятся к аналогичным одномерным экстремальным задачам для преобразования Ганкеля на полупрямой. В случае евклидова шара к экстремальным задачам для преобразования Ганкеля сводятся и экстремальные задачи для преобразования Данкля (см. [35, 36, 47]).

Пусть $\alpha \geqslant -1/2$, $d\nu_\alpha(t) = (2^\alpha\Gamma(\alpha+1))^{-1}t^{2\alpha+1}\, dt$ — нормированная степенная мера на $\mathbb{R}_+$, и

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda) = \int_0^\infty f(t) j_\alpha(\lambda t) d\nu_\alpha(t)$$

— преобразование Ганкеля. Отметим, что $\mathcal{H}_\alpha^{-1} = \mathcal{H}_\alpha$.

Сужение преобразования Фурье на радиальные функции приводит к преобразованию Ганкеля с $\alpha = d/2-1$. В этом случае

$$j_{d/2-1}(t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i(x,\xi)}\, d\omega(\xi),\ |x| = t.$$

В пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha)$ с нормой

$$\|f\|_{2,d\nu_\alpha} = \Big(\int_0^\infty |f(t)|\, d\nu_\alpha(t)\Big)^{1/2}$$

действует положительный оператор обобщенного сдвига Гегенбауэра

$$T^t f(x) = \int_0^\infty j_\alpha(t\lambda) j_\alpha(x\lambda) \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\, d\nu_\alpha(\lambda), \quad t,\, x \in \mathbb{R}_+,$$

который может быть распространен на пространства $L_p(\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, причем для любого $t \in \mathbb{R}_+$ $\|T^t\|_{p\to p} = 1$. Оператор обобщенного сдвига позволяет определить свертку [38]

$$(f * g)(x) = \int_0^\infty T^t f(x) g(t)\, d\mu(t).$$

Пусть $\chi_r(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0, r]$.

Задача Турана. Вычислить величину

$$T_\alpha(r, \mathbb{R}_+) = \sup \int_0^\infty f(t)\, d\nu_\alpha(t),$$

если

$$f \in C_b(\mathbb{R}_+), \quad f(0) = 1, \quad \operatorname{supp} f \subset [0, r], \quad \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda) \geqslant 0.$$

Задача Фейера. Вычислить величину

$$F_\alpha(r, \mathbb{R}_+) = \sup g(0),$$

если

$$g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(y) \geqslant 0,$$

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)=1, \quad \operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha(g)\subset[0,r].$$

По теореме Пэли–Винера преобразование Ганкеля множества допустимых функций в задачей Фейера совпадает с множеством четных неотрицательных целых функций экспоненциального типа не выше r.

Теорема 7. В задачах Турана и Фейера

$$T_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=F_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=\int_0^{r/2} d\nu_\alpha(t),$$

единственные экстремальные функции имеют вид

$$f_r(t)=(\chi_{r/2}*\chi_{r/2})(t), \quad g_r(\lambda)=c\mathcal{H}_\alpha(f_r)(\lambda)=j_{\alpha+1}^2(\lambda r/2).$$

Задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D_\alpha(s,\mathbb{R}_+)=\sup\int_0^\infty f(t)\,d\nu_\alpha(t),$$

если

$$f\in L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\ f(0)=1,\ f(t)\leqslant 0,\ t\geqslant s,\ \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\geqslant 0.$$

Эта проблема решена только для $\alpha=-1/2, 3, 11$. В [17, 18] задачи Дельсарта решены именно для преобразования Ганкеля.

Модифицированная задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D_\alpha(r,s,\mathbb{R}_+)=\sup\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda),$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)\cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(0)=1, \quad g(\lambda)\leqslant 0,\ \lambda\geqslant s,$$
$$\operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha(g)\subset[0,r], \quad \mathcal{H}_\alpha(g)(\lambda)\geqslant 0.$$

Теорема 8. В модифицированной задаче Дельсарта

$$D_\alpha\Big(r,\frac{2q_{\alpha+1}}{r},\mathbb{R}_+\Big)=\Big(\int_0^{r/2} d\nu_\alpha(\lambda)\Big)^{-1},$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(\lambda)=\frac{j_{\alpha+1}^2(\lambda r/2)}{1-\Big(\lambda r/2q_{\alpha+1}\Big)^2}.$$

Задача Бомана. Вычислить величину

$$B_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=\inf\int_0^\infty \lambda^2 g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda),$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)\cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(\lambda)\geqslant 0,$$
$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)=1, \quad \operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha(g)\subset[0,r].$$

Теорема 9. В задаче Бомана

$$B_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=\Big(\frac{2q_\alpha}{r}\Big)^2,$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(\lambda)=\frac{j_\alpha^2(\lambda r/2)}{\Big(1-\Big(\lambda r/2q_\alpha\Big)^2\Big)^2}.$$

Пусть g — действительная непрерывная функция, $\Lambda(g)=\sup\{\lambda:\, g(\lambda)>0\}$.

Задача Логана. Вычислить величину

$$L_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=\inf\Lambda(g),$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\quad g(\lambda)\not\equiv 0,$$
$$\operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha(g)\subset[0,r],\quad \mathcal{H}_\alpha(g)(\lambda)\geqslant 0.$$

Теорема 10. В задаче Логана

$$L_\alpha(r,\mathbb{R}_+)=\frac{2q_\alpha}{r},$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(\lambda)=\frac{j_\alpha^2(\lambda r/2)}{1-\Big(\lambda r/2q_\alpha\Big)^2}.$$

Пусть для функции $f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)$

$$E_R(f)_{2,d\nu_\alpha}=\inf\bigl\{\|f-g\|_{2,d\nu_\alpha}\colon g\in L^2(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha),\ \operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha(g)\subset[0,R]\bigr\}$$

— величина ее наилучшего приближения частичными интегралами преобразования Ганкеля.

По теореме Пэли–Винера она совпадает с величиной наилучшего приближения классом четных целых функций экспоненциального типа не выше R.

Модуль непрерывности функции $f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)$ определяется равенством

$$\omega(\delta,f)_{2,d\nu_\alpha}=\sup_{0\le t\le\delta}\biggl(\int_0^\infty T^t|f(\cdot)-f(x)|^2(x)\,d\nu_\alpha(x)\biggr)^{1/2}.$$

Константа Джексона

$$D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\nu_\alpha}=\sup\biggl\{\frac{E_R(f)_{2,d\nu_\alpha}}{\omega(\delta,f)_{2,d\nu_\alpha}}\colon f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)\biggr\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E_R(f)_{2,d\nu_\alpha}\leqslant D\omega(\delta,f)_{2,d\nu_\alpha}.$$

Известно, что для всех $R,\delta>0$

$$D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\nu_\alpha}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Величина

$$\tau(R,\mathbb{R}_+)_{2,d\nu_\alpha}=\inf\bigl\{\delta>0\colon D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\nu_\alpha}=2^{-1/2}\bigr\}$$

называется оптимальным аргументом.

Теорема 11. *Если $\alpha\geqslant -1/2$, $R>0$, то*

$$\tau(R,\mathbb{R}_+)_{2,d\nu_\alpha}=\frac{2q_\alpha}{R}.$$

Для любой функции $f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)$ справедливо неравенство Джексона с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности

$$E_R(f)_{2,d\nu_\alpha}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\omega\Bigl(\frac{2q_\alpha}{R},f\Bigr)_{2,d\nu_\alpha}.$$

Отметим, что оптимальный аргумент совпадает с экстремальным значением в задаче Логана.

Теоремы 7-11 были доказаны Д.В. Горбачевым [29, 9, 19, 40, 39]. Он же доказал и единственность экстремальных функций.

Универсальный метод решения этих задач состоит в применении квадратурных формул Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям функции Бесселя (С. Фрапье и П. Оливер [41], Г.Р. Грозев и К.И. Рахман [42], Р.Б. Ганем и С. Фрапье [43]).

Пусть E_1^r — множество четных целых функций экспоненциального типа не выше r, для которых сужения на $\mathbb{R}_+$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+,d\nu_\alpha)$, $0<q_{\alpha,1}<\ldots<q_{\alpha,n}<\ldots$ — положительные нули функции Бесселя $J_\alpha(t)$.

Теорема 12. *Для любой функции $g\in E_1^r$ справедлива квадратурная формула Гаусса с положительными весами*

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)=\sum_{k=1}^\infty\gamma_{\alpha,k}(r)g(2q_{\alpha,k}/r).\tag{1}$$

Ряд в (1) сходится абсолютно.

Теорема 13. *Для любой функции $g\in E_1^r$ справедлива квадратурная формула Маркова с положительными весами*

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)=\gamma'_{\alpha,0}(r)g(0)+\sum_{k=1}^\infty\gamma'_{\alpha,k}(r)g(2q_{\alpha+1,k}/r).\tag{2}$$

Ряд в (2) сходится абсолютно.

Покажем как применяется формула Гаусса, например, при решении задачи Бомана. Так как допустимая функция $g\in E_1^r$, $\lambda^2 g\in E_1^r$, $g(\lambda)\geqslant 0$, и $\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)=1$, то применяя квадратурную формулу Гаусса два раза, получим

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\lambda^2 g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)&=\sum_{k=1}^\infty\gamma_{\alpha,k}(r)(2q_{\alpha,k}/r)^2g(2q_{\alpha,k}/\tau)\\&\geqslant(2q_{\alpha,1}/r)^2\sum_{k=1}^\infty\gamma_{\alpha,k}(r)g(2q_{\alpha,k}/r)\\&=(2q_{\alpha,1}/r)^2\int_0^\infty g(\lambda)\,d\nu_\alpha(\lambda)=(2q_{\alpha,1}/r)^2.\end{aligned}$$

Экстремальная функция $g_r(\lambda)$ в точках $2q_{\alpha,k}/r$, $k \geqslant 2$ должна иметь двойные нули. Этим требованиям удовлетворяет функция

$$g_\tau(\lambda) = \frac{j_\alpha^2(\lambda r/2)}{\Big(1 - \Big(\lambda r/2q_\alpha\Big)^2\Big)^2}.$$

Недавно [44] мы доказали квадратурные формулы Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля при некоторых естественных предположениях на весовую функцию w. В частности, они выполняются для степенного веса $w(t) = t^{2\alpha+1}$, $\alpha \geqslant -1/2$ и гиперболического веса

$$w(t) = (\sinh t)^{2\alpha+1}(\cosh t)^{2\beta+1}, \quad \alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2.$$

Пусть $\lambda_0 \geqslant 0$, и задача Штурма–Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(w(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,u_\lambda(t)\Big) + \big(\lambda^2 + \lambda_0^2\big)w(t)u_\lambda(t) = 0,$$
$$u_\lambda(0) = 1, \quad \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\,(0) = 0, \quad \lambda, t \in \mathbb{R}_+,$$

имеет спектральную меру $d\sigma(\lambda) = s(\lambda)\,d\lambda$, $s(\lambda) \asymp \lambda^{2\alpha+1}$, $\lambda \to +\infty$, и собственную функцию $\varphi(t,\lambda)$, которая является четной аналитической функцией t на $\mathbb{R}$ и четной целой функцией экспоненциального типа $|t|$ по λ. Пусть $0 < \lambda_1(t) < \ldots < \lambda_k(t) < \ldots$ — положительные нули $\varphi(t,\lambda)$ по λ.

Пусть $\varphi_0(t) = \varphi(t,0)$, $u(t,\lambda) = \varphi(t,\lambda)/\varphi_0(t)$, $0 < \lambda_1'(t) < \ldots < \lambda_k'(t) < \ldots$ — положительные нули $\frac{\partial}{\partial t}u(t,\lambda)$ по λ, E_1^r — множество четных целых функций экспоненциального типа не выше r, сужения которых на $\mathbb{R}_+$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$.

Theorem 14. *Для любой функции $g \in E_1^r$ справедлива квадратурная формула Гаусса с положительными весами*

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(r)g(\lambda_k(r/2)). \tag{3}$$

Ряд в (3) сходится абсолютно.

Theorem 15. *Для любой функции $g \in E_1^r$ справедлива квадратурная формула Маркова с положительными весами*

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \gamma_0'(r)g(0) + \sum_{k=1}^\infty \gamma_k'(r)g(\lambda_k'(r/2)). \tag{4}$$

Ряд в (4) сходится абсолютно.

4. Экстремальные задачи для преобразования Якоби на $\mathbb{R}_+$

В случае гиперболического веса

$$w(t) = w^{(\alpha,\beta)}(t) = 2^{2\rho}(\sinh t)^{2\alpha+1}(\cosh t)^{2\beta+1}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2,$$

где $\rho = \alpha + \beta + 1 = \lambda_0$, собственная функция $\varphi_\lambda(t)$ есть функция Якоби, записываемая с помощью гипергеометрической функции,

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\Big(\frac{\rho + i\lambda}{2}, \frac{\rho - i\lambda}{2}; \alpha + 1; -(\sinh t)^2\Big).$$

Пусть мера $d\mu(t) = d\mu^{(\alpha,\beta)}(t) = w(t)\,dt$,

$$s(\lambda) = (2\pi)^{-1}\left|\frac{2^{\rho - i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i\lambda)}{\Gamma((\rho+i\lambda)/2)\Gamma((\rho+i\lambda)/2-\beta)}\right|^{-2},$$

$d\sigma(\lambda) = d\sigma^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = s(\lambda)\,d\lambda$ — спектральная мера.

Прямое и обратное преобразования Якоби определяются равенствами

$$\mathcal{J}f(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\varphi_\lambda(t)\,d\mu(t), \quad \mathcal{J}^{-1}g(t) = \int_0^\infty g(\lambda)\varphi_\lambda(t)\,d\sigma(\lambda).$$

В пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ с нормой

$$\|f\|_{2,d\mu} = \Big(\int_0^\infty |f(t)|\,d\mu(t)\Big)^{1/2}$$

действует положительный оператор обобщенного сдвига

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_\lambda(t)\varphi_\lambda(x)\mathcal{J}f(\lambda)\,d\sigma(\lambda), \quad t,\, x \in \mathbb{R}_+,$$

который может быть распространен на $L_p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, причем для любого $t \in \mathbb{R}_+$ $\|T^t\|_{p\to p} = 1$. Оператор обобщенного сдвига позволяет определить свертку [45, 46]

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} T^t f(x) g(t)\,d\mu(t).$$

Задача Турана. Вычислить величину

$$T_{\alpha,\beta}(r, \mathbb{R}_+) = \sup \mathcal{J}f(0) = \sup \int_0^\infty f(t)\varphi_0(t)\,d\mu(t),$$

если

$$f \in C_b(\mathbb{R}_+), \quad f(0) = 1, \quad \operatorname{supp} f \subset [0, r], \quad \mathcal{J}f(\lambda) \geqslant 0.$$

Задача Фейера. Вычислить величину

$$F_{\alpha,\beta}(r, \mathbb{R}_+) = \sup g(0),$$

если

$$g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(\lambda) \geqslant 0,$$
$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = 1, \quad \operatorname{supp} \mathcal{J}^{-1}g \subset [0, r].$$

По теореме Пэли–Винера для преобразования Якоби множество допустимых функций в задаче Фейера совпадает с множеством четных неотрицательных целых функций экспоненциального типа не выше r.

Пусть $u_\lambda(t) = \varphi_\lambda(t)/\varphi_0(t)$, $\Delta(t) = \varphi_0^2(t) w(t)$.

Теорема 16[47]. В задачах Турана и Фейера

$$T_{\alpha,\beta}(r,\mathbb{R}_+)=F_{\alpha,\beta}(r,\mathbb{R}_+)=\int_0^{r/2}\Delta(t)\,dt,$$

единственные экстремальные функции имеют вид

$$f_r(t)=(\varphi_0\chi_{r/2}*\varphi_0\chi_{r/2})(t),\quad g_r(\lambda)=c\mathcal{J}f_r(\lambda)=\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda(r/2)}{\lambda^2}\right)^2.$$

Задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D_{\alpha,\beta}(s,\mathbb{R}_+)=\sup\mathcal{J}f(0)=\sup\int_0^\infty f(t)\varphi_0(t)\,d\mu(t),$$

если

$$f\in L_1(\mathbb{R}_+,d\mu)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\ f(0)=1,\ f(t)\leqslant 0,\ t\geqslant s,\ \mathcal{J}f(\lambda)\geqslant 0.$$

Решение этой задачи известно только для $\alpha=\beta=-1/2$, когда преобразование Якоби совпадает с косинус-преобразованием Фурье.

Модифицированная задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D_{\alpha,\beta}(r,s,\mathbb{R}_+)=\sup\mathcal{J}^{-1}g(0)=\sup\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\sigma)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\quad g(0)=1,\quad g(\lambda)\leqslant 0,\ \lambda\geqslant s,$$
$$\operatorname{supp}\mathcal{J}^{-1}g\subset[0,r],\quad \mathcal{J}^{-1}g(\lambda)\geqslant 0.$$

Модифицированная задача Дельсарта решена только в одном случае $s=\lambda_1'(r/2)$, где $\lambda_1'(t)$ есть наименьший положительный нуль функции $\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda(t)$ по λ.

Теорема 17 [48]. В модифицированной задаче Дельсарта

$$D_{\alpha,\beta}(r,\lambda_1'(r/2),\mathbb{R}_+)=\Big(\int_0^{r/2}\Delta(t)\,dt\Big)^{-1},$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda)=\frac{\Big(\lambda^{-2}\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda(r/2)\Big)^2}{1-\Big(\lambda/\lambda_1'(r/2)\Big)^2}.$$

Задача Бомана. Вычислить величину

$$B_{\alpha,\beta}(r,\mathbb{R}_+)=\inf\int_0^\infty(\lambda^2+\rho^2)g(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\sigma)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\quad g(\lambda)\geqslant 0,$$
$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=1,\quad \operatorname{supp}\mathcal{J}^{-1}g\subset[0,r].$$

Пусть $\lambda_1(t)$ — наименьший положительный нуль функции Якоби $\varphi_\lambda(t)$ по λ.

Теорема 18 [49]. В задаче Бомана

$$B_{\alpha,\beta}(r,\mathbb{R}_+)=\lambda_1^2(\tau/2)+\rho^2,$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(\lambda)=\frac{\varphi_\lambda^2(r/2)}{\Bigl(1-\bigl(\lambda/\lambda_1(r/2)\bigr)^2\Bigr)^2}.$$

Напомним, что $\Lambda(g)=\sup\{\lambda>0:\ g(\lambda)>0\}$.

Задача Логана. Вычислить величину

$$L_{\alpha,\beta}(r,\mathbb{R}_+)=\inf\Lambda(g),$$

если

$$g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\sigma)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\quad g(\lambda)\not\equiv 0,$$
$$\operatorname{supp}\mathcal{J}^{-1}g\subset[0,r],\quad \mathcal{J}^{-1}g(\lambda)\geqslant 0.$$

Теорема 19 [50]. В задаче Логана

$$L_{\alpha,\beta}(r,\mathbb{R}_+)=\lambda_1(r/2),$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(\lambda)=\frac{\varphi_\lambda^2(r/2)}{1-\bigl(\lambda/\lambda_1(r/2)\bigr)^2}.$$

Пусть для функции $f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\mu)$

$$E_R(f)_{2,d\mu}=\inf\bigl\{\|f-g\|_{2,d\mu}\colon g\in L^2(\mathbb{R}_+,d\mu),\ \operatorname{supp}\mathcal{J}g\subset[0,R]\bigr\}$$

— величина ее наилучшего приближения частичными интегралами преобразования Якоби.

По теореме Пэли–Винера она совпадает с величиной наилучшего приближения классом четных целых функций экспоненциального типа не выше R.

Модуль непрерывности функции $f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\mu)$ определяется равенством

$$\omega(\delta,f)_{2,d\mu}=\sup_{0\le t\le\delta}\biggl(\int_0^\infty T^t|f(\cdot)-f(x)|^2(x)\,d\mu(x)\biggr)^{1/2}.$$

Константа Джексона

$$D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu}=\sup\biggl\{\frac{E_R(f)_{2,d\mu}}{\omega(\delta,f)_{2,d\mu}}\colon f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\mu)\biggr\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E_R(f)_{2,d\mu}\leqslant D\omega(\delta,f)_{2,d\mu}.$$

Известно, что для всех $R,\delta>0$

$$D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Величина
$$\tau(R,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu}=\inf\bigl\{\delta>0\colon D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu}=2^{-1/2}\bigr\}$$
называется оптимальным аргументом.

Теорема 20 [51]. *Если $R>0$, то*
$$\tau(R,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu}=\lambda_1(R/2).$$
Для любой функции $f\in L^2(\mathbb{R}_+,d\mu)$ справедливо неравенство Джексона с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности
$$E_R(f)_{2,d\mu}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\omega\bigl(\lambda_1(R/2),f\bigr)_{2,d\mu}.$$

Отметим, что оптимальный аргумент совпадает с экстремальным значением в задаче Логана. Многомерный вариант теоремы 20 доказан в [52].

Рассматриваемые экстремальные задачи для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля решены в [53, 54, 47].

5. Экстремальные задачи для преобразования Фурье на гиперболоиде $\mathbb{H}^d$

Пусть $d\in\mathbb{N}$, $d\geq 2$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $(x,y)=x_1y_1+\ldots+x_dy_d$ и нормой $|x|=\sqrt{(x,x)}$,
$$\mathbb{S}^{d-1}=\{x\in\mathbb{R}^d:\,|x|=1\}$$
— евклидова сфера, $\mathbb{R}^{d,1}$ — $(d+1)$-мерное действительное псевдоеклидово пространство с билинейной формой $[x,y]=-x_1y_1-\ldots-x_dy_d+x_{d+1}y_{d+1}$,
$$\mathbb{H}^d=\{x\in\mathbb{R}^{d,1}:\,[x,x]=1,\,x_{d+1}>0\}$$
— верхняя пола двуполостного гиперболоида,
$$d(x,y)=\operatorname{arc\,cosh}[x,y]=\ln([x,y]+\sqrt{[x,y]^2-1})$$
— расстояние между $x,y\in\mathbb{H}^d$. Пара $\bigl(\mathbb{H}^d,d(\cdot,\cdot)\bigr)$ известна как пространство Лобачевского.

Пусть $x_0=(0,\ldots,0,1)\in\mathbb{H}^d$, $d(x,x_0)=d(x)$, $r>0$, $B_\tau=\{x\in\mathbb{H}^d:\,d(x)\leq r\}$ — шар радиуса r с центром в точке x_0 в пространстве Лобачевского.

Пусть $t>0$, $\eta\in\mathbb{S}^{d-1}$, $x=(\sinh t\,\eta,\cosh t)\in\mathbb{H}^d$,
$$d\mu(t)=d\mu^{((d-2)/2,-1/2)}(t)=2^{d-1}\sinh^{d-1}t\,dt=w(t)\,dt,$$
$$d\omega(\eta)=\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\,d\eta,\quad d\nu(x)=d\mu(t)d\omega(\eta)$$
— лебеговы меры на $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{S}^{d-1}$ и $\mathbb{H}^d$, соответственно. Отметим, что $d\omega$ — вероятностная мера на сфере, инвариантная относительно группы вращений $SO(d)$, а мера $d\nu$ — инвариантна относительно группы гиперболических вращений $SO_0(d,1)$.

Пусть $\lambda\in\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $\xi\in\mathbb{S}^{d-1}$, $y=(\lambda,\xi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}^{d-1}=\Omega^d$,
$$d\sigma(\lambda)=d\sigma^{((d-2)/2,-1/2)}(\lambda)=2^{3-2d}\Gamma^{-2}\Bigl(\frac{d}{2}\Bigr)\left|\frac{\Gamma\bigl(\frac{d-1}{2}+i\lambda\bigr)}{\Gamma(i\lambda)}\right|^2d\lambda,$$

$$d\tau(y) = d\sigma(\lambda)d\omega(\xi)$$

— лебеговы меры на $\mathbb{R}_+$ и Ω^d.

Прямое и обратное преобразования Фурье определяются равенствами

$$\mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{H}^d} f(x)[x,\xi']^{-\frac{d-1}{2}-i\lambda}\,d\nu(x), \quad \mathcal{F}^{-1}g(x) = \int_{\Omega^d} g(y)[x,\xi']^{-\frac{d-1}{2}+i\lambda}\,d\tau(y),$$

где $\xi' = (\xi, 1)$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$. Для преобразований Фурье справедлива L^2-теория, в частности, равенства Планшереля. Но так как их ядра являются неограниченными, для них не выполняется L^1-теория.

Пусть

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{((d-2)/2,-1/2)}(t) = F\Big(\frac{(d-1)/2+i\lambda}{2}, \frac{(d-1)/2-i\lambda}{2}; \frac{d}{2}; -(\sinh t)^2\Big)$$

— функция Якоби. Она получается усреднением по сфере ядер преобразований Фурье

$$\varphi_\lambda(t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} [x,\xi']^{-\frac{d-1}{2}\pm i\lambda}\,d\omega(\xi),$$

где $x = (\sinh t\,\eta, \cosh t)$, $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\xi' = (\xi, 1)$.

Два оператора усреднения по сфере

$$Pf(t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x)\,d\omega(\eta),\ x = (\sinh t\,\eta, \cosh t) \in \mathbb{H}^d,$$

$$Qg(\lambda) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(y)\,d\omega(\xi),\ y = (\lambda, \xi) \in \Omega^d$$

дают нам сферические функции на $\mathbb{H}^d$ и Ω^d. Они используются как для постановки, так и для решения экстремальных задач.

Если $f(x) = f_0(d(x)) = f_0(t)$ и $g(y) = g_0(\lambda)$ — сферические функции, то

$$\mathcal{F}f(y) = \mathcal{J}f_0(\lambda), \quad \mathcal{F}^{-1}g(x) = \mathcal{J}^{-1}g_0(t).$$

Пусть далее $\Delta(t) = \varphi_0^2(t)w(t)$, $u_\lambda(t) = \varphi_\lambda(t)/\varphi_0(t)$.

Основные факты из гармонического анализа на гиперболоиде можно найти в [56].

Задача Турана. Вычислить величину

$$T(r, \mathbb{H}^d) = \sup Q(\mathcal{F}f)(0),$$

если

$$f \in C_b(\mathbb{H}^d), \quad f(x_0) = 1, \quad \operatorname{supp} f \subset B_r, \quad \mathcal{F}f(y) \geqslant 0.$$

Задача Фейера. Вычислить величину

$$F(r, \mathbb{H}^d) = \sup Qg(0),$$

если

$$g \in L^1(\Omega^d, d\tau) \cap C_b(\Omega^d), \quad g(y) \geqslant 0,$$

$$\int_{\Omega^d} g(y)\,d\tau(y) = 1, \quad \operatorname{supp} \mathcal{F}^{-1}g \subset B_r.$$

Допустимые функции в задаче Фейера являются четными целыми функциями экспоненциального типа не выше r по λ.

Теорема 21. В задачах Турана и Фейера

$$T(r,\mathbb{H}^d)=F(r,\mathbb{H}^d)=\int_0^{r/2}\Delta(t)\,dt,$$

единственные экстремальные функции имеют вид

$$f_r(x)=(\varphi_0\chi_{r/2}*\varphi_0\chi_{r/2})(t),\quad g_r(y)=c\mathcal{F}f_r(y)=\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda(r/2)}{\lambda^2}\right)^2,$$

где

$$x=(\sinh t\,\eta,\cosh t)\in\mathbb{H}^d,\quad y=(\lambda,\xi)\in\Omega^d.$$

Задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D(s,\mathbb{H}^d)=\sup Q(\mathcal{F}f)(0),$$

если

$$f\in L^1(\mathbb{H}^d,d\nu)\cap C_b(\mathbb{H}^d),\ f(x_0)=1,\ f(x)\leqslant 0,\ d(x)\geqslant s,\ \mathcal{F}f(y)\geqslant 0.$$

Эта задача является полностью открытой.

Модифицированная задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D(r,s,\mathbb{H}^d)=\sup\int_{\Omega^d}g(y)\,d\tau(y),$$

если

$$g\in L^1(\Omega^d,d\tau)\cap C_b(\Omega^d),\quad Qg(0)=1,\quad g(\lambda,\xi)\leqslant 0,\ \lambda\geqslant s,$$
$$\operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}g\subset B_r,\quad \mathcal{F}^{-1}g(x)\geqslant 0.$$

Напомним, что $\lambda_1(t)$, $\lambda_1'(t)$ — наименьшие положительные нули функций $\varphi_\lambda(t)$ и $\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda(t)$ по λ.

Theorem 22. В модифицированной задаче Дельсарта

$$D(r,\lambda_1'(r/2),\mathbb{H}^d)=\left(\int_0^{r/2}\Delta(t)\,dt\right)^{-1},$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(y)=\frac{\left(\lambda^{-2}\frac{\partial}{\partial t}u_\lambda(r/2)\right)^2}{1-\left(\lambda/\lambda_1'(r/2)\right)^2},\quad y=(\lambda,\xi)\in\Omega^d.$$

Задача Бомана. Вычислить величину

$$B(r,\mathbb{H}^d)=\inf\int_{\Omega^d}(\lambda^2+\rho^2)g(y)\,d\tau(y),\quad y=(\lambda,\xi),$$

если

$$g\in L^1(\Omega^d,d\tau)\cap C_b(\Omega^d),\quad g(y)\geqslant 0,$$

$$\int_{\Omega^d} g(y)\,d\tau(y) = 1, \quad \operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}g \subset B_r.$$

Теорема 23. В задаче Бомана

$$B(r, \mathbb{H}^d) = \lambda_1^2(r/2) + \rho^2,$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(y) = \frac{\varphi_\lambda^2(r/2)}{\left(1 - \left(\lambda/\lambda_1(r/2)\right)^2\right)^2}, \quad y = (\lambda, \xi) \in \Omega^d.$$

Пусть $y = (\lambda, \xi) \in \Omega^d$, $g(y)$ действительная непрерывная функция на Ω^d,

$$\Lambda(g) = \sup\{\lambda > 0 :\ g(\lambda, \xi) > 0,\ \xi \in \mathbb{S}^{d-1}\}.$$

Задача Логана. Вычислить величину

$$L(r, \mathbb{H}^d) = \inf \Lambda(g),$$

если

$$g \in L^1(\Omega^d, d\tau) \cap C_b(\Omega^d), \quad g(y) \not\equiv 0,$$
$$\operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}g \subset B_r \quad \mathcal{F}^{-1}g(x) \geqslant 0.$$

Теорема 24. В задаче Логана

$$L(r, \mathbb{H}^d) = \lambda_1(r/2),$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_r(y) = \frac{\varphi_\lambda^2(r/2)}{1 - \left(\lambda/\lambda_1(r/2)\right)^2}, \quad y = (\lambda, \xi) \in \Omega^d.$$

Теоремы 22-24 доказаны в [50] в предположении, что допустимые функции g в задачах Фейера, Бомана, Логана и модифицированной задаче Дельсарта являются преобразованиями Фурье $g = \mathcal{F}f$ функций $f \in C_b(\mathbb{H}^d)$, $\operatorname{supp} f \subset B_r$. В [50] экстремальные задачи для преобразования Фурье на гиперболоиде решаются путем их редукции с помощью усреднения допустимых функций по сфере к аналогичным задачам для преобразования Якоби на полупрямой.

Покажем, что, если функция

$$g \in L^1(\Omega^d, d\tau) \cap C_b(\Omega^d), \quad \operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}g \subset B_r,$$

то для функции $f(x) = \mathcal{F}^{-1}g(x)$ выполнены условия

$$f \in C_b(\mathbb{H}^d), \quad \operatorname{supp} f \subset B_r, \quad g(y) = \mathcal{F}f(y).$$

Поэтому теоремы 22-24 вытекают из соответствующих утверждений в [50].

Так как

$$|g(y)[x, \xi']^{-\frac{d-1}{2}+i\lambda}| = |g(y)||[x, \xi']^{-\frac{d-1}{2}}| \leqslant |g(y)|e^{\frac{d-1}{2}t},$$

то интеграл

$$\int_{\Omega^d} g(y)[x, \xi']^{-\frac{d-1}{2}+i\lambda}\,d\tau(y)$$

сходится равномерно на любом шаре B_R и функция $f(x)$ непрерывна, но вообще-говоря не ограничена на $\mathbb{H}^d$. Но в нашем случае по условию $\operatorname{supp} f \subset B_r$, поэтому $f \in C_b(\mathbb{H}^d)$. Аналогично интеграл

$$\int_{B_r} f(x)[x,\xi']^{-\frac{d-1}{2}-i\lambda}\,d\nu(x)$$

сходится равномерно на Ω^d и функция $\mathcal{F}f(y) \in C(\Omega^d)$. Поточечное равенство $g(y) = \mathcal{F}f(y)$ вытекает из того, что оно справедливо в $L^2(\Omega^d)$ и функции в обеих частях равенства непрерывны.

Пусть для функции $f \in L^2(\mathbb{H}^d, d\nu)$

$$E_R(f)_{2,d\nu} = \inf\bigl\{\|f-g\|_{2,d\nu}\colon g \in L^2(\mathbb{H}^d, d\nu),\ \operatorname{supp}\mathcal{F}g \subset [0,R]\times\mathbb{S}^{d-1}\bigr\}$$

— величина ее наилучшего приближения частичными интегралами преобразования Фурье.

В качестве оператора обобщенного сдвига на $\mathbb{H}^d$ для определения модуля непрерывности будем использовать оператор среднего значения [57]

$$s^t f(x) = \int_{S_t(x)} f(y)\,d\omega_{t,x}(y),$$

где $S_t(x) = \{z \in \mathbb{H}^d\colon d(x,z) = t\}$ — сфера в $\mathbb{H}^d$ с центром в точке x и радиусом $t > 0$, $d\omega_{t,x}$ — вероятностная лебегова мера на $S_t(x)$. Для оператора обобщенного сдвига $\mathcal{F}(s^t f)(y) = \varphi_\lambda(t)\mathcal{F}f(y)$, где $y = (\lambda,\xi) \in \Omega^d$.

Модуль непрерывности функции $f \in L^2(\mathbb{H}^d, d\nu)$ определим равенством

$$\omega(\delta,f)_{2,d\nu} = \sup_{0\le t\le\delta}\biggl(\int_{\mathbb{H}^d} s^t|f(\cdot)-f(x)|^2(x)\,d\nu(x)\biggr)^{1/2}.$$

Константа Джексона

$$D(R,\delta,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu} = \sup\biggl\{\frac{E_R(f)_{2,d\nu}}{\omega(\delta,f)_{2,d\nu}}\colon f \in L^2(\mathbb{H}^d, d\nu)\biggr\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона

$$E_R(f)_{2,d\nu} \leqslant D\omega(\delta,f)_{2,d\nu}.$$

Для всех $R,\delta > 0$ [40, 58],

$$D(R,\delta,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Величина

$$\tau(R,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu} = \inf\bigl\{\delta > 0\colon D(R,\delta,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu} = 2^{-1/2}\bigr\}$$

называется оптимальным аргументом.

Теорема 25. *Для всех* $R,\delta > 0$

$$D(R,\delta,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu} = D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu}.$$

Доказательство. Неравенство $D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu} \leqslant D(R,\delta,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu}$ вытекает из того, что сферические функции $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ составляют подпространство в $L^2(\mathbb{H}^d, d\nu)$.

Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{H}^d, d\nu)$ рассмотрим функцию

$$\psi(\lambda) = \Bigl(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\mathcal{F}f(y)|^2\,d\omega(\xi)\Bigr)^{1/2},\quad y = (\lambda,\xi) \in \Omega^d.$$

Для нее в силу равенства Планшереля

$$\|\psi\|_{2,d\sigma}^2 = \int_0^\infty |\psi(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) = \|\mathcal{F}f\|_{2,d\tau}^2 = \|f\|_{2,d\tau}^2 < \infty,$$

поэтому функция

$$\varphi(t) = \mathcal{J}^{-1}\psi(t) \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$$

и $\mathcal{J}\varphi(\lambda) = \psi(\lambda)$. Имеем

$$\begin{aligned} E_R^2(f)_{2,d\nu} &= \int_R^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\mathcal{F}f(\lambda,\xi)|^2\, d\omega(\xi)d\sigma(\lambda) \\ &= \int_R^\infty |\mathcal{J}\varphi(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) = E_R^2(\varphi)_{2,d\mu}. \end{aligned}$$

Так как [40, 58]

$$\int_{\mathbb{H}^d} s^t|f(\cdot)-f(x)|^2(x)\, d\nu(x) = 2\int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (1-\varphi_\lambda(t))|\mathcal{F}f(\lambda,\xi)|^2\, d\omega(\xi)d\sigma(\lambda)$$
$$= 2\int_0^\infty (1-\varphi_\lambda(t))|\mathcal{J}\varphi(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) = \int_0^\infty T^t|\varphi(\cdot)-\varphi(r)|^2(r)\, d\mu(r),$$

то

$$\omega(\delta, f)_{2,d\nu} = \omega(\delta,\varphi)_{2,d\mu}.$$

Итак,

$$\frac{E_R(f)_{2,d\nu}}{\omega(\delta,f)_{2,d\nu}} = \frac{E_R(\varphi)_{2,d\mu}}{\omega(\delta,\varphi)_{2,d\mu}},$$

и $D(R,\delta,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu} \leqslant D(R,\delta,\mathbb{R}_+)_{2,d\mu}$. Теорема 25 доказана.

Из теорем 20, 25 вытекает следующая теорема.

Теорема 26. *Если $R>0$, то*

$$\tau(R,\mathbb{H}^d)_{2,d\nu} = \lambda_1(R/2).$$

Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{H}^d, d\nu)$ справедливо неравенство Джексона с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности

$$E_R(f)_{2,d\nu} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\bigl(\lambda_1(R/2), f\bigr)_{2,d\nu}. \tag{5}$$

Неравенство Джексона (5) было доказано В.Ю. Поповым [59] для $d=2$ и Д.В. Горбачевым и М.С. Пискоржем [58] для $d \geqslant 3$. С неточной константой оно было получено И.В. Петровой [60].

6. Заключение

Исследование представленных в работе экстремальных задач гармонического анализа и теории приближений носит достаточно законченный характер. Только экстремальная задача Дельсарта остается недостаточно исследованной. Хотя с точки зрения приложений она является наиболее важной. Основная ее трудность состоит в том, что экстремальная функция в ней не является целой функцией экспоненциального типа, а множество допустимых функций устроено очень сложно. Для ее решения на полупрямой нужны новые идеи, новые квадратурные формулы по нулям экстремальных функций. В двух случаях они были предложены М. Вязовской.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stechkin S. B. An extremal problem for trigonometric series with nonnegative coefficients // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1972. Vol. 23, № 3-4. P. 289–291.
2. Горбачев Д. В., Маношина А. С. Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем и ее приложения // Матем. заметки. 2004. Т. 76, № 5. С. 688–700.
3. Fejér L. Über trigonometrische Polynome // J. Angew. Math. 1915. Vol. 146. P. 53–82.
4. Иванов В. И., Рудомазина Ю. Д. О задаче Турана для периодических функций с неотрицательными коэффициентами Фурье и малым носителем // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 6. С. 941–945.
5. Иванов В. И., Горбачев Д. В., Рудомазина Ю. Д. Некоторые экстремальные задачи для периодических функций с условиями на их значения и коэффициенты Фурье // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 92–111.
6. Иванов В. И. О задачах Турана и Дельсарта для периодических положительно определенных функций // Матем. заметки. 2006. Т. 80, № 6. С. 934–939.
7. Ivanov V. I., Ivanov A. V. Turán problems for periodic positive definite functions // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 2010. Vol. 33. P. 219–237.
8. Андреев Н. Н. Экстремальная задача для периодических функций с малым носителем // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1997. № 1. С. 29–32.
9. Горбачев Д. В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 346–352.
10. Siegel C. L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. Vol. 65, № 1. P. 307–323.
11. Boas R. P., Kac M. Inequalities for Fourier Transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12. P. 189–206.
12. Kolountzakis M. N., Révész Sz. Gy. On a problem of Turán about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131. P. 3423–3430.
13. Арестов В. В., Бердышева Е. Е. Задача Турана для положительно определенных функций с носителем в шестиугольнике // Тр. ИММ УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 21–29.
14. Arestov V. V., Berdysheva E. E. The Turán problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. Vol. 8, № 3. P. 381–388.
15. Kolountzakis M. N., Révész Sz. Gy. Turán's extremal problem for positive definite functions on groups // J. London Math. Soc. 2006. Vol. 74. P. 475–496.
16. Révész Sz. Gy. Turán's extremal problem on locally compact abelian groups // Anal. Math. 2011. Vol. 37, № 1. P. 15–50.
17. Viazovska M. S. The sphere packing problem in dimension 8 // Annals of Math. 2017. Vol. 185, № 3. P. 991–1015.
18. Cohn H., Kumar A., Miller S. D., Radchenko D., Viazovska M. The sphere packing problem in dimension 24 // Annals of Math. 2017. Vol. 185, № 3. P. 1017–1033.

19. Горбачев Д. В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа, связанная с оценкой Левенштейна плотности упаковки $\mathbb{R}^n$ шарами // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2000. Т. 6, № 1. С. 71–78.

20. Cohn H. New upper bounds on sphere packings II // Geom. Topol. 2002. Vol. 6. P. 329–353.

21. Левенштейн В. И. Границы для упаковок в n-мерном Евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1979. Т. 20. С. 417–421.

22. Юдин В. А. Упаковки шаров в евклидовом пространстве и экстремальные задачи для триигонометрических полиномов // Дискрет. матем. 1989. Т. 1, № 2. С. 155–158.

23. Юдин В. А. Многомерная теорема Джексона // Матем. заметки. 1976. Т. 20, № 3. С. 439–444.

24. Иванов В. И. Приближение функций в пространствах L_p // Матем. заметки. 1994. Т. 56, № 2. С. 15–40.

25. Bohman H. Approximate Fourier analysis of distribution functions // Ark. Mat. 1960. Vol. 4. P. 99–157.

26. Ehm W., Gneiting T., Richards D. Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356. P. 4655–4685.

27. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, № 2. P. 249–252.

28. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions II. Eventually negative functions // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, № 2. P. 253–257.

29. Горбачев Д. В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 2. С. 179–187.

30. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.

31. Юдин В. А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т. 29, № 2. С. 158–162.

32. Бердышева Е. Е. Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Матем. заметки. 1999. Т. 66, № 3. С. 336–350.

33. Arestov V. V., Chernykh N. I. On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and functions spaces: Proc. intern. conf., Gdansk, 1979. Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25—43.

34. Иванов А.В., Иванов В.И. Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 3. С. 338—348.

35. Иванов А. В. Некоторые экстремальные задачи для целых функций в весовых пространствах // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 26–44.

36. Иванов А. В. Задача Логана для целых функций многих переменных и константы Джексона в весовых пространствах // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. Вып. 2. С. 29–58.

37. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Экстремальная задача Бомана для преобразования Данкля // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 115–123.

38. Платонов С. С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Математика. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.

Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой

39. Горбачев Д. В. Экстремальная задача Бомана для преобразования Фурье–Ганкеля // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 5–10.

40. Горбачев Д. В. Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. Тула: Гриф и К, 2005. 192 с.

41. Frappier C., Olivier P. A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. Comp. 1993. Vol. 60. P. 303–316.

42. Grozev G. R., Rahman Q. I. A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes // Math. Comp. 1995. Vol. 64. P. 715–725.

43. Ghanem R. B., Frappier C. Explicit quadrature formulae for entire functions of exponential type // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 92, № 2. C. 267–279.

44. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 63–98.

45. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. The convolution structure for Jacobi function expansions // Ark. Mat. 1973. Vol. 11. P. 245–262.

46. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure // Ark. Mat. 1979. Vol. 17. P. 139–151.

47. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Turán's and Fejér's extremal problems for Jacobi transform // Anal. Math. 2017. [In press]

48. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I. The Delsarte Extremal Problem for the Jacobi Transform // Math. Notes. 2016. Vol. 100, № 5. P. 677–686.

49. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Экстремальная задача Бомана для преобразования Якоби // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 126–135.

50. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Some extremal problems for Fourier transform on hyperboloid // Math. Notes. 2017. Vol. 102, № 4. P. 480–491.

51. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A. Optimal Argument in Sharp Jackson's inequality in the Space L_2 with the Hyperbolic Weight // Math. Notes. 2014. Vol. 96, № 6. P. 338–348.

52. Вепринцев Р.А. Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Якоби // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 6. С. 815—831.

53. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Приближение в L_2 частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 519–530.

54. Горбачев Д. В., Иванов В. И., Вепринцев Р.А. Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 136–152.

55. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Некоторые экстремальные задачи для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, № 2. С. 34–53.

56. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991. 576 с.

57. Лизоркин П. И. Прямые и обратные теоремы теории приближе- ний для функций на пространстве Лобачевского // Тр. МИАН. 1992. Т. 194. С. 120–147.

58. Горбачев Д. В., Пискорж М. С. Точное неравенство Джексона в L_2 на гиперболоиде // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4, № 1. С. 54–58.

59. Попов В. Ю. Точное неравенство Джексона–Стечкина в L_2 на гиперболоиде // Тр. ИММ УрО РАН. 1998. Т. 5, № 4. С. 254–266.

60. Петрова И. В. Приближение на гиперболоиде в метрике L_2 // Тр. МИАН. 1992. Т. 194. С. 215–228.

REFERENCES

1. Stechkin S. B., 1972, “An extremal problem for trigonometric series with nonnegative coefficients”, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, vol. 23, № 3-4, pp. 289–291.

2. Gorbachev D. V., Manoshina A. S., 2004, “Turán Extremal Problem for Periodic Functions with Small Support and Its Applications”, *Math. Notes*, vol. 76, № 5, pp. 640–652.

3. Fejér L., 1915, “Über trigonometrische Polynome”, *J. Angew. Math.*, vol. 146, pp. 53–82.

4. Ivanov V. I., Rudomazina Yu. D., 2005, “About Turán problem for periodic functions with nonnegative Fourier coefficients and small support”, *Math. Notes*, vol. 77, № 6, pp. 870–875.

5. Ivanov V. I., Gorbachev D. V., Rudomazina Yu. D., 2005, “Some extremal problems for periodic functions with conditions on their values and Fourier coefficients”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, № 2 suppl, pp. 139–159.

6. Ivanov V. I., 2006, “On the Turán and Delsarte problems for periodic positive definite functions”, *Math. Notes*, vol. 80, № 6, pp. 875–880.

7. Ivanov V. I., Ivanov A. V., 2010, “Turán problems for periodic positive definite functions”, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.*, vol. 33, pp. 219–237.

8. Andreev N. N., 1997, “An extremal problem for periodic functions with small support”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol 52, pp. 29–32.

9. Gorbachev D. V., 2001, “An extremal problem for periodic functions with supports in the ball”, *Math. Notes*, vol. 69, № 3, pp. 313–319.

10. Siegel C. L., 1935, “Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem”, *Acta Math.*, vol. 65, № 1, pp. 307–323.

11. Boas R. P., Kac M., 1945, “Inequalities for Fourier Transforms of positive functions”, *Duke Math. J.*, vol. 12, pp. 189–206.

12. Kolountzakis M. N., Révész Sz. Gy., 2003, “On a problem of Turán about positive definite functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 131, pp. 3423–3430.

13. Arestov V. V., Berdysheva E. E., 2001, “Turán’s problem for positive definite functions with supports in a hexagon”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, № 1, suppl, pp. 20–29.

14. Arestov V. V., Berdysheva E. E., 2002, “The Turán problem for a class of polytopes”, *East J. Approx.*, vol. 8, № 3, pp. 381–388.

15. Kolountzakis M. N., Révész Sz. Gy., 2006, “Turán’s extremal problem for positive definite functions on groups”, *J. London Math. Soc.*, vol. 74, pp. 475–496.

16. Révész Sz. Gy., 2011, “Turán’s extremal problem on locally compact abelian groups”, *Anal. Math.*, vol. 37, № 1, pp. 15–50.

17. Viazovska M. S., 2017, “The sphere packing problem in dimension 8”, *Annals of Math.*, vol. 185, № 3, pp. 991–1015.

18. Cohn H., Kumar A., Miller S. D., Radchenko D., Viazovska M., 2016, “The sphere packing problem in dimension 24”, *Annals of Math.*, vol. 185, № 3, pp. 1017–1033.

19. Gorbachev D. V., 2000, “An extremal problem for an entire functions of exponential spherical type related to the Levenshtein estimate for the sphere packing density in $\mathbb{R}^n$”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Mat. Mec. Inf.*, vol. 6, № 1, pp. 71–78. [in Russian]

20. Cohn H., 2002, “New upper bounds on sphere packings II”, *Geom. Topol.*, vol. 6, pp. 329–353.

21. Levenshtein V. I., 1979, “Bounds for packings in n-dimensional Euclidean space”, *Soviet Math. Dokl.*, vol. 20, pp. 417–421.

22. Yudin V. A., 1989, “Packings of balls in Euclidean space, and extremal problems for trigonometric polynomials”, *Discrete Math. Appl.*, vol. 1, № 1, pp. 69–72.

23. Yudin V. A., 1976 “The multidimensional Jackson theorem”, *Math. Notes*, vol. 20, № 3, pp. 801–804.

24. Ivanov V. I., 1994 “Approximation of functions in spaces L_p”, *Math. Notes*, vol. 56, № 2, pp. 770–789.

25. Bohman H., 1960, “Approximate Fourier analysis of distribution functions”, *Ark. Mat.*, vol. 4, pp. 99–157.

26. Ehm W., Gneiting T., Richards D., 2004, “Convolution roots of radial positive definite functions with compact support”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 356, pp. 4655–4685.

27. Logan B. F., 1983, “Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral”, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, № 2, pp. 249–252.

28. Logan B. F., 1983, "Extremal problems for positive-definite bandlimited functions II. Eventually negative functions", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, № 2, pp. 253–257.

29. Gorbachev D. V., 2000, "Extremum problems for entire functions of exponential spherical type", *Math. Notes*, vol. 68, № 2, pp. 159–166.

30. Chernykh N. I., 1967, "On Jackson's inequality in L_2", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 88, pp. 75–78.

31. Yudin V. A., 1981, "Multidimensional Jackson theorem in L_2", *Math. Notes*, vol. 29, № 2, pp. 158–162.

32. Berdysheva E. E., 1999, "Two related extremal problems for entire functions of several variables", *Math. Notes*, vol. 66, № 3, pp. 271–282.

33. Arestov V. V., Chernykh N. I., 1981, "On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials", Approximation and functions spaces: Proc. intern. conf., Gdansk, 1979. Amsterdam: North-Holland, pp. 25—43.

34. Ivanov A. V., Ivanov V. I., 2013, "Optimal arguments in Jackson's inequality in the power-weighted space $L_2(\mathbb{R}^d)$", *Math. Notes*, vol. 94, № 3, pp. 320–329.

35. Ivanov A. V., 2010, "Some extremal problem for entire functions in weighted spaces", *Izv. Tul. Gos. Univ., Estestv. Nauki*, № 1, pp. 26–44. [in Russian]

36. Ivanov A. V., 2011, "Logan problem for entire functions of several variables and Jackson constants in weighted spaces", *Izv. Tul. Gos. Univ., Estestv. Nauki*, № 2, pp. 29–58. [in Russian]

37. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2017, "Boman extremal problem for Dunkl transform", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol 297, № 1 suppl., pp. 88–96.

38. Platonov S. S., 2007, "Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line", *Izvestiya: Mathematics*, vol 71, № 5, pp. 1001–1048.

39. Gorbachev D. V., 2014, "Boman extremal problem for Fourier–Hankel transform", *Izv. Tul. Gos. Univ., Estestv. Nauki*, № 4, pp. 5–10. [in Russian]

40. Gorbachev D. V., 2005, "Selected Problems in the Theory of Functions and Approximation Theory: Their Applications", *Tula: Grif and K*, 192 p. [in Russian]

41. Frappier C., Olivier P., 1993, "A quadrature formula involving zeros of Bessel functions", *Math. Comp.*, vol. 60, pp. 303–316.

42. Grozev G. R., Rahman Q. I., 1995, "A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes", *Math. Comp.*, vol. 64, pp. 715–725.

43. Ghanem R. B., Frappier C., 1998, "Explicit quadrature formulae for entire functions of exponential type", *J. Approx. Theory*, vol. 92, № 2, pp. 267–279.

44. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2015, "Gauss and Markov quadrature formulae with nodes at zeros of eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem, which are exact for entire functions of exponential type", *Sbornik: Math.*, vol. 206, № 8, pp. 1087–1122.

45. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H., 1973, "The convolution structure for Jacobi function expansions", *Ark. Mat.*, vol. 11, pp. 245–262.

46. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H., 1979, “Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure”, *Ark. Mat.*, vol. 17, pp. 139–151.

47. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2017, “Turán’s and Fejér’s extremal problems for Jacobi transform”, *Anal. Math.* [In press]

48. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I., 2016, “The Delsarte Extremal Problem for the Jacobi Transform”, *Math. Notes*, vol. 100, № 5, pp. 677–686.

49. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2016, “Boman extremal problem for Jacobi transform”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 22, № 4, pp. 126–135. [in Russian]

50. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2017, “Some extremal problems for Fourier transform on hyperboloid”, *Math. Notes*, vol. 102, № 4, pp. 480–491.

51. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A., 2014, “Optimal Argument in Sharp Jackson’s inequality in the Space L_2 with the Hyperbolic Weight”, *Math. Notes*, vol. 96, № 6, pp. 338–348.

52. Veprintsev R. A., 2015, “Approximation in L_2 by partial integrals of the multidimensional Jacobi transform”, *Math. Notes*, vol. 97, № 6, pp. 815–831.

53. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2016, “Approximation in L_2 by partial integrals of the Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator”, *Math. Notes*, vol. 100, № 4, pp. 540–549.

54. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A., 2016, “Approximation in L_2 by partial integrals of the multidimensional Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 22, № 4, pp. 136–152. [in Russian]

55. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2017, “Some extremal problems for the Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, № 2, pp. 34–53. [in Russian]

56. Vilenkin N. J., 1968, “Special Functions and the Theory of Group Representations”, *Providence, RI: Amer. Math. Soc.*, Translations of mathematical monographs, vol. 22, 613 p.

57. Lizorkin P. I., 1992, “Direct and inverse theorems of approximation theory for functions on the Lobachevsky space”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 194. pp. 125–151.

58. Gorbachev D. V., Piskorsh M. S., 1998, “Sharp Jackson inequality in L_2 on hyperboloid”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Mat. Mec. Inf.*, vol. 4, № 1. pp. 54–58. [in Russian]

59. Popov V. Yu., 1998, “Sharp Jackson–Stechkin inequality in L_2 on the hyperboloid”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 5, № 4. pp. 254–266. [in Russian]

60. Petrova I. V., 1992, “Approximation on the hyperboloid in L_2-metric”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 194. pp. 229–243.

Тульский государственный университет.
Получено 6.08.2017
Принято в печать 12.12.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.331 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-167-186

О ДРОБНЫХ МОМЕНТАХ УСПОКОЕННЫХ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ

С. А. Гриценко (г. Москва)

Аннотация

Пусть $\chi_1(n)$ — характер Дирихле по модулю 5 такой, что $\chi_1(2) = i$,

$$\varkappa = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1}.$$

Функцией Дэвенпорта–Хейльбронна называется функция

$$f(s) = \frac{1-i\varkappa}{2}L(s,\chi_1) + \frac{1+i\varkappa}{2}L(s,\overline{\chi}_1).$$

Функция $f(s)$ была введена и исследована Дэвенпортом и Хейльбронном в 1936 году. Она удовлетворяет функциональному уравнению риманого типа

$$g(s) = g(1-s),$$

где $g(s) = (\frac{\pi}{5})^{-s/2}\Gamma(\frac{1+s}{2})f(s)$.

Известно однако, что не все нетривиальные нули $f(s)$ лежат на прямой $\Re s = \frac{1}{2}$.

В области $\Re s > 1$, $0 < \Im s \leqslant T$ число нулей $f(s)$ превосходит cT, где $c > 0$ — абсолютная постоянная (Дэвенпорт и Хейльбронн, 1936 г.).

Кроме того, число нулей $f(s)$ в области $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \Re s < \sigma_2$, $0 < \Im s \leqslant T$ превосходит c_1T, где $c_1 > 0$ — абсолютная постоянная (С. М. Воронин, 1976).

В 1980 г. С. М. Воронин доказал, что на критической прямой $\Re s = \frac{1}{2}$ лежит «аномально много» нулей $f(s)$. Пусть $N_{0,f}(T)$ — число нулей $f(s)$ на промежутке $\Re s = \frac{1}{2}$, $0 < \Im s \leqslant T$. С. М. Воронин получил оценку

$$N_{0,f}(T) > c_2T\exp\{\frac{1}{20}\sqrt{\log\log\log\log T}\},$$

где $c_2 > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1990 году А. А. Карацуба коренным образом усилил оценку С. М. Воронина и получил неравенство

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2-\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малая постоянная, $T > T_0(\varepsilon) > 0$.

В 1994 году А. А. Карацуба получил несколько более точную оценку

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2}\exp\{-c_3\sqrt{\log\log T}\},$$

где $c_3 > 0$ — абсолютная постоянная.

В 2017 году автор получил следующую оценку

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2+1/16-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

В настоящей статье получены новые верхние и нижние оценки дробных моментов успокоенных рядов Дирихле, из которых следует, что

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2+1/12-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

Ключевые слова: функция Дэвенпорта–Хейльбронна, нули на критической прямой, дробные моменты успокоенных рядов Дирихле.

Библиография: 14 названий.

ON FRACTIONAL MOMENTS OF THE MOLLIFIED DIRICHLET L-FUNCTIONS

S. A. Gritsenko (Moscow)

Abstract

Let $\chi_1(n)$ be the character of Dirichlet mod 5 such that $\chi_1(2) = i$,

$$\varkappa = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}.$$

Davenport–Heilbronn function is defined below

$$f(s) = \frac{1 - i\varkappa}{2} L(s, \chi_1) + \frac{1 + i\varkappa}{2} L(s, \overline{\chi}_1).$$

The function $f(s)$ was introduced and investigated by Davenport and Heilbronn, in 1936. It satisfies the functional equation of Riemann's type

$$g(s) = g(1 - s),$$

where $g(s) = (\frac{\pi}{5})^{-s/2}\Gamma(\frac{1+s}{2})f(s)$.

It is well-known however, that not all non-trivial zeros of $f(s)$ lie on the line $\Re s = \frac{1}{2}$.

In the region $\Re s > 1$, $0 < \Im s \leqslant T$ the number of zeros of $f(s)$ exceeds cT, where $c > 0$ is an absolute constant (Davenport and Heilbronn, 1936).

Moreover, the number of zeros of $f(s)$ in the region $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \Re s < \sigma_2$, $0 < \Im s \leqslant T$ exceeds $c_1 T$, where $c > 0$ is an absolute constant(S. M. Voronin, 1976).

In 1980, S. M. Voronin proved that «abnormally many» zeros of $f(s)$ lied on the critical line $\Re s = \frac{1}{2}$. Let $N_{0,f}(T)$ be the number of zeros of $f(s)$ on the segment $\Re s = \frac{1}{2}$, $0 < \Im s \leqslant T$. S. M. Voronin got the estimate

$$N_{0,f}(T) > c_2 T \exp\{\frac{1}{20}\sqrt{\log\log\log\log T}\},$$

where $c_2 > 0$ is an absolute constant.

In 1990, A. A. Karatsuba significantly improved Voronin's estimate and got the inequality

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2-\varepsilon},$$

where $\varepsilon > 0$ is an arbitrary small constant, $T > T_0(\varepsilon) > 0$.

In 1994, A. A. Karatsuba got somewhat more accurate estimate

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2} \exp\{-c_3\sqrt{\log\log T}\},$$

where $c_3 > 0$ is an absolute constant.

In 2017, the author got the following estimate

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2+1/16-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

In this paper we obtain new upper and lower estimates of the fractional moments of mollified Dirichlet series, from which it follows that

$$N_{0,f}(T) > T(\log T)^{1/2+1/12-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

Keywords: Davenport–Heilbronn function, zeroes on the critical line, fractional moments of mollified moments of Dirichlet series.

Bibliography: 14 titles.

1. Введение

Пусть $\chi(n)$ — характер Дирихле, $L(s,\chi)$ — соответствующая L–функция Дирихле. Знаменитая расширенная гипотеза Римана утверждает, что все нетривиальные нули $L(s,\chi)$ лежат на критической прямой $\Re s = \frac{1}{2}$.

Если модуль характера $\chi(n)$ ограничен константой, то современные результаты о распределении нулей $L(s,\chi)$ на критической прямой по своей силе совпадают с соответствующими результатами о нулях $\zeta(s)$.

Пусть $N_0(T)$ — число нулей $\zeta(s)$ на отрезке $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+iT]$.

В 1921 году [1] Г. Харди и Дж. Литтлвуд доказали неравенство

$$N_0(T) \gg T. \tag{1}$$

В 1942 году [2] А. Сельберг получил правильную по порядку оценку для $N_0(T)$:

$$N_0(T) \gg T\log T. \tag{2}$$

Сельбергу принадлежит идея введения так называемого "успокаивающего множителя"("mollifying factor"). Под успокоением здесь понимается понижение порядка роста моментов рядов Дирихле после умножения этих рядов на соответствующие успокаивающие множители.

В 2002 году А. А. Карацуба [3] нашел приложение оценок дробных моментов дзета–функции на критической прямой к задаче об оценке $N_0(T)$ и получил оценку, более точную, чем (1), хотя и менее точную, чем (2). В статье [3] использовались оценки моментов неуспокоенной дзета–функции.

В 2017 году автор [4], правильно по порядку оценив сверху и снизу момент успокоенной функции Дэвенпорта–Хейльбронна порядка 1/2,а также сверху момент той же функции порядка 1, доказал, что число нулей функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на отрезке $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+iT]$, можно оценить снизу величиной

$$T(\log T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\varepsilon}, \tag{3}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

Оценка (3) получена на основе метода А. А. Карацубы (см. [5]–[10]) с добавлением некоторых дополнительных соображений.

В настоящей статье содержатся оценки моментов успокоенных L–функций Дирихле порядков $\frac{2}{v}$ для любых натуральных $v \geqslant 3$, а также порядка 1.

Введем некоторые определения.

Пусть χ_1 — характер по модулю 5 такой, что $\chi_1(2) = i$.

Пусть ε — сколь угодно малое положительное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $X = T^{0.001\varepsilon}$. Пусть $\alpha(\nu)$ — последовательность, задаваемая равенством

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1 \pmod 5} \Big(1-\frac{1}{2vp^s}\Big) \prod_{p\equiv\pm2 \pmod 5} \Big(1-\frac{\varepsilon}{p^s}\Big), \quad \Re s > 1.$$

Пусть

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\chi_1(\nu)\Big(1-\dfrac{\log\nu}{\log X}\Big), & \text{если } 1 \leqslant \nu < X, \\ 0, & \text{если } \nu \geqslant X. \end{cases}$$

Тогда наш успокаивающий множитель имеет вид $|\varphi(\frac{1}{2}+it)|^{2v}$, где

$$\varphi(\frac{1}{2}+it) = \sum_{\nu} \frac{\beta(\nu)}{\nu^{\frac{1}{2}+it}}.$$

Сформулируем основную теорему статьи.

Теорема 1. *Пусть v — натуральное число, $v \geqslant 3$. Тогда справедливы оценки*

$$T(\log T)^{(1+2v\varepsilon)^2/(2v^2)} \ll \int_T^{2T} |L(\frac{1}{2}+it,\overline{\chi}_1)\varphi^{2v}(\frac{1}{2}+it)|^{2/v}dt \ll T(\log T)^{(1+2v\varepsilon)^2/(2v^2)},$$

$$\int_T^{2T} |L(\frac{1}{2}+it,\chi_1)\varphi^{2v}(\frac{1}{2}+it)|^{2/v}dt \ll T(\log T)^{(1-2v\varepsilon)^2/(2v^2)},$$

$$\int_T^{2T} |L(\frac{1}{2}+it,\overline{\chi}_1)\varphi^{2v}(\frac{1}{2}+it)|dt \ll T(\log T)^{(1+2v\varepsilon)^2/8},$$

$$\int_T^{2T} |L(\frac{1}{2}+it,\chi_1)\varphi^{2v}(\frac{1}{2}+it)|dt \ll T(\log T)^{(1-2v\varepsilon)^2/8}.$$

Отметим, что если воспользоваться теоремой 1, то рассуждения по схеме [4] приводят к оценке числа нулей функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на отрезке $[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+iT]$, величиной

$$T(\log T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\varepsilon},$$

что уточняет оценку (3).

В статье будут использованы следующие обозначения: $Y=T^{3/4}$; $\chi(n)$ — один из характеров $\chi_1(n)$, $\overline{\chi}_1(n)$; M_d — множество натуральных чисел, состоящее из 1 и тех чисел, простые делители которых делят d; при $k>0$ последовательность $d_k(\nu)$ задается равенством

$$\zeta^k(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d_k(\nu)}{\nu^s}, \quad \Re s>1.$$

2. Основные леммы

Лемма 1. *Пусть* $2\sigma = 1+\frac{C}{\log T}=1+b$,

$$a_{1,1/v}(\lambda,\chi)=\sum_{n\nu_1\nu_2=\lambda} d_{1/v}(n)\chi(n)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2),$$

$$a_{2,1/v}(\lambda,\chi)=\sum_{n\nu_1\nu_2=\lambda} d_{1/v}(n)\chi(n)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)(\nu_1\nu_2)^{(2\sigma-1)},$$

$$\Sigma_{l,1/v}(2\sigma,\chi,Y)=\sum_{\lambda\leqslant Y}\frac{|a_{l,1/v}(\lambda,\chi)|^2}{\lambda^{2\sigma}}, \quad l=1,2.$$

Существует $C_0=C_0(\varepsilon)>0$ такое, что при любых $C>C_0$ справедливы неравенства

$$\Sigma_{l,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1,Y) \gg (2\sigma-1)^{-\frac{(1+2\varepsilon)^2}{2v^2}} \quad (l=1,2).$$

Доказательство. Оценим $\Sigma_{l,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1,Y)$ снизу. Имеем

$$\Sigma_{l,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1,Y) \geqslant {\sum_{\lambda\leqslant Y}}' \frac{|a_{l,1/v}(\lambda,\overline{\chi}_1)|^2}{\lambda^{2\sigma}},$$

где штрих означает, что суммирование ведется по таким $\lambda = n\nu_1\nu_2$, у которых n — бесквадратные. Далее,

$$\Sigma_{l,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1,Y) \geqslant \sum_{\lambda\leqslant Y}{}' \frac{|a_{l,1/v}(\lambda,\overline{\chi}_1)|^2}{\lambda^{2\sigma}}(1-(\frac{\lambda}{Y})^{b/2}) \geqslant \Sigma'_{l,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1) - Y^{-b/2}\Sigma'_{l,1/v}(2\sigma_1,\overline{\chi}_1),$$

где $2\sigma_1 = 1+\frac{b}{2}$,

$$\Sigma'_{l,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1) = \sum_{\lambda=1}^{\infty}{}' \frac{|a_{l,1/v}(\lambda,\overline{\chi}_1)|^2}{\lambda^{2\sigma}}.$$

Пусть сначала $l=1$. Оценим $\Sigma'_{l,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1)$ снизу. Начнем с тождественных преобразований:

$$\Sigma'_{1,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\overline{\beta(\nu_3)}\ \overline{\beta(\nu_4)}}{(\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4)^{\sigma}} \sum_{n_1\nu_1\nu_2=n_2\nu_3\nu_4}{}' \frac{d_{1/v}(n_1)\overline{\chi}_1(n_1)d_{1/v}(n_2)\chi_1(n_2)}{(n_1n_2)^{\sigma}}.$$

Поскольку числа ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, n_1, n_2 — бесквадратные, то из равенства $n_1\nu_1\nu_2 = n_2\nu_3\nu_4$ следует, что $(\nu_1,\nu_2)=(\nu_3,\nu_4)$, поэтому

$$\Sigma'_{1,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1) = \sum_{u}\frac{1}{u^{4\sigma}} \sum_{(\mu_1,\mu_2)=1}\frac{\beta(u\mu_1)\beta(u\mu_2)}{(\mu_1\mu_2)^{\sigma}} \sum_{(\mu_3,\mu_4)=1}\frac{\overline{\beta(u\mu_3)}\ \overline{\beta(u\mu_4)}}{(\mu_1\mu_2)^{\sigma}}$$
$$\sum_{n_1\mu_1\mu_2=n_2\mu_3\mu_4}{}' \frac{d_{1/v}(n_1)\overline{\chi}_1(n_1)d_{1/v}(n_2)\chi_1(n_2)}{(n_1n_2)^{\sigma}}.$$

Пусть $q=(\mu_1\mu_2,\mu_3\mu_4)$, $\mu_1\mu_2=aq$, $\mu_3\mu_4=bq$, $(a,b)=1$. Тогда

$$\sum_{n_1\mu_1\mu_2=n_2\mu_3\mu_4}{}' \frac{d_{1/v}(n_1)\overline{\chi}_1(n_1)d_{1/v}(n_2)\chi_1(n_2)}{(n_1n_2)^{\sigma}} = \frac{\chi_1(a)\overline{\chi}_1(b)}{(ab)^{\sigma}} \sum_{\substack{m=1\\(m,5ab)=1}}^{\infty} \frac{d^2_{1/v}(m)\mu^2(m)}{m^{2\sigma}} =$$

$$c_5\prod_p(1+\frac{d^2_{1/v}(p)}{p^{2\sigma}})\frac{d_{1/v}(\mu_1)\chi_1(\mu_1)g(\mu_1)d_{1/v}(\mu_2)\chi_1(\mu_2)g(\mu_2)}{(\mu_1\mu_2)^{\sigma}}\times$$
$$\times\frac{d_{1/v}(\mu_3)\overline{\chi}_1(\mu_3)g(\mu_3)d_{1/v}(\mu_4)\overline{\chi}_1(\mu_4)g(\mu_4)}{(\mu_3\mu_4)^{\sigma}}\frac{q^{2\sigma}}{d^2_{1/v}(q)g^2(q)},$$

где $c_5 = (1+\frac{d^2_{1/v}(5)}{5^{2\sigma}})^{-1}$, $g(\nu) = \prod_{p|\nu}(1+\frac{d^2_{1/v}(p)}{p^{2\sigma}})^{-1}$.

Согласно формуле обращения Мебиуса имеем

$$\frac{q^{2\sigma}}{d^2_{1/v}(q)g^2(q)} = \sum_{d|q}\gamma(d), \quad \gamma(d) = \frac{d^{2\sigma}}{d^2_{1/v}(d)g^2(d)}\prod_{p|d}(1-\frac{d^2_{1/v}(p)g^2(p)}{p^{2\sigma}}).$$

Отсюда следует, что

$$\Sigma'_{1,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1) \geqslant c_5\prod_p(1+\frac{d^2_{1/v}(p)}{p^{2\sigma}})\sum_{d\leqslant X^{0.1}}\frac{d^{2\sigma}}{d^2_{1/v}(d)g^2(d)}\frac{\varphi(d)}{d}|V_{1,1/v,d}(2\sigma,\chi_1)|^2,$$

где

$$V_{1,1/v,d}(2\sigma,\chi_1) = \sum_{\substack{(\mu_1,\,\mu_2)=1\\ \mu_1\mu_2\equiv 0 \pmod d}} \frac{\beta(\mu_1)d_{1/v}(\mu_1)\chi_1(\mu_1)g(\mu_1)}{\mu_1^{2\sigma}}\frac{\beta(\mu_2)d_{1/v}(\mu_2)\chi_1(\mu_2)g(\mu_2)}{\mu_2^{2\sigma}}.$$

Отсюда имеем

$$V_{1,1/v,d}(2\sigma,\chi_1)=\frac{\chi_1(d)d_{1/v}(d)g(d)}{d^{2\sigma}}\sum_{d_1d_2=d}\sum_{\substack{(\nu_1,\nu_2)=1\\(v_1,d)=1\\(\nu 2,d)=1}}\frac{\beta(d_1\nu_1)d_{1/v}(\nu_1)\chi_1(\nu_1)g(\nu_1)}{\nu_1^{2\sigma}}\times$$

$$\times\frac{\beta(d_2\nu_2)d_{1/v}(\nu_2)\chi_1(\nu_2)g(\nu_2)}{\nu_2^{2\sigma}}=\frac{\chi_1(d)d_{1/v}(d)g(d)}{d^{2\sigma}}\sum_{d_1d_2=d}\sum_{(\nu_1,d)=1}\frac{\beta(d_1\nu_1)d_{1/v}(\nu_1)\chi_1(\nu_1)g(\nu_1)}{\nu_1^{2\sigma}}\times$$

$$\times\sum_{(\nu_2,d)=1}\frac{\beta(d_2\nu_2)d_{1/v}(\nu_2)\chi_1(\nu_2)g(\nu_2)}{\nu_2^{2\sigma}}\sum_{r|(\nu_1,\nu_2)}\mu(r)=$$

$$=\frac{\chi_1(d)d_{1/v}(d)g(d)}{d^{2\sigma}}\sum_{d_1d_2=d}\sum_{(r,d)=1}\mu(r)\frac{\chi_1^2(r)d_{1/v}^2(r)g^2(r)}{r^{4\sigma}}\sum_{(\mu_1,d)=1}\frac{\beta(rd_1\mu_1)d_{1/v}(\mu_1)\chi_1(\mu_1)g(\mu_1)}{\mu_1^{2\sigma}}\times$$

$$\times\sum_{(\mu_2,d)=1}\frac{\beta(rd_2\mu_2)d_{1/v}(\mu_2)\chi_1(\mu_2)g(\mu_2)}{\mu_2^{2\sigma}}.$$

Оценивая сумму по $r>X^{0.1}$ тривиально, получаем

$$V_{1,1/v,d}(2\sigma,\chi_1)\geqslant\frac{\chi_1(d)d_{1/v}(d)g(d)\alpha(d)}{d^{2\sigma}\log^2 X}\sum_{d_1d_2=d}\sum_{\substack{r\leqslant X^{0.1}\\(r,d)=1}}\mu(r)\frac{\chi_1^2(r)d_{1/v}^2(r)g^2(r)\alpha^2(r)}{r^{4\sigma}}\times$$

$$\times K_{1/v,x_1}(2\sigma,\chi_2)K_{1/v,x_2}(2\sigma,\chi_2)+O(\frac{d_{1/v}(d)g(d)|\alpha(d)|}{d^{2\sigma}}X^{-0.05}),$$

где $x_j=\frac{X}{rd_j}$, $(j=1,\ 2)$,

$$K_{1/v,x_j}(2\sigma,\chi_2)=\sum_{\substack{\mu<x_j\\(\mu,rd_j)=1}}\frac{\alpha(\mu)\chi_2(\mu)d_{1/v}(\mu)g(\mu)}{\mu^{2\sigma}}\log\frac{x_j}{\mu},$$

$\chi_2(\nu)=(\frac{\nu}{5})$ — символ Лежандра по модулю 5.

Отметим, что поскольку $r\leqslant X^{0.1}$, $d_j\leqslant d\leqslant X^{0.1}$, то $x_j\geqslant X^{0.8}$. Наша ближайшая задача — показать, что $K_{1/v,x_j}(2\sigma,\chi_2)$ $(j=1,2)$ — положительные числа и оценить их снизу равномерно по r и d_j. Пусть x — любое из чисел x_1,x_2, $D=X/(xr)$. Тогда

$$K_{1/v,x}(2\sigma,\chi_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}F_{\overline{\chi}_1}(2\sigma+s)m_{rD}(2\sigma+s)\frac{x^s}{s^2}ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}F_{\overline{\chi}_1}(1+w)m_{rD}(1+w)\frac{x^{-b}x^w}{(w-b)^2}dw,$$

где

$$F_{\overline{\chi}_1}(z)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\alpha(\mu)\chi_2(\mu)d_{1/v}(\mu)g(\mu)}{\mu^z},\quad m_c(z)=\prod_{p|c}(1+\frac{\alpha(p)\chi_2(p)d_{1/v}(p)g(p)}{p^z})^{-1}\quad(\Re z>1).$$

Для функции $F_{\overline{\chi}_1}(1+w)$ получим аналитическое представление, позволяющее продолжить ее в некоторую часть полуплоскости $\Re w<0$. Имеем

$$\ln F_{\overline{\chi}_1}(1+w)=-\frac{1}{2v^2}\sum_{p\equiv\pm1\pmod 5}\frac{1}{p^{1+w}}+\frac{\varepsilon}{v}\sum_{p\equiv\pm2\pmod 5}\frac{1}{p^{1+w}}+H_1(1+w)$$

(здесь и далее через $H_1(1+w)$, $H_2(1+w)$, ... будем обозначать функции, регулярные и ограниченные в полуплоскости $\Re w \geqslant -1/4$).

Поскольку

$$\sum_{p\equiv\pm1 \pmod 5} \frac{1}{p^{1+w}} = \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{1+w}} + \frac{1}{2}\sum_p \frac{\chi_2(p)}{p^{1+w}} - \frac{1}{2}5^{-1-w},$$

$$\sum_{p\equiv\pm2 \pmod 5} \frac{1}{p^{1+w}} = \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{1+w}} - \frac{1}{2}\sum_p \frac{\chi_2(p)}{p^{1+w}} - \frac{1}{2}5^{-1-w},$$

получаем

$$\ln F_{\overline{\chi}_1}(1+w) = -k_1 \ln\zeta(1+w) - k_2 \ln L(1+w,\chi_2) + H_2(1+w),$$

где

$$k_1 = \frac{1}{4v^2} - \frac{\varepsilon}{2v}, \quad k_2 = \frac{1}{4v^2} + \frac{\varepsilon}{2v}.$$

Таким образом, при $\Re w > 0$

$$F_{\overline{\chi}_1}(1+w) = \zeta(1+w)^{-k_1} L(1+w,\chi_2)^{-k_2} e^{H_2(1+w)}. \tag{4}$$

Отметим, что аналогично выводится формула

$$F_{\chi_1}(1+w) = \zeta(1+w)^{-k_2} L(1+w,\chi_2)^{-k_1} e^{H_3(1+w)}. \tag{5}$$

Пусть $c = rD$. Рассмотрим функцию $m_c(1+w)$. Имеем

$$\ln m_c(1+w) = -\sum_{p|c} \frac{\alpha(p)\chi_2(p)g(p)}{p} e^{-w\ln p} + H_4(1+w) =$$

$$= -\sum_{p|c} \frac{\alpha(p)\chi_2(p)g(p)}{p} + O\Big(|w|\sum_{p|c}\frac{1}{p}\ln p\Big) + H_4(1+w) =$$

$$= \ln m_c(1) + O\Big(|w|\sum_{p|d}\frac{\ln p}{p}\Big) + H_4(1+w) - H_4(1).$$

Пусть $c = p_1 \dots p_t$, $q_1, q_2, \dots$ — первые простые числа, занумерованные по возрастанию. Тогда

$$\sum_{p|c}\frac{\ln p}{p} \leqslant \sum_{p\leqslant q_t}\frac{\ln p}{p} = \ln q_t + O(1) \ll \ln t + 1 \ll \ln\ln X.$$

Поэтому

$$m_c(1+w) = m_c(1) + O\Big(|w|\ln\ln X \prod_{p|c}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\Big). \tag{6}$$

Кроме того, справедлива оценка

$$m_c(1+w) = O\Big(\prod_{p|c}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\Big). \tag{7}$$

Заменим в интеграле

$$K_{1/v,x}(2\sigma,\chi_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2b-i\infty}^{2b+i\infty} F_{\overline{\chi}_1}(1+w) m_c(1+w) \frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2} dw.$$

$m_c(1+w)$ на $m_c(1)$ и оценим возникающую при этом погрешность, пользуясь оценками (6) и (7), а также формулой (4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F_{\overline{\chi}_1}(2b+1+it)||m_c(2b+1+it)-m_c(1)|\frac{\left|x^{-b+2b+it}\right|}{b^2+t^2}dt \ll$$

$$\ll x^b\prod_{p|c}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\Big(\int_0^{1/4}\frac{(b+t)^{k_1}}{b^2+t^2}(t+b)\ln\ln X dt+\int_{1/4}^{\infty}\frac{|F_{\overline{\chi}_1}(2b+1+it)|}{t^2}dt\Big) \ll$$

$$\ll x^b\ln\ln X\prod_{p|c}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\Big(\int_0^{b}\frac{b^{k_1+1}}{b^2}dt+\int_b^{1/4}t^{k_1-1}dt+\int_{1/4}^{\infty}\frac{|F_{\overline{\chi}_1}(2b+1+it)|}{t^2}dt\Big) \ll$$

$$\ll x^b\ln\ln X\prod_{p|c}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)b^{k_1}+\prod_{p|c}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\int_{1/4}^{\infty}|F_{\overline{\chi}_1}(2b+1+it)|\frac{dt}{t^2}.$$

Для оценки последнего интеграла рассмотрим $|F_{\overline{\chi}_1}(2b+1+it)|$. Имеем

$$|F_{\overline{\chi}_1}(2b+1+it)| \ll \prod_p\Big(1+\frac{1/2v^2}{p^{2b+1}}\Big) \ll \zeta(1+2b)^{1/2v^2} \ll b^{-1/2v^2}.$$

Таким образом, погрешность от замены $m_c(1+w)$ на $m_c(1)$ есть

$$O\Big(b^{-1/2v^2}x^b\ln\ln X\prod_{p|c}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\Big),$$

следовательно,

$$K_{1/v,x}(2\sigma,\chi_2)=m_c(1)\frac{1}{2\pi i}\int_{2b-i\infty}^{2b+i\infty}F_{\overline{\chi}_1}(1+w)\frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2}dw+O\Big(b^{-1/2v^2}x^b\ln\ln X\prod_{p|c}(1+\frac{1}{p})\Big),$$

Пусть

$$T_0=e^{\sqrt{\ln X}}.$$

Пусть Γ_1 — прямоугольник с вершинами $2b-iT_0$, $2b+iT_0$, $-c_1+iT_0$, $-c_1-iT_0$, где $c_1=c_1'b^{1/2}$, а c_1' — столь малая положительная постоянная, что ни внутри Γ_1, ни на его границе нет нулей $\zeta(1+w)$ и $L(1+w,\chi_2)$. Существование такой постоянной следует из теорем о границе нулей дзета–функции и L–функции Дирихле (см. [12]).

Пусть $c=c'b$, где $0<c'<0,1c_1'$.

Сделаем внутри Γ_1 разрез по отрезку $[-c_1,-c]$. Определим замкнутый ориентированный контур Γ следующим образом. От точки $2b-iT_0$ по сторонам Γ_1 поднимаемся вверх, поворачиваем налево и опускаемся вниз до точки $-c_1$; по верхнему берегу разреза доходим до точки $-c$; обходим точку $s=0$ отрицательно ориентированной окружности с центром в точке $s=0$ радиуса c; по нижнему берегу разреза доходим до точки $-c_1$; по сторонам Γ_1 опускаемся вниз, поворачиваем налево и возвращаемся в точку $2b-iT_0$.

Верхний берег разреза, окружность и нижний берег разреза назовем Γ_2, Γ_3 и Γ_4, соответственно. По теореме Коши о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F_{\overline{\chi}_1}(1+w)\frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}w^{k_1}U(w)\frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2}dw=$$

$$=\operatorname*{res}_{w=b}\Big(w^{k_1}U(w)\frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2}\Big);$$

здесь

$$U(w) = (w\zeta(1+w))^{-k_1}(L(1+w,\chi_2))^{-k_2}e^{H_2(1+w)}.$$

Эта функция регулярна во внутренности и на границе контура Γ_1, а также регулярна, ограниченна и отлична от нуля в некотором круге с центром в $w=0$, радиус которого равен постоянной.

Тогда

$$\operatorname*{res}_{w=b}\Big(w^{k_1}U(w)\frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2}\Big) = (k_1b^{k_1-1}+b^{k_1}\ln x)U(b)+O(b^{k_1}) =$$

$$= (k_1b^{k_1-1}+b^{k_1}\ln x)U(0)+O(b^{k_1}).$$

Поскольку на границе Γ_1 справедливы оценки ([13, глава 3]):

$$\frac{1}{|\zeta(1+w)|} \ll \ln T_0 \ll \sqrt{\ln x},\ \text{так как } x \geqslant \sqrt{X}; \quad \frac{1}{|L(1+w,\chi_2)|} \ll \ln T_0 \ll \sqrt{\ln x},$$

имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2b-iT_0}^{2b+iT_0} F_{\overline{\chi}_1}(1+w)\frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2}dw =$$

$$= -\frac{U(0)}{2\pi i}\Big(\int_{\Gamma_2}+\int_{\Gamma_3}+\int_{\Gamma_4}\Big)w^{k_1}\frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2}dw + O(b^{k_1}) + U(0)(k_1b^{k_1-1}+b^{k_1}\ln x).$$

Так как $k_1>0$ интеграл

$$\int_{\Gamma_3} w^{k_1}\frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2}dw$$

стремится к нулю при $c'\to+0$. Поэтому

$$\lim_{c'\to+0}\Big(\int_{\Gamma_2}+\int_{\Gamma_3}+\int_{\Gamma_4}\Big) = 2ix^{-b}\sin\pi k_1\int_0^{c_1} r^{k_1}\frac{e^{-r\ln x}}{(r+b)^2}dr =$$

$$= 2ix^{-b}b^{-1+k_1}\sin\pi k_1\int_0^{c_1'b^{-1/2}} r^{k_1}\frac{e^{-rb\ln x}}{(1+r)^2}dr =$$

$$= 2ix^{-b}b^{-1+k_1}\sin\pi k_1\int_0^{\infty} r^{k_1}\frac{e^{-rb\ln x}}{(1+r)^2}dr + O(e^{-c_1'/2}b^{-1/2}).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2b-iT_0}^{2b+iT_0} F_{\overline{\chi}_1}(1+w)\frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2}dw =$$

$$= U(0)(k_1b^{k_1-1}+b^{k_1}\ln x - x^{-b}b^{k_1-1}\frac{\sin\pi k_1}{\pi}\int_0^{\infty} r^{k_1}\frac{e^{-rb\ln x}}{(1+r)^2}dr) + O(b^{k_1}).$$

Замечаем, что

$$x^{-b}b^{k_1-1}\frac{\sin\pi k_1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{r^{k_1}}{(1+r)^2}e^{-rb\ln x}dr \leqslant b^{k_1-1}\frac{\sin\pi k_1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{r^{k_1}}{(1+r)^2}dr = k_1b^{k_1-1},$$

$$K_{1/v,x}(2\sigma,\chi_2) = \frac{m_c(1)}{2\pi i}\int_{2b-iT_0}^{2b+iT_0} F_{\overline{\chi}_1}(1+w)\frac{x^{-b+w}}{(w-b)^2}dw +$$

$$+O\Big(e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln x}}\Big) + O\Big(b^{-1/2v^2}x^b\ln\ln X\prod_{p|c}(1+\frac{1}{p})\Big).$$

Тем самым получена асимптотическая формула

$$K_{1/v,x}(2\sigma,\chi_2)=m_c(1)U(0)\Big(k_1b^{k_1-1}+b^{k_1}\ln x-x^{-b}b^{k_1-1}\frac{\sin\pi k_1}{\pi}\int_0^\infty r^{k_1}\frac{e^{-rb\ln x}}{(1+r)^2}dr\Big)+$$

$$+O(b^{k_1})+O\Big(b^{-1/2v^2}x^b\ln\ln X\prod_{p|c}(1+\frac{1}{p})\Big),$$

причем

$$k_1b^{k_1-1}+b^{k_1}\ln x-x^{-b}b^{k_1-1}\frac{\sin\pi k_1}{\pi}\int_0^\infty r^{k_1}\frac{e^{-rb\ln x}}{(1+r)^2}dr\geqslant b^{k_1}\ln x.$$

Пусть $C>C_0(\varepsilon)>0$, где $C_0(\varepsilon)$ столь велико, что $b^{-1}=\frac{\log T}{C}<0.001\log x$. Тогда имеем

$$0.999m_d(1)m_r^2(1)U^2(0)b^{2k_1}\log^2x<K_{1/v,x_1}(2\sigma,\chi_2)K_{1/v,x_2}(2\sigma,\chi_2)<$$

$$<1.003m_d(1)m_r^2(1)U^2(0)b^{2k_1}\log^2x.$$

Пользуясь этими неравенствами, оценим снизу сумму

$$S=\sum_{\substack{r\leqslant X^{0.1}\\(r,d)=1}}\mu(r)\frac{\chi_1^2(r)d_{1/v}^2(r)g^2(r)\alpha^2(r)}{r^{4\sigma}}K_{1/v,x_1}(2\sigma,\chi_2)K_{1/v,x_2}(2\sigma,\chi_2).$$

Выделяя $r=1$, приходим к неравенству

$$S\geqslant m_d(1)U^2(0)b^{2k_1}\log^2x\Big(1.998-1.003\sum_{r=1}^\infty\mu^2(r)\frac{d_{1/v}^2(r)\alpha^2(r)g^2(r)m_r^2(1)}{r^2}\Big).$$

Из определений следует, что для любого простого p справедливо неравенство

$$\frac{d_{1/v}^2(p)\alpha^2(p)g^2(p)m_p^2(1)}{p^2}\leqslant\frac{1}{v^2p^2},$$

следовательно

$$1.003\sum_{r=1}^\infty\mu^2(r)\frac{d_{1/v}^2(r)\alpha^2(r)g^2(r)m_r^2(1)}{r^2}<1.003\prod_p(1+\frac{1}{p^2})<1.003\zeta(2)<1.65,$$

$$S\geqslant0.348m_d(1)U^2(0)b^{2k_1}\log^2x.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$|V_{1,1/v,d}(2\sigma,\chi_1)|\gg\frac{|\chi_1(d)|d_{1/v}(d)\alpha(d)\tau(d)g(d)|m_d(1)|}{d^{2\sigma}}b^{2k_1}.$$

Мы пришли к неравенству

$$\Sigma'_{1,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1)\gg b^{4k_1}\prod_p(1+\frac{d_{1/v}^2(p)}{p^{2\sigma}})\sum_{d\leqslant X^{0.1}}\frac{\alpha^2(d)\tau^2(d)m_d^2(d)}{d^{2\sigma}}\frac{\varphi(d)}{d}.$$

Оценим снизу сумму по d. Имеем

$$\sum_{d\leqslant X^{0.1}}\frac{\alpha^2(d)\tau^2(d)m_d^2(1)}{d^{2\sigma}}\frac{\varphi(d)}{d}\geqslant\sum_{d=1}^\infty\frac{\alpha^2(d)\tau^2(d)}{d^{2\sigma}}(\frac{\varphi(d)}{d})^3-X^{-b/20}\sum_{d=1}^\infty\frac{\alpha^2(d)\tau^2(d)}{d^{2\sigma_1}}(\frac{\varphi(d)}{d})^3,$$

$$2\sigma = 1+b,\ 2\sigma_1 + b/2,\ \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\alpha^2(d)\tau^2(d)}{d^{2\sigma}} (\frac{\varphi(d)}{d})^3 = \prod_p \Big(1+\frac{4\alpha^2(p)}{p^{2\sigma}}\Big(\frac{p-1}{p}\Big)^3\Big);$$

$$\log\prod_p \Big(1+\frac{4\alpha^2(p)}{p^{2\sigma}}\Big(\frac{p-1}{p}\Big)^3\Big) = \frac{1}{v^2}\sum_{p\equiv\pm1 \pmod 5}\frac{1}{p^{2\sigma}} + 4\varepsilon^2 \sum_{p\equiv\pm2 \pmod 5}\frac{1}{p^{2\sigma}} + O(1) =$$

$$= \Big(\frac{1}{2v^2}+2\varepsilon^2\Big)\log\zeta(2\sigma)+O(1);\quad \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\alpha^2(d)\tau^2(d)}{d^{2\sigma}} (\frac{\varphi(d)}{d})^3 \gg \zeta(2\sigma)^{\frac{1}{2v^2}+2\varepsilon^2} \gg b^{-\frac{1}{2v^2}-2\varepsilon^2};$$

$$X^{-b/20} = e^{-\frac{C}{\log T}\frac{\varepsilon}{20}\log T} = e^{-\frac{C\varepsilon}{20}}.$$

Считая, что C достаточно велико, получаем

$$\sum_{d\leqslant X^{0.1}} \frac{\alpha^2(d)\tau^2(d)m_d^2(1)}{d^{2\sigma}}\frac{\varphi(d)}{d} \gg b^{-\frac{1}{2v^2}-2\varepsilon^2}.$$

Далее,

$$\log\prod_p(1+\frac{d_{1/v}^2(p)}{p^{2\sigma}}) = \sum_p \frac{1}{v^2p^{2\sigma}} + O(1) = \frac{1}{v^2}\log\zeta(2\sigma)+O(1),\quad \prod_p(1+\frac{d_{1/v}^2(p)}{p^{2\sigma}}) \gg b^{-1/v^2}.$$

Применяя полученные оценки, получаем

$$\Sigma'_{1,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1) \gg (2\sigma-1)^{-\frac{(1+2v\varepsilon)^2}{2v^2}}.$$

Отсюда следует утверждение леммы для $\Sigma_{1,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1,Y)$. Оценка для $\Sigma_{2,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1,Y)$ проводится аналогично. □

Лемма 2. *Пусть $2\sigma_2$ равно либо $2\sigma = 1+b$, либо 1, c — натуральное число, $0<k<1$,*

$$g_k(\nu) = \prod_{p|\nu}(d_k(p) + \frac{d_k(p^2)d_k(p)}{p^{2\sigma}} + \frac{d_k(p^3)d_k(p^2)}{p^{4\sigma}} + \cdots)(1+\frac{d_k^2(p)}{p^{2\sigma}} + \frac{d_k^2(p^2)}{p^{4\sigma}} + \cdots)^{-1},$$

$$K_{k,c}(2\sigma_2,\chi) = \sum_\nu \frac{\beta(c\nu)\overline{\chi}(\nu)g_k(\nu)}{\nu^{2\sigma_2}}.$$

Тогда справедливы оценки

$$K_{k,c}(2\sigma_2,\chi_1) = O(\frac{|\alpha(c)|}{\log X}b^{-(1-k_2)}\prod_{p|c}(1+\frac{1}{p})),\quad K_{k,c}(2\sigma_2,\overline{\chi}_1) = O(\frac{|\alpha(c)|}{\log X}b^{-(1-k_1)}\prod_{p|c}(1+\frac{1}{p})),$$

где $k_1 = \frac{k}{4v} - \frac{k\varepsilon}{2}$, $k_2 = \frac{k}{4v}+\frac{k\varepsilon}{2}$.

Доказательство. Представим $K_{k,c}(2\sigma_2,\chi)$ в виде

$$K_{k,c}(2\sigma_2,\chi) = \frac{\alpha(c)}{\log X}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F_\chi(2\sigma_2+s)m_c(2\sigma_2+s)\frac{x^s}{s^2}ds,$$

где

$$F_\chi(z) = \prod_p(1+\frac{\alpha(p)\chi_1(p)\overline{\chi}(p)g_k(p)}{p^z}),\quad (\Re z>1),$$

$$m_c(z)=\prod_{p|c}(1+\frac{\alpha(p)\chi_1(p)\overline{\chi}(p)g_k(p)}{p^z})^{-1}.$$

Оценивая $m_c(z)$ тривиально, получаем $m_c(z)=O(\prod_{p|c}(1+\frac{1}{p}))$. Повторяя рассуждения из леммы 1, получаем

$$|F_{\overline{\chi}_1}(z)|=O(|\zeta(z)|^{-k_1}|L(z,\chi_2)|^{-k_2}),\quad |F_{\chi_1}(z)|=O(|\zeta(z)|^{-k_2}|L(z,\chi_2)|^{-k_1})$$

($\Re z=b$, $|\Im z|\leqslant 0.1$).

Кроме того, имеем тривиальную оценку

$$|F_{\overline{\chi}_1}(z)|+|F_{\chi_1}(z)|=O(b^{-k/(2v)})\quad (\Re z=b,\ |\Im z|>0.1).$$

Отсюда имеем

$$K_{k,c}(2\sigma_2,\chi_1)=O(\frac{|\alpha(c)|}{\log X}\prod_{p|c}(1+\frac{1}{p})(\int_0^{1/4}\frac{t^{k_2}+b^{k_2}}{t^2+b^2}dt+b^{-k/(2v)}\int_{1/4}^{\infty}\frac{dt}{t^2})=$$

$$=O(\frac{|\alpha(c)|}{\log X}b^{-(1-k_2)}\prod_{p|c}(1+\frac{1}{p})).$$

Оценка $K_{k,c}(2\sigma_2,\overline{\chi}_1)$ проводится аналогично. □

Лемма 3. *Пусть* $2\sigma=1+\frac{C}{\log T}=1+b$, $0<k<1$, $2\leqslant u\leqslant v$,

$$a_{l,k,u}(\lambda,\chi)=\sum_{n\nu_1\cdots\nu_u=\lambda}d_k(n)\chi(n)\beta(\nu_1)\cdots\beta(\nu_u)(\nu_1\cdots\nu_u)^{(l-1)(2\sigma-1)}\quad (l=1,2),$$

$$\Sigma_{l,k,u}(2\sigma,\chi)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{|a_{l,k,u}(\lambda,\chi)|^2}{\lambda^{2\sigma}}.$$

Тогда справедливы оценки

$$\Sigma_{l,k,u}(2\sigma,\chi_1)\ll X^{2u(2\sigma-1)}(\frac{(2\sigma-1)^{-1}}{\log X})^2(2\sigma-1)^{-(k-u/(4v)-u\varepsilon/2)^2-(u/(4v)-u\varepsilon/2)^2},$$

$$\Sigma_{l,k,u}(2\sigma,\overline{\chi}_1)\ll X^{2u(2\sigma-1)}(\frac{(2\sigma-1)^{-1}}{\log X})^2(2\sigma-1)^{-(k-u/(4v)+u\varepsilon/2)^2-(u/(4v)+u\varepsilon/2)^2}.$$

Доказательство.

Имеем

$$\Sigma_{l,k,u}(2\sigma,\chi)=\sum_{\nu_1}\cdots\sum_{\nu_u}\sum_{\nu_{u+1}}\cdots\sum_{\nu_{2u}}\frac{\beta(\nu_1)\cdots\beta(\nu_u)\overline{\beta(\nu_{u+1})}\cdots\overline{\beta(\nu_{2u})}}{(\nu_1\cdots\nu_u\nu_{u+1}\cdots\nu_{2u})^{\sigma}}\times$$

$$\times(\nu_1\cdots\nu_u\nu_{u+1}\cdots\nu_{2u})^{(l-1)(2\sigma-1)}\sum_{n_1\nu_1\cdots\nu_u=n_1\nu_{u+1}\cdots\nu_{2u}}\frac{d_k(n_1)d_k(n_2)\chi(n_1)\overline{\chi}(n_2)}{(n_1n_2)^{\sigma}}.\qquad (8)$$

Пусть $q=(\nu_1\cdots\nu_u,\nu_{u+1}\cdots\nu_{2u})$, $\nu_1\cdots\nu_u=aq$, $\nu_{u+1}\cdots\nu_{2u}=bq$, $(a,b)=1$. Тогда

$$\sum_{n_1\nu_1\cdots\nu_u=n_1\nu_{u+1}\cdots\nu_{2u}}\frac{d_k(n_1)d_k(n_2)\chi(n_1)\overline{\chi}(n_2)}{(n_1n_2)^{\sigma}}=\frac{\overline{\chi}(a)\chi(b)}{(ab)^{\sigma}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d_k(am)d_k(bm)|\chi(m)|^2}{m^{2\sigma}}=$$

$$= \frac{\overline{\chi}(\nu_1)\cdots\overline{\chi}(\nu_u)\chi(\nu_{u+1})\cdots\chi(\nu_{2u})}{(\nu_1\cdots\nu_u\nu_{u+1}\cdots\nu_{2u})^\sigma} q^{2\sigma} \sum_{m_a\in M_a} \frac{d_k(am_a)d_k(m_a)}{m_a^{2\sigma}} \sum_{m_b\in M_b} \frac{d_k(bm_b)d_k(m_b)}{m_b^{2\sigma}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{m=1\\(m,5ab)=1}} \frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}} = c_5 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}} \frac{\overline{\chi}(\nu_1)\cdots\overline{\chi}(\nu_u)\chi(\nu_{u+1})\cdots\chi(\nu_{2u})}{(\nu_1\cdots\nu_u\nu_{u+1}\cdots\nu_{2u})^\sigma} \times$$

$$q^{2\sigma} g_k(\frac{\nu_1\cdots\nu_u}{q}) g_k(\frac{\nu_{u+1}\cdots\nu_{2u}}{q}), \tag{9}$$

где

$$c_5 = (1 + \frac{d_k^2(5)}{5^{2\sigma}} + \frac{d_k^2(5^2)}{5^{4\sigma}} + \cdots)^{-1},\ g_k(c) = \prod_{p|c} (d_k(p^{\alpha_p}) + \frac{d_k(p^{\alpha_p+1})d_k(p)}{p^{2\sigma}} + \frac{d_k(p^{\alpha_p+2})d_k(p)}{p^{4\sigma}} + \cdots) \times$$

$$\times (1 + \frac{d_k^2(p)}{p^{2\sigma}} + \frac{d_k^2(p^2)}{p^{4\sigma}} + \cdots)^{-1}, \quad c = \prod_{p|c} p^{\alpha_p}.$$

Согласно формуле Мебиуса имеем

$$q^{2\sigma} g_k(\frac{\nu_1\cdots\nu_u}{q}) g_k(\frac{\nu_{u+1}\cdots\nu_{2u}}{q}) = \sum_{d|q} \gamma(d), \tag{10}$$

где

$$\gamma(d) = d^{2\sigma} \sum_{\delta|d} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{2\sigma}} g_k(\frac{\nu_1\cdots\nu_u}{d}\delta) g_k(\frac{\nu_{u+1}\cdots\nu_{2u}}{d}\delta). \tag{11}$$

Подставим (10) и (11) в (9):

$$\Sigma_{l,k,u}(2\sigma,\chi) = c_5 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}} \sum_{d\leqslant X^u} d^{2\sigma} \sum_{\delta|d} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{2\sigma}} |V_{l,k,u,d,\delta}(2\sigma,\chi)|^2,$$

где

$$V_{l,k,u,d,\delta}(2\sigma,\chi) = \sum_{\substack{\nu_1\\ \nu_1\cdots\nu_u\equiv\, 0}} \cdots \sum_{\substack{\nu_u\\ \pmod d}} \frac{\beta_1(\nu_1)\cdots\beta_1(\nu_u)}{(\nu_1\cdots\nu_u)^{2\sigma_2}} g_k(\frac{\nu_1\cdots\nu_u}{d}\delta), \tag{12}$$

$\beta_1(\nu) = \beta(\nu)\overline{\chi}(\nu)$, $2\sigma_2$ равно 2σ при $l=1$ и 1 при $l=2$.

Отсюда имеем

$$V_{l,k,u,d,\delta}(2\sigma,\chi) = \sum_{\substack{\nu_{1d}\in M_d\\ \nu_{1d}\cdots\nu_{ud}\equiv 0}} \cdots \sum_{\substack{\nu_{ud}\in M_d\\ \pmod d}} \frac{g_k(\frac{\nu_{1d}\cdots\nu_{ud}}{d}\delta)}{(\nu_{1d}\cdots\nu_{ud})^{2\sigma_2}} \times$$

$$\times \sum_{(\nu_1,d)=1} \cdots \sum_{(\nu_u,d)=1} \frac{\beta_1(\nu_{1d}\nu_1)\cdots\beta_1(\nu_{ud}\nu_u)}{(\nu_1\cdots\nu_u)^{2\sigma_2}} g_k(\nu_1\cdots\nu_u).$$

Поскольку $\nu_1,\ldots,\nu_u$ — бесквадратные числа, для любого произведения $\nu_1\cdots\nu_u$ существует единственный набор $\mu_1,\ldots,\mu_u$ бесквадратных попарно простых и взаимно простых с d чисел таких, что

$$\nu_1\cdots\nu_u = \mu_1\mu_2^2\cdots\mu_u^u.$$

При этом числа ν_j раскладываются в произведения

$$\nu_j = \nu_j^{(1)}\cdots\nu_j^{(u-1)}\mu_j \quad (j=1,\ldots u)$$

так, что
$$\nu_1^{(1)}\cdots\nu_u^{(1)}=\mu_1,\ \nu_1^{(2)}\cdots\nu_u^{(2)}=\mu_2^2,\ldots,\nu_1^{(u-1)}\cdots\nu_u^{(u-1)}=\mu_{u-1}^{u-1}.$$

Введем обозначения
$$\nu_j=\nu_j'\nu_j'',\ \nu_j'=\nu_j^{(1)},\ j=1,\ldots,u.$$

Отметим, что при любом $1\leqslant j\leqslant u$ ν_j'' делит число $\mu_2\cdots\mu_u$.

Сделаем в кратной сумме по $\nu_1,\ldots,\nu_u$ замену переменных суммирования и перейдем к неравенству:
$$|V_{l,k,u,d,\delta}(2\sigma,\chi)|\leqslant\sum_{\substack{\nu_{1d}\in M_d\\ \nu_{1d}\cdots\nu_{ud}\equiv 0}}\cdots\sum_{\substack{\nu_{ud}\in M_d\\ \pmod d}}\frac{g_k(\frac{\nu_{1d}\cdots\nu_{ud}}{d}\delta)}{(\nu_{1d}\cdots\nu_{ud})^{2\sigma_2}}\times$$
$$\times\sum_{\mu_u}\frac{g_k(\mu_u^u)}{\mu_u^{2\sigma_2 u}}\cdots\sum_{\mu_2}\frac{g_k(\mu_2^2)\tau_u(\mu_2^2)}{\mu_2^{4\sigma_2}}\mu^2(\mu_2\cdots\mu_u)\times$$
$$\times|\sum_{\nu_1'}\frac{\beta_1(\nu_{1d}\nu_1''\nu_1')}{\nu_1'^{2\sigma_2}}g_k(\nu_1')\cdots\sum_{\nu_1'}\frac{\beta_1(\nu_{ud}\nu_u''\nu_u')}{\nu_u'^{2\sigma_2}}g_k(\nu_u')\mu^2(\nu_1'\cdots\nu_u')|. \tag{13}$$

Пусть $\chi=\overline{\chi}_1$. Продолжим, пользуясь известной формулой для $\mu^2(\nu)$ и леммой 2,
$$|\sum_{\nu_1'}\frac{\beta_1(\nu_{1d}\nu_1''\nu_1')}{\nu_1'^{2\sigma_2}}g_k(\nu_1')\cdots\sum_{\nu_1'}\frac{\beta_1(\nu_{ud}\nu_u''\nu_u')}{\nu_u'^{2\sigma_2}}g_k(\nu_u')\mu^2(\nu_1'\cdots\nu_u')|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_m\mu^2(m)\sum_{\substack{\nu_{1m}\in M_m\\ \nu_{1m}\cdots\nu_{um}\equiv\,0}}\cdots\sum_{\substack{\nu_{um}\in M_m\\ \pmod{m^2}}}\frac{g_k(\nu_{1m})\cdots g_k(\nu_{um})}{(\nu_{1m}\cdots\nu_{um})^{2\sigma_2}}|K_{k,\nu_{1d}\nu_{1m}\nu_1''}(2\sigma_2,\chi)\cdots K_{k,\nu_{ud}\nu_{um}\nu_u''}(2\sigma_2,\chi)|\ll$$
$$\ll\frac{b^{-(1-k_1)u}}{(\log X)^u}|\alpha(\nu_{1d})|\cdots|\alpha(\nu_{ud})|\prod_{p|d}(1+\frac{1}{p})^u.$$

Подставим это неравенство в(13). Получим
$$V_{l,k,u,d,\delta}(2\sigma,\overline{\chi}_1)\ll\frac{b^{-(1-k_1)u}}{(\log X)^u}G(d)\prod_{p|d}(1+\frac{1}{p})^u,$$
где
$$G(d)=\sum_{\substack{\nu_{1d}\in M_d\\ \nu_{1d}\cdots\nu_{ud}\equiv\,0}}\cdots\sum_{\substack{\nu_{ud}\in M_d\\ \pmod d}}\frac{|\alpha(\nu_{1d})|\cdots|\alpha(\nu_{ud})|}{(\nu_{1d}\cdots\nu_{ud})^{2\sigma_2}}.$$

Отсюда имеем
$$\Sigma_{l,k,u}(2\sigma,\overline{\chi}_1)\ll\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}}X^{2ub}\frac{b^{-2(1-k_1)u}}{(\log X)^{2u}}\sum_{d=1}^{\infty}d^{1-b}G^2(d)\prod_{p|d}(1+\frac{1}{p})^{3u}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}}X^{2ub}\frac{b^{-2(1-k_1)u}}{(\log X)^{2u}}\prod_p(1+p^{1-b}G^2(p)(1+\frac{1}{p})^{3u}+p^{2-2b}G^2(p^2)(1+\frac{1}{p})^{3u}+\cdots).$$

Заметим, что эйлерово произведение сходится, поскольку
$$G(p^{\varkappa})\leqslant\binom{u}{\varkappa}(\frac{|\alpha(p)|}{p})^{\varkappa}(1+\frac{1}{p})^u.$$

Далее,

$$\log\prod_p(1+p^{1-b}G^2(p)(1+\frac{1}{p})^{3u}+p^{2-2b}G^2(p^2)(1+\frac{1}{p})^{3u}+\cdots)=\frac{u^2}{4v^2}\sum_{p\equiv\pm1\pmod 5}\frac{1}{p^{2\sigma}}+$$

$$+\varepsilon^2u^2\sum_{p\equiv\pm2\pmod 5}\frac{1}{p^{2\sigma}}+O(1)=(\frac{u^2}{8v^2}+\frac{\varepsilon^2u^2}{2})\log\zeta(2\sigma)+O(1);$$

$$\prod_p(1+p^{1-b}G^2(p)(1+\frac{1}{p})^{3u}+p^{2-2b}G^2(p^2)(1+\frac{1}{p})^{3u}+\cdots)\ll b^{-(\frac{u^2}{8v^2}+\frac{\varepsilon^2u^2}{2})}.$$

Поскольку

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d_k^2(m)}{m^{2\sigma}}\ll\prod_p(1-\frac{1}{p^{2\sigma}})^{-k^2}=(\zeta(2\sigma))^{k^2}\ll b^{-k^2},$$

окончательно получаем

$$\Sigma_{l,k,u}(2\sigma,\overline{\chi}_1)\ll X^{2ub}(\frac{b^{-1}}{\log X})^2b^{-(k-u/(4v)+u\varepsilon/2)^2-(u/(4v)+u\varepsilon/2)^2}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения и пользуясь неравенством

$$V_{l,k,u,d,\delta}(2\sigma,\chi_1)\ll\frac{b^{-(1-k_2)u}}{(\log X)^u}G(d)\prod_{p|d}(1+\frac{1}{p})^u,$$

приходим к оценке для $\Sigma_{l,k,u}(2\sigma,\chi_1)$. □

Следствие 1. *Пусть* $2\sigma=1+\frac{C}{\log T}=1+b$, $l=1,2$.
Справедливы оценки

$$\Sigma_{l,1/v,2}(2\sigma,\chi_1)\ll X^{2u(2\sigma-1)}(\frac{(2\sigma-1)^{-1}}{\log X})^2(2\sigma-1)^{-(1-2v\varepsilon)^2/(2v^2)},$$

$$\Sigma_{l,1/2,v}(2\sigma,\chi_1)\ll X^{2u(2\sigma-1)}(\frac{(2\sigma-1)^{-1}}{\log X})^2(2\sigma-1)^{-(1-2v\varepsilon)^2/8},$$

$$\Sigma_{l,1/v,2}(2\sigma,\overline{\chi}_1)\ll X^{2u(2\sigma-1)}(\frac{(2\sigma-1)^{-1}}{\log X})^2(2\sigma-1)^{-(1+2v\varepsilon)^2/(2v^2)},$$

$$\Sigma_{l,1/v,2}(2\sigma,\overline{\chi}_1)\ll X^{2u(2\sigma-1)}(\frac{(2\sigma-1)^{-1}}{\log X})^2(2\sigma-1)^{-(1+2v\varepsilon)^2/8}.$$

3. Леммы об оценках дробных моментов

Пусть

$$\varphi_1(z)=\Big(\sum_\nu\frac{\beta(\nu)}{\nu^z}\Big)^{2v},\quad\varphi_2(z)=\Big(\sum_\nu\frac{\overline{\beta}(\nu)}{\nu^{1-z}}\Big)^{2v},\quad f_l(z,\chi)=L(z,\chi)\varphi_l(z)\quad(l=1,2).$$

При $k>0$

$$J_{l,k}(\sigma,\chi)=\int_{-\infty}^{+\infty}|f_l(\sigma+it,\chi)|^{2k}w_k(t)dt,$$

где

$$w_k(t)=\int_T^{2T}e^{-2k(t-\tau)^2}d\tau.$$

Лемма 4. *Пусть $k > 0$, $T \geqslant 2$, $1/2 < \sigma \leqslant 3/4$, l — любое из чисел $1, 2$. Тогда*

$$J_{l,k}\Big(\frac{1}{2}, \chi\Big) \ll T^{k(\sigma-1/2)}\sqrt{J_{1,k}(\sigma,\chi)J_{2,k}(\sigma,\chi)} + e^{-0{,}1kT^2}.$$

Лемма 5. *Пусть $k > 0$, $T \geqslant 2$, $1/2 < \sigma \leqslant 3/4$, l — любое из чисел $1, 2$. Тогда*

$$J_{l,k}(\sigma,\chi) \ll \Big(J_{l,k}\Big(\frac{1}{2}, \chi\Big)\Big)^{3/2-\sigma}(T^{1+\varepsilon})^{\sigma-1/2} + e^{-0{,}1kT^2}.$$

Доказательства лемм 4 и 5 проводятся так же, как доказательства соответствующих лемм 4 и 5 в работе [14].

Введем ряд определений:

$$A_{l,k,u}(z,\chi) = \sum_{\lambda \leqslant Y}\frac{a_{l,k,u}(\lambda,\chi)}{\lambda^z}, \quad g_{l,k,u}(z,\chi) = L(z,\chi)\varphi_l(z) - A^{\nu}_{l,k,u}(z,\chi),$$

$$K_{l,k,u}(\sigma,\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty}|g_{l,k,u}(\sigma+it,\chi)|^{2/\nu}w_{1/\nu}(t)dt \quad (l = 1, 2,\ \nu = 2, v).$$

Лемма 6. *Пусть $1/2 < \sigma \leqslant 5/4$, l — любое из чисел $1, 2$, $k = \frac{1}{2}$, $u = v$, или $k = \frac{1}{v}$, $u = 2$. Тогда*

$$K_{l,k,u}(\sigma,\chi) \ll (K_{l,k,u}(1/2,\chi))^{\frac{5-4\sigma}{3}}(K_{l,k,u}(5/4,\chi))^{\frac{4\sigma-2}{3}} + e^{-\frac{T^2}{\log^2 T}}.$$

Доказательства леммы 6 совпадает с доказательством леммы 7 из работы [14].

Лемма 7. *Пусть l — любое из чисел $1, 2$, $k = \frac{1}{2}$, $u = v$, $\nu = 2$ или $k = \frac{1}{v}$, $u = 2$, $\nu = v$. Тогда*

$$K_{l,k,u}(5/4,\chi) \ll T^{\varepsilon}\int_0^{3T}\Big|\sum_{n > YX^{-2}}\frac{b_{l,k,u}(n)}{n^{5/4+it}}\Big|^{2/\nu}dt + e^{-T^2/(10v)},$$

где $|b_{l,k,u}(n)| \leqslant 1$;

$$K_{l,k,u}(5/4,\chi) \ll T^{1+\varepsilon}Y^{-\frac{3}{2}k}.$$

Доказательство. Доказательство первого утверждения при любых значениях l, k, u, ν проводится одинаково. Пусть, например, $l = 1$, $k = 1/v$, $u = 2$, $\nu = v$. Пусть $z = 5/4 + it$. Тогда

$$A_{1,1/v,2}(z,\chi) = \sum_{n\nu_1\nu_2 \leqslant Y}\frac{d_{1/v}(n)\chi(n)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{(n\nu_1\nu_2)^z} =$$

$$= \Big(\sum_{n \leqslant YX^{-2}}\frac{d_{1/v}(n)\chi(n)}{n^z}\Big)\Big(\sum_{\nu_1}\frac{\beta(\nu_1)}{\nu_1^z}\sum_{\nu_2}\frac{\beta(\nu_2)}{\nu_2^z}\Big) +$$

$$+ \Big(\sum_{\nu_1}\frac{\beta(\nu_1)}{\nu^z}\sum_{\nu_2}\frac{\beta(\nu_2)}{\nu_2^z}\Big)\sum_{YX^{-2} < n \leqslant Y(\nu_1\nu_2)^{-1}}\frac{d_{1/v}(n)\chi(n)}{n^z}.$$

Возведем это равенство в степень v; получим

$$A^v_{1,1/v,2}(z,\chi) = \sum_{n \leqslant (YX^{-1})^v}\frac{b(n)\chi(n)}{n^z}\varphi_1(z) + S_{1,1/v,2}(z,\chi),$$

где $S_{1,1/v,2}(z,\chi)$ представляет собой сумму четырех слагаемых вида

$$\sum_{YX^{-2} < n \leqslant (YX^{-2})^v}\frac{b_{1,1/v,2}(n)}{n^z}, \quad |b_{1,1/v,2}(n)| \leqslant 1,$$

$$b(n) = \sum_{\substack{n_1 \leqslant YX^{-2} \\ n_1 \cdots n_v = n}} \dots \sum_{n_v \leqslant YX^{-2}} d_{1/v}(n_1) \cdots d_{1/v}(n_v).$$

Поскольку $b(n) \in [0,1]$ при любых n, и $b(n) = 1$ при $n \leqslant YX^{-2}$, имеем

$$L(z,\chi)\varphi_1(z) - \sum_{n \leqslant YX^{-2}} \frac{b(n)\chi(n)}{n^z}\varphi_1(z) = \sum_{n > YX^{-2}} \frac{(1-b(n))\chi(n)}{n^z}\varphi_1(z).$$

Тем самым первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение следует теперь, из неравенства Гельдера и неравенства

$$\int_0^T \Big|\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{it}\Big|^2 dt = T\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + O\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2\Big) \tag{14}$$

(см., например, [15, глава 7]). □

4. Доказательство теоремы 1

Пусть

$$R_{l,k,u}(\sigma,\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_{l,k,u}(\sigma+it,\chi)|^2 w_k(t)dt.$$

Неравенство

$$R_{l,1/v,2}(\sigma,\overline{\chi}_1) \ll J_{l,1/v,2}(\sigma,\overline{\chi}_1) + K_{l,1/v,2}(\sigma,\overline{\chi}_1), \tag{15}$$

справедливо для любого σ из промежутка $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\eta}{\log T}\right]$.

Если $K_{1,1/v,2}(1/2,\overline{\chi}_1) \leqslant T$, то, полагая в (15) $\sigma = 1/2$, получаем

$$R_{l,1/v,2}\Big(\frac{1}{2},\overline{\chi}_1\Big) \ll J_{l,1/v}\Big(\frac{1}{2},\overline{\chi}_1\Big) + T.$$

Поскольку

$$T\Sigma_{l,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1,Y) \ll R_{l,1/v,2}\Big(\frac{1}{2},\overline{\chi}_1\Big) \ll T\Sigma_{l,1/v}(2\sigma,\overline{\chi}_1,Y),$$

то, в силу леммы 1, при $K_{1,1/v,2}(1/2,\overline{\chi}_1) \leqslant T$

$$T\Sigma_{l,1/v}\Big(\frac{1}{2},\overline{\chi}_1\Big) \ll J_{l,1/v}\Big(\frac{1}{2},\overline{\chi}_1\Big). \tag{16}$$

Пусть $K_{1,1/v,2}(1/2,\overline{\chi}_1) > T$. Тогда из лемм 6, 7 следует, что

$$T\Sigma_{l,1/v}(\sigma,\overline{\chi}_1) \ll J_{l,1/v}(\sigma,\overline{\chi}_1) + K_{l,1/v,2}(1/2,\overline{\chi}_1)Y^{-(\frac{3}{2v}-\frac{4\varepsilon}{3})\frac{4\sigma-2}{3}} \ll$$

$$\ll J_{l,1/v,2}(\sigma,\overline{\chi}_1) + J_{l,1/v}(\frac{1}{2},\overline{\chi}_1) + T\Sigma_{l,1/v}(1/2,\overline{\chi}_1)Y^{-(\frac{3}{2v}-\frac{4\varepsilon}{3})\frac{4\sigma-2}{3}}. \tag{17}$$

Так как $\eta > 0$ — достаточно большое число, из лемм 1 и 2 следует, что

$$\Sigma_{1,1/v}(1/2,\overline{\chi}_1)Y^{-(\frac{3}{2v}-\frac{4\varepsilon}{3})\frac{4\sigma-2}{3}} \leqslant \frac{1}{2}c_1\Sigma_{1,1/v}(\sigma,\overline{\chi}_1),$$

где c_1 — константа из знака Виноградова в (17).

Отсюда и из леммы 4 следует, что и в случае $K_{1,1/v,2}(1/2,\overline{\chi}_1) > T$ справедливо неравенство (16).

Пусть l — любое из чисел 1, 2, k равно либо $\frac{1}{2}$, либо $\frac{1}{v}$. Пусть $u=\frac{1}{k}$. Оценим $J_{l,k}(2\sigma,\chi)$ сверху. Имеем

$$J_{l,k}(\sigma,\chi) \ll R_{l,k,u}(\sigma,\chi)+K_{l,k,u}(\frac{1}{2},\chi)Y^{-(\frac{3}{2}k-\frac{4\varepsilon}{3})\frac{4\sigma-2}{3}} \ll R_{l,k,u}(\sigma,\chi)+$$

$$+R_{l,k,u}(\frac{1}{2},\chi)+J_{l,k}(\frac{1}{2},\chi)Y^{-(\frac{3}{2}k-\frac{4\varepsilon}{3})\frac{4\sigma-2}{3}}.$$

Если $K_{l,k}(1/2,\chi)\leqslant T$, то

$$J_{l,k}(\sigma,\chi) \ll R_{l,k,u}(\sigma,\chi)+T \ll R_{l,k,u}(\sigma,\chi) \ll T\Sigma_{l,k}(\sigma,\chi). \tag{18}$$

Воспользуемся леммой 4:

$$J_{l,k}(\sigma,\chi) \ll R_{l,k,u}(\sigma,\chi)+R_{l,k,u}(\frac{1}{2},\chi)+\sqrt{J_{1,k}(\frac{1}{2},\chi)J_{2,k}(\frac{1}{2},\chi)}T^{k(\sigma-\frac{1}{2})}Y^{-(\frac{3}{2}k-\frac{4\varepsilon}{3})\frac{4\sigma-2}{3}}.$$

Пусть

$$\max(J_{1,k}(\sigma,\chi),J_{2,k}(\sigma,\chi))=J_{l,k}(\sigma,\chi).$$

Тогда при достаточно большом $\eta>0$

$$c_2T^{k(\sigma-\frac{1}{2})}Y^{-(\frac{3}{2}k-\frac{4\varepsilon}{3})\frac{4\sigma-2}{3}} \leqslant \frac{1}{2},$$

где c_2 — неравенство из знака Виноградова в (4); поэтому и в этом случае справедливо неравенство (18).

Пусть $J_{l,k}(\sigma,\chi)<J_{3-l,k}(\sigma,\chi)$. Тогда получаем

$$J_{3-l,k}(\sigma,\chi) \ll R_{3-l,k,u}(\sigma,\chi)+R_{3-l,k,u}(1/2,\chi) \ll T\Sigma_{3-l,k,u}(\sigma,\chi).$$

Отсюда, из (16) и (18) и из леммы 1 и следствия 1 утверждения теоремы прямо следуют.

Замечание 1. *Из определений следует, что для моментов успокоенной функции Дэвенпорта–Хейльбронна справедливы те же оценки, что и для соответствующих моментов успокоенной функции $L(\frac{1}{2}+it,\overline{\chi}_1)$. Беря в этих оценках $v=3$, и повторяя рассуждения из статьи [4], приходим к оценке*

$$N_{0,f}(T)>T(\log T)^{1/2+1/12-\varepsilon} \quad (\varepsilon>0).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann zeta–function on the critical line // Math. Zs. 1921.V.10, PP.283–317.

2. Selberg A. On the zeroes of Riemann's zeta–function // Skr. Norske Vid. Akad. Oslo.1942. V. 10.

3. Карацуба А. А. Дробные моменты $\zeta(s)$ на критической прямой // Матем. заметки. 2002. Т. 72, вып. 4, С. 502–508.

4. Гриценко С. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна // Тр. МИАН. 2017. Т. 296. С. 72–94.

5. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой// Изв. АН СССР.Сер. матем. 1990. Т. 54, № 2, С. 303–315.

6. Карацуба А. А. О нулях некоторых рядов Дирихле //УМН, 1990, Т. 45, 1(271), 175–176.

7. Карацуба А. А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Изв. АН СССР.Сер. матем.1991,Т. 55, № 3, 483–514.

8. Карацуба А. А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле// Тр. МИАН.1994.Т. 207. С. 180–196.

9. Карацуба А. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения// Изв. РАН. Сер. матем., 1993,Т. 57, № 5, 3–14.

10. Карацуба А. А. О нулях одного класса функций, порожденных функцией Гурвица// УМН, 1993,Т. 48, 5(293), 175–176.

11. Карацуба А. А. Дзета–функция Римана и ее нули // УМН.1985.Т. 40, 5 (245), С. 19–70.

12. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — 2-е изд. — М.: Наука, 1983.

13. Титчмарш Е. К. Теория дзета–функции Римана. —М.: ИЛ, 1953.

14. Heath–Brown D. R. Fractional moments of Riemann zeta–function // J. Lond. Math. Soc.1981.V 24, № 2, PP. 65–78.

15. Iviĉ A. The Riemann Zeta–function. —N. Y.: John Wiley and Sons, 1985.

REFERENCES

1. Hardy G. H. & Littlewood J.E.1921, “*The zeros of Riemann zeta–function on the critical line*“, Math. Zs., vol.10, pp.283–317.

2. Selberg A. 1942, “*On the zeroes of Riemann's zeta–function*“, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo, vol. 10.

3. Karatsuba A. A. 1983, “*Basic Analytic Number Theory*“, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 222.

4. Gritsenko S. A. 2017, “*On the zeros of the Davenport–Heilbronn function*“, Proc. Steklov Inst. Math., vol. 296, pp. 65–87.

5. Karatsuba A. A. 1986 , “*Zeros of the Riemann zeta function on the critical line*“, Proc. Steklov Inst. Math., vol. 167, pp. 187–200.

6. Karatsuba A. A. 1990, “*Zeros of certain Dirichlet series*“, Russian Math. Surveys, vol. 45, № 1, pp. 207–208.

7. Karatsuba A. A. 1991 , “*On the zeros of the Davenport–Heilbronn function lying on the critical line*“, Math. USSR-Izv., vol. 36, № 2, pp. 311–324.

8. Karatsuba A. A. 1992, “*On the zeros of a special type of function connected with Dirichlet series*“, Math. USSR-Izv., vol. 38, № 3, pp. 471–502.

9. Karatsuba A. A., 1993, “*On the zeros of a class of functions generated by the Hurwitz function*“, Russian Math. Surveys, vol. 48, № 5, 175–176.

10. Karatsuba A. A. 1994, “*On the zeros of arithmetic Dirichlet series without Euler product*“, Russian Acad. Sci. Izv. Math., vol 43, № 2, pp. 193–203.

11. Karatsuba A. A. 1995, "*A new approach to the problem of the zeros of some Dirichlet series*", Proc. Steklov Inst. Math., vol 207, pp. 163–177.

12. Karatsuba A. A. 2002, "*Fractional Moments and Zeros of* $\zeta(s)$ *on the Critical Line*", Math. Notes, vol. 72, 4, 466–472.

13. Titchmarsh E. C. 1986, "*The Theory of the Riemann Zeta–function*" 2-nd edition, Oxford University Press, New York.

14. Heath–Brown D. R. 1981, "*Fractional moments of Riemann zeta–function*", J. Lond. Math. Soc., vol. 24, № 2, pp. 65–78.

15. Iviĉ A. 1985, "*The Riemann Zeta–function*" John Wiley and Sons, New York.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-187-207

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ МОНОИДОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ОДНОЗНАЧНЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ[1]

Н. Н. Добровольский (г. Тула)

Аннотация

В работе рассматривается новый класс рядов Дирихле — дзета-функции моноидов натуральных чисел. Изучаются обратные ряды Дирихле для дзета-функции моноидов натуральных чисел. Показано, что вопрос о существовании эйлерова произведения для дзета-функции моноида связан с однозначностью разложения на простые множители в этом моноиде.

Вводится понятие взаимно простых множеств натуральных чисел и показано, что для таких множеств имеет место мультипликативность минимальных моноидов и соответствующих дзета-функций моноидов.

Показано, что если все простые элементы моноида являются простыми числами, то характеристическая функция моноида будет мультипликативной функцией и в этом случае дзета-функция моноида будет обобщённой L-функцией.

Рассматриваются различные примеры моноидов и соответствующих дзета-функций моноидов. Изучена связь вопросов обращения дзета-функции моноида и обобщённой функции Мёбиуса на моноиде как частично упорядоченном множестве с помощью отношения делимости натуральных чисел. Получены ряд свойств дзета-функций моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители.

В работе рассмотрен вопрос о логарифмировании эйлерова произведения, как функции комплексного аргумента. Показано, что непрерывная функция, задающая значение логарифма эйлерового произведения вблизи полюса пробегает все ветви бесконечно-значной функции логарифма. Получены следствия о значения комплекснозначной функции специального вида вблизи особой точки. Из этих свойств вытекают утверждения о значениях дзета-функции Римана вблизи границы области абсолютной сходимости.

С помощью постулата Бертрана введены бесконечные экспоненциальные последовательности простых чисел. Показано, что соответствующие дзета-функции моноидов натуральных чисел абсолютно сходятся во всей полуплоскости с положительной действительной частью. Так как такие дзета-функции моноидов натуральных чисел во всей области абсолютной сходимости раскладываются в эйлерово произведение, то они во всей полуплоскости с положительной действительной частью не имеют нулей.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение, логарифм эйлерова произведения.

Библиография: 17 названий.

THE ZETA-FUNCTION IS THE MONOID OF NATURAL NUMBERS WITH UNIQUE FACTORIZATION

N. N. Dobrovol'skii (Tula)

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

Abstract

In this paper we consider a new class of Dirichlet series, the zeta functions of monoids of natural numbers. The inverse Dirichlet series for the zeta function of monoids of natural numbers are studied. It is shown that the existence of an Euler product for the zeta function of a monoid is related to the uniqueness of the factorization into prime factors in this monoid.

The notion of coprime sets of natural numbers is introduced and it is shown that for such sets the multiplicativity of minimal monoids and corresponding zeta-functions of monoids takes place.

It is shown that if all prime elements of a monoid are prime numbers, then the characteristic function of the monoid is a multiplicative function and in this case the zeta function of the monoid is a generalized L-function.

Various examples of monoids and corresponding zeta functions of monoids are considered. The relation between the inversion of the zeta function of a monoid and the generalized Möbius function on a monoid as a partially ordered set is studied by means of the divisibility of natural numbers. A number of properties of the zeta functions of monoids of natural numbers with a unique decomposition into prime factors are obtained.

The paper deals with taking the logarithm of an Eulerian product as a function of a complex argument. It is shown that a continuous function that determines the value of the logarithm of an Euler product runs through all branches of the infinite-valued function of the logarithm near its pole. The corollaries on the value of a complex-valued function of a special form near a singular point are obtained. These properties imply statements about the values of the Riemann zeta function near the boundary of the region of absolute convergence.

Using Bertrand's postulate, infinite exponential sequences of prime numbers are introduced. It is shown that corresponding zeta-functions of monoids of natural numbers converge absolutely in the whole half-plane with a positive real part. Since such zeta-functions of monoids of natural numbers can be decomposed into an Euler product in the whole region of absolute convergence, they do not have zeros in the entire half-plane with a positive real part.

In conclusion, topical problems with zeta-functions of monoids of natural numbers that require further investigation are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product, logarithm of the Euler product.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Для любого множества A натуральных чисел определим дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ равенством

$$\zeta(A|\alpha)=\sum_{x\in A}\frac{1}{x^{\alpha}} \quad (\alpha=\sigma+it,\, \sigma>1). \tag{1}$$

Если множество A конечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α-плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leqslant \sigma_A \leqslant 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$ (см. [13], [14]). Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Будем через $M(A)$ обозначать минимальный мультипликативный моноид, содержащий множество A. Таким образом, мы имеем:

$$M(A) = \{a_1 \dots a_l | a_1, \dots, a_l \in A, l \geqslant 0\}.$$

Здесь мы используем естественное соглашение, что пустое произведение равно 1.

Будем говорить, что два множества натуральных чисел A и B взаимно просты, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ выполнено $(a, b) = 1$. В этом случае будем писать $(A, B) = 1$.

Нетрудно видеть, что при $(A, B) = 1$ справедливы равенства

$$M(A \cdot B) = M(A) \cdot M(B), \quad \zeta(M(A \cdot B)|\alpha) = \zeta(M(A)|\alpha)\zeta(M(B)|\alpha). \tag{2}$$

Ясно, что последнее равенство имеет место при $\sigma > \sigma_{M(A \cdot B)}$ и $\sigma_{M(A \cdot B)} = \max(\sigma_{M(A)}, \sigma_{M(B)})$. Равенство (2) следует из того, что при $(A, B) = 1$ представление $n = n_1 n_2$, где $n \in M(A \cdot B)$, $n_1 \in M(A)$ и $n_2 \in M(B)$, единственное.

Если через $\zeta^*(A|\alpha)$ обозначается обратный ряд, то есть $\zeta^*(A|\alpha) = \zeta^{-1}(A|\alpha)$, то нетрудно понять, что если $1 \in A$, то

$$\zeta^*(A|\alpha) = \sum_{n \in M(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha}, \tag{3}$$

где коэффициенты $x_A(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$x_A(1) = 1, \sum_{m|n,\, m \in A} x_A\left(\frac{n}{m}\right) = 0 \quad (n \in M(A), n > 1). \tag{4}$$

Обозначим через $\sigma_{A,1}$ число, такое что для $A^* = A \setminus \{1\}$ и

$$S(A, \alpha) = \sum_{n \in A^*} \frac{1}{n^\alpha}$$

выполнено $|S(A, \alpha)| < 1$ при $\sigma > \sigma_{A,1}$, тогда

$$\zeta^{-1}(A|\alpha) = \frac{1}{1 + S(A, \alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu S^\nu(A, \alpha) =$$

$$= 1 - \sum_{n \in A^*} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^\nu \sum_{n_1, \dots, n_\nu \in A^*} \frac{1}{(n_1 \dots n_\nu)^\alpha} = \sum_{n \in M(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha}$$

и для $x_A(n)$ выполнены соотношения

$$x_A(1) = 1, \quad x_A(n) = \sum_{\nu \geqslant 1} (-1)^\nu y_\nu(n) \quad n \in M^*(A),$$

где $y_\nu(n)$ — количество решений уравнения $n = n_1 \dots n_\nu$ в натуральных $n_1, \dots, n_\nu \in A^*$.

Таким образом, если σ_A^* определяет правую полуплоскость $\sigma > \sigma_A^*$ абсолютной сходимости обратного ряда $\zeta^*(A|\alpha)$, то $\sigma_A^* \leqslant \sigma_{A,1}$.

Если M_1 и M_2 — два взаимно простых моноида[2] $(M_1, M_2) = 1$, то из равенства

$$\zeta(M_1 \cdot M_2)|\alpha) = \zeta(M_1|\alpha)\zeta(M_2|\alpha)$$

вытекает

$$\zeta^*(M_1 \cdot M_2)|\alpha) = \zeta^*(M_1|\alpha)\zeta^*(M_2|\alpha),$$
$$x_{M_1 \cdot M_2}(n_1 n_2) = x_{M_1}(n_1) x_{M_2}(n_2), \quad n_\nu \in M_\nu \quad (\nu = 1, 2).$$

Пусть M — произвольный мультипликативный моноид натуральных чисел. Будем через $P(M)$ обозначать множество его простых элементов. Понятно, что если через $\mathbb{P}$ мы обозначаем множество простых чисел, то $M \bigcap \mathbb{P} \subset P(M)$. Кроме простых чисел, попавших в M, множество простых элементов $P(M)$ состоит из псевдопростых чисел. Если любые два простых элемента из $P(M)$ взаимнопросты, то моноид M имеет однозначное разложение на простые элементы. Это достаточное условие однозначности разложения на простые элементы, но оно не является необходимым.

Обозначим через $P(M|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

Будем называть каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел представление вида

$$x = r_1^{\alpha_1} \ldots r_k^{\alpha_k}, \quad 1 < r_1 < \ldots < r_k, \quad r_1, \ldots, r_k \in P(M).$$

Через $k(x)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа x, тогда эйлерово произведение $P(M|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}.$$

Таким образом, равенство эйлерова произведения и дзета-функции моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде.

Для произвольной мультипликативной функции $f(n)$ через $L(\alpha, f)$ будем обозначать обобщенную L-функцию, если ряд Дирихле

$$L(\alpha, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\alpha} \tag{5}$$

абсолютно сходится в некоторой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$. В этой полуплоскости будет справедливо разложение в эйлерово произведение

$$L(\alpha, f) = \prod_p \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\right).$$

[2]Как правило здесь и далее слово мультипликативный будем опускать, так как все моноиды в данной работе мультипликативные.

Если выполнено дополнительное условие $f(p^\nu) = f^\nu(p)$, то эйлерово произведение будет иметь более компактный вид

$$L(\alpha, f) = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Если выполнено другое дополнительное условие $f(p^\nu) = af_1^\nu(p)$ при $\nu \geqslant 1$, то эйлерово произведение будет иметь другой компактный вид

$$L(\alpha, a, f_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\nu(n)} f_1(n)}{n^\alpha} = \prod_p \left(1 + \frac{af_1(p)}{p^\alpha - f_1(p)}\right).$$

Если для мультипликативной функции $f(n)$ выполнено соотношение $f(n) = O(n^\varepsilon)$ для произвольного $\varepsilon > 0$, то ряд Дирихле (5) абсолютно сходится в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$.

Обозначим через $\chi_M(n)$ характеристическую функцию мультипликативного моноида M натуральных чисел:

$$\chi_M(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n \in M, \\ 0, & \text{при } n \in \mathbb{N} \setminus M. \end{cases}$$

Если $P(M) \subset \mathbb{P}$, то $\chi_M(n)$ — мультипликативная функция и мультипликативный моноид M имеет однозначное разложение на простые множители. В этом случае дзета-функция $\zeta(M|\alpha)$ является обобщённой L-функцией $L(\alpha, \chi_M)$.

Цель данной статьи — изучить свойства дзета-функций мультипликативных моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители и её логарифмов.

2. Примеры моноидов и обобщённая функция Мёбиуса

Простейшем примером моноида натуральных чисел является геометрическая прогрессия. Пусть $A = \{1, a\}$ и $a > 1$, тогда $M(A) = \{a^\nu | \nu \geqslant 0\}$, $P(M(A)) = \{a\}$,

$$\zeta(A|\alpha) = 1 + \frac{1}{a^\alpha}, \quad \zeta^*(A|\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{a^{\nu\alpha}} = \sum_{n \in M(A)} \frac{\mu_A(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_A(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса на моноиде $M(A)$:

$$\mu_A(n) = (-1)^\nu \text{ при } n = a^\nu.$$

Для моноида $M(A)$ имеем:

$$\zeta(M(A)|\alpha) = \sum_{n \in M(A)} \frac{1}{n^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{a^\alpha}\right)^{-1}, \quad \zeta^*(M(A)|\alpha) = 1 - \frac{1}{a^\alpha}.$$

Будем для любого простого числа $p \in \mathbb{P}$ через $M(p)$ обозначать геометрическую прогрессию со знаменателем p и первым членом 1. Теорему о разложении любого натурального числа в произведение простых чисел можно записать следующим образом

$$\mathbb{N} = \prod_{p \in \mathbb{P}} M(p),$$

а теорема об однозначности такого разложения означает, что $k(n) = 1$ — число канонических разложений для натурального числа n.

Таким образом, наиболее известными моноидами натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители являются $\mathbb{N}$ и $M(p)$ ($p \in \mathbb{P}$). Для случая $M(p)$ обратный ряд $\zeta^*(M(p)|\alpha)$ для $\zeta(M(p)|\alpha)$ выписан выше, а для случая $\mathbb{N}$ он хорошо известен:

$$\zeta(\mathbb{N}|\alpha) = \zeta(\alpha), \quad \zeta^*(\mathbb{N}|\alpha) = \zeta^{-1}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu(n)$ — обычная функция Мёбиуса.

Рассмотрим ещё два примера. Пусть $(a,b) = d$, $a = da_1$, $b = db_1$, $a_1 > 1$, $b_1 > 1$ и $A(a,b) = \{1, a, b\}$. Ясно, что

$$M(A(a,b)) = \{a^\nu b^\mu | \nu, \mu \geqslant 0\}, \quad P(M(A(a,b))) = \{a, b\}$$

и $M(A(a,b))$ — моноид с однозначным разложением на простые множители.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(A(a,b)) = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu+\mu}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}}{(a^\nu b^\mu)^\alpha}.$$

Доказательство. Действительно, перемножая ряды Дирихле, получим

$$\zeta(A(a,b))\zeta^*(A(a,b)) = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu+\mu}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}}{(a^\nu b^\mu)^\alpha} + \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu+\mu}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}}{(a^{\nu+1} b^\mu)^\alpha} + \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu+\mu}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}}{(a^\nu b^{\mu+1})^\alpha} = 1+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu + (-1)^{\nu-1}}{(a^\nu)^\alpha} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\mu + (-1)^{\mu-1}}{(b^\mu)^\alpha} + \sum_{\nu,\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+\mu}(C_{\nu+\mu}^{\nu} - C_{\nu+\mu-1}^{\nu} - C_{\nu+\mu-1}^{\nu-1})}{(a^\nu b^\mu)^\alpha} = 1,$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Пусть $a > 1$ и $\nu > 1$, тогда для $A(a, a^\nu)$ имеем:

$$M(A(a,a^\nu)) = \{a^\mu | \mu \geqslant 0\}, \quad P(M(A(a,a^\nu))) = \{a\}$$

и $M(A(a,a^\nu))$ — моноид с однозначным разложением на простые множители.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(A(a,a^\nu)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x(\mu)}{(a^\mu)^\alpha},$$

где $x(\mu) = (-1)^\mu$ при $0 \leqslant \mu \leqslant \nu - 1$ и $x(\mu) = -x(\mu-1) - x(\mu-\nu)$ при $\mu \geqslant \nu$.

Доказательство. Действительно, перемножая ряды Дирихле, получим

$$\zeta(A(a,a^\nu))\zeta^*(A(a,a^\nu)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x(\mu)}{(a^\mu)^\alpha} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x(\mu)}{(a^{\mu+1})^\alpha} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x(\mu)}{(a^{\nu+\mu})^\alpha} = 1+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{x(\mu) + x(\mu-1)}{(a^\mu)^\alpha} + \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \frac{x(\mu) + x(\mu-1) + x(\mu-\nu)}{(a^\mu)^\alpha} = 1.$$

Отсюда следует, что $x(\mu) = (-1)^\mu$ при $0 \leqslant \mu \leqslant \nu - 1$ и $x(\mu) = -x(\mu-1) - x(\mu-\nu)$ при $\mu \geqslant \nu$, что и доказывает утверждение леммы. □

Из доказанной леммы следует, что при всех значениях $\nu \geqslant 2$ минимальные моноиды $M(A(a, a^\nu))$ совпадают, а коэффициенты в числителях отличаются.

Если M — моноид с однозначным разложением на простые множители, то существует эйлерово произведение и мы легко находим обратный ряд

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$
$$\zeta^*(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right) = \sum_{n \in M} \frac{\mu_M(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_M(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса, заданная равенствами

$$\mu_M(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ (-1)^\nu, & \text{при } n = r_1 \dots r_\nu,\ r_1 < \dots r_\nu, \\ 0, & \text{при } n = r^2 n_1,\ r, n_1 \in M. \end{cases}$$

В общем случае, описываемым формулами (3) и (4), для нахождения явного вида коэффициентов $x_A(n)$ нам потребуется обобщённая функция Мёбиуса на частично упорядоченном моноиде $M(A)$.

Рассмотрим на $M(A)$ естественное частичное упорядочение индуцированное отношением делимости натуральных чисел.

Определение 1. *Говорим, что для $a, b \in M(A)$ выполнено $a \prec b$, если $a|b$, $a \in A$ и $a < b$. Соотношение $a \preceq b$ означает, что либо $a \prec b$, либо $a = b$.*

Воспользуемся известными обозначениями и фактами из комбинаторной теории (см. [12], [1]):
дельта функция Кронекера

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y; \end{cases}$$

дзета-функция

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \preceq y, \\ 0, & \text{если } x \not\preceq y; \end{cases}$$

функция Мёбиуса

$$\mu(x, y) = \zeta^{-1}(x, y).$$

Последнее равенство означает, что

$$(\zeta * \mu)(x, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} \zeta(x, z)\mu(z, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(z, y) = \delta(x, y),$$
$$(\mu * \zeta)(x, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(x, z)\zeta(z, y) = \sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(x, z) = \delta(x, y).$$

Если

$$g(x) = \sum_{y \preceq x} f\left(\frac{x}{y}\right),$$

то

$$f(x) = \sum_{y \preceq x} g\left(\frac{x}{y}\right) \mu(y, x).$$

Лемма 3. *Для коэффициентов $x_A(n)$ справедливо равенство*

$$x_A(n) = \mu(1, n)$$

для любого $n \in M(A)$.

Доказательство. Действительно, перемножим ряды $\zeta(A|\alpha)$ и $\zeta^*(A|\alpha)$, получим

$$\zeta(A|\alpha)\zeta^*(A|\alpha) = \sum_{n \in M(A)} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{m \preceq n} x\left(\frac{n}{m}\right) = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{m \preceq n} x\left(\frac{n}{m}\right) = \delta(1, n).$$

Поэтому

$$x(n) = \sum_{m \preceq n} \delta(1, m)\mu(m, n) = \mu(1, n),$$

что доказывает утверждение леммы. □

3. Логарифм эйлерова произведения

3.1. Лемма о ветвях логарифма

Будем в этом разделе через $(\ln z)$ обозначать, следуя [9], главное значение $\ln z$. Таким образом, если $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, то $(\ln z) = \ln \rho + i\varphi$, где $\ln \rho$ — обычный вещественный логарифм, изменяющийся от $-\infty$ до ∞. Отсюда следует, что

$$\varphi = -i\left(\ln \frac{z}{|z|}\right).$$

Приведём важное тождество для главного значения логарифма произведения:

$$z_j = \rho_j e^{i\varphi_j}, \quad \rho_j > 0, \quad -\pi < \varphi_j \leqslant \pi \quad (j = 1, 2), \tag{6}$$

$$(\ln z_1 z_2) = (\ln z_1) + (\ln z_2) + 2\pi n i, \tag{7}$$

$$n = n(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad -\pi < \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant \pi, \\ 1, & \text{при} \quad -2\pi < \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant -\pi, \\ -1, & \text{при} \quad \pi < \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что

$$n = n(\varphi_1, \varphi_2) = \left[-\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\pi} + \frac{1}{2}\right],$$

$$(\ln z_1 z_2) = (\ln z_1) + (\ln z_2) + 2\pi\left[-\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i =$$

$$= (\ln z_1) + (\ln z_2) + 2\pi\left[i\frac{\left(\ln \frac{z_1}{|z_1|}\right) + \left(\ln \frac{z_2}{|z_2|}\right)}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i.$$

Так как все ветви многозначной функции $\ln z$ выражаются через главную ветвь, то мы пронумеруем все ветви номерами k от $-\infty$ до ∞ следующим образом:

$$\ln_k z = (\ln z) + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Тождество (7) можно обобщить следующим образом

$$\ln_{k_1+k_2} z_1 z_2 = \ln_{k_1} z_1 + \ln_{k_2} z_2 + 2\pi \left[i \frac{\left(\ln \frac{z_1}{|z_1|}\right) + \left(\ln \frac{z_2}{|z_2|}\right)}{2\pi} + \frac{1}{2} \right] i.$$

Как известно (см. [9], стр. 81) каждая ветвь $\ln_k z$ — регулярная ветвь в области D, состоящей из всех точек комплексной плоскости, за исключением точек отрицательной части действительной оси (в том числе и точки $z = 0$). При переходе через этот разрез происходит переход с одной ветви на другую соседнюю, согласно нумерации.

Лемма 4. **(О логарифме)** *Пусть в окрестности точки α_0 логарифм аналитической функции $f(\alpha)$ задан непрерывной функцией $h(\alpha)$: $\ln f(\alpha) = h(\alpha)$. Если в точке α_0 функция $h(\alpha)$ переходит с одной ветви логарифма на другую, то значение $f(\alpha_0)$ — отрицательное.*

Доказательство. Рассмотрим малую ε-окрестность точки α_0: $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, в которой непрерывная функция $h(\alpha)$ принимает либо значение $\ln_k f(\alpha)$, либо $\ln_{k+1} f(\alpha)$. Так как значения ветви $\ln_k f(\alpha)$ имеют вид $a + bi$, $-\pi + 2\pi k < b \leqslant \pi + 2\pi k$, а значения ветви $\ln_{k+1} f(\alpha)$ имеют вид $a + bi$, $-\pi + 2\pi(k+1) < b \leqslant \pi + 2\pi(k+1)$, то равенство двух ветвей может достигаться только в тех точках, где $b = \pi + 2\pi k = -\pi + 2\pi(k+1)$. Но если $h(\alpha) = a + (\pi + 2\pi k)i$, то значение $f(\alpha)$ — отрицательное. Если мы через γ обозначим границу между областью $D_\nu = \{\alpha | h(\alpha) = \ln_\nu f(\alpha), |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon\}$ $(\nu = k, k+1)$, то для всех точек $\alpha \in \gamma$ значение $f(\alpha)$ будет отрицательное. Так как по условию $\alpha_0 \in \gamma$, то лемма полностью доказана. □

Важно отметить, что если дано какое-то значение $\ln z = a + bi$, то легко определить номер ветви логарифма и выразить главное значение, а именно

$$\ln z = \ln_k z, \quad k = -\left[-\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2} \right],$$
$$(\ln z) = \ln z + 2\pi \left[-\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2} \right] i = a + 2\pi \left(\frac{1}{2} - \left\{ -\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2} \right\} \right) i.$$

Замечание 1. *Пользуясь этой формулой, можно легко указать как меняются ветви логарифма и как выражаются главные значения, если $\ln f(\alpha) = h(\alpha)$:*

$$\ln f(\alpha) = \ln_{k(\alpha)} f(\alpha), \quad k(\alpha) = -\left[-\frac{\Im h(\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2} \right],$$
$$(\ln f(\alpha)) = h(\alpha) + 2\pi \left[-\frac{\Im h(\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2} \right] i.$$

3.2. Значения логарифмируемой функции

Лемма 5. *Пусть при $1 < \alpha < 2$ комплекснозначная функция*

$$F(\alpha) = e^{-\frac{i}{2}\ln(\alpha-1) + f(\alpha)}$$

и непрерывная функция $f(\alpha)$ ограничена константой $c > 0$, $|f(\alpha)| \leqslant c < 2$, тогда на интервале $(1, 2)$ существует бесконечная последовательность $2 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > 1$ нулей действительной части $F(\alpha)$:

$$\Re(F(\alpha_j)) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

бесконечная последовательность $2 > \beta_1 > \beta_2 > \ldots > 1$ нулей мнимой части $F(\alpha)$:

$$\Im(F(\beta_j)) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

бесконечная последовательность $2 > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > 1$ *отрицательных значений* $F(\alpha)$*:*

$$F(\lambda_j) < 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

бесконечная последовательность $2 > \delta_1 > \delta_2 > \ldots > 1$ *положительных значений* $F(\alpha)$*:*

$$F(\delta_j) > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Обозначим через $g(\alpha)$ действительную часть $f(\alpha)$, а через $h(\alpha)$ — мнимую часть. Таким образом, $f(\alpha) = g(\alpha) + ih(\alpha)$, $|g(\alpha)| \leqslant c$, $|h(\alpha)| \leqslant c$.

Имеем:

$$F(\alpha) = e^{g(\alpha)} \left(\cos\left(-\frac{1}{2}\ln(\alpha - 1) + h(\alpha) \right) + i \sin\left(-\frac{1}{2}\ln(\alpha - 1) + h(\alpha) \right) \right).$$

Так как для непрерывной функции $-\frac{1}{2}\ln(\alpha - 1) + h(\alpha)$ на интервале $(1, 2)$ выполнены условия

$$-\frac{1}{2}\ln(\alpha - 1) + h(\alpha) > -c, \qquad \lim_{\alpha \to 1^+} \left(-\frac{1}{2}\ln(\alpha - 1) + h(\alpha) \right) = \infty,$$

то для любого φ с $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ на каждом отрезке вида

$$\left[1 + e^{-2\varphi - 4\pi k - 2c}, 1 + e^{-2\varphi - 4\pi k + 2c} \right]$$

имеется хотя бы один корень уравнения

$$-\frac{1}{2}\ln(\alpha - 1) + h(\alpha) = \varphi + 2k\pi.$$

Действительно, если положить $\alpha = 1 + e^{-2\varphi - 4\pi k - 2\beta}$, то при β, пробегающем отрезок $[-c, c]$, α будет пробегать отрезок $\left[1 + e^{-2\varphi - 4\pi k - 2c}, 1 + e^{-2\varphi - 4\pi k + 2c} \right]$. При этом уравнение

$$-\frac{1}{2}\ln(\alpha - 1) + h(\alpha) = \varphi + 2k\pi$$

перейдёт в уравнение

$$\beta + h\left(1 + e^{-2\varphi - 4\pi k - 2\beta} \right) = 0,$$

которое имеет хотя бы одно решение, так как график функции

$$y(\beta) = -h\left(1 + e^{-2\varphi - 4\pi k - 2\beta} \right)$$

лежит в квадрате $(\beta, y) \in [-c, c]^2$ и диагональ квадрата имеет с графиком хотя бы одну точку пересечения, которая соответствует корню уравнения.

Так как все отрезки $\left[1 + e^{-2\varphi - 4\pi k - 2c}, 1 + e^{-2\varphi - 4\pi k + 2c} \right]$ при $\frac{c - \varphi}{2\pi} \leqslant k$ вложены в отрезок $[1, 2]$ и их объединение при $k \geqslant 0$ вложено в отрезок $\left[1, 1 + e^{-2\varphi + 2c} \right]$, то на отрезке $[1, 2]$ имеется бесконечное множество значений α, для которых $\arg F(\alpha) = \varphi$.

При $\varphi = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ получаем первое утверждение леммы о бесконечном числе нулей действительной части $F(\alpha)$.

При $\varphi = 0, \pi$ получаем второе утверждение леммы о бесконечном числе нулей мнимой части $F(\alpha)$.

При $\varphi = \pi$ получаем третье утверждение леммы о бесконечном числе отрицательных значений $F(\alpha)$.

Наконец, при $\varphi = 0$ получаем последнее утверждение леммы о бесконечном числе положительных значений $F(\alpha)$. □

Другой вариант леммы 5 звучит так.

Лемма 6. *Пусть N — натуральное и при $1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}}<\alpha<2$ комплекснозначная функция*

$$F(\alpha)=e^{-\ln(\alpha-1)+f(\alpha)}$$

и непрерывная функция $f(\alpha)$ ограничена константой $c>0$, $|f(\alpha)|\leqslant c<2$, тогда на интервале $(1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}},2)$ существует последовательность $2>\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_N>1$ нулей действительной части $F(\alpha)$:

$$\Re(F(\alpha_j))=0 \qquad (j=1,2,\ldots,N);$$

последовательность $2>\beta_1>\beta_2>\ldots>\beta_N>1$ нулей мнимой части $F(\alpha)$:

$$\Im(F(\beta_j))=0 \qquad (j=1,2,\ldots,N);$$

последовательность $2>\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_N>1$ отрицательных значений $F(\alpha)$:

$$F(\lambda_j)<0 \qquad (j=1,2,\ldots,N);$$

последовательность $2>\delta_1>\delta_2>\ldots>\delta_N>1$ положительных значений $F(\alpha)$:

$$F(\delta_j)>0 \qquad (j=1,2,\ldots,N).$$

Доказательство. Обозначим через $g(\alpha)$ действительную часть $f(\alpha)$, а через $h(\alpha)$ — мнимую часть. Таким образом, $f(\alpha)=g(\alpha)+ih(\alpha)$, $|g(\alpha)|\leqslant c$, $|h(\alpha)|\leqslant c$.

Имеем:

$$F(\alpha)=e^{g(\alpha)}\left(\cos\left(-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)\right)+i\sin\left(-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)\right)\right).$$

Так как для непрерывной функции $-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)$ на интервале

$$(1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}},2)$$

выполнены условия

$$-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)>-c, \qquad \lim_{\alpha\to1^+}\left(-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)\right)=\infty,$$

то для любого φ с $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ на каждом отрезке вида

$$\left[1+e^{-\varphi-2\pi k-c},1+e^{-\varphi-2\pi k+c}\right]$$

имеется хотя бы один корень уравнения

$$-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)=\varphi+2k\pi.$$

Действительно, если положить $\alpha=1+e^{-\varphi-2\pi k-\beta}$, то при β, пробегающем отрезок $[-c,c]$, α будет пробегать отрезок $\left[1+e^{-\varphi-2\pi k-c},1+e^{-\varphi-2\pi k+c}\right]$. При этом уравнение

$$-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)=\varphi+2k\pi$$

перейдёт в уравнение

$$\beta+h\left(1+e^{-\varphi-2\pi k-\beta}\right)=0,$$

которое имеет хотя бы одно решение, так как график функции

$$y(\beta)=-h\left(1+e^{-\varphi-2\pi k-2\beta}\right)$$

лежит в квадрате $(\beta, y) \in [-c, c]^2$ и диагональ квадрата имеет с графиком хотя бы одну точку пересечения, которая соответствует корню уравнения.

Так как все отрезки $\left[1 + e^{-\varphi - 2\pi k - c}, 1 + e^{-\varphi - 2\pi k + c}\right]$ при $1 \leqslant k \leqslant N$ вложены в отрезок $[1 + e^{-2(N+1)\pi + \frac{5}{2}}, 2]$, то на отрезке $[1 + e^{-2(N+1)\pi + \frac{5}{2}}, 2]$ имеется бесконечное множество значений α, для которых $\arg F(\alpha) = \varphi$.

При $\varphi = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ получаем первое утверждение леммы об N нулях действительной части $F(\alpha)$.

При $\varphi = 0, \pi$ получаем второе утверждение леммы об N нулях мнимой части $F(\alpha)$.

При $\varphi = \pi$ получаем третье утверждение леммы об N отрицательных значениях $F(\alpha)$.

Наконец, при $\varphi = 0$ получаем последнее утверждение леммы об N положительных значениях $F(\alpha)$. $\square$

3.3. Логарифм обобщённой L-функции с эйлеровым произведением

Пусть мультипликативная функция $f(n)$ удовлетворяет соотношениям

$$f(n) = \prod_{p|n} f(p)^{\alpha_p} \quad (n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}), \quad \forall \varepsilon > 0 \quad f(n) = O\left(n^{\varepsilon}\right),$$

тогда обобщенная L-функция, заданная рядом Дирихле

$$L(\alpha, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{\alpha}},$$

который абсолютно сходится в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$, в этой полуплоскости имеет разложение в эйлерово произведение

$$L(\alpha, f) = \prod_{p} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(p^{\nu})}{p^{\nu\alpha}} \right) = \prod_{p} \left(1 - \frac{f(p)}{p^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Обобщённая L-функция $L(\alpha, f)$ для $\alpha = \sigma + it$ при фиксированном значении t и при $\sigma \to \infty$ имеет предел

$$\lim_{\sigma \to \infty} L(\alpha, f) = 1.$$

Поэтому для главного значения логарифма обобщённой L-функции $L(\alpha, f)$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\sigma \to \infty} (\ln L(\alpha, f)) = 0,$$

кроме того, всегда выполнено соотношение

$$(\ln L(\alpha, f)) = \ln |L(\alpha, f)| + i\varphi(\alpha, f), \quad -\pi < \varphi(\alpha, f) \leqslant \pi.$$

Для дальнейшего потребуется частный случай леммы о степенном ряде для главного значения логарифма.

Лемма 7. *Главное значение* $(\ln(1-z))$ *логарифма при* $|z| < 1$ *представляется сходящимся степенным рядом*

$$(\ln(1 - z)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Доказательство. См. [9], стр. 79–81. $\square$

3.4. Логарифм дзета-функции Римана

Нам потребуется некоторые простейшие свойства дзета-функции Римана, которые в силу важности для дальнейшего кратко изложим.

Как известно, $\zeta(\alpha)$ аналитически продолжается на всю α-плоскость кроме точки $\alpha = 1$, в которой полюс первого порядка.

Определим сумматорную функции $A(x)$: $A(x) = \sum_{n=1}^{x} 1$.

Лемма 8. *При $x \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$A(x) = x - \{x\}\,.$$

Доказательство. Действительно,

$$A(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} 1 = [x] = x - \{x\}\,.$$

□

Лемма 9. *При $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 0$ справедливо интегральное представление*

$$\zeta(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) - \alpha \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Доказательство. Действительно, по теореме Абеля (см. [14], стр. 106) имеем:

$$\zeta(\alpha) = \alpha \int\limits_1^\infty \frac{A(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int\limits_1^\infty \frac{x - \{x\}}{x^{\alpha+1}} dx = \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) - \alpha \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}} dx$$

и все интегралы абсолютно сходятся, так как $\sigma > 0$. □

Из доказанной леммы следует, что дзета-функция $\zeta(\alpha)$ аналитически продолжается с помощью указанного интегрального представления на полуплоскость $\sigma > 0$ кроме точки $\alpha = 1$, в которой полюс первого порядка с вычетом 1.

Лемма 10. *При $\alpha > 0$ и для*

$$\theta(\alpha) = \alpha \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}} dx$$

справедливы соотношения

$$\zeta(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) - \theta(\alpha), \quad 0 < \theta(\alpha) < 1, \quad \alpha \neq 1. \tag{9}$$

При $\sigma > 0$ справедливы соотношения

$$\zeta(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) + \theta(\alpha), \quad |\theta(\alpha)| < \frac{|\alpha|}{\sigma}, \quad \alpha \neq 1. \tag{10}$$

Доказательство. Для числителя $\{x\}$ подынтегрального выражения справедливы неравенства $0 \leqslant \{x\} < 1$. Поэтому для $\theta(\alpha)$ при $\alpha > 0$ имеем соотношения

$$\theta(\alpha) = \alpha \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}} dx, \quad 0 < \theta(\alpha) < \alpha \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx = 1$$

и первое утверждение леммы доказано.

При $\sigma > 0$ имеем:

$$|\theta(\alpha)| = |\alpha| \left| \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}} dx \right| < |\alpha| \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx = \frac{|\alpha|}{\sigma}$$

и лемма полностью доказана. □

Лемма 11. *При $\alpha > 1$ справедливы неравенства*

$$-\ln(\alpha-1) < \ln\zeta(\alpha) < \begin{cases} -\ln(\alpha-1)+\ln(\alpha), & \text{при } 1<\alpha<2, \\ \ln 2, & \text{при } \alpha \geqslant 2. \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство. Действительно, из предыдущей леммы следует, что при $\alpha > 1$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{\alpha-1} < \zeta(\alpha) < \frac{1}{\alpha-1} + 1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

После логарифмирования получим соотношение (11). □

Положим при $\sigma \geqslant 1$

$$\theta_1(\alpha) = \sum_p \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

Лемма 12. *При $\sigma \geqslant 1$ функция $\theta_1(\alpha)$ — непрерывная функция, заданная абсолютно, равномерно сходящемся рядом.*

При $\sigma \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$|\theta_1(\alpha)| < \frac{1}{2^\sigma - 1} - \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma - 1} < 1.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $|\theta_1(\alpha)| \leqslant \theta_1(\sigma)$, $(\sigma \geqslant 1)$. Далее имеем:

$$\theta_1(\sigma) = \sum_p \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{np^{n\sigma}} < \sum_p \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{p^{n\sigma}} = \sum_p \frac{1}{p^\sigma(p^\sigma - 1)} =$$
$$= \sum_p \left(\frac{1}{p^\sigma - 1} - \frac{1}{p^\sigma} \right) < \frac{1}{2^\sigma - 1} - \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma - 1},$$
$$\lim_{\sigma\to\infty} \theta_1(\alpha) = 0, \quad 0 < \theta_1(\sigma) < 1 \quad (\sigma \geqslant 1).$$

□

Лемма 13. *При $\alpha > 1$ справедливы соотношения*

$$\ln\zeta(\alpha) = \sum_p \frac{1}{p^\alpha} + \theta_1(\alpha), \quad 0 < \theta_1(\alpha) < 1, \tag{12}$$

$$-\ln(\alpha-1) - 1 < \sum_p \frac{1}{p^\alpha} < \begin{cases} -\ln(\alpha-1)+\ln(\alpha), & \text{при } 1<\alpha<2, \\ \ln 2, & \text{при } \alpha \geqslant 2. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, при $\alpha > 1$ выполняются неравенства

$$0 < \frac{1}{p^\alpha} < \frac{1}{2}.$$

Поэтому абсолютно и равномерно сходятся при $\alpha \geqslant 1$ следующие ряды для логарифмов:

$$\ln\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\cdot p^{\alpha\nu}}$$

и

$$\ln P(\alpha) = \ln\left(\prod_p\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}\right) = \sum_p\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\cdot p^{\alpha\nu}}.$$

Отсюда следует, что при $\alpha > 1$ справедливы оценки

$$0 < \ln P(\alpha) - \sum_p\frac{1}{p^\alpha} = \sum_p\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu\cdot p^{\alpha\nu}} < \sum_p\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{p^\nu} = \sum_p\frac{1}{p(p-1)} < 1.$$

Таким образом,

$$\ln\zeta(\alpha) - 1 < \sum_p\frac{1}{p^\alpha} < \ln\zeta(\alpha).$$

□

Хорошо известна формула для главного значения логарифма дзета-функции (см. [13], стр. 8):

$$(\ln\zeta(\alpha)) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda_1(n)}{n^\alpha} \quad (\sigma > 1), \quad \Lambda_1(n) = \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \tag{14}$$

и $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{при } n = p^m, \\ 0, & \text{при } \nu(n) > 1 \text{ или } \nu(n) = 0. \end{cases}$$

Формулу для главного значения логарифма дзета-функции можно переписать в следующем виде:

$$(\ln\zeta(\alpha)) = \sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{m\alpha}} = L(\alpha) + \theta_1(\alpha) \quad (\sigma > 1),$$
$$L(\alpha) = \sum_p\frac{1}{p^\alpha}, \quad \theta_1(\alpha) = \sum_p\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

В силу леммы 13 при $\alpha > 1$ справедливы неравенства

$$-\ln(\alpha-1) - 1 < L(\alpha) < \begin{cases} -\ln(\alpha-1) + \ln(\alpha), & \text{при } 1 < \alpha < 2, \\ \ln 2, & \text{при } \alpha \geqslant 2. \end{cases}$$

Формула (14) требует уточнения, которое дается с помощью следующих лемм.

Лемма 14. *Для произвольного $T > 1$, $\sigma_0 > 1$ и $\varepsilon > 0$ найдётся $\tau > T$ такое что во всей полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ выполняются неравенства*

$$|L(\alpha + i\tau) - iL(\alpha)| < \varepsilon, \quad |L(\alpha - i\tau) + iL(\alpha)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $P = P(\varepsilon, \sigma_0)$ такое, что

$$\sum_{p>P} \frac{1}{|p^\alpha|} < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\sigma \geqslant \sigma_0 > 1),$$

тогда

$$\left| \sum_{p>P}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha} - \sum_{p>P}^{\infty} \frac{1}{p^{\alpha+i\tau}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу равномерной, абсолютной сходимости ряда, задающего $L(\alpha)$, в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ это возможно.

Так как величины $\ln 2, \ldots, \ln P$ линейно независимые действительные числа, то по теореме Кронекера (см. [13], стр. 180) найдётся такое $\tau > T$, что найдутся целые k_p такие, что выполнены условия

$$\left| \tau \frac{\ln p}{2\pi} - k_p + \frac{1}{4} \right| < \delta, \text{ при } p \leqslant P$$

которые можно переписать следующим образом

$$\tau \ln p - k_p 2\pi + \frac{\pi}{2} = \delta_p, \quad |\delta_p| < 2\pi\delta, \text{ при } p \leqslant P.$$

Отсюда следует, что для любого $p \leqslant P$ имеем

$$p^{-i\tau} = e^{-i\tau \ln p}, \quad i = e^{\frac{i\pi}{2}},$$
$$p^{-i\tau} = e^{\frac{i\pi}{2} - i\delta_p} = ie^{-i\delta_p},$$
$$\left| p^{i\tau} + i \right| = \left| p^{-i\tau} - i \right| = \left| e^{-i\delta_p} - 1 \right| = |\cos(\delta_p) - 1 - i\sin(\delta_p)| =$$
$$= \sqrt{2 - 2\cos(\delta_p)} = 2\left| \sin\frac{\delta_p}{2} \right| \leqslant |\delta_p| < 2\pi\delta.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{p \leqslant P} \frac{i}{p^\alpha} - \sum_{p \leqslant P} \frac{1}{p^{\alpha+i\tau}} \right| < 2\pi\delta\zeta(\sigma_0), \quad \left| \sum_{p \leqslant P} \frac{-i}{p^\alpha} - \sum_{p \leqslant P} \frac{1}{p^{\alpha-i\tau}} \right| < 2\pi\delta\zeta(\sigma_0).$$

Полагая $\delta = \frac{\varepsilon}{4\pi\zeta(\sigma_0)}$, получим

$$|L(\alpha + i\tau) - iL(\alpha)| < \varepsilon, \quad |L(\alpha - i\tau) + iL(\alpha)| < \varepsilon$$

и лемма полностью доказана. □

Лемма 15. *Для любого натурального N существует τ_N, такое что на отрезке*

$$\left[1 + e^{-2(N+1)\pi + \frac{5}{2}} + i\tau_N; 2 + i\tau_N \right]$$

найдутся точки $\alpha_k = \sigma_k + i\tau_N$, выражение для логарифма дзета-функции

$$\ln \zeta(\alpha) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\alpha}},$$

в которых принимает значения для k-ой ветви $\ln_k \zeta(\alpha)$, а на отрезке

$$\left[1 + e^{-2(N+1)\pi + \frac{5}{2}} - i\tau_N; 2 - i\tau_N \right]$$

найдутся точки $\alpha_{-k} = \sigma_{-k} - i\tau_N$ выражение для логарифма дзета-функции, в которых принимает значения для $-k$-ой ветви $\ln_{-k} \zeta(\alpha)$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$.

Доказательство. Во-первых, для любого вещественного t имеем

$$|\ln\zeta(2+it)| = |L(2+it)+\theta_1(2+it)| \leqslant \ln\zeta(2) = \ln\frac{\pi^2}{6} = 0.498.. < \frac{\pi}{6},$$

поэтому для любого вещественного t значение

$$\ln\zeta(2+it) = \sum_p \sum_{m=1}^{2} \frac{1}{mp^{m(2+it)}}$$

— главное значение логарифма.

Возьмём в лемме 14 $\sigma_0 = 1 + e^{-2(N+2)\pi+\frac{5}{2}}$ и $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда найдётся τ_N такое, что

$$|L(\sigma)i - L(\sigma+i\tau_n)| < \frac{1}{2}, \quad |-L(\sigma)i - L(\sigma-i\tau_n)| < \frac{1}{2}$$

для любого $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Действительная функция $L(\sigma)$ монотонно убывает. При $\sigma = \sigma_0$ имеем

$$L(\sigma_0) > -\ln(\sigma_0-1) - 1 = 2(N+2)\pi - \frac{5}{2} - 1.$$

Поэтому $L(\sigma_0+i\tau_n)+\theta_1(\sigma_0+i\tau_n) = a+bi$ и

$$b = L(\sigma_0)+\delta, \quad |\delta| < \frac{3}{2}, \quad b > 2(N+1)\pi - \frac{5}{2} - 1 - \frac{3}{2} = 2(N+1)\pi - 5.$$

Но это означает, что величина $L(\sigma_0+i\tau_n)+\theta_1(\sigma_0+i\tau_n) = a+bi$ принадлежит k-ой ветви логарифма, где

$$k = -\left[-\frac{b}{2\pi}+\frac{1}{2}\right] \geqslant -\left[-\frac{2(N+1)\pi-5}{2\pi}+\frac{1}{2}\right] = N.$$

Отсюда следует, что непрерывная функция

$$\ln\zeta(\sigma+i\tau_N) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m(\sigma+i\tau_N)}}$$

при изменении σ от σ_0 до 2 последовательно движется по ветвям $\ln_k$ от $k=N$ до $k=0$.

Аналогично доказывается второе утверждение леммы в силу сопряженности значения логарифма. □

Теорема 1. *Для любого натурального N существует τ_N, такое что на отрезке*

$$\left[1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}}+i\tau_N; 2+i\tau_N\right]$$

найдутся точки $\alpha_k = \sigma_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — отрицательное число ($k = = 1,\ldots,N$);

— $\alpha_k = \lambda_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — положительное число ($k = 1,\ldots,N$);

— $\alpha_k = \delta_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — чисто мнимое число ($k = 1,\ldots,N$).

Доказательство. Действительно, в силу предыдущей леммы на отрезке

$$\left[1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}}+i\tau_N; 2+i\tau_N\right]$$

функция $\ln\zeta(\sigma+i\tau_N)$ принимает последовательно значения из различных ветвей логарифмической функции. При переходе от одной ветви к другой логарифмируемая функция проходит через отрицательное значение. Так как таких переходов не менее N, то первое утверждение теоремы доказано.

Два вторых утверждения следуют из лемм 6. □

3.5. Ветви логарифма одной обобщённой L-функции с Эйлеровым произведением

Рассмотрим мультипликативную функцию $h(n) = i^{\sum_{p|n}\alpha_p}$ при $n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}$ и ряд Дирихле $M(\alpha, h)$, заданный равенством

$$M(\alpha, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^{\alpha}} = \prod_{p} \left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Следующая лемма показывает, что почленное логарифмирование Эйлерова произведения для $M(\alpha, h)$ не дает главного значения логарифма $M(\alpha, h)$.

Лемма 16. *Существует $\delta > 0$ такое, что при $1 < \sigma < 1 + \delta$ справедливо неравенство*

$$(\ln M(\alpha, h)) \neq \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{np^{n\alpha}}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $\sigma > 1$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{i}{p^{\alpha}}\right| < \frac{1}{2},$$

поэтому абсолютно и равномерно сходятся при $\sigma \geqslant 1$ следующие ряды для логарифмов:

$$\ln\left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}}, \quad \ln\left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right)^{-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}},$$

которые в силу леммы 7 задают главные значения логарифмов. Таким образом

$$\left(\ln\left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right)\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}}, \quad \left(\ln\left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right)^{-1}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}}.$$

Рассмотрим значение $\ln M(\alpha, h)$, заданное рядом

$$\ln M(\alpha, h) = \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{np^{n\alpha}} = iL(\alpha) + R_h(\alpha), \qquad R_h(\alpha) = \sum_{p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{np^{n\alpha}}.$$

который получен почленным логарифмированием Эйлерова произведения.

Нетрудно видеть, что $|R_h(\alpha)| \leqslant R(\sigma) < 1$, $(\sigma > 1)$. □

4. Экспоненциальная последовательность простых чисел

Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечную последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ будем называть экспоненциальной, если выполняются соотношения $q \leqslant p_1 < q^2$, $q^{\nu} < p_{\nu} < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым, (см. [14]) для любого $q \geqslant 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел.

Теорема 2. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

Доказательство. Так как $M(PE)$ — моноид с однозначным разложением на простые множители, то в области абсолютной сходимости дзет-функция $\zeta(M(PE))$ имеет эйлерово произведение

$$P(M(PE)|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right)^{-1}.$$

Для логарифма эйлерова произведения с помощью почленного логарифмирования получаем равномерно, абсолютно сходящийся ряд

$$\ln\zeta(M(PE))|\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu p_\nu^{\alpha\mu}},$$

так как для него при $\sigma \geqslant \sigma_0$, $\sigma_0 > 0$ имеется мажорирующий ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu q^{\sigma_0\mu\nu}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{n(\lambda)}{q^{\lambda\sigma_0}},$$

где

$$n(\lambda) = \sum_{\mu|\lambda}\frac{1}{\mu} < 1 + \ln\lambda$$

и мажорирующий ряд равномерно сходится. Это доказывает утверждение теоремы. □

Из существования эйлерова произведения вытекает, что для любой экспоненциальной последовательности простых чисел в правой полуплоскости $\sigma > 0$ дзета-функция $\zeta(M(PE))|\alpha)$ не имеет нулей.

5. Заключение

Данная тема исследований возникла в связи с изучением гиперболической дзета-функции решёток (см. [5, 6, 7], [17]). Другими источниками этих исследований были работы [2, 3, 4], [8, 10, 13, 15, 16].

В следующих работах мы планируем рассмотреть естественно возникающие в данной области проблемы, а именно:

- аналитическое продолжение для дзета-функции произвольного моноида натуральных чисел;
- получение функционального уравнения;
- обратные ряды для дзета-функции моноида натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители.

Важным классом моноидов натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители на наш взгляд являются моноиды соответствующие подгруппам мультипликативной группы классов вычетов по произвольному модулю.

В заключении автор выражает свою глубокую признательность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Айгнер Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982. 558 с.

2. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.

3. С. М. Воронин Избранные труды: Математика / Под ред. А. А. Карацубы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. — 480 с.

4. С. М. Воронин, А. А. Карацуба Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

5. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13. Вып. 4(44). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 4–107.

6. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Доклады академии наук 2007. Т. 412, № 3. С. 302–304.

7. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

8. Г. Дэвенпорт Мультипликативная теория чисел. — М.: Наука, 1971. — 200 с.

9. А. Гурвиц, Р. Курант Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

10. Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем. — М.: Мир, 1967. 511 с.

11. И. И. Привалов Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1977. — 444 с.

12. Р. Стенли Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990. — 440 с.

13. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.

14. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.

15. Чандрасекхаран К. Арифметические функции, пер. с англ. — М.: Наука, 1975. 272 с.

16. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.

17. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Ajgner M., 1982, *Kombinatornaja teorija*, Izd-vo Mir, Moskva, 558 p.

2. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, "Around the Davenport–Heilbronn function", *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.

3. Voronin S. M., 2006, *Izbrannye trudy: Matematika. Pod red. A. A. Karacuby*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moskva, 480 p.

4. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

5. Dobrovol'skaja L. P., Dobrovol'skij M. N., Dobrovol'skij N. M., Dobrovol'skij N. N., 2012, "Giperbolicheskie dzeta-funkcii setok i reshjotok i vychislenie optimal'nyh kojefficientov" *Chebyshevskii Sbornik* vol 13, №4(44) pp. 4–107.

6. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoj dzeta-funkcii celochislennyh reshetok" , *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.

7. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 17, № 3 pp. 72–105.

8. Davenport H., 1971, *Mul'tiplikativnaja teorija chisel*, Izd-vo Nauka, Moskva, 200 p.

9. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.

10. Prahar K., 1967, *Raspredelenie prostyh chisel, per. s nem*, Izd-vo Mir, Moskva, 511 p.

11. Privalov I. I., 1977, *Vvedenie v teoriju funkcij kompleksnogo peremennogo*, Izd-vo Nauka, Moskva, 444 p.

12. Stenli R., 1990, *Perechislitel'naja kombinatorika*, Izd-vo Mir, Moskva, 440 p.

13. Titchmarsh E. K., 1952, *Teorija dzeta-funkcii Rimana* Izd-vo I-L, Moskva, 407 p.

14. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

15. Chandrasekharan K., 1975, *Arifmeticheskie funkcii, per. s angl*, Izd-vo Nauka, Moskva, 272 p.

16. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series" , *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

17. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Тульский государственный университет

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-208-220

ОБОБЩЕННЫЕ ЯКОБИАНЫ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ В ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ [1]

В. С. Жгун (г. Москва)

Аннотация

В работе определяются обобщенные многочлены Мамфорда, описывающие сложение точек на обобщенном якобиане особой гиперэллиптической кривой над полем $\mathbb{K}$ характеристики отличной от 2, гладкой в бесконечно удаленной точке и заданной в аффинной карте уравнением $y^2 = \phi(x)^2 f(x)$, где многочлен f — свободен от квадратов. Нами найдена связь между разложением в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей специального вида для гиперэллиптического поля $\mathbb{K}(x, \sqrt{f(x)})$ и обобщенными многочленами Мамфорда, определяющими сложение в группе классов дивизоров на особой гиперэллиптической кривой. Это соответствие между разложением в непрерывную дробь и многочленами Мамфорда позволяет доказать теорему об эквивалентности следующих условий: (i) условия квазипериодичности разложения квадратичной иррациональности специального вида в непрерывную дробь, построенного по нормированию, связанному с точкой степени 1 на нормализации кривой и (ii) условия конечности порядка класса, построенного по точке степени 1 на нормализации кривой. С помощью этого соответствия также удается обобщить результаты о симметрии квазипериода и оценки на его длину, обобщающие результаты, полученные нами ранее.

Ключевые слова: Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях, обобщенное представление Мамфорда, обобщенные якобианы, точки кручения в якобианах.

Библиография: 15 названий.

ON GENERALIZED JACOBIANS AND RATIONAL CONTINUED FRACTIONS IN THE HYPERELLIPTIC FIELDS

V. S. Zhgoon (Moscow)

Abstract

In the paper we introduce generalized Mumford polynomials describing additive law on generalized Jacobian of singular hyperelliptic curve over the field $\mathbb{K}$ of characteristics different from 2, and smooth at infinity and defined in the affine chart by the equation $y^2 = \phi(x)^2 f(x)$, where f is a square-free polynomial. We describe the relation between the continued fraction expansion of the quadratic irrationalities in the hyperelliptic function field $\mathbb{K}(x, \sqrt{f(x)})$ and the generalized Mumford polynomials describing the additive law in the divisor class group of the singular hyperelliptic curve. This correspondence between the continued fraction expansion of the quadratic irrationalities and the generalized Mumford polynomials allow us to prove the theorem on equivalence of two conditions: the condition (i) of quasi-periodicity of continued fraction expansion (related with valuation of a point of degree 1 on the normalization of the curve) of a quadratic irrationality of the special type and the condition (ii) of the finiteness of the order of the class, related to the point of degree 1 on the normalization of the curve. By means of this correspondence we also obtain the results on the symmetry of quasi-period

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N16-11-10111).

and we give estimates for its length, generalizing results obtained before by the author and collaborators.

Keywords: Continued rational fractions in hyperelliptic fields, Mumford representation, generalized Jacobians, torsion points of the Jacobians.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Пусть $h(x) \in \mathbb{K}[x]$ — многочлен степени $2g+1$ над полем $\mathbb{K}$ характеристики отличной от 2. Представим его в виде $h(x) = \phi(x)^2 f(x)$, где многочлен f — свободен от квадратов. Пусть $\phi(x) = \prod(x - x(Q))^{g_Q}$ — разложение на простые множители над $\overline{\mathbb{K}}$ — алгебраическим замыканием поля $\mathbb{K}$. Рассмотрим аффинную кривую заданную уравнением $y^2 = h(x)$. Ей соответствует, вообще говоря, особая проективная гиперэллиптическая кривая $\mathcal{C}$ с полем рациональных функций $\mathbb{K}(x, \sqrt{f(x)})$ и гладкой точкой ∞. Рассмотрим также гладкую проективную кривую $\widetilde{\mathcal{C}}$, компактифицирующую аффинную кривую $\widetilde{y}^2 = f(x)$. Рассмотрим морфизм нормализации $\pi : \widetilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$. Его ограничение на открытое аффинное подмножество кривой $\widetilde{\mathcal{C}}$ определено формулой $(x, \widetilde{y}) \to (x, \phi(x)\widetilde{y})$. Также имеем отображение $J_{\mathcal{C}} \to J_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ из обобщенного якобинана кривой $\mathcal{C}$ в якобиан кривой $\widetilde{\mathcal{C}}$. В наших рассуждениях нам придется переходить к различным особым моделям $\mathcal{C}$, соответствующим различным полиномам $\phi(x)$. Чтобы подчеркнуть зависимость от $\phi(x)$, эти модели мы будем обозначать через $\mathcal{C}_\phi$, а их род через g_ϕ. Положим $h(x) = \phi(x)^2 d(x) f_0(x)$, где $d(x) = \prod(x - x(Q))^{d_Q}$ — наибольший общий делитель $f(x)$ и $\phi(x)$. Для кривой $\mathcal{C}$ обозначим через $\mathcal{C}^s$ — множество ее особых точек, определенных нулями $\phi(x)d(x)$, а через $\mathcal{C}^{ram}$ — множество точек ветвления, заданных нулями $f_0(x)$. Для $S \in \widetilde{\mathcal{C}}$, для которой $\pi(S) \in \mathcal{C}^s$, положим $m_S = \phi_Q + d_Q$ — если $\pi(S) \notin \mathcal{C}^{ram}$, и $m_S = 2\phi_Q + d_Q$ иначе. Через $\mathfrak{m} = \sum_{S \in \pi^{-1}(\mathcal{C}^s)} m_S S$ обозначим дивизор на $\widetilde{\mathcal{C}}$, соответствующий прообразам особых точек кривой $\mathcal{C}$.

Пусть D_0 — эффективный дивизор степени g, и пусть P — точка степени 1 на кривой $\mathcal{C}$, определенная над $\mathbb{K}$, не являющаяся ни точкой ветвления, ни особой точкой. Наша цель связать последовательность приближений с помощью непрерывных дробей квадратичной иррациональности, соответствующей дивизору D_0, и последовательность многочленов Мамфорда для дивизоров вида $D_0 + 2k(P - \infty)$. В настоящей работе, продолжающей нашу работу [6], используются особые кривые и их обобщенные якобианы, что существенно расширяет класс рассматриваемых квадратичных иррациональностей.

Обобщая результаты работы [6], мы получаем доказательство теоремы об эквивалентности условия квазипериодичности непрерывной дроби квадратичной иррациональности и условия конечности порядка точки $P - \infty$ на якобиане нормализации кривой $\mathcal{C}$.

2. Представление Мамфорда дивизора набором многочленов

Простой точке $Q \in \widetilde{\mathcal{C}}$ степени 1 соответствует нормирование ν_Q поля $\mathbb{K}(x, \sqrt{f(x)})$. Определим локальное кольцо $\mathcal{O}_Q := \{F \in \mathbb{K}(x, \sqrt{f(x)}) |\ \nu_Q(F) \geqslant 0\}$ точки Q. Обозначим через π_Q униформизующую в точке $Q \in \widetilde{\mathcal{C}}$, то есть такой элемент $\pi_Q \in \mathcal{O}_Q$, что $\nu_Q(\pi_Q) = 1$. Ограничения координатных функций x и $\widetilde{y}$ на кривую дают рациональные функции на $\widetilde{\mathcal{C}}$, их значения в точке Q мы обозначим через $x(Q)$ и $\widetilde{y}(Q)$. Если, точка Q не является ни особой точкой, ни точкой ветвления, то можно положить $\pi_Q = x - x(Q)$. Через ν_∞ обозначим бесконечное нормирование, принимающее на многочлене $V(x)$ значение $-2\deg(V(x))$. Тогда $\nu_\infty(y) = \nu_\infty(\sqrt{f(x)}) = -(2g+1)$. Через $\imath$ обозначим инволюцию гиперэллиптической кривой, переводящую точку $(x(Q), \widetilde{y}(Q))$ в $(x(Q), -\widetilde{y}(Q))$. Для дивизора D, определенного над полем

$\mathbb{K}$ (для краткости называемого $\mathbb{K}$-дивизором), рассмотрим разложение $D = \sum n_Q Q$ в сумму точек Q, простых над $\overline{\mathbb{K}}$.

Определение 1. *Дивизор $D = \sum n_Q Q$ степени d на гиперэллиптической кривой $\widetilde{\mathcal{C}}$ мы назовем* минимальным*, если для каждой точки $Q \in \operatorname{Supp} D$ выполнены следующие условия*

- *$\pi(Q)$ не является особой точкой кривой $\mathcal{C}$;*
- *если Q — точка ветвления, то $n_Q = 1$;*
- *если Q не является точкой ветвления, то $\imath Q \notin \operatorname{Supp} D$.*

Образ минимального дивизора на кривой $\mathcal{C}$ лежит в множестве неособых точек и является дивизором Картье на этой кривой.

Нам понадобится конструкция Розенлихта обобщенных якобианов особых кривых, которая подробно изложена в монографии Серра [2]. Напомним, определение линейной эквивалентности по модулю $\mathfrak{m}$.

Определение 2. *Для $S \in \mathcal{C}^s$, обозначим через $S_1, \ldots, S_l \in \widetilde{\mathcal{C}}$ — множество $\overline{\mathbb{K}}$-точек из $\pi^{-1}(S)$. Будем говорить, что рациональная функция $F \in \overline{\mathbb{K}}(x, \sqrt{f(x)})$ обладает модулем $\mathfrak{m}$, если для любой точки $S \in \mathcal{C}^s$ найдется ненулевая константа $c_S \in \overline{\mathbb{K}}$, такая, что для всех i выполнены сравнения*

$$F = c_S \mod \pi_{S_i}^{m_S}.$$

Определение 3. *Дивизоры $D \sim_{\mathfrak{m}} E$ называются линейно эквивалентными по модулю $\mathfrak{m}$, если $D = E + (F)$ для дивизора (F) некоторой рациональной функции $F \in \overline{\mathbb{K}}(x, \sqrt{f(x)})$, обладающей модулем $\mathfrak{m}$.*

Важность понятия минимального дивизора иллюстрирует следующая лемма, обобщающая [1, III §2].

Лемма 1. *Пусть $D = \sum n_Q Q$ — минимальный эффективный дивизор на гиперэллиптической кривой $\widetilde{\mathcal{C}}$ над полем $\overline{\mathbb{K}}$, $\deg D \leqslant g$. Предположим, что $\deg f_0 > g$. Тогда не существует рациональной функции $F \in \overline{\mathbb{K}}(x, \sqrt{f(x)})$, обладающей модулем $\mathfrak{m}$, полюса которой содержатся в носителе дивизора D, и их порядок в каждой точке Q не превосходит n_Q.*

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать лемму в случае когда ∞ не входит в носитель D. В противном случае, можно найти неособую точку ветвления не лежащую в носителе D и применить бирациональный автоморфизм переводящий эту точку в ∞.

Предположим, что существует рациональная функция F, удовлетворяющая условию леммы, тогда $U_D(x)F$ — регулярная функция на $\mathcal{C} \setminus \infty$, поэтому она принадлежит кольцу $K[x, \sqrt{f(x)}]$, то есть $U_D(x)F = V(x) + W(x)\sqrt{f(x)}$, где $V(x), W(x) \in \mathbb{K}[x]$. Пусть $S \in \operatorname{Supp} \mathfrak{m}$, тогда $\imath S$ входит в $\mathfrak{m}$ с той же кратностью. Поскольку функция $U_D(x)$ также $\imath$-инвариантна и не обращается в нуль в точках $\operatorname{Supp} \mathfrak{m}$ имеем

$$F = c_S \mod \pi_S^{m_S} \qquad \imath F = c_S \mod \pi_S^{m_S}.$$

Вычитая сравнения получаем:

$$W(x)y = 0 \mod \pi_S^{m_S},$$

откуда следует, что $W(x) = \phi(x)\widetilde{W}(x)$, для $\widetilde{W}(x) \in \mathbb{K}[x]$.

Поскольку $\nu_\infty(V(x))$ — четно, а $\nu_\infty(\widetilde{W}(x)\sqrt{h(x)})$ — нечетно, то компоненты старшей степени не могут сократиться, откуда имеем

$$\nu_\infty(V(x) + \widetilde{W}(x)\sqrt{h(x)}) \leqslant \nu_\infty(\widetilde{W}(x)\sqrt{h(x)}).$$

Так как $F(x)$ по предположению не имеет полюсов в ∞:

$$0 \leqslant \nu_\infty(F) = \nu_\infty\left(\frac{V(x)+\widetilde{W}(x)\sqrt{h(x)}}{U_D(x)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \nu_\infty(\widetilde{W}(x)\sqrt{h(x)}/U_D(x)) \leqslant -(2g+1)+2g = -1.$$

Значит данная цепочка равенств не может быть выполнена, а значит $\widetilde{W}(x)=0$. Но функция $F(x)=\frac{V(x)}{U_D(x)}$ (где $\deg V(x)=\deg U_D(x)$, поскольку у F нет полюсов в ∞) очевидно сохраняется при действии инволюции $\imath$, откуда множество полюсов тоже должно быть инвариантно, то есть лежать в множестве точек ветвления. Однако для любой точки ветвления P, функция $(x-x(P))$ имеет дивизор нулей $2P$ на кривой C. Откуда из условия леммы, множество полюсов F не может лежать в D, и функция F постоянна. $\square$

Таким образом, по лемме 1 в классе линейной эквивалентности эффективного минимального дивизора степени не больше g существует единственный эффективный дивизор.

Для определения многочленов Мамфорда нам понадобится следующая аппроксимационная лемма :

Лемма 2. *(см. [1, III §2]) Пусть D — минимальный эффективный дивизор степени d на гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$, определенный над $\mathbb{K}$ и не содержащий ∞ в своем носителе. Пусть $D=\sum n_Q Q$ — его разложение над $\overline{\mathbb{K}}$. Тогда существует единственный многочлен $V(x)\in\mathbb{K}[x]$ степени не выше $d-1$, такой что*

$$V(x)=\phi(x)y \mod (x-x(Q))^{n_Q}, \text{ для всех } P\in \operatorname{Supp}(D). \qquad (*)$$

Для произвольного эффективного минимального дивизора $D=\sum n_Q Q$ степени d определим многочлен $U_D(x)=\prod_{Q\neq\infty}(x-x(Q))^{n_Q}$. Если D определен над $\mathbb{K}$, то многочлен также определен над $\mathbb{K}$. Согласно лемме 2 существует единственный аппроксимирующий $\sqrt{h(x)}$ многочлен $V_D(x)$, то есть такой что $\deg V_D(x)\leqslant d-1$ и

$$V_D(x)=\phi(x)\widetilde{y} \mod (x-x(Q))^{n_Q}, \text{ для всех } Q\in\operatorname{Supp}(D).$$

Заметим, что $h(x)-V_D(x)^2=\phi(x)\widetilde{y}^2-V_D(x)^2=0 \mod (x-x(Q))^{n_Q}$, откуда следует, что многочлен $h(x)-V_D(x)^2$ делится на $U_D(x)$. То есть существует $\overline{U}_D(x)$ удовлетворяющий равенству:

$$h(x)-V_D(x)^2=U_D(x)\overline{U}_D(x).$$

Определение 4. *Для эффективного минимального дивизора D набор многочленов*

$$(V_D(x),U_D(x),\overline{U}_D(x))$$

мы назовем представлением Мамфорда*, $V_D(x),U_D(x),\overline{U}_D(x)$ —* многочленами Мамфорда*.*

Легко видеть, что тройка многочленов $(V_D(x),U_D(x),\overline{U}_D(x))$ однозначно восстанавливает дивизор D. Действительно, $U_D(x)$ восстанавливает координаты $x(Q)$, где $Q\in\operatorname{Supp}D$, а $V_D(x)$ — координату $y(Q)$. Более того, по этой тройке восстанавливаются также $h(x)$ и $\phi(x)$.

3. Непрерывные дроби, ассоциированные с точкой на гиперэллиптической кривой.

Напомним определение непрерывных дробей в функциональных полях (см. [3],[4]). Пусть $P\in\mathcal{C}$ — $\mathbb{K}$-точка степени 1, не являющаяся точкой ветвления. Рассмотрим $\widehat{\mathbb{K}}_P$ — пополнение поля $\mathbb{K}$ относительно нормирования ν_P. Тогда каждый элемент $\beta\in\widehat{\mathbb{K}}_P$ можно однозначно представить в виде формального степенного ряда $\beta=\sum\limits_{i=s}^{\infty} d_i v^i$, где $d_i\in\mathbb{K}$. Назовем

$[\beta] := \sum\limits_{i=s}^{0} d_i v^i$ *целой частью*, а $\{\beta\} := \beta - [\beta]$ — *дробной частью.* Пусть $a_0 = [\beta]$, $\beta_0 = \beta$. Если $\beta_{i-1} - a_{i-1} \neq 0$, по индукции определяем элементы a_i, β_i:

$$\beta_i = \frac{1}{\beta_{i-1} - a_{i-1}} \in \widehat{\mathbb{K}}_P, \quad a_i = [\beta_i].$$

В результате мы получим непрерывную дробь $[a_0; a_1, \ldots]$.

Определение 5. *Непрерывная дробь называется* квазипериодической, *если найдутся такие $k \neq l$, что $\beta_k = c\beta_l$, где $c \in \mathbb{K}$ — некоторая ненулевая константа. Минимальное число $|k - l|$ называется* длиной квазипериода.

Результаты о характеризации квазипериодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях рациональных функций на кривой без ветвления на бесконечности были получены в [5]. Они опираются только на теорему Римана-Роха для кривых и стандартные преобразования для непрерывных дробей.

Следующая теорема дает связь квазипериодичности непрерывной дроби и конечности кручения дивизора $(P - \infty)$. Доказательство опирается на лемму 1 и интерпретацию каждого шага разложения в непрерывную дробь в терминах представления Мамфорда.

Обозначим через $\tau(G)$ число делителей многочлена $G(x)$ в кольце $\mathbb{K}[x]$.

Теорема 1. *Пусть P — $\mathbb{K}$-точка кривой $\mathcal{C}$ степени 1, не являющаяся точкой ветвления. Пусть D_0 — минимальный эффективный дивизор степени g кривой $\mathcal{C}$, не содержащий точку $\imath P$ в своем носителе. Пусть $(V_0(x), U_0(x)(x - x(P))^2, U_1(x))$ — представление Мамфорда дивизора $D_0 + 2P$. Тогда непрерывная дробь построенная по квадратичной иррациональности*

$$\beta = \frac{\sqrt{h(x)} + V_0(x)}{U_1(x)(x - x(P))} \tag{1}$$

квазипериодична, тогда и только тогда, когда порядок точки $(P - \infty)$ на якобиане кривой $\widetilde{\mathcal{C}}$ конечен. Если этот порядок равен M, то период имеет длину не более чем $M\tau(\phi(x))^2$.

Доказательство будет приведено в следующем параграфе.

4. Связь сложения дивизоров и разложения в непрерывную дробь.

Лемма 3. *Пусть D — минимальный эффективный дивизор степени g, такой что $\infty \notin \operatorname{Supp} D$, а $P \in \widetilde{\mathcal{C}}$ — $\overline{\mathbb{K}}$-точка кривой, которая не является точкой ветвления и не проецируется в особую точку кривой $\mathcal{C}$, и такая, что $\imath P \notin \operatorname{Supp} D$. Тогда существует рациональная функция вида*

$$F = \frac{V(x) + \phi(x)\widetilde{y}}{U(x)},$$

такая что дивизор $E := D + P - \infty + (F) \geqslant 0$ имеет степень g и эффективен. При этом, если $Q \in \operatorname{Supp}(D)$, то $Q \notin \operatorname{Supp}(E)$. В случае, когда $Q \in \operatorname{Supp}(E)$ и $\imath Q \in \operatorname{Supp}(E)$, точка Q является либо точкой ветвления, причем кратность вхождения в дивизор E не более 1, либо $\pi(Q)$ особая точка кривой $\mathcal{C}$, а Q и $\imath Q$ входят в E с одинаковой кратностью равной $\nu_Q(g.c.d.(V(x), \phi(x)))$.

Доказательство. Рассмотрим представление Мамфорда $(V(x), U(x), \overline{U}(x))$ для дивизора $D+P$, который по условию леммы является минимальным, причем $\deg U(x) = g+1$ и $\deg V(x) \leqslant g$. Имеем:

$$V(x) - \phi(x)\widetilde{y} = 0 \mod (x - x(Q))^{n_Q}, \text{ для } Q \in \operatorname{Supp} D + P,$$

Функция $V(x)+\phi(x)\widetilde{y}$ содержит в своем множестве нулей все точки дивизора $\imath D + \imath P$ с учетом кратности. Поскольку $V(x)+\phi(x)\widetilde{y}$ имеет полюс порядка $2g+1$ на бесконечности, то разность дивизора нулей $V(x)+\phi(x)\widetilde{y}$ и дивизора $\imath D + \imath P$ — эффективный дивизор степени g. Рассмотрим функцию

$$F = \frac{V(x)+\phi(x)\widetilde{y}}{U(x)}$$

и дивизор E — дивизор нулей F. Порядок нуля F в ∞ равен 1, и F имеет дивизор полюсов, равный $D+P$. Откуда мы получаем, что дивизор $E = D + P - \infty + (F) \geqslant 0$ равен разности дивизора нулей $V(x)+\phi(x)y$ и дивизора $\imath D + \imath P$.

Предположим, что $Q \in \operatorname{Supp}(D)$. Тогда $\phi(x(Q)) \neq 0$ и $V(x(Q)) - \phi(x(Q))\widetilde{y}(Q) = 0$. Если $Q \in \operatorname{Supp}(E)$, то $V(x(Q)) + \phi(x(Q))\widetilde{y}(Q) = 0$. Откуда $V(x(Q)) = y(Q) = 0$, следовательно, Q — точка ветвления, то есть нуль $f(x)$. Аналогичным образом получаем, что если Q и $\imath Q$ принадлежат $\operatorname{Supp}(E)$, то $V(x(Q)) - \phi(x(Q))y(Q) = 0$ и $V(x(Q)) + \phi(x(Q))y(Q) = 0$. Отсюда $V(x(Q)) = \phi(x(Q))y(Q) = 0$ и Q — или точка ветвления, или $\pi(Q)$ — особая точка. В последнем случае кратность вхождения Q и $\imath Q$ в E равна $\nu_Q(g.c.d.(V(x), \phi(x)))$.

Для точки ветвления Q в случае $\pi(Q) \notin \mathcal{C}^s$ многочлен $V(x)$ не может аппроксимировать униформизующую кольца $\mathcal{O}_Q$ (которой является функция вида $\sqrt{(x - x(Q)))}$ с точностью более чем первого порядка. Действительно, пусть $f(x) = (x - x(Q))\tilde{f}(x)$, и пусть $V(x)$ аппроксимирует y в точке Q, то есть $V(x) = \tilde{V}(x)(x - x(Q))$. Тогда

$$V(x) - y = \sqrt{x - x(Q)}(\tilde{V}(x)\sqrt{x - x(Q)} - \sqrt{\tilde{f}(x)}).$$

Поскольку выражение в скобках в точке Q равно $-\sqrt{\tilde{f}(x(Q))}$, получаем требуемое. Отсюда следует, что точки ветвления входят в дивизор E с кратностью не более чем 1. В случае, если $\pi(Q) \in \mathcal{C}^s$, то аналогичным образом получаем, что ее кратность в E не более чем $\nu_Q(g.c.d.(V(x), \phi(x))) + 1$.

Также заметим, что если $Q \in \operatorname{Supp} D$ — точка ветвления, то она не может входить в дивизор нулей F. Действительно, пусть $U(x) = \tilde{U}(x)(x - x(Q))$, тогда

$$F = \frac{V(x)+\phi(x)y}{U(x)} = \frac{\tilde{V}(x)\sqrt{x - x(Q)} + \sqrt{\tilde{f}(x)}}{\tilde{U}(x)\sqrt{x - x(Q)}}.$$

Откуда видно, что Q содержится в дивизоре полюсов F с кратностью 1. □

Лемма 4. *Пусть D — минимальный эффективный дивизор степени g, а P — $\overline{\mathbb{K}}$-точка, не являющаяся точкой ветвления, и такая, что $\imath P \notin \operatorname{Supp} D$. Тогда существует рациональная функция вида*

$$F = \frac{V(x)+\phi(x)\widetilde{y}}{U(x)},$$

такая что дивизор $E := D + 2(P - \infty) + (F) \geqslant 0$ имеет степень g и эффективен.

Доказательство. Доказательство повторяет предыдущую лемму, однако стоит сделать следующие замечания. Пусть $\infty \notin \operatorname{Supp} D$. Построим представление Мамфорда $(V(x), U(x), \overline{U}(x))$ дивизора $D + 2P$. Тогда $\deg U(x) = g+2$ и $\deg V(x) \leqslant g+1$. Если $\deg V(x) = g+1$, то $\nu_\infty(V(x)+\phi(x)\widetilde{y}) = \nu_\infty(V(x)) = -(2g+2)$ и $\nu_\infty(F) = 2$. Если $\deg V(x) < g+1$, то $\deg \overline{U}(x) = \deg f - \deg U(x) = g-1$ и $\nu_\infty(V(x)+\phi(x)\widetilde{y}) = \nu_\infty(\phi(x)\widetilde{y}) = -(2g+1)$, откуда $\nu_\infty(F) = 3$. Отсюда E линейно эквивалентен эффективному дивизору вида $\overline{D}+\infty$, где $\overline{D}$ — минимален, $\infty \notin \operatorname{Supp}\overline{D}$. Остается последний случай, когда $D = D'+\infty$. В этом случае, как в лемме 3, мы строим тройку многочленов, входящих в представление Мамфорда дивизора $D'+2P$. Тогда $\deg U(x) = g+1$ и $\deg V(x) \leqslant g$, $\nu_\infty(V(x)+\phi(x)\widetilde{y}) = \nu_\infty(y) = -(2g+1)$ и $\nu_\infty(F) = 1$. Тем самым, $D'+2P-\infty$ линейно эквивалентен эффективному дивизору степени g, не содержащему ∞ в своем носителе. $\square$

Пусть D_0 — минимальный эффективный дивизор степени g, не содержащий $\imath P$ в носителе и $c_0 = 1$. Определим по индукции последовательность эффективных минимальных дивизоров D_k, чисел c_k, а также многочленов $\phi_k(x)$, $d_k(x)$, $V_k(x)$, $U_k(x)$. При этом $\phi_0(x) = \phi(x)$, $d_0(x) = 1$, а $V_0(x)$, $U_0(x)$ — многочлены Мамфорда, построенные по дивизору D_0. По индуктивному построению D_k — минимальный эффективный дивизор степени g, не содержащий в своем носителе точку $\imath P$. Определим D_{k+1}. Определим $\hat{U}_k(x)$ из равенства $U_k(x) = \hat{U}_k(x)(x-x(P))^{n_k}$.

$$\gamma_{k-1} := \frac{d_{k-2}(x)(\phi_{k-1}\sqrt{f(x)}+V_{k-1}(x))}{c_k d_{k-1}(x)U_k(x)(x-x(P))}. \tag{2}$$

Согласно лемме 2 существует единственный многочлен $\overline{V}_k$ степени не выше

$$\deg d_{k-1}U_k(x)+1,$$

являющийся решением задачи аппроксимации

$$\overline{V}_k(x) = -d_{k-2}(x)V_{k-1}(x) \mod d_{k-1}(x)\widehat{U}_k(x)$$

$$\overline{V}_k(x) = d_{k-2}(x)\phi_{k-1}(x)\widetilde{y} \mod (x-x(P))^{n_P+2}.$$

Пусть $d_k(x) = g.c.d.(\phi_{k-1},\overline{V}_k))$. Покажем, что d_k и d_{k-1} взаимно просты. В противном случае, $\overline{V}_k(x)$ и d_{k-1} не взаимно просты, откуда из первого условия аппроксимации d_{k-1} не взаимно прост с $d_{k-2}V_{k-1}$, что противоречит взаимной простоте многочлена d_{k-1} с d_{k-2} (по предположению индукции) и с V_{k-1} соответственно (по построению).

Положим $\phi_k = \phi_{k-1}d_{k-2}/d_k$ и $V_k = \phi_{k-1}/d_k$. Определим многочлен $U_{k+1}(x)$ со старшим коэффициентом 1 и константу $\tilde{c}_k$ из равенства

$$\phi_k(x)^2 f(x) - V_k(x)^2 = \tilde{c}_k U_k(x)U_{k+1}(x)(x-x(P))^2. \tag{3}$$

Положим $c_{k+1} := c_k^{-1}\tilde{c}_k$.

Рассуждая по индукции, получаем $d_{k-1}(x)d_k(x)\phi_k(x) = \phi(x)$. Положим

$$F_k := \frac{\phi_k(x)\widetilde{y}+V_k(x)}{U_k(x)(x-x(P))^2}.$$

Из взаимной простоты V_k с многочленами $d_{k-1}, d_k(x), \phi_k(x)$, получаем, что F_k обладает модулем $\mathfrak{m}$.

Поскольку $\deg \phi(x)^2 f(x) = 2g+1$, а степень $\deg V_k(x)^2$ четна и $\deg V_k(x) \leqslant g+1$, то возможны следующие случаи:

(I) $\deg V_k = g+1-\deg d_{k-1}-\deg d_k$ и $\deg U_k(x) = g-2\deg d_{k-1}$ $\deg U_{k+1}(x) = g-2\deg d_k$,

(II) $\deg V_k(x) \leqslant g-\deg d_{k-1}-\deg d_k$, $\deg U_k(x) = g-2\deg d_{k-1}$, $\deg U_{k+1}(x) = g-2\deg d_k-1$,

(III) $\deg V_k(x) \leqslant g-\deg d_{k-1}-\deg d_k$, $\deg U_k(x) = g-2\deg d_{k-1}-1$, $\deg U_{k+1}(x) = g-2\deg d_k$.

Так как D_k не содержит $\imath P$ в носителе, из условий аппроксимации и леммы 4 дивизор

$$E_k := (D_k + 2P - 2\infty) + (F_k)$$

является эффективным и не содержит P в носителе. Предположим, что E_k содержит $\imath P$ с кратностью n_{k+1}. Положим

$$D_{k+1} := E_k + n_{k+1}(P - \imath P).$$

В частности, используя соотношение $P + \imath P \sim_{\mathfrak{m}} 2\infty$ в классе линейной эквивалентности, имеем $D_{k+1} \sim_{\mathfrak{m}} D_k + 2(n_{k+1} + 1)(P - \infty)$ и $\deg D_{k+1} = g - 2\deg d_k$. Имеет место равенство $U_{D_{k+1}}(x) = U_{k+1}(x) = U_{E_k}(x)$.

Замечание 1. *По дивизору D_{k+1} однозначно восстанавливается дивизор D_k. Действительно, n_{k+1} — кратность точки P в D_{k+1}. Тогда $E_k = D_{k+1} + n_{k+1}(\imath P - P)$ — минимальный дивизор не содержащий P в носителе, а D_k — единственный эффективный дивизор лежащий в классе $E_k + 2(\imath P - \infty)$ по отношению эквивалентности, определяемым модулем $\mathfrak{m}$.*

Докажем следующее предложение:

Предложение 1. *Пусть $\beta = \beta_0$ иррациональность* (1) *из Теоремы 1, построенная по дивизору D_0, β_k — последовательность неполных частных разложения β в непрерывную дробь, а γ_k — последовательность* (2) *иррациональностей построенных по дивизору D_0. Предположим, что $d_k = 1$. Тогда имеют место равенства*

$$\beta_k = \gamma_k = \frac{d_{k-1}(x)(\phi_k\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{c_k d_k(x) U_{k+1}(x)(x - x(P))}, \tag{4}$$

$$\gamma_{k+1}(\gamma_k - [\gamma_k]) = 1, \tag{5}$$

$$[\gamma_k] = \frac{d_{k-1}(x)V_k(x) + d_{k+1}(x)V_{k+1}(x)}{c_k d_k(x) U_{k+1}(x)(x - x(P))}, \tag{6}$$

$$\{\gamma_k\} = \frac{d_{k-1}(x)(\phi_k(x)\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{c_k d_k(x) U_{k+1}(x)(x - x(P))}. \tag{7}$$

Доказательство. Предположим, что выполнены равенства (6) и (7). Пусть равенство $\beta_k = \gamma_k$ выполнено, покажем что оно выполнено для $k+1$. Для этого запишем (3) в виде

$$\frac{d_k(x)(\phi_{k+1}(x)\sqrt{f(x)} + V_{k+1}(x))}{\tilde{c}_{k+1} d_{k+1}(x) U_{k+2}(x)\pi} \cdot \frac{(d_{k-1}(x)\phi_k(x)\sqrt{f(x)} - d_{k+1}(x)V_{k+1}(x))}{d_k(x) U_{k+1}(x)\pi} = 1,$$

$$\begin{aligned}\frac{d_k(x)(\phi_{k+1}(x)\sqrt{f(x)} + V_{k+1}(x))}{c_{k+1} d_{k+1}(x) U_{k+2}(x)(x - x(P))} \Bigg(&\frac{d_{k-1}(x)(\phi_k(x)\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{c_k d_k(x) U_{k+1}(x)(x - x(P))} - \\ &- \frac{d_{k-1}(x)V_k(x) + d_{k+1}(x)V_{k+1}(x)}{c_k d_k(x) U_{k+1}(x)(x - x(P))}\Bigg) = 1.\end{aligned} \tag{8}$$

Подставив в (8) равенства (6) и (7), получаем

$$\gamma_{k+1}(\gamma_k - [\gamma_k]) = 1,$$

откуда следует $\gamma_{k+1} = \beta_{k+1}$.

Покажем теперь равенства (6) и (7). Заметим, что

$$\deg U_{k+1} + \deg d_k + 1 \geqslant \max(\deg d_{k-1}V_k, \deg d_{k+1}V_{k+1}). \tag{9}$$

Действительно, неравенство может нарушиться только в случае (III). Но этому случаю может предшествовать только случай (II), откуда следует, что $\deg V_k(x) \leqslant g - \deg d_{k-1} - \deg d_k$.

Из условий апроксимации на $V_k(x)$ следует

$$\nu_P\left(\frac{\phi_{k+1}\sqrt{f(x)} - V_{k+1}(x)}{c_{k+1}U_{k+1}(x)(x - x(P))}\right) \geqslant 1,$$

тем самым, ряд Лорана по $\pi_P = x - x(P)$ этой квадратичной иррациональности, состоит только из членов положительной степени. Чтобы доказать, что этот ряд является дробной частью от β_k необходимо показать, что ряд по π_P выражения

$$\frac{d_{k-1}(x)V_k(x) + d_{k+1}(x)V_{k+1}(x)}{c_k d_k(x)U_{k+1}(x)(x - x(P))} = \beta_k - \frac{d_{k-1}(x)(\phi_k(x)\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{c_k d_k(x)U_{k+1}(x)(x - x(P))}$$

содержит только отрицательные члены по π_P в своем разложении.

По построению

$$d_{k-1}(x)V_k(x) + d_{k+1}(x)V_{k+1}(x) = 0 \mod d_k(x)U_{k+1}(x).$$

В точке P имеем

$$d_{k-1}(x(P))V_k(x(P)) = d_{k-1}(x(P))\phi_k(x(P))\widetilde{y}(P) =$$
$$= d_{k+1}(x(P))\phi_{k+1}(x(P))\widetilde{y}(P) = d_{k+1}(x(P))V_{k+1}(x(P)) \neq 0.$$

Это означает, что

$$G(x) := \frac{d_{k-1}(x)V_k(x) + d_{k+1}(x)V_{k+1}(x)}{d_k(x)\widehat{U}_{k+1}(x)}$$

является ненулевым многочленом над $\mathbb{K}$ степени не выше

$$\max(\deg d_{k-1}V_k(x), \deg d_{k+1}V_{k+1}(x)) - \deg \hat{U}_{k+1}(x) \leqslant n_{k+1} + 1.$$

Многочлен $G(x)$ имеет также степень $\deg G(x)$, если его рассматривать как многочлен от $x - x(P)$. Отсюда элемент $G(x)/(x - x(P))^{n_{k+1}+1}$, рассматриваемый как ряд по π_P, не имеет строго положительных степеней π_P в своем разложении. Более того, так как многочлен $G(x)$ не обращается в нуль в точке $x(P)$, то старшая степень ряда Лорана в точности равна $n_{k+1}+1$.

Из вышесказанного получаем

$$[\gamma_k] = \frac{d_{k-1}(x)V_k(x) + d_{k+1}(x)V_{k+1}(x)}{c_k d_k(x)U_{k+1}(x)(x - x(P))},$$

$$\{\gamma_k\} = \frac{d_{k-1}(x)(\phi_k(x)\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{c_k d_k(x)U_{k+1}(x)(x - x(P))}.$$

□

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Доказательство. [Доказательство теоремы 1] Предположим, что разложение в непрерывную дробь квадратичной иррациональности β квазипериодично. Согласно предложению 1, каждому шагу разложения β в непрерывную дробь соответствуют следующие данные: дивизор D_k линейно эквивалентный $D_0 + 2i_k(P - \infty)$ (где $i_1, i_2, \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел), последовательность многочленов $V_k(x), U_k(x), U_{k+1}(x)$ и последовательность квадратичных иррациональностей

$$\beta_k = \frac{d_{k-1}(x)(\phi_k\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{c_k d_k(x)U_{k+1}(x)(x - x(P))}.$$

Квазипериодичность непрерывной дроби влечет равенство $\beta_k = c\beta_l$ для некоторых $k \neq l$ и константы $c \neq 0$. Отсюда следует совпадение $d_{k-1}(x)/d_k(x)$ и $d_{l-1}(x)/d_l(x)$ равенство пар $(V_k(x), U_{k+1}(x)) = (V_l(x), U_{l+1}(x))$, и соответствующее равенство дивизоров $D_k = D_l$. Поскольку D_k линейно эквивалентен $D_0 + 2i_k(P - \infty)$, а D_l линейно эквивалентен $D_0 + 2i_l(P - \infty)$, отсюда следует, что дивизор $2(i_k - i_l)(P - \infty)$ линейно эквивалентен нулю.

Пусть теперь точка $(P - \infty)$ на якобиане кривой $\mathcal{C}$ имеет конечный порядок M. Заметим, что d_k являются делителями $\phi(x)$, в частности, рациональных функций $d_{k-1}(x)/d_k(x)$ — конечное число, и значит найдется бесконечное число квадратичных иррациональностей β_{k_i} с одинаковыми отношениями $d_{k_i-1}(x)/d_{k_i}(x)$. Снова рассмотрим последовательность дивизоров D_{k_i} линейно эквивалентных $D_0 + 2l_i(P - \infty)$, соответствующих по предложению 1 неполным частным β_{k_i}. Для бесконечной последовательности дивизоров $D_0 + 2l_i(P - \infty)$ найдутся два номера $i < j$, для которых $l_i = l_j \mod M$. Это влечет $D_{k_i} - D_{k_j} \sim_{\mathfrak{m}} D_0 + l_i(P - \infty) - D_0 - l_j(P - \infty) \sim_{\mathfrak{m}} 0$

Поскольку размерность линейной системы минимального эффективного дивизора степени не выше g равна 1, то $D_{k_i} = D_{k_j}$. Из равенства дивизоров следует равенство соответствующих многочленов Мамфорда, и соответствующее равенство $\beta_{k_i} = c\beta_{k_j}$, откуда следует квазипериодичность. □

5. Свойства квазипериода непрерывной дроби

Предложение 2. *В предположениях предложения 1 пусть $D_k = \widehat{D}_k + n_k P$ — последовательность дивизоров, соответствующая разложению в непрерывную дробь. Предположим, что для некоторого l выполнено $D_l = \imath\widehat{D}_{k+1} + n_{k+1}P$, а также выполнены равенства $d_k = d_{l-1}$ и $d_{k-1} = d_l$. Тогда выполнена симметрия для дивизоров*

$$D_{l+i} = \imath\widehat{D}_{k-i+1} + n_{k-i+1}P$$

и квазисимметрия неполных частных разложения в непрерывную дробь

$$[\beta_{l+i}] = [\beta_{k-i-1}]c^{(-1)^i}.$$

Если $l - k$ — четно то разложение в непрерывную дробь симметрично, тогда и только тогда, когда $\widehat{D}_{(k+l)/2}$ состоит из точек ветвления, не принадлежащих $\pi^{-1}(\mathcal{C}^s)$, и входящих с кратностью не более чем 1, и выпонено равенство $d_{(k+l)/2+1} = d_{(k+l)/2-1}$.

Доказательство. Разложению в непрерывную дробь соответствует последовательность дивизоров $D_k = \widehat{D}_k + n_k P$, $E_k = \widehat{D}_{k+1} + n_{k+1}\imath P$, а также последовательность многочленов Мамфорда $(V_k(x), \hat{U}_k(x)(x - x(P))^{n_k+2}, \hat{U}_{k+1}(x)(x - x(P))^{n_{k+1}})$ для дивизоров $D_k + 2P$.

Поскольку функция

$$F_k = \frac{V_k(x) + \phi_k(x)\widetilde{y}}{U_k(x)(x - x(P))^2}$$

имеет дивизор нулей E_k и дивизор полюсов $D_k + 2P$, то многочлен $V_k(x)$ является решением следующей задачи аппроксимации:

$$V_k + \phi_k\widetilde{y} = 0 \mod \hat{U}_{k+1}(x),$$

$$V_k - \phi_k\widetilde{y} = 0 \mod (x - x(P))^{n_k+n_{k+1}+2}.$$

Последнее сравнение следует из того, что $U_k(x)(x - x(P))^2$ имеет нуль в точке $\imath P$ порядка $n_k + 2$, а F_k имеет нуль в точке $\imath P$ порядка n_{k+1}. Отсюда следует, что пару многочленов $(V_k(x), \hat{U}_{k+1}(x)(x - x(P))^{n_{k+1}+2})$ можно рассматривать как решение задачи аппроксимации для сложения дивизоров $\imath\widehat{D}_{k+1} + n_{k+1}P$ и $2P$, результатом которого является дивизор $\imath\widehat{D}_k + n_k\imath P$.

Предположим, что для некоторого l выполнено $D_l = \imath\widehat{D}_{k+1} + n_{k+1}P$ (если $l = k+1$, это условие совпадает с условием на $\widehat{D}_l$ из второй части предложения). Из равенств $d_k = d_{l-1}$ и $d_{k-1} = d_l$ следует, что $\phi_k = \phi/(d_k d_{k-1}) = \phi/(d_{l-1}d_l) = \phi_l$. Тогда шагу l разложения в непрерывную дробь соответствуют дивизоры $D_l = \imath\widehat{D}_{k+1} + n_{k+1}P$, $E_l = \imath\widehat{D}_k + n_k\imath P$, $D_{l+1} = \imath\widehat{D}_k + n_k P$, Многочлены Мамфорда дивизоров D_l и D_{l+1} равны соответственно $(V_k(x), \hat{U}_{k+1}(x)(x-x(P))^{n_k})$ и $(V_{k-1}(x), \hat{U}_k(x)(x-x(P))^{n_{k+1}})$. Отсюда, получаем следующие равенства

$$D_{l+1} = \imath\widehat{D}_k + n_k P,$$

$$\beta_l = \frac{d_k(\phi_k\sqrt{f(x)} + V_k(x))}{cd_{k-1}U_k(x)(x-x(P))},$$

$$[\beta_l] = \frac{d_k V_k(x) + d_{k-2}V_{k-1}(x)}{cd_{k-1}U_k(x)(x-x(P))} = \frac{[\beta_{k-1}]}{c}.$$

Отсюда следует, равенство $D_{l+i} = \imath\widehat{D}_{k-i+1} + n_{k-i+1}P$ и квазисимметрия неполных частных разложения в непрерывную дробь, то есть $[\beta_{l+i}] = [\beta_{k-i-1}]c^{(-1)^i}$. Таким образом, совпадение $D_l = \imath\widehat{D}_{k+1} + n_{k+1}P$ приводит к симметрии разложения в непрерывную дробь.

Наличие симметрии для разложения в непрерывную дробь в случае четного $l-k$ влечет равенство

$$\widehat{D}_k + n_k P = D_k = \imath\widehat{D}_k + n_k P,$$

которое выполняется, если и только если дивизор $\widehat{D}_k$ состоит из точек ветвления, входящих с кратностью не более чем 1 и не проецирующие в особые точки $\mathcal{C}$. Что доказывает вторую часть предложения. $\square$

6. Заключение

Используя законы сложения дивизоров Картье на особой гиперэллиптической кривой, нам удалось обобщить результаты работы [6] на более общий класс квадратичных иррациональностей, чем тот, что рассматривался в указанной работе. А именно, мы получаем доказательство теоремы об эквивалентности условия квазипериодичности непрерывной дроби квадратичной иррациональности и условия конечности порядка точки $P - \infty$ на якобиане нормализации кривой $\mathcal{C}$. Что касается оценки на квазипериод, то можно получить аналогичные результаты, однако они будут несколько хуже, из-за наличия дополнительных множителей в разложении в непрерывную дробь, которые являются делителями многочлена $h(x)$. Что касается необходимых и достаточных условий для квазисимметричности разложения в непрерывную дробь, то здесь мы получили критерии, которые аналогичны критериям, полученным в работе [6] (см. Предложение 3 [6]), тем не менее, непостредственного аналога наиболее простого критерия, указанного в Теореме 3 работы [6], по-видимому, не существует.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях, Мир, Москва, 1988.

2. Серр Ж. П. Алгебраические группы и поля классов, Мир, Москва, 1968.

3. Artin E. Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. I // Math. Z. 1924. T. 171. №19:1. C. 153-246.

4. Беняш-Кривец В. В., Платонов В. П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Математический сборник. 2009. Т. 200. №11. С. 15-44.

5. Berry T. G. On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields // Arch Math. 1990. T. 55. C. 259-266.

6. Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В. Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и представление Мамфорда // Доклады РАН. 2016. Т.471. №6 С. 640–644.

7. В. П. Платонов, Г. В. Федоров, S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Доклады РАН. 2015. Т.465. №5 С. 537–541.

8. Rosenlicht M. Generalized Jacobian varieties // Ann. of Math. 1954. T. 59. №3. C. 505–530.

9. Rosenlicht M. Equivalence relations on algebraic curves // Ann. of Math. 1952. T. 56. №2. C. 169–191.

10. Хартсхорн, Р. Алгебраическая геометрия, Мир, Москва, 1981.

11. Платонов В. П., Жгун В. С., Петрунин М. М. К вопросу о простоте якобианов кривых рода 2 над полем рациональных чисел с точками кручения больших порядков // Доклады РАН. 2013. Т. 450. №4. С. 385–388.

12. Платонов В. П. Арифметика квадратичных полей и кручение в якобианах // Доклады РАН. 2010. Т. 430. №3. С. 318–320.

13. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69:1. №415. С. 3–38.

14. Платонов В. П., Петрунин М.М. Новые порядки точек кручения в якобиа- нах кривых рода 2 над полем рациональных чисел // Доклады РАН. 2012. Т. 443. №6. С. 664–667.

15. Платонов В. П., Петрунин М. М. О проблеме кручения в якобианах кривых рода 2 над полем рациональных чисел // Доклады РАН. 2012. Т. 446. №3. С. 263-264.

REFERENCES

1. Benyash–Krivets, V. V., Platonov, V. P. 2009, “Groups of S-units in hyperelliptic fields and continued fractions”, Sb. Math, vol. 200, no. 11, pp. 1587-1615.

2. Mumford, D 1983, Tata Lectures on Theta I. Birkhauser, Boston.

3. Serre, Jean-Pierre 1988, Algebraic groups and class fields, Springer-Verlag, New York.

4. Artin, E., 1924, “Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen. I”, Math. Z., vol. 19, no. 1, pp. 153-246.

5. Berry, T. G., 1990, “On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields”, Arch Math. vol.55, pp. 259-266.

6. Platonov, V. S., Fedorov, G.V., 2016, “Continued Rational Fractions in Hyperelliptic Fields and the Mumford Representation”, Doklady Mathematics, vol. 94, no. 3, pp. 692–696.

7. Platonov, V. P., Zhgoon, V. S., Fedorov, G. V., 2015, “S-units and periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, Doklady Mathematics, vol. 92, no. 3, pp. 752–756.

8. Rosenlicht M., 1954, “Generalized Jacobian varieties”, Ann. of Math., 59, 3, pp. 505–530.

9. Rosenlicht M., 1952, “Equivalence relations on algebraic curves” , Ann. of Math. 56, 2, pp. 169–191.

10. Hartshorne R., 1977, “Algebraic geometry” , Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

11. Platonov, V. P., Zhgun V. S., Petrunin M. M., 2013 “On the simplicity of Jacobians for hyperelliptic curves of genus 2 over the field of rational numbers with torsion points of high order”, Dokl. Math, 450, 4, pp. 385–388

12. Platonov, V. P. 2010, “Arithmetic of quadratic fields and torsion in Jacobians” , Dokl. Math, 81, 1, pp. 55–57

13. Platonov, V. P. 2014, “Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field” , Russian Math. Surveys 69, 1, pp. 1–34.

14. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2012, “New orders of torsion points in Jacobians of curves of genus 2 over the rational number field” , Dokl. Math, 85, 2, pp. 286–288.

15. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2012, “On the torsion problem in jacobians of curves of genus 2 over the rational number field” , Dokl. Math, 86, 2, pp. 642–643.

ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований
Российской академии наук (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.43 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-221-244

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

А. А. Жукова (г. Владимир), А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

В работе получена теорема геометризации для систем счисления, где основанных на жадных разложениях знаменатели подходящих дробей произвольного иррационального числа, большего нуля, но меньшего единицы.

Знаменатели $\{Q_i(\alpha)\}$ подходящих дробей произвольного иррационального $\alpha \in (0;1)$ дают способ представления любого натурального числа в виде разложения Островского-Цеккендорфа $n = \sum\limits_{i=0}^{k} z_i(\alpha,n)Q_i(\alpha)$ с естественными условиями на $z_i(\alpha,n)$, описываемыми при помощи неполных частных $q_i(\alpha)$. В случае $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ получается хорошо известная ситстема счисления Фибоначчи. Если же $\alpha = \frac{\sqrt{g^2+4}-g}{2}$, где $g \geqslant 2$, то соответсвующее разложение порождает представление натуральных чисел в обобщенных системах счисления Фибоначчи.

Настоящая работа посвящена изучению множеств $\mathbb{Z}(z_0,\ldots,z_l)$, состоящих из натуральных чисел, имеющих заданное окончание представления в виде разложения Островского-Цеккендорфа. Основным результатом работы является теорема геометризации, описывающая множества $\mathbb{Z}(z_0,\ldots,z_l)$ в терминах дробных долей вида $\{n\alpha\}$. В частности, для любого допустимого окончания $(z_0,\ldots,z_l)$ существуют эффективно вычислимые a, $b \in \mathbb{Z}$ такие, что $n \in \mathbb{Z}(z_0,\ldots,z_l)$, тогда и только тогда, когда дробная доля $\{(n+1)i_0(\alpha)\}$, где $i_0(\alpha) = \max\{\alpha, 1-\alpha\}$, принадлежит отрезку $[\{a\alpha\};\{b\alpha\}]$. Данная теорема обобщает теоремы о геометризации классической и обобщенных системы счисления Фибоначчи, доказанные авторами ранее.

Ключевые слова: системы счисления, представление Островского-Цеккендорфа, теорема геометризации.

Библиография: 33 названия.

GEOMETRIZATION OF NUMERATION SYSTEMS

A. A. Zhukova (Vladimir), A. V. Shutov (Vladimir)

Abstract

We obtain geometrization theorem for numeration systems based on greedy expansions oa natural numbers on denomirators of partial convergents of an arbitrary irrational α from the interval $(0;1)$.

More precisely, denomirators $\{Q_i(\alpha)\}$ of partial convergents of an arbitrary irrational $\alpha \in (0;1)$ generate Ostrowski-Zeckendorf representations of natural numbers. These representations have the form $n = \sum\limits_{i=0}^{k} z_i(\alpha,n)Q_i(\alpha)$ with natural conditions on $z_i(\alpha,n)$ described in the terms of partial quotients $q_i(\alpha)$. In the case $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ we obtain well-known Fibonacci numeration system. For $\alpha = \frac{\sqrt{g^2+4}-g}{2}$ with $g \geqslant 2$ corresponding expansion is called representation of natural numbers in generalized Fibonacci numeration system.

In the paper we study the sets $\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)$, of natural numbers with given ending of Ostrowski-Zeckendorf representation. Our main result is the geometrization theorem, describing the sets $\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)$ in the terms of fractional parts of the form $\{n\alpha\}$. Particularly,for any admissible ending $(z_0,\dots,z_l)$ there exist efffectively computable a, $b\in\mathbb{Z}$ such that $n\in\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)$, if and only if the fractional part$\{(n+1)i_0(\alpha)\}$, $i_0(\alpha)=\max\{\alpha;1-\alpha\}$, lies in the segment $[\{a\alpha\};\{b\alpha\}]$. This result generalizes geometrization theorems for classical and generalized Fibonacci numeration systems, proved by authors earlier.

Keywords: numeration systems, Ostrowski-Zeckendorf representation, geometrization theorem.

Bibliography: 33 titles.

1. Введение

Пусть $\alpha\in(0;1)$ — иррационально и имеет разложение в цепную дробь вида

$$\alpha=\cfrac{1}{q_1(\alpha)+\cfrac{1}{q_2(\alpha)+\cfrac{1}{q_3(\alpha)+\dots}}},$$

или, более коротко,

$$\alpha=[0;q_1(\alpha),q_2(\alpha),q_3(\alpha),...).$$

Пусть $\{Q_i(\alpha)\}$ – последовательность знаменателей подходящих дробей к α. Хорошо известно [3], что любое натуральное число n может быть представлено в виде

$$n=\sum_{i=0}^{k}z_i(\alpha,n)Q_i(\alpha),$$

где $z_0(\alpha,n)\leqslant q_1(\alpha)-1$, а $z_i(\alpha,n)\leqslant q_{i+1}(\alpha)$ при $i\geqslant 1$, причем из того, что $z_i(\alpha,n)=q_{i+1}(\alpha)$ следует, что $z_{i-1}(\alpha,n)=0$. Данное разложение, часто называемое разложением Островского-Цеккендорфа, может быть построено по так называемому жадному алгоритму.

Набор $(z_0,\dots,z_l)$ будем называть α-допустимым, если $z_0\leqslant q_1(\alpha)-1$, $z_i\leqslant q_{i+1}(\alpha)$ при $i\geqslant 1$, причем из $z_i=q_{i+1}(\alpha)$ следует, что $z_{i-1}=0$. Пусть $(z_0,\dots,z_l)$ – α-допустимый набор. Определим множество $\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)=\{n\in\mathbb{Z},n\geqslant 0,z_0(\alpha,n)=z_0,\dots,z_l(\alpha,n)=z_l\}$.

Множество $\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)$ является примером так называемой квазирешетки. В последние годы появилось много работ, посвященных решению различных теоретико-числовых задач над квазирешетками [14], [16], [17], [19], [20], [25].

В частности, В. Г. Журавлев в работе [18] рассмотрел множество $\mathbb{Z}(0)$ в случае $\alpha=\tau=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и решил на этом множестве бинарную аддитивную задачу, а также получил оценки тригонометрических сумм по этому множеству. Метод В.Г. Журавлева основывался на использовании так называемого $\circ$-умножения Фибоначчи–Кнута–Матиясевича [1], [22], [23] и на существовании специального отображения δ из $\circ$-кольца Фибоначчи в кольцо $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Позднее И.К. Швагирева [24], используя этот метод, решила бинарную аддитивную задачу на множестве $\mathbb{Z}(0,\dots,0)$ в случае $\alpha=\tau_g=\frac{\sqrt{g^2+4}-g}{2}$, где $g\geqslant 2$, для любого числа нулей.

Множества $\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)$ в важных частных случаях $\alpha=\tau$ и $\alpha=\tau_g$ изучались в работах [12] и [13] соответственно. В данных работах было показано, что множество $\mathbb{Z}(z_0,\dots,z_l)$ допускает достаточно простое геометрическое описание: замыкание образа данного множества под действием отображения $\chi(n)=\{(n+1)\tau\}$ ($\chi(n)=\{(n+1)\tau_g\}$) представляет собой некоторый эффективно вычислимый отрезок. Данный факт был использован для решения ряда аналогов классических теоретико-числовых задач, рассматриваемых в числах из данных множеств.

Целью настоящей работы является обобщение описанного результата на случай произвольного иррационального $\alpha \in (0;1)$. Пусть $\chi(\alpha, n) = \{(n+1)i_0(\alpha)\}$, где $i_0(\alpha) = \max\{\alpha; 1-\alpha\}$. Для произвольного α-допустимого набора $(z_0, \ldots, z_l)$ определим множество

$$\mathbb{X}(z_0, \ldots, z_l) = \overline{\{\chi(\alpha, n) : n \in \mathbb{Z}(z_0, \ldots, z_l)\}}.$$

Нами получен следующий результат.

Теорема. *Для произвольного α-допустимого набора $(z_0, \ldots, z_l)$ множество $\mathbb{X}(z_0, \ldots, z_l)$ представляет собой отрезок вида $[\{a\alpha\}; \{b\alpha\}]$ с эффективно вычислимыми a, $b \in \mathbb{Z}$.*

Отметим, что множество отрезков $\mathbb{X}(z_0, \ldots, z_l)$, где z_0, ..., z_l, пробегая все допустимые наборы значений, порождает разбиение $\mathrm{Til}(l)$ отрезка $[0;1]$. Соответствующие разбиения и их приложения к задачам равномерного распределения дробных долей линейной функции рассматривались в работах [5], [15], [26]–[28], [30]–[32]. Эти разбиения также тесно связаны с так называемой гипотезой Штейнгауза, утверждающей, что для любого целого N и иррационального α точки $\{i\alpha\}$, где $1 \le i \le N$, разбивают интервал $(0;1)$ на интервалы не более, чем трех различных длин [4].

Пусть $I \subset [0;1]$ – некоторый отрезок, $\mathbb{N}(\alpha, I) = \{n \in \mathbb{N} : \{n\alpha\} \in I\}$. Полученная нами теорема показывает, что множества вида $\mathbb{Z}(z_0, \ldots, z_l)$ фактически являются частными случаями множеств $\mathbb{N}(\alpha, I)$. Отметим, что в работе [29] была решена линейная аддитивная задача для чисел из множеств $\mathbb{N}(\alpha, I)$. Далее в работах [6]–[11] в случае квадратичной иррациональности α для чисел из $\mathbb{N}(\alpha, I)$ были решены аналоги проблем Гольдбаха, Варинга и Хуа-Локена, а также получен аналог теоремы Лагранжа о четырех квадратах. Таким образом, полученная нами характеризация может быть использована для решения ряда задач теории чисел в числах, принадлежащих множествам $\mathbb{Z}(z_0, \ldots, z_l)$.

2. Доказательство некоторых соотношений для числителей и знаменателей подходящих дробей

Для любого иррационального $\alpha \in (0;1)$ определим $d^1\alpha$ выражением

$$d^1\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha}, & \text{если} \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \\ \frac{2\alpha-1}{\alpha}, & \text{если} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1. \end{cases}$$

Предложение 1. *Справедливо равенство*

$$d^1\alpha = \begin{cases} [0; q_1(\alpha)-1, q_2(\alpha), q_3(\alpha), \ldots), & \textit{если} \quad q_1(\alpha) \geqslant 2, \\ [0; 1, q_2(\alpha)-1, q_3(\alpha), \ldots), & \textit{если} \quad q_1(\alpha) = 1, \quad q_2(\alpha) \geqslant 2, \\ [0; q_3(\alpha)+1, q_4(\alpha), q_5(\alpha), \ldots), & \textit{если} \quad q_1(\alpha) = 1, \quad q_2(\alpha) = 1, \end{cases}$$

где $q_1(\alpha), q_2(\alpha), \ldots$ — неполные частные разложения α в цепную дробь.

Доказательство. Данное предложение доказано в работах [2], [32].

Обозначим через $P_i(\alpha)$ и $Q_i(\alpha)$ — числители и знаменатели подходящих дробей числа α. Для них при всех $i \geqslant 1$ справедливы рекуррентные соотношения

$$P_i(\alpha) = q_i(\alpha)P_{i-1}(\alpha) + P_{i-2}(\alpha), \tag{1}$$

где $P_{-1}(\alpha) = 1$, $P_0(\alpha) = q_1(\alpha)$;

$$Q_i(\alpha) = q_i(\alpha)Q_{i-1}(\alpha) + Q_{i-2}(\alpha), \tag{2}$$

где $Q_{-1}(\alpha) = 0$, $Q_0(\alpha) = 1$.

Обозначим через $i_0(\alpha)$ — максимальное из двух значений α и $1-\alpha$, через $\|x\|$ — расстояние до ближайшего целого, т.е.

$$i_0(\alpha) = \max\{\alpha, 1-\alpha\}; \qquad \|x\| = \begin{cases} \{x\}, & \text{если} \quad \{x\} < \frac{1}{2}, \\ 1-\{x\}, & \text{если} \quad \{x\} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Сформулируем и докажем предложение, отражающее связь знаменателей подходящих дробей чисел α и $d^1\alpha$.

Предложение 2. *Для любого иррационального $\alpha = [0; q_1(\alpha), q_2(\alpha), q_3(\alpha), \ldots)$ справедливы равенства*

$$Q_i(\alpha)i_0(\alpha) - Q_i\left(d^1\alpha\right) = (-1)^{i-1}\|\alpha Q_i(\alpha)\|$$

при $q_1(\alpha) \geqslant 2$ и $i \geqslant 1$;

$$Q_i(\alpha)i_0(\alpha) - Q_i\left(d^1\alpha\right) = (-1)^{i}\|\alpha Q_i(\alpha)\| \tag{3}$$

при $q_1(\alpha) = 1$, $q_2(\alpha) \geqslant 2$ и $i \geqslant 1$;

$$Q_i(\alpha)i_0(\alpha) - Q_{i-2}\left(d^1\alpha\right) = (-1)^{i}\|\alpha Q_i(\alpha)\|$$

при $q_1(\alpha) = 1$, $q_2(\alpha) = 1$ и $i \geqslant 2$;

$$Q_1(\alpha)i_0(\alpha) - Q_{-1}\left(d^1\alpha\right) = 1 - \|\alpha Q_1(\alpha)\|$$

при $q_1(\alpha) = 1$, $q_2(\alpha) = 1$.

Доказательство. Методом математической индукции докажем равенство (3). Все остальные тождества доказываются аналогично.

При $i = 1$ должно выполняться равенство

$$Q_1(\alpha)i_0(\alpha) - Q_1\left(d^1\alpha\right) = -\|\alpha Q_1(\alpha)\|.$$

Используя рекуррентное соотношение (2), находим $Q_1(\alpha) = Q_1\left(d^1\alpha\right) = 1$,

$$Q_1(\alpha)i_0(\alpha) - Q_1\left(d^1\alpha\right) = -(1-\alpha), \qquad -\|\alpha Q_1(\alpha)\| = -\|\alpha\| = -(1-\alpha),$$

так как если $q_1(\alpha) = 1$, то $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Таким образом, равенство (3) верно при $i = 1$.

Убедимся в справедливости этого равенства при $i = 2$, т.е. что

$$Q_2(\alpha)i_0(\alpha) - Q_2\left(d^1\alpha\right) = \|\alpha Q_2(\alpha)\|. \tag{4}$$

Вначале найдем $Q_2(\alpha) = q_2(\alpha) + 1$ и $Q_2\left(d^1\alpha\right) = q_2(\alpha)$, используя формулу (2), и зная, что $q_2\left(d^1\alpha\right) = q_2(\alpha) - 1$. Подставим полученные выражения для $Q_2(\alpha)$ и $Q_2\left(d^1\alpha\right)$ в левую часть равенства (4), тогда

$$Q_2(\alpha)i_0(\alpha) - Q_2\left(d^1\alpha\right) = \left(q_2(\alpha)+1\right)\alpha - q_2(\alpha) = \frac{r_2(\alpha)}{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)+1},$$

так как число α можно записать в виде $\frac{1}{1+\frac{1}{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)}}$, где $0 < r_2(\alpha) < 1$, $q_2(\alpha) \geqslant 2$, а, следовательно, $\alpha = \frac{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)}{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)+1}$.

Правая часть равенства (4) при заданных условиях принимает вид

$$\|\alpha Q_2(\alpha)\| = \left\|\left(q_2(\alpha)+1\right) \cdot \frac{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)}{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)+1}\right\| = \frac{r_2(\alpha)}{q_2(\alpha)+r_2(\alpha)+1}.$$

Итак, соотношение (4) верно при $i = 2$.

Предположим, что равенство (3) выполняется при $i = k-2$ и $i = k-1$, и докажем его справедливость при $i = k$, т.е.

$$Q_k(\alpha)i_0(\alpha) - Q_k\left(d^1\alpha\right) = (-1)^k\|\alpha Q_k(\alpha)\|. \tag{5}$$

Пользуясь рекуррентным соотношением (2), распишем $Q_k(\alpha)$ и $Q_k\left(d^1\alpha\right)$, учитывая, что $q_k\left(d^1\alpha\right) = q_k(\alpha)$ при всех $k \geqslant 2$:

$$Q_k(\alpha) = q_k(\alpha)Q_{k-1}(\alpha) + Q_{k-2}(\alpha)$$

и

$$Q_k\left(d^1\alpha\right) = q_k(\alpha)Q_{k-1}\left(d^1\alpha\right) + Q_{k-2}\left(d^1\alpha\right).$$

Подставим данные выражения в левую часть соотношения (5) и получим

$$\begin{gathered} Q_k(\alpha)i_0(\alpha) - Q_k\left(d^1\alpha\right) = \\ = q_k(\alpha)\left(Q_{k-1}(\alpha)i_0(\alpha) - Q_{k-1}(d^1\alpha)\right) + \left(Q_{k-2}(\alpha)i_0(\alpha) - Q_{k-2}(d^1\alpha)\right) = \\ = q_k(\alpha)\cdot(-1)^{k-1}\|\alpha Q_{k-1}(\alpha)\| + (-1)^{k-2}\|\alpha Q_{k-2}(\alpha)\|, \end{gathered} \tag{6}$$

т.к. по предположению индукции равенство (3) справедливо при $i = k-2$ и $i = k-1$. Правая же часть равенства (5), с использованием тождества

$$\|\alpha Q_i(\alpha)\| = (-1)^i\left(\alpha Q_i(\alpha) - P_i(\alpha)\right), \tag{7}$$

и равенств (1) и (2), приводится к виду

$$\begin{gathered} (-1)^k\|\alpha Q_k(\alpha)\| = (-1)^k\cdot(-1)^k\left(\alpha Q_k(\alpha) - P_k(\alpha)\right) = \\ = q_k(\alpha)\left(\alpha Q_{k-1}(\alpha) - P_{k-1}(\alpha)\right) + \left(\alpha Q_{k-2}(\alpha) - P_{k-2}(\alpha)\right) = \\ = q_k(\alpha)\cdot(-1)^{k-1}\|\alpha Q_{k-1}(\alpha)\| + (-1)^{k-2}\|\alpha Q_{k-2}(\alpha)\|. \end{gathered} \tag{8}$$

Из равенств (6) и (8) следует справедливость тождества (5), а, следовательно, и справедливость соотношения (3) при любых $i \geqslant 1$.

Далее нам также потребуется следующее утверждение.

Предложение 3. *При всех натуральных i и m справедливо неравенство*

$$\begin{gathered} q_{i+1}(\alpha)\|\alpha Q_i(\alpha)\| + q_{i+3}(\alpha)\|\alpha Q_{i+2}(\alpha)\| + \ldots + \\ + q_{i+2m+1}(\alpha)\|\alpha Q_{i+2m}(\alpha)\| < \|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\|. \end{gathered}$$

Доказательство. Заметим, что при всех $i \geqslant 2$ справедливо равенство

$$\|\alpha Q_i(\alpha)\| = \|\alpha Q_{i-2}(\alpha)\| - q_i(\alpha)\|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\|. \tag{9}$$

Из равенства (9) следует, что при всех $i \geqslant 2$

$$q_i(\alpha)\|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\| = \|\alpha Q_{i-2}(\alpha)\| - \|\alpha Q_i(\alpha)\|,$$

поэтому при $i \geqslant 1$

$$\begin{gathered} q_{i+1}(\alpha)\|\alpha Q_i(\alpha)\| = \|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\| - \|\alpha Q_{i+1}(\alpha)\|, \\ q_{i+3}(\alpha)\|\alpha Q_{i+2}(\alpha)\| = \|\alpha Q_{i+1}(\alpha)\| - \|\alpha Q_{i+3}(\alpha)\|, \\ \ldots \\ q_{i+2m+1}(\alpha)\|\alpha Q_{i+2m}(\alpha)\| = \|\alpha Q_{i+2m-1}(\alpha)\| - \|\alpha Q_{i+2m+1}(\alpha)\|. \end{gathered}$$

Сложив левые и правые части записанных выше равенств, получим, что

$$\begin{gathered} q_{i+1}(\alpha)\|\alpha Q_i(\alpha)\| + q_{i+3}(\alpha)\|\alpha Q_{i+2}(\alpha)\| + \ldots + q_{i+2m+1}(\alpha)\|\alpha Q_{i+2m}(\alpha)\| = \\ = \|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\| - \|\alpha Q_{i+2m+1}(\alpha)\| < \|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\|. \end{gathered}$$

3. Оценка разности чисел, имеющих заданное разложение

Разложим натуральное число n в системе счисления $Q_i(\alpha)$, где $q_1(\alpha) \geqslant 2$, и получим

$$n = \sum_{i=0}^{k} z_i(\alpha, n) Q_i(\alpha), \tag{10}$$

где $z_0(\alpha, n) \leqslant q_1(\alpha) - 1$, а $z_i(\alpha, n) \leqslant q_{i+1}(\alpha)$ при $i \geqslant 1$, причём из того, что $z_i(\alpha, n) = q_{i+1}(\alpha)$ следует, что $z_{i-1}(\alpha, n) = 0$. Пусть

$$\overleftarrow{n} = \sum_{i=0}^{k} z_i\left(d^1\alpha, n\right) Q_i\left(d^1\alpha\right), \tag{11}$$

где $z_i\left(d^1\alpha, n\right) = z_i(\alpha, n)$ при $i \geqslant 0$, если $z_0(\alpha, n) \leqslant q_1(\alpha) - 2$;
$z_0\left(d^1\alpha, n\right) = z_0(\alpha, n) - 1$, а $z_i\left(d^1\alpha, n\right) = z_i(\alpha, n)$ при $i \geqslant 1$, если $z_0(\alpha, n) = q_1(\alpha) - 1$.

Предложение 4. *Пусть n и $\overleftarrow{n}$ при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ имеют разложения (10) и (11), соответственно. Тогда*

$$\alpha < (n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n} < 1, \qquad \text{если} \qquad z_0(\alpha, n) \leqslant q_1(\alpha) - 2, \tag{12}$$

и

$$1 < (n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n} < 1 + \alpha, \qquad \text{если} \qquad z_0(\alpha, n) = q_1(\alpha) - 1. \tag{13}$$

Доказательство. Пользуясь равенствами (10) и (11), преобразуем разность

$$(n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n}$$

к виду

$$i_0(\alpha) + \sum_{i=0}^{k} \left(z_i(\alpha, n) Q_i(\alpha) i_0(\alpha) - z_i\left(d^1\alpha, n\right) Q_i\left(d^1\alpha\right)\right). \tag{14}$$

Докажем неравенство (12). Если $z_0(\alpha, n) \leqslant q_1(\alpha) - 2$, где $q_1(\alpha) \geqslant 2$, то по условию $z_i\left(d^1\alpha, n\right) = z_i(\alpha, n)$ при $i \geqslant 0$ и, пользуясь утверждением предложения 2, выражение (14) можно переписать в виде

$$1 - \alpha - \alpha z_0(\alpha, n) + z_1(\alpha, n)\|\alpha Q_1(\alpha)\| - z_2(\alpha, n)\|\alpha Q_2(\alpha)\| +$$
$$+ z_3(\alpha, n)\|\alpha Q_3(\alpha)\| - \ldots + (-1)^{k-1} z_k(\alpha, n)\|\alpha Q_k(\alpha)\|. \tag{15}$$

Для того, чтобы получить оценку сверху выражения (15), отбросим все отрицательные слагаемые, начиная с $\alpha z_0(\alpha, n)$. Пользуясь ограничением на $z_i(\alpha, n)$ и предложением 3, получим, что

$$(n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n} \leqslant 1 - \alpha + z_1(\alpha, n)\|\alpha Q_1(\alpha)\| + z_3(\alpha, n)\|\alpha Q_3(\alpha)\| +$$
$$+ \ldots + z_{2m+1}(\alpha, n)\|\alpha Q_{2m+1}(\alpha)\| \leqslant 1 - \alpha + q_2(\alpha)\|\alpha Q_1(\alpha)\| +$$
$$+ q_4(\alpha)\|\alpha Q_3(\alpha)\| + \ldots + q_{2m+2}(\alpha)\|\alpha Q_{2m+1}(\alpha)\| < 1 - \alpha + \|\alpha Q_0(\alpha)\| = 1,$$

где $k - 1 \leqslant 2m + 1 \leqslant k$.

Сделаем оценку снизу выражения $(n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n}$, отбросив все положительные слагаемые, начиная с $z_1(\alpha, n)\|\alpha Q_1(\alpha)\|$, в выражении (15). Имеем

$$(n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n} \geqslant 1 - \alpha - \alpha z_0(\alpha, n) - z_2(\alpha, n)\|\alpha Q_2(\alpha)\| -$$

$$-\ldots - z_{2m}(\alpha, n)\|\alpha Q_{2m}(\alpha)\|,$$

где $k-1 \leqslant 2m \leqslant k$. Применим предложение 3 к

$$\alpha z_0(\alpha, n) + z_2(\alpha, n)\|\alpha Q_2(\alpha)\| + z_4(\alpha, n)\|\alpha Q_4(\alpha)\| + \ldots + z_{2m}(\alpha, n)\|\alpha Q_{2m}(\alpha)\| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\,(q_1(\alpha) - 2) + q_3(\alpha, n)\|\alpha Q_2(\alpha)\| + q_5(\alpha, n)\|\alpha Q_4(\alpha)\| +$$

$$+ \ldots + q_{2m+1}(\alpha, n)\|\alpha Q_{2m}(\alpha)\| < \alpha q_1(\alpha) - 2\alpha + \|\alpha q_1(\alpha)\|,$$

и найдем, что

$$(n+1)i_0(\alpha) - \overleftarrow{n} > 1 - \alpha - \alpha q_1(\alpha) + 2\alpha - \|\alpha q_1(\alpha)\| = 1 + \alpha(1 - q_1(\alpha)) - \|\alpha q_1(\alpha)\| >$$

$$> 1 + \frac{1 - q_1(\alpha)}{q_1(\alpha) + r_1(\alpha)} - \left\|\frac{q_1(\alpha)}{q_1(\alpha) + r_1(\alpha)}\right\| = \frac{1}{q_1(\alpha) + r_1(\alpha)} = \alpha,$$

т.к. $\alpha = \frac{1}{q_1(\alpha)+r_1(\alpha)}$, где $0 < r_1(\alpha) < 1$ и $q_1(\alpha) \geqslant 2$. Таким образом, неравенство (12) доказано. Неравенство (13) доказыватся аналогично.

4. Определение и свойства разбиения единичного отрезка

Пусть имеется некоторое разбиение Til отрезка $[0;1]$ на части, длины которых s и l, причем $s < l$. Введем два преобразования B_1 и B_2 данного разбиения.

Преобразование $B_1\,(Til))$ состоит в откладывании отрезка длины s от левых концов всех отрезков разбиения Til. В результате получим новое разбиение, начинающееся с наименьшего из отрезков разбиения Til, и имеющее число частей большее, чем Til.

При выполнении преобразования $B_2\,(Til)$ от правых концов всех отрезков разбиения Til откладывается отрезок длины s. Новое разбиение вновь будет иметь больше отрезков, чем разбиение Til, причем крайним правым отрезком нового разбиения является наименьший из отрезков разбиения Til.

Введем обозначение $\sigma(n, \alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(\alpha)$, где $q_i(\alpha)$ — неполные частные разложения числа α в цепную дробь.

Пусть $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Рассмотрим разбиение $Til_0(\alpha)$ отрезка $[0;1]$, состоящее из двух отрезков $[0;\alpha]$ и $[\alpha;1]$. Индуктивно определим разбиение $Til_{m+1}(\alpha)$, получаемое из разбиения $Til_m(\alpha)$ с помощью преобразования B, задаваемого следующим образом:

$$B\,(Til_m(\alpha)) = B_1\,(Til_m(\alpha))\,, \tag{16}$$

если $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 2$ или $\sigma(2n, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1, \alpha) - 2$;

$$B\,(Til_m(\alpha)) = B_2\,(Til_m(\alpha))\,, \tag{17}$$

если $\sigma(2n-1, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n, \alpha) - 2$.

Длины коротких отрезков $s_m(\alpha)$ и длинных отрезков $l_m(\alpha)$ разбиения $Til_m(\alpha)$ находятся по следующим формулам.

Предложение 5. *Если $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 2$, то*

$$s_m(\alpha) = \alpha, \qquad l_m(\alpha) = 1 - (m+1)\alpha; \tag{18}$$

если $\sigma(n, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(n+1, \alpha) - 2$, то

$$s_m(\alpha) = \|\alpha Q_n(\alpha)\|, \qquad l_m(\alpha) = \|\alpha Q_{n-1}(\alpha)\| - (m + 1 - \sigma(n, \alpha))\,\|\alpha Q_n(\alpha)\|. \tag{19}$$

Доказательство. Согласно определению, разбиение $Til_0(\alpha)$ состоит из двух отрезков, длины которых $s_0(\alpha)=\alpha$ и $l_0(\alpha)=1-\alpha$, значит при $m=0$ формулы (18) верны.

Предположим, что равенства (18) верны при $m=k$, где $k\leqslant q_1(\alpha)-2$, т.е. $s_k(\alpha)=\alpha$, и $l_k(\alpha)=1-(k+1)\alpha$. Докажем справедливость формул (18) при $m=k+1$.

Разбиение $Til_{k+1}(\alpha)$ получается из разбиения $Til_k(\alpha)$ с помощью преобразования B. По условию $0<\alpha<\frac{1}{2}$, т.е. $\alpha=\frac{1}{q_1(\alpha)+r_1(\alpha)}$, где $0<r_1(\alpha)<1$, $q_1(\alpha)\geqslant 2$. Из равенства $\alpha q_1(\alpha)+\alpha r_1(\alpha)=1$ следует, что в отрезке единичной длины помещается $q_1(\alpha)$ отрезков длины α и еще один отрезок, длина которого меньше, чем α.

Рассмотрим случай, когда $k\leqslant q_1(\alpha)-3$, тогда $1-(k+2)\alpha\geqslant 1-\alpha q_1(\alpha)+\alpha=\alpha+\alpha r_1(\alpha)>\alpha$. Таким образом, отрезок $[0;1]$ будет состоять из $k+2$ отрезков длины α и одного отрезка длины $1-(k+2)\alpha>\alpha$, поэтому $s_{k+1}(\alpha)=\alpha$, а $l_{k+1}(\alpha)=1-(k+2)\alpha$, т.е. при $k\leqslant q_1(\alpha)-3$ формулы (18) верны.

Теперь предположим, что равенства (18) выполняются при $m=k$, где $k=q_1(\alpha)-2$, т.е. если $s_k(\alpha)=\alpha$, $l_k(\alpha)=\alpha r_1(\alpha)+\alpha$. После выполнения преобразования B отрезок $l_k(\alpha)$ распадется на два отрезка, длины которых α и $\alpha r_1(\alpha)$. Очевидно, что $\alpha>\alpha r_1(\alpha)$, поэтому короткие отезки разбиения $Til_k(\alpha)$ станут длинными отрезками разбиения $Til_{k+1}(\alpha)$, т.е. $l_{k+1}(\alpha)=s_k(\alpha)$, а короткие отрезки $s_{k+1}(\alpha)=l_k(\alpha)-s_k(\alpha)$.

Аналитические выражения для $l_{k+1}(\alpha)$ и $s_{k+1}(\alpha)$ будут следующими:

$$l_{k+1}(\alpha)=\alpha=\|\alpha Q_0(\alpha)\|-(k+2-q_1(\alpha))\,\|\alpha Q_1(\alpha)\|;$$

$$s_{k+1}(\alpha)=1-\alpha q_1(\alpha)=\|\alpha Q_{-1}(\alpha)\|-q_1(\alpha)\|\alpha Q_0(\alpha)\|=\|\alpha Q_1(\alpha)\|,$$

т.к. при любых $i\geqslant 1$ справедливо равенство

$$\|\alpha Q_i(\alpha)\|=\|\alpha Q_{i-2}(\alpha)\|-q_i(\alpha)\|\alpha Q_{i-1}(\alpha)\|. \tag{20}$$

Итак, при всех $0\leqslant m\leqslant q_1(\alpha)-1$ утверждение предложения 5 справедливо.

Предположим, что соотношения (19) верны при $m=k$, где $\sigma(n,\alpha)-1\leqslant m\leqslant \sigma(n+1,\alpha)-2$, т.е.

$$s_k(\alpha)=\|\alpha Q_n(\alpha)\|,\qquad l_k(\alpha)=\|\alpha Q_{n-1}(\alpha)\|-(k+1-\sigma(n,\alpha))\,\|\alpha Q_n(\alpha)\|$$

и докажем их справедливость при $m=k+1$.

Рассмотрим случай, когда $\sigma(n,\alpha)-1\leqslant m\leqslant\sigma(n+1,\alpha)-3$, где $q_{n+1}(\alpha)\geqslant 3$. Так как при любом $i\geqslant 1$ справедливо равенство (20), то внутри отрезка $l_k(\alpha)$ точно уместится еще не менее двух отрезков $s_k(\alpha)$, поэтому $s_{k+1}(\alpha)=\|\alpha Q_n(\alpha)\|$, а

$$l_{k+1}(\alpha)=l_k(\alpha)-s_k(\alpha)=\|\alpha Q_{n-1}(\alpha)\|-(k+2-\sigma(n,\alpha))\,\|\alpha Q_n(\alpha)\|.$$

В случае, когда $k=\sigma(n+1,\alpha)-2$, после выполнения преобразования B над над разбиением $Til_k(\alpha)$, все короткие отрезки разбиения $Til_k(\alpha)$ станут длинными отрезками разбиения $Til_{k+1}(\alpha)$, а короткие будут равны разности длин $l_k(\alpha)$ и $s_k(\alpha)$, т. е.

$$l_{k+1}(\alpha)=\|\alpha Q_n(\alpha)\|=\|\alpha Q_n(\alpha)\|-(k+2-\sigma(n+1,\alpha))\,\|\alpha Q_{n+1}(\alpha)\|,$$

а

$$s_{k+1}(\alpha)=\|\alpha Q_{n-1}(\alpha)\|-q_{n+1}(\alpha)\|\alpha Q_n(\alpha)\|=\|\alpha Q_{n+1}(\alpha)\|,$$

в силу равенства (20).

Таким образом, утверждение предложения 5 справедливо при любых m.

Подсчитать количество $S_m(\alpha)$ коротких $s_m(\alpha)$ и $L_m(\alpha)$ длинных $l_m(\alpha)$ отрезков разбиения $Til_m(\alpha)$ можно, воспользовавшись следующим предложением.

Предложение 6. *Если* $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 2$, *то*

$$S_m(\alpha) = m + 1, \qquad L_m(\alpha) = 1; \tag{21}$$

если $\sigma(n,\alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(n+1,\alpha) - 2$,

$$S_m(\alpha) = Q_{n-1}(\alpha) + (m + 1 - \sigma(n,\alpha))\, Q_n(\alpha), \qquad L_m(\alpha) = Q_n(\alpha). \tag{22}$$

Доказательство. Разбиение $Til_0(\alpha)$ состоит из одного короткого и одного длинного отрезков, поэтому равенства (21) верны при $m = 0$.

Предположим, что формулы (21) верны при $m = k$, где $0 \leqslant k \leqslant q_1(\alpha) - 3$ и $q_1(\alpha) \geqslant 3$, т.е. $S_k(\alpha) = k + 1$, $L_k(\alpha) = 1$. Докажем справедливость равенств (21) при $m = k + 1$.

По условию единичный отрезок состоит из $q_1(\alpha)$ отрезков длины α и еще одного, длина которого меньше α. Согласно предположению индукции разбиение $Til_k(\alpha)$ содержит $k+1$ отрезков длины α и одного отрезка длины $1-(k+1)\alpha$. При выполнении преобразования B число коротких увеличится на один, а длинных останется тем же, т.е. $S_{k+1}(\alpha) = S_k(\alpha) + 1 = k + 2$, $L_{k+1}(\alpha) = L_k(\alpha) = 1$.

Если же $m = k$, где $k = q_1(\alpha) - 2$, то $k + 1 = q_1(\alpha) - 1$. При выполении преобразования B над разбиением $Til_k(\alpha)$, имеющем $S_k(\alpha) = q_1(\alpha) - 1$ коротких и $L_k(\alpha) = 1$ длинных отрезков, все короткие отрезки разбиения $Til_k(\alpha)$ и еще один станут длинными отрезками разбиения $Til_{k+1}(\alpha)$, т.е. $L_{k+1}(\alpha) = S_k(\alpha) + 1 = q_1(\alpha) = Q_1(\alpha)$, а оставшийся отрезок будет коротким, т.е.

$$S_{k+1}(\alpha) = 1 = Q_0(\alpha) + (q_1(\alpha) - q_1(\alpha))\, Q_1(\alpha) = Q_0(\alpha) + (k + 2 - q_1(\alpha))\, Q_1(\alpha).$$

Это означает, что утверждение предложения 6 верно при всех $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 1$.

Предположим, что равенства (22) справедливы при $m = k$, где $\sigma(n,\alpha) - 1 \leqslant k \leqslant \sigma(n+1,\alpha) - 3$ и $q_{n+1}(\alpha) \geqslant 3$. При данных условиях $l_k(\alpha) > 2s_k(\alpha)$, поэтому при выполнении преобразования B число коротких отрезков $S_k(\alpha)$ увеличится на количество длинных $L_k(\alpha)$, т.е.

$$S_{k+1}(\alpha) = S_k(\alpha) + L_k(\alpha) = Q_{n-1}(\alpha) + (k + 2 - \sigma(n,\alpha))\, Q_n(\alpha),$$

а число длинных отрезков остается прежним, т.е. $L_{k+1}(\alpha) = L_k(\alpha) = Q_n(\alpha)$.

В случае $m = k = \sigma(n,\alpha) - 2$, после выполнения преобразования B все короткие отрезки разбиения $Til_k(\alpha)$ и еще $L_k(\alpha)$ отрезков станут длинными отрезками разбиения $Til_{k+1}(\alpha)$, а оставшиеся отрезки — короткими, т.е. $L_{k+1}(\alpha) = S_k(\alpha) + L_k(\alpha) = Q_{n-1}(\alpha) + q_{n+1}(\alpha)Q_n(\alpha)$, а $S_{k+1}(\alpha) = L_k(\alpha) = Q_n(\alpha) = Q_n(\alpha) + (k + 2 - \sigma(n,\alpha))\, Q_{n+1}(\alpha)$.

Это означает, что утверждение предложения 6 справедливо при любых m.

Найдем координаты концов отрезков разбиения $Til_m(\alpha)$.

Предложение 7. *Отрезки разбиения* $Til_m(\alpha)$ *имеют координаты* $[\{a\alpha\}\,;\{b\alpha\}]$, *где*

$$a = i, \qquad 0 \leqslant i \leqslant L_m(\alpha) + S_m(\alpha) - 1; \tag{23}$$

при $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 2$:

$$\begin{array}{ll} b = i + 1, & 0 \leqslant i \leqslant m, \\ b = 0, & i = m + 1; \end{array} \tag{24}$$

при $\sigma(2n-1,\alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n,\alpha) - 2$

$$\begin{array}{ll} b = i + S_m(\alpha), & 0 \leqslant i \leqslant L_m(\alpha) - 1, \\ b = i - L_m(\alpha), & L_m(\alpha) \leqslant i \leqslant L_m(\alpha) + S_m(\alpha) - 1; \end{array} \tag{25}$$

при $\sigma(2n,\alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1,\alpha) - 2$

$$\begin{array}{ll} b = i + L_m(\alpha), & 0 \leqslant i \leqslant S_m(\alpha) - 1, \\ b = i - S_m(\alpha), & S_m(\alpha) \leqslant i \leqslant L_m(\alpha) + S_m(\alpha) - 1; \end{array} \tag{26}$$

Если $b = 0$, *то считаем, что* $\{0 \cdot \alpha\} = 1$.

Доказательство. Вначале покажем, что координаты концов отрезков разбиения $Til_0(\alpha)$ удовлетворяют формулам (23) и (24). Разбиение $Til_0(\alpha)$ состоит из одного короткого $s_0(\alpha)$ и одного длинного $l_0(\alpha)$ отрезков, идущих слева направо. Следовательно, их координаты будут $[0; 0+s_0(\alpha)] = [\{0\alpha\}; \{1\alpha\}]$ и $[0+s_0(\alpha); 0+s_0(\alpha)+l_0(\alpha)] = [\{1\alpha\}; \{0\alpha\}]$. Это означает, что при $m = 0$ формулы (23) и (24) верны.

Предположим, что данные формулы справедливы при $m = k$, где $0 \leqslant k \leqslant q_1(\alpha) - 3$, т.е. разбиение $Til_k(\alpha)$ состоит из отрезков $[\{0\alpha\}; \{1\alpha\}]$, $[\{1\alpha\}; \{2\alpha\}], \ldots, [\{k\alpha\}; \{(k+1)\alpha\}]$ и $[\{(k+1)\alpha\}; \{0\alpha\}]$.

Найдем координаты отрезков разбиения $Til_{k+1}(\alpha)$, полученного из разбиения $Til_k(\alpha)$, выполнением преобразования B_1. При этом все отезки, кроме последнего, останутся прежними. Действительно, если при всех $0 \leqslant i \leqslant k$ от точки $\{i\alpha\}$ вправо отложить отрезок длиной α, то получим точку $\{i\alpha\} + \alpha = \{(i+1)\alpha\}$, т.к. при данных условиях $\alpha \leqslant (i+1)\alpha \leqslant (k+1)\alpha \leqslant (q_1(\alpha) - 2)\,\alpha < 1$.

Последний из отрезков $[\{(k+1)\alpha\}; \{0\alpha\}]$ при выпонении этого преобразования разобьется на два $[\{(k+1)\alpha\}; \{(k+2)\alpha\}]$ и $[\{(k+2)\alpha\}; \{0\alpha\}]$, т.к. $2\alpha \leqslant (k+2)\alpha \leqslant (q_1(\alpha) - 1)\,\alpha < 1$.

Итак, при $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 3$ утверждение предложения 7 справедливо.

В случае $m = k = q_1(\alpha) - 2$ отрезки разбиения $Til_k(\alpha)$ имеют координаты

$$[\{0\alpha\}; \{1\alpha\}], [\{1\alpha\}; \{2\alpha\}], \ldots, [\{(q_1(\alpha) - 2)\,\alpha\}; \{(q_1(\alpha) - 1)\,\alpha\}], [\{(q_1(\alpha) - 1)\,\alpha\}; \{0\alpha\}],$$

длины которых $s_k(\alpha) = \alpha$, $l_k(\alpha) = 1 - (q_1(\alpha) - 1)\,\alpha$.

После выполнения преобразования B_1 все отрезки, кроме последнего, останутся такими же. Действительно, по условию $\alpha \leqslant (i+1)\alpha \leqslant (k+1)\alpha \leqslant (q_1(\alpha) - 1)\,\alpha < 1$, поэтому $[\{i\alpha\}; \{i\alpha\} + \alpha] = [\{i\alpha\}; \{(i+\ \ +1)\alpha\}]$, а последний из отрезков $[\{(q_1(\alpha) - 1)\,\alpha\}; \{0\alpha\}]$ распадется на два $[\{(q_1(\alpha) - 1)\,\alpha\}; \{q_1(\alpha)\alpha\}]$ и $[\{q_1(\alpha)\alpha\}; \{0\alpha\}]$.

Таким образом, координаты отрезков $[\{a\alpha\}; \{b\alpha\}]$ разбиения $Til_{k+1}(\alpha)$ удовлетворяют соотношениям (23) и (25).

Итак, предложение 7 справедливо при всех $1 \leqslant k \leqslant q_1(\alpha) - 1$.

Допустим, что равенства (23) и (25) справедливы при $m = k$, где

$$\sigma(2n-1, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n, \alpha) - 3,$$

т. е. разбиение $Til_k(\alpha)$ состоит из отрезков, координаты которых

$$\begin{array}{ll} [\{i\alpha\}; \{(i + S_k(\alpha))\,\alpha\}], & 0 \leqslant i \leqslant L_k(\alpha) - 1, \\ [\{i\alpha\}; \{(i - L_k(\alpha))\,\alpha\}], & L_k(\alpha) \leqslant i \leqslant L_k(\alpha) + S_k(\alpha) - 1. \end{array}$$

Отложив от правых концов отрезков $[\{i\alpha\}; \{(i + S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ отрезок длиной

$$s_k(\alpha) = \|\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\|,$$

получим точки с координатами

$$\{(i + S_k(\alpha))\,\alpha\} - s_k(\alpha) =$$

$$= \{(i + Q_{2n-2}(\alpha) + (k + 1 - \sigma(2n-1, \alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha))\,\alpha\} + \{\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\} - 1 =$$

$$= \{(i + Q_{2n-2}(\alpha) + (k + 2 - \sigma(2n-1, \alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha))\,\alpha\} = \{(i + S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\},$$

т.к.

$$\|\alpha Q_n(\alpha)\| = \begin{cases} \{\alpha Q_n(\alpha)\}, & \text{если} \quad n - \text{четное}, \\ 1 - \{\alpha Q_n(\alpha)\}, & \text{если} \quad n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Это означает, что каждый из отрезков $[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ разделился на отрезки $[\{i\alpha\}\,;$ $\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$ и $[\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,;\ \ \{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$. Обозначим $i+S_{k+1}(\alpha)=j$, тогда

$$S_{k+1}(\alpha)-S_k(\alpha)=Q_{2n-2}(\alpha)+(k+2-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha)-(Q_{2n-2}(\alpha)+$$

$$+\,(k+1-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha))=Q_{2n-1}(\alpha)=L_k(\alpha)=L_{k+1}(\alpha).$$

Значит $[\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]=[\{j\alpha\}\,;\{(j-L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$, где

$$S_{k+1}(\alpha)\leqslant j\leqslant L_{k+1}(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)-1.$$

Отложим отрезок длиной $s_k(\alpha)=\|\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\|$ от точки $\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}$ и получим новую точку

$$\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}-\|\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\|=\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}-(1-\{\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\})=$$
$$=\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}+\{\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\}-1=\{(i-L_k(\alpha)+Q_{2n-1}(\alpha))\,\alpha\}=\{i\alpha\}\,.$$

Это означает, что разбиение $Til_{k+1}(\alpha)$ состоит из отрезков:

$$\begin{array}{ll}[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)-1,\\ [\{i\alpha\}\,;\{(i-L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & L_{k+1}(\alpha)\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)-1.\end{array}$$

Теперь предположим, что соотношения (23) и (25) справедливы при $m=k$, где $k=$ $=\sigma(2n,\alpha)-2$, т. е. разбиение $Til_k(\alpha)$ — это объединение отрезков

$$\begin{array}{ll}[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0\leqslant i\leqslant L_k(\alpha)-1,\\ [\{i\alpha\}\,;\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & L_k(\alpha)\leqslant i\leqslant L_k(\alpha)+S_k(\alpha)-1.\end{array}$$

После выполнения перобразования B_2 получится новое разбиение $Til_{k+1}(\alpha)$, при котором каждый из отрезков $[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ разделится на два отрезка точкой

$$\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}-s_k(\alpha)=\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}-\|\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\|=$$

$$=\{(i+Q_{2n-2}(\alpha)+(\sigma(2n,\alpha)-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha))\,\alpha\}=$$
$$=\{(i+Q_{2n}(\alpha))\,\alpha\}=\{(i+L_{k+1}(\alpha)(\alpha))\,\alpha\}\,.$$

Это означает, что отрезок $[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ распадается на два отрезка $[\{i\alpha\}\,;$ $\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$ и $[\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$, где $0\leqslant i\leqslant S_{k+1}(\alpha)-1$. Обозначим $i+L_{k+1}(\alpha)=j$, тогда

$$L_{k+1}(\alpha)-S_k(\alpha)=Q_{2n}(\alpha)-(Q_{2n-2}(\alpha)+(\sigma(2n,\alpha)-1-$$

$$-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha))=Q_{2n}(\alpha)-(Q_{2n-2}(\alpha)+(q_{2n}(\alpha)-1)\,Q_{2n-1}(\alpha))=$$
$$=Q_{2n-1}(\alpha)=S_{2n}(\alpha)=S_{k+1}(\alpha).$$

Итак, отрезок $[\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,;\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ может быть записан как $[\{j\alpha\}\,;\{(j-$ $S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$, где $L_{k+1}(\alpha)\leqslant j\leqslant S_{k+1}(\alpha)+L_{k+1}(\alpha)-1$.

Все остальные отрезки $[\{i\alpha\}\,;\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}]$ при выполнении преобразования B_2 перейдут сами в себя и их координаты можно записать как $[\{i\alpha\}\,;\{(i-S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$, где $S_{k+1}(\alpha)\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)-1$. Действительно,

$$\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}-s_k(\alpha)=\{(i-L_k(\alpha))\,\alpha\}-\|\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\|=$$

$$=\{(i-Q_{2n-1}(\alpha))\,\alpha\}-(1-\{\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\})=\{(i-Q_{2n-1}(\alpha))\,\alpha\}+$$
$$+\{\alpha Q_{2n-1}(\alpha)\}-1=\{i\alpha\}\,,$$

т.к. $L_k(\alpha) = Q_{2n-1}(\alpha) = S_{2n}(\alpha) = S_{k+1}(\alpha)$ и

$$S_k(\alpha) + L_k(\alpha) = Q_{2n-2}(\alpha) + (k+1-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha) + Q_{2n-1}(\alpha) =$$

$$= Q_{2n-2}(\alpha) + (k+2-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n-1}(\alpha) = S_{2n}(\alpha) = S_{k+1}(\alpha).$$

Итак, разбиение $Til_{k+1}(\alpha)$ состоит из отрезков

$$\begin{array}{ll} [\{i\alpha\};\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0 \leqslant i \leqslant S_{k+1}(\alpha)-1, \\ [\{i\alpha\};\{(i-S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & S_{k+1}(\alpha) \leqslant i \leqslant L_{k+1}(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)-1. \end{array}$$

Следовательно, предложение 7 справедиво при $m = \sigma(2n,\alpha)-1$.

Теперь предположим, что соотношения (23) и (26) верны при $m = k$, где

$$\sigma(2n,\alpha)-1 \leqslant k \leqslant \sigma(2n+1,\alpha)-3,$$

т. е. разбиение $Til_k(\alpha)$ состоит из отрезков

$$\begin{array}{ll} [\{i\alpha\};\{(i+L_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0 \leqslant i \leqslant S_k(\alpha)-1, \\ [\{i\alpha\};\{(i-S_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & S_k(\alpha) \leqslant i \leqslant L_k(\alpha)+S_k(\alpha)-1. \end{array}$$

Отложив от левых концов отрезков $[\{i\alpha\};\{(i+L_k(\alpha))\,\alpha\}]$, где $0 \leqslant i \leqslant S_k(\alpha)-1$, отрезок длиной $s_k(\alpha)$, получим точку с координатой

$$\{i\alpha\} + s_k(\alpha) = \{i\alpha\} + \|\alpha Q_{2n}(\alpha)\| = \{(i+Q_{2n}(\alpha))\,\alpha\} = \{(i+L_{k+1}(\alpha)(\alpha))\,\alpha\}\,.$$

Выполним такое же преобразование с отрезком $[\{i\alpha\};\{(i-S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ и получим два отрезка, разделенных точкой $\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}$, т.е. отрезки $[\{i\alpha\};\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$ и $[\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\};\{(i-S_k(\alpha))\,\alpha\}]$, где $S_k(\alpha) \leqslant i \leqslant L_k(\alpha)+S_k(\alpha)-1$.

Обозначив $i + L_{k+1}(\alpha) = j$, получим

$$L_{k+1}(\alpha) + S_k(\alpha) = Q_{2n}(\alpha) + Q_{2n-1}(\alpha) + (k+1-\sigma(2n,\alpha))\,Q_{2n}(\alpha) =$$

$$= Q_{2n-1}(\alpha) + (k+2-\sigma(2n,\alpha))\,Q_{2n}(\alpha) = S_{k+1}(\alpha),$$

кроме того $L_k(\alpha) + S_k(\alpha) = L_{k+1}(\alpha) + S_k(\alpha) = S_{k+1}(\alpha)$. Следовательно, разбиение $Til_{k+1}(\alpha)$ состоит из отрезков

$$\begin{array}{ll} [\{i\alpha\};\{(i+L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0 \leqslant i \leqslant S_{k+1}(\alpha)-1, \\ [\{i\alpha\};\{(i-S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & S_{k+1}(\alpha) \leqslant i \leqslant L_{k+1}(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)-1. \end{array}$$

Предположим, что формулы (23) и (26) справедливы при $m = k$, где $k = \sigma(2n-1,\alpha)-2$, т.е. разбиение $Til_k(\alpha)$ состоит из отрезков

$$\begin{array}{ll} [\{i\alpha\};\{(i+L_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0 \leqslant i \leqslant S_k(\alpha)-1, \\ [\{i\alpha\};\{(i+S_k(\alpha))\,\alpha\}]\,, & S_k(\alpha) \leqslant i \leqslant L_k(\alpha)+S_k(\alpha)-1. \end{array}$$

Отложим от левого конца отрезка $[\{i\alpha\};\{(i+L_k(\alpha))\,\alpha\}]$ отрезок длиной $s_k(\alpha) = \|\alpha Q_{2n}(\alpha)\|$ и получим точку

$$\{i\alpha\} + s_k(\alpha) = \{i\alpha\} + \|\alpha Q_{2n}(\alpha)\| = \{(i+Q_{2n}(\alpha))\,\alpha\} = \{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,,$$

т.к.

$$S_{k+1}(\alpha) = Q_{2n}(\alpha) + (\sigma(2n+1,\alpha)-\sigma(2n+1,\alpha))\,Q_{2n+1}(\alpha) = L_k(\alpha).$$

Следовательно, каждый из отрезков $[\{i\alpha\}\,;\{(i+L_k(\alpha))\,\alpha\}]$ совпадает с одним из отрезков $[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$, где $0\leqslant i\leqslant S_k(\alpha)-1$.

Выполнив с отрезком $[\{i\alpha\}\,;\{(i-S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ такое же преобразование, получим два отрезка $[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$ и $[\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}\,;\ \{(i-S_k(\alpha))\,\alpha\}]$. Обозначив $j=i+S_{k+1}(\alpha)$, и зная, что

$$S_k(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)=S_k(\alpha)+L_k(\alpha)=$$

$$=Q_{2n-1}(\alpha)+(\sigma(2n,\alpha)-1-\sigma(2n-1,\alpha))\,Q_{2n}(\alpha)+Q_{2n}(\alpha)=$$

$$=Q_{2n-1}(\alpha)+q_{2n+1}(\alpha)Q_{2n}(\alpha)=Q_{2n+1}(\alpha)=L_{k+1}(\alpha),$$

приходим к выводу, что каждый из отрезков $[\{i\alpha\}\,;\{(i-S_k(\alpha))\,\alpha\}]$ распадется на отрезки $[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$, где $S_k(\alpha)\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)-1$, и $[\{i\alpha\}\,;\{(i-L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]$, где $L_{k+1}(\alpha)\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)-1$.

В итоге получаем, что разбиение $Til_{k+1}(\alpha)$ состоит из отрезков

$$\begin{array}{ll}[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & 0\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)-1,\\ [\{i\alpha\}\,;\{(i-L_{k+1}(\alpha))\,\alpha\}]\,, & L_{k+1}(\alpha)\leqslant i\leqslant L_{k+1}(\alpha)+S_{k+1}(\alpha)-1.\end{array}$$

Таким образом, формулы (23) и (26) справедливы при $m=\sigma(2n-1,\alpha)-1$.

Предложение 7 полностью доказано.

Отметим, что рассмотренные нами разбиения $Til_m(\alpha)$ впервые были определены другим способом в работе [33] при изучении проблемы Гекке–Кестена, заключающейся в получении явных оценок остаточного члена проблемы равномерного распределения дробных долей линейной функции для множеств, на которых данный остаточный член имеет порядок $O(1)$ (множествах ограниченного остатка). Данные разбиения известны как модифицированные разбиения Фибоначчи. Дополнительную информацию об их приложениях к изучению распределения дробных долей линейной функции можно найти в работах [26], [5]. В работе [31] данные разбиения использовались для изучения так называемой последовательности Штурма.

Построенные нами разбиения также тесно связаны с так называемой гипотезой Штейнгауза, утверждаюшей, что для любого целого N и иррационального α точки $\{i\alpha\}$, $1\leq i\leq N$ разбивают интервал $(0;1)$ на отрезки либо двух, либо трех различных длин [4]. Можно показать, что разбиния $Til_m(\alpha)$ в точности соответствуют случаю, когда различных длин ровно две.

В частных случаях $\alpha=\tau$ и $\alpha=\tau_g$ разбиения, получаемые сдвигом разбиений $Til_m(\alpha)$ впервые были введены в работах [15] и [21] соответственно.

5. Отображения первого возвращения

Выясним, в какие отрезки переходят отрезки разбиения $Til_m(\alpha)$ при сдвиге на α вдоль окружности единичной длины.

Разбиение $Til_m(\alpha)$ состоит из $L_m(\alpha)$ длинных и $S_m(\alpha)$ коротких отрезков, координаты которых определяются предложением 7. Используя это предложение, зададим на множествах длинных и коротких отрезков разбиения $Til_m(\alpha)$ некоторые нумерации и обозначим L^m_j и S^m_j, соответственно, j-й длинный и j-й короткий отрезки разбиения $Til_m(\alpha)$ относительно вводимых нумераций.

При $0\leqslant m\leqslant q_1(\alpha)-2$ короткие отрезки разбиения $Til_m(\alpha)$ имеют координаты $[\{i\alpha\}\,;\{(i+1)\,\alpha\}]$, где $0\leqslant i\leqslant m$, а длинный $[\{(m+1)\,\alpha\}\,;\{0\alpha\}]=[\{(m+1)\,\alpha\}\,;1]$. Пусть $j=i+1$, тогда $i=j-1$, где $1\leqslant j\leqslant m+1$, $S^m_j=[\{(j-1)\,\alpha\}\,;\{j\alpha\}]$ при $1\leqslant j\leqslant m+1$; $L^m_1=[\{(m+1)\,\alpha\}\,;1]$.

При $\sigma(2n-1,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n,\alpha)-2$ длинные отрезки — это

$$[\{i\alpha\}\,;\{(i+S_m(\alpha))\,\alpha\}]\,,$$

где $0 \leqslant i \leqslant L_m(\alpha)-1$, а короткие отрезки — это

$$[\{i\alpha\}\,;\{(i-L_m(\alpha))\,\alpha\}]\,,$$

где $L_m(\alpha) \leqslant i \leqslant L_m(\alpha)+S_m(\alpha)-1$.

Для того, чтобы перенумеровать длинные отрезки, положим $j=i+1$, тогда

$$L_j^m = [\{(j-1)\,\alpha\}\,;\{(j+S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]\,,$$

где $1 \leqslant j \leqslant L_m(\alpha)$. Если же отрезки короткие, то положив $j=i-L_m(\alpha)+1$, получим

$$S_j^m = [\{(j+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(j-1)\,\alpha\}]\,,$$

где $1 \leqslant j \leqslant S_m(\alpha)$.

Итак, при $\sigma(2n-1,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n,\alpha)-2$

$$L_j^m = [\{(j-1)\,\alpha\}\,;\{(j+S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant j \leqslant L_m(\alpha);$$

$$S_j^m = [\{(j+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(j-1)\,\alpha\}]\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant j \leqslant S_m(\alpha).$$

При $\sigma(2n,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1,\alpha)-2$ отрезки $[\{i\alpha\}\,;\{(i+L_m(\alpha))\,\alpha\}]$, где $0 \leqslant i \leqslant S_m(\alpha)-1$, являются короткими, а отрезки $[\{i\alpha\}\,;\{(i-S_m(\alpha))\,\alpha\}]$, где $S_m(\alpha) \leqslant i \leqslant L_m(\alpha)+S_m(\alpha)-1$, — длинными.

Положим $j=i+1$, чтобы перенумеровать короткие отрезки, тогда $S_j^m = [\{(j-1)\,\alpha\}\,;\{(j+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$, где $1 \leqslant j \leqslant S_m(\alpha)$. В случае длинных отрезков обозначим $j=i-S_m(\alpha)+1$, тогда $L_j^m = [\{(j+S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(j-1)\,\alpha\}]$, где $1 \leqslant j \leqslant L_m(\alpha)$.

Таким образом, при $\sigma(2n,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1,\alpha)-2$

$$S_j^m = [\{(j-1)\,\alpha\}\,;\{(j+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant j \leqslant S_m(\alpha);$$

$$L_j^m = [\{(j+S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(j-1)\,\alpha\}]\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant j \leqslant L_m(\alpha).$$

Сдвинем все отрезки разбиения $Til_m(\alpha)$ на α.

Предложение 8. *При сдвиге α отрезок L_j^m, где $1 \leqslant j \leqslant L_m(\alpha)-1$, перейдет в отрезок L_{j+1}^m, отрезок S_j^m, где $1 \leqslant j \leqslant S_m(\alpha)-1$, — в отрезок S_{j+1}^m, а объединение отрезков $S_{S_m(\alpha)}^m$ и $L_{L_m(\alpha)}^m$ в объединение отрезков S_1^m и L_1^m, причем порядок следования отрезков поменяется.*

Доказательство. Очевидно, что отрезки L_j^m, где $1 \leqslant j \leqslant L_m(\alpha)-1$, и S_j^m, где $1 \leqslant j \leqslant S_m(\alpha)-1$, при сдвиге на α перейдут в отрезки L_{j+1}^m и S_{j+1}^m, соответственно.

Теперь убедимся, что $L_{L_m(\alpha)}^m \cup S_{S_m(\alpha)}^m$ перейдет в $S_1^m \cup L_1^m$. Рассмотрим различные случаи.

Если $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha)-2$, то $S_{S_m(\alpha)}^m = [\{m\alpha\}\,;\{(m+1)\alpha\}]$ и $L_{L_m(\alpha)}^m = [\{(m+1)\alpha\}\,;1]$, а следовательно, $S_{S_m(\alpha)}^m \cup L_{L_m(\alpha)}^m = [\{m\alpha\}\,;1]$.

При сдвиге на α вдоль единичной окружности отрезок $[\{m\alpha\}\,;1]$ перейдет в отрезок $[\{(m+1)\alpha\}\,;\alpha]$, состоящий из двух отрезков $[\{(m+1)\alpha\}\,;1]$ и $[0;\alpha]$, которые совпадают с отрезками $S_1^m=[0;\alpha]$ и $L_1^m = [\{(m+1)\alpha\}\,;1]$.

Если $\sigma(2n-1,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n,\alpha)-2$, то отрезки $S_{S_m(\alpha)}^m$ и $L_{L_m(\alpha)}^m$ имеют координаты $[\{(S_m(\alpha)+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$ и $[\{(L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(S_m(\alpha)+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$, соответственно, а их объединение — это отрезок $[\{(L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$. Выполнив сдвиг на α, получим отрезок $[\{L_m(\alpha)\alpha\}\,;\{S_m(\alpha)\alpha\}]$, состоящий из отрезков $S_1^m = [\{L_m(\alpha)\alpha\}\,;1]$ и $L_1^m = [0;\{S_m(\alpha)\alpha\}]$.

Если $\sigma(2n,\alpha)-1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1,\alpha)-2$, то отрезки $S^m_{S_m(\alpha)}$ и $L^m_{L_m(\alpha)}$ — это отрезки $[\{(S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(S_m(\alpha)+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$ и $[\{(S_m(\alpha)+L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$, соответственно. При сдвиге на α объединение этих отрезков $[\{(S_m(\alpha)-1)\,\alpha\}\,;\{(L_m(\alpha)-1)\,\alpha\}]$ переходит в отрезок $[\{S_m(\alpha)\alpha\}\,;\{L_m(\alpha)\alpha\}]$, являющийся объединением отрезков

$$L_1^m = [\{S_m(\alpha)\alpha\}\,;1]$$

и

$$S_1^m = [0;\{L_m(\alpha)\alpha\}]\,.$$

Итак, объединение отрезков $S^m_{S_m(\alpha)} \cup L^m_{L_m(\alpha)}$ при сдвиге на α переходит в $L_1^m \cup S_1^m$, причем порядок следования отрезков меняется.

Пусть точка x принадлежит полуинтервалу $[0;1)$. Рассмотрим преобразование R_α, переводящее точку x в точку $\{x+\alpha\}$, т.е.

$$R_\alpha:\; x \to \{x+\alpha\}.$$

Выберем отрезок $I \subset [0;1)$. Предположим, что $x \in I$ и точка $\{x+k\alpha\}$, где $k \in \mathbb{N}$, первый раз попадает в I. Преобразование $x \to \{x+k\alpha\}$ назовем отображением первого возвращения и обозначим $d_I R_\alpha$.

Пусть имеется разбиение $Til_m(\alpha)$ отрезка $[0;1]$. В предложении 8 нами доказано, что после выполнения отображения первого возвращения $d_{I^m} R_\alpha$ над отрезком $I^m = L_1^m \cup S_1^m$, составляющие его отрезки S_1^m и L_1^m поменяются местами. Это означает, что данное отображение первого возвращения изоморфно сдвигу

$$R_{d^m\alpha} : x \to \{x + d^m\alpha\}$$

для некоторого $d^m\alpha$. Отображения первого возвращения для сдвига R_α были изучены в работе [32]. Там же было проведено вычисление всех $d^m\alpha$. В частности, в данной работе было показано, что при $m=1$ данное определение $d^1\alpha$ эквивалентно определению, использованному нами ранее. Также были доказаны следующие формулы

$$d^m\alpha = \begin{cases} \frac{s_m(\alpha)}{s_m(\alpha)+l_m(\alpha)}, & \text{если справа от нуля короткий отрезок,} \\ \frac{l_m(\alpha)}{s_m(\alpha)+l_m(\alpha)}, & \text{если справа от нуля длинный отрезок} \end{cases} \tag{27}$$

и

$$d^{m+1}\alpha = d^m\left(d^1\alpha\right) = d^1\left(d^m\alpha\right).$$

6. Основной результат

Рассмотрим иррациональное $\alpha \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$, разложение которого в цепную дробь имеет вид

$$\alpha = [0; q_1(\alpha), q_2(\alpha), q_3(\alpha), \ldots),$$

где $q_1(\alpha) \geqslant 2$. Тогда $1-\alpha$ раскладывается в следующую цепную дробь

$$1-\alpha = [0; 1, q_1(\alpha), q_2(\alpha), q_3(\alpha), \ldots)$$

и при всех $i \geqslant 1$ справедливо равенство

$$Q_i(1-\alpha) = Q_{i-1}(\alpha). \tag{28}$$

Разложение натурального числа n в системе счисления $Q_i(\alpha)$, где $\alpha < \frac{1}{2}$, имеет вид (10), а в системе счисления $Q_i(1-\alpha)$

$$n = \sum_{i=1}^{k+1} z'_i(n) Q_i(1-\alpha), \tag{29}$$

где $z'_1(n) \leqslant q_1(\alpha) - 1$, а $z'_i(n) \leqslant q_i(\alpha)$ при $i \geqslant 2$.

В силу равенства (10) при всех $i \geqslant 1$ справедливо тождество $z'_i(n) = z_{i-1}(n)$.

Заменим $z_0(n)$ набором из $q_1(\alpha)-1$ нулей и единиц, причем сначала идут $q_1(\alpha)-z_0(n)-1$ нулей, а затем $z_0(n)$ единиц. Каждое $z_i(n)$, где $i \geqslant 1$, также заменим набором из $q_{i+1}(\alpha)$ нулей и единиц, где вначале идут $q_{i+1}(\alpha) - z_i(n)$ нулей, а затем $z_i(n)$ единиц. Выстроим все наборы нулей и единиц, соответствующих $z_i(n)$ в порядке возрастания номера i и перенумеруем полученные числа $\varepsilon_0(n)$, $\varepsilon_1(n)$, …, $\varepsilon_s(n)$, где $s = \sigma(k+1,\alpha) - 2$. В таком случае разложение (10) числа n в системе счисления $Q_i(\alpha)$, где $\alpha < \frac{1}{2}$, примет вид

$$n = \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_i(n) Q'_i(\alpha), \tag{30}$$

где $Q'_i(\alpha) = Q_0(\alpha)$ при $0 \leqslant i \leqslant q_i(\alpha) - 1$, $Q'_i(\alpha) = Q_j(\alpha)$ при $\sigma(j,\alpha) \leqslant i \leqslant \sigma(j+1,\alpha) - 1$.

Проведем аналогичные операции со всеми наборами $z'_i(n)$ в разложении (29) и получим

$$n = \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_i(n) Q'_i(1-\alpha), \tag{31}$$

где $s = \sigma(k+1,\alpha) - 2$, $Q'_i(1-\alpha) = Q_1(1-\alpha)$, если $0 \leqslant i \leqslant q_i(\alpha) - 1$, $Q'_i(1-\alpha) = Q_j(1-\alpha)$, если $\sigma(j-1,\alpha) \leqslant i \leqslant \sigma(j,\alpha) - 1$.

В силу равенства (28) разложения (30) и (31) полностью совпадают.

Обозначим через $\varepsilon_i(\alpha, n)$ коэффициенты разложения (30) числа n в системе счисления α.

Если стереть $\varepsilon_0(\alpha,n)$, а все остальные $\varepsilon_i(\alpha,n)$, где $i \geqslant 1$, оставить без изменения, то получим корректную запись разложения некоторого натурального числа $\overleftarrow{n}$ в системе счисления $d^1\alpha$. При стирании еще одной цифры $\varepsilon_1(\alpha,n)$ в разложении (30) получим разложение числа $\overleftarrow{n}^2$ в системе счисления $d^1\left(d^1\alpha\right) = d^2\alpha$. Продолжая стирать цифры в разложении (30), всего $l+1$ цифр, получим разложение числа $\overleftarrow{n}^{l+1}$ в системе счисления $d^{l+1}\alpha$, причем при всех $j \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\varepsilon_j\left(d^{m+1}\alpha, \overleftarrow{n}^{m+1}\right) = \varepsilon_{j+m+1}(\alpha, n). \tag{32}$$

Пусть все $\varepsilon_0(\alpha,n)$, $\varepsilon_1(\alpha,n)$, …, $\varepsilon_l(\alpha,n)$ в разложении (30) будут фиксированными: $\varepsilon_0(\alpha,n) = \varepsilon_0, \varepsilon_1(\alpha,n) = \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l(\alpha,n) = \varepsilon_l$. Обозначим через $\mathbb{F}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$ множество таких чисел, т.е. $\mathbb{F}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l) = \{n : \varepsilon_i(\alpha,n) = \varepsilon_i, \ \forall\ 0 \leqslant i \leqslant l\}$.

Определим множество

$$X(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l) = \overline{\{\chi(\alpha,n) : n \in \mathbb{F}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)\}},$$

где $\chi(\alpha,n) = \{(n+1)i_0(\alpha)\}$, а $i_0(\alpha) = \max\{\alpha; 1-\alpha\}$.

Теорема 1. *Множеству $X(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$ для допустимого при заданном α набора $(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$ соответствует в точности один отрезок разбиения $Til_l(1-i_0(\alpha))$, причем этот отрезок длинный, если $\varepsilon_l = 0$, и короткий, если $\varepsilon_l = 1$.*

Доказательство. Доказательство проведем используя метод математической индукции.

На первом шаге индукции покажем, что $X(\varepsilon_0)$ — это ровно один отрезок разбиения $Til_0(1-i_0(\alpha))$, причем при $\varepsilon_0 = 0$ — длинный, а при $\varepsilon_0 = 1$ — короткий.

Вначале будем полагать, что $\alpha < \frac{1}{2}$. Возможны два случая:

1) в разложении (10) коэффициент $z_0(n) \leqslant q_1(\alpha) - 2$, тогда в разложении (30) $\varepsilon_0 = 0$. Согласно предложению 4, справедливо неравенство (12), а значит

$$\overleftarrow{n} + \alpha < (n+1)i_0(\alpha) < \overleftarrow{n} + 1, \qquad \alpha < \{(n+1)i_0(\alpha)\} < 1,$$

и, следовательно, $\chi(\alpha, n) \in (\alpha; 1)$.

В силу равномерности распределения значений $\{(n+1)i_0(\alpha)\}$ получаем, что

$$X(\varepsilon_0 = 0) = [\alpha; 1];$$

2) если же в разложении (10) коэффициент $z_0(n) = q_1(\alpha) - 1$, то в разложении (30) $\varepsilon_0 = 1$. В таком случае воспольземся неравенством (13) из предложения 4 и получим

$$\overleftarrow{n} + 1 < (n+1)i_0(\alpha) < \overleftarrow{n} + \alpha + 1, \qquad 0 < \{(n+1)i_0(\alpha)\} < \alpha$$

и $\chi(\alpha, n) \in (0; \alpha)$. Зная, что значения $\chi(\alpha, n)$ равномерно распределены, имеем

$$X(\varepsilon_0 = 1) = [0; \alpha].$$

Итак, доказано, что если $\alpha < \frac{1}{2}$, то $X(\varepsilon_0 = 0) = [\alpha; 1]$, а $X(\varepsilon_0 = 1) = [0; \alpha]$, причем $X(\varepsilon_0 = 0)$ — длинный, а $X(\varepsilon_0 = 1)$ — короткий отрезки разбиений $Til_0\,(\alpha)$.

Рассмотрим случай $\alpha > \frac{1}{2}$. Как было показано все $\varepsilon_i(n)$ в разложениях (30) и (31) одинаковые при $\alpha < \frac{1}{2}$ и $\alpha > \frac{1}{2}$. Значения $\chi(\alpha, n)$ при $\alpha < \frac{1}{2}$ равномерно распределены по длинному отрезку, если $\varepsilon_0 = 0$, и по короткому отрезку, если $\varepsilon_0 = 1$. Очевидно, что при $\alpha > \frac{1}{2}$ значения $\chi(\alpha, n)$, точно такие же как и при $\alpha < \frac{1}{2}$, поэтому $X(\varepsilon_0 = 0) = [1-\alpha; 1]$ и $X(\varepsilon_0 = 1) = [0; 1-\alpha]$, где $\alpha > \frac{1}{2}$. Таким образом, первый шаг индукции, при $l = 0$, доказан.

Предположим, что при $l = m$ утверждение теоремы 1 верно, т.е. $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$ — это в точности один отрезок разбиения $Til_m\,(1 - i_0(\alpha))$, причем длинный при $\varepsilon_m = 0$ и короткий при $\varepsilon_m = 1$.

Опираясь на это предположение докажем, что $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{m+1})$ — это ровно один отрезок разбиения $Til_{m+1}\,(1 - i_0(\alpha))$, причем длинный, если $\varepsilon_{m+1} = 0$, и короткий, если $\varepsilon_{m+1} = 1$. Коэффициент ε_m может принимать только два значения либо 0, либо 1. Рассмотрим оба эти случая.

В первом случае, когда $\varepsilon_m = 1$ значение ε_{m+1} однозначно определяется номером m:

1) если $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 2$ или $\sigma(j, \alpha) \leqslant m \leqslant \sigma(j+1, \alpha) - 2$, то $\varepsilon_{m+1} = 1$;

2) если $m = \sigma(j, \alpha) - 1$, то $\varepsilon_{m+1} = 0$.

Значит $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{m+1}) = X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$, если $\varepsilon_m = 1$.

По предположению индукции $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$ — это короткий отрезок разбиения $Til_m\,(1 - i_0(\alpha))$, с которым при переходе к разбиению $Til_{m+1}\,(1 - i_0(\alpha))$ никаких преобразований не производится и этот отрезок останется коротким отрезком разбиения $Til_{m+1}\,(1 - i_0(\alpha))$, если $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 2$ или $\sigma(j, \alpha) \leqslant m \leqslant \sigma(j+1, \alpha) - 2$, и становится длинным, если $m = \sigma(j, \alpha) - 1$.

Во втором случае, когда $\varepsilon_m = 0$, значение ε_{m+1} однозначно не определяется и может быть как 0, так и 1. Пусть $n \in \mathbb{F}\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$, где $\varepsilon_m = 0$, тогда $\chi(\alpha, n) \in X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$, где $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$ — длинный отрезок разбиения $Til_m\,(1 - i_0(\alpha))$.

Как было показано выше, в результате стирания $m+1$ цифры в разложении (30) получается корректная запись разложения числа $\overleftarrow{n}^{m+1}$ в системе счисления $d^{m+1}\alpha$.

Очевидно, что если $n \in \mathbb{F}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$, то $\varepsilon_{m+1}(\alpha, n), \varepsilon_{m+2}(\alpha, n), \ldots$ пробегают все α-допустимые комбинации, следовательно, $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha, \overleftarrow{n}^{m+1}\right)$, $\varepsilon_1\left(d^{m+1}\alpha, \overleftarrow{n}^{m+1}\right), \ldots$ также могут быть любыми из $d^{m+1}\alpha$-допустимых комбинаций.

Определим множество значений $\chi(\alpha,n)$ для чисел, удовлетворяющих условию $\varepsilon_{m+1}(\alpha,n)=0$ или $\varepsilon_{m+1}(\alpha,n)=1$. В силу равенства (32) можно воспользоваться случаем $l=0$ для чисел $\overleftarrow{n}^{m+1}$ в системе счисления $d^{m+1}\alpha$. Если $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=0$, то $\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)$ — это больший, а если $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=1$, то $\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)$ — меньший из отрезков, составляющих $X\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_m\right)$.

Если $d^{m+1}\alpha<\frac{1}{2}$ и $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=1$, то $\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)\in d_1$, где

$$|d_1|=d^{m+1}\alpha\cdot l_m(\alpha)=\frac{s_{m+1}(\alpha)}{s_{m+1}(\alpha)+l_{m+1}(\alpha)}\cdot l_m(\alpha)=s_{m+1}(\alpha).$$

Если $d^{m+1}\alpha<\frac{1}{2}$ и $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=0$, то $\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)\in d_2$, где

$$|d_2|=\left(1-d^{m+1}\alpha\right)l_m(\alpha)=\left(1-\frac{s_{m+1}(\alpha)}{s_{m+1}(\alpha)+l_{m+1}(\alpha)}\right)l_m(\alpha)=l_{m+1}(\alpha).$$

Если $d^{m+1}\alpha>\frac{1}{2}$ и $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=1$, то $\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)\in d_3$, где

$$|d_3|=\left(1-d^{m+1}\alpha\right)l_m(\alpha)=s_{m+1}(\alpha).$$

Если же $d^{m+1}\alpha>\frac{1}{2}$ и $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=0$, то $\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)\in d_4$, где

$$|d_4|=d^{m+1}\alpha\cdot l_m(\alpha)=l_{m+1}(\alpha).$$

Итак, если $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=1$, а значит и $\varepsilon_{m+1}(\alpha,n)=1$, то значения $\chi\left(\alpha,n\right)\in d_I$, где $|d_I|=s_{m+1}(\alpha)$; если же $\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)=0$, т.е. $\varepsilon_{m+1}(\alpha,n)=0$, то $\chi\left(\alpha,n\right)\in d_{II}$, где $|d_{II}|=l_{m+1}(\alpha)$.

Теперь убедимся, что отрезки d_I и d_{II} расположены внутри отрезка $X\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_m\right)$ также как и короткий и длинный отрезки разбиения $Til_m\left(1-i_0(\alpha)\right)$.

Рассмотрим последовательность натуральных чисел $n_k\in\mathbb{F}\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_m\right)$, где $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_m$ — коэффициенты разложения числа n_k в системе счисления α, чтобы подчеркнуть это будем писать $\varepsilon_0(\alpha),\ldots,\varepsilon_m(\alpha),\ldots$ Каждому числу n_k поставим в соответствие число $\overleftarrow{n}_k^{m+1}$, такое что $\overleftarrow{n}_k^{m+1}\left(\varepsilon_0\left(d^{m+1}\alpha\right),\ldots,\varepsilon_m\left(d^{m+1}\alpha\right)\right)$, где $\varepsilon_j\left(d^{m+1}\alpha\right)=\varepsilon_{j+m+1}\left(\alpha\right)$.

Известно, что $\chi\left(\alpha,n_k\right)\in X\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_m\right)$. Растянем этот отрезок до длины единица и обозначим $[0;1]$. Назовем эту операцию h_X растяжением. Имеем

$$h_X\left(\chi\left(\alpha,n\right)\right)=h_X\left(\chi\left(d^{m+1}\alpha,\overleftarrow{n}^{m+1}\right)\right).$$

Очевидно, что

$$\left\{\left(n_k+1\right)i_0(\alpha)\right\}=\left\{\left(n_k+1\right)\alpha\right\}\quad\text{при}\quad\alpha>1/2,\tag{33}$$

$$\left\{\left(n_k+1\right)i_0(\alpha)\right\}=1-\left\{\left(n_k+1\right)\alpha\right\}\quad\text{при}\quad\alpha<1/2,\tag{34}$$

$$\left\{\left(\overleftarrow{n}_k^{m+1}+1\right)i_0\left(d^{m+1}\alpha\right)\right\}=\left\{\left(\overleftarrow{n}_k^{m+1}+1\right)d^{m+1}\alpha\right\}\quad\text{при}\quad d^{m+1}\alpha>1/2,\tag{35}$$

$$\left\{\left(\overleftarrow{n}_k^{m+1}+1\right)i_0\left(d^{m+1}\alpha\right)\right\}=1-\left\{\left(\overleftarrow{n}_k^{m+1}+1\right)d^{m+1}\alpha\right\}\quad\text{при}\quad d^{m+1}\alpha<\frac{1}{2}.\tag{36}$$

Рассмотрим различные варианты значений α и $d^{m+1}\alpha$:

1. если $\alpha < \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha < \frac{1}{2}$, то исходя из (34) и (36) получаем, что точки последовательностей $\{n_k\}$ и $\left\{\overleftarrow{n}_k^{m+1}\right\}$ откладываются от одноименных концов соответствующих отрезков;

2. если $\alpha < \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha > \frac{1}{2}$, то используя (34) и (35) приходим к выводу, что точки последовательности $\left\{\overleftarrow{n}_k^{m+1}\right\}$ идут в обратном порядке по сравнению с токами последовательности $\{n_k\}$;

3. если $\alpha > \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha < \frac{1}{2}$, то применяя (33) и (36) получаем, что точки последовательностей $\{n_k\}$ и $\left\{\overleftarrow{n}_k^{m+1}\right\}$ откладываются от разноименных концов соответствующих отрезков;

4. если $\alpha > \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha > \frac{1}{2}$, то воспользовавшись (33) и (35) заключаем, что порядок следования точек последовательностей $\{n_k\}$ и $\left\{\overleftarrow{n}_k^{m+1}\right\}$ одинаковый.

Итак, порядок следования точек в последовательностях $\{n_k\}$ и $\left\{\overleftarrow{n}_k^{m+1}\right\}$, а значит и отрезков d_I и d_{II} внутри отрезка $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$, одинаковый, если $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(d^{m+1}\alpha - \frac{1}{2}\right) > 0$, и противоположный, если $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(d^{m+1}\alpha - \frac{1}{2}\right) < 0$.

Убедимся, что отрезки $s_{m+1}(\alpha)$ и $l_{m+1}(\alpha)$ разбиения $Til_{m+1}\,(\alpha)$ внутри отрезка $l_m(\alpha)$ разбиения $Til_m\,(\alpha)$, где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, располагаются также как и отрезки d_I и d_{II} внутри отрезка $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$.

При $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 3$ или $\sigma(2n, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1, \alpha) - 3$ согласно (16) все короткие отрезки $s_m(\alpha)$ своей длины не изменят, а каждый длинный отрезок $l_m(\alpha)$ разобьется на два отрезка: $s_{m+1}(\alpha) = s_m(\alpha)$ и $l_{m+1}(\alpha) = l_m(\alpha) - s_m(\alpha) > s_m(\alpha)$, причем слева от нуля будет находиться отрезок $s_{m+1}(\alpha)$, а справа $l_{m+1}(\alpha)$. В таком случае, согласно (27),

$$d^{m+1}\alpha = \frac{s_{m+1}(\alpha)}{s_{m+1}(\alpha) + l_{m+1}(\alpha)} < \frac{1}{2}.$$

С другой стороны при $\alpha < \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha < \frac{1}{2}$ порядок точек в последовательностях $\{n_k\}$ и $\left\{\overleftarrow{n}_k^{m+1}\right\}$ одинаковые, т.е. внутри отрезка $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$ слева d_I, а справа d_{II}.

Итак, при $0 \leqslant m \leqslant q_1(\alpha) - 3$ или $\sigma(2n, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n+1, \alpha) - 3$ порядок следования отрезков одинаковый.

При $m = \sigma(2n-1, \alpha) - 2$ в силу (16) отрезки $s_m(\alpha)$ станут длинными $l_{m+1}(\alpha)$, а каждый длинный $l_m(\alpha)$ распадется на два $l_{m+1}(\alpha) = s_m(\alpha)$ и $s_{m+1}(\alpha) = l_m(\alpha) - s_m(\alpha) < s_m(\alpha)$, причем слева от нуля будет длинный отрезок $l_{m+1}(\alpha)$, а справа — короткий $s_{m+1}(\alpha)$. В данном случае, опираясь на (27), получим

$$d^{m+1}\alpha = \frac{l_{m+1}(\alpha)}{s_{m+1}(\alpha) + l_{m+1}(\alpha)} > \frac{1}{2}.$$

Ранее было показано, что если $\alpha < \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha > \frac{1}{2}$, то порядок следования отрезков d_I и d_{II} противоположный, т.е. внутри отрезка $X\,(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$ слева d_{II}, а справа d_I.

Таким образом, при $m = \sigma(2n-1, \alpha) - 2$ порядок следования отрезков сохраняется.

При $\sigma(2n-1, \alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n, \alpha) - 3$ согласно (17) имеем $s_{m+1}(\alpha) = s_m(\alpha)$ и $l_{m+1}(\alpha) = l_m(\alpha) - s_m(\alpha) > s_m(\alpha)$ и слева от нуля будет отрезок $l_{m+1}(\alpha)$, а справа $s_{m+1}(\alpha)$. В соответствии с (27),

$$d^{m+1}\alpha = \frac{l_{m+1}(\alpha)}{s_{m+1}(\alpha) + l_{m+1}(\alpha)} > \frac{1}{2}.$$

При $\alpha < \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha > \frac{1}{2}$ получаем, что слева d_{II}, а справа d_I.

Следовательно, при $\sigma(2n-1,\alpha) - 1 \leqslant m \leqslant \sigma(2n,\alpha) - 3$ порядок расположения отрезков одинаковый.

При $m = \sigma(2n,\alpha) - 2$, в силу (17), отрезки $l_{m+1}(\alpha) = s_m(\alpha)$ и $s_{m+1}(\alpha) = l_m(\alpha) - s_m(\alpha) < s_m(\alpha)$ расположены так, что слева находится короткий отрезок $s_{m+1}(\alpha)$, а справа длинный $l_{m+1}(\alpha)$. Согласно (27),

$$d^{m+1}\alpha = \frac{s_{m+1}(\alpha)}{s_{m+1}(\alpha) + l_{m+1}(\alpha)} < \frac{1}{2}.$$

При $\alpha < \frac{1}{2}$ и $d^{m+1}\alpha < \frac{1}{2}$ слева будет отрезок d_I, а справа d_{II}.

Итак, при всех $m \geqslant 0$ порядок расположения отрезков $s_{m+1}(\alpha)$ и $l_{m+1}(\alpha)$ разбиения $Til_{m+1}(\alpha)$ внутри отрезка $l_m(\alpha)$ разбиения $Til_m(\alpha)$ такой же как и порядок расположения отрезков d_I и d_{II} внутри отрезка $X(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m)$.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Отметим, что множество $X(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ можно вычислить в явном виде, рассматривая, согласно теореме 1, вложенную последовательность длинных и коротких интервалов разбиений $Til_0(1 - i_0(\alpha)), Til_1(1 - i_0(\alpha)), \ldots, Til_l(1 - i_0(\alpha))$, соответствующих наборам (ε_0), $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, …, $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l)$.

Теорема 2. *Для произвольного α-допустимого набора $(z_0, \ldots, z_l)$ множество $\mathbb{X}(z_0, \ldots, z_l)$ представляет собой отрезок вида $[\{a\alpha\}; \{b\alpha\}]$ с эффективно вычислимыми $a, b \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $(z_0, \ldots, z_l)$ – α-допустимый набор. Поставим ему в соответствие набор $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ по следующему правилу. Заменим z_0 набором из $q_1(\alpha) - 1$ нулей и единиц, причем сначала идут $q_1(\alpha) - z_0 - 1$ нулей, а затем z_0 единиц. Каждое z_i, где $1 \leqslant i \leqslant l$, также заменим набором из $q_{i+1}(\alpha)$ нулей и единиц, где вначале идут $q_{i+1}(\alpha) - z_i$ нулей, а затем z_i единиц. Выстроим все наборы нулей и единиц, соответствующих z_i в порядке возрастания номера i и перенумеруем полученные числа ε_0, ε_1, …, ε_s. Тогда выполняется равенство

$$\mathbb{Z}(z_0, \ldots, z_l) = \mathbb{F}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$$

и, следовательно,

$$\mathbb{X}(z_0, \ldots, z_l) = X(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s).$$

Используя теорему 1, получаем, что $\mathbb{X}(z_0, \ldots, z_l)$ представляет собой отрезок разбиения $Til_s(1 - i_0(\alpha))$ с эффективно вычислимым s. Далее остается воспользоваться предложением 7 и равенством $i_0(\alpha) = \max\{\alpha, 1 - \alpha\}$. Отметим, что значения a, b оказываются неотрицательными для $\alpha < \frac{1}{2}$ и неположительными для $\alpha > \frac{1}{2}$.

7. Заключение

В настоящей работе получена геометрическая интерпретация принадлежности натурального числа множеству $\mathbb{Z}(z_0, \ldots, z_l)$ натуральных чисел, имеющих заданное окончание разложения в систему счисления Островского–Цеккендорфа. Данный результат может быть использован для получения асимптотических формул для числа решений ряда аналогов классическиих теоретико-числовых задач над данными множествами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Knuth D. E. Fibonacci multiplication // Appl. Math. Lett. 1988. V. 1. P. 57-60.

2. Mintchev S. Continued fraction expansions and self-similarity of rotation on the circle // J. Phys. A. Math. Gen. 2002. V. 36. P. 1-14.

3. Ostrowski A. Bemerkugen zur Theorie der Diophantischen Approximationen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1922. V. 1. P. 77-98.

4. Van Ravenstein T. The three gap theorem (Steinhaus conjecture) // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1988. V. 45. P. 360-370.

5. Shutov A. V. New estimates in the Hecke-Kesten problem // Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, A. Laurincikas and E. Manstavicius (Eds). 2007. P. 190-203. Vilnius:TEV

6. Гриценко С. А. , Мотькина Н. Н. Задача Хуа-Локена с простыми числами специального вида // ДАН республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 7. С. 497-500.

7. Гриценко С. А. , Мотькина Н. Н. О вычислении некоторых особых рядов // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4. С. 85-92.

8. Гриценко С. А. , Мотькина Н. Н. О некоторых аддитивных задачах теории чисел // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. 2010. Т. 5(76), № 18. С. 83-87.

9. Гриценко С. А. , Мотькина Н. Н. О теореме Чудакова в простых числах специального вида // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4. С. 75-84.

10. Гриценко С. А. , Мотькина Н. Н. Об одном варианте тернарной проблемы Гольдбаха // ДАН республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 6. С. 413-417.

11. Гриценко С. А. , Мотькина Н. Н. Проблема Варинга с натуральными числами специального вида // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, вып. 3. С. 31-47.

12. Давлетярова Е. П. , Жукова А. А. , Шутов А. В. Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, № 6. С. 1-23.

13. Давлетярова Е. П. , Жукова А. А. , Шутов А. В. Геометризация обобщенных систем счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 2. С. 88-112.

14. Журавлев В. Г. Одномерные квазирешетки Фибоначчи и их приложения к диофантовым уравнениям и алгоритму Евклида // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, № 3. С. 177-208.

15. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 2. С. 89-122. DOI: http://dx. doi. org/10. 4213/im620

16. Журавлев В. Г. Суммы квадратов над $\circ$-кольцом Фибоначчи // Записки научного семинара ПОМИ. 2006. Т. 337. С. 165-190.

17. Журавлев В. Г. Уравнение Пелля над $\circ$-кольцом Фибоначчи // Записки научного семинара ПОМИ. 2008. Т. 350. С. 139-159.

18. Журавлев В. Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распрделение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 3. С. 18-46.

19. Красильщиков В. В. , Шутов А. В. Некоторые вопросы вложения решеток в одномерные квазипериодические разбиения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 7(57). С. 84-91.

20. Красильщиков В. В. , Шутов А. В. Одномерные квазипериодические разбиения, допускающие вложение прогрессий // Известия вузов. Математика. 2009. № 7. С. 3-9.

21. Мануйлов Н. Н. Рекуррентные самоподобные разбиения // Чебышевский сборник. 2001. Т. 4, вып. 2. С. 87-91.

22. Матиясевич Ю. В. Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-й проблемой Гилберта // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1968. Т. 8. С. 132-144.

23. Матиясевич Ю. В. Две редукции 10-й проблемы Гилберта // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1968. Т. 8. С. 145-158.

24. Швагирева И. К. Бинарные аддитивные задачи над ∘-прогессиями Фибоначчи // Материалы VII международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тула, 11-16 мая 2010 года ТГПУ, Тула. 2010. С. 198-200.

25. Шутов А. В. Арифметика и геометрия одномерных квазирешеток // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11. С. 255-262.

26. Шутов А. В. Неоднородные диофантовы приближения и распределение дробных долей // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, $\mathcal{N}$ 6. С. 189-202.

27. Шутов А. В. О распределении дробных долей // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 3. С. 112-121.

28. Шутов А. В. О распределении дробных долей II // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. 2005. $\mathcal{N}$ 3. С. 146-158.

29. Шутов А. В. Об одной аддитивной задаче с дробными долями // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. 2013. Т. 5(148), $\mathcal{N}$ 30. С. 111-120.

30. Шутов А. В. Перенормировки вращений окружности // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 4. С. 125-143.

31. Шутов А. В. Последовательности Штурма: графы Рози и форсинг // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 2. С. 128-139.

32. Шутов А. В. Производные поворотов окружности и подобие орбит // Записки научных семинаров ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 272-284.

33. Шутов А. В. Системы счисления и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7, вып. 3. С. 110-128.

REFERENCES

1. Knuth D. E. 1988. "Fibonacci multiplication", *Appl. Math. Lett.* , Vol. 1, pp. 57-60. doi:10. 1016/0893-9659(89)90131-6.

2. Mintchev S. 2002. "Continued fraction expansions and self-similarity of rotation on the circle", *J. Phys. A. Math. Gen.* , Vol. 36, pp. 1-14.

3. Ostrowski A. 1922. "Bemerkugen zur Theorie der Diophantischen Approximationen", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* , Vol. 1, pp. 77-98.

4. Van Ravenstein T. 1988. "The three gap theorem (Steinhaus conjecture)", *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, Vol. 45, pp. 360-370. doi:10. 1017/S1446788700031062.

5. Shutov A. V. 2007. "New estimates in the Hecke-Kesten problem" , *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, A. Laurincikas and E. Manstavicius (Eds)*, pp. 190-203. Vilnius: TEV

6. Gricenko S. A. & Mot'kina N. N. 2009. "Zadacha Hua-Lokena s prostymi chislami special'nogo vida", *DAN respubliki Tadzhikistan*, Vol. 52, no. 7, pp. 497-500. (Russian)

7. Gricenko S. A. & Mot'kina N. N. 2011. "On the computation of some singular series", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 12, no. 4, pp. 85-92. (Russian)

8. Gricenko S. A. & Mot'kina N. N. 2010. "O nekotoryh additivnyh zadachah teorii chisel", *Nauchnye vedomosti BelGU. Serija Matematika. Fizika*, Vol. 5(76), no. 18, pp. 83-87. (Russian)

9. Gricenko S. A. & Mot'kina N. N. 2011. "On Chudakov's theorem involving primers of a special type", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 12, no. 4, pp. 75-84. (Russian)

10. Gricenko S. A. & Mot'kina N. N. 2009. "Ob odnom variante ternarnoj problemy Gol'dbaha", *DAN respubliki Tadzhikistan*, Vol. 52, no. 6, pp. 413-417. (Russian)

11. Gricenko S. A. & Mot'kina N. N. 2014. "Waring's promblem involving natural numbers of a special type", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 15, no. 3, pp. 31-47. (Russian)

12. Davletjarova E. P. , Zhukova A. A. & Shutov A. V. 2013. "Geometrizacija sistemy schislenija Fibonacci i ee prilozhenija k teorii chisel", *Algebra i analiz*, Vol. 25, no. 6, pp. 1-23. (Russian) translation in St. Petersburg Mathematical Journal, 2014, 25:6, 893-907. doi:10. 1090/S1061-0022-2014-01321-0.

13. Davletjarova E. P. , Zhukova A. A. & Shutov A. V. 2016. "Geometrizacija obobshhennyh sistem schislenija Fibonacci i ee prilozhenija k teorii chisel", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 17, no. 2, pp. 88-112. (Russian)

14. Zhuravlev V. G. 2007. "Odnomernye kvazireshetki Fibonachchi i ih prilozhenija k diofantovym uravnenijam i algoritmu Evklida", *Algebra i analiz*, Vol. 19, no. 3, pp. 177-208. (Russian) translation in St. Petersburg Mathematical Journal, 2008, 19:3, 431-454. doi:10. 1090/S1061-0022-08-01005-4.

15. Zhuravlev V. G. 2007. "Odnomernye razbienija Fibonacci", *Izv. RAN. Ser. matem.* , Vol. 71, no. 2, pp. 89-122. (Russian) translation in Izvestiya: Mathematics, 2007, 71:2, 307-340. doi: 10. 1070/IM2007v071n02ABEH002358.

16. Zhuravlev V. G. 2006. "Summy kvadratov nad ∘-kol'com Fibonachchi", *Zapiski nauchnogo seminara POMI*, Vol. 337, pp. 165-190. (Russian) translation in Journal of Mathematical Sciences, 2007, 143:3, 3108-3123. doi: 10. 1007/s10958-007-0195-1.

17. Zhuravlev V. G. 2008. "Uravnenie Pellja nad ∘-kol'com Fibonachchi", *Zapiski nauchnogo seminara POMI*, Vol. 350, pp. 139-159. (Russian) translation in Journal of Mathematical Sciences, 2008, 150:3, 2084-2095. doi: 10. 1007/s10958-008-0123-z.

18. Zhuravlev V. G. 2008. "Chetno-fibonachchevy chisla: binarnaja additivnaja zadacha, rasprdelenie po progressijam i spectr", *Algebra i analiz*, Vol. 20, no. 3, pp. 18-46. (Russian) translation in St. Petersburg Mathematical Journal, 2009, 20:3, 339-360. doi: 10. 1090/S1061-0022-09-01051-6.

19. Krasil'shhikov V. V. & Shutov A. V. 2007. "Nekotorye voprosy vlozhenija reshetok v odnomernye kvaziperiodicheskie razbienija", *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaja serija*, no. 7(57), pp. 84-91. (Russian)

20. Krasil'shhikov V. V. & Shutov A. V. 2009. "Odnomernye kvaziperiodicheskie razbienija, dopuskajushhie vlozhenie progressij", *Izvestija vuzov. Matematika*, no. 7, pp. 3-9. (Russian). translation in Russian Mathematics, 2009, 53:7, 1-6. doi: 10. 3103/S1066369X09070019.

21. Manujlov N. N. 2001. "Rekurrentnye samopodobnye razbienija", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 4, no. 2, pp. 87-91. (Russian)

22. Matijasevich Ju. V. 1968. "Svjaz' sistem uravnenij v slovah i dlinah s 10-j problemoj Gilberta", *Zapiski nauchnyh seminarov LOMI*, Vol. 8, pp. 132-144. (Russian)

23. Matijasevich Ju. V. 1968. "Dve redukcii 10-j problemy Gilberta", *Zapiski nauchnyh seminarov LOMI*, Vol. 8, pp. 145-158. (Russian)

24. Shvagireva I. K. 2010. "Binarnye additivnye zadachi nad $\circ$-progessijami Fibonachchi", *Materialy VII mezhdunarodnoj konferencii "Algebra i teorija chisel: sovremennye problemy i prilozhenija posvjashhennoj pamjati professora Anatolija Alekseevicha Karatsuby, Tula, 11-16 maja 2010 goda TGPU, Tula*, pp. 198-200. (Russian)

25. Shutov A. V. 2010. "Arifmetika i geometrija odnomernyh kvazireshetok", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 11, pp. 255-262. (Russian)

26. Shutov A. V. 2010. "Neodnorodnye diofantovy priblizhenija i raspredelenie drobnyh dolej", *Fundamental'naja i prikladnaja matematika*, Vol. 16, no. 6, pp. 189-202. (Russian) translation in Journal of Mathematical Sciences (New York), 2012, 182:4, 576-585. doi: 10. 1007/s10958-012-0762-y.

27. Shutov A. V. 2004. "O raspredelenii drobnyh dolej", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 5, no. 3, pp. 112-121. (Russian)

28. Shutov A. V. 2005. "O raspredelenii drobnyh dolej II", *Issledovanija po algebre, teorii chisel, funkcional'nomu analizu i smezhnym voprosam*, no. 3, pp. 146-158. (Russian)

29. Shutov A. V. 2013. "Ob odnoj additivnoj zadache s drobnymi doljami", *Nauchnye vedomosti BelGU. Serija Matematika. Fizika*, Vol. 5(148), no. 30, pp. 111-120. (Russian)

30. Shutov A. V. 2004. "Perenormirovki vrashhenij okruzhnosti", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 5, no. 4, pp. 125-143. (Russian)

31. Shutov A. V. 2007. "Posledovatel'nosti Shturma: grafy Rozi i forsing", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 8, no. 2, pp. 128-139. (Russian)

32. Shutov A. V. 2004. "Proizvodnye povorotov okruzhnosti i podobie orbit", *Zapiski nauchnyh seminarov POMI*, Vol. 314, pp. 272-284. (Russian) translation in Journal of Mathematical Sciences, 2006, 133:6, 1765-1771. doi: 10. 1007/s10958-006-0088-8.

33. Shutov A. V. 2006. "Sistemy schislenija i mnozhestva ogranichennogo ostatka", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 7, no. 3, pp. 110-128. (Russian)

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 517.948 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-245-254

КОЭРЦИТИВНАЯ ОЦЕНКА И ТЕОРЕМА РАЗДЕЛИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О. Х. Каримов (г. Душанбе)

Аннотация

Проблема разделимости дифференциальных операторов впервые исследовался в работах В. Н. Эвeритта и М. Гирца в начале семидесятых годов прошлого столетия. В своих работах они в основном исследовали разделимость оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Позже этой проблемой занимались К. Х. Бойматов, М. Отелбаев, Ф. В. Аткинсон (F. V. Atcinson), В. Д. Эванс (W. D. Evans), А. Цеттл (A. Zettl) и др. Основная часть опубликованных работ по этому направления относятся к случаю линейных операторов (как обыкновенных дифференциальных операторов, так и операторов с частными производными). Разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, рассматривалась в случае, когда исследуемый оператор является слабым возмущением линейного оператора. Случай, когда исследуемый оператор не являются слабым возмущением линейного оператора, рассмотрен лишь в некоторых отдельных работах. Результаты настоящей работы, также относятся к этому малоизученному случаю. Она посвящена изучению коэрцитивных свойств нелинейных дифференциальных операторов вида

$$L[u(x)] = -u^{VI}(x) + V(x, u(x))u(x)$$

в гильбертовом пространстве $L_2(R)$ и доказана теорема о разделимости этого оператора.

Исследуемый оператор $L[u(x)]$ является строго нелинейным, то есть его нельзя представить в виде слабого возмущения линейного оператора.

Ключевые слова: нелинейный дифференциальный оператор, коэрцитивная оценка, теорема разделимости, гильбертово пространство.

Библиография: 19 названий.

COERCIVE ESTIMATE AND SEPARATION THEOREM FOR ONE NONLINEAR DIFFERENTIAL OPERATOR IN A HILBERT SPACE

O. Kh. Karimov (Dushanbe)

Abstract

Problem of separation for differential operators was first investigated by W. N. Everitt and M. Giertz in the beginning of seventieth of the last century. They mainly have investigated, in their works, separation of Sturm–Liouville operator operator and its powers. Later, this problem was investigated by K. Kh. Boimatov, M. Otelbaev, F. V. Atcinson, W. D. Evans, A. Zettl and others. The main part of papers published in this direction concerns with the case of linear operators(both ordinary differential operators and partial differential operators). Separation of nonlinear differential operators was mainly investigated in case when operator under consideration was a weak perturbation of linear one. The case when operator under consideration is not a weak perturbation of linear one was investigated only in some works.

Results of this paper also concerns with this poorly studied case. The paper is devoted to studying coercive properties of nonlinear differential operator of the form

$$L[u(x)] = -u^{VI}(x) + V(x, u(x))u(x)$$

in Hilbert space $L_2(R)$ and separation theorem for this operator is proved.

The investigated operator $L[u(x)]$ is strictly nonlinear, in the sense that in the general case it cannot be represented as a weak perturbation of a linear operator.

Keywords: nonlinear differential operator, coercive estimate, separation theorem, Hilbert space.

Bibliography: 19 titles.

1. Введение

Термин *«разделимость»* впервые введен В. Н. Эвериттом и М. Гирцом [1], где исследовалась разделимость оператора Штурма–Лиувилля

$$L[y] = -y''(x) + V(x)y(x), \qquad x \in I,$$

в пространстве $L_2(I)$, I — некоторый отрезок вещественной оси. В последующих своих работах (см., например, [2]-[4]) они также исследовали разделимость степеней оператора Штурма–Лиувилля. В дальнейшем в исследовании и развитие данной теории внесли свой вклад К. Х. Бойматов, М. Отелбаев и их ученики (см.[5]–[11] и имеющиеся там ссылки).

Впервые разделимость дифференциальных выражений с частными производными исследовалась К.Х. Бойматовым [5]. Из последних работ, посвященных разделимости линейных операторов с частными производными, отметим [12]–[15] и [16]. В статье [12] рассматривается разделимость линейного оператора Гельмгольца

$$Au(x) = (-\Delta + k^2)u(x) + V(x)u(x)$$

в гильбертовом пространстве.

В работах [13] и [16] исследовалась разделимость линейного бигармонического оператора $L[u(x)] = \Delta^2 u(x) + V(x)u(x)$ в пространстве $L_2(R^n)$. Случай линейного трижды гармонического дифференциального оператора

$$L[u(x)] = -\Delta^3 u(x) + V(x)u(x)$$

рассматривался в статье [14]. Работа [15] посвящена исследованию разделимости и разрешимости уравнения Лапласа–Бельтрами в пространстве $L_2(R^n)$.

Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, рассматривалась тогда, когда исследуемый оператор является слабым возмущением линейного оператора (см., например, [8] и [10]). Лишь в отдельных работах (см., например, [7], [17] — [19]) изучалась разделимость строго нелинейных дифференциальных операторов, то есть операторов не представляющихся в виде слабого возмущения линейного оператора. В работах [7] и [8] изучались коэрцитивные свойства нелинейного оператора Шредингера и Дирака, в статье [17] рассматривается вопрос о разделимости нелинейного дифференциального операторов второго порядка с матричными коэффициентами. В работе [19] изучались коэрцитивные свойства и разделимость нелинейного бигармонического оператора с матричным потенциалом

$$L[u(x)] = \Delta^2 u(x) + V(x, u(x))u(x)$$

во всём n-мерном евклидовом пространстве.

Здесь мы исследуем разделимость нелинейного дифференциального оператора

$$L[u(x)] = -u^{VI}(x) + V(x, u(x))u(x), \quad x \in R = (-\infty, +\infty),$$

в гильбертовом пространстве $L_2(R)$. То есть, как в [7], [17], [18], [19] рассматриваемый нами оператор является строго нелинейным.

2. Формулировка основного результата

В пространстве $L_2(R)$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u(x)] = -u^{VI}(x) + V(x, u(x))u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $V(x, z)$-положительная функция. За областью определения оператора (1) примем множество всех $u(x) \in L_2(R) \cap W_{2,loc}^6(R)$ таких, что $L[u(x)] \in L_2(R)$.

Представим функцию $V(x, z)$ в виде

$$V(x, z) = F(x, \xi, \eta), \ \xi = Rez, \ \eta = Imz.$$

Определение 1. *Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор $L[u]$) называется разделимым в $L_2(R)$, если*

$$u^{VI}(x), \, V(x, u)u(x) \in L_2(R)$$

для всех $u(x) \in L_2(R) \cap W_{2,loc}^6(R)$ таких, что $f(x) \in L_2(R)$.

Предположим, что $F(x, \xi, \eta) \in C^3(R^3)$ и для всех $x \in R$, $\omega = \xi + i\eta \in C$, $\Omega = \mu + i\nu \in C$, $u \in W_2^2(R)$ выполняется следующие неравенства

$$\|F^{-\frac{1}{2}} F_{xxx}^{'''} F^{-1}; L_2(R)\| \leqslant \sigma_1, \tag{2}$$

$$\|F^{-\frac{1}{2}} F_{xx}^{''} u^{'}(x); L_2(R)\| \leqslant \sigma_2 \|Fu; L_2(R)\|, \tag{3}$$

$$\|F^{-\frac{1}{2}} F_{x}^{'} u^{''}(x); L_2(R)\| \leqslant \sigma_3 \|Fu; L_2(R)\|, \tag{4}$$

$$\|F^{-\frac{1}{2}} (F_{\xi}^{'}\mu + F_{\eta}^{'}\nu)\omega; C\| \leqslant \delta_3 \|F^{\frac{1}{2}}\Omega; C\|, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\|F^{-\frac{1}{2}} (F_{\xi\xi}^{''}\mu^2 + F_{\xi}^{'}\mu_x^{'} + 2F_{x\xi}^{''}\mu + 2F_{\xi\eta}^{''}\mu\nu + 2F_{x\eta}^{''}\nu + \\ &\qquad + F_{\eta}^{'}\nu_x^{'} + F_{\eta\eta}^{''}\nu^2)\omega; C\| \le \delta_2 \|F^{\frac{1}{2}}\Omega; C\|; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\|F^{-\frac{1}{2}} (F_{\xi\xi\xi}^{'''}\mu^3 + F_{\xi}^{'}\mu_{xx}^{''} + 3F_{xx\xi}^{'''}\mu + 3F_{xx\eta}^{'''}\nu + 3F_{x\xi\xi}^{'''}\mu^2 + \\ &\qquad + 3F_{\xi\xi\eta}^{'''}\mu^2\nu + 3F_{\xi\xi}^{''}\mu\mu_x^{'} + 3F_{x\xi}^{''}\mu_x^{'} + 6F_{x\xi\eta}^{'''}\mu\nu + 3F_{x\eta\eta}^{'''}\nu^2 + \\ &\qquad + 3F_{\xi\eta}^{''}\nu\mu_x^{'} + 3F_{\xi\eta\eta}^{'''}\mu\nu_x^{'} + 3F_{x\eta}^{''}\nu_x^{'} + 3F_{\eta\eta}^{''}\nu\nu_x^{'} + 3F_{\xi\eta\eta}^{'''}\mu\nu^2 + \\ &\qquad + F_{\eta}^{'}\nu_{xx}^{''} + F_{\eta\eta\eta}^{'''}\nu^3)\omega; C\| \le \delta_1 \|F^{\frac{1}{2}}\Omega; C\|. \end{aligned} \tag{7}$$

Сформулируем основной результат работы

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2)-(7) и пусть числа $\sigma_j \ \ j = \overline{1,3}$, $\delta_i \ \ i = \overline{1,3}$ такие, что*

$$3\sigma_1 + 9\sigma_2 + 9\sigma_3 + 4\delta_1 + 12\delta_2 + 12\delta_3 < 4. \tag{8}$$

Тогда нелинейный оператор (1) разделяется в пространстве $L_2(R)$ и для всех функций $u(x) \in L_2(R) \cap W^6_{2,loc}(R)$ уравнения (1) с правой частью $f(x) \in L_2(R)$ справедливо выключения

$$u^{VI}(x), \quad V(x,u(x))u(x), \quad V^{\frac{1}{2}}(x,u(x))u^{'''}(x) \in L_2(R).$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\|u^{VI}(x);L_2(R)\| + \|V(x,u)u(x);L_2(R)\| + \\ + \|V^{\frac{1}{2}}(x,u)u^{'''}(x);L_2(R)\| \le M\|f(x);L_2(R)\|, \tag{9}$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$ и $f(x)$.

3. Вспомогательные леммы.

Далее мы часто воспользуемся следующей леммой, которая доказывается интегрированием по частям.

Лемма 1. *Пусть $\psi(x) \in C_0^\infty(R)$, тогда для любых двух функций $u(x)$, $\vartheta(x) \in W^1_{2,loc}(R)$ выполняется равенство*

$$\langle \omega_1', \psi\omega_2\rangle = -\langle \omega_1, \psi'\omega_2\rangle - \langle \omega_1, \psi\omega_2'\rangle, (\omega_1,\omega_2 \in W^1_{2,loc}(R),\ \psi \in C_0^\infty(R)). \tag{10}$$

Лемма 2. *Пусть в уравнении (1) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_2(R)$, и функция $u(x)$ принадлежит классу $L_2(R) \cap W^6_{2,loc}(R)$. Тогда функции $V^{1/2}(x,u(x))u(x)$, $u^{'''}(x)$ принадлежат пространству $L_2(R)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

Имеет место равенство

$$\langle f(x), \varphi_\varepsilon(x)u(x)\rangle = \langle u^V(x), (\varphi_\varepsilon(x))'u(x)\rangle + \\ + \langle u^V(x), \varphi_\varepsilon(x)u'(x)\rangle + \langle V(x,u(x))u(x), \varphi_\varepsilon(x)u(x)\rangle, \tag{11}$$

где $\langle,\rangle$ - скалярное произведение в пространстве $L_2(R)$.

Далее несколько раз применяя лемму 1 из равенства (11) получим

$$\langle f(x), \varphi_\varepsilon(x)u(x)\rangle = \langle u^{'''}(x), (\varphi_\varepsilon(x))^{'''}u(x)\rangle + 3\langle u^{'''}(x), (\varphi_\varepsilon(x))^{''})u'(x)) + \\ +3\langle u^{'''}(x), (\varphi_\varepsilon(x))'u''(x)\rangle + \langle u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon(x)u^{'''}(x)\rangle + \\ +\langle V(x,u(x))u(x), \varphi_\varepsilon(x)u(x)\rangle. \tag{12}$$

Так как функция $\varphi_\varepsilon(x)$ вещественнозначная, и

$$\left|(\varphi_\varepsilon(x))'\right| \le M_0\varepsilon, \quad \left|(\varphi_\varepsilon(x))''\right| \le M_1\varepsilon^2, \quad \left|(\varphi_\varepsilon(x))'''\right| \le M_2\varepsilon^3, \quad \forall x \in R,$$

где

$$M_0 = \sup|\varphi'(x)|,\ M_1 = \sup|\varphi''(x)|,\ M_2 = \sup|\varphi'''(x)|,$$

то из равенство (12) переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, используя неравенство Коши-Буняковского находим

$$\|f(x)\|\|u(x)\| \ge \operatorname{Re}\langle f(x), u(x)\rangle \ge \langle u^{'''}(x), u^{'''}(x)\rangle + \langle V(x,u(x))u(x), u(x)\rangle,$$

что и доказывает лемму 2.

4. Доказательство теоремы 1

Для любого $\nu > 0$ выполняется равенство

$$\langle f(x), \varphi_\varepsilon f(x)\rangle = \langle Fu(x), \varphi_\varepsilon Fu(x)\rangle + \nu\langle u^{VI}(x), \varphi_\varepsilon u^{VI}(x)\rangle + A_1^\varepsilon(u) - A_2^\varepsilon(u), \tag{13}$$

где

$$A_1^\varepsilon(u) = -(1+\nu)Re\langle u^{VI}(x), \varphi_\varepsilon Fu(x)\rangle$$
$$A_2^\varepsilon(u) = (1-\nu)Re\langle u^{VI}(x), \varphi_\varepsilon f(x)\rangle$$

Для любого $\alpha_1 > 0$ справедливо неравенство

$$|A_2^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha_1|1-\nu|}{2}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)u^{VI}(x)\|^2 + \frac{|1-\nu|}{2\alpha_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x)f(x)\|^2,$$

где $\|,\|$ - норма в пространстве $L_2(R)$.

Далее, имеем

$$A_1^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u^V(x), (\varphi_\varepsilon(x))' Fu(x)\rangle +$$
$$+ (1+\nu)Re\langle u^V(x), \varphi_\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]u(x)\rangle + (1+\nu)Re\langle u^V(x), \varphi_\varepsilon(x)Fu'(x)\rangle.$$

Используя лемму 1, после несложных преобразований находим

$$\begin{aligned} A_1^\varepsilon(u) =& (1+\nu)\langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u'''(x)\rangle + B_1^\varepsilon(u) + \\ &+ B_2^\varepsilon(u) + 3B_3^\varepsilon(u) + 3B_4^\varepsilon(u) + 3B_5^\varepsilon(u) + \\ &+ 6B_6^\varepsilon(u) + 3B_7(\varepsilon) + 3B_8^\varepsilon(u) + 3B_9^\varepsilon(u), \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$B_1^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))''' F(x,u)u(x)\rangle,$$
$$B_2^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]\right]\right]u(x)\rangle,$$
$$B_3^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))''\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]u(x)\rangle,$$
$$B_4^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))'' F(x,u)u'(x)\rangle,$$
$$B_5^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))'\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]\right]\right]u(x)\rangle,$$
$$B_6^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))'\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]u'(x)\rangle,$$
$$B_7^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u'''(x), (\varphi_\varepsilon(x))' F(x,u)u''(x)\rangle,$$
$$B_8^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]\right]\right]u'(x)\rangle,$$
$$B_9^\varepsilon(u) = (1+\nu)Re\langle u'''(x), \varphi_\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial x}[F(x,u)]u''(x)\rangle.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x}[F(x,\xi,\eta)] = \frac{\partial}{\partial x}[F(x, Reu(x), Imu(x)] = F_x' + F_\xi' \cdot Reu_x' + F_\eta' \cdot Imu_x'$$

преобразуем функционалы $B_i(u)$, $i=\overline{1,9}$ к следующему виду:

$$B_1^\varepsilon(u)=(1+\nu)Re\langle u'''(x),(\varphi_\varepsilon(x))'''F(x,u)u(x)\rangle,$$

$$\begin{aligned}
B_2^\varepsilon(u)=&(1+\nu)Re\langle u'''(x),\varphi_\varepsilon(x)\Big(F'''_{xxx}+F'''_{\xi\xi\xi}\Big(Reu'(x)\Big)^3+F'_\xi Reu'''(x)+3F'''_{xx\xi}Reu'(x)+\\
&+3F'''_{xx\eta}Imu'(x)+3F'''_{x\xi\xi}\left(Reu'(x)\right)^2+3F'''_{\xi\xi\eta}\left(Reu'(x)\right)^2Imu'(x)+\\
&+3F''_{\xi\xi}Reu'(x)Reu''(x)+3F''_{x\xi}Reu''(x)+6F'''_{x\xi\eta}Reu'(x)Imu'(x)+\\
&+3F'''_{x\eta\eta}\left(Imu'(x)\right)^2+3F''_{\xi\eta}Imu'(x)Reu''(x)+3F'''_{\xi\eta\eta}Reu'(x)Imu''(x)+\\
&+3F''_{x\eta}Imu''(x)+3F''_{\eta\eta}Imu'(x)Imu''(x)+3F'''_{\xi\eta\eta}Reu'(x)\left(Imu'(x)\right)^2+\\
&+F'_\eta Imu'''(x)+3F'''_{\eta\eta\eta}\left(Imu'(x)\right)^3\Big)u(x)\rangle,
\end{aligned}$$

$$B_3^\varepsilon(u)=(1+\nu)Re\langle u'''(x),(\varphi_\varepsilon(x))''\left(F'_x+F'_\xi Reu'(x)+F'_\eta Imu'(x)\right)u(x)\rangle,$$

$$B_4^\varepsilon(u)=(1+\nu)Re\langle u'''(x),(\varphi_\varepsilon(x))''F(x,u)u'(x)\rangle,$$

$$\begin{aligned}
B_5^\varepsilon(u)=&(1+\nu)Re\langle u'''(x),\varphi'_\varepsilon(x)\Big(F''_{xx}+F''_{\xi\xi}\left(Reu'(x)\right)^2+F'_\xi Reu''(x)+2F''_{x\xi}Reu'(x)+\\
&+2F''_{\xi\eta}Reu'(x)Imu'(x)+2F''_{x\eta}Imu'(x)+F'_\eta Imu''(x)+F''_{\eta\eta}\left(Imu'(x)\right)^2\Big)u(x)\rangle,
\end{aligned}$$

$$B_6^\varepsilon(u)=(1+\nu)Re\langle u'''(x),\varphi'_\varepsilon(x)\left(F'_x+F'_\xi Reu'(x)+F'_\eta Imu'(x)\right)u'(x)\rangle,$$

$$B_7^\varepsilon(u)=(1+\nu)Re\langle u'''(x),(\varphi_\varepsilon(x))'F(x,u)u''(x)\rangle,$$

$$\begin{aligned}
B_8^\varepsilon(u)=&(1+\nu)Re\langle u'''(x),\varphi_\varepsilon(x)\Big(F''_{xx}+F''_{\xi\xi}\left(Reu'(x)\right)^2+F'_\xi Reu''(x)+2F''_{x\xi}Reu'(x)+\\
&+2F''_{\xi\eta}Reu'(x)Imu'(x)+2F''_{x\eta}Imu'(x)+F'_\eta Imu''(x)+F''_{\eta\eta}\left(Imu'(x)\right)^2\Big)u'(x)\rangle,
\end{aligned}$$

$$B_9^\varepsilon(u)=\langle u'''(x),\varphi_\varepsilon(x)\left(F'_x+F'_\xi Reu'(x)+F'_\eta Imu'(x)\right)u''(x)\rangle.$$

Здесь и далее значения F, F'_x, F'_ξ, F'_η, $F''_{x\xi}$, $F''_{x\eta}$, F''_{xx}, $F''_{\xi\eta}$, $F'''_{xx\xi}$, $F'''_{x\xi\xi}$, $F'''_{x\eta\eta}$, $F'''_{xx\eta}$, $F'''_{x\xi\eta}$, $F'''_{\eta\eta\xi}$, $F'''_{\eta\xi\xi}$, F'''_{xxx} взяты в точке $(x,\operatorname{Re}u(x),\operatorname{Im}u(x))$.

Оцениваем каждый член равенства (14), используя неравенство Коши - Буняковского

$$Re\langle u,f\rangle\le|\langle u,f\rangle|\le\|u\|\|f\|.$$

Функционалы $B_1^\varepsilon(u)$, $B_3^\varepsilon(u)$, $B_4^\varepsilon(u)$, $B_5^\varepsilon(u)$, $B_6^\varepsilon(u)$ и $B_7^\varepsilon(u)$ в силу леммы 2 стремятся к нулю при $\varepsilon\to0$.

При оценки функционалов $B_2^\varepsilon(u)$, $B_8^\varepsilon(u)$ и $B_9^\varepsilon(u)$ для любого $x\in R$, $\omega=\xi+i\eta$, $\Omega=\mu+i\nu$ и $u\in W_2^3(R)$, учитывая, что для любого $\alpha>0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1y_2\le\frac{\alpha}{2}|y_1|^2+\frac{1}{2\alpha}|y_2|^2 \tag{15}$$

получим следующие оценки:

$$|B_2^\varepsilon(u)|\le\frac{\alpha}{2}\langle F^{\frac12}u'''(x),\varphi_\varepsilon F^{\frac12}u'''(x)\rangle+\frac{\sigma_1}{2\alpha}(Fu,\varphi_\varepsilon Fu)+\delta_1\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac12}u'''(x)\|^2, \tag{16}$$

$$|B_8^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha}{2}\langle F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\rangle + \frac{\sigma_2}{2\alpha}\langle Fu, \varphi_\varepsilon Fu\rangle + \delta_2\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\|^2, \tag{17}$$

$$|B_9^\varepsilon(u)| \leq \frac{\alpha}{2}\langle F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x), \varphi_\varepsilon F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\rangle + \frac{\sigma_3}{2\alpha}\langle Vu, \varphi_\varepsilon Fu\rangle + \delta_3\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\|^2. \tag{18}$$

Здесь α - произвольное положительное число, а $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \delta_1, \delta_2$ и δ_3 - константы из условий (2) – (7).

На основе полученных оценок из равенства (13), учитывая неравенство

$$-|Z| \leq ReZ \leq |Z|$$

переходим к неравенству при любых $\nu,\ \beta > 0$:

$$\begin{aligned}
&\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(x))\right\|^2 \geq \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Fu(x)\|^2 + \nu\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u^{VI}(x)\|^2 + \\
&-\frac{\alpha_1|1-\nu|}{2}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u^{VI}(x)\|^2 - \frac{|1-\nu|}{2\alpha_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(x)\|^2 + \\
&+(1+\nu)\left\{\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\|^2 - |B_2(\varepsilon)| - |B_8(\varepsilon)| - |B_9(\varepsilon)|\right\}
\end{aligned}$$

Далее имея ввиду неравенств (16) – (18) при любых $\nu,\ \alpha_1,\ \alpha > 0$ получим неравенство

$$\begin{aligned}
&\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(x))\right\|^2 \geq \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Fu(x)\|^2 + \nu\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u^{VI}(x)\|^2 - \\
&-\frac{\alpha_1|1-\nu|}{2}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u^{VI}(x)\|^2 - \frac{|1-\nu|}{2\alpha_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}f(x)\|^2 + \\
&+(1+\nu)\left\{\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\|^2 - \right. \\
&\left. -(\frac{3\alpha}{2} + \delta_1 + 3\delta_2 + 3\delta_3)\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\|^2 - \frac{\sigma_1 + 3\sigma_2 + 3\sigma_3}{2\alpha}\|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}Fu(x)\|^2\right\}
\end{aligned}$$

Окончательно переходя к приделу при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{|1-\nu|}{2\alpha_1}\right)\|f(x))\|^2 \geq \left(1 - \frac{(1+\nu)(\sigma_1 + 3\sigma_2 + 3\sigma_3)}{2\alpha}\right)\|Fu(x)\|^2 + \\
&+\left(\nu - \frac{\alpha_1|1-\nu|}{2}\right)\|u^{VI}(x)\|^2 + (1+\nu)\left(1 - \frac{3\alpha + 2\delta_1 + 6\delta_2 + 6\delta_3}{2}\right)\|F^{\frac{1}{2}}u^{'''}(x)\|^2
\end{aligned}$$

Отсюда очевидно, что если $|1-\nu| < 2\alpha_1$, $\alpha_1|1-\nu| < 2\nu$, $(1+\nu)(\sigma_1 + 3\sigma_2 + 3\sigma_3) < 2\alpha$ и $3\alpha + 2\delta_1 + 6\delta_2 + 6\delta_3 < 2$, то коэрцитивная оценка (9) имеет место. Существование чисел $\alpha_1,\ \alpha,\ \nu > 0$ выводится из неравенства (8).

Разделимость нелинейного оператора (1) в пространстве $L_2(R)$ следует из коэрцитивного неравенства (9).

Теорема 1 доказана.

5. Заключение.

В работе установлены коэрцитивные оценки для нелинейного дифференциального оператора вида (1). Найдены достаточные условия разделимости строго нелинейного оператора в гильбертовом пространстве.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W.N., Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. London Math. Soc. 1971. Vol. 23. P. 301-324.
2. Everitt W.N., Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions // Proc. London Math. Soc. 1972. Vol.24. P. 149-170.
3. Everitt W.N.,Gierz M. Some inequallities associated with certain differential operarors // Math.Z., 1972, Vol. 26. P. 308-326.
4. Everitt W.N., Gierz M. Inequalities and separation for Schrodinger - type operators in $L_2(R^n)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect A. 1977. Vol.79, P. 149-170.
5. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости// ДАН СССР. 1973. Т. 213. № 5. С. 1009-1011.
6. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения// Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1984. Т.170. С. 37-76.
7. Бойматов К.Х., Шарипов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака // Доклады Академии наук России. 1992. Т.326. № 3. С. 393-398.
8. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка // Математические заметки. 1989. Т.46. № 6. С. 110-112.
9. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1983. Т.161. С. 195-217.
10. Муратбеков М.Б., Отелбаев М. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера // Изв.вузов. Матем. 1989. № 3. С. 44-48.
11. Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Оспанов К.Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Доклады Академии наук России. 2010. Т.435. № 3. С. 310-313.
12. Salem Omram and Khaled A.Gepreel eparation of the Helmholtz Partial Differential Eduation in Hilbert Space // Adv.Studies Theor. Phys. 2012. Vol. 6. № 9. P. 399-410.
13. Zayed E.M.E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem // J. Math.Anal.Appl. 2008. Vol. 337. P. 659-666. DOI.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.012
14. Zayed E.M.E., Salem Omram Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert // International J. Math.Combin. 2010. Vol. 4. P. 13-23.
15. Zayed E.M.E., A.S.Mohamed, H.A.Atia *Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces* // J. Math.Anal.Appl. 2007, Vol. 336. P. 81-92. DOI.org/10.1016/j.jmaa.2006.07.031.
16. Каримов О.Х. Коэрцитивные свойства и разделимость бигармонического оператора с матричным потенциалом // Материалы Международной конференции по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященной 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского, 2015. МИАН. Москва. С. 153-154.

17. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. Т.153. № 3. С. 42-50.

18. Каримов О.Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т.58. № 8. С.665-673.

19. Каримов О.Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал. 2017. Т.9. № 1. С. 55-62. DOI:10.13108/2017-9-1-54

REFERENCES

1. Everitt W.N.,Gierz M. *Some properties of the domains of certain differential operators // Proc.London Math.Soc.,* 1971, vol. 23, pp. 301-324.

2. Everitt W.N.,Gierz M. *On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions // Proc.London Math.Soc.,* 1972, vol. 24, pp. 149-170.

3. Everitt W.N.,Gierz M. *Some inequallities associated with certain differential operarors // Math.Z.,* 1972, vol. 126, pp. 308-326.

4. Everitt W.N.,Gierz M. *Inequalities and separation for Schrodinger -tupe operators in* $L_2(R^n)$ *// Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect A,* 1977, vol. 79 pp. 149-170.

5. Boimatov K.Kh. *Theorems of separability // Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1973, vol. 213, no 5, pp. 1009-1011.

6. Boimatov K.Kh. *Separability theorems, weighted spaces and their applications // Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova,* 1984, vol. 170, pp. 37-76.

7. Boimatov K.Kh., Saripov A. *Coercive properties of nonlinear Schrodinger and Dirac operators // Reports of the Russian Academy of Sciences,* 1992, vol. 326, no 3, pp. 393-398.

8. Boimatov K.Kh. *Coercive estimates and separability theorems for differential operators of the second order // Mathematical notes,* 1989, vol. 46, no 6, pp. 110-112.

9. Otelbaev M. *Coercive estimates and separability theorems for elliptic equations in* R^n *// Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova,* 1983, vol.161, pp. 195-217.

10. Muratbekov M.B., Otelbaev M. *Smoothness and approximation properties of solutions of a class of nonlinear equations of Schrodinger // Proc.of the univer. of math.,* 1989, no 3, pp. 44-48.

11. Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Ospanov K.N. *Coercive solvability of odd-order differential equations and its applications // Dokl. Mathematics.*, 2010, vol. 435, no 3, pp. 310-313.

12. Salem Omram and Khaled A.Gepreel *Separation of the Helmholtz Partial Differential Eduation in Hilbert Space // Adv.Studies Theor. Phys.,* 2012, vol. 6, no 9, pp. 399-410.

13. Zayed E.M.E. *Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem // J. Math.Anal.Appl.*, 2008, vol. 337, pp. 659-666, DOI.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.012

14. Zayed E.M.E., Salem Omram *Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert // International J. Math.Combin.*, 2010, vol. 4, pp. 13-23.

15. Zayed E.M.E., A.S.Mohamed, H.A.Atia *Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces // J. Math.Anal.Appl.,* 2007, vol.336, pp. 81-92, DOI.org/10.1016/j.jmaa.2006.07.031.

16. Karimov O.Kh. *Coercive properties and separability biharmonic operator with matrix potential // Proceedings of the International Conference on function spaces and approximation theory dedicated to the 110th birth anniversary of the of Academician C.M.Nikol'skii,* 2015, Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences, pp. 153-154.

17. Karimov O.Kh. *On separation of second order nonlinear differential operators with matrix coefficients // News of the Academy of Sciences of the Republic of Talikistan. Department of physical, mathematical, chemical, geological and technical sciences.* 2014. vol.157, no 3, pp. 42-50.

18. Karimov O.Kh. *On separation of nonlinear second order nonlinear differential operators with matrix coefficients in a weighted space // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Talikistan,* 2015, vol. 58, no 8, pp. 665-673.

19. Karimov O.Kh. *Coercive properties and separability biharmonic operator with matrix potential // Ufa mathematical journal,* 2017. vol. 9, no 1, pp. 54-61, DOI:10.13108/2017-9-1-54

Институт математики им. А.Джураева
Академии наук Республики Таджикистан.
Получено 23.06.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-255-259

ОЦЕНКА МНОГОЧЛЕНА ОТ ГЛОБАЛЬНО ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО ПОЛИАДИЧЕСКОГО ЧИСЛА

Е. С. Крупицын (г. Москва)

Аннотация

Пусть

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_k n_k!, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant a_k \leqslant n_k,$$

где n_k — быстро возрастающая последовательность натуральных чисел. Этот ряд сходится во всех полях $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел и представляет собой полиадическое число. Кольцо целых полиадических чисел является прямым произведением колец целых p-адических чисел по всем простым числам p. Это позволяет рассматривать α, как бесконечномерный вектор $\left(\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}, \ldots\right)$, где координата с номером n равна сумме этого ряда в поле $\mathbb{Q}_{p_n}$, где p_n — n-ое простое число.

Для любого многочлена $P(x)$, отличного от тождественного нуля и имеющего целые коэффициенты, имеет место равенство

$$P(\alpha) = \left(P\left(\alpha^{(1)}\right), \ldots, P\left(\alpha^{(n)}\right), \ldots\right).$$

Полиадическое число α называется алгебраическим, если $P(\alpha)$ есть нулевой вектор, $P(\alpha) = (0, \ldots, 0)$.

В работах В.Г. Чирского введены понятия трансцендентного, бесконечно трансцендентного, глобально трансцендентного числа. Именно, полиадическое число α называется алгебраическим, если для любого многочлена $P(x)$ полиадическое число $P(\alpha)$ не равно нулю, т.е. имеет хотябы одну отличную от нуля координату $P\left(\alpha^{(n)}\right)$. Полиадическое число называется бесконечно трансцендентным, если таких координат бесконечно много и глобально трансцендентным, если все $P\left(\alpha^{(n)}\right) \neq 0$. В работе получены оценки снизу $\left|P\left(\alpha^{(n)}\right)\right|_{p_n}$ в любом поле $\mathbb{Q}_{p_n}$. Следствием является глобальная трансцендентность α.

Ключевые слова: оценка многочлена, полиадическое число, трансцендентность.

Библиография: 15 названий.

ESTIMATES OF POLYNOMIALS IN A LIOUVILLEAN POLYADIC INTEGER

E. S. Krupitsyn (Moscow)

Abstract

Let

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_k n_k!, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant a_k \leqslant n_k,$$

with a rapidly growing sequence n_k of positive integers. This series converges in all p-adic fields $\mathbb{Q}_p$ so it is a polyadic number.

The ring of polyadic integers is a direct product of the rings $\mathbb{Z}_p$ of p-adic integers over all prime numbers p.

So α can be considered as the vector $\left(\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(n)},\dots\right)$ with coordinates equal to the sums $\alpha^{(n)}$ of the series α in the field $\mathbb{Q}_{p_n}$ for the n-th prime p_n.

For any nonzero polynomial $P(x)$ with integer coefficients one has

$$P(\alpha)=\left(P\left(\alpha^{(1)}\right),\dots,P\left(\alpha^{(n)}\right),\dots\right).$$

The polyadic integer α is called transcendental, if for any nonzero polynomial $P(x)$ with rational integer coefficients there exist a prime $p^{(n)}$ with $P\left(\alpha^{(n)}\right)\neq 0$ in p_n.

The polyadic integer is infinitely transcendental if there exist infinitely many primes p_n such that $P\left(\alpha^{(n)}\right)\neq 0$ in $\mathbb{Q}_{p_n}$ and it is called globally transcendental, if $P\left(\alpha^{(n)}\right)\neq 0$ for any n.

The paper presents estimates from below of $\left|P\left(\alpha^{(n)}\right)\right|_{p_n}$ in any $\mathbb{Q}_{p_n}$. As a corollary we get the global transcendence of α.

Keywords: polyadic integer, estimates of polynomials.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

В работе дается оценка многочлена от полиадического лиувиллева числа. Теория полиадических чисел изложена, например, в книге [1]. Арифметические свойства полиадических чисел исследовались в работах В. Г. Чирского [2]–[11], [15], Д. Бертрана [12], В. Ю. Матвеева, Е. С. Крупицына [13] и др.

В работе Цайсова [14] установлена оценка многочлена от лиувиллева числа в архимедовом случае.

Цель этой работы — доказательство теоремы.

2. Основной текст статьи

Теорема 1. *Пусть*

$$\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}a_k n_k!,\quad a_k\in\mathbb{Z},\quad 0\leqslant a_k\leqslant n_k,\quad n_k\in\mathbb{N},\tag{1}$$

$$\frac{(n_k+1)\ln(n_k+1)}{n_k+1}\to 0 \text{ при } k\to+\infty.\tag{2}$$

Пусть $\varepsilon(H)\to 0$ при $H\to+\infty$. Пусть $\widetilde{p}\in\mathbb{N}$. Тогда существует $H_0=H_0(\widetilde{p})$ такая, что для любого простого числа $p\leqslant\widetilde{p}$ и любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, не превосходящими по абсолютной величине числа H, $H\geqslant H_0$, имеющего степень m, удовлетворяющую неравенству

$$m\varepsilon(H)<\frac{\ln\widetilde{p}}{2(\widetilde{p}-1)}\tag{3}$$

выполнено неравенство

$$|P(\alpha)|_p>\frac{1}{m+1}\cdot H^{-1-\varepsilon^{-1}(H)\left(\ln\ln H+\ln\varepsilon^{-1}(H)\right)\cdot m}.\tag{4}$$

Доказательство. Обозначим для $N\in\mathbb{N}$ $\alpha_N=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k n_k!$. Имеет место равенство

$$P(\alpha_N)=P(\alpha)+P'(\alpha)(\alpha_N-\alpha)+\ldots+\frac{P^{(m)}(\alpha)}{m!}(\alpha_N-\alpha)^m\tag{5}$$

Если
$$\alpha_{N} > H+1, \tag{6}$$
то по лемме о модуле старшего члена $P(\alpha_{N}) \neq 0$ и
$$|P(\alpha_{N})|_p \geqslant \frac{1}{|P(\alpha_{N})|} \tag{7}$$
Ввиду неравенства
$$\left|P'(\alpha)(\alpha_{N}-\alpha)+\ldots+\frac{P^{(m)}(\alpha)}{m!}(\alpha_{N}-\alpha)^m\right|_p \leqslant |\alpha_{N}-\alpha|_p \leqslant |n_{N+1}!|_p$$
из (5) и (7) следует, что
$$|P(\alpha)|_p \geqslant \frac{1}{|P(\alpha_{N})|} \tag{8}$$
если
$$|n_{N+1}!|_p < \frac{1}{|P(\alpha_{N})|}. \tag{9}$$
Для величины $|P(\alpha_{N})|$ имеем оценку
$$|P(\alpha_{N})| \leqslant H\cdot(m+1)\cdot\alpha_{N}^m \leqslant H\cdot(m+1)\cdot((n_{N}+1)!)^m. \tag{10}$$

Ввиду формулы $|n!|_p = p^{-\frac{n-S_n}{p-1}}$, где S_n — сумма цифр p-ичного разложения числа n получаем, что неравенство (10) следует из неравенства
$$\ln(H(m+1))+m(n_{N}+1)\ln(n_{N}+1) < \frac{\ln p}{p-1}\cdot n_{N+1} - \ln(p\cdot n_{N+1}). \tag{11}$$

При $N \geqslant N_0(H)$ ввиду (2),
$$\frac{(n_{N}+1)\ln(n_{N}+1)}{n_{N+1}} < \varepsilon(H) \tag{12}$$
и
$$\ln(n_{N+1}p) < m\varepsilon(H)n_{N+1}.$$

Поэтому (8) выполняется, если одновременно выполнены эти неравенства, условие (6) и неравенство
$$n_{N+1} > \frac{(\ln H(m+1))\,(p-1)}{\ln p - 2m(p-1)\varepsilon(H)}. \tag{13}$$

В свою очередь, условие (6) следует из неравентва
$$(n_{N}+1)\ln\left(\frac{n_{N}+1}{e}\right) > \ln(H+1)$$
или, с учетом (12), из
$$n_{N+1} > \frac{\ln(H+1)}{\varepsilon(H)}. \tag{14}$$

Если считать, что $m(H) \leqslant H$, то неравенство (13) следует из (14).

Пусть теперь N выбрано так, что $N \geqslant N_0(H)$ и выполняются неравенства (14) и
$$n_{N} \leqslant \frac{\ln(H+1)}{\varepsilon(H)}. \tag{15}$$
Это можно сделать при $H \geqslant H_0(p)$. Тогда из (15) получаем заключение теоремы (4). $\square$

3. Заключение

Подобными, но существенно более громоздкими рассуждениями можно получить оценку многочлена от совокупности полиадических чисел. Отметим, что в отличие от архимедовского случая проще устанавливается, что значение многочлена в приближающей точке отлично от нуля.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971.

2. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами //Доклады Академии наук, математика, том 439, №6, с. 677-679, 2014.

3. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая, том 81, выпуск 2, с. 215-232, 2017.

4. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей // Чебышевский сборник, том 17, №3, с. 180-185, 2016.

5. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая, том 78, №6, с. 193-210, 2014.

6. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Матем. заметки, том 48, вып. 2, с. 123-127, 1990.

7. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского Университета, Серия 1: Матемаика. Механика. №1, с. 59-61, 2015.

8. Чирский В. Г., Нестеренко А. Ю. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей // Дискретная математика, том 27, №4, с. 150-157, 2015.

9. Чирский В. Г. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях. // Вестн. Моск. ун-та. – Сер.1, матем.,механ., №3, с.93-95, 1994.

10. Чирский В. Г. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел // Чебышевский сборник, том 12, №4, с. 129-134, 2011.

11. Чирский В. Г. Чирский Полиадические оценки для F-рядов. // Чебышёвский сборник, т.13, вып.2, с. 131-136, 2012.

12. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse – V.XIII, №2. 2004. pp. 241-260.

13. Крупицын Е. С., Чирский В. Г. Оценки многочленов от некоторых полиадических чисел // Преподаватель XXI век, №4, с. 217-224, 2012.

14. Cijsouw P. L. Transcendence measures. Amsterdam: Acad. Proefschrift, 1972.

15. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of yu.v. nesterenko // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 24, no. 2. — P. 153–171.

REFERENCES

1. Postnikov A. G. 1971, *Introduction to the analytic number theory.* Moscow.
2. Chirskii V. G. 2014, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Doklady Mathematics*, vol. 90, no. 3, pp. 766-768.
3. Chirskii V. G. 2017, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Izvestiya Mathematics*, vol. 81, no. 2. pp. 444-461.
4. Chirskii V. G. 2016, "An approach to the transformation of periodic sequences", *Chebushevskii sb.*, vol. 17, no. 3, pp. 180-185.
5. Chirskii V. G. 2014, "On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters", *Izvestiya Mathematics*, no. 6, pp. 1244-1260.
6. Chirskii V. G. 1990, "On global relations", *Math. notes*, vol. 48, no. 2, pp. 123-127. 1990.
7. Chirskii V. G. 2015, "Arithmetic properties of Euler series", *Moscow University Mathematics Bulletein*, vol. 70, no. 1, pp. 41-43.
8. Chirskii V. G., Nesterenko A. Yu. 2017, "An approach to the transformation of periodic sequences", *Discrete Mathematics and Applications*, vol. 27. no. 1, pp. 1-6.
9. Chirskii V. G. 1994, "On series which are algebraically independent in all local fields", *Vestnik Mosc. Univ., Ser.1, math.-mech.* no. 3, pp. 93-95.
10. Chirskii V. G. 2011, "Estimates for linear forms and polynomials in polyadic numbers", *Tchebyshev. Sbornik*, vol. 12, no. 4, pp. 129-134.
11. Chirskii V. G. 2012, "Polyadic estimates for F-series", *Tchebyshev. Sbornik*, vol. 13, no. 2, pp. 131-136.
12. Bertrand D., Chirskii V. G.,& Yebbou Y. 2004, "Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann. Fac. Sci. Toulouse* – vol. 13, no. 2, pp. 241-260.
13. Krupitsyn E. S., Chirskii V. G. 2012, "Estimates of polynomials in some polyadic numbers", *Prepodavatel' XXI century*, no. 4, pp. 217-224.
14. Cijsouw P. L. 1972, *Transcendence measures.* Amsterdam, Acad. Proefschrift.
15. Chirskii V. G. 2017, "Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko", *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 24, no. 2, pp. 153–171.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.31 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-260-267

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ С НЕБОЛЬШОЙ ДЛИНОЙ ПЕРИОДА, СВЯЗАННЫХ С ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ И S-ЕДИНИЦАМИ[1]

Ю. В. Кузнецов, Ю. Н. Штейников (г. Москва)

Аннотация

Пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, $\mathbb{Q}(x)$– поле рациональных функций от одной переменной, $f \in \mathbb{Q}[x]$– свободный от квадратов многочлен нечетной степени равной $2g+1, g>0$. Пусть для многочлена h степени 1 дискретное нормирование ν_h однозначно определенное на $\mathbb{Q}(x)$ имеет два неэквивалентных продолжения на поле $L=\mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ и ν'_h — одно из этих продолжений. Положим $S=\{\nu'_h,\nu_\infty\}$, где ν_∞ бесконечное нормирование поля L. В. П. Платоновым и М. М. Петруниным в работе [4] было показано (смотри также [2]), что S-единица в L существует тогда и только тогда, когда бесконечная непрерывная функциональная дробь, в которую раскладывается элемент $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ является периодичной. В данной работе исследуются непрерывные периодические дроби, возникающие из указанного разложения. Для некоторых небольших значений длины периода и квазипериода получены оценки на степени соответствующих фундаментальных S-единиц, а также некоторые необходимые условия, которым должны удовлетворять элементы указанных дробей.

При доказательстве существенно используются результаты, полученные В. П. Платоновым и М. М. Петруниным в работе [4].

Ключевые слова: непрерывные дроби, гиперэллиптические поля, S-единицы, нормирование.

Библиография: 15 названий.

ON SOME PROPERTIES OF CONTINUED PERIODIC FRACTIONS WITH SMALL LENGTH OF PERIOD RELATED WITH HYPERELLIPTIC FIELDS AND S-UNITS

Yu. V. Kuznetsov, Yu. N. Shteinikov (Moscow)

Abstract

Let $\mathbb{Q}$ be a field of rational numbers, let $\mathbb{Q}(x)$ be the field of rational functions of one variable, and let $f \in \mathbb{Q}[x]$ be a squarefree polynomial of odd degree which is equal to $2g+1, g>0$. Suppose that for a polynomial h of degree 1 the discrete valuation ν_h which is uniquely defined on $\mathbb{Q}(x)$ has two nonequivalent extensions to the field $L=\mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ and ν'_h is one of these extensions. We put $S=\{\nu'_h,\nu_\infty\}$, where ν_∞ is an infinite valuation of the field L. In the paper [4] V. P. Platonov and M. M. Petrunin (see also [2]) obtained that a S-unit in L exists if and only if the element $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ expands into the periodic infinite continuous functional fraction. In this paper we study continuous periodic fractions connected with this expansion. For some small values of the length of period and quasiperiod we obtained estimates for the degrees of corresponding fundamental S-units and some necessary conditions with which the elements of these fractions have to satisfy.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10111).

In the proof we use the results obtained by V. P. Platonov and M. M. Petrunin in the paper [4].

Keywords: continued fractions, hyperelliptic fields, S-units, valuation.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Пусть k — поле характеристики отличной от 2, f- многочлен нечетной степени $2g+1$ и f свободен от квадратов. Обозначим через L поле $k(x)(\sqrt{f})$. Напомним, что для неприводимого над k многочлена h дискретное нормирование ν_h (элемента поля $k(x)$) задается равенством

$$\nu_h(h^m \frac{a}{b}) = m,$$

где многочлены a, b не делятся на h. Пусть далее h — многочлен степени 1 такой, что дискретное нормирование ν_h поля $k(x)$, задаваемое этим многочленом, имеет два продолжения на поле $k(x)(\sqrt{f})$. Одно из этих нормирований обозначим через ν'_h и определим $S = \{\nu'_h, \nu_\infty\}$. Обозначим через O_S кольцо S-целых элементов L, то есть таких элементов z, что $\nu_v(z) \geq 0$ для всех нормирований ν_v поля L, не принадлежащих S. Отметим сразу, что поскольку многочлен f имеет нечетную степень, то нормирование ν_∞ поля $k(x)$ имеет одно продолжение на поле L. Тот факт, что ν_h имеет два продолжения на поле L равносилен тому, что свободный коэффициент многочлена f при разложении f по степеням h есть квадрат из k^*. Мультипликативная группа кольца O_S — S-целых элементов поля L, называется группой S-единиц. Если существует хотя бы одна нетривиальная S-единица (то есть отличная от константы поля k), то в описанном нами случае группа S-единиц является прямым произведением k^* и бесконечной циклической группы. Образующие этой циклической группы называются фундаментальными S-единицами.

Имеется важная связь между существованием нетривиальных S-единиц и разложением $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ в непрерывную дробь в поле L. В. П. Платоновым и М. М. Петруниным в работе [4] (см. также работу [2]) было показано, что нетривиальная S-единица в L существует тогда и только тогда, когда бесконечная непрерывная функциональная дробь, в которую раскладывается элемент $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$, является периодичной.

Сформулируем основную цель данной работы. Мы будем изучать различные виды периодических непрерывных дробей для элемента $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ и пользуясь дополнительной информацией о виде такого разложения для небольших значений длины периода и квазипериода находить оценки на степени соответствующих фундаментальных S-единиц, а также получать необходимые условия, которым должны удовлетворять элементы указанных непрерывных дробей.

Работа организована следующим образом. Во втором разделе представлены некоторые важные утверждения о S-единицах и их связей с непрерывными дробями, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. В третьем разделе мы формулируем и доказываем основные результаты. В четвертом разделе приводятся заключительные комментарии.

2. Вспомогательные утверждения

Здесь мы приводим основные утверждения о S-единицах и непрерывных дробях, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Напомним понятия периода и квазипериода непрерывной функциональной дроби. Пусть задана непрерывная дробь $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$. Обозначим через α_n — полное частное с номером n, то есть $\alpha_n = [a_n, a_{n+1}, \ldots]$.

Разложение в непрерывную дробь элемента α называется периодичным (квазипериодичным), если существует такие $i > j \geq 0$, что $\alpha_i = \alpha_j$ (соответственно $\alpha_i = c\alpha_j$, где $c \in k^*$). Наименьшее такое $i - j$ называется периодом (квазипериодом) рассматриваемой непрерывной дроби.

Всюду далее в качестве базового поля будем рассматривать поле $\mathbb{Q}$. Теорема 1 из работы [4] устанавливает связь между существованием нетривиальных S-единиц и периодичностью непрерывной дроби для элемента $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$.

Теорема 1. *[4] Непрерывная дробь для элемента $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ – периодична тогда и только тогда, когда существует нетривиальная S-единица поля L.*

Разложение в непрерывную дробь элемента $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ имеет ряд важных особенностей.

Теорема 2. *[4] Пусть непрерывная дробь для элемента $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ периодична. Тогда эта непрерывная дробь имеет вид*

$$[C_0, \overline{C_1, \ldots, C_w}] \tag{1}$$

где $C_w = 2C_0$ и $C_i = C_{w-i}, 1 \leq i \leq w - 1$.

Отметим, что аналогичное свойство имеет место и для чисел (для специальных квадратичных иррациональностей).

Следуя работе [1] введем понятие степени фундаментальной S-единицы. Пусть $p + q\sqrt{f}$ — фундаментальная S-единица и число $m > 0$ определяется из следующего норменного уравнения

$$p^2 - q^2 f = bh^m, b \in k^*. \tag{2}$$

Тогда m называется степенью фундаментальной S-единицы $p + q\sqrt{f}$.

С каждым шагом разложения произвольного элемента поля L в непрерывную дробь связаны два многочлена $L_j, M_j \in k[x]$, которые соответствуют многочленам A_j и B_j, из работы [7] (см. §5.1). Для элемента $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ многочлен L_j определяется из равенства

$$L_j = (-1)^{j+1}(h^{2g+2}P_j^2 - fQ_j^2), \tag{3}$$

где P_j, Q_j — числитель и соответственно знаменатель j-й подходящей дроби к $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$, см. [4]. Если n — такое минимальное целое неотрицательное число, при котором $L_n = bh^r, \;\; b \in k^*$, то с помощью подходящих числителя и знаменателя P_n, Q_n для $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ мы легко можем построить фундаментальную S-единицу (см. [4]). Сформулируем следующую теорему, доказанную в [4].

Теорема 3. *[4] Пусть $\alpha = \frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$. Пусть фундаментальная S-единица поля L существует, и ее степень равна m, и пусть n — минимальное целое неотрицательное число, при котором $L_n = bh^r, \;\; b \in k^*$. Если m является четным числом, тогда $r = 2g + 2$. При этом длина квазипериода равна n, а длина периода равна либо n, либо $2n$. Если же m является нечетным числом тогда $r = 2g + 1$. При этом длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна $2n$.*

В обозначениях Теоремы 3 определим t

$$-t = \sum_{1 \leq i \leq n-1} \nu_h(a_i). \tag{4}$$

Следуя рассуждениям, предложенным в [4], легко вывести соотношение, связывающее m, t, r.

Лемма 1. *Справедливо следующее соотношение*

$$m = 2t + r. \tag{5}$$

Отметим простое наблюдение, вытекающее из Теоремы 3. В случае когда степень фундаментальной S единицы m равна четному числу, n совпадает с длиной квазипериода. В случае же нечетного m величина n является половиной квазипериода (или периода).

Отметим также, что имеются некоторые дополнительные соотношения на сумму нормирований соседних a_i, которые установлены в [5].

3. Доказательство основных утверждений.

Будем рассматривать 5 видов непрерывной дроби для $\alpha = \frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$. В следующей лемме мы вычисляем выражение для f через разложение α в непрерывную дробь.

Proposition 1. *1. Если $\alpha = [a_0, \overline{2a_0}]$, то $f = h^{2g+2}(a_0^2 + 1)$.*
2. Если $\alpha = [a_0, \overline{a_1, 2a_0}]$, то $f = h^{2g+2}(a_0^2 + \frac{2a_0}{a_1})$.
3. Если $\alpha = [a_0, \overline{a_1, a_1, 2a_0}]$, то $f = h^{2g+2}(a_0^2 + \frac{2a_0a_1+1}{a_1^2+1})$.
4. Если $\alpha = [a_0, \overline{a_1, l^{-1}a_1, 2la_0, l^{-1}a_1, a_1, 2a_0}]$, то $f = h^{2g+2}(a_0^2 + \frac{2a_0a_1+1}{l^2a_1^2+l})$.
5. Если $\alpha = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_1, 2a_0}]$, то $f = h^{2g+2}(a_0^2 + \frac{a_2+2a_0+2a_0a_1a_2}{2a_1+a_1^2a_2})$.

Доказательство.

1. Пусть $u = [a_0, \overline{2a_0}]$. Тогда $\frac{1}{u-a_0} = [\overline{2a_0}] = a_0 + u$. Откуда получаем $u^2 = a_0^2 + 1$. Тем самым $f = h^{2g+2}(a_0^2 + 1)$.

2.Пусть $u = [a_0, \overline{a_1, 2a_0}]$. Имеем, $\frac{1}{u-a_0} = [\overline{a_1, 2a_0}]$. Далее вычитаем из обеих частей a_1 и находя обратное выражение, получим $\frac{u-a_0}{1-a_1u+a_0a_1} = a_0 + u$. Решая несложное уравнение, получим $u^2 = a_0^2 + \frac{2a_0}{a_1}$. Теперь стоит заметить, что $f = h^{2g+2}u^2$.

4.Теперь разберем четвертый случай. Третий же случай получается из него при $l = 1$. При выводе соотношения будем использовать, что квазипериод равен 3. Это позволит получить соотношение на искомую величину. Пусть $u = [a_0, \overline{a_1, l^{-1}a_1, 2la_0, l^{-1}a_1, a_1, 2a_0}]$. Обозначим $w = \frac{1}{u-a_0}$. Имеем, $w = [a_1, l^{-1}a_1, \ldots]$. Далее, $\frac{1}{w-a_1} = [l^{-1}a_1, 2la_0, \ldots]$.

Вычитая из обеих частей $l^{-1}a_1$ и находя обратное выражение, получим $\frac{w-a_1}{1-l^{-1}a_1(w-a_1)} = [2la_0, l^{-1}a_1, \ldots]$. Вновь вычитая из обеих частей $2la_0$ и находя обратное, получим

$$\frac{1 - l^{-1}a_1w + l^{-1}a_1^2}{w - a_1 - 2la_0 + 2a_0a_1w - 2a_0a_1^2} = l^{-1}w. \tag{6}$$

Отсюда получаем, что $w^2 = \frac{(1+l^{-1}a_1^2)(1+2a_0)}{l^{-1}(1+2a_0a_1)}$.

Теперь заметим, что $f = (\frac{1}{w} + a_0)^2$. Подставляя предыдущее выражение в это получается нужный вид для f.

5. Пятый случай разбирается аналогично предыдущим. Предложение доказано.

□

Используя предыдущие утверждения остается найти условия, при которых так определенные выражения для f в действительности задают многочлен 5 степени и убедиться, что свободный коэффициент многочлена f при разложении по степеням h есть полный квадрат из k^*.

Перейдем к формулировке нашего основного утверждения. В следующей теореме $\alpha = \frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$, и величины m, t, r, g определены также как и в Теореме 3 и Лемме 1.

Теорема 4. *1. Ни для какого многочлена f нечетной степени $2g+1$ α не раскладывается в периодическую дробь вида $[a_0, \overline{2a_0}]$.*

2. Пусть $\alpha = [a_0, \overline{a_1, 2a_0}]$. Если степень m фундаментальной S-единицы поля L есть число четное, тогда

$$2g + 4 \leq m \leq 4g + 4.$$

Если же m – нечетное, то

$$m = 2g + 1.$$

В обоих случаях a_1 делит a_0 как элемент $\mathbb{Q}[h^{-1}]$.

3. Пусть $\alpha = [a_0, \overline{a_1, l^{-1}a_1, 2la_0, l^{-1}a_1, a_1, 2a_0}]$. Тогда степень фундаментальной S-единицы есть четное число m и

$$2g + 6 \leq m \leq 6g + 6.$$

Кроме того $l^2a_1^2 + l$ делит $2a_0a_1 + 1$ как элемент $\mathbb{Q}[h^{-1}]$.

4. Пусть $\alpha = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_1, 2a_0}]$ и степень фундаментальной S-единицы поля L есть число нечетное. Тогда

$$2g + 3 \leq m \leq 4g + 3.$$

Кроме того $2a_1 + a_1^2a_2$ делит $a_2 + 2a_0 + 2a_0a_1a_2$ как элемент $\mathbb{Q}[h^{-1}]$.

Отметим, что в пунктах 2,3 нижняя оценка на величину m следует из Следствия 4 работы [1]. Оба неравенства пункта 4 также вытекают из указанного утверждения. Верхние же оценки в пунктах 2,3 более точные, чем оценки, получающиеся непосредственным применением Следствия 4 указанной работы. Данное обстоятельство обусловлено рассмотрением конкретных видов непрерывных дробей.

Доказательство. 1. Мы видим, что старший член выражения $a_0^2 + 1$ не тождественный нуль. Первый пункт доказан.

Перейдем ко второму пункту.

2. Во-первых согласно Лемме 1 и замечания к нему, мы имеем, что $m = 2t + 2g + 2$. Так как $t > 0$, получаем отсюда соотношение

$$m \geq 2g + 4.$$

Отметим также, что $-t$ в данном случае является нормированием a_1.

Далее, $\nu(a_0) = -g - 1$ и $a_0^2 \in \mathbb{Q}[h^{-1}]$. Поэтому отсюда немедленно заключаем, что выражение $\frac{2a_0}{a_1}$ в своем разложении не имеет членов с положительными степенями h. Значит, поскольку $2a_0, a_1 \in \mathbb{Q}[h^{-1}]$, то на самом деле $2a_0$ делится на a_1 как многочлен из $\mathbb{Q}[h^{-1}]$. Это гарантирует нам, что так определенное выражение для f является действительно многочленом. Сравнивая степени a_0 и a_1 заключаем еще одно соотношение $t \leq g + 1$, что равносильно

$$m \leq 4g + 4.$$

Пусть теперь $a_0 = A_0 + A_{-1}h^{-1} + \ldots + A_{-g-1}h^{-g-1}$ $a_1 = B_0 + B_{-1}h^{-1} + \ldots$, где $A_i, B_i \in \mathbb{Q}$, и рассмотрим случай когда A_0 и B_0 одновременно не нули. Тогда условие, что многочлен f является многочленом степени не выше $2g + 1$ равносильно условию $2A_0/B_0 + A_0^2 = 0$.

Далее сформулируем условие, означающее что степень многочлена f есть в точности $2g+1$. Обозначим через w коэффициент при h^{-1} у элемента $\frac{2a_0}{a_1}$. Тогда последнее условие равносильно требованию $2A_0A_{-1} + w \neq 0$. Величину w можно определить сравнивая коэффициенты при h^{-1} у $2a_0$ и a_1. Это сравнение ведет к такому соотношению $wB_0 + \frac{2A_0}{B_0}B_{-1} = 2A_{-1}$. Отсюда однозначно выражается w.

Наконец должно выполняться условие, заключающееся в том, что свободный коэффициент многочлена f при разложении по степеням h является квадратом. Это условие будет автоматически выполняться, так как это следует из того, что нормирование по h величины a_0^2 строго меньше чем $\frac{2a_0}{a_1}$ и нужный коэффициент всегда окажется квадратом. Случай же нечетного m рассматривается аналогично. Соотношение $m = 2g + 1$ немедленно вытекает из Леммы 1. Второй пункт теоремы доказан. Перейдем к доказательству третьего пункта.

3. Отметим сразу, что указанный вид непрерывной дроби и Теорема 3 автоматически дают нам условие, что степень фундаментальной S-единицы может быть только числом четным. Мы видим, что $\nu(a_0) = -g - 1$ и $a_0^2 \in \mathbb{Q}[h^{-1}]$. Поэтому отсюда немедленно заключаем, что выражение $\frac{2a_0a_1+1}{l^2a_1^2+l}$ в своем разложении не имеет членов с положительными степенями h. Значит, поскольку $2a_0a_1 + 1, l^2a_1^2 + l \in \mathbb{Q}[h^{-1}]$, то на самом деле $2a_0a_1 + 1$ делится на $l^2a_1^2 + l$ как элементы $\mathbb{Q}[h^{-1}]$. Сравнение степеней этих многочленов дает $t/2 \leq g+1$. В нашем случае $t = -2\nu_h(a_1)$, поэтому последнее условие равносильно

$$m \leq 6g + 6.$$

Нетрудно заметить, что $t \geq 2$. Отсюда сразу получаем

$$m \geq 2g + 6.$$

Далее, $a_0^2 + \frac{2a_0a_1+1}{l^2a_1^2+l}$ как многочлен из $\mathbb{Q}[h^{-1}]$ делится на h^{-1}. Запишем это условие в терминах коэффициентов a_0, a_1. Пусть как и раньше $a_0 = A_0 + A_{-1}h^{-1} + \ldots + A_{-g-1}h^{-g-1}$ и $a_1 = B_0 + B_{-1}h^{-1} + \ldots$, причем $l^2B_0^2 + l$ и $2A_0B_0 + 1$ одновременно не нули. Тогда условие, что многочлен f является многочленом степени не выше $2g + 1$ равносильно условию $A_0^2 + \frac{2A_0B_0+1}{l^2B_0^2+l} = 0$. Аналогично, вычисляя коэффициент при h^{-1} у выражения $a_0^2 + \frac{2a_0a_1+1}{l^2a_1^2+l}$, можно получить условие того, что так определенный многочлен f, будет иметь степень $2g+1$.

Легко видеть, что свободный коэффициент при нулевой степени h у многочлена f определяется по a_0^2, и тем самым, дискретное нормирование ν_h действительно имеет два продолжения на поле L. Третий пункт также доказан.

Перейдем к доказательству 4 пункта.

4. В предыдущих обозначениях, и используя Теорему 3, получаем

$$m = 2t + 2g + 1, t = -\nu_h(a_1).$$

Видим, что $t \geq 1$, и значит, $m \geq 2g + 3$. Рассуждая аналогично как и в предыдущим пунктах, из условия делимости $a_2 + 2a_0 + 2a_0a_1a_2$ на $2a_1 + a_1^2a_2$ и сравнения нормирований, заключаем, что $g + 1 \geq t$. Это условие равносильно

$$m \leq 4g + 3.$$

Аналогично первому пункту можно также получить условия на коэффициенты a_i, чтобы f имел степень в точности $2g + 1$. Теорема доказана. □

4. Благодарности

Авторы этой статьи выражают благодарность академику В. П. Платонову и М. М. Петрунину за неоднократное обсуждение тематики статьи, ценные советы, предложения и некоторые интересные идеи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Платонов В.П., Петрунин М.М. Фундаментальные S-единицы в гиперэллиптических полях и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых // ДАН, 2015, Т 465, № 1. С. 23-25.

2. Платонов В.П., Федоров Г.В. S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН, 2015, Т 465, № 5. С. 537-541.

3. Платонов В.П., Петрунин М.М. S-единицы и периодичность в квадратичных функциональных полях // УМН, (2016), том 71, выпуск 5(431), С. 181–182.

4. Платонов В.П., Петрунин М.М. S-единицы в гиперэллиптических полях и периодичность непрерывных дробей // ДАН, 2016, Т 470, № 3. С. 260-265.

5. Жгун В.С, Платонов В.П, Федоров Г.В. Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и представление Мамфорда. // Доклады Академии наук, 2016, Т. 471, № 6:16.

6. Платонов В.П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел. // УМН, 2014, Т. 69, № 1(415), С. 3-38.

7. Беняш-Кривец В.В., Платонов В.П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывые дроби // Мат. Сборник. 2009. Т. 200, № 11, С. 15–44.

8. Schmidt W.M. On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // Acta Arithm., 2000. Vol. 95, № 2, P. 139–166.

9. Беняш-Кривец В.В., Платонов В.П. S-единицы в гиперэллиптических полях // УМН, 62:4 (2007). С. 149–150.

10. Беняш-Кривец В.В., Платонов В.П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях // Докл. РАН, 417:4 (2007). С. 446–450.

11. Беняш-Кривец В.В., Платонов В.П. Непрерывные дроби и S-единицы в гиперэллиптических полях // УМН, 63:2 (2008). С. 159–160.

12. Платонов В.П., Федоров Г.В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях //Доклю РАН, 474:5 (2017). С. 540–544.

13. Платонов В.П., Федоров Г.В. О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях //Доклю РАН, 475:2 (2017). С. 133–136.

14. Adams W.W., Razar M.J. Multiples of point on elliptic curves and continued fractions //Proc. London Math. Soc. 1980 Vol. 41. № 3, P. 481–498.

15. Leprevost F. Points rationnels de torsion de jacobiennes de certaines courbes de genre 2 // C.R. Acad. Sci. Paris. 1993. Vol. 316, № 8, . P. 819–821.

REFERENCES

1. Platonov V. P., Petrunin M. M. 2015, *Fundamental S-units in hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves Dokl. Math.*, vol. 92, № 3, pp. 667-669.

2. Platonov V. P., Petrunin M. M. 2015, *S-units and periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields Dokl. Math.*, vol. 92, № 3, pp. 752-756.

3. Platonov V. P., Petrunin M. M. 2016, *S-Units and periodicity in quadratic function fields Russian Math. Surveys*, vol. 71, № 5, pp. 973–975.

4. Platonov V. P., Petrunin M. M. 2016, *S-units in hyperelliptic fields and periodicity of continued fractions Dokl. Math.*, vol. 94, № 2, pp. 532–537.

5. V. P. Platonov, V. S. Zhgoon, G. V. Fedorov 2016, *Continued Rational Fractions in Hyperelliptic Fields and the Mumford Representation. Dokl. Math.*, vol. 94, № 3, pp. 692–696.

6. Platonov V. P. 2014, *Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field. Russian Math. Surveys*, vol. 69, № 1, pp. 1-34.

7. Benyash-Krivets V. V., Platonov V. P. 2009, *Groups of S-units in hyperelliptic fields and continued fractions. Sb. Math.*, vol. 200, № 11, pp. 1587-1615.

8. Schmidt W. M. 2000, *On continued fractions and diophantine approximation in power series fields Acta Arithm.*, vol. 95, № 2, pp. 139–166.

9. Benyash-Krivets V. V., Platonov V. P. 2007, *S-units in hyperelliptic fields. Russian Math. Surveys*, vol. 62, № 4, pp. 784–786.

10. Benyash-Krivets V. V., Platonov V. P. 2007, *Groups of S-units in hyperelliptic fields. Dokl. Math.*, vol. 417, № 4, pp. 446–450.

11. Benyash-Krivets V. V., Platonov V. P. 2008, *Continued fractions and S-units in hyperelliptic fields. // Russian Math. Surveys*, vol. 63, № 2, pp. 357–359.

12. Platonov V. P., Fedorov G. V. 2017, *On the periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields. Dokl. Math.*, 95, № 3, pp. 254–258.

13. Platonov V. P., Fedorov G. V. 2017, *On the periodicity of continued fractions in elliptic fields. Dokl. Math.*, vol. 475, № 2, pp. 133–136.

14. Adams W. W., Razar M. J. 1980, *Multiples of point on elliptic curves and continued fractions. Proc. London Math. Soc.*, vol. 41, № 3, pp. 481–498.

15. Leprevost F. 1993, *Points rationnels de torsion de jacobiennes de certaines courbes de genre 2. C.R. Acad. Sci. Paris.*, vol. 316, № 8, pp. 819–821.

Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН), Отдел теоретической и прикладной алгебры и теории чисел.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 519.6:539.52 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДИЛАТИРУЮЩИХ СРЕД К ПРОЦЕССАМ УПЛОТНЕНИЯ ПОРОШКОВ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

$\boxed{\text{Э. С. Макаров}}$, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев, А. Н. Сергеев, И. В. Минаев (г. Тула), А. Д. Бреки (г. Санкт-Петербург), Д. В. Малий (г. Тула)

Аннотация

В работе проведен расчет основных параметров процесса уплотнения порошков металлических систем (металлов, сталей, цветных сплавов различных систем легирования) при пластическом деформировании прессованием. Рассмотрены варианты вычисления распределения давлений и плотностей в порошковых брикетах различного поперечного сечения в различных системах координат. Установлено, что наибольшая плотность порошкового брикета прямоугольного сечения после прессования наблюдается у стенки матрицы под прессующим пуансоном, причем в середине короткой стороны прямоугольника плотность выше, чем в середине длинной стороны; наименьшая плотность наблюдается у стенки матрицы над неподвижным пуансоном, причем в середине короткой стороны прямоугольника плотность ниже, чем в середине длинной стороны; наименьшая плотность под прессующим пуансоном и наибольшая плотность над неподвижным пуансоном наблюдаются в центрах соответствующих прямоугольных сечений. Показано, что в брикетах эллиптического сечения из порошков металлических систем после прессования при положительной величине ζ ($\zeta > 0$) давление и плотность у концов большой оси эллипса больше, чем у концов малой оси и, наоборот, при $\zeta < 0$ давление и плотность у концов большой оси меньше, чем у концов малой оси. Полученные результаты могут быть использованы при разработке малоотходных и ресурсосберегающих процессов и технологий обработки промышленных материалов в различных условиях и состояниях.

Ключевые слова: порошковый материал, уплотнение, прессование, пластическая деформация, поперечное сечение, давление, плотность.

Библиография: 35 названий.

APPLICATION OF PLASTICITY THEORY OF DILATING MEDIA TO SEALING PROCESSES OF POWDERS OF METALLIC SYSTEMS

$\boxed{\text{E. S. Makarov}}$, A. E. Gvozdev, G. M. Zhuravlev, A. N. Sergeev, I. V. Minaev (Tula), A. D. Breki (St. Petersburg), D. V. Maliy (Tula)

Abstract

The authors carried out the basic parameters calculation of compacting powders of metallic systems (metals, steels, non-ferrous alloys of different alloying systems) during plastic compression deformation. The paper considers variants of calculating the pressures and densities distribution in powder compacts of various cross sections in different coordinate systems. The authors found that the highest density of the rectangular cross-section powder compact after pressing is observed near a die wall under the pressing punch, at the middle of the short side of the rectangle the density is higher than in the middle of the long side; the lowest density is observed at the die wall above the fixed punch, and in the middle of the short side of the rectangle the density is lower than in the middle of the long side; the lowest density under the pressing punch and the highest density over the fixed punch are observed at the centers of the corresponding rectangular sections. It is shown that in elliptical section compacts of the powders of metal systems after pressing at positive value ζ ($\zeta > 0$) the pressure and density at the ends of the ellipse major axis are higher than at the ends of the minor axis and, conversely, when the $\zeta < 0$ pressure and density at the ends of the major axis are less than at the ends of the minor axis. The obtained results can be used to develop low-waste and resource-saving processes and technologies for processing industrial materials under various conditions and states.

Keywords: powder material, sealing, pressing, plastic deformation, cross-section, pressure, density.

Bibliography: 35 titles.

1. Введение

Необратимое изменение объема материала возникает во многих технологических процессах. Учет необратимого изменения объема материала необходим при расчетах многих технологических процессов, например, при обработки давлением и резанием пористых металлов, уплотнении порошков металлических систем прессованием. На основании экспериментальных и теоретических исследований, выполненных в нашей стране и за рубежом, разработаны методы расчета основных параметров процессов пластического деформирования порошковых материалов. Однако дальнейшее развитие техники выдвигает все более сложные задачи, эффективное решение которых связано изучением основных параметров процессов пластического деформирования порошков металлических систем, которые являются основой для разработки современных малоотходных ресурсосберегающих технологических процессов производства.

В работе рассмотрены варианты расчета распределения давлений и плотностей в брикетах различного поперечного сечения при уплотнении порошков металлических систем (металлов, сталей, сплавов различных систем легирования) прессованием.

2. Прямоугольное сечение

Для проведения расчета воспользуемся теорией пластичности дилатирующих сред, основные положения которой изложены в работе [1].

Пусть поперечное сечение брикета является прямоугольником со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. $1a$).

Ввиду симметрии сечения относительно осей x и y полагаем, что произвольные постоянные

$$A_n = B_n = C_n = 0, D_n \neq 0.$$

Находим геометрические характеристики поперечного сечения брикета.

$$H_n = \frac{4}{k_n l_n}\left(k_n chk_n ashl_n b + l_n shk_n achl_n b\right) \tag{1}$$

$$T_n = \frac{4}{k_n l_n} shk_n ashl_n b \tag{2}$$

Поскольку эти и другие формулы должны быть справедливы и для квадратного сечения (рис. 1,б), имеющего еще две оси симметрии, а именно, $y = \pm x$, следует положить [1]

$$k_n = l_n = \nu_n/\sqrt{2} \tag{3}$$

Формулы (1) и (2) принимают вид:

$$H_n = \frac{4}{k_n} shk_n(a+b), T_n = \frac{4}{k_n^2} shk_n a shk_n b \tag{4}$$

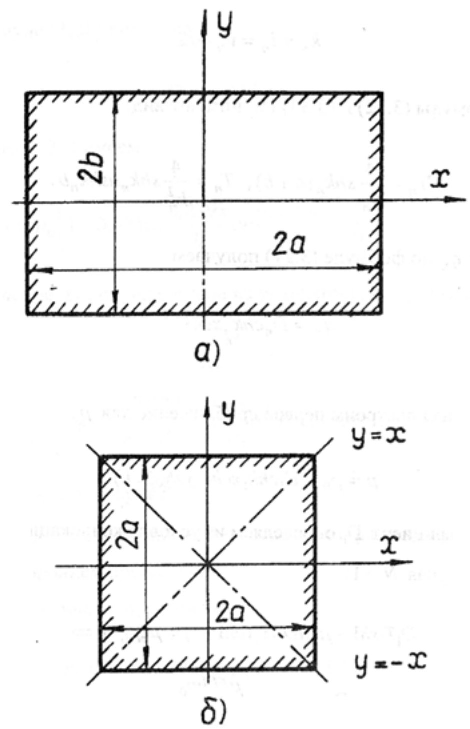


Рис. 32: Сечения: а) прямоугольное, б) квадратное

Для q_n получаем

$$q_n = D_n chk_n x chk_n y \tag{5}$$

Сначала построим первое приближение для p:

$$p = p_0 + D_1 chk_1 x chk_1 y sh(\zeta/h) \tag{6}$$

Коэффициент D_1 определяем из условия коллокации для пары сечений $\zeta_1 = 0$ и $\zeta_2 = h$, записанного для случая $N = 1$:

$$\begin{gathered} D_1 T_1 sh1 - \mu\xi h D_1 H_1(ch1 - 1) = \mu\xi p_0 L h \Rightarrow \\ \Rightarrow D_1 = \frac{\mu\xi L h p_0}{T_1 sh1 - \mu\xi h H_1(ch1-1)}. \end{gathered} \tag{7}$$

Возьмем следующие числовые данные

$$a = 2b; h = 4b; \xi = 0,4; \mu = 0,25.$$

Тогда

$$\nu_1 = 0,395/b; k_1 = l_1 = 0,279/b; L = 12b;$$

$$shk_1 a = 0,587; shk_1 b = 0,283; shk_1(a+b) = 0,938;$$

$$H_1 = 13,448b; T_1 = 8,536b^2.$$

По формуле (7) получаем

$$D_1 = 0,657p_0.$$

Согласно (6) имеем

$$p = p_0\left(1 + 0,675ch\frac{0,279x}{b}ch\frac{0,279y}{b}sh\frac{\zeta}{4b}\right) \tag{8}$$

где нетто-давление p_0, определяемое из условия постоянства массы, составляет

$$p_0 = \frac{M^m p_{\max}}{V^m \rho_k^m} = \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_k}\right)^m p_{\max}, \tag{9}$$

а $\bar{\rho}$ - средняя плотность брикета.

Рассчитываем давления в различных точках сечения при одностороннем прессовании:

а) под прессующим пуансоном

$$p(0,0,h) = 1,793p_0, p(a,0,h) = 1,920p_0,$$

$$p(0,b,h) = 1,824p_0, p(a,b,h) = 1,956p_0;$$

б) в среднем сечении

$$p(x,y,0) = p_0 \forall (x,y) \in [-a,a] \times [-b,b];$$

в) над неподвижным пуансоном

$$p(0,0-h) = 0,207p_0, p(a,0,-h) = 0,080p_0,$$

$$p(0,b,-h) = 0,176p_0, p(a,b,-h) = 0,044p_0.$$

Рассчитаем по этим данным отношение наибольшей плотности Θ_1 в брикете к наименьшей плотности Θ_2. Используя

$$p = p_{\max}\Theta^m,$$

где $p_{\max}$- давление прессования, обеспечивающее получение беспористой заготовки; m - константа, причем, согласно [2], для любых металлических порошков $m \geqslant 3$, получаем

$$\frac{p(a,b,h)}{p(a,b,-h)} = \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\sqrt[m]{44,45}, \tag{10}$$

что, например, при $m = 6$ дает $\Theta_1 = 1,88\Theta_2$, т.е. наибольшая плотность превышает наименьшую на 88 %.

Теперь построим второе приближение для p:

$$p = p_0 + D_1 chk_1 x chk_1 y sh\frac{\zeta}{2h} + D_2 chk_2 x chk_2 y sh\frac{\zeta}{h} \tag{11}$$

При тех же исходных числовых данных имеем:

$$\nu_1 = 0,198/b \Rightarrow k_1 = l_1 = 0,140b,$$

$$\nu_2 = 0,395/b \Rightarrow k_2 = l_2 = 0,279/b,$$

$$shk_1a = 0,283, shk_1b = 0,140, shk_1(a+b) = 0,432,$$

$$shk_2a = 0,587, shk_2b = 0,283, shk_2(a+b) = 0,938,$$

$$H_1 = 12,343b, T_1 = 8,086b^2, H_2 = 13,448b, T_2 = 8,536b^2.$$

Для нахождения D_1 и D_2 формулируем при $N = 2$ условия коллокации, используя следующие пары сечений:

а) $\zeta_1 = 0$ и $\zeta_2 = h$, б) $\zeta_1 = 0$ и $\zeta_2 \frac{1}{2} h$

$$\left[T_1 sh\frac{1}{2} - 2\mu\xi h H_1 \left(ch\frac{1}{2} - 1\right)\right] D_1 + + \left[T_2 sh1 - \mu\xi h H_2 \left(ch1 - 1\right)\right] D_2 = \mu\xi p_0 Lh;$$

$$\left[T_1 sh\frac{1}{4} - 2\mu\xi h H_1 \left(ch\frac{1}{4} - 1\right)\right] D_1 + + \left[T_2 sh\frac{1}{2} - \mu\xi h H_2 \left(ch\frac{1}{2} - 1\right)\right] D_2 = \frac{1}{2}\mu\xi p_0 Lh.$$

Эти условия после преобразований принимают вид

$$\left.\begin{array}{l} 2,949D_1 + 7,109D_2 = 4,8p_0 \\ 1,740D_1 + 3,758D_2 = 2,4p_0 \end{array}\right\}, \tag{12}$$

откуда по правилу Крамера находим

$$D_1 = -0,759p_0, D_2 = 0,990p_0.$$

Внося эти значения коэффициентов в (11), получаем

$$p = p_0 \left(1 - 0,759ch\frac{0,140x}{b} ch\frac{0,140y}{b} sh\frac{\zeta}{8b} + 0,990ch\frac{0,279x}{b} ch\frac{0,279}{b} sh\frac{\zeta}{4b}\right) \tag{13}$$

По формуле (13) рассчитываем давления в различных точках поперечного сечения при одностороннем прессовании:

а) под прессующим пуансоном

$$p(0,0,h) = 1,767p_0, p(a,0,h) = 1,938p_0,$$

$$p(0,b,h) = 1,808p_0, p(a,b,h) = 1,986p_0;$$

б) в среднем сечении

$$p(x,y,0) = p_0 \forall (x,y) \in [-a,a] \times [-b,b];$$

в) над неподвижным пуансоном

$$p(0,0,-h) = 0,233p_0, p(a,0,-h) = 0,062p_0,$$

$$p(0,b,-h) = 0,192p_0, p(a,b,-h) = 0,014p_0.$$

Из рассмотрения результатов, полученных на основе обоих приближений (8) и (13), вытекают следующие выводы:

- наибольшая плотность наблюдается у стенки матрицы под прессующим пуансоном, причем в середине короткой стороны прямоугольника плотность выше, чем в середине длинной стороны;

- наименьшая плотность наблюдается у стенки матрицы над неподвижным пуансоном, причем в середине короткой стороны прямоугольника плотность ниже, чем в середине длинной стороны;

- наименьшая плотность под прессующим пуансоном и наибольшая плотность над неподвижным пуансоном наблюдаются в центрах соответствующих прямоугольных сечений.

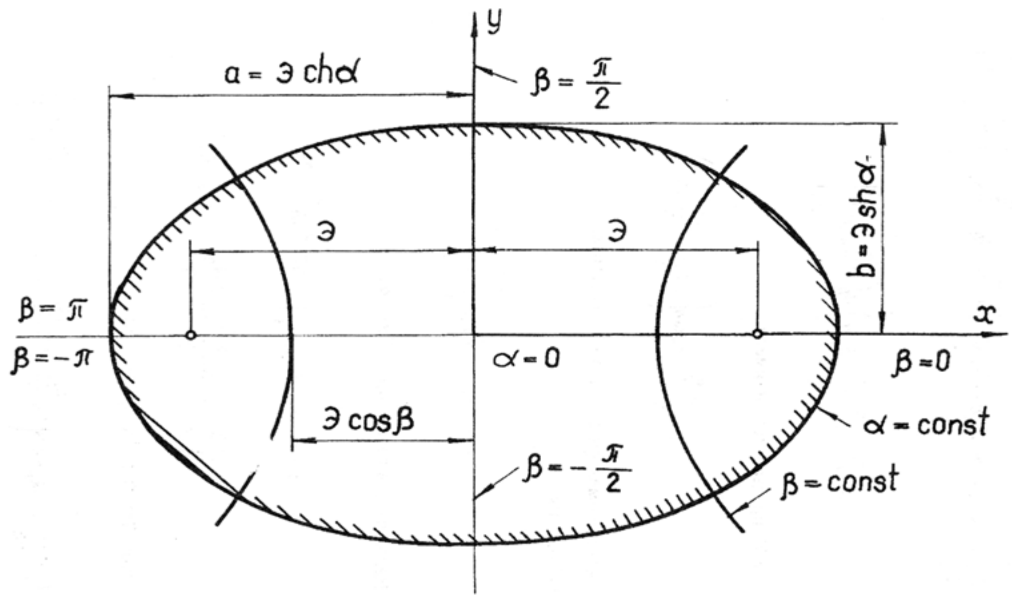


Рис. 33: Эллипс в декартовых и эллиптических координатах.

3. Эллиптическое сечение

Сечение в виде эллипса с полуосями a и b показано на рис. 2.

Для вычисления q_n принимаем выражение (5), и рассчитываем геометрические характеристики сечения, учитывая (3). При этом используем параметрическое представление уравнения эллипса

$$x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi\forall\varphi \in [0, 2\pi] .$$

Очевидно,

$$dL^2 = dx^2 + dy^2 = \left(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\right)d\varphi^2.$$

Поэтому

$$H_n = 4\int\limits_0^{\pi/2} ch\left(k_n a\cos\varphi\right)ch\left(k_n b\sin\varphi\right)\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}d\varphi.$$

Интеграл вычисляем по правилу трех восьмых [3].

Обозначим

$$\psi(\varphi) = ch\left(k_n a\cos\varphi\right)ch\left(k_n b\sin\varphi\right)\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}. \tag{14}$$

Находим значения ψ в точках $0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$:

$$\psi(0) = achk_n a, \psi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + b^2}ch\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n a\right)ch\left(\frac{1}{2}k_n b\right),$$

$$\psi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3b^2}ch\left(\frac{1}{2}k_n a\right)ch\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n b\right), \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = bchk_n b.$$

Окончательно для H_n получаем

$$H_n = \frac{\pi}{4}\left\{achk_na + bchk_nb + \frac{3}{2}\left[\sqrt{3a^2+b^2}ch\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_na\right)ch\left(\frac{1}{2}k_nb\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{a^2+3b^2}ch\left(\frac{1}{2}k_na\right)ch\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_nb\right)\right]\right\}. \qquad (15)$$

Для T_n предварительно имеем:

$$T_n = \frac{4}{k_n}\int\limits_0^a chk_nxsh\left(k_nb\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)dx.$$

Снова применяем правило трех восьмых.
Обозначим

$$\chi(x) = chk_nxsh\left(k_nb\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right). \qquad (16)$$

Находим χ в точках $0, a/3, 2a/3, a$:

$$\chi(0) = shk_nb, \chi\left(\frac{a}{3}\right) = ch\frac{k_na}{3}sh\frac{2\sqrt{2}k_nb}{3},$$
$$\chi\left(\frac{2a}{3}\right) = ch\frac{2k_na}{3}sh\frac{\sqrt{5}k_nb}{3}, \chi(a) = 0.$$

Окончательно для T_n получаем

$$T_n = \frac{a}{2k_n}\left[shk_nb + 3\left(ch\frac{k_na}{3}sh\frac{2\sqrt{2}k_nb}{3} + ch\frac{2k_na}{3}sh\frac{\sqrt{5}k_nb}{3}\right)\right]. \qquad (17)$$

Ограничимся рассмотрением первого приближения для p при следующих числовых данных:

$$a = 2b, h = b, \xi = 0,4, \mu = 0,25.$$

Как известно [4], длина L обвода эллипса выражается полным эллиптическим интегралом 2-го рода

$$L = 4a\mathrm{E}(\varepsilon), \qquad (18)$$

где эксцентриситет эллипса вычисляется по формуле

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}. \qquad (19)$$

При указанных выше числовых данных получаем

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1,211 \Rightarrow L = 9,688.$$

Если применить правило трех восьмых, то найдем

$$L = 4\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}d\varphi = \frac{\pi}{4}\left[a + b + \frac{3}{2}\left(\sqrt{3a^2+b^2} + \sqrt{a^2+3b^2}\right)\right] = 9,721$$

с относительной погрешностью 0,34 %, что в практических расчетах вполне приемлемо.

Далее согласно (3) получаем

$$\nu_1 = 1,581/b \Rightarrow k_1 = 1,118/b.$$

Проводим вычисления по формулам (15) и (17):

$$H_1 = \frac{\pi}{4} b \left[2ch2,236 + ch1,118 + 1,5\,(3,606\times\right.$$

$$\left.\times ch1,936ch0,559 + 2,646ch1,118ch0,968)\right] = 34,144b,$$

$$T_1 = \frac{b^2}{1,118}\left[sh1,118 + 3\,(ch0,745sh1,054 \ + ch1,491sh0,833)\right] = 11,429b^2.$$

Расчет по формуле (7) дает

$$D_1 = 0,084p_0.$$

Следовательно

$$p = p_0\left(1 + 0,084ch\frac{1,118x}{b}ch\frac{1,118y}{b}sh\frac{\zeta}{b}\right). \tag{20}$$

По этой формуле определяем давления в различных точках сечения при одностороннем прессовании:

а) под прессующим пуансоном

$$p(0,0,h) = 1,099p_0, p(a,0,h) = 1,468p_0, p(0,b,h) = 1,168p_0;$$

б) в среднем сечении

$$p(x,y,0) = p_0 \forall (x,y) \in F;$$

в) над неподвижным пуансоном

$$p(0,0,-h) = 0,901p_0, p(a,0,-h) = 0,532p_0, p(0,b,-h) = 0,832p_0.$$

Вычисляем отношение наибольшей плотности Θ_1 в брикете к наименьшей плотности Θ_2:

$$\frac{p(a,0,h)}{p(a,0,-h)} = \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right)^m \Rightarrow \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \sqrt[m]{2,76},$$

что, например, при $m = 6$ составляет 1,184, т.е. наибольшая плотность превышает наименьшую на 18,4 %.

Приведенные расчеты показывают, что под прессующим пуансоном плотность возле концов большой оси эллипса выше, чем возле концов малой оси, а над неподвижным пуансоном плотность возле концов большой оси эллипса ниже, чем возле концов малой оси. Аналогичные результаты получаются и при рассмотрении второго и последующих приближений.

Рассмотрим важный частный случай эллиптического сечения – сечение в виде круга радиуса R.

Полагая $a = b = R$ в формулах (15) и (17), находим

$$H_n = \frac{\pi}{2}R\left(chk_nR + 3ch\frac{k_nR}{2}ch\frac{\sqrt{3}k_nR}{2}\right., \tag{21}$$

$$T_n = \frac{R}{2k_n}\left[shk_nR + 3\left(ch\frac{k_nR}{3}sh\frac{2\sqrt{2}k_nR}{3} + ch\frac{2k_nR}{3}sh\frac{\sqrt{5}k_nR}{3}\right)\right]. \tag{22}$$

Возьмем следующие числовые данные:

$$h = R, \xi = 0,4, \mu = 0,25, L = 2\pi R.$$

Отметим, что точное значение длины окружности получается и по правилу трех восьмых:

$$L = \frac{\pi}{4}\left[R + R + \frac{3}{2}\left(\sqrt{3R^2 + R^2} + \sqrt{R^2 + 3R^2}\right)\right] = 2\pi R.$$

Далее в рамках первого приближения имеем:

$$\nu_1 = 1,581/b \Rightarrow k_1 = 1,118/b.$$

Проводим вычисления по формулам (15) и (17):

$$H_1 = \frac{\pi}{2}R\left(ch1,118 + 3ch0,559ch0,968\right) = 10,891R,$$

$$T_1 = \frac{R^2}{2 \cdot 1,118}\left[sh1,118 + 3\left(ch0,373sh1,054+\right.\right.$$

$$\left.\left.+ch0,745sh0,833\right)\right] = 4,036R^2.$$

$$D_1 = 0,151p_0.$$

Таким образом,

$$p = p_0\left(1 + 0,151ch\frac{1,118x}{R}ch\frac{1,118y}{R}sh\frac{\zeta}{R}\right). \tag{23}$$

По этой формуле получаем

$$p(0,0,h) = 1,177p_0, p(0,0,-h) = 0,823p_0.$$

Справедливо приближенное равенство

$$ch\left(k_n R\cos\varphi\right)ch\left(k_n R\sin\varphi\right) \approx chk_n R \forall\varphi \in \left[0, 2\pi\right].$$

Поэтому на контуре сечения под прессующим пуансоном и над неподвижным пуансоном соответственно имеем

$$p_{\max} = 1,3p_0, p_{\min} = 0,7p_0.$$

В среднем сечении $p = p_0$.

Отношение наибольшей плотности в брикете к наименьшей плотности составляет

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \sqrt[m]{\frac{p_{\max}}{p_{\min}}} \Rightarrow \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \sqrt[m]{1,857}.$$

Например, при $m = 6$ наибольшая плотность превышает наименьшую на 10,9%.

Найдем решение для брикета с круговым сечением в круговых цилиндрических координатах r, φ, ζ. Ввиду осевой симметрии уравнение для вычислений согласно [1] записывается в следующей форме

$$\frac{1}{r}\frac{dq_n}{dr} + \frac{d^2q_n}{dr^2} = \nu_n^2 q_n, (n = 1, 2, ..., N), \tag{24}$$

где ν_n вычисляется по методике [1].

Решение уравнения (24) представляется в бесселевых функциях [5]

$$q_n(r) = C_{n1} J_0\left(i\nu_n r\right) + C_{n2} N_0\left(i\nu_n r\right), \tag{25}$$

где $i = \sqrt{-1}$, J_0 и N_0 — бесселевы функции нулевого порядка соответственно первого и второго рода.

Поскольку решение (25) должно быть конечным в точке $r = 0$, то постоянную следует взять равной нулю. Тогда

$$q_n(r) = C_{n1} J_0\left(i\nu_n r\right) \tag{26}$$

и находим

$$p(r,\zeta) = p_0 + \sum_{n=1}^{N} C_{n1} J_0\left(i\nu_n r\right) sh\frac{n\zeta}{Nh}. \tag{27}$$

Для расчета констант $C_n (n = 1, 2, ..., N)$ необходимо сформулировать систему N уравнений. Предварительно получаем

$$\int\limits_L q_n dL = 2\pi C_{n1} R J_0\left(i\nu_n R\right), \tag{28}$$

$$\iint\limits_F q_n dF = 2\pi C_{n1} \int\limits_0^R J_0\left(i\nu_n r\right) dr = -\frac{2\pi}{\nu_n} C_{n1} i J_1\left(i\nu_n R\right), \tag{29}$$

где J_1 — бесселева функция первого порядка первого рода.

Уравнение с учетом (28) и (29) принимает вид:

$$\mu\xi\left[p_0\left(\zeta_2 - \zeta_1\right) + Nh\sum_{n=1}^{N}\frac{C_{n1}}{n}\left(ch\frac{n\zeta_2}{Nh} - ch\frac{n\zeta_1}{Nh}\right) J_0\left(i\nu_n R\right)\right] + \\ + i\sum_{n=1}^{N}\frac{C_{n1}}{\nu_n}\left(sh\frac{n\zeta_2}{Nh} - sh\frac{n\zeta_1}{Nh}\right) J_1\left(i\nu_n R\right) = 0. \tag{30}$$

Условие коллокации (30) для пары сечений $\zeta_1 = 0$ и $\zeta_2 = h$ записывается в виде

$$\mu\xi h\left[p_0 + N\sum_{n=1}^{N}\frac{C_{n1}}{n}\left(ch\frac{n}{N} - 1\right) J_0\left(i\nu_n R\right)\right] + i\sum_{n=1}^{N}\frac{C_{n1}}{\nu_n} J_1\left(i\nu_n R\right) sh\frac{n}{N} = 0. \tag{31}$$

Ограничимся рассмотрением первого приближения, - тогда вместо (27) и (31) будем иметь:

$$p(r,\zeta) = p_0 + C_{11} J_0\left(i\nu_1 r\right) sh\frac{\zeta}{h}, \tag{32}$$

$$\mu\xi h\left[p_0 + C_{11}\left(ch1 - 1\right) J_0\left(i\nu_1 R\right)\right] + i\frac{sh1}{\nu_1} J_1\left(i\nu_1 R\right) C_{11} = 0. \tag{33}$$

При тех же числовых данных находим:

$$J_0\left(i\nu_1 R\right) = J_0(1,118i) = 1,3378,$$

$$-iJ_1\left(i\nu_1 R\right) = -iJ_1(1,118) = 0,6510,$$

$$sh1 = 1,1752, ch1 = 1,5430.$$

Решаем относительно C_{11} уравнение (33):

$$C_{11} = 0,163p_0.$$

Внося это в (32), получаем

$$p(r,\zeta) = p_0\left[1 + 0,163J_0\left(\frac{1,118r}{R}i\right)sh\frac{\zeta}{h}\right]. \tag{34}$$

По таблицам [10] находим значения бесселевой функции J_0 в характерных точках сечения:

$$J_0(0) = 1, J_0(0,559i) = 1,0797, J_0(1,118i) = 1,3378.$$

Теперь получаем

$$p\left(0,h\right) = 1,191p_0, p\left(\frac{R}{2},h\right) = 1,207p_0, p\left(R,h\right) = 1,256p_0,$$

$$p\left(0,-h\right) = 0,809p_0, p\left(\frac{R}{2},-h\right) = 0,793p_0, p\left(R,-h\right) = 0,744p_0,$$

$$p(r,0) = p_0 \forall r \in \left[0,R\right].$$

Как видно, результаты расчетов в декартовых и круговых цилиндрических координатах достаточно хорошо согласуются между собой.

Рассмотрим задачу о прессовании брикета с сечением в виде эллипса в эллиптических цилиндрических координатах (рис. 2).

С учетом симметрии и равенства (3) получаем

$$p(\alpha,\beta,\zeta) = p_0 + \sum_{n=1}^{N} D_n ch\left(k_n \ni ch\alpha\cos\beta\right) ch\left(k_n \ni \sin\alpha\sin\beta\right) sh\frac{n\zeta}{Nh}. \tag{35}$$

На оси брикета

$$p\left(\alpha,\pm\frac{\pi}{2},\zeta\right) = p_0 + \sum_{n=1}^{N} D_n sh\frac{n\zeta}{Nh}.$$

На контуре сечения

$$p\left(Arch\frac{a}{\ni},\beta,\zeta\right) = p_0 + \sum_{n=1}^{N} D_n ch\left(k_n\alpha\cos\beta\right) ch\left(k_n b\sin\beta\right) sh\frac{n\zeta}{Nh}.$$

У концов малой оси эллипса

$$p\left(Arch\frac{a}{\ni},\pm\frac{\pi}{2},\zeta\right) = p_0 + \sum_{n=1}^{N} D_n chk_n bsh\frac{n\zeta}{Nh}.$$

У концов большой оси эллипса

$$p\left(Arch\frac{a}{\ni},0,\zeta\right) = p\left(Arch\frac{a}{\varepsilon},\pm\pi,\zeta\right) = p_0 + \sum_{n=1}^{N} D_n chk_n ash\frac{n\zeta}{Nh}.$$

Очевидно, при $\zeta > 0$ давление и плотность у концов большой оси эллипса больше, чем у концов малой оси и, наоборот, при $\zeta < 0$ давление и плотность у концов большой оси меньше, чем у концов малой оси.

4. Заключение

В работе приведены примеры расчета распределения давлений и плотностей в порошковых брикетах из металлических систем различного поперечного сечения для различных систем координат с использованием теории пластичности дилатирующих сред.

Результаты проведенных исследований дают возможность определять основные количественные характеристики параметров процессов уплотнения и пластического деформирования порошков различных металлических систем, и совершенствовать методы расчета, которые являются основой для разработки малоотходных ресурсосберегающих технологий.

Полученные результаты могут быть использованы при разработке ресурсосберегающих процессов и технологий обработки промышленных материалов в различных условиях и состояниях с использованием новых наноконструкционных смазок и покрытий [6–34].

Работа выполнена по Федеральной целевой программе «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» по проекту «Разработка прототипа инженерного программного обеспечения (ИПО) на основе высокопроизводительных вычислений для оценки механических характеристик изделия, изготовленного с использованием аддитивных технологий (методом селективного лазерного спекания) с учетом стратегии изготовления изделия» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макаров Э.С., Гвоздев А.Е. Теория пластичности дилатирующих сред. – Москва-Тула: Изд-во «Гриф и К», 2000. - 358 с.

2. Порошковая металлургия и напыленные покрытия / Под. ред. Б.С. Митина. - М.: Металлургия, 1987. - 792 с.

3. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Физматгиз. -1959. – 328 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Т.2. – М.: Наука, 1970.– 800 с.

5. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. – М.Л.: Гостехиздат, 1949. – 420 с.

6. Механические свойства конструкционных и инструментальных сталей в состоянии предпревращения при термомеханическом воздействии / А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, О.В. Кузовлева, Н.Н. Сергеев, И.В. Тихонова // Деформация и разрушение материалов. 2013. № 11. С. 39–42.

7. Гетерогенное зарождение графита в углеродистых сталях при распаде цементита в процессе ТЦО вблизи точки А0 / А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, А.В. Маляров, Н.Н. Сергеев, И.В. Тихонова // Материаловедение. 2013. № 10. С. 48–52.

8. Гвоздев А.Е., Шкатов М.И., Лукин А.С. Эволюция микроструктуры при развитии динамической рекристаллизации в процессе горячей прокатки конструкционных сталей // Заготовительные производства в машиностроении. 2013. № 10. С. 31–34.

9. Барчуков Д.А., Романенко Д.Н., Гвоздев А.Е. Исследование возможности упрочнения быстрорежущей стали в результате выполнения высокотемпературного отпуска после поверхностного пластического деформирования // Упрочняющие технологии и покрытия. 2014. № 9. С. 3–6.

10. Grain size effect of austenite on the kinetics of pearlite transformation in low-and medium-carbon low-alloy steels / A.E. Gvozdev, I.V. Minaev, N.N. Sergeev, A.G. Kolmakov, D.A. Provotorov, I.V. Tikhonova // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. № 1. P. 41–44.

11. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // A.E. Gvozdev, D.N. Bogolyubova, N.N. Sergeev, A.G. Kolmakov, D.A. Provotorov, I.V. Tikhonova // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. № 1. P. 32–40.

12. Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets / A.E. Gvozdev, I.V. Golyshev, I.V. Minayev, A.N. Sergeyev, N.N. Sergeyev, I.V. Tikhonova, D.M. Khonelidze, A.G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. № 4. P. 305–310.

13. Role of nucleation in the of first-order phase transformations / A.E. Gvozdev, N.N. Sergeyev, I.V. Minayev, A.G. Kolmakov, I.V. Tikhonova // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. T. 6. № 4. P. 283–288.

14. Зависимость показателей сверхпластичности труднодеформируемых сталей Р6М5 и 10Р6М5-МП от схемы напряженного состояния / А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, Д.А. Провоторов, Н.Н. Сергеев, Д.Н. Боголюбова // Деформация и разрушение материалов. 2015. № 11. С. 42–46.

15. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Колмаков А.Г. Формирование механических свойств углеродистых сталей в процессах вытяжки с утонением // Технология металлов. 2015. № 11. С. 17–29.

16. Влияние деформационной повреждаемости на формирование механических свойств малоуглеродистых сталей / Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, Д.А. Провоторов // Производство проката. 2015. № 12. С. 9–13.

17. Постановка задачи расчета деформационной повреждаемости металлов и сплавов / Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, В.И. Золотухин, Д.А. Провоторов // Производство проката. 2015. № 10. С. 18–26.

18. Многопараметрическая оптимизация параметров лазерной резки стальных листов / А.Е. Гвоздев, И.В. Голышев, И.В. Минаев, А.Н. Сергеев, Н.Н. Сергеев, И.В. Тихонова, Д.М. Хонелидзе, А.Г. Колмаков // Материаловедение. 2015. № 2. С. 31–36.

19. To the effective properties estimation of materials / G.M. Zhuravlev, A.N. Sergeyev, A.E. Gvozdev, N.N. Sergeyev, A.N. Privalov, D.A. Provotorov // IEJME: Mathematics Education. 2016. T. 11. № 6. P. 1481–1493.

20. Synthesis and tribotechnical properties of composite coatings with PM-DADE polyimide matrix and fillers on tungsten dechalcogenide nanoparticles upon dry sliding friction / A.D. Breki, E.S. Vasilyeva, O.V. Tolochko, A.L. Didenko, V.V. Kudryavtsev, A.G. Kolmakov, N.N. Sergeyev, A.E. Gvozdev, N.E. Starikov, D.A. Provotorov, Y.A. Fadin // Inorganic Materials: Applied Research. 2016. T. 7. № 4. P. 542–546.

21. Burnishing with wear-resistant mineral-ceramic and hard-alloy indenters / V.N. Gadalov, D.N. Romanenko, I.V. Vornacheva, A.E. Gvozdev, S.V. Kovalev // Russian Engineering Research. 2016. T. 36. № 9. P. 731–734.

22. Исследование изнашивания стали ШХ15 в среде пластичных смазочных композиционных материалов, содержащих дисперсные частицы слоистого модификатора трения / В.В. Медведева, А.Д. Бреки, Н.А. Крылов, Ю.А. Фадин, Н.Е. Стариков, А.Е. Гвоздев,

С.Е. Александров, А.Н. Сергеев, Д.А. Провоторов, Д.В. Малий // Технология металлов. 2016. № 7. С. 9–15.

23. Расчет деформационной повреждаемости в процессах обратного выдавливания металлических изделий / А.Е. Гвоздев, Г.М. Журавлев, А.Г. Колмаков, Д.А. Провоторов, Н.Н. Сергеев // Технология металлов. 2016. № 1. С. 23–32.

24. Вариант расчета максимального упрочнения малоуглеродистых сталей в процессах пластической деформации / Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, Д.А. Провоторов // Производство проката. 2016. № 7. С. 9–13.

25. Вытяжка с утонением анизотропного упрочняющего материала / Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев, В.И. Золотухин, Д.А. Провоторов // Производство проката. 2016. № 4. С. 5–10.

26. Бреки А.Д., Гвоздев А.Е., Колмаков А.Г. Использование обобщенного треугольника Паскаля для описания колебаний силы трения материалов // Материаловедение. 2016. № 11. С. 3–8.

27. Сопряженные поля в упругих, пластических, сыпучих средах и металлических труднодеформируемых системах: монография / Э.С. Макаров, В.Э. Ульченкова, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, А.Н. Сергеев / под ред. А.Е. Гвоздева. Тула: Издательство ТулГУ, 2016. 526 с.

28. О состоянии предпревращения металлов и сплавов: монография / О.В. Кузовлева, А.Е. Гвоздев, И.В. Тихонова, Н.Н. Сергеев, А.Д. Бреки, Н.Е. Стариков, А.Н. Сергеев, А.А. Калинин, Д.В. Малий, Ю.Е. Титова, С.Е. Александров, Н.А. Крылов. Тула: Издательство ТулГУ, 2016. 245 с.

29. Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting / A.E. Gvozdev, N.N. Sergeyev, I.V. Minayev, I.V. Tikhonova, A.N. Sergeyev, D.M. Khonelidze, D.V. Maliy, I.V. Golyshev, A.G. Kolmakov, D.A. Provotorov // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. T. 8. № 1. C. 148–152.

30. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon / A.D. Breki, A.E. Gvozdev, A.G. Kolmakov, N.E. Starikov, D.A. Provotorov, N.N. Sergeyev, D.M. Khonelidze // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. T. 8. № 1. C. 126–129.

31. Synthesis and dry sliding behavior of composite coating with (R-OOO)FT polyimide matrix and tungsten disulfide nanoparticle filler / A.D. Breki, A.L. Didenko, V.V. Kudryavtsev, E.S. Vasilyeva, O.V. Tolochko, A.G. Kolmakov, A.E. Gvozdev, D.A. Provotorov, N.E. Starikov, Yu.A. Fadin // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. T. 8. № 1. C. 32–36.

32. Composite coatings based on A-OOO polyimide and WS2 nanoparticles with enhanced dry sliding characteristics / A.D. Breki, A.L. Didenko, V.V. Kudryavtsev, E.S. Vasilyeva, O.V. Tolochko, A.E. Gvozdev, N.N. Sergeyev, D.A. Provotorov, N.E. Starikov, Yu.A. Fadin, A.G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. 2017. T. 8. № 1. C. 56–59.

33. Противоизносные свойства пластичных смазочных композиционных материалов «ЛИТОЛ 24 – частицы гидросиликатов магния» / А.Д. Бреки, В.В. Медведева, Н.А. Крылов, А.Г. Колмаков, Ю.А. Фадин, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, С.Е. Александров, Д.А. Провоторов // Материаловедение. 2017. № 3. С. 38–42.

34. Maximum plastic strengthening in tool steels / G.M. Zhuravlev, A.E. Gvozdev, A.E. Cheglov, N.N. Sergeev, O.M. Gubanov // Steel in Translation. 2017. Vol. 47. № 6. P. 399–411.

35. Многоуровневый подход к проблеме замедленного разрушения высокопрочных конструкционных сталей под действием водорода / В.П. Баранов, А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, Н.Н. Сергеев, А.Н. Чуканов // Материаловедение. 2017. № 7. С. 11–22.

REFERENCES

1. Makarov, E.S. & Gvozdev, A.E. 2000, *"The Theory of Plasticity Dilatating Media"*, Moscow-Tula. Izdatelstvo "Grif i K", 358 p.

2. Mitina, B.S. 1987, *"Powder Metallurgy and Spraying Coatings"*, M. Metallurgiya, 792 p.

3. Krylov, V.I. 1959, *"Approximate Calculation of Integrals"*, M. Fizmatgiz, 328 p.

4. Fikhtengolts, G.M. 1970, *"Course of Differential and Integral Calculus"*, M. Nauka, 800 p.

5. Yanke, E. & Emde, F. 1949, *"Tables of Functions with Formulas and Curves"*, M.: Gostekhizdat, 420 p.

6. Gvozdev, A.E., Kolmakov, A.G., Kuzovleva, O.V., Sergeev, N.N. & Tihonova, I.V. 2013, "Mechanical Properties of Structural and Tool Steels in the State of Pre-Transformation Under Thermomechanical Action", *Deformation and destruction of materials,* no. 11, pp. 39–42.

7. Gvozdev, A.E., Kolmakov, A.G., Malyarov, A.V., Sergeev, N.N. & Tihonova, I.V. 2013, "Heterogeneous Nucleation of Graphite in Carbon Steels During the Decomposition of Cementite in the Process of TCT near the Point A0", *Materialovedenie,* no. 10, pp. 48–52.

8. Gvozdev, A.E., Shkatov, M.I. & Lukin, A.S. 2013, "Evolution of Microstructure in the Development of Dynamic Recrystallization During Hot Rolling of Structural Steel", *Zagotovitel'nye proizvodstva v mashinostroenii,* no. 10, pp. 31–34.

9. Barchukov, D.A., Romanenko, D.N. & Gvozdev, A.E. 2014, "Investigation of the Possibility of Hardening of High-Speed Steel as a Result of High-Temperature Tempering After Surface Plastic Deformation", *Uprochnyayushchie tekhnologii i pokrytiya,* no. 9, pp. 3–6.

10. Gvozdev, A.E., Minaev, I.V., Sergeev, N.N., Kolmakov, A.G., Provotorov, D.A. & Tikhonova, I.V. 2015, "Grain Size Effect of Austenite on the Kinetics of Pearlite Transformation in Low-And Medium-Carbon Low-Alloy Steels", *Inorganic Materials: Applied Research*, vol. 6, no. 1, pp. 41–44.

11. Gvozdev, A.E. Bogolyubova, D.N., Sergeev, N.N., Kolmakov, A.G., Provotorov, D.A. & I.V. Tikhonova 2015, "Features of Softening Processes of Aluminum, Copper, and Their Alloys Under Hot Deformation", *Inorganic Materials: Applied Research*, vol. 6, no. 1, pp. 32–40.

12. Gvozdev, A.E., Golyshev, I.V., Minayev, I.V., Sergeyev, A.N., Sergeyev, N.N., Tikhonova, I.V., Khonelidze, D.M. & Kolmakov, A.G. 2015, "Multiparametric Optimization of Laser Cutting of Steel Sheets", *Inorganic Materials: Applied Research,* vol. 6, no. 4, pp. 305–310.

13. Gvozdev, A.E., Sergeyev, N.N., Minayev, I.V., Kolmakov, A.G. & Tikhonova, I.V. 2015, "Role of Nucleation in the of First-Order Phase Transformation", *Inorganic Materials: Applied Research*, vol. 6, no. 4, pp.283–288.

14. Gvozdev, A.E., Kolmakov, A.G., Provotorov, D.A., Sergeev, N.N. & Bogolyubova, D.N. 2015, "Dependence of Superplasticity Indices of Hard-Deformed Steels P6M5 and 10P6M5-MP from the Stress State Scheme", *Deformation and destruction of materials,* no. 11, pp. 42–46.

15. Gvozdev, A.E., Zhuravlev, G.M. & Kolmakov, A.G. 2015, "Formation of Mechanical Properties of Carbon Steels in Drawing Processes with Thinning", *Metals Technology*, no. 11, pp. 17–29.

16. Zhuravlev, G.M., Gvozdev, A.E., Sergeev, N.N. & Provotorov, D.A. 2015, "Influence of Deformation Damage on the Formation of Mechanical Properties of Low-Carbon Steels", *Rolled Products Manufacturing,* no. 12, pp. 9–13.

17. Zhuravlev, G.M., Gvozdev, A.E., Sergeev, N.N., Zolotukhin, V.I. & Provotorov, D.A. 2015, "Statement of the Problem of Calculating the Deformability of Metals and Alloys", *Rolled Products Manufacturing,* no. 10, pp. 18–26.

18. Gvozdev, A.E., Golyshev, I.V., Minayev, I.V., Sergeyev, A.N., Sergeyev, N.N., Tikhonova, I.V., Khonelidze, D.M. & Kolmakov, A.G. 2015, "Multiparametric Optimization of Laser Cutting Parameters for Steel Sheets", *Materialovedenie,* no. 2, pp. 31–36.

19. Zhuravlev, G.M., Sergeyev, A.N., Gvozdev, A.E., Sergeyev, N.N., Privalov, A.N. & Provotorov, D.A. 2016, "To the Effective Properties Estimation of Materials", *IEJME: Mathematics Education*, vol. 11, no. 6, pp. 1481–1493.

20. Breki, A.D., Vasilyeva, E.S., Tolochko, O.V., Didenko, A.L., Kudryavtsev, V.V., Kolmakov, A.G., Sergeyev, N.N., Gvozdev, A.E., Starikov, N.E., Provotorov, D.A. & Fadin, Y.A. 2016, "Synthesis and Tribotechnical Properties of Composite Coatings with PM-DADE Polyimide Matrix and Fillers on Tungsten Dechalcogenide Nanoparticles Upon Dry Sliding Friction", *Inorganic Materials: Applied Research,* vol. 7, no. 4, pp. 542–546.

21. Gadalov, V. N., Romanenko, D. N., Vornacheva, I. V., Gvozdev, A. E. & Kovalev, S. V. 2016, "Burnishing with Wear-Resistant Mineral-Ceramic and Hard-Alloy Indenters", *Russian Engineering Research,* vol. 36, no. 9, pp. 731–734.

22. Medvedeva, V.V., Breki, A.D., Krylov, N.A., Fadin, Yu.A., Starikov, N.E., Gvozdev, A.E., Aleksandrov, S.E., Sergeev, A.N., Provotorov, D.A. & Maliy, D.V. 2016, "The Study of Wear of SHH15 Steel in a Medium of Plastic Lubricating Composite Materials Containing Dispersed Particles of a Layer-Modifying Friction Modifier", *Metals Technology*, no. 7, pp. 9–15.

23. Gvozdev, A.E., Zhuravlev, G.M., Kolmakov, A.G., Provotorov, D.A. & Sergeev, N.N. 2016, "Calculation of Deformation Damageability in the Processes of Reverse Extrusion of Metal Products", *Metals Technology*, no. 1, pp.23–32.

24. Zhuravlev, G.M., Gvozdev, A.E., Sergeev, N.N. & Provotorov, D.A. 2016, "The Calculation of Maximum Hardening of Low Carbon Steels in Plastic Deformation Processes", *Rolled Products Manufacturing,* no. 7, pp. 9–13.

25. Zhuravlev, G.M., Gvozdev, A.E., Zolotukhin, V.I. & Provotorov, D.A. 2016, "Extraction with Thinning of Anisotropic Reinforcing Material", *Rolled Products Manufacturing,* no. 4, pp. 5–10.

26. Breki, A.D., Gvozdev, A.E. & Kolmakov, A.G. 2016, "Using the generalized Pascal triangle for describing the friction oscillations of materials", *Materialovedenie,* no. 11, pp. 3–8.

27. Makarov, E.S., Ul'chenkova, V.E., Gvozdev, A.E., Sergeev, N.N. & Sergeev, A.N. 2016, "*Conjugate Fields in Elastic, Plastic, Bulk Media and Metallic Hard-Deformed Systems*", Izdatel'stvo TulGU, Tula, 526 p.

28. Kuzovleva, O.V., Gvozdev, A.E., Tikhonova, I.V., Sergeev, N.N., Breki, A.D., Starikov, N.E., Sergeev, A.N., Kalinin, A.A., Maliy, D.V., Titova, Yu.E., Aleksandrov, S.E. & Krylov, N.A.

2016, "*On the State of the Pre-Transformation of Metals and Alloys*", Izdatel'stvo TulGU, Tula, 245 p.

29. Gvozdev, A.E., Sergeyev, N.N., Minayev, I.V., Tikhonova, I.V., Sergeyev, A.N., Khonelidze, D.M., Maliy, D.V., Golyshev, I.V., Kolmakov, A.G. & Provotorov, D.A. 2017, "Temperature Distribution and Structure in the Heat-Affected Zone for Steel Sheets After Laser Cutting", *Inorganic Materials: Applied Research,* vol. 8, no. 1, pp. 148–152.

30. Breki, A.D., Gvozdev, A.E., Kolmakov, A.G., Starikov, N.E., Provotorov, D.A., Sergeyev, N.N. & Khonelidze, D.M. 2017, "On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon", *Inorganic Materials: Applied Research,* vol. 8, no. 1, pp. 126–129.

31. Breki, A.D., Didenko, A.L., Kudryavtsev, V.V., Vasilyeva, E.S., Tolochko, O.V., Kolmakov, A.G., Gvozdev, A.E., Provotorov, D.A., Starikov, N.E. & Fadin, Yu.A. 2017, "Synthesis and Dry Sliding Behavior of Composite Coating with (R-OOO)FT Polyimide Matrix and Tungsten Disulfide Nanoparticle Filler", *Inorganic Materials: Applied Research,* vol. 8, no. 1, pp. 32–36.

32. Breki, A.D., Didenko, A.L., Kudryavtsev, V.V., Vasilyeva, E.S., Tolochko, O.V., Gvozdev, A.E., Sergeyev, N.N., Provotorov, D.A., Starikov, N.E., Fadin, Yu.A. & Kolmakov, A.G. 2017, "Composite Coatings Based on A-OOO Polyimide and WS2 Nanoparticles with Enhanced Dry Sliding Characteristics", *Inorganic Materials: Applied Research,* vol. 8, no. 1, pp. 56–59.

33. Breki, A.D., Medvedeva, V.V., Krylov, N.A., Kolmakov, A.G., Fadin, Yu.A., Gvozdev, A.E., Sergeev, N.N., Aleksandrov, S.E. & Provotorov, D.A. 2017 "Antiwear Properties of Grease Plastic Composites "LITOL 24 – Particles of Magnesium Hydrosilicates", *Materialovedenie,* no. 3, pp. 38–42.

34. Zhuravlev, G.M., Gvozdev, A.E., Cheglov, A.E., Sergeev, N.N. & Gubanov, O.M. 2017 "Maximum Plastic Strengthening in Tool Steels", *Steel in Translation,* vol. 47, no. 6, pp. 399–411.

35. Baranov, V.P., Gvozdev, A.E., Kolmakov, A.G., Sergeev, N.N. & Chukanov, A.N. 2017, "Multi-Level Approach to the Problem of Delayed Destruction of High-Strength Structural Steels Under the Influence of Hydrogen", *Materialovedenie,* no. 7, pp. 11–22.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-285-295

К ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С КОНЕЧНОЗНАЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ КАК ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НА КОМПЛЕКСНУЮ ПЛОСКОСТЬ[1]

О. А. Матвеева, В. Н. Кузнецов (г. Саратов)

Аннотация

Одним из известных направлений решения задачи аналитического продолжения рядов Дирихле является изучение свойств последовательности первообразных, возникающих в процессе итераций сумматорной функции коэффициентов ряда. На этом пути было получено, например, аналитическое продолжение дзета-функции Римана, L-функций Дирихле. В 1975 году Н. Г. Чудаков получил необходимое и достаточное условие аналитического продолжения рядов Дирихле как мероморфных функций с конечной функцией Линделёфа, выраженное в терминах поведения первообразных функций.

В данной статье получено необходимое и достаточное условие аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами целым образом на комплексную плоскость. Это условие сформулировано в терминах поведения чезаровских средних от коэффициентов ряда Дирихле. В отличие от результата Н. Г. Чудакова, где условие аналитического продолжения представлено в виде теоремы существования, здесь получен явный вид асимптотики чезаровских средних. В основе решения задачи лежит аппроксимационный подход, разработанный ранее авторами, позволивший связать решение задачи с возможностью приближения в критической полосе целых функций, определённых рядами Дирихле, полиномами Дирихле.

Ключевые слова: Ряд Дирихле, аналитическое продолжение, совместное приближение функции и ее производных.

Библиография: 15 названий.

ON THE PROBLEM OF ANALYTICAL CONTINUATION OF DIRICHLET SERIES WITH FINITE COEFFICIENTS AS ENTIRE FUNCTIONS ONTO THE COMPLEX PLANE

O. A. Matveeva, V. N. Kuznetsov (Saratov)

Abstract

One well-known approach to the problem of analytic continuation of Dirichlet series is analysis of properties of a sequence of primitive integrals, which arise in iterations of a summatory function of the coefficients of these series. With this approach it was possible to obtain an analytic continuation of the Riemann zeta function and Dirichlet L-functions. In 1975 N. G. Chudakov presented necessary and sufficient conditions for an analytic continuation of Dirichlet series as meromorphic functions with a finite Lindelöf function, expressed through behavior of primitive integrals.

In this paper we formulate necessary and sufficient conditions of analytic continuation of Dirichlet series with finite-valued coefficients to an entire function. These conditions are

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-01-00399).

expressed in terms of behavior of Cesàro means of coefficients of a Dirichlet series. Unlike the result of N. G. Chudakov, where conditions of analytic continuation are expressed as an existence theorem, in this paper we obtain an explicit form of the asymptotics of Cesàro means. This result is based on the approximation approach developed earlier by V. N. Kuznetsov and the author, which made it possible to establish a connection between the solution of this problem and a possibility to approximate entire functions defined by Dirichlet series by Dirichlet polynomials in the critical strip.

Keywords: Dirichlet series, analytic continuation, joint approximation of a function and its derivatives.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Одним из известных направлений решения задачи аналитического продолжения рядов Дирихле

$$f(s)=\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\ s=\sigma+it$$

является изучение свойств сумматорной функции коэффициентов и ее итераций, возникающих в результате последовательного интегрирования по частям интеграла в известном интегральном представлении ряда Дирихле в области сходимости:

$$f(s)=s\int_1^{\infty}\frac{S(u)}{u^{s+1}}du,$$

где $S(u)$ — сумматорная функция коэффициентов.

На этом пути получено, например, аналитическое продолжение дзета-функции Римана (см., например, [1]), L-функций Дирихле (см. [2]). В [2] же изучалось асимптотическое поведение последовательности итераций первообразных для сумматорной функции коэффициентов; получено необходимое и достаточное условие аналитического продолжения ряда Дирихле как мероморфной функции с конечным числом простых полюсов и конечной функцией Линделёфа $\mu(\sigma)$. Это условие заключается в существовании последовательности индексов m_k таких, что для функций $\Phi_{m_k}(x)$:

$$\Phi_0(x)=\sum_{n\le x}a_n,\ \Phi_{m+1}(x)=\int_1^x\Phi_m(x)dx,\ m=1,2,\ldots$$

выполняются асимптотические равенства:

$$\Phi_{m_k}(x)=P_{m_k}(x)+R_{m_k}(x), \tag{1}$$

где $P_{m_k}(x)$ — алгебраические многочлены, $R_{m_k}(x)=O(x^{n_k})$, и $(m_k-n_k)\to\infty$.

В данной статье для рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами

$$f(s)=\sum_{1}^{\infty}\frac{a_k}{k^s},\ s=\sigma+it, \tag{2}$$

получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты, при которых такие ряды определяют целые функции, удовлетворяющие неравенству

$$|f(s)\Gamma(s)|<e^{-\alpha|t|},\ 0\le\sigma\le1, \tag{3}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция, $\alpha>0$ и зависит от функции $f(s)$.

Полученные необходимые и достаточные условия аналитического продолжения рядов Дирихле (2) целым образом на комплексную плоскость выражены в терминах чезаровских срезов порядка m от коэффициентов

$$S^1(x) = \sum_{k \le x} a_k, \quad S^m(x) = \sum_{k \le x} S^{m-1}(k),\ m \ge 2. \tag{4}$$

В отличие от работы [2], где условие аналитического продолжения (1) получено в виде теоремы существования, здесь получен явный вид асимптотики чезаровских средних.

При доказательстве основного результата используется, во-первых, результат В. Н. Кузнецова, полученный в 1987 году в [3] (см. также [4]), о том, что если ряд Дирихле (2) определяет целую функцию, то соответствующий (с теми же коэффициентами, что и у ряда Дирихле) степенной ряд

$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n x^n \tag{5}$$

имеет конечные односторонние производные любого порядка в точке единица

$$\lim_{x \to 1-0} g^{(m)}(x) = \alpha_m,\ m = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Во-вторых, используется факт, доказанный уже в этой работе, и заключающийся в том, что степенной ряд (5) допускает совместное приближение функции $g(x)$ и её производных на отрезке $[0, 1]$ алгебраическими полиномами с ограниченными в совокупности коэффициентами.

В основе доказательства основного утверждения лежит аппроксимационный подход, разработанный ранее авторами (см. [5]–[11]), позволивший связать решение задачи с возможностью приближения в критической полосе целых функций, определённых рядами Дирихле, полиномами Дирихле: показано, что целые функции, определённые рядами Дирихле, допускают приближение в критической полосе полиномами Дирихле, чезаровские средние коэффициентов которых определяют свойства чезаровских средних коэффициентов ряда Дирихле.

2. Критерий возможности аналитического продолжения ряда Дирихле с конечнозначными коэффициентами как целой функции на комплексную плоскость

Рассмотрим ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами (2) и чезаровские средние m-го порядка от коэффициентов этого ряда (4). Имеет место

Теорема 1. *Ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами*

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s}, \quad s = \sigma + it$$

тогда и только тогда определяет целую функцию, удовлетворяющую условию

$$|f(s)\Gamma(s)| < e^{-\alpha|t|}, \quad 0 \le \sigma \le 1,$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция, $\alpha > 0$ и зависит от функции $f(s)$, когда для любого m определяется алгебраический полином $T_{m-1}(x)$ степени $m-1$, такой, что для чезаровских средних порядка m от коэффициентов ряда Дирихле при любом $x \ge 1$ выполняются равенства

$$S^m(x) = T_{m-1}(x) + O(1), \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

где константа в символе «O» не зависит от x.

Доказательству теоремы 1 предпошлём ряд утверждений:

Лемма 1. *Пусть ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами*

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s},$$

определяет целую функцию, удовлетворяющую условию

$$|f(s)\Gamma(s)| < e^{-\alpha|t|}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

где $\Gamma(s)$ — *гамма-функция,* $\alpha > 0$ *и зависит от* $f(s)$. *Тогда соответствующий (с теми же коэффициентами, что и у ряда Дирихле) степенной ряд определяет функцию*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k,$$

имеющую производные любого порядка на отрезке $[0,1]$, *и для любого* m *существует последовательность полиномов* $P_n(x)$,

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} x^k$$

с ограниченными в совокупности коэффициентами, которая равномерно сходится к $g(x)$ *на отрезке* $[0,1]$ *совместно с производными до* m*-го порядка, то есть при* $n \to \infty$

$$P_n^{(l)}(x) \rightrightarrows g^{(l)}(x), \quad l = 1, 2, \ldots, m.$$

Доказательство. В [3], [4] показано, что если ряд Дирихле (2) определяет целую функцию с условием (3), то соответствующий степенной ряд (5) имеет конечные односторонние производные любого порядка (6) в точке единица, то есть степенной ряд (5) определяет функцию $g(x)$, имеющую производные любого порядка на отрезке $[0,1]$.

Рассмотрим частичные суммы ряда (5):

$$\widehat{P_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k.$$

Выберем $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности $g^{(l)}(x)$ на отрезке $[0,1]$ существует r_n, $0 < r_n < 1$, такое, что для $x \in [0,1]$

$$|g^{(l)}(x) - g^{(l)}(r_n x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad l = 0, 1, \ldots, m.$$

В силу равномерной сходимости последовательность частичных сумм в круге радиуса < 1 существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такое, что для $n \geq n_0$

$$|g^{(l)}(rx) - \widehat{P_n}^{(l)}(r_n x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad l = 0, 1, \ldots, m.$$

Из последних неравенств следует, что для всех $x \in [0,1]$

$$|g^{(l)}(x) - \widehat{P_n}^{(l)}(r_n x)| < \varepsilon, \quad l = 0, 1, \ldots, m.$$

Рассмотрим полиномы вида $P_n(x) = \widehat{P_n}(r_n x)$, то есть

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k r_n^k x^k, \quad \text{где } r_n < 1. \tag{7}$$

В силу предыдущего неравенства последовательность таких полиномов равномерно сходится к функции $g(x)$ на отрезке $[0,1]$ совместно с производными до m-го порядка.

Осталось заметить, что в силу конечнозначности коэффициентов ряда Дирихле (2) и, следовательно, ограниченности коэффициентов степенного ряда (5), коэффициенты полиномов $P_n(x) = \widehat{P_n}(r_n x)$ ограничены в совокупности, что завершает доказательство леммы 1. □

Обозначим $P_{n,\nu}(x)$ «урезанные» многочлены (7), то есть

$$P_{n,\nu}(x) = \sum_{k=1}^{\nu} a_{n,k} x^k, \quad \nu \le n. \tag{8}$$

Пусть также $S_n^m(\nu)$ — чезаровские средние порядка m для коэффициентов многочленов (8).

Имеет место

Лемма 2. *Пусть ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами*

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s},$$

определяет целую функцию, удовлетворяющую условию

$$|f(s)\Gamma(s)| < e^{-\alpha|t|}, \quad 0 \le \sigma \le 1,$$

где $\Gamma(s)$ — гамма функция, $\alpha > 0$ и зависит от $f(s)$.

Тогда для чезаровских средних порядка m от коэффициентов многочленов $P_{n,\nu}(x)$ имеет место равенство

$$S_n^m(\nu) = T_{n,\nu,m-1}(\nu),$$

где $T_{n,\nu,m-1}(x)$ — многочлены степени $m-1$, коэффиценты которых определяются коэффициентами и значениями полиномов $P_{n,\nu}(x)$ и их производных до $m-1$-го порядка в точке $x = 1$.

Доказательство. Пусть $S_n^m(n)$ — чезаровские средние порядка m для коэффициентов многочленов (7), и $\alpha_{n,0}, \alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,m-1}$ — значения производных до $m-1$-го порядка многочлена (7) в точке $x = 1$.

Рассмотрим чезаровские средние для коэффициентов (7):

$$S_n^1(n) = \sum_{k \le n} a_{n,k} = P_n(1) = \alpha_{n,0},$$

$$S_n^2(n) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k \le l} S_n^1(k) = n a_{n,1} + (n-1) a_{n,2} + \ldots + a_{n,n}.$$

Обозначим

$$\widehat{S_n^2}(n) = n a_{n,n} + (n-1) a_{n,n-1} + \ldots + a_{n,1} = P_n'(1) + a_{n,1} = \alpha_{n,1} + a_{n,1}.$$

Складывая два последних равенства, получим:

$$S_n^2(n) + \widehat{S_n^2}(n) = (n+1)(a_{n,1} + \ldots + a_{n,n}) = (n+1)\alpha_{n,0}.$$

Отсюда следует, что

$$S_n^2(n) = (n+1)\alpha_{n,0} - \alpha_{n,1} + a_{n,1} = T_{n,1}(n),$$

где $T_{n,1}(x)$ — многочлен первой степени:

$$T_{n,1}(x) = x\alpha_{n,0} + \alpha_{n,0} - \alpha_{n,1} + a_{n,1}.$$

Далее, рассуждая аналогично, для $S_n^3(n)$ получаем:

$$2S_n^3(n) = n(n+1)a_{n,1} + (n-1)na_{n,2} + \ldots + 2a_{n,n}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\widehat{S_n^3}(n) &= n(n+1)a_{n,n} + (n-1)na_{n,n-1} + \ldots + 2a_{n,1} = \\ &= (n(n-1)+2n)a_{n,n} + ((n-1)(n-2)+4n+2)a_{n,n-1} + \ldots + 2a_{n,1} = \\ &= \alpha_{n,2} + a_{n,1} + a_{n,2} + 2n(a_{n,n} + 2a_{n,n-1} + \ldots + na_{n,1}) = \\ &= \alpha_{n,2} + a_{n,1} + a_{n,2} + 2n(n\alpha_{n,0} + \alpha_{n,2} - \alpha_{n,1} - a_{n,1}).\end{aligned}$$

Сложив два последних равенства и выразив $2S_n^3(n)$, получим:

$$\begin{aligned}2S_n^3(n) &= (n(n+1)+1)\alpha_{n,0} - \alpha_{n,2} - a_{n,1} - a_{n,2} - 2n^2\alpha_{n,0} - 2n\alpha_{n,0} - 2n\alpha_{n,1} + 2na_{n,1} = \\ &= -n^2\alpha_{n,0} + n(\alpha_{n,0} - 2\alpha_{n,1} - 2a_{n,1}) + \alpha_{n,0} - \alpha_{n,2} - a_{n,1} - a_{n,2} = T_{n,2}(n),\end{aligned}$$

где $T_{n,2}(x)$ — многочлен второй степени.

Имея в виду предыдущие выкладки, можно предположить, что для $S_n^m(n)$ имеет место следующая формула:

$$S_n^m(n) = T_{n,m-1}(n),$$

где $T_{n,m-1}(x)$ — многочлен степени $m-1$. Более того, можно предположить, что и в общем случае для чезаровских средних $S_n^m(\nu)$, $\nu \le n$ порядка m для коэффициентов полиномов (8) имеют место формулы:

$$S_n^m(\nu) = T_{n,\nu,m-1}(\nu), \tag{9}$$

где $T_{n,\nu,m-1}(x)$ — многочлен степении $m-1$, коэффициенты которого определяются величинами $a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,m-1}, \alpha_{n,\nu,0}, \alpha_{n,\nu,1}, \ldots, \alpha_{n,\nu,m-1}$, где $\alpha_{n,\nu,k} = P_{n,\nu}^{(k)}(1),\ k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Действительно, (9) полчается на основании индуктивных предположений для чезаровских средних меньшего порядка, применения упрощённой формулы Эйлера-Маклорена (см. [12], стр. 11), которую мы здесь приведём:

$$\sum_{a<n<b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \left(\frac{1}{2} - \{b\}\right) f(b) - \left(\frac{1}{2} - \{a\}\right) f(a) - \int_a^b \left(\frac{1}{2} - x + [x]\right) f''(x)dx,$$

а также с учётом соотношения $S_n^m(\nu) = \sum_{k=1}^{\nu} S_n^{m-1}(k)$. Действительно, в работе [2] стр. 20 показано, что

$$\int_1^\nu [x]f''(x)dx = -\sum_{k=1}^{\nu} f'(k) + \mu f'(\nu).$$

Затем применим формулу Эйлера-Маклорена к сумме $\sum_{k=1}^{\nu} f'(k)$ и повторим наши рассуждения еще $m-3$ раза.

Формула (9) завершает доказательство леммы 2. $\square$

Далее, имеет место

Лемма 3. *Пусть ряд Дирихле* (2) *определяет целую функцию, удовлетворяющую условию* (3). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $N > 0$, *что для любого* $\nu \geq N$ *существует* $N_1 > 0$, *такое, что для всех* $n \geq N_1$ *имеет место неравенство*

$$|\alpha_{n,\nu,k} - \alpha_n| < \varepsilon, \quad k = \overline{0, m-1},$$

где α_k *определены условием* (6), *а* $\alpha_{n,\nu,k} = P_{n,\nu}^{(k)}(1)$, *где* $P_{n,\nu}(x)$ — *полиномы вида* (8).

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x)$, определённую рядом (5). При условиях леммы 3 $g(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией на отрезке $[0,1]$. Пусть $x_1 < 1$ — такое число, что для всех $x:\ x_1 < x < 1$

$$\left|g^{(s)}(x) - g^{(s)}(1)\right| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad s = \overline{0, m-1}. \tag{10}$$

Такое x_1 существует в силу равномерной непрерывности функций $g^{(s)}(x),\ s = \overline{0, m-1}$ на отрезке $[0,1]$.

Пусть N_0 — такое число, что

$$\left|S_{N_0}^{(s)}(x_1) - g^{(s)}(x_1)\right| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad s = \overline{0, m-1}, \tag{11}$$

где $S_{N_0}(x)$ — частичная сумма ряда (5). Запишем полином (7) в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k r_n^k x^k, \quad r_n < 1$$

Тогда для $r_n \leq x_1$ для любых $n \geq N_0,\ \nu \leq n$ будут выполняться оценки

$$\left|P_{n,\nu}^{(s)}(2) - \alpha_s\right| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad s = \overline{0, m-1},$$

если только $\left|P_n^{(s)}(x) - g^{(s)}(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{6},\ s = \overline{0, m-1}$. Это следует из неравенства (11) и того факта, что $P_{n,\nu}^{(s)}(1) = S_\nu^{(s)}(r_n)$.

Пусть n таково, чт $r_n > x_1$, и пусть $\nu > N_0$. Воспользуемся свойством ограниченности в совокупности коэффициентов многочленов вида (7). Как показано в [13] гл. II, т. 6, в этом случае имеет место сходимость коэффициентов полиномов (7) к коэффициентам степенного ряда (5), т.е.

$$a_{n,k} \to a_k \quad \text{при } n \to \infty. \tag{12}$$

При заданных m и ν выражения $P_{n,\nu}^{(s)}(x)$, где $1 \geq x > x_1$, являются конечной суммой слагаемых, каждое из которых в силу (12) при $n \to \infty$ стремится к соответствующему слагаемому суммы $S_n^{(s)}(x)$.

Пусть N_2 таково, что при $n \geq N_2$

$$\left|S_\nu^{(s)}(1) - P_{n,\nu}^{(s)}(1)\right| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad s = \overline{0, m-1}, \tag{13}$$

и при $n = N_2$ r_n величину r_n обозначим как r_0. Будем считать, что $r_0 > x_1$. Пусть далее N_1 таково, что при $\nu \geq N_1$ имеет место оценка вида

$$\left|S_\nu^{(s)}(r_0) - g^{(s)}(r_0)\right| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad s = \overline{0, m-1}. \tag{14}$$

Тогда в силу (13) при заданном $\nu \geq N_1$ и при любом $n \geq N_2$ имеет место неравенство

$$\left|P_{N_2,\nu}^{(s)}(1) - P_{n,\nu}^{(s)}(1)\right| \leq \left|P_{N_2,\nu}^{(s)}(1) - S_\nu^{(s)}(1)\right| + \left|P_{n,\nu}^{(s)}(1) - S_\nu^{(s)}(1)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15}$$

Но так как в силу (13), (14), (10)

$$\begin{aligned}\left|P^{(s)}_{N_2,\nu}(1) - g^{(s)}(1)\right| \le \left|P^{(s)}_{N_2,\nu}(1) - S^{(s)}_{\nu}(r_0)\right| + \left|S^{(s)}_{\nu}(r_0) - g^{(s)}(r_0)\right| + \\ + \left|g^{(s)}(r_0) - g^{(s)}(1)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad s = \overline{0, m-1},\end{aligned} \tag{16}$$

то из условий (15) и (16) получим, что при заданном $\nu > N_1$ и при любом $n \ge N_2$ имеют место неравенства

$$\left|P^{(s)}_{n,\nu}(1) - g^{(s)}(1)\right| \le \varepsilon,$$

что и завершает доказательство леммы 3. □

При условиях леммы 3 имеет место

Лемма 4. *При любом натуральном ν для чезаровских средних порядка m имеет место соотношение*

$$S^m_n(\nu) \to S^m(\nu) \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

где $S^m(\nu)$ — чезаровские средние порядка m для ν первых коэффициентов степенного ряда (5)*, соответствующего ряду Дирихле* (2)*.*

Доказательство. Утверждение леммы 4 следует из условий (12), в силу которых каждое слагаемое конечной суммы, определённой средним $S^m_n(\nu)$, стремится к соответствующему слагаемому суммы, определённой $S^m(\nu)$. □

Как следствие леммы 2, леммы 3 и леммы 4, получаем следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть ряд Дирихле* (2) *определяет целую функцию, удовлетворяющую условию* (3)*. Тогда для любого m определяется многочлен $T_{m-1}(x)$ степени $m-1$, такой, что для чезаровских средних порядка m от коэффициентов ряда Дирихле* (2) *при любом x имеет место равенство*

$$S^m(x) = T_{m-1}(x) + O(1),$$

где константа в символе «O» не зависит от x.

Доказательство теоремы 1. Необходимость условий теоремы 1 следует из леммы 2.

Докажем достаточность, то есть покажем, что если для любого m и для любого x для чезаровских средних коэффициентов ряда Дирихле (2) имеет место равенство

$$S^m(x) = T_{m-1}(x) + O(1), \tag{17}$$

где $T_{m-1}(x)$ — многочлен степени $m-1$, а константа в символе «O» не зависит от x, то ряд Дирихле (2) определяет целую функцию, удовлетворяющую условию (3).

Рассмотрим в полуплоскости $\sigma > 1$ интегральное представление ряда Дирихле (2):

$$f(s) = s\int_1^{\infty} \frac{S(u)}{u^{s+1}} du, \tag{18}$$

где $S(x)$ — сумматорная функция коэффициентов ряда (2). В силу (17)

$$S(x) = O(1),$$

и, следовательно, представление (18) обеспечивает аналитическое продолжение ряда Дирихле (2) в полуплоскость $\sigma > 0$, и в критической полосе выполнено условие (3).

К интегралу (18) применим m раз формулу интегрирования по частям. Рассмотрим последовательност первообразных, полученных в результате итераци сумматорной функции $S(x)$:

$$\Phi^0(x) = S(x),\ \Phi^1(x) = \int_1^x \Phi^0(x)dx,\ \ldots,\ \Phi^m(x) = \int_1^x \Phi^{m-1}(x)dx.$$

Для функции $\Phi^m(x)$ получаем следующее представление:

$$\begin{aligned}\Phi^m(x) &= \int_1^x \Phi^{m-1}(x)dx = \int_1^{[x]} \Phi^{m-1}(x)dx + \int_{[x]}^x \Phi^{m-1}(x)dx = \\ &= \int_1^{[x]} S^m(x)dx + \{x\}S^m([x]+1) = \\ &= \sum_{k=1}^{[x]} S^m(k) + \{x\}S^m([x]+1) = \\ &= \sum_{k=1}^{[x]} S^m(k) + \{x\}\sum_{k=1}^{[x]+1} S^{m-1}(k).\end{aligned}$$

Из последнего равенства и из (17) имеем:

$$\Phi^m(x) = \sum_{k=1}^{[x]} T_{m-1}(k) + \{x\}\sum_{k=1}^{[x]+1} T_{m-2}(x) + O(1).$$

Применяя формулу Эйлера-Маклорена ([12]) получаем:

$$\Phi^m(x) = 2\int_1^{[x]} T_{m-1}(x)dx + 2\{x\}\int_1^{[x]+1} T_{m-2}(x)dx + O(1). \tag{19}$$

Таким образом, применяя m раз формулу интегрирования по частям к интегралу (18), и в силу (19), получаем, что функция $f(s)$, определённая рядом Дирихле (2), является суммой конечного числа целых функций, функции, регулярной в полуплоскости $\sigma > -m+1$, и конечного числа функций вида

$$S(s+1) = s(s+1)\dots(s+k)\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+k+1}}dx, \quad k < m. \tag{20}$$

Разложим функцию $\{x\}$ в ряд Фурье (см. [1]):

$$\{x\} = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin \pi nx}{\pi n}$$

и подставим это разложение в интеграл (20).

Тогда рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведённым в [1] на стр. 21–22 при доказательстве аналитического продолжения дзета-функции Римана, позволяют говорить о регулярности функций вида (20), а следовательно, и о регулярности ряда Дирихле (2) в полуплоскости $\sigma > -m+1$.

Осталось заметить, что условие (3) имеет место в силу интегрального представления (18), которое в нашем случае ($S(x) = O(1)$) имеет место в области $\sigma > 0$. Таким образом, теорема 1 полностью доказана. □

Замечание 1. *В работе [14] было показано, что если ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами определяет целую функцию f(s), модуль которой удовлетворяет условию*

$$|f(s)| < Ce^{|s|\ln|s|+A|s|},$$

где A — некоторая положительная константа, то коэффициенты ряда будут периодическими, начиная с некоторого номера.

В работе [15] приведен пример ряда Дирихле с конечнозначными непериодическими коэффициентами, который определяет целую функцию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана // М.: И. Л., 1953, с. 407

2. Чудаков Н. Г. Об одном классе рядов Дирихле // Теория чисел: сб. науч. трудов – Куйбышев, 1975, с. 53–57

3. Кузнецов. В. Н. Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле // Вычислительные методы и программирование: межвуз. сб. науч. трудов. - Саратов: изд-во СГУ, 1987, с. 17–23

4. Кузнецов. В. Н., Кузнецова Т. А., Сецинская Е. В., Кривобок В. В. О рядах Дирихле, определяющих целые функции с определеннным порядком роста модуля // Исследования по алгебре, теории чисел и смежным вопросам — Саратов, изд-во СГУ, 2007, Вып. 4, с. 69 – 75

5. Матвеева. О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Сарат. ун-та. Математика, Механика. Информатика — Саратов, изд-во СГУ, 2013, Вып. 4, ч. 2, с. 80 – 84

6. Матвеев В. А., Матвеева О. А. О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечнозначными мультипликатиными коэффициентами и с ограниченной сумматорной функцией // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2012, т. 13, Вып. 2, С. 106 – 116

7. Матвеева. О. А. Аналитические свойства определенных классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: Диссертация на соискание ученой степени к. ф.-м. н. — Ульяновск, 2014, 110 с.

8. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, т. 17, Вып. 3, с. 115 – 124

9. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Аппроксимационный подход в некоторых задачах теории рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, т. 17, Вып. 4, с. 124 – 131

10. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, т. 17, Вып. 2, с. 181 – 189

11. Коротков А. Е., Матвеева О. А Об одном численном алгоритме определения нулей рядов Дирихле с периодическими коэффициентами // Научные ведомости БелГУ — Белгород: изд-во БелГУ, 2011, Вып. 24, с. 47 –54

12. А. А. Карацуба Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983, с. 239

13. В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов Введение в минимакс — М.: Наука, 1972, с. 368

14. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сёге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984, т. 38, Вып. 6, с. 805 – 813

15. Чернов В. И. Об одном классе рядов Дирихле с конечными функциями Линделёфа // Исследования по теории чисел: Межвуз. науч. сб., 1982, Вып.8, с. 92 – 95

REFERENCES

1. Titchmarsh, E. K. 1953, Teorija dzeta-funkcii Rimana, *Moscow, I. L.*, pp. 407.
2. Chudakov, N. G. 1975, "Ob odnom klasse rjadov Dirihle", *Kujbyshev, Teorija chisel: sb. nauch. trudov*, pp. 53–57.
3. Kuznetsov, V. N. 1987, "Ob analiticheskom prodolzhenii odnogo klassa rjadov Dirihle", *Saratov: izd-vo SGU, Vychislitel'nye metody i programmirovanie: mezhvuz. sb. nauch. trudov.*, pp. 17–23.
4. Kuznetsov, V. N. Kuznetsova, T. A. Secinskaja, E. V. & Krivibok, V. V. 2007, "O rjadah Dirihle, opredeljajushhih celye funkcii s opredelennnym porjadkom rosta modulja", *Saratov: izd-vo SGU, ssledovanija po algebre, teorii chisel i smezhnym voprosam.*, iss. 4, pp. 69 – 75.
5. Matveeva, O. A. 2013, "Approksimacionnye polinomy i povedenie L-funkcij Dirihle v kriticheskoj polose", *Saratov: izd-vo SGU, Izvestija Sarat. un-ta. Matematika, Mehanika. Informatika.*, iss. 4, vol. 2, pp. 80 – 84.
6. Matveev V. A. Matveeva, O. A. 2013, "O povedenii v kriticheskoj polose rjadov Dirihle s konechnoznachnymi mul'tiplikatinymi kojefficientami i s ogranichennoj summatornoj funkciej", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 2, vol. 13, pp. 106 – 116.
7. Matveeva, O. A. 2014, "Analiticheskie svojstva opredelennyh klassov rjadov Dirihle i nekotorye zadachi teorii L-funkcij Dirihle", *Ulyanovsk: Thesis for the academic degree of the Ph.D.*, pp. 110.
8. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2016, "O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle s mul'tiplikativnymi kojefficientami", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 4, vol. 17, pp. 115 – 124.
9. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2016, "Approksimacionnyj podhod v nekotoryh zadachah teorii rjadov Dirihle s mul'tiplikativnymi kojefficientami ", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 4, vol. 17, pp. 124 – 131.
10. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2016, "O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 2, vol. 17, pp. 181 – 189.
11. Korotkov, A. E. Matveeva, O. A. 2011, "Ob odnom chislennom algoritme opredelenija nulej rjadov Dirihle s periodicheskimi kojefficientami", *Belgorod: Nauchnye vedomosti BelGU.*, iss. 24, pp. 47 –54.
12. Karatsuba, A. A. 1983, Osnovy analiticheskoj teorii chisel, *Moscow, Nauka*, pp. 239.
13. Dem'janov, A. A. Malozemov V. N. 1972, Vvedenie v minimaks, *Moscow, Nauka*, pp. 368.
14. Kuznetsov, V. N. 1984, "Analog teoremy Sjoge dlja odnogo klassa rjadov Dirihle", *Mat. zametki.*, vol. 38, iss. 6, pp. 805 – 813.
15. Chernov, V. I. 1982, "Ob odnom klasse rjadov Dirihle s konechnymi funkcijami Lindeljofa", *Issledovanija po teorii chisel: Mezhvuz. nauch. sb.*, iss. 8, pp. 92 – 95.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-296-304

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ ДИРИХЛЕ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ[1]

О. А. Матвеева, В. Н. Кузнецов (г. Саратов)

Аннотация

В работе изучются аналитические свойства L-функций Дирихле в критической полосе, характерные для почти периодических функций. В основе исследований лежит аппроксимационный подход, заключающийся в построении полиномов Дирихле, которые являются почти периодическими функциями, «быстро сходящихся» в критической полосе к L-функциям Дирихле.

На этом пути для любого прямоугольника, лежащего в критической полосе, доказано существование ε-почти перида для L-функции Дирихле, получена оценка константы равномерной непрерывности. Обсуждаются вопросы, связанные с применением аппроксимационного подхода при доказательстве свойства «универсальности» L-функций Дирихле, а так же связанные с получением соответствующих результатов для L-функций числовых полей.

Ключевые слова: аппроксимационные полиномы Дирихле, L-функции Дирихле, почти периодические функции.

Библиография: 15 названий.

ON DIRICHLET APPROXIMATION POLYNOMIALS AND SOME PROPERTIES OF DIRICHLET L-FUNCTIONS

O. A. Matveeva, V. N. Kuznetsov (Saratov)

Abstract

In this paper we study the analytic properties of Dirichlet L -functions in the critical strip, characteristic for almost periodic functions. The research is based on Approximation approach, consisting in the construction of Dirichlet polynomials, which are almost periodic functions, "rapidly convergent"in the critical strip to Dirichlet L -functions.

On this path, for any rectangle lying in the critical strip, the existence of ε -almost period for the Dirichlet L-function, we obtain the estimate constants of uniform continuity. Issues related to studying other properties of Dirichlet L -functions are discussed.

Keywords: Dirichlet approximation polynomials, Dirichlet L-functions, almost periodic functions.

Bibliography: 15 titles.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-01-00399).

1. Введение

Рассмотрим L-функцию Дирихле

$$L(s,\chi)=\prod_p \left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=\sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n^s},;\ s=\sigma+it, \tag{1}$$

где χ — неглавный характер Дирихле.

В работах [1], [2], [3] указан численный алгоритм построения последовательности полиномов Дирихле $Q_n(s)$, которые в любом прямоугольнике $D_T\ :\ \ 0<\sigma_0\leq\sigma\leq 1,\ |t|\leq T$, приближают L-функцию (1) с показательной скоростью.

Показано, что для любого $\varepsilon>0$, $T>0$, при $n\geq n_0$, где

$$n_0=\left[\frac{2T+|\ln\varepsilon|-\ln T}{\ln\rho}\right], \tag{2}$$

и где величина $\rho>1$, в прямоугольнике D_T имеет место оценка

$$||L(s,\chi)-Q_n(s)||_{C(D_T)}<\varepsilon.$$

Отметим, что величина ρ в формуле (2) определяется периодом характера χ и легко оценивается снизу в зависимости от периода d. Например, для $d=3,4,5,6,8,10$

$$\rho>\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, при заданных ε и d при достаточно большом T степень полинома Дирихле $Q_n(s)$, приближающего L-функцию Дирихле с точностью до ε, можно считать соизмеримой с величиной T. При этом будем использовать обозначение $n\sim T$.

Там же [1], [2], [3] изучались свойства полиномов $Q_n(s)$, которые определяют соответсвующие свойства L-функций (1). Такой подход изучения свойств L-функций Дирихле получил название аппроксимационного подхода.

В нашем случае мы рассмотрим свойства полиномов $Q_n(s)$, характерные для почти периодических функций, каковыми являются полиномы Дирихле, и выясним, в какой степени эти свойства отражаются в поведении L-функций Дирихле. По поводу свойств почти периодических функций см. [4],[5].

2. Некоторые свойства L-функций Дирихле, имеющие аналог в теории почти периодических функций

Рассмотрим отдельные понятия и введём ряд обозначений, связанных с почти периодическими функциями. Обозначим через $\tau(\varepsilon)$ ε-почти период почти периодической функции $f(x)$, т.е. для всех x

$$|f(x+\tau(\varepsilon))-f(x)|<\varepsilon.$$

Пусть $Q_{n,\sigma}(t)$ — почти периодическая функция вида

$$Q_{n,\sigma}(t)=\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^\sigma}e^{i\ln kt},\quad 0<\sigma_1\leq\sigma\leq 1. \tag{3}$$

Пусть $\eta(\varepsilon)$ обозначает число, характеризующее равномерную непрерывность функции $f(x)$, т.е.

$$|x_1-x_2|<\eta(\varepsilon)\longrightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\leq\varepsilon.$$

При заданных обозначениях имеет место

Лемма 1. *Для заданного $\varepsilon > 0$ для полинома вида (3) существует ε-почти период $\tau(\varepsilon)$, для которого имеет место оценка*

$$|\tau(\varepsilon)| < \frac{2\pi n}{\ln n} + \frac{\varepsilon n}{2\ln n} + C, \tag{4}$$

где константа C зависит только от величины ε и при достаточно больших n значительно меньше чем $\frac{n}{\ln n}$.

Доказательство. Покажем существование ε-почти периода, общего для всех слагаемых многочленов вида (3), то есть для системы $\{e^{-i\ln kt}\}, k = \overline{1,n}$.

Каждая функция $e^{-i\ln kt}$ является периодической функцией с периодом $\tau_k = \frac{2\pi}{\ln k}$. Пусть $\eta_k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ — число, характеризующее равномерную непрерывность этой функции на интервале $|t| < T$, где T — высота прямоугольника D_T, на котором многочлен $Q_n(s)$ приближает L-функцию с точностью до ε. Величина $\eta_k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ определяется из соотношения

$$|e^{i\ln k\delta} - 1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то есть, $\eta_k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2\ln k}$.

Рассмотрим две функции, $e^{-i\ln kt}$ и $e^{-i\ln(k+1)t}$. Как показано в [4], Дополнение, §3, лемма 1, для двух данных периодических функций на отрезке $[0,l]$, где $l = \max(\tau_k, \tau_{k+1})$, найдётся пара $\frac{\varepsilon}{2}$-почти периодов $\widehat{\tau}_1 = \eta n_1$ и $\widehat{\tau}_2 = \eta n_2$, где $\eta = \min(\eta_k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \eta_{k+1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right))$, а n_1 и n_2 — целые числа, такие, что $|\widehat{\tau}_1 - \widehat{\tau}_2| \le l$. Более того, существует целое s, такое, что имеет место равенство:

$$\tau_1 - \tau_2 = n_s\eta = \widehat{\tau}_{1,s} - \widehat{\tau}_{2,s}. \tag{5}$$

Далее, в [4] показано, что на отрезке $[0,L]$, где $L = l + 2T$, и где $\max_s |\widehat{\tau}_{1,s}| = T$, найтется общий ε-почти период τ, равный

$$\tau = \tau_1 - \widehat{\tau}_{1,s} = \tau_2 - \widehat{\tau}_{2,s}.$$

В нашем случае $\widehat{\tau}_1$ и $\widehat{\tau}_2$ с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$ являются величинами, кратными периодам τ_n и τ_{n+1}.

Определим минимальное значение L, при котором будет выполняться неравенство $|\tau| < L$. Пусть k_0 — такое натуральное число, что $\frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{\ln k_0}$. Тогда при $k \ge k_0$

$$|\tau_1 - \tau_2| = \left|\frac{2\pi}{\ln k} - \frac{2\pi}{\ln(k+1)}\right| = \left|\frac{2\pi\ln\frac{k+1}{k}}{\ln k\ln(k+1)}\right| < \frac{\varepsilon}{2\ln k}.$$

Отсюда в силу (5) имеем:

$$|\widehat{\tau}_{1,s} - \widehat{\tau}_{2,s}| = \eta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

и, следовательно, $|n_s| = 1$.

Таким образом, имеем:

$$|\tau| = |\tau_1 - \tau_2| < l + \frac{\varepsilon}{2\ln n} = \frac{2\pi}{\ln n} + \frac{\varepsilon}{2\ln n}.$$

Следовательно, для многочлена

$$\sum_{k=k_0}^{n} \frac{a_k}{k^\sigma} e^{-i\ln kt}, \quad n \ge n_0,$$

ε-почти период τ будет удовлетворять неравенству

$$|\tau| < \sum_{k=k_0}^{n} \frac{2\pi}{\ln k} + \sum_{k=k_0}^{n} \frac{\varepsilon}{2\ln k}.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln k} \sim \frac{n}{\ln n}$ (например, [6]), из последнего неравенства получаем, что ε-почти период τ для многочлена $Q_{n,\sigma}(t)$ вида (3) удовлетворяет неравенству

$$|\tau| < \frac{2\pi n}{\ln n} + \frac{\varepsilon n}{2\ln n} + C,$$

где константа C зависит только от ε, что и завершает доказательство леммы 1. □

В силу результата относительно аппроксимационных полиномов $Q_n(s)$, приведённого во введении, и в силу леммы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $T > T_0$ найдётся такое положительное число $\tau < \frac{T}{\ln T}$, что для всех s, лежащих в прямоугольнике $D_T:\ 0 < \sigma_1 \le \sigma \le 1,\ |t| \le T$, и таких, что $s + i\tau \in D_T$, для L-функции Дирихле выполняется неравенство*

$$|L(s+i\tau) - L(s,\chi)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Замечание 1. *Приведённое в теореме 1 свойство L-функций Дирихле является аналогом свойства ε-почти периода для почти периодических функций. В отличие от почти периодических функций, оценка (6) имеет место в ограниченной области.*

Далее рассмотрим прямоугольник $D_T:\frac{1}{2} \le \sigma \le 1,\ |t| \le T$. Пусть полином Дирихле $Q_n(s)$ приближает в прямоугольнике D_T L-функцию Дирихле $L(s,\chi)$ с точностью для величины ε. В этом случае имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Для константы $\eta(\varepsilon)$ равномерной непрерывности аппроксимационного полинома $Q_n(s)$ в прямоугольнике D_T имеет место оценка вида*

$$\eta(\varepsilon) < \frac{C\varepsilon}{\ln n \cdot T^{\frac{1}{2}}},$$

где константа C не зависит от n и ε.

Доказательство. Рассмотрим известное неравенство (см., например, [7]):

$$|Q_n(s) - Q_n(s_0)| - |Q_n'(s_0)(s-s_0)| \le |Q_n(s) - Q_n(s_0) - Q_n'(s_0)(s-s_0)| = o(|s-s_0|).$$

Обозначим $\delta = |s - s_0|$. Тогда неравенство

$$|Q_n(s) - Q_n(s_0)| \le |Q_n'(s_0)|\delta + o(\delta) < \varepsilon$$

имеет место, если

$$\delta < \frac{\varepsilon}{|Q_n'(s_0)|}. \tag{7}$$

Покажем, что имеет место эквивалентность

$$||Q_n'(s)||_{C(D_T)} \quad \sim \quad \ln n ||Q_n(s)||_{C(D_T)}. \tag{8}$$

С этой целью сравним величины

$$||L'(s,\chi)||_{C(D_T)} \quad \text{и} \quad ||L(s,\chi)||_{C(D_T)}.$$

Обозначим через $S_n(s)$ частичную сумму ряда Дирихле, определяющего L-функцию Дирихле. Пусть $S(x)$ — сумматорная функция коэффициентов L-функции, а $S^*(x)$ — сумматорная функция коэффициентов производной L-функции. В результате применения метода суммирования Абеля получаем:

$$|S^*(x)| = \left|S(x)\ln x - \int_1^x \frac{S(u)}{u}du\right| \leq \ln x|S(x)| + \ln x \cdot \max_{n\leq x}|S(n)| \leq C\ln x \cdot \max_{n\leq x}|S(n)|,$$

где константа C не зависит от x.

Таким образом, имеем:

$$|S^*(x)| \leq C\ln x, \tag{9}$$

где константа C не зависит от x.

Пусть

$$\widehat{S}(u) = \begin{cases} S(u), & u \leq n, \\ S(n), & u > n. \end{cases}$$

Тогда для функции $S_n(s)$ имеет место интегральное представление:

$$S_n(s) = s\int_1^\infty \frac{\widehat{S}(u)}{u^{s+1}}du = s\int_1^n \frac{S(u)}{u^{s+1}}du + s\int_n^\infty \frac{S(n)}{u^{s+1}}du. \tag{10}$$

Аналогично получаем:

$$S_n'(s) = s\int_1^\infty \frac{\widehat{S}^*(u)}{u^{s+1}}du = s\int_1^n \frac{S^*(u)}{u^{s+1}}du + s\int_n^\infty \frac{S^*(n)}{u^{s+1}}du. \tag{11}$$

Отсюда для $s \in D_T$ и для достаточно больших n будут выполняться неравенства

$$|L(s,\chi) - S_n(s)| \leq \left|s\int_n^\infty \frac{S(u)}{u^{s+1}}du\right| + \left|s\int_n^\infty \frac{S(n)}{u^{s+1}}du\right| \leq \frac{CT}{n^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon \tag{12}$$

и

$$|L'(s,\chi) - S_n'(s)| < \varepsilon. \tag{13}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались условием (9).

Рассмотрим

$$S_t(x) = \sum_{n\leq x}\chi(n)n^{-it}, \quad \widehat{S}_t(x) = \begin{cases} S_t(x), & x \leq n, \\ S_t(n), & x > n. \end{cases}$$

Аналогично $S_t^*(x)$ и $\widehat{S}_t^*(x)$.

Тогда при $|t| \leq T$ имеет место неравенство:

$$|S_t^*(n)| \leq C_1\ln n \cdot \max_{k\leq n}|S_t(k)|, \tag{14}$$

где константа C_1 не зависит от n.

Действительно,

$$|S_t^*(n)| \leq \ln n|S_t(n)| + \left|\int_1^n \frac{S_t(u)}{u}du\right| \leq \ln n|S_t(n)| + \ln n \cdot \max_{k\leq n}|S_t(k)|.$$

Как показано в работе [7] в случае неглавного характера Дирихле при $|t| \leq T$ имеет место оценка $|S_t(x)| < C$, где константа C не зависит от x. Следовательно, $\max_{k\leq n}|S_t(k)|$ есть константа, не равная нулю и не зависящая от x. Отсюда получается неравенство (14).

Обратно, в силу (14)

$$S_t(n) \leq \frac{1}{\ln n}|S_t^*(n)| + \frac{1}{\ln n}\max_{k\leq n}\frac{|S_t^*(k)|}{\ln n} \leq \frac{C_2}{\ln n}\max_{k\leq n}|S_t^*(k)|, \tag{15}$$

где константа C_2 не зависит от n.

При достаточно большом n получаем:

$$|S_n(s)| = \left|\sigma\int_1^\infty \frac{\widehat{S}_t(u)}{u^{\sigma+1}}du\right| \leq \left|\sigma\int_1^n \frac{S_t(u)}{u^{\sigma+1}}du\right| + \left|\sigma\int_n^\infty \frac{S_t(n)}{u^{\sigma+1}}du\right| \leq \left|\sigma\int_1^n \frac{S_t(u)}{u^{\sigma+1}}du\right| + \varepsilon.$$

Аналогично,

$$|S_n'(s)| \leq \left|\sigma\int_1^n \frac{S_t^*(u)}{u^{\sigma+1}}du\right| + \varepsilon.$$

Отсюда в силу (14) и (15) следует, что при достаточно больших n имеет место эквивалентность:

$$||S_n'(s)||_{C(D_T)} \quad \sim \quad \ln n||S_n(s)||_{C(D_T)}. \tag{16}$$

Тогда в силу (12) и (13) при достаточно больших n имеет место оценка вида

$$|\ ||L'(s,\chi)||_{C(D_T)} - \ln n||L(s,\chi)||_{C(D_T)}\ | < \varepsilon. \tag{17}$$

Известно (см. [8]), что при $|t| \leq T$

$$\left|L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right| = O\left(T^{\frac{1}{2}}\right).$$

Далее, при $s \in D_T$ имеем:

$$S_n(s) = \frac{1}{\sigma}\int_1^n \frac{S_t(u)}{u^{\sigma+1}}du + \frac{1}{\sigma}\int_n^\infty \frac{S_t(n)}{u^{\sigma+1}}du.$$

Отсюда получаем:

$$|S_n(s)| \leq \max_{k\leq n}|S_t(k)|\left(1 - \frac{1}{n^\sigma}\right) \leq CT^{\frac{1}{2}},$$

где константа C не зависит от n.

Следовательно, для $s \in D_T$ имеет место оценка

$$|L(s,\chi)| \leq CT^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда и для полинома $Q_n(s)$ при $s \in D_T$ и при достаточно больших n выполняется неравенство

$$|Q_n(s)| \leq CT^{\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

где константа C не зависит от n.

В силу (16), (17) получаем условие (8), из которого с учётом (18) следует оценка

$$||Q_n'(s)||_{C(D_T)} \leq C\ln n \cdot T^{\frac{1}{2}},$$

где константа C не зависит от n.

Отсюда в силу (7) имеет место оценка

$$\delta < \frac{C\varepsilon}{\ln n \cdot T^{\frac{1}{2}}},$$

где константа C не зависит от n и ε, что и завершает доказательство леммы 2. □

Как следствие леммы 2 получаем следующее утверждение:

Теорема 2. *Для L-функции Дирихле в прямоугольнике D_T для константы равномерной непрерывности $\eta(\varepsilon)$ имеет место неравенство:*

$$\eta(\varepsilon) < \frac{C\varepsilon}{\ln T \cdot T^{\frac{1}{2}}},$$

где величина C не зависит от ε.

3. Заключение

В заключение укажем некоторые задачи, связанные с поведением L-функций в критической полосе, решение которых может быть получено на основании аппроксимационного подхода.

В 1975 году С. М. Воронин впервые доказал, что вертикальные сдвиги дзета-функции Римана с любой точностью приближают аналитические функции, не равные нулю внутри круга радиуса r, $0 < r < \frac{1}{4}$, и непрерывные на границе этого круга. Это свойство дзета-функции Римана С. М. Воронин назвал свойством универсальности. Позднее С. М. Воронин доказал свойство универсальности для достаточно широкого класса эйлеровых произведений, в частности, для L-функций Дирихле. В основе доказательства свойства универсальности лежат глубокие результаты, полученные С. М. Ворониным, относительно определённых функциональных рядов в пространстве Харди (см. по этому поводу работы [9],[10], [11]).

Представляет интерес иной подход к решению задачи об универсальности L-функций Дирихле, основанный на переносе отдельных свойств почти периодических функций, каковыми являются полиномы Дирихле, на L-функции Дирихле. При этом, наряду с задачей приближения функций непрерывными сдвигами, следует рассмотреть и задачу приближения дискретными сдвигами, при решении которой в последние годы были получены новые результаты (см. [12]).

Далее, в работах [13], [14], [15] был разработан численный алгоритм построения аппроксимационных полиномов для L-функций числовых полей. В связи с этим представляет интерес получить на основании апрроксимационного подхода аналитические свойства L-функций числовых полей, характерные для почти периодических функций.

Отметим, что решение поставленных выше задач планируется привести в других работах автора.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеева. О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Сарат. ун-та. Математика, Механика. Информатика — Саратов, изд-во СГУ, 2013, Вып. 4, ч. 2, С. 80 – 84

2. Матвеева. О. А. Аналитические свойства определенных классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: Диссертация на соискание ученой степени к. ф.-м. н. — Ульяновск, 2014, 110 с.

3. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, т. 17, Вып. 3, С. 115 – 124

4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости — М.: Изд-во МГУ, 1998, 480 с.

5. Левин Б. Я. Распредление корней целых функций — М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1956, 632 с.

6. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983, 239 с.

7. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле — М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1947, 202 с.

8. Матвеев В. А., Матвеева О. А. О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечнозначными мультипликатиными коэффициентами и с ограниченной сумматорной функцией // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2012, т. 13, Вып. 2, С. 106 – 116

9. Воронин С. М. Об универсальности дзета-функции Римана // Изв. АНСССР, Серия Математика, 1975, т. 39, №3, с. 457 – 486

10. Воронин С. М. Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов: Диссертация на соискание ученой степени д. ф.-м. н., МИАН СССР — М.: 1977, 90 с.

11. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана — М.: Физматлит, 1994, 376 с.

12. Mishou H. The joint distribution of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-function // Lith. Math J., 2007, vol. 47, №1, P. 32 – 47.

13. Кузнецов В. Н., Матвеев В. А. К задаче численного определения нулей L-функций Дирихле числовых полей // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2015, т. 16, Вып. 2, С. 144 – 155

14. Матвеев В. А. Об одном численном алгоритме определения нулей L-функций Дирихле числовых полей // Материалы XXIII Международной конференции "Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения— Тула: изд-во ТПГУ, 2015, С. 233 – 234

15. Матвеев В. А., Матвеева О. А. Об одном подходе получения плотностных теорем для нулей L-функций Дирихле числовых полей. // Материалы XXIII Международной конференции "Алгебра, теория чисел: современные проблемы и приложения— Тула: изд-во ТПГУ, 2015, С. 234 – 235

REFERENCES

1. Matveeva, O. A. 2013, “Approksimacionnye polinomy i povedenie L-funkcij Dirihle v kriticheskoj polose“, *Saratov: izd-vo SGU, Izvestija Sarat. un-ta. Matematika, Mehanika. Informatika.*, iss. 4, vol. 2, pp. 80 – 84.

2. Matveeva, O. A. 2014, “Analiticheskie svojstva opredelennyh klassov rjadov Dirihle i nekotorye zadachi teorii L-funkcij Dirihle“, *Ulyanovsk: Thesis for the academic degree of the Ph.D.*, pp. 110.

3. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2016, “O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle s mul’tiplikativnymi kojefficientami“, *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 4, vol. 17, pp. 115 – 124.

4. Demidovich B. P. 1998, Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti , *Moscow, MSU publ.*, pp. 480.

5. Levin B. Ja. 1956, Raspredlenie kornej celyh funkcij , *Izd-vo tehniko-teoreticheskoj literatury.*, pp. 632.

6. Karatsuba, A. A. 1983, Osnovy analiticheskoj teorii chisel, *Moscow, Nauka*, pp. 239.

7. Chudakov N. G. 1947, Vvedenie v teoriju L-funkcij Dirihle , *Izd-vo tehniko-teoreticheskoj literatury.*, pp. 202.

8. Matveev V. A. Matveeva, O. A. 2013, "O povedenii v kriticheskoj polose rjadov Dirihle s konechnoznachnymi mul'tiplikatinymi kojefficientami i s ogranichennoj summatornoj funkciej", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 2, vol. 13, pp. 106 – 116.

9. Voronin S. M. 1975, "Ob universal'nosti dzeta-funkcii Rimana", *Izv. ANSSSR, Serija Matematika*, №3, vol. 39, pp. 457 – 486.

10. Voronin S. M. 1977, "Analiticheskie svojstva proizvodjashhih funkcij Dirihle arifmeticheskih ob'ektov:", *MIAN SSSR : Thesis for the academic degree of Doctor of Science.*, pp.90.

11. Voronin S. M. K̇aratsuba, A. A. 1983, Dzeta-funkcija Rimana , *Moscow, Fizmatlit*, pp. 376.

12. Mishou H. 2007, "The joint distribution of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta-function" *Lith. Math J.*, vol. 47, №1, pp. 32 – 47.

13. Kuznetsov, V. N. Matveev, V. A. 2015, "K zadache chislennogo opredelenija nulej L-funkcij Dirihle chislovyh polej", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 2, vol. 16, pp. 144 – 155.

14. Matveev, V. A. 2015, "Ob odnom chislennom algoritme opredelenija nulej L-funkcij Dirihle chislovyh polej", *Tula: izd-vo TPGU, Materialy XXIII Mezhdunarodnoj konferencii "Algebra, teorija chisel: sovremennye problemy i prilozhenija"*, pp. 234 – 235.

15. Matveev V. A. Matveeva, O. A. 2015, "Ob odnom podhode poluchenija plotnostnyh teorem dlja nulej L-funkcij Dirihle chislovyh polej.", *Tula: izd-vo TPGU, Materialy XXIII Mezhdunarodnoj konferencii "Algebra, teorija chisel: sovremennye problemy i prilozhenija"*, pp. 235 – 236.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 512.5 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-305-324

НОВЫЕ СВОЙСТВА ПОЧТИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ С ЦЕЛЫМИ ЭКСПОНЕНТАМИ

Н. П. Панов (г. Ульяновск)

Аннотация

Исследуются почти нильпотентные многообразия неассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики в классе всех алгебр, удовлетворяющих тождественному соотношению $x(yz) \equiv 0$. Ранее в данном классе алгебр для любого натурального $m \geqslant 2$ была определена алгебра A_m, порождающая почти нильпотентное многообразие $var(A_m)$ экспоненциального роста с экспонентой, равной m. В настоящей работе исследуются числовые характеристики многообразий $var(A_m)$. Для этого в относительно свободных алгебрах многообразий $var(A_m)$ рассматриваются пространства полилинейных элементов, соответствующих левонормированным многочленам с фиксированной образующей на первой позиции.

Для каждого такого пространства как вполне приводимого модуля над групповой алгеброй симметрической группы определены все кратности в разложении соответствующего кохарактера в сумму неприводимых характеров.

На основе определений данных кратностей приводится метод вычисления кратностей, соответствующих полилинейным частям относительно свободных алгебр многообразий $var(A_m)$. С помощью приведенного метода вычисления кратностей для каждого $n \geqslant 1$ получены кодлины многообразий $var(A_m)$, $m \geqslant 2$. Для каждого многообразия $var(A_m)$, $m \geqslant 2$, в работе также описано соответствующее множество определяющих тождеств.

Ключевые слова: тождество, линейная алгебра, почти нильпотентное многообразие, экспоненциальный рост.

Библиография: 16 названий.

NEW PROPERTIES OF ALMOST NILPOTENT VARIETIES WITH INTEGER EXPONENTS

N. P. Panov (Ulyanovsk)

Abstract

Almost nilpotent varieties of nonassociative algebras over a field of zero characteristic in the class of all algebras satisfying identical relation $x(yz) \equiv 0$ are studied. Earlier in this class of algebras for each natural number $m \geqslant 2$ the algebra A_m generating the almost nilpotent variety $var(A_m)$ of exponential growth with exponent of m was defined. In the paper numerical characteristics of varieties $var(A_m)$ are studied.

To this end in the relatively free algebras of the varieties $var(A_m)$ the spaces of multilinear elements corresponding to left normed polynomials with fixed variable on the first position are considered.

Each space is considered as completely reducible module of the symmetric group and multiplicities in the decomposition of the corresponding cocharacter into sum of irreducible characters are calculated. The multiplicities corresponding to the multilinear parts of relatively free algebras of the variety $var(A_m)$ are defined by the calculated values. Colengths of the varieties $var(A_m)$, $m \geqslant 2$ are obtained using this method. For each $m \geqslant 2$ the set of identical relations that defines the variety $var(A_m)$ is obtained.

Keywords: polynomial identity, linear algebra, almost nilpotent variety, exponential growth.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

В данной работе продолжается изучение многообразий алгебр над полем нулевой характеристики, а именно почти нильпотентных многообразий с целой экспонентой в классе всех алгебр, удовлетворяющих тождественному соотношению $x(yz) \equiv 0$. Информацию об алгебрах с тождествами, в том числе используемые далее определения и обозначения, можно найти в монографиях [1], [2], [3]. Результаты, касающиеся некоторых почти нильпотентных многообразий в различных классах алгебр, представлены в обзоре [4].

Хорошо известно, что в классе всех ассоциативных алгебр единственным почти нильпотентным многообразием является многообразие всех ассоциативно-коммутативных алгебр ([5], Remark 1). В классе алгебр Ли также существует единственное почти нильпотентное многообразие — подмногообразие всех алгебр, удовлетворяющих тождеству метабелевости $(xy)(zt) \equiv 0$ [6]. Ровно два почти нильпотентных многообразия существуют в классе алгебр Лейбница [7]. Все почти нильпотентные подмногообразия подэкспоненциального (полиномиального или промежуточного) роста определены в многообразиях алгебр с тождеством $x(yz) \equiv 0$ [8], метабелевых коммутативных алгебр [9], метабелевых антикоммутативных алгебр [10]. В каждом многообразии таких подмногообразий также ровно два. Дискретная серия почти нильпотентных многообразий линейного роста, определенных с помощью бесконечных периодических слов в алфавите из двух символов, представлена в работе [11].

Перечисленные почти нильпотентные многообразия имеют подэкспоненциальный рост. И хотя это их свойство кажется естественным, известны примеры почти нильпотентных многообразий экспоненциального роста. Рассмотрим подробнее в классе алгебр с тождеством $x(yz) \equiv 0$ подмногообразие, обозначим его через $var(A_2)$, определенное в работе [5]. Это многообразие экспоненциального роста с экспонентой, равной двум. Для его изучения в соответствующей относительно свободной алгебре авторы рассматривали пространства полилинейных элементов, соответствующих многочленам, все мономы которых являются левонормированными и имеют фиксированную образующую на первой позиции. Данные пространства рассматривались как вполне приводимые модули симметрических групп, и авторы оставили открытым вопрос о точном значении кратностей с диаграммами Юнга из двух строк равной длины. Ответ на него дан в [12], где также представлены основные числовые характеристики многообразия $var(A_2)$ и множество определяющих его тождеств. В работе [13] по аналогии с $var(A_2)$ для каждого натурального $m \geqslant 3$ определено многообразие $var(A_m)$ экспоненты m, имеющее почти нильпотентное подмногообразие. Позже было доказано, что все многообразия $var(A_m)$, $m \geqslant 3$, сами являются почти нильпотентными [14]. Целью настоящей работы является описание числовых характеристик и определяющих тождеств многообразий $var(A_m)$, $m = 3, 4, \ldots$.

Обозначим основное поле через Φ, и пусть в свободной алгебре $F(X)$ счетного ранга P_n — пространство полилинейных неассоциативных многочленов от $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 1$. Так как характеристика Φ равна нулю, то любое тождество эквивалентно некоторой системе полилинейных тождеств, и информацию о многообразии $\mathbf{V}$ можно получить, изучив в соответствующей относительно свободной алгебре $F(X, \mathbf{V})$ подпространства $P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(\mathbf{V}))$. Одной из основных числовых характеристик многообразия $\mathbf{V}$ является последовательность коразмерностей $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$, $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$. Говорят, что её асимптотическое поведение определяет рост многообразия $\mathbf{V}$, и что экспонента многообразия $\mathbf{V}$ экспоненциального роста равна α, если предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$ существует и равен α. Известно, что пространство $P_n(\mathbf{V})$ можно рассматривать как вполне приводимый ΦS_n-модуль с кохарактером $\chi_n(\mathbf{V})$, равным сумме неприводимых характеров χ_λ с кратностями $m_\lambda(\mathbf{V})$, которые соответствуют диаграммам Юнга λ разбиений n, $\lambda \vdash n$, S_n — симметрическая группа. Для каждого $n \geqslant 1$ с помощью кратностей $m_\lambda(\mathbf{V})$, $\lambda \vdash n$, определяются коразмерность $c_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}) d_\lambda$ и кодлина $l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})$, где d_λ — степень неприводимого характера χ_λ.

Так как во всех рассматриваемых далее алгебрах элементы имеют левонормированное строение, то договоримся записывать их без скобок, например $abab = (((ab)a)b)$. В алгебрах операцию умножения справа на образующую a будем также обозначать соответствующим оператором R_a, например $a(R_bR_c)^2 = abcbc$. Оператор умножения справа на свободную образующую x обозначим соответствующей заглавной буквой X, например $x_0(XY)^2 = x_0xyxy$. При этом будем считать, что $x_0w(X_1,\dots,X_k) = x_0$, если степень ассоциативного монома w от операторов $X_1,\dots,X_k$ равна нулю. Также договоримся считать всякое произведение вида $ab_ib_{i+1}\dots b_k$, где $i > k$, равным a. В произведении пропуск множителя x, находящегося на третьей или последующих позициях, обозначим через $\widehat{X}$, например $x_0X_1\widehat{X}_2X_3 = x_0X_1X_3$. Указанный символ над оператором будем использовать только для обозначения пропуска множителя или отсутствия элемента в множестве. Другие символы над операторами или образующими используем для обозначения альтернирования, например

$$x_0\overline{X}_1\overline{X}_2\widetilde{Y}_1\widetilde{Y}_2 = \sum_{p,q\in S_2}(-1)^p(-1)^q x_0X_{p(1)}X_{p(2)}Y_{q(1)}Y_{q(2)},$$

$$z\overline{R}_{a_1}\overline{R}_{a_2} = zR_{a_1}R_{a_2} - zR_{a_2}R_{a_1},$$

где $(-1)^p$ — четность перестановки p. Для краткости $k \geqslant 2$ следующих друг за другом различных альтернированных произведений по t множителей X_i, $i = 1,\dots,t$, будем обозначать через $(\overline{X}_1\dots\overline{X}_t)^k$, например $x_0(\overline{X}_1\dots\overline{X}_t)^2 = x_0(\overline{X}_1\dots\overline{X}_t)(\widetilde{X}_1\dots\widetilde{X}_t)$.

Обозначим через $S_{i,j}$ подгруппу S_n, $n \geqslant 1$, элементами которой являются подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \,\dots\, i{-}1 & i & \dots & j & j{+}1 \,\dots\, n \\ 1 \,\dots\, i{-}1 & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & j{+}1 \,\dots\, n \end{pmatrix},$$

переставляющие числа с i по j, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

Наконец, приведем следующее предложение из работы [15], с помощью которого докажем все основные результаты.

Предложение 1. *Пусть T — таблица Юнга, соответствующая разбиению $\lambda \vdash n$, и $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ — ΦS_n-модуль, где M_i — изоморфные неприводимые подмодули с характером χ_λ. Тогда k равно максимальному числу линейно независимых элементов $g \in M$ таких, что $\sigma \cdot g = g$ для любого элемента $\sigma \in R_T$.*

2. Определения алгебр и вспомогательные утверждения

Рассматриваемые алгебры A_m, $m = 2,3,\dots$, заданы образующими $z, a_1,\dots,a_m$ и следующими определяющими соотношениями:

1. $a_iu = 0,\ u \in A_m,\ 1 \leqslant i \leqslant m,$
2. $\big(zw(R_{a_1},\dots,R_{a_m})\big)\big(zw'(R_{a_1},\dots,R_{a_m})\big) = 0,\ \deg w, \deg w' \geqslant 0,$
3. $z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^k a_{i_1}\dots a_{i_s}a_{i_{s+1}}\dots a_{i_t} + z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^k a_{i_1}\dots a_{i_{s+1}}a_{i_s}\dots a_{i_t} = 0,$

где $k \geqslant 0$, $1 \leqslant s < t \leqslant m$, $1 \leqslant i_1,\dots,i_m \leqslant m$. Из определяющих соотношений 3 следуют равенства $z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^k w(R_{a_1},\dots,R_{a_m}) = 0$ для $k \geqslant 0$ и мономов w, $\deg w \leqslant m$, степени не меньше двух хотя бы по одному R_{a_i}, $1 \leqslant i \leqslant m$. Элементы

$$a_1,\dots,a_m,\ z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^k,\ z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^k a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_t},$$

$$k \geqslant 0,\ 1 \leqslant t < m,\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_t \leqslant m$$

образуют базис A_m.

Каждая алгебра A_m удовлетворяет тождествам

$$x(yz) \equiv 0, \tag{1}$$

$$\sum_{\sigma \in S_{m+1}} (-1)^\sigma x_0 X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(2)} \dots X_{\sigma(m+1)} \equiv 0, \tag{2}$$

$$x_0 X^3 \equiv 0, \tag{3}$$

$$x_0 X^2 Z_1 \dots Z_s Y^2 \equiv 0, \tag{4}$$

$$x_0 XYX \equiv -x_0 YXX - x_0 XXY, \tag{5}$$

$$x_0 X_2 X_1 w Y^2 \equiv -x_0 X_1 X_2 w Y^2, \tag{6}$$

$$x_0 X^2 w Y_2 Y_1 \equiv -x_0 X^2 w Y_1 Y_2, \tag{7}$$

$$x_0 X_2 X_1 w Y_2 Y_1 \equiv -x_0 X_1 X_2 w Y_2 Y_1 - x_0 X_2 X_1 w Y_1 Y_2 - x_0 X_1 X_2 w Y_1 Y_2, \tag{8}$$

где $w = Z_1 \dots Z_s$, и остаток от деления s на m не равен $m-2$.

Предложение 2. *В алгебре A_m любое полилинейное тождество*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i v_i(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n) \equiv 0,\ n \geqslant 2, \tag{9}$$

эквивалентно системе тождеств

$$x_i v_i(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n) \equiv 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{10}$$

где v_i — ассоциативный многочлен от операторов X_j, $j \neq i$.

Доказательство. Очевидно, что из системы тождеств (10) следует тождество (9). Обратное утверждение докажем от противного. Предположим, что для некоторого j существует ненулевая подстановка ϕ элементов алгебры A_m в многочлен $x_j v_j$, тогда по определяющим соотношениям 2 элемент $\phi(x_j)$ принадлежит идеалу, порожденному образующей z. При этом для всех $i \neq j$ в силу определяющих соотношений 2 выполняются равенства $\phi(x_i v_i) = 0$. Получили противоречие, и предложение доказано.

Договоримся для краткости в круглых скобках вместо $var(A_m)$ писать A_m, например $m_\lambda(A_m)$. Обозначим через $\mathbf{N_m}$, $m = 2, 3, \dots$, многообразие, $var(A_m) \subseteq \mathbf{N_m}$, определенное тождествами (1)–(4), и исследуем ΦS_n-модули $P_n(\mathbf{N_m})$, $P_n(A_m)$, $n = 1, 2, \dots$. Для этого определим пространство полилинейных многочленов от образующих $x_0, x_1, \dots, x_n$

$$L_n = span\{x_0 X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$$

и вполне приводимые ΦS_n-модули $L_n(\mathbf{V}) = L_n/(L_n \cap Id(\mathbf{V}))$, $\mathbf{V} = \mathbf{N_m}, var(A_m)$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть разбиение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$, $k, n \geqslant 1$, и T_λ — таблица Юнга с диаграммой λ, тогда полилинейный элемент

$$f_{T_\lambda} = e_{T_\lambda}(x_0 X_1 \dots X_n) = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}, \tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \sigma\tau(x_0 X_1 \dots X_n)$$

порождает неприводимые подмодули в $L_n(\mathbf{N_m})$ и $L_n(A_m)$, R_{T_λ}, C_{T_λ} — стабилизаторы строк и соответственно столбцов таблицы T_λ. Соответствующие $L_n(\mathbf{N_m})$, $L_n(A_m)$ кохарактеры $\chi_n^L(\mathbf{N_m})$, $\chi_n^L(A_m)$ являются линейными комбинациями неприводимых характеров χ_λ с кратностями $m_\lambda^L(\mathbf{N_m})$, $m_\lambda^L(A_m)$.

Через L_λ, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \vdash n \geqslant 1$, $t = 1, \dots, n$, обозначим пространство полиоднородных многочленов полистепени $(\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ по $x_1, \dots, x_t$

$$L_\lambda = span\{x_0 v(X_1, \dots, X_t) \mid \deg_{X_i} v = \lambda_i, i = 1, \dots, t\},$$

где $v(X_1, \dots, X_t)$ — мономы, и пусть пространство $L_\lambda(\mathbf{N_m}) = L_\lambda/(L_\lambda \cap Id(\mathbf{N_m}))$.

Предложение 3. *Пусть в мономе $x_0v(X_1,\ldots,X_t)$, $t\geqslant 2$, найдется пара образующих x_i, $1\leqslant i\leqslant t$, между которыми расположены k, $0\leqslant k\leqslant m-1$, других различных образующих. Зафиксируем i и обозначим x_0v через $(r,s)_k$, где r и s — номера позиций x_i, $r<s$, $k=s-r-1$. Пусть $(r,s)_0=(r,s)$, тогда по модулю тождеств (5), (8), $m\geqslant 2$, выполняется равенство*

$$(r,s)_k=(-1)^k\sum_{j=0}^{k}(r+k-j,s-j). \tag{11}$$

Данное утверждение обобщает предложение 1, сформулированное в работе [14] для мономов $x_0v(X_1,\ldots,X_m)$, $\deg v\geqslant m+1$, $\deg_{X_i}v>0$, $i=1,\ldots,m$. Легко видеть, что его доказательство повторяет доказательство из работы [14], так как в последнем используются только тождества (5), (8).

Предложение 4. *Зафиксируем $m\geqslant 3$. По модулю тождеств многообразия $\mathbf{N_m}$ любой ненулевой моном $x_0v(X_1,\ldots,X_t)\in L_\lambda$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_t)$, $1\leqslant t\leqslant m$, $\lambda_1\geqslant 2$, равен линейной комбинации мономов вида:*

1. *при $t=m$ и $\lambda_m\geqslant 2$*

$$x_0w'(X_1\ldots X_{m-1})^{r_1}X_m^2(X_1\ldots X_{m-1})^{r_2}(X_1\ldots X_m)^s w'', \tag{12}$$

где $r_1,r_2\leqslant 1$, $r_1>0$ или $r_2>0$, $s\geqslant 0$, $s>0$ только при $r_1=r_2=1$, полилинейные мономы w' и w'', $0\leqslant \deg w',\deg w''<m$, от операторов $X_1,\ldots,X_m$ не зависят от X_m соответственно при $r_1=0$ и $r_2=0$, и все операторы в w', w'' упорядочены;

2. *при $t=m$ и $\lambda_m=1$ или $t<m$*

$$x_0w'(X_2\ldots X_m)^{r_1}X_1^2(X_2\ldots X_m)^{r_2}w'', \tag{13}$$

где $r_1,r_2\leqslant 1$, $r_1=0$ или $r_2=0$ (оба равенства выполняются при $t<m$), полилинейные мономы w' и w'', $0\leqslant \deg w',\deg w''<t$, от операторов $X_1,\ldots,X_t$ не зависят от X_1 соответственно при $r_1=0$ и $r_2=0$, и все операторы в w', w'' упорядочены.

Доказательство. Зафиксируем $m\geqslant 3$ и покажем, что моном $x_0v(X_1,\ldots,X_t)$ может быть представлен линейной комбинацией мономов следующего общего вида

$$x_0w'(X_1\ldots X_m)^{s_1}(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)^{r_1}X_j^2(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)^{r_2}(X_1\ldots X_m)^{s_2}w'', \tag{14}$$

где $1\leqslant j\leqslant t$, $r_1,r_2\leqslant 1$, $s_1,s_2\geqslant 0$, $s_1>0$ или $s_2>0$ только при $r_1=r_2=1$, и полилинейные мономы w' и w'', $0\leqslant\deg w',\deg w''<t$, не зависят от X_j при $r_1=0$ и $r_2=0$ соответственно. В силу тождеств (6), (7) будем считать, что операторы в мономах w', w'' упорядочены, например по возрастанию индексов.

Так как $\lambda_1\geqslant 2$, то в мономе x_0v число различных образующих x_i, $1\leqslant i\leqslant t\leqslant m$, между любыми двумя одинаковыми не превышает $m-1$. Выберем пару таких образующих x_j и с помощью равенства (11) представим x_0v линейной комбинацией ненулевых мономов x_0v', содержащих произведение X_j^2. Так как $x_0v'\not\equiv 0$, то в силу тождеств (3), (6), (7) в мономе v' слева или справа к X_j^2 примыкает либо произведение $X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m$, либо соответственно мономы w', w'', удовлетворяющие указанным условиям,

$$v'=\ldots(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)^{r_1}X_j^2(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)^{r_2}\ldots,$$

где $r_1,r_2\leqslant 1$. В силу тождеств (6), (7) все ненулевые мономы x_0v' слева и справа от выписанных операторов имеют соответственно $s_1\geqslant 0$ и $s_2\geqslant 0$ произведений $X_1\ldots X_m$,

$$v'=\ldots(X_1\ldots X_m)^{s_1}(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)^{r_1}X_j^2(X_1\ldots\widehat{X_j}\ldots X_m)^{r_2}(X_1\ldots X_m)^{s_2}\ldots.$$

Остальные операторы X_i, $1 \leqslant i \leqslant t$, принадлежат мономам $w'(X_1,\dots,X_t)$, $w''(X_1,\dots,X_t)$, $0 \leqslant \deg w', \deg w'' < t$, которые в силу (6), (7) являются полилинейными.

Покажем, что $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ только при $r_1 = r_2 = 1$. Так как случаи $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ симметричны, то достаточно рассмотреть случай $r_1 = s_1 = 0$, $r_2 = 1$, $s_2 > 0$, то есть моном v' вида $w'X_j^2(X_1\dots\widehat{X_j}\dots X_m)(X_1\dots X_m)^{s_2}w''$. С помощью тождеств (7) на границе следующих за X_j^2 скобок соберем произведение X_k^2, $k \neq j$, и, упорядочив операторы, получим моном $\widetilde{w}'(X_1\dots\widehat{X_k}\dots X_m)X_k^2(X_1\dots\widehat{X_k}\dots X_m)(X_1\dots X_m)^{s_2-1}w''$, в котором $r_1 = 1$. Таким образом, моном $x_0v(X_1,\dots,X_t)$ равен линейной комбинации мономов вида (14).

Покажем, что ненулевой моном x_0v' вида (14) в зависимости от полистепени v' можно привести к виду (12) или (13). Пусть $t = m$ и $\lambda_m \geqslant 2$, $\deg v' \geqslant 2m$. Так как $\deg v' \geqslant 2m$, то в мономе v' в силу (6), (7) слева или справа от X_j^2 находятся $m-1$ различных операторов X_i, $i \neq j$, то есть $r_1 = 1$ или $r_2 = 1$. В силу симметрии примем $r_1 = 0$ и рассмотрим моном $v' = w'X_j^2X_1\dots\widehat{X_j}\dots X_mw''$, $j \neq m$. Пусть сначала $\deg_{X_m} w' = 1$, $j \neq m$, тогда с помощью тождеств (6), (7) представим v' в виде $\widetilde{w}'X_mX_jX_jX_mX_1\dots\widehat{X_j}\dots X_{m-1}w''$. Воспользуемся равенством (11) и тождеством (4),

$$x_0X_mX_jX_jX_m \equiv x_0X_m^2X_j^2 + x_0X_jX_mX_mX_j + x_0X_j^2X_m^2 \equiv x_0X_jX_mX_mX_j,\ m \geqslant 3, \tag{15}$$

и приведем полученные мономы к виду (12), упорядочив все остальные операторы с помощью тождеств (6), (7). Пусть теперь $\deg_{X_m} w'' = 1$, тогда с помощью тождества (7) приведем моном v' к виду $w'X_j^2X_1\dots\widehat{X_j}\dots X_mX_m\widetilde{w}''$ и, упорядочив операторы, снова получим требуемое. Рассмотрим случай $r_1 = r_2 = 1$. Если $s_1 > 1$ или $s_1 = 1$ и $j \neq m$, то с помощью тождества (6) соберем произведение X_m^2 на границе первых двух скобок, следующих за w', и, упорядочив остальные операторы, получим моном вида (12), в котором $s = s_1 + s_2$. Если $s_1 = 0$ и $j \neq m$ или $s_1 = 1$ и $j = m$, то с помощью тождеств (6), (7) представим v' в виде $w'(X_1\dots\widehat{X_k}\dots X_mX_kX_kX_m\dots\widehat{X_k}\dots X_{m-1})\dots$, $k \neq m$, и применим тождество (15).

Пусть $t < m$, тогда в мономе x_0v' вида (14) имеем $r_i = s_i = 0$, $i = 1, 2$, и из условия $\lambda_1 \geqslant 2$ (считая $j \neq 1$) и полилинейности w', w'' следуют равенства $\deg_{X_1} w' = \deg_{X_1} w'' = 1$. Тогда с помощью тождеств (6), (7) соберем произведение $\dots X_1X_jX_jX_1\dots$ и по аналогии с рассмотренными случаями получим моном вида (13).

Если $t = m$ и $\lambda_m = 1$, то возможны следующие два случая. Пусть сначала в мономе (14) либо $r_1 \neq 0$, либо $r_2 \neq 0$. В силу симметрии примем $v' = w'X_j^2X_1\dots\widehat{X_j}\dots X_mw''$ и получим аналогичный рассмотренному выше случай, в котором достаточно заменить X_m на X_1. При $r_1 = r_2 = 0$ достаточно применить рассуждения для случая $t < m$.

Покажем, что все мономы x_0v' вида (12), (13) не равны тождественно нулю в алгебре A_m. Пусть в них моном $w' = X_{i_1}\dots X_{i_s}$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant m$, $s < t$, или $\deg w' = 0$. Рассмотрим следующие подстановки элементов алгебры A_m. Если $r_1 = 1$ в записи x_0v', тогда вместо x_0 подставим $za_1\dots\widehat{a}_{i_1}\dots\widehat{a}_{i_2}\dots\widehat{a}_{i_s}\dots a_m$. Пусть $r_1 = 0$, тогда вместо x_0 в моном вида (12) подставим $za_1\dots\widehat{a}_{i_1}\dots\widehat{a}_{i_2}\dots\widehat{a}_{i_s}\dots a_{m-1}$ и подставим $za_2\dots\widehat{a}_{i_1}\dots\widehat{a}_{i_2}\dots\widehat{a}_{i_s}\dots a_m$ в моном (13). Вместо x_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, везде подставим соответственно a_i. В каждом случае результат подстановки окажется с точностью до знака равным элементу вида $z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^k a_{j_1}\dots a_{j_r}$ или $z(R_{a_1}\dots R_{a_m})^k$, $k \geqslant 1$, $1 \leqslant r < m$, $1 \leqslant j_1 < \dots < j_r \leqslant m$. Доказательство предложения завершено.

Предложение 5. *Неравенство $m_\lambda^L(A_m) > 0$, где $m \geqslant 3$, выполняется тогда и только тогда, когда разбиение $\lambda \vdash n \geqslant 1$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. $\lambda = (1^k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$;

2. $\lambda = \big((\mathfrak{s}+1)^k, \mathfrak{s}^{m-k}\big)$, $\mathfrak{s} \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$;

3. $\lambda = \big((\mathfrak{s}+2)^{k_1}, (\mathfrak{s}+1)^{k_2}, \mathfrak{s}^{m-k_1-k_2}\big)$, $\mathfrak{s} \geqslant 0$, $k_1 \geqslant 1$, $k_2 \geqslant 0$, $k_1 + k_2 \leqslant m-1$.

Доказательство. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$, $t \geqslant m+1$, тогда для любой таблицы Юнга T_λ полилинейный многочлен $e_{T_\lambda}(x_0 X_1 \ldots X_n)$ равен сумме многочленов

$$\sigma \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau x_0 X_{\tau(1)} \ldots X_{\tau(n)}, \ \sigma \in R_{T_\lambda},$$

кососимметричных по более чем m образующим. Все такие многочлены тождественно равны нулю в силу (2).

Определим подстановку ϕ элементов алгебры A_m,

$$\phi(x_0) = z, \ \phi(x_i) = a_i, \ i = 1, \ldots, m.$$

Тогда $m^L_{(1^k)}(A_m) = 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, так как $\phi(x_0 \overline{X}_1 \ldots \overline{X}_k) = k! z a_1 \ldots a_k$ по определяющим соотношениям 3 алгебры A_m.

Пусть теперь $t \leqslant m$ и $\lambda_1 \geqslant 2$. Так как характеристика поля Φ равна нулю, то рассмотрим полиоднородный многочлен $g_{T_\lambda}(x_0, x_1, \ldots, x_t) \in L_\lambda$, который получен из соответствующего полилинейного многочлена $f_{T_\lambda} = e_{T_\lambda}(x_0 X_1 \ldots X_n)$, $f_{T_\lambda} \not\equiv 0$, в результате отождествления образующих, индексы которых находятся в одних и тех же строках таблицы T_λ. По предложению 4 многочлен g_{T_λ} по модулю тождеств многообразия $\mathbf{N_m}$, $var(A_m) \subseteq \mathbf{N_m}$, равен линейной комбинации мономов вида (12) или (13), поэтому $\deg_{X_1} g_{T_\lambda} - \deg_{X_m} g_{T_\lambda} \leqslant 2$. Таким образом, если $m^L_\lambda(A_m) > 0$, $\lambda_1 \geqslant 2$, то λ удовлетворяет либо условию 2, либо условию 3. Покажем, что $m^L_\lambda(A_m) > 0$ для всех таких разбиений λ.

Пусть $\lambda = \big((\mathfrak{s}+1)^k, \mathfrak{s}^{m-k}\big)$, $\mathfrak{s} \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и в таблице T_λ числа от 1 до $\mathfrak{s}m + k$ выписаны в столбец в порядке возрастания, тогда $g_{T_\lambda} = x_0(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_m)^{\mathfrak{s}} \widetilde{X}_1 \ldots \widetilde{X}_k$ и $\phi(g_{T_\lambda}) = k!(m!)^{\mathfrak{s}} z (R_{a_1} \ldots R_{a_m})^{\mathfrak{s}} a_1 \ldots a_k$.

Пусть λ удовлетворяет условию 3, тогда обозначим через l_1 высоту крайнего справа столбца таблицы T_λ, $l_1 = k_1$, и пусть l_2 — высота второго справа столбца, $l_2 = k_1 + k_2$. В многочлен

$$g_{T_\lambda} = x_0(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_m)^{\mathfrak{s}} \widetilde{X}_1 \ldots \widetilde{X}_{l_2} \overline{\overline{X}}_1 \ldots \overline{\overline{X}}_{l_1}$$

вместо x_0 подставим $z a_{l_2+1} \ldots a_m$ и a_i вместо x_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Результат подстановки равен $((m-l_2)!)^{\mathfrak{s}} (l_2!)^{\mathfrak{s}+1} l_1! z (R_{a_{l_2+1}} \ldots R_{a_m} R_{a_1} \ldots R_{a_{l_2}})^{\mathfrak{s}+1} a_1 \ldots a_{l_1}$, и предложение доказано.

Предложение 6. *Если* $\lambda = (\mathfrak{s}^m)$, $m \geqslant 3$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, *то* $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant m$.

Доказательство. Зафиксируем таблицу Юнга T_λ, $\lambda = (\mathfrak{s}^m)$, и по модулю тождеств многообразия $\mathbf{N_m}$ оценим сверху максимальное число линейно независимых полиоднородных элементов $h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \ldots, x_m)$, полученных из соответствующих полилинейных элементов $e_{T_\lambda}\sigma(x_0 X_1 \ldots X_n)$, $\sigma \in S_n$, в результате отождествления образующих, индексы которых принадлежат одним и тем же строкам таблицы T_λ. Так как поле Φ нулевой характеристики, то данная оценка будет оценкой сверху значения $m^L_\lambda(\mathbf{N_m})$.

По предложению 4 любой элемент пространства $L_\lambda(\mathbf{N_m})$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, является линейной комбинацией элементов, соответствующих мономам (12). В случае $\mathfrak{s} = 2$ разобьем множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (12) на m подмножеств S^2_t, $t = 0, \ldots, m-1$, по числу t операторов X_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, слева от произведения $(X_1 \ldots X_m)$ или $(X_m X_1 \ldots X_{m-1})$,

$$\begin{aligned} S^2_t = \big\{ & x_0 X_{i_1} \ldots X_{i_t} (X_1 \ldots X_m) X_m X_1 \ldots \widehat{X}_{i_1} \ldots \widehat{X}_{i_t} \ldots X_{m-1}, \\ & x_0 X_{i_1} \ldots X_{i_{t-1}} X_m (X_m X_1 \ldots X_{m-1}) X_1 \ldots \widehat{X}_{i_1} \ldots \widehat{X}_{i_{t-1}} \ldots X_{m-1} \mid \\ & 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant m-1 \big\}, \end{aligned}$$

где $S_0^2 = \{x_0(X_1 \dots X_m)X_mX_1 \dots X_{m-1}\}$. При $\mathfrak{s} \geqslant 3$ множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (12) разобьем на m подмножеств по значениям $t = 0, \dots, m-1$ степени монома $w'(X_1, \dots, X_m)$,

$$S_t^{\mathfrak{s}} = \bigl\{x_0X_{i_1} \dots X_{i_t}(X_1 \dots X_{m-1})X_m^2(X_1 \dots X_{m-1})(X_1 \dots X_m)^{\mathfrak{s}-3}X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_t} \dots X_m \mid 1 \leqslant i_1 < \dots < i_t \leqslant m\bigr\},$$

где $S_0^{\mathfrak{s}} = \{x_0(X_1 \dots X_{m-1})X_m^2(X_1 \dots X_{m-1})(X_1 \dots X_m)^{\mathfrak{s}-2}\}$. Заметим, что множество $S_t^{\mathfrak{s}}$ имеет $\binom{m}{t}$ элементов, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, $t = 0, \dots, m-1$, $\binom{m}{t}$ — биномиальный коэффициент.

Покажем, что для каждого фиксированного $\mathfrak{s} \geqslant 2$ все выписанные мономы по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$ являются линейно независимыми. Элементы множества $S_t^{\mathfrak{s}}$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, обозначим через $h_{t,j}$, $1 \leqslant j \leqslant \binom{m}{t}$, и предположим, что в многообразии $\mathbf{N_m}$ выполняется тождество

$$\sum_{t=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{\binom{m}{t}} \alpha_{t,j}h_{t,j} \equiv 0, \ \alpha_{t,j} \in \Phi.$$

Заметим, что все мономы $h_{t,j}$, кроме $h_{0,1}$, имеют либо $\deg_{X_1} w' = 1$, либо $\deg_{X_1} w'' = 1$, поэтому умножим тождество справа на x_1 и подставим произведение x_0x_1 вместо x_0. В силу (6), (7) в полученном следствии останется единственный ненулевой моном с коэффициентом $\alpha_{0,1}$, то есть $\alpha_{0,1} = 0$. Зафиксируем индексы $s > 0$, k и покажем равенство $\alpha_{s,k} = 0$. Заметим, что в $h_{s,k}$ моном $w''(X_1, \dots, X_m)$ может быть с точностью до порядка операторов единственным образом дополнен до монома $\widetilde{w}''$, такого что $\deg_{X_j} \widetilde{w}'' = 1$, где $j = 1, \dots, m$ при $r_2 = 1$ (в записи $h_{s,k}$ (12)), и $j = 1, \dots, m-1$ при $r_2 = 0$. В результате умножения таким образом тождества справа на различные x_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, в полученном следствии ненулевыми окажутся некоторые мономы $\widetilde{h}_{t,j}$, $t \neq s$, и $\widetilde{h}_{s,k}$. Если последней в цепочке умножений была образующая x_r, $1 \leqslant r \leqslant m$, то в мономе $\widetilde{h}_{s,k}$ имеем $\deg_{X_r} w'' = 0$, и $\deg_{X_r} w'' = 1$ во всех остальных $\widetilde{h}_{t,j}$. Умножим тождество справа на x_r и получим единственный ненулевой моном с коэффициентом $\alpha_{s,k}$. Таким образом, для всех t, j выполняются равенства $\alpha_{t,j} = 0$. Следовательно, по предложению 4 для каждого $\mathfrak{s} \geqslant 2$ элементы пространства $L_{(\mathfrak{s}^m)}(\mathbf{N_m})$, соответствующие мономам из $S_t^{\mathfrak{s}}$, $t = 0, \dots, m-1$, образуют базис.

По определению $h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_m)$ для любой подстановки $\sigma \in S_m$ выполняется равенство

$$h_{T_\lambda}(x_0, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = (-1)^{\sigma\mathfrak{s}} h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_m).$$

При этом

$$h_{T_\lambda} = \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{\binom{m}{t}} \beta_{t,j}h_{t,j}, \ \beta_{t,j} \in \Phi.$$

Рассмотрим результаты действий подстановок $\sigma \in S_m$ на элементы множеств $S_t^{\mathfrak{s}}$. Под действием подстановки, как и в полилинейном случае, понимается перестановка индексов образующих. Пусть $\mathfrak{s} \geqslant 3$, тогда с помощью рассуждений из доказательства предложения 4 для любого $\sigma \in S_m$ получим тождество

$$\sigma(x_0(X_1 \dots X_{m-1})X_m^2(X_1 \dots X_{m-1})) \equiv x_0(X_1 \dots X_{m-1})X_m^2(X_1 \dots X_{m-1}).$$

По модулю данного тождества и тождеств (6), (7) для каждого $h_{t,j}$ выполняется равенство

$$\sigma h_{t,j} = \pm h_{t,k}, \tag{16}$$

где знак при $h_{t,k}$ зависит от j, t, σ, $1 \leqslant k \leqslant \binom{m}{t}$, причем для любых $h_{t,j}$, $h_{t,k}$ найдется такая подстановка σ.

Пусть $\mathfrak{s} = 2$. Если $\sigma(m) = m$, то при помощи тождеств (6), (7) также получим равенства (16). Если $\sigma(m) = i$, $i \neq m$, то в силу симметрии достаточно рассмотреть следующие два случая:

$$\sigma(x_0 \dots (X_1 \dots X_m)X_m \dots X_i \dots) = x_0 \dots (X_1 \dots X_m \dots X_i)X_i \dots X_m \dots,$$

$$\sigma(x_0 \dots X_i \dots (X_1 \dots X_m)X_m \dots) = x_0 \dots X_m \dots (X_1 \dots X_m \dots X_i)X_i \dots.$$

С помощью тождеств (6), (7), (15) приведем полученные мономы к виду (12) и видим, что для $\mathfrak{s} = 2$ также выполняются равенства (16) с указанным условием. Так как при этом по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$ все мономы $h_{t,j}$ линейно независимы, то приходим к следующему выводу.

Пусть коэффициент $\beta_t = |\beta_{t,j}|$ и $\theta_{t,j} \in \{0,1\}$, $t = 0, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, \binom{m}{t}$, тогда выполняется тождество

$$h_{T_\lambda} \equiv \sum_{t=0}^{m-1} \beta_t \sum_{j=1}^{\binom{m}{t}} (-1)^{\theta_{t,j}} h_{t,j}.$$

То есть в пространстве $L_\lambda(\mathbf{N_m})$ элементы, соответствующие многочленам h_{T_λ}, являются линейными комбинациями не более m фиксированных элементов, поэтому $m_\lambda^L(\mathbf{N_m}) \leqslant m$, $\lambda = (\mathfrak{s}^m)$, $m \geqslant 3$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$. Предложение доказано.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Зафиксируем $m \geqslant 2$. Если $\lambda = (\mathfrak{s}^m)$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, то $m_\lambda^L(A_m) = m_\lambda^L(\mathbf{N_m}) = m$, и для любого $k = 1, \dots, m$ выполняются равенства $m_{(1^k)}^L(A_m) = m_{(1^k)}^L(\mathbf{N_m}) = 1$.*

Доказательство. В доказательстве предложения 5 получены неравенства $m_{(1^k)}^L(A_m) \neq 0$, $m \geqslant 3$, $k = 1, \dots, m$, доказательство которых распространяется на случай $m = 2$. И так как $A_m \in \mathbf{N_m}$, $m_{(1^k)}^L(\mathbf{N_m}) \leqslant 1$, $m \geqslant 2$, то выполняются равенства

$$m_{(1^k)}^L(A_m) = m_{(1^k)}^L(\mathbf{N_m}) = 1, \ 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Докажем неравенства $m_\lambda^L(A_m) \geqslant m$ для $m \geqslant 2$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$. В случае $\mathfrak{s} = 2$ зафиксируем таблицу

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & m+1 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline m & 2m \\ \hline \end{array}$$

и по модулю тождеств многообразия $var(A_m)$ покажем линейную независимость следующих m полилинейных многочленов

$$f_i = e_T(x_0 X_1 \dots X_i X_{m+1} X_{i+1} \dots X_m X_{m+2} \dots X_{2m}), \ i = m, \dots, 1,$$

где

$$f_m = e_T(x_0 X_1 \dots X_{2m}) = \sum_{\sigma \in R_T} x_0 \overline{X}_{\sigma(1)} \dots \overline{X}_{\sigma(m)} \widetilde{X}_{\sigma(m+1)} \dots \widetilde{X}_{\sigma(2m)}.$$

Заметим, что все f_i удовлетворяют условию $\sigma f_i = f_i$, $\sigma \in R_T$. Предположим, что в алгебре A_m выполняется тождество $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i \equiv 0$, $\alpha_i \in \Phi$. В результате замены индексов образующих на номера строк, в которых они находятся в таблице T, из данного тождества получим полиоднородное следствие $\sum_{i=1}^m \alpha_i g_i \equiv 0$,

$$g_i = x_0 \overline{X}_1 \dots \overline{X}_i \widetilde{X}_1 \overline{X}_{i+1} \dots \overline{X}_m \widetilde{X}_2 \dots \widetilde{X}_m, \ i = m, \dots, 1, \tag{17}$$

где $g_m = x_0\overline{X}_1 \dots \overline{X}_m\widetilde{X}_1 \dots \widetilde{X}_m$.

Определим m подстановок ϕ_i элементов алгебры A_m, $i = m, \dots, 1$,

$$\begin{gathered}\phi_1(x_0) = z, \quad \phi_2(x_0) = za_m, \ \dots, \phi_{m+1-i}(x_0) = za_{i+1} \dots a_m, \ \dots, \ \phi_m(x_0) = za_2 \dots a_m, \\ \phi_{m+1-i}(x_j) = a_j, \ j = 1, \dots, m.\end{gathered} \tag{18}$$

Результаты $\phi_{m+1-i}(g_j)$, $i, j = m, \dots, 1$, выпишем в таблицу, строки которой пометим коэффициентами α_j, столбцы — значениями $\phi_{m+1-i}(x_0)$.

	z	za_m	$\dots$
α_m	$z(\overline{R}_{a_1} \dots \overline{R}_{a_m})(\widetilde{R}_{a_1} \dots \widetilde{R}_{a_m})$	$z(R_{a_m}\overline{R}_{a_1} \dots)(\overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_1} \dots)\widetilde{R}_{a_m}$	$\dots$
α_{m-1}	$z(\dots \overline{R}_{a_{m-1}}\widetilde{R}_{a_1})(\overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_2} \dots \widetilde{R}_{a_m})$	$z(R_{a_m}\overline{R}_{a_1} \dots \overline{R}_{a_{m-1}})(\widetilde{R}_{a_1}\overline{R}_{a_m} \dots)\widetilde{R}_{a_m}$	$\dots$
α_{m-2}	$z(\dots \widetilde{R}_{a_1}\overline{R}_{a_{m-1}})(\overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_2} \dots \widetilde{R}_{a_m})$	$z(R_{a_m}\overline{R}_{a_1} \dots \widetilde{R}_{a_1})(\overline{R}_{a_{m-1}}\overline{R}_{a_m} \dots)\widetilde{R}_{a_m}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Таблица 1.

В силу определяющих соотношений 3 алгебры A_m результаты подстановок в столбце $za_{i+1} \dots a_m$, $i < m$, с точностью до ненулевого коэффициента равны $z(R_{a_1} \dots R_{a_m})^2 a_{i+1} \dots a_m$ и $z(R_{a_1} \dots R_{a_m})^2$ в столбце z. Получили однородную систему линейных уравнений порядка m с неизвестными α_i. Коэффициенты при неизвестных обозначим через γ_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, и соответственно их расположению в таблице 1 выпишем в матрицу $\Gamma = (\gamma_{ij})$, которая будет транспонированной матрицей рассматриваемой системы уравнений.

Вычислим коэффициенты, находящиеся на главной диагонали матрицы Γ,

$$\phi_{m+1-i}(g_i) = z(R_{a_{i+1}} \dots R_{a_m}\overline{R}_{a_1} \dots \overline{R}_{a_i})(\widetilde{R}_{a_1}\overline{R}_{a_{i+1}} \dots \overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_2} \dots \widetilde{R}_{a_i})\widetilde{R}_{a_{i+1}} \dots \widetilde{R}_{a_m} =$$

$$\gamma_{(m+1-i)(m+1-i)} z(R_{a_1} \dots R_{a_m})^2 R_{a_{i+1}} \dots R_{a_m},$$

$$\gamma_{(m+1-i)(m+1-i)} = (-1)^{m-i} i! i! (m-i)! (m-i)!, \ i = m, \dots, 1.$$

Определим следующие элементы Γ под главной диагональю,

$$\phi_{m+1-i}(g_{i-1}) = z(R_{a_{i+1}} \dots R_{a_m}\overline{R}_{a_1} \dots \overline{R}_{a_{i-1}}\widetilde{R}_{a_1})(\overline{R}_{a_i} \dots \overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_2} \dots \widetilde{R}_{a_i})\widetilde{R}_{a_{i+1}} \dots \widetilde{R}_{a_m} =$$

$$\gamma_{(m+2-i)(m+1-i)} z(R_{a_1} \dots R_{a_m})^2 R_{a_{i+1}} \dots R_{a_m},$$

$$\gamma_{(m+2-i)(m+1-i)} = (-1)^{m-i} i! (i-1)! (m-i+1)! (m-i)!, \ i = m, \dots, 2.$$

Заметим, что значения γ_{jj}, γ_{j+1j} одного знака, $j = 1, \dots, m-1$. При этом в силу определяющих соотношений 3 алгебры A_m выполняются равенства $\gamma_{ij} = -\gamma_{i+1j}$, $i \neq j$, так как

$$zuR_{a_k}R_{a_1} = -zuR_{a_1}R_{a_k}, \ 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{19}$$

где остаток от деления $\deg u(R_{a_1}, \dots, R_{a_m})$ на m не равен $m-1$. Например, при $m = 2$

$$z(R_{a_2}\overline{R}_{a_1})(\overline{R}_{a_2}\widetilde{R}_{a_1})\widetilde{R}_{a_2} = -z(R_{a_2}\overline{R}_{a_1})(\widetilde{R}_{a_1}\overline{R}_{a_2})\widetilde{R}_{a_2}.$$

В матрице

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & -\gamma_{22} & \gamma_{33} & \dots \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & -\gamma_{33} & \dots \\ -\gamma_{21} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{20}$$

будем последовательно складывать строки с номерами $i+1$, i и результат записывать в строку $i+1$, $i = m-1, \dots, 1$. Получим матрицу $\Gamma' = (\gamma'_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$,

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & -\gamma_{22} & \gamma_{33} & \dots \\ \gamma_{11}+\gamma_{21} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_{22}+\gamma_{32} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

в которой все элементы равны нулю, кроме элементов первой строки и γ'_{i+1i}, $i = 1, \dots, m-1$.

Следовательно, ранг Γ равен m, система уравнений имеет единственное решение $\alpha_i = 0$, $i = m, \dots, 1$, и по предложению 1 выполняются неравенства $m^L_{(2^m)}(A_m) \geqslant m$, $m = 2, 3, \dots$.

Пусть $\mathfrak{s} \geqslant 3$, тогда зафиксируем таблицу

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & m+1 & \dots & (\mathfrak{s}-1)m+1 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline m & 2m & \dots & \mathfrak{s}m \\ \hline \end{array}$$

и по модулю тождеств $var(A_m)$ покажем линейную независимость m многочленов

$$f'_i = e_{T'}(x_0 X_1 \dots X_i X_{m+1} X_{i+1} \dots X_m X_{m+2} \dots X_{2m} \dots X_{\mathfrak{s}m}),\ i = m, \dots, 1,$$

где $f'_m = e_{T'}(x_0 X_1 \dots X_{\mathfrak{s}m})$. Соответствующие f'_i полиоднородные многочлены g'_i по таблице T' определяются через многочлены g_i (17),

$$g'_i = g_i(\overline{X}_1 \dots \overline{X}_m)^{\mathfrak{s}-2},\ i = m, \dots, 1.$$

В результате рассуждений по аналогии с рассмотренным случаем $\mathfrak{s} = 2$ получим матрицу коэффициентов, в каждом столбце которой элементы отличаются от соответствующих элементов матрицы Γ на ненулевой множитель, зависящий от номера столбца. Следовательно, в полученной матрице сохраняются все установленные для матрицы Γ соотношения между элементами, её ранг также равен m, и все элементы f'_i линейно независимы, $i = m, \dots, 1$.

Таким образом, по предложению 1 выполняются неравенства $m^L_\lambda(A_m) \geqslant m$, $m \geqslant 2$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$.

В работе [5] неравенства $m^L_{(\mathfrak{s}^2)}(A_2) \leqslant 2$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, доказаны посредством применения тождества (3) и его частичной линеаризации [5, Proposition 3]. То есть авторами также доказаны неравенства $m^L_{(\mathfrak{s}^2)}(\mathbf{N_2}) \leqslant 2$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$. И так как по предложению 6 $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant m$, $\lambda = (\mathfrak{s}^m)$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, $m \geqslant 3$, то для всех $m = 2, 3, \dots$ получили требуемые равенства. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для разбиений* $\lambda = \big((\mathfrak{s}+1)^l, \mathfrak{s}^{m-l}\big)$, $m \geqslant 3$, $1 \leqslant l \leqslant m-1$, $\mathfrak{s} \geqslant 1$, *выполняются равенства* $m^L_\lambda(A_m) = m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) = m$.

Доказательство. Сначала по аналогии с доказательством предложения 6 покажем неравенства $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant m$. Рассмотрим несколько случаев.

Пусть $\mathfrak{s} = 1$, тогда разобьем соответствующее множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (13) на m подмножеств $S^1_{1t_1}$, $S^1_{2t_2}$, $t_1 = 0, \dots, l$, $t_2 = 1, \dots, m-1-l$. При $l = m-1$ рассматриваются только m множеств $S^{\mathfrak{s}}_{1t_1}$, $\mathfrak{s} \geqslant 1$. Элементами множества $S^1_{1t_1}$ являются такие мономы, которые слева от произведения $(X_1 \dots X_m)$ или $(X_2 \dots X_m X_1)$ имеют t_1 операторов X_i, $1 \leqslant i \leqslant l$,

$$\begin{aligned} S^1_{1t_1} = \big\{ & x_0 X_{i_1} \dots X_{i_{t_1}} (X_2 \dots X_m X_1) X_1 X_2 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_{t_1}} \dots X_l, \\ & x_0 X_{i_1} \dots X_{i_{t_1 - 1}} X_1 (X_1 \dots X_m) X_2 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_{t_1-1}} \dots X_l \mid 2 \leqslant i_1 < \dots < i_{t_1} \leqslant l \big\}, \end{aligned}$$

где $S^1_{10} = \{x_0(X_2 \dots X_m X_1)X_1 \dots X_l\}$, $S^1_{1l} = \{x_0 X_2 \dots X_l X_1(X_1 \dots X_m)\}$. Все элементы множества $S^1_{2t_2}$ имеют t_2 операторов X_i, $l+1 \leqslant i \leqslant m$, слева от произведения $(X_2 \dots X_l X_1^2 X_2 \dots X_l)$,

$$S^1_{2t_2} = \big\{x_0 X_{i_1} \dots X_{i_{t_2}}(X_2 \dots X_l X_1^2 X_2 \dots X_l)X_{l+1} \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_{t_2}} \dots X_m \mid \\ l+1 \leqslant i_1 < \dots < i_{t_2} \leqslant m\big\}.$$

В случае $\mathfrak{s} = 2$ множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (12) разобьем на m подмножеств $S^2_{1t_1}$, $S^2_{2t_2}$,

$$S^2_{1t_1} = \big\{x_0 X_{i_1} \dots X_{i_{t_1}}(X_1 \dots X_m)(X_m X_1 \dots X_{m-1})X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_{t_1}} \dots X_l \mid \\ 1 \leqslant i_1 < \dots < i_{t_1} \leqslant l\big\},\ t_1 = 0, \dots, l,$$

$$S^2_{2t_2} = \big\{x_0 X_{i_1} \dots X_{i_{t_2}} X_1 \dots X_l(X_1 \dots X_m)X_m X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_{t_2}} \dots X_{m-1}, \\ x_0 X_{i_1} \dots X_{i_{t_2-1}} X_1 \dots X_l X_m(X_m X_1 \dots X_{m-1})X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_{t_2-1}} \dots X_{m-1} \mid \\ l+1 \leqslant i_1 < \dots < i_{t_2} \leqslant m-1\big\},\ t_2 = 1, \dots, m-1-l.$$

Если $\mathfrak{s} \geqslant 3$, то разобьем множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (12) на m подмножеств

$$S^{\mathfrak{s}}_{1t_1} = \big\{x_0 X_{i_1} \dots X_{i_{t_1}}(X_1 \dots X_m)(X_m X_1 \dots X_{m-1})(X_1 \dots X_m)^{\mathfrak{s}-2} X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_{t_1}} \dots X_l \mid \\ 1 \leqslant i_1 < \dots < i_{t_1} \leqslant l\big\},\ t_1 = 0, \dots, l,$$

$$S^{\mathfrak{s}}_{2t_2} = \big\{x_0 X_{i_1} ... X_{i_{t_2}} X_1 ... X_l(X_1 ... X_m)(X_m X_1 ... X_{m-1})(X_1 ... X_m)^{\mathfrak{s}-3} X_1 ... \widehat{X}_{i_1} ... \widehat{X}_{i_{t_2}} ... X_m \mid \\ l+1 \leqslant i_1 < \dots < i_{t_2} \leqslant m\big\},\ t_2 = 1, \dots, m-1-l.$$

Заметим, что для каждого $\mathfrak{s} \geqslant 1$, применив метод умножений из доказательства предложения 6, получим, что в пространстве $L_\lambda(\mathbf{N_m})$ элементы, соответствующие выписанным мономам, образуют базис.

Для таблицы Юнга T_λ по аналогии с доказательством предложения 6 определим полиоднородный элемент $h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_m) \in L_\lambda$. По определению h_{T_λ} для любых подстановок $\sigma_1 \in S_l$, $\sigma_2 \in S_{l+1,m}$ ($S_{l+1,m}$ — подгруппа S_m) выполняются равенства

$$h_{T_\lambda}(x_0, x_{\sigma_1(1)}, \dots, x_{\sigma_1(l)}, x_{\sigma_2(l+1)}, \dots x_{\sigma_2(m)}) = (-1)^{\sigma_1(\mathfrak{s}+1)}(-1)^{\sigma_2 \mathfrak{s}} h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_m).$$

При этом, применив рассуждения из доказательства предложения 6, получим, что результат действия подстановок σ_1, σ_2 на любой элемент множества $S^{\mathfrak{s}}_{1t_1}$ или $S^{\mathfrak{s}}_{2t_2}$, $\mathfrak{s} \geqslant 1$, с точностью до знака равен некоторому элементу этого же множества, причем такая подстановка σ_1 (или σ_2) найдется для любой пары элементов из $S^{\mathfrak{s}}_{1t_1}$ (или $S^{\mathfrak{s}}_{2t_2}$), $t_1 = 0, \dots, l$, $t_2 = 1, \dots, m-1-l$.

Рассуждая по аналогии с доказательством предложения 6, h_{T_λ} тождественно равен линейной комбинации не более m фиксированных многочленов. Таким образом, выполняются неравенства $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant m$.

Покажем, что $m^L_\lambda(A_m) \geqslant m$. При $\mathfrak{s} \geqslant 2$ определим m многочленов

$$g'_i = g_i(\overline{X}_1 \dots \overline{X}_m)^{\mathfrak{s}-2} \widetilde{X}_1 \dots \widetilde{X}_l,$$

g_i — многочлены (17), и предположим, что алгебра A_m удовлетворяет тождеству

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i g'_i \equiv 0,\ \alpha_i \in \Phi. \tag{21}$$

К данному тождеству применим рассуждения из доказательства теоремы 1 и получим матрицу коэффициентов, в которой по определению многочленов g'_i, $i = 1, \dots, m$, все элементы, находящиеся в одном и том же столбце, отличаются от соответствующих элементов матрицы Γ (20) на ненулевой множитель. Поэтому заключаем, что $m_\lambda^L(A_m) \geqslant m$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$.

В случае $\mathfrak{s} = 1$ предположим, что в алгебре A_m выполняется тождество (21), в котором $g'_i = x_0\overline{X}_1 \dots \overline{X}_i\widetilde{X}_1\overline{X}_{i+1} \dots \overline{X}_m\widetilde{X}_2 \dots \widetilde{X}_l$, $i = m, \dots, 1$. По аналогии с матрицей Γ определим матрицу $\Theta = (\theta_{ij})$, $1 \leqslant i, j, \leqslant m$, коэффициентов, полученных в результате подстановок (18) элементов алгебры A_m в многочлены g'_i,

$$\phi_{m+1-i}(g'_i) = z(R_{a_{i+1}} \dots R_{a_m}\overline{R}_{a_1} \dots \overline{R}_{a_i})\widetilde{R}_{a_1}\overline{R}_{a_i+1} \dots \overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_2} \dots \widetilde{R}_{a_l} =$$

$$\begin{cases} i \leqslant l, \ \theta_{(m+1-i)(m+1-i)}z(R_{a_1} \dots R_{a_m})^2R_{a_{i+1}} \dots R_{a_l}, \\ i > l, \ \theta_{(m+1-i)(m+1-i)}z(R_{a_1} \dots R_{a_m})R_{a_1} \dots R_{a_l}R_{a_{i+1}} \dots R_{a_m}, \end{cases} \quad i = m, \dots, 1,$$

$$\phi_{m+1-i}(g'_{i-1}) = z(R_{a_{i+1}} \dots R_{a_m}\overline{R}_{a_1} \dots \overline{R}_{a_{i-1}}\widetilde{R}_{a_1})\overline{R}_{a_i} \dots \overline{R}_{a_m}\widetilde{R}_{a_2} \dots \widetilde{R}_{a_l} =$$

$$\begin{cases} i \leqslant l, \ \theta_{(m+2-i)(m+1-i)}z(R_{a_1} \dots R_{a_m})^2R_{a_{i+1}} \dots R_{a_l}, \\ i > l, \ \theta_{(m+2-i)(m+1-i)}z(R_{a_1} \dots R_{a_m})R_{a_1} \dots R_{a_l}R_{a_{i+1}} \dots R_{a_m}, \end{cases} \quad i = m, \dots, 2.$$

$$\theta_{(m+1-i)(m+1-i)} = \begin{cases} i \leqslant l, \ (-1)^{m-i}i!i!(m-i)!(l-i)!, \\ i > l, \ (-1)^{(m-i)(l+i-1)}i!l!(m-i)!, \end{cases} \quad i = m, \dots, 1,$$

$$\theta_{(m+2-i)(m+1-i)} = \begin{cases} i \leqslant l, \ (-1)^{m-i}i!(i-1)!(m-i+1)!(l-i)!, \\ i > l, \ (-1)^{(m-i)(l+i-1)}l!(i-1)!(m-i+1)!, \end{cases} \quad i = m, \dots, 2.$$

Так как θ_{jj} и θ_{j+1j}, $j = 1, \dots, m-1$, одного знака, то в силу соотношений (19) ранг матрицы Θ равен m, и выполняются равенства $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. Таким образом, для всех разбиений λ из условия выполняются неравенства $m_\lambda(A_m) \geqslant m$, $m_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant m$, и теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda = \big((\mathfrak{s}+2)^{k_1}, (\mathfrak{s}+1)^{k_2}, \mathfrak{s}^{m-k_1-k_2}\big)$, $m \geqslant 3$, $\mathfrak{s} \geqslant 0$, $k_1 \geqslant 1$, $k_2 \geqslant 0$, $k_1 + k_2 \leqslant m-1$. *Обозначим через* l_1 *высоту крайнего справа столбца диаграммы* λ, $l_1 = k_1$, *и пусть* l_2 — *высота второго справа столбца,* $l_2 = k_1 + k_2$, *тогда*

$$m_\lambda^L(A_m) = m_\lambda^L(\mathbf{N_m}) = k_2 + 1 = l_2 - l_1 + 1.$$

Доказательство. Докажем теорему по аналогии с ранее рассмотренными случаями. Сначала покажем неравенства $m_\lambda^L(\mathbf{N_m}) \leqslant l_2 - l_1 + 1$.

В случае $\mathfrak{s} = 0$ разобьем множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (13) на $l_2 - l_1 + 1$ подмножеств

$$\begin{aligned} S_t^0 = \big\{&x_0X_{i_1} \dots X_{i_t}(X_2 \dots X_{l_1}X_1^2X_2 \dots X_{l_1})X_{l_1+1} \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_t} \dots X_{l_2} \mid \\ &l_1 + 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant l_2\big\}, \ t = 0, \dots, l_2 - l_1. \end{aligned}$$

По предложению 3 и в силу тождеств (3), (6), (7) имеет место тождество

$$x_0X_1(X_1 \dots X_m)X_1 \equiv (-1)^{m-1}x_0X_1(X_2 \dots X_mX_1)X_1,$$

поэтому при $\mathfrak{s} = 1$ следующие $l_2 - l_1 + 1$ множеств

$$\begin{aligned} S_t^1 = \big\{&x_0X_{i_1} \dots X_{i_t}X_2 \dots X_{l_1}X_1(X_1 \dots X_m)X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_t} \dots X_{l_2} \mid \\ &l_1 + 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant l_2\big\}, \ t = 0, \dots, l_2 - l_1, \end{aligned}$$

задают разбиение множества всех различных по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$ мономов (13).

Если $\mathfrak{s} \geqslant 2$, то соответствующее множество всех различных по модулю тождеств (6), (7) мономов (12) разобьем на подмножества

$$S_t^{\mathfrak{s}} = \{x_0 X_{i_1} \dots X_{i_t} X_1 \dots X_{l_1} (X_1 \dots X_m)(X_m X_1 \dots X_{m-1})(X_1 \dots X_m)^{\mathfrak{s}-2} X_1 \dots \widehat{X}_{i_1} \dots \widehat{X}_{i_t} \dots X_{l_2} \mid l_1 + 1 \leqslant i_1 < \dots < i_t \leqslant l_2\},\ t = 0, \dots, l_2 - l_1.$$

Заметим, что в каждом случае все перечисленные мономы являются линейно независимыми по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$, в чем можно убедиться, применив метод умножений из доказательства предложения 6.

Зафиксируем таблицу Юнга T_λ и рассмотрим соответствующий полиоднородный многочлен $h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_k)$ полистепени $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ по $x_1, \dots, x_k$, где $k = m$ при $\mathfrak{s} \geqslant 1$, иначе $k = l_2$. В случае $l_2 = l_1$ для каждого $\mathfrak{s}$ существует единственное множество $S_0^{\mathfrak{s}}$ из одного элемента и $\dim L_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant 1$. Так как $m_\lambda(A_m) \geqslant 1$, то $m_\lambda(\mathbf{N_m}) = m_\lambda(A_m) = 1$ при $l_2 = l_1$.

Далее на протяжении всего доказательства предполагается, что $l_2 > l_1$. Для всех подстановок $\sigma \in S_{l_1+1,l_2}$ (S_{l_1+1,l_2} — подгруппа S_{l_2}) в зависимости от значения полистепени h_{T_λ} выполняются равенства

$$h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_{\sigma(l_1+1)}, \dots, x_{\sigma(l_2)}, \dots) = (-1)^{\sigma(\mathfrak{s}+1)} h_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_k),\ k = l_2, m.$$

При этом для любой подстановки $\sigma \in S_{l_1+1,l_2}$ и элементов множества $S_t^{\mathfrak{s}}$ выполняются равенства вида (16) с указанным условием. Следовательно, в пространстве $L_\lambda(\mathbf{N_m})$ полиоднородный элемент, соответствующий h_{T_λ}, является линейной комбинацией не более $l_2 - l_1 + 1$ фиксированных элементов и $m_\lambda^L(\mathbf{N_m}) \leqslant l_2 - l_1 + 1$, $\mathfrak{s} \geqslant 0$, $m \geqslant 3$.

По аналогии с доказательством теоремы 1 покажем неравенства $m_\lambda^L(A_m) \geqslant l_2 - l_1 + 1$, $m = 3, 4, \dots$. Пусть $\mathfrak{s} = 0$ и в алгебре A_m выполняется тождество

$$\sum_{i=l_1}^{l_2} \alpha_i g_i' \equiv 0,\ \alpha_i \in \Phi, \quad g_i' = x_0 \overline{X}_1 \dots \overline{X}_i \widetilde{X}_1 \overline{X}_{i+1} \dots \overline{X}_{l_2} \widetilde{X}_2 \dots \widetilde{X}_{l_1},\ i = l_2, \dots, l_1,$$

где $g_{l_2}' = x_0 \overline{X}_1 \dots \overline{X}_{l_2} \widetilde{X}_1 \dots \widetilde{X}_{l_1}$. Чтобы определить значения α_i, составим однородную систему уравнений, в которой коэффициенты получим в результате подстановок ϕ_{m+1-j} (18) элементов алгебры A_m в многочлены g_i', $i, j = l_2, \dots, l_1$. Коэффициенты запишем в матрицу $\Theta = (\theta_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant l_2 - l_1 + 1$, которая будет транспонированной матрицей рассматриваемой системы уравнений. Определим значения θ_{ii}, θ_{i+1i},

$$\begin{aligned} \phi_{m+1-i}(g_i') = {} & z(R_{a_{i+1}} \dots R_{a_m} \overline{R}_{a_1} \dots \overline{R}_{a_i}) \widetilde{R}_{a_1} \overline{R}_{a_{i+1}} \dots \overline{R}_{a_{l_2}} \widetilde{R}_{a_2} \dots \widetilde{R}_{a_{l_1}} = \\ & \theta_{(l_2+1-i)(l_2+1-i)} z(R_{a_1} \dots R_{a_m}) R_{a_1} \dots R_{a_{l_1}} R_{a_{i+1}} \dots R_{a_{l_2}} \end{aligned}$$

$$\theta_{(l_2+1-i)(l_2+1-i)} = (-1)^{i(m-i)+(l_1-1)(l_2-i)} i!(l_2-i)!l_1!, \quad i = l_2, \dots, l_1,$$

$$\begin{aligned} \phi_{m+1-i}(g_{i-1}') = {} & z(R_{a_{i+1}} \dots R_{a_m} \overline{R}_{a_1} \dots \overline{R}_{a_{i-1}} \widetilde{R}_{a_1}) \overline{R}_{a_i} \dots \overline{R}_{a_{l_2}} \widetilde{R}_{a_2} \dots \widetilde{R}_{a_{l_1}} = \\ & \theta_{(l_2+2-i)(l_2+1-i)} z(R_{a_1} \dots R_{a_m}) R_{a_1} \dots R_{a_{l_1}} R_{a_{i+1}} \dots R_{a_{l_2}}, \end{aligned}$$

$$\theta_{(l_2+2-i)(l_2+1-i)} = (-1)^{i(m-i)+(l_1-1)(l_2-i)} l_1!(i-1)!(l_2+1-i)!, \quad i = l_2, \dots, l_1 + 1.$$

Знаки элементов θ_{jj}, θ_{j+1j}, $j = 1, \dots, l_2 - l_1$, совпадают, причем во всех остальных случаях в силу соотношений (19) имеем $\theta_{ij} = -\theta_{i+1j}$, $i \neq j$. Следовательно, ранг Θ равен $l_2 - l_1 + 1$, и система уравнений имеет единственное нулевое решение $\alpha_{l_1} = \dots = \alpha_{l_2} = 0$. Таким образом, $m_\lambda^L(A_m) \geqslant l_2 - l_1 + 1$ для $\mathfrak{s} = 0$.

В случае $\mathfrak{s} \geqslant 1$ покажем линейную независимость по модулю тождеств A_m многочленов

$$g_i'' = x_0 (\overline{\overline{X}}_1 \dots \overline{\overline{X}}_m)^{\mathfrak{s}} \overline{X}_1 \dots \overline{X}_i \widetilde{X}_1 \overline{X}_{i+1} \dots \overline{X}_{l_2} \widetilde{X}_2 \dots \widetilde{X}_{l_1},\ i = l_2, \dots, l_1.$$

Рассуждая по аналогии с рассмотренным случаем, результатами подстановок (18) $\phi_{m+1-j}(g_i'')$, $l_1 \leqslant i, j \leqslant l_2$, в алгебре A_m являются $l_2 - l_1 + 1$ базисных элементов

$$z(R_{a_1} \dots R_{a_m})^{\mathfrak{s}+1} R_{a_1} \dots R_{a_{l_1}} R_{a_{i+1}} \dots R_{a_{l_2}},\ i = l_2, \dots, l_1,$$

с коэффициентами, которые отличаются от соответствующих элементов матрицы Θ на ненулевой множитель, общий для всех элементов в одном и том же столбце. Таким образом, ранг соответствующей данному случаю матрицы коэффициентов равен $l_2 - l_1 + 1$, и выполняются неравенства $m_\lambda^L(A_m) \geqslant l_2 - l_1 + 1$, $\mathfrak{s} = 0, 1, \dots$, $m = 3, 4, \dots$. Теорема доказана.

Заметим, что в работе [5] доказательства равенств

$$m_\lambda^L(A_2) = \begin{cases} 2, \lambda = ((\mathfrak{s}+1), \mathfrak{s}), \mathfrak{s} \geqslant 1, \\ 1, \lambda = ((\mathfrak{s}+2), \mathfrak{s}), \mathfrak{s} \geqslant 0 \end{cases}$$

аналогичны доказательствам теорем 2, 3. То есть авторы с помощью тождеств многообразия $\mathbf{N_2}$ оценивали данные кратности сверху и с помощью определения алгебры A_2 получали равную оценку снизу. Следовательно, для данных разбиений λ авторами доказаны равенства $m_\lambda^L(A_2) = m_\lambda^L(\mathbf{N_2})$. При этом для разбиений λ, отличных от данных и от рассматриваемых в теореме 1 при $m = 2$, в той же работе доказаны равенства $m_\lambda^L(\mathbf{N_2}) = 0$.

Таким образом, в силу равенств $m_\lambda^L(A_m) = m_\lambda^L(\mathbf{N_m})$, $m = 2, 3, \dots$, и по предложению 2

Теорема 4. *Многообразие $var(A_m)$ и заданное системой тождеств* (1)–(4) *многообразие $\mathbf{N_m}$ совпадают, $var(A_m) = \mathbf{N_m}$, $m = 2, 3, \dots$.*

Суммируем, в том числе приведенные в работе [5], утверждения о кратностях $m_\lambda^L(\mathbf{N_m})$, $m = 2, 3, \dots$, в следующей теореме.

Теорема 5. *Кратности $m_\lambda^L(\mathbf{N_m})$, $m = 2, 3, \dots$, определяются следующим образом:*

1. *если $\lambda = (1^k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, то $m_\lambda^L(\mathbf{N_m}) = 1$;*
2. *если $\lambda = \big((\mathfrak{s}+1)^k, \mathfrak{s}^{m-k}\big)$, $\mathfrak{s} \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, то $m_\lambda^L(\mathbf{N_m}) = m$;*
3. *если $\lambda = \big((\mathfrak{s}+2)^{k_1}, (\mathfrak{s}+1)^{k_2}, \mathfrak{s}^{m-k_1-k_2}\big)$, $\mathfrak{s} \geqslant 0$, $k_1 \geqslant 1$, $k_2 \geqslant 0$, $k_1 + k_2 \leqslant m - 1$, то $m_\lambda^L(\mathbf{N_m}) = k_2 + 1$;*
4. *$m_\lambda^L(\mathbf{N_m}) = 0$ для всех остальных λ.*

Заметим, что в работе [13] доказаны равенства

$$c_{n+1}(A_m) = (n+1) \dim L_n(A_m) = (n+1) \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^L(A_m) d_\lambda,\ n \geqslant 1,\ m \geqslant 2,$$

позволяющие вычислять коразмерности $c_n(\mathbf{N_m})$, $n \geqslant 2$, без знания кратностей $m_\lambda(\mathbf{N_m})$. Поэтому вопрос определения кратностей $m_\lambda(\mathbf{N_m})$ представляет отдельный интерес.

Теорема 6. *Все ненулевые кратности $m_\lambda(\mathbf{N_m})$, $m \geqslant 2$, определяются следующим образом:*

1. *если удалением одной клетки из диаграммы λ может быть получена единственная диаграмма μ, для которой $m_\mu^L(\mathbf{N_m}) > 0$, то $m_\lambda(\mathbf{N_m}) = m_\mu^L(\mathbf{N_m})$;*
2. *если удалением одной клетки из диаграммы λ могут быть получены две различные диаграммы μ_1, μ_2, для которых $m_{\mu_1}^L(\mathbf{N_m}), m_{\mu_2}^L(\mathbf{N_m}) > 0$, то $m_\lambda(\mathbf{N_m}) = m_{\mu_1}^L(\mathbf{N_m}) + m_{\mu_2}^L(\mathbf{N_m})$.*

Доказательство. Для каждого $n \geqslant 1$ определим пространство $L_{n,n+1} \cong L_n$, все элементы которого в мономах на первой позиции вместо x_0 имеют x_{n+1}, и ΦS_n-модуль $L_{n,n+1}(\mathbf{N_m}) \cong L_n(\mathbf{N_m})$. Тогда ΦS_{n+1}-модуль $P_{n+1}(\mathbf{N_m})$ является индуцированным модулем $L_{n,n+1}(\mathbf{N_m})$, и все кратности $m_\lambda(\mathbf{N_m})$, $\lambda \vdash n+1$, определяются с помощью правила Литтлвуда-Ричардсона (см. напр. [2], с. 114),

$$m_\lambda(\mathbf{N_m}) \leqslant \sum_{i=1}^{t} m^L_{\mu_i}(\mathbf{N_m}),\ t = t(\lambda) \leqslant 2,$$

где диаграммы Юнга μ_i получены из диаграммы λ в результате удаления одной клетки. При этом $t \leqslant 2$, так как для каждого n существует не больше двух таких удовлетворяющих условиям теоремы 5 диаграмм μ_i, $\mu_i \vdash n$, из которых в результате присоединения одной клетки получим одну и ту же диаграмму λ.

При $t = 1$, $\mu = \mu_1$, в пространстве $L_{n,n+1}$ зафиксируем $\mathfrak{m} = m^L_\mu(\mathbf{N_m})$ линейно независимых по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$ элементов $e_T f_j(x_1, \ldots, x_{n+1})$, $T = T_\mu$, $j = 1, \ldots, \mathfrak{m}$. Обозначим через $\mathfrak{T}$ таблицу Юнга с диаграммой λ, полученную из таблицы T добавлением клетки с числом $n+1$. Предположим, что в многообразии $\mathbf{N_m}$ выполняется тождество

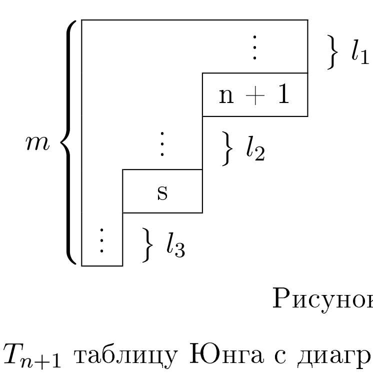
$$\sum_{j=1}^{\mathfrak{m}} \alpha_j e_{\mathfrak{T}} f_j(x_1, \ldots, x_{n+1}) \equiv 0,\ \alpha_j \in \Phi,\ f_j \in L_{n,n+1}.$$

Представим слагаемое $e_{\mathfrak{T}} f_j$ в виде $e_{\mathfrak{T}} f_j = e_T f_j + f'_j(x_1, \ldots, x_{n+1})$, где во всех мономах многочлена f'_j образующая x_{n+1} находится не на первой позиции. По предложению 2 получили следствие

$$\sum_{j=1}^{\mathfrak{m}} \alpha_j e_T f_j(x_1, \ldots, x_{n+1}) \equiv 0$$

и в силу линейной независимости равенства $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, \mathfrak{m}$. Следовательно, элементы $e_{\mathfrak{T}} f_j$, $j = 1, \ldots, \mathfrak{m}$, по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$ линейно независимы, и по предложению 1 выполняется неравенство $m_\lambda(\mathbf{N_m}) \geqslant \mathfrak{m}$. Таким образом, $m_\lambda(\mathbf{N_m}) = \mathfrak{m}$.

При $t = 2$ зафиксируем следующую таблицу Юнга $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\lambda$, которая по теореме 5 имеет форму



$l_1, l_2, l_3 \geqslant 0,\ s \leqslant n.$

Рисунок 1.

Обозначим через T_{n+1} таблицу Юнга с диаграммой μ_1, которая получается из таблицы $\mathfrak{T}$ в результате удаления клетки с числом $n+1$, и пусть таблица T_s с диаграммой μ_2 получена из $\mathfrak{T}$ удалением клетки с числом s.

Пусть пространство $L_{n,s}$ получено из $L_{n,n+1}$ транспозицией образующих x_{n+1} и x_s во всех мономах, $L_{n,s} \cong L_{n,n+1}$. То есть все мономы из $L_{n,s}$ имеют x_s на первой позиции. И пусть симметрическая группа G действует на множестве $\{1, \ldots, \widehat{s}, \ldots, n+1\}$, $G \cong S_n$. Тогда ΦG-модуль $L_{n,s}(\mathbf{N_m}) = L_{n,s}/(L_{n,s} \cap Id(\mathbf{N_m}))$ и ΦS_n-модуль $L_{n,n+1}(\mathbf{N_m})$ изоморфны. Зафиксируем $\mathfrak{m}_1 = m^L_{\mu_1}(\mathbf{N_m})$ линейно независимых по модулю тождеств $\mathbf{N_m}$ элементов $e_{T_{n+1}} f_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in L_{n,n+1}$ и $\mathfrak{m}_2 = m^L_{\mu_2}(\mathbf{N_m})$ линейно независимых элементов

$e_{T_s}h_j(x_1,\dots,x_{n+1}) \in L_{n,s}$, $i = 1,\dots,\mathfrak{m}_1$, $j = 1,\dots,\mathfrak{m}_2$. Предположим, что имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^{\mathfrak{m}_1} \alpha_i e_{\mathfrak{T}} f_i + \sum_{j=1}^{\mathfrak{m}_2} \beta_j e_{\mathfrak{T}} h_j \equiv 0,\ \alpha_i, \beta_j \in \Phi,\ f_i \in L_{n,n+1},\ h_j \in L_{n,s},$$

которое представим в виде

$$\sum_{i=1}^{\mathfrak{m}_1} \alpha_i (e_{T_{n+1}} f_i + f_i') + \sum_{j=1}^{\mathfrak{m}_2} \beta_j (e_{T_s} h_j + h_j') \equiv 0,$$

где $e_{T_{n+1}} f_i \in L_{n,n+1}$, $f_i' \notin L_{n,n+1}$, $e_{T_s} h_j \in L_{n,s}$, $h_j' \notin L_{n,s}$. В таблице $\mathfrak{T}$ число $n+1$ находится выше s, и каждое из них расположено в угловых клетках, поэтому для всех $\sigma \in R_{\mathfrak{T}}$, $\tau \in C_{\mathfrak{T}}$ имеем неравенство $\sigma\tau(n+1) \neq s$, и так как $f_i \in L_{n,n+1}$, то $f_i' \notin L_{n,s}$, $i = 1,\dots,\mathfrak{m}_1$. Следовательно, только $e_{T_s} h_j \in L_{n,s}$, $j = 1,\dots,\mathfrak{m}_2$, и по предложению 2 получаем следствие

$$\sum_{j=1}^{\mathfrak{m}_2} \beta_j e_{T_s} h_j \equiv 0,$$

в котором по условию все $\beta_j = 0$. Следовательно, также выполняются равенства $\alpha_i = 0$, $i = 1,\dots,\mathfrak{m}_1$. Таким образом, по предложению 1 выполняется неравенство $m_\lambda(\mathbf{N_m}) \geqslant \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$. Теорема доказана.

Определим все значения кодлин $l_n^L(\mathbf{N_m})$, $l_n(\mathbf{N_m})$ для модулей $L_n(\mathbf{N_m})$ и $P_n(\mathbf{N_m})$ соответственно. Будем обозначать через $\lfloor k \rfloor$ — наибольшее целое число, меньшее или равное k, $\lceil k \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное k.

Теорема 7. *Пусть $m \geqslant 2$. При $n > m$ положим $r = n - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$, если m не делит n, и $r = m$ если m делит n. Тогда выполняются следующие равенства*

$$l_n^L(\mathbf{N_m}) = \begin{cases} m + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{m-r}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{m-r}{2} \right\rceil,\ n > m, \\ 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\ n \leqslant m. \end{cases}$$

Доказательство. По теореме 5 все диаграммы, которым соответствуют ненулевые кратности $m_\lambda^L(\mathbf{N_m})$, имеют не более m строк. Зафиксируем такую диаграмму $\lambda \vdash n$, $n > m$, имеющую не более одного неполного (высоты меньше m) столбца, тогда высота крайнего справа столбца диаграммы λ равна r. Так как диаграммы, соответствующие разбиениям из условия теоремы 5, имеют не более двух неполных столбцов, то все другие такие диаграммы получаются из λ разбиением крайнего справа столбца на два столбца и при $r \leqslant m-2$ разбиением находящегося в строках с номерами с $r+1$ по m крайнего справа столбца на два. Таким образом, в силу теоремы 5 при $n > m$ выполняются равенства

$$l_n^L(\mathbf{N_m}) = m + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (r - 2i + 1) + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{m-r}{2} \right\rfloor} (m - r - 2i + 1),$$

где $m = m_\lambda^L(\mathbf{N_m})$, $n > m$, и в скобках выписаны значения кратностей для диаграмм с двумя неполными столбцами. Так как

$$\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} (k + 1 - 2i) = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, \tag{22}$$

то получаем требуемые равенства.

При $n \leqslant m$ диаграмма λ состоит из одного столбца, $\lambda = (1^n)$, $m^L_{(1^n)}(\mathbf{N_m}) = 1$, поэтому

$$l^L_n(\mathbf{N_m}) = 1 + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(n - 2i + 1) = 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil .$$

Теорема доказана.

Для определения значений $l_n(\mathbf{N_m})$ используем так называемую нотацию Айверсона (см. напр. [16], с. 42). Пусть B — утверждение, которое является либо истинным, либо ложным, тогда

$$[B] = \begin{cases} 1, \text{если } B \text{ истинно,} \\ 0, \text{если } B \text{ ложно.} \end{cases}$$

Например, если число r четное, то $[2 \mid r] = 1$, иначе $[2 \mid r] = 0$.

Теорема 8. *Пусть $m \geqslant 2$. Выполняется равенство $l_1(\mathbf{N_m}) = 1$. Если натуральное $n \leqslant m$, то*

$$l_{n+1}(\mathbf{N_m}) = 2 + 3 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - [2 \mid n] .$$

Пусть $n > m$, положим $r = n - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$, если m не делит n, и $r = m$ если m делит n, тогда

$$l_{n+1}(\mathbf{N_m}) = \alpha m + \beta \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil - [2 \mid r] + \gamma \left\lfloor \frac{m-r}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{m-r}{2} \right\rceil - [r \leqslant m - 2 \text{ и } 2 \mid m - r] ,$$

где $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$ при $m < n < 2m$. Если $n \geqslant 2m$, то $\alpha = 3 - [r = m]$, $\beta = 4$, $\gamma = 4$.

Доказательство. Равенство $l_1(\mathbf{N_m}) = 1$ очевидно. По теореме 6 значение $l_{n+1}(\mathbf{N_m})$ равно сумме всех кратностей $m^L_\mu(\mathbf{N_m}) > 0$, $\mu \vdash n$, взятых столько раз, сколько существует способов добавления одной клетки к соответствующим диаграммам μ.

Существует два способа добавления одной клетки к любой прямоугольной диаграмме и три способа для диаграммы $\mu \vdash n > m$ с одним неполным (высоты меньше m) столбцом, поэтому при $n \leqslant m$ имеем $m_{(1^n)}(\mathbf{N_m}) = 2$, при $m < n < 2m$ коэффициент $\alpha = 3$, и $\alpha = 3 - [r = m]$ при $n \geqslant 2m$.

Пусть диаграмма μ состоит из двух неполных столбцов и $n \leqslant m$, тогда существует три способа добавления клетки к диаграмме μ, если столбцы имеют разную высоту, и два способа, если столбцы одной высоты. При этом для любой диаграммы λ, $\lambda \vdash n$, $n \geqslant 2$, с двумя неполными столбцами равной высоты, такой что $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) > 0$, по теореме 5 выполняется равенство $m^L_\lambda(\mathbf{N_m}) = 1$. Следовательно, в рассматриваемом случае для краткости сумму кратностей (22), где $k = n$, можем умножить на три и вычесть единицу, если n четно. Получим требуемые равенства для $n \leqslant m$. Рассуждения при $n > m$ для всех диаграмм μ с двумя неполными столбцами аналогичны. Теорема доказана.

4. Заключение

В работе для многообразий $var(A_m)$, $m = 2, 3, \ldots$, определенных на основе алгебр A_m, получены системы определяющих тождеств. В случае $m = 2$ определены значения кратностей $m^L_{(\mathfrak{s}^2)}(A_2) = 2$, $\mathfrak{s} \geqslant 2$, и все кратности $m^L_\lambda(A_m)$, $m \geqslant 3$, с помощью которых могут быть непосредственно вычислены требуемые значения коразмерностей $c_n(A_m)$, $m \geqslant 2$. Таким образом, в качестве частного случая получили все заявленные основными результаты работы [12]. Также определены значения всех кодлин $l^L_n(A_m)$ и приведен метод вычисления кратностей $m_\lambda(A_m)$, с помощью которого определены кодлины $l_n(A_m)$, $m \geqslant 2$.

Автор выражает благодарность профессору Мищенко С. П. за ценные замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. AMS Mathematical Surveys and Monographs. 2005. Vol. 122. 352 p.
2. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985. 448 с.
3. Drensky V. Free Algebras and PI-Algebras. Graduate Course in Algebra. Springer-Verlag, 2000.
4. Шулежко О. В. О почти нильпотентных многообразиях в различных классах линейных алгебр // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, № 1. С. 67–88.
5. Mishchenko S., Valenti A. An almost nilpotent variety of exponent 2 // Israel Journal of Mathematics. 2014. Vol. 199, № 1. P. 241–257.
6. Мищенко С. П. Многообразия линейных алгебр кодлины один // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2010. № 1. С. 25–30.
7. Фролова Ю. Ю., Шулежко О. В. Почти нильпотентные многообразия алгебр Лейбница // Прикладная дискретная математика. 2015. № 2(28). С. 30–36.
8. Mishchenko S., Valenti A. On almost nilpotent varieties of subexponential growth // Journal of Algebra. 2015. Vol. 423, № 1. P. 902–915.
9. Мищенко С. П. О многообразиях коммутативных метабелевых алгебр / С. П. Мищенко, Н. П. Панов, Ю. Ю. Фролова, Чанг Т. К. Нгуен // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 1. С. 165–180.
10. Мищенко С. П., Шулежко О. В. Описание почти нильпотентных антикоммутативных метабелевых многообразий с подэкспоненциальным ростом // Мальцевские чтения : тез. докл. международ. конф. Новосибирск, 2014. С. 110.
11. Мищенко С. П. Бесконечные периодические слова и почти нильпотентные многообразия // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2017. № 4. С. 62–66.
12. Шулежко О. В. Новые свойства почти нильпотентного многообразия экспоненты два // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 3. С. 316–320.
13. Мищенко С. П., Шулежко О. В. Почти нильпотентные многообразия любой целой экспоненты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015. № 2. С. 53–57.
14. Панов Н. П. О почти нильпотентных многообразиях с целой экспонентой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, № 3. С. 331–343.
15. Зайцев М. В., Мищенко С. П. О кодлине многообразий линейных алгебр // Математические заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 553–559.
16. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. М. : Мир, 1998. 703 с.

REFERENCES

1. Giambruno, A. & Zaicev, M. 2005, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, AMS Mathematical Surveys and Monographs, Providence, R.I. doi: 10.1090/surv/122

2. Bahturin, Yu. A. 1987, *Identical relations in Lie algebras*, VNU Science Press, Utrecht.

3. Drensky, V. 2000, *Free Algebras and PI-Algebras. Graduate Course in Algebra*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Singapore.

4. Shulezhko, O. V. 2015, "On almost nilpotent varieties in different classes of linear algebras", *Chebyshevskiy Sbornik*, vol. 16, no. 1, pp. 67–88.

5. Mishchenko, S., Valenti, A. 2014, "An almost nilpotent variety of exponent 2", *Israel Journal of Mathematics*, vol. 199, no. 1, pp. 241–257. doi: 10.1007/s11856-013-0029-4

6. Mishchenko, S. P. 2010, "Varieties of linear algebras with colength one", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 65, no. 1, pp. 23-–27. doi: 10.3103/S0027132210010043

7. Frolova, Yu. Yu., Shulezhko, O.V. 2015, "Almost nilpotent varieties of Leibniz algebras", *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, no. 2(28), pp. 30—36. doi: 10.17223/20710410/28/3

8. Mishchenko, S., Valenti, A. 2015, "On almost nilpotent varieties of subexponential growth", *Journal of Algebra*, vol. 423, no. 1, pp. 902–915. doi: 10.1016/j.jalgebra.2014.10.038

9. Mishchenko, S. P., Panov, N. P., Frolova, Yu. Yu., Nguyen, Trang 2016, "On the varieties of commutative metabelian algebras", *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 21, no. 1, pp. 165–180.

10. Mishchenko, S. P., Shulezhko, O. V. 2014, "Description of almost nilpotent anticommutative metabelian varieties of subexponential growth", *Mal'tsevskie Chteniya : tez. dokl. mezhdunarod. konf. (Mal'tsev Meeting : collection of abstracts of international conference)*, Novosibirsk, pp. 110.

11. Mishchenko, S. P. 2017, "Infinite periodic words and almost nilpotent varieties", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 72, no. 2, pp. 173–176

12. Shulezhko, O. V. 2014, "New properties of almost nilpotent variety of exponent 2", *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 14, no. 3, pp. 316–320.

13. Mishchenko, S. P., Shulezhko, O. V. 2015, "Almost nilpotent varieties of arbitrary integer exponent", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 70, no. 2, pp. 92—95. doi: 10.3103/S0027132215020084

14. Panov, N. P. 2017, "On Almost Nilpotent Varieties with Integer PI-Exponent", *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 17, no. 3, pp. 331–343. doi: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-331-343

15. Zaitsev, M. V., Mishchenko, S. P. 2006, "Colength of varieties of linear algebras", *Math. Notes*, vol. 79, no. 4, pp. 511—517. doi: 10.1007/s11006-006-0056-0

16. Graham, R. L., Knuth, D. E. & Patashnik, O. 1994, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley.

Ульяновский государственный университет.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-325-337

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЁТКИ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ РЕШЁТОК[1]

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова (г. Оренбург), Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский (г. Тула)

Аннотация

В работе дано новое общее определение алгебраической решётки. Доказывается, что любое рациональное преобразование алгебраической решётки снова будет алгебраической решёткой. Показано, что взаимная решётка к алгебраической решётки также будет алгебраической решёткой, соответствующей тому же чисто-вещественному алгебраическому полю F_s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Следуя за Б. Ф. Скубенко, изучаются фундаментальные системы из чисто-вещественного алгебраического поля F_s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Показана связь между фундаментальными системами алгебраических чисел и алгебраическими решётками.

В работе доказаны оценки для норм матрицы перехода от произвольной невырожденной матрицы к рациональной приближающей матрицы. С помощью леммы об оценки нормы матрицы перехода и обратной матрицы перехода, связывающих произвольную невырожденную матрицу и невырожденную рациональную приближающую матрицу, в работе показано, что множество алгебраических решёток всюду плотно в метрическом пространстве решёток.

Доказанная теорема является частным случаем более общей теоремы о том, что для любой решётки $\Lambda \in PR_s$ множество всех решёток рационально связанных с решёткой Λ всюду плотно в PR_s.

Аналогом данной теоремы является утверждение что для произвольной точки общего положения из $\mathbb{R}^s$ соответствующее s-мерное рациональное арифметическое пространство будет всюду плотно в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$.

Ключевые слова: алгебраические решётки, метрическое пространство решёток.

Библиография: 24 названия.

1. Введение

Как известно (см. [7], стр.165) множество всех s-мерных решёток образуют полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(\Lambda,\Gamma)$, которая задана равенствами

$$\rho(\Lambda,\Gamma)=\max(\ln(1+\mu),\ln(1+\nu)),\quad \mu=\inf_{\Lambda=A\cdot\Gamma}\|A-E_s\|,\quad \nu=\inf_{B\cdot\Lambda=\Gamma}\|B-E_s\|,$$

$$E_s=\begin{pmatrix}1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&1\end{pmatrix}=(\delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant s},\quad \delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{при } i=j,\\ 0, & \text{при } i\neq j,\end{cases}\quad \|A\|=s\cdot\max_{1\leqslant i,j\leqslant s}|a_{ij}|.$$

Метрическое пространство решёток PR_s играло существенную роль в работах [5], [6], [9]–[17], [21]–[24].

[1]Работа выполнена по грантам РФФИ № 15-01-01540а, №16-41-710194р_центр_а

В 1976 году в работах К. К. Фролова [19], [20] было сделано существенное, принципиальное продвижение в теоретико-числовом методе в приближенном анализе, основанное на применении алгебраических решёток. Ниже дадим общее определение алгебраической решётки.

Наряду с операциями сложения и вычитания векторов из $\mathbb{R}^s$ рассмотрим операции покоординатного умножения двух векторов и деления вектора на вектор общего положения:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=(x_1y_1,\ldots,x_sy_s),\quad \frac{\vec{x}}{\vec{y}}=\left(\frac{x_1}{y_1},\ldots,\frac{x_s}{y_s}\right)\quad (y_1\neq 0,\ldots,y_s\neq 0).$$

Добавление операции покоординатного умножения превращает $\mathbb{R}^s$ в коммутативное кольцо с единицей $\vec{e}=(1,\ldots,1)$ и, кроме того, в алгебру над $\mathbb{R}$ ранга s.

Так как для стандартного базиса $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_s$ справедливы равенства $\vec{x}\cdot\vec{e}_j=x_j\cdot\vec{e}_j$ $(j=1,\ldots,s)$, то умножение на $\vec{x}$ задаёт линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^s$. Матрицей этого линейного преобразования в стандартном базисе является диагональная матрица $D(\vec{x})$, которая невырожденная только для точек $\vec{x}$ общего положения. Обозначим через $D_s^{(0)}(\mathbb{R})$ множество всех диагональных матриц, содержащее как подмножество $D_s(\mathbb{R})$ — множество всех невырожденных диагональных матриц, так и подмножество вырожденных диагональных матриц, т. е. диагональных матриц, у которых на диагонали есть хотя бы один ноль. Соответствие $\vec{x}\to D(\vec{x})$ задаёт *регулярное $\mathbb{R}$-представление* пространства $\mathbb{R}^s$ в стандартном базисе. Таким образом всё $\mathbb{R}^s$ отображается взаимно однозначно на $D_s^{(0)}(\mathbb{R})$, а множество точек общего положения — на $D_s(\mathbb{R})$. При переходе к другим базисам регулярное представление меняется.

Согласно Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддееву [3] *решёткой, повторяющейся умножением,* называется всякая решётка замкнутая относительно операции покоординатного умножения точек. Таким образом, если решётка Λ, повторяется умножением, то для любого $\vec{x}\in\Lambda$ справедливо соотношение

$$\vec{x}\cdot\Lambda=\{(x_1y_1,\ldots,x_sy_s)\,|\,\vec{y}\in\Lambda\}\subset\Lambda\cdot\Lambda\subset\Lambda.$$

Ясно, что если $\vec{x}$ — точка общего положения, то $\vec{x}\cdot\Lambda$ — подрешётка, повторяющаяся умножением, решётки Λ, так как свойства дискретности и замкнутости относительно сложения, вычитания и умножения для $\vec{x}\cdot\Lambda$ сохраняются, кроме того линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую.

Таким образом, с алгебраической точки зрения всякая решётка Λ, повторяющаяся умножением является, с одной стороны, коммутативным кольцом, а с другой стороны $\mathbb{Z}$-модулем.

Определение 1. *Точка $\vec{x}\neq\vec{0}$ называется делителем нуля, если у неё есть координаты равные* 0.

Определение 2. *Решётка не содержащая делителей нуля называется неприводимой.*

Для решёток, повторяющихся умножением, рассмотрим более важное *регулярное $\mathbb{Z}$-представление* точек этой решётки. Если решётка $\Lambda=\Lambda(\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_s)$, повторяется умножением, то определены следующие целочисленные матрицы линейных преобразований:

$$A_k=\left(a_{i\,j}^{(k)}\right)_{(1\leqslant i,j\leqslant s)},\quad \begin{cases}\vec{\lambda}_k\cdot\vec{\lambda}_1=a_{1\,1}^{(k)}\vec{\lambda}_1+\ldots+a_{s\,1}^{(k)}\vec{\lambda}_s\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \vec{\lambda}_k\cdot\vec{\lambda}_s=a_{1\,s}^{(k)}\vec{\lambda}_1+\ldots+a_{s\,s}^{(k)}\vec{\lambda}_s\end{cases}\quad (k=1,\ldots,s).\tag{1}$$

Если через $A_{\vec{x}}$ обозначим регулярное $\mathbb{Z}^s$-представление точки $\vec{x}$ решётки $\Lambda=\Lambda(\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_s)$, то через внутренние координаты $m_1,\ldots,m_s$ этой точки в базисе $\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_s$: $\vec{x}=m_1\vec{\lambda}_1+\ldots+m_s\vec{\lambda}_s$ матрица $A_{\vec{x}}$ выражается линейно в виде

$$A_{\vec{x}}=m_1A_1+\ldots+m_sA_s.$$

Определение 3. *Назовём вектор $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(s)}) \in \mathbb{R}^s$ целым алгебраическим, если многочлен*

$$f_{\vec{\lambda}}(x) = (x - \lambda^{(1)}) \ldots (x - \lambda^{(s)}) \in \mathbb{Z}[x].$$

Вектор $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(s)})$ назовём алгебраическим, если найдется натуральное число n такое, что вектор $\vec{\lambda}_1 = n\vec{\lambda}$ будет целым алгебраическим вектором.

Определение 4. *Решётка $\Lambda \in PR_s$ называется алгебраической, если любой вектор $\lambda \in \Lambda$ будет алгебраическим вектором и Λ содержит неприводимую подрешётку Λ_1, повторяющуюся умножением.*

Важным свойством алгебраических решёток является тот факт, что норменный минимум $N(\Lambda)$, который определяется равенством

$$N(\Lambda) = \inf_{\vec{x} \in \Lambda,\, \vec{x} \neq \vec{0}} |x_1 \ldots x_s|,$$

строго больше 0: $N(\Lambda) > 0$.

Пусть F_s — чисто-вещественное алгебраическое поле степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $F_s^{(1)} = F_s$, $F_s^{(2)}$, …, $F_s^{(s)}$ — его алгебраически сопряжённые поля. Обозначим через $\mathbb{A}(F_s)$ множество всех алгебраических решёток Λ таких, что координаты любого вектора $\vec{x} \in \Lambda$ являются алгебраически сопряженными числами из поля F_s, то есть $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s)$ и $x_j = \theta^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, s)$, где $\theta^{(1)} = \theta$, $\theta^{(2)}$, …, $\theta^{(s)}$ — полный набор алгебраически сопряженных чисел $\theta^{(j)} \in F_s^{(j)}$ для алгебраического числа $\theta \in F_s$.

Целью данной работы является доказательство следующей основной теоремы о плотности множества алгебраических решёток $\mathbb{A}(F_s)$ в метрическом пространстве PR_s.

Теорема 1. *Для любого чисто-вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ множество алгебраических решёток $\mathbb{A}(F_s)$ всюду плотно в метрическом пространстве PR_s.*

2. Свойства алгебраических решёток

Нам потребуется обозначение действия линейного преобразования, заданного матрицей M, на решётку $\Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ с базисом $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1,1}, \ldots, \lambda_{1,s})$, …, $\vec{\lambda}_s = (\lambda_{s,1}, \ldots, \lambda_{s,s})$ и базисной матрицей A

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \ldots & \lambda_{1,s} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda_{s,1} & \ldots & \lambda_{s,s} \end{pmatrix}.$$

Будем писать $M \cdot \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \Lambda(M \cdot \vec{\lambda}_1, \ldots, M \cdot \vec{\lambda}_s)$,

$$M \cdot A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = A(M \cdot \vec{\lambda}_1, \ldots, M \cdot \vec{\lambda}_s) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{1,\nu}\lambda_{\nu,1} & \ldots & \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{1,\nu}\lambda_{\nu,s} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{s,\nu}\lambda_{\nu,1} & \ldots & \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{s,\nu}\lambda_{\nu,s} \end{pmatrix}.$$

Таким образом произвольный вектор $\vec{x} = m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s$ под действием линейного преобразования с матрицей M переходит в вектор $M \cdot \vec{x} = m_1 M \cdot \vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s M \cdot \vec{\lambda}_s$ и

$$M \cdot \vec{\lambda}_\nu = \begin{pmatrix} m_{\nu,1} & \ldots & m_{\nu,s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \ldots & \lambda_{1,s} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda_{s,1} & \ldots & \lambda_{s,s} \end{pmatrix} \quad (\nu = 1, \ldots, s).$$

Приведём несколько лемм из работ [4], [13], [15] в нужной нам формулировке с полными доказательствами и несколько новых лемм.

Лемма 1. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & a_{ss} \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s-1} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{s-11} & \dots & a_{s-1s-1} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{s-1s} \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} a_{s1} & \dots & a_{ss-1} \end{pmatrix}.$$

Если $\det A_{11} \neq 0$, $a_{ss} \neq 0$ *и*

$$B_{11} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s-1} \\ \dots & \ddots & \dots \\ b_{s-11} & \dots & b_{s-1s-1} \end{pmatrix} = A_{11}^{-1}, \quad B_{12} = B_{11}A_{12},$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} \frac{a_{s1}}{a_{ss}} & \dots & \frac{a_{ss-1}}{a_{ss}} \end{pmatrix}, \quad \vec{0}_{s-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{0}^{\top}_{s-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

то справедливы равенства

$$A = A_1 \cdot A_2,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & \vec{0}^{\top}_{s-1} \\ \vec{0}_{s-1} & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} E_{s-1} & B_{12} \\ B_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Перемножая клеточные матрицы, получим

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11} \cdot B_{12} \\ a_{ss} \cdot B_{21} & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$A_{11} \cdot B_{12} = A_{11} \cdot B_{11}A_{12} = A_{12}, \quad a_{ss} \cdot B_{21} = A_{21},$$

то $A_1 \cdot A_2 = A$ и лемма доказана. □

Рассмотрим произвольную решётку $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) \in \mathbb{A}(F_s)$. Таким образом, решётки Λ соответствует базисная матрица $A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$:

$$A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(s)} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \lambda_s^{(1)} & \dots & \lambda_s^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \lambda_\nu^{(\mu)} \in F_s^{(\mu)} \quad (1 \leqslant \nu, \mu \leqslant s), \tag{2}$$

и для любого целочисленного вектора $\vec{m} = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s$ соответствующая точка $\vec{x} = \vec{x}(\vec{m}) = \vec{m}A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) \in \Lambda$. Ясно, что $x_\mu = m_1\lambda_1^{(\mu)} + \dots + m_s\lambda_s^{(\mu)} \in F_s^{(\mu)}$ $(1 \leqslant \mu \leqslant s)$.

Назовём знаменателем алгебраического вектора $\vec{\lambda}_j$ наименьшее натуральное число n_j такое, что $n_j\vec{\lambda}_j$ — целый алгебраический вектор.

Множество алгебраических, линейно независимых чисел λ_1, …, λ_s из F_s согласно Б. Ф. Скубенко называется фундаментальной системой (см. [13]), а если среди чисел фундаментальной системы есть единица, то такая система называется приведенной фундаментальной системой.

Лемма 2. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ из F_s — произвольная фундаментальная система из F_s, а $\lambda \in F_s$ — произвольное алгебраическое число, тогда имеется однозначное представление*

$$\lambda = m_1\lambda_1 + \ldots + m_s\lambda_s, \quad m_j \in \mathbb{Q} \quad (1 \leqslant j \leqslant s).$$

Доказательство. Действительно, согласно Г. Вейлю (см. [2]) каждое алгебраическое поле F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является рациональным пространством размерности s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Нетрудно видеть, что произвольная фундаментальная система из F_s является базисом F_s как рационального пространства размерности s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. С другой стороны, каждый базис будет являться фундаментальной системой из F_s. Из свойств базиса рационального векторного пространства следует утверждение леммы. □

Лемма 3. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ из F_s — произвольная фундаментальная система из F_s и вектора $\vec{\lambda}_j$ заданы равенствами*

$$\vec{\lambda}_j = (\lambda_j^{(1)}, \ldots, \lambda_j^{(s)}), \quad \lambda_j^{(\mu)} \in F_s^{(\mu)} \quad (1 \leqslant j, \mu \leqslant s),$$

тогда решётка $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \in \mathbb{A}(F_s)$ — алгебраическая решётка.

Доказательство. Действительно, рассмотрим целый алгебраический вектор $\vec{\lambda}^* = n_1\vec{\lambda}_1$, который принадлежит решётки Λ. Рассмотрим целые алгебраические вектора $\vec{\lambda_j}^* = (\vec{\lambda}^*)^j$ $(2 \leqslant j \leqslant s)$. Из леммы 2 следует, что найдутся целые рациональные числа $m_{2,1}, \ldots, m_{s,s}$ и натуральные $n_2, \ldots, n_s$ такие, что $(m_{j,1}, \ldots, m_{j,s}, n_j) = 1$ $(2 \leqslant j \leqslant s)$ и

$$\vec{\lambda_j}^* = \frac{1}{n_j}\sum_{\nu=1}^{s} m_{j,\nu}\vec{\lambda}_\nu \quad (2 \leqslant j \leqslant s).$$

Положим $N = [n_2, \ldots, n_s]$, тогда каждый вектор

$$(N\vec{\lambda}^*)^j = \frac{N^j}{n_j}\sum_{\nu=1}^{s} m_{j,\nu}\vec{\lambda}_\nu \quad (2 \leqslant j \leqslant s)$$

будет целым алгебраическим вектором, принадлежащим решётке Λ. Так как подрешётка $\Lambda_1 = \Lambda(N\vec{\lambda}^*, (N\vec{\lambda}^*)^2, \ldots, (N\vec{\lambda}^*)^s)$ — решётка, повторяющаяся умножением, то утверждение леммы доказано. □

Обозначим через $\mathfrak{M}_s(\mathbb{Q})$ множество всех рациональных квадратных матриц порядка s, а через $\mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q})$ — подмножество невырожденных матриц.

Лемма 4. *Для базисной матрицы $A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ вида (2) произвольной алгебраической решётки $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \in \mathbb{A}(F_s)$ справедливо соотношение*

$$A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \cdot A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)^\top \in \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q}). \tag{3}$$

Доказательство. Положим $Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \cdot A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)^\top$, тогда

$$Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \ldots & \lambda_1^{(s)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda_s^{(1)} & \ldots & \lambda_s^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \ldots & \lambda_s^{(1)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda_1^{(s)} & \ldots & \lambda_s^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{\mu=1}^{s} \lambda_1^{(\mu)}\lambda_1^{(\mu)} & \ldots & \sum\limits_{\mu=1}^{s} \lambda_1^{(\mu)}\lambda_s^{(\mu)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \sum\limits_{\mu=1}^{s} \lambda_s^{(\mu)}\lambda_1^{(\mu)} & \ldots & \sum\limits_{\mu=1}^{s} \lambda_s^{(\mu)}\lambda_s^{(\mu)} \end{pmatrix}.$$

Известно, что если алгебраическое число $\lambda \in F_s$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$f(\lambda) = 0, \quad f(x) = x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x],$$

то для следа $\mathrm{Tr}(\lambda)$ справедливо соотношение $\mathrm{Tr}(\lambda) = -a_{s-1} \in \mathbb{Q}$.

Используя функцию след, матрицу $Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ можно записать в виде

$$Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(\lambda_1\lambda_1) & \ldots & \mathrm{Tr}(\lambda_1\lambda_s) \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \mathrm{Tr}(\lambda_s\lambda_1) & \ldots & \mathrm{Tr}(\lambda_s\lambda_s) \end{pmatrix},$$

где λ_1, ..., λ_s из F_s — соответствующая фундаментальная система из F_s. Тем самым утверждение леммы доказано. □

Лемма 5. *Для любой рациональной, невырожденной матрицы $M \in \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q})$ и алгебраической решётки $\Lambda \in \mathbb{A}(F_s)$ решётка $\Lambda_1 = M\Lambda$ — алгебраическая: $\Lambda_1 \in \mathbb{A}(F_s)$.*

Доказательство. Действительно, пусть $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \in \mathbb{A}(F_s)$ и базисная матрица $A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ имеет вид (2), а

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \ldots & m_{1,s} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ m_{s,1} & \ldots & m_{s,s} \end{pmatrix}, \quad m_{\nu,\mu} \in \mathbb{Q} \quad (1 \leqslant \nu, \mu \leqslant s),$$

тогда базисная матрица $A_1 = M \cdot A$ имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{1,\nu}\lambda_\nu^{(1)} & \ldots & \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{1,\nu}\lambda_\nu^{(s)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{s,\nu}\lambda_\nu^{(1)} & \ldots & \sum\limits_{\nu=1}^{s} m_{s,\nu}\lambda_\nu^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \sum_{\nu=1}^{s} m_{\mu,\nu}\lambda_\nu^{(\mu)} \in F_s^{(\mu)} \quad (1 \leqslant \nu, \mu \leqslant s)$$

и лемма доказана. □

Для алгебраических решёток и сама решётка, и её взаимная решётка не имеют ненулевых точек с нулевым произведением координат. Для обоснования этого достаточно показать, что координаты любой ненулевой точки взаимной решётки для алгебраической решетки образуют полный набор алгебраически сопряженных чисел из одного и того же алгебраического чисто вещественного поля степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим алгебраическую решётку $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \in \mathbb{A}(F_s)$, заданную равенством

$$\Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \left\{ \vec{x} = \left(\sum_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu^{(1)} m_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu^{(s)} m_\nu \right) \middle| \, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{4}$$

Так как координаты любой ненулевой точки $\vec{x} \in \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ — алгебраически сопряженные алгебраические числа, то произведение $x_1 \ldots x_s$ — ненулевое рациональное число.

Из предыдущего следует, что каждая строка матрицы $A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ состоит из полного набора алгебраически сопряженных чисел, а все элементы ν-ого столбца матрицы принадлежат одному и тому же алгебраическому полю $F_s^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Так как точки решетки $\Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ — целочисленные линейные комбинации строк матрицы $A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$, то координаты каждой точки $\vec{x} \in \Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ — полный набор алгебраически сопряженных чисел, а ν-ая координата для любой точки этой решетки принадлежит одному и тому же алгебраическому полю $F_s^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, s)$.

Покажем, что этим свойством обладает и взаимная решётка.

Обозначим через $U_{\nu\, j} = U_{\nu\, j}(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ элементы матрицы $Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)^{-1}$. Ясно, что из симметричности матрицы $Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ вытекает симметричность матрицы $Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)^{-1}$.

Обозначим через $A^*(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ базисную матрицу взаимной решётки $\Lambda^*(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ к решётке $\Lambda(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$, которая взаимна базисной матрице $A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$.

Лемма 6. *Справедливо равенство*

$$A^*(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\, k}\lambda_k^{(1)} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\, k}\lambda_k^{(s)} \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\, k}\lambda_k^{(1)} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\, k}\lambda_k^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\, k}\lambda_k^{(1)} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\, k}\lambda_k^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Действительно, из равенства

$$Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) \cdot A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)^{\top}$$

вытекает $A^{-1}(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)^{\top} \cdot Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)^{-1}$. Так как

$$A^*(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = (A^{-1}(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s))^{\top}$$

и $Q^{\top}(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$, то из предыдущего следует

$$A^*(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \left(A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)^{\top} \cdot Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)^{-1}\right)^{\top} = Q(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)^{-1} \cdot A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) =$$

$$= \begin{pmatrix} U_{1\,1} & \ldots & U_{1\, s} \\ U_{2\,1} & \ldots & U_{2\, s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{s\,1} & \ldots & U_{s\, s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \ldots & \lambda_1^{(s)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda_s^{(1)} & \ldots & \lambda_s^{(s)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\, k}\lambda_k^{(1)} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\, k}\lambda_k^{(s)} \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\, k}\lambda_k^{(1)} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\, k}\lambda_k^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\, k}\lambda_k^{(1)} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\, k}\lambda_k^{(s)} \end{pmatrix},$$

и лемма доказана. □

Лемма 7. *Произвольная точка $\vec{x}$ решетки $\Lambda^*(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ имеет вид*

$$\vec{x} = \left(\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\, k} m_{\nu}\right)\lambda_k^{(1)}, \ldots, \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\, k} m_{\nu}\right)\lambda_k^{(s)}\right),$$

где $m_1, \ldots, m_s$ — произвольные целые числа.

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из вида матрицы $A^*(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$, так как произвольная точка решётки $\Lambda^*(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ является линейной целочисленной комбинацией строк матрицы $A^*(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$. □

3. Основная теорема о плотности множества алгебраических решёток

Приступим к доказательству основной теоремы о плотности множества алгебраических решёток, предварительно докажем лемму о норме обратной матрицы близкой к единичной для этого нам потребуется одна лемма из [7] (см. стр. 158).

Лемма 8. *Пусть матрица $A = E_s + B$, причём $\|B\| < 1$. Тогда матрица A — невырожденная, причём матрица $C = E_s - A^{-1}$ удовлетворяет условию $\|C\| \leqslant \frac{\|B\|}{1-\|B\|}$.*

Доказательство. См. [7], стр. 158. □

Лемма 9. *Пусть для невырожденной матрице A:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}$$

и натурального $N > 2\|A^{-1}\|s$ определены матрицы A_N, Θ_N, $A = A_N + \Theta_N$:

$$A_N = \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{N} & \dots & \frac{m_{1s}}{N} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{m_{s1}}{N} & \dots & \frac{m_{ss}}{N} \end{pmatrix}, \quad \Theta_N = \begin{pmatrix} \frac{\theta_{11}}{N} & \dots & \frac{\theta_{1s}}{N} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\theta_{s1}}{N} & \dots & \frac{\theta_{ss}}{N} \end{pmatrix}, \quad m_{\nu\mu} = [Na_{\nu\mu}], \quad \theta_{\nu\mu} = \{Na_{\nu\mu}\}.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\begin{gathered} A = A_N(E_s + A_N^{-1}\Theta_N), \quad A_N = A(E_s - A^{-1}\Theta_N), \\ \|A^{-1}\Theta_N\| \leqslant \frac{s\|A^{-1}\|}{N}, \quad \|A_N^{-1}\Theta_N\| \leqslant \frac{s(s+1)\|A^{-1}\|}{N}, \\ A = (E_s + \Theta_N A_N^{-1})A_N, \quad A_N = (E_s - \Theta_N A^{-1})A, \\ \|\Theta_N A^{-1}\| \leqslant \frac{s\|A^{-1}\|}{N}, \quad \|\Theta_N A_N^{-1}\| \leqslant \frac{s(s+1)\|A^{-1}\|}{N}. \end{gathered}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу неравенства $N > \|A^{-1}\|s$ выполняется оценка $\|A^{-1}\Theta_N\| \leqslant \frac{s\|A^{-1}\|}{N} < 1$, поэтому из леммы 8 вытекает, что матрица $A_N = A(E_s - A^{-1}\Theta_N)$ — невырожденная матрица.

Так как согласно лемме 8 при $N > 2\|A^{-1}\|s$

$$\|E_s - (E_s - A^{-1}\Theta_N)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\Theta_N\|}{1 - \|A^{-1}\Theta_N\|} \leqslant \frac{s\|A^{-1}\|}{N - s\|A^{-1}\|} < 1,$$

то

$$\|(E_s - A^{-1}\Theta_N)^{-1}\| \leqslant \|E_s\| + \|E_s - (E_s - A^{-1}\Theta_N)^{-1}\| \leqslant s + 1.$$

Поэтому

$$\|A_N^{-1}\Theta_N\| \leqslant \|A^{-1}\|\|(E_s - A^{-1}\Theta_N)^{-1}\| \leqslant \frac{s(s+1)\|A^{-1}\|}{N}.$$

Остальные соотношения доказываются аналогично и лемма полностью доказана. □

Доказательство. **[Основной теоремы]** Рассмотрим произвольную решётку $\Lambda \in PR_s$ с базисной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{1,s} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \lambda_{s,1} & \dots & \lambda_{s,s} \end{pmatrix}$$

и базисом $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1,1}, \ldots, \lambda_{1,s}), \ldots, \vec{\lambda}_1 = (\lambda_{s,1}, \ldots, \lambda_{s,s})$, то есть $\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A$. Пусть N — достаточно большое натуральное число, оценки для которого снизу укажем позднее. Рассмотрим фиксированную алгебраическую решётку $\Lambda_0 = \Lambda_0(\vec{\lambda}_{1,0}, \ldots, \vec{\lambda}_{s,0}) \in \mathbb{A}(F_s)$, заданную равенством

$$\Lambda_0(\vec{\lambda}_{1,0}, \ldots, \vec{\lambda}_{s,0}) = \left\{ \vec{x} = \left(\sum_{\nu=1}^{s} \lambda_{\nu,0}^{(1)} m_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{s} \lambda_{\nu,0}^{(s)} m_\nu \right) \middle| m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{5}$$

которой соответствует базисная матрица

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_{1,0}^{(1)} & \ldots & \lambda_{1,0}^{(s)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \lambda_{s,1}^{(1)} & \ldots & \lambda_{s,0}^{(s)} \end{pmatrix}$$

и базис $\vec{\lambda}_{1,0} = (\lambda_{1,0}^{(1)}, \ldots, \lambda_{1,0}^{(s)}), \ldots, \vec{\lambda}_{s,0} = (\lambda_{s,1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{s,0}^{(s)})$, то есть $\Lambda_0 = A_0 \cdot \mathbb{Z}^s$.

Так как базисные матрицы A и A_0 — невырожденные, то найдётся невырожденная матрица

$$M = A \cdot A_0^{-1}, \quad M^{-1} = A_0 \cdot A^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} \end{pmatrix}$$

такая, что $A = M \cdot A_0$, $A_0 = M^{-1} \cdot A$ и решётки связаны равенствами $\Lambda = M \cdot \Lambda_0$, $\Lambda_0 = M^{-1} \cdot \Lambda$.

Определим матрицы M_N и Θ_N из условий

$$M_N = \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{N} & \ldots & \frac{m_{1s}}{N} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{m_{s1}}{N} & \ldots & \frac{m_{ss}}{N} \end{pmatrix}, \quad \Theta_N = \begin{pmatrix} \frac{\theta_{11}}{N} & \ldots & \frac{\theta_{1s}}{N} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\theta_{s1}}{N} & \ldots & \frac{\theta_{ss}}{N} \end{pmatrix}, \quad m_{\nu\mu} = [N a_{\nu\mu}], \quad \theta_{\nu\mu} = \{N a_{\nu\mu}\}$$

и рассмотрим алгебраическую решётку $\Lambda_N = \Lambda_N(\vec{\lambda}_{1,0}, \ldots, \vec{\lambda}_{s,0}) = M_N \cdot \Lambda_0(\vec{\lambda}_{1,0}, \ldots, \vec{\lambda}_{s,0}) \in \mathbb{A}(F_s)$.

Так как $M = M_N + \Theta_N$, то для решёток Λ и Λ_N справедливы соотношения

$$\Lambda = (E_s + \Theta_N M_N^{-1}) \Lambda_N, \quad \Lambda_N = (E_s - \Theta_N M^{-1}) \Lambda.$$

Отсюда в силу леммы 9 следует, что

$$\rho(\Lambda, \Lambda_N) \leqslant \ln \frac{s(s+1)\|A^{-1}\|}{N}.$$

Поэтому, полагая $N > s(s+1)\|A^{-1}\| e^{-\varepsilon}$, получим $\rho(\Lambda, \Lambda_N) \leqslant \varepsilon$, что и доказывает утверждение теоремы. □

4. Заключение

Рассмотрим произвольную решётку $\Lambda \in PR_s$. Согласно Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддееву [3] *решётка Λ и решётка Λ_1 рационально связаны, если $\Lambda_1 = M \cdot \Lambda$, $\Lambda = M^{-1} \cdot \Lambda_1$ и $M \in \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{Q})$.* Множество всех решёток Λ_1 рационально связанных с решёткой Λ обозначим через $\mathfrak{Q}(\Lambda)$.

Дословно повторяя доказательство основной теоремы можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любой решётки $\Lambda \in PR_s$ множество всех решёток рационально связанных с решёткой Λ всюду плотно в PR_s.*

Другими словами: $\mathfrak{Q}(\Lambda)$ всюду плотно в PR_s.

Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ — произвольная точка общего положения, то есть $\alpha_j \neq 0$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Рассмотрим рациональное s-мерное арифметическое пространство $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \subset \subset \mathbb{R}^s$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, которое определяется равенством

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \{(m_1\alpha_1, \ldots, m_s\alpha_s) | \vec{m} = (m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Q}^s\}.$$

Нетрудно видеть, что справедлива следующая теорема

Теорема 3. *Рациональное s-мерное арифметическое пространство $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ всюду плотно в s-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$.*

Именно на этом факте основаны теоремы 1, 2 и 3 из работы [18].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акрамов У. А. Теорема изоляции для форм, отвечающих чисто вещественным алгебраическим полям, // Аналитическая теория чисел и теория функций: 10. Зап. науч. семинара. ЛОМИ. 1990. N 185. С. 5–12.

2. Г. Вейль Алгебраическая теория чисел. М.: Гос. из-во И. Л. 1947. 226 с.

3. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1940. Т. 11. С. 3–340.

4. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

5. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

6. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Мат. заметки. Т. 63, вып. 4. 1998. С. 522–526.

7. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

8. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

9. Реброва И. Ю. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток Тез. докл. III Междунар. конф. // Современные проблемы теории чисел: Тула: Изд-во ТГПУ, 1996. С. 119.

10. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

11. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1999.

12. Скубенко Б. Ф. Теорема изоляции для разложимых форм чисто вещественных алгебраических полей степени $n \geqslant 3$ Аналитическая теория чисел и теория функций. 4. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 112. 1981. С. 167–171.

13. Б. Ф. Скубенко К совместным приближениям алгебраических иррациональностей // Целочисленные решетки и конечные линейные группы, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 116, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1982, С. 142–154; J. Soviet Math., 26:3 (1984), 1922–1930.

14. Скубенко Б. Ф. О произведении n линейных форм от n переменных // Труды МИАН СССР. N 158. 1981. С. 175–179.

15. Б. Ф. Скубенко Циклические множества точек и решеток // Аналитическая теория чисел и теория функций. 8, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 160, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1987, С. 151–158.

16. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных // Аналитическая теория чисел и теория функций. 9. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 168. 1988. С. 125–139.

17. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geqslant 3$ // Модулярные функции и квадратичные формы. 1. Зап. науч. семинара ЛОМИ. N 183. 1990. С. 142–154.

18. Е. В. Триколич, Е. И. Юшина Цепные дроби для квадратических иррациональностей из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ // Чебышевский сб. 2009. Т. 10, вып. 1. С. 77–94.

19. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

20. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

21. Шмелева Т. С. Непрерывность гиперболического параметра решетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 92–100.

22. Т. С. Шмелева О непрерывности гиперболического параметра решеток // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы: материалы VII Международной конференции. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. 2010. С. 202–206.

23. Т. С. Шмелева Приближение решеток // Материалы XII Международной конференции Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, посвященной восьмидесятилетию профессора Виктора Николаевича Латышева. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. С. 311–314.

24. Т. С. Шмелева Приближение решеток и их применение // Материалы XIII Международной конференции Алгебра,теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. С. 384–386.

REFERENCES

1. Akramov, U. A. 1990, “The isolation theorem for forms corresponding to purely real algebraic fields“, *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 10 Zap. nauchn. sem. LOMI*, no. 185, pp. 5–12.

2. Vejl', G. 1947, *Algebraicheskaya teoriya chisel [Algebraic number theory]*, Gosudarstvennoe izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moscow, Russia.

3. Delone, B. N. & Faddeev, D. K. 1940, "Theory of irrationalities of the third degree", *Trudy matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova* (Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics), vol. 11, pp. 3–340.

4. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skij, M. N., Dobrovol'skij, N. M. & Dobrovol'skij, N. N. 2012, "Hyperbolic zeta functions of grids and grids and calculation of optimal coefficients", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

5. Dobrovol'skij, M. N. 2005, *Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i ikh prilozheniya* [Multidimensional number-theoretic grids and grids and their applications], Izdatel'stvo tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. L. N. Tolstogo, Tula, Russia.

6. Dobrovol'skij, N.M., Rebrova, I.YU. & Roshhenya, A.L. 1998, "Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices", *Matematicheskie zametki* (Mathematical Notes), vol. 63, no. 4, pp. 522–526.

7. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.

8. Korobov, N. M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize* [Numerical-numerical methods in approximate analysis], 2nd ed., MTSNMO, Moscow, Russia.

9. Rebrova, I. YU. "The continuity of the hyperbolic zeta function of the lattices", *Tez. dokl. III Mezhdunar. konf. "Sovremennye problemy teorii chisel"* (Abstracts of the report of the III International Conference "Contemporary problems of number theory"), Tula, 1996, p. 119.

10. Rebrova, I. YU. 1998, "The continuity of the generalized hyperbolic zeta lattice function and its analytic continuation", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 99–108.

11. Rebrova, I. YU. 1999, "The lattice space and the functions on it", Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

12. Skubenko, B. F. 1981, "The isolation theorem for decomposable forms of purely real algebraic fields of degree $n > 3$", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij.* 4 Zap. nauchn. sem. LOMI, no.112, pp. 167–171.

13. Skubenko, B. F. 1982, "To joint approximations of algebraic irrationalities", *Tselochislennye reshetki i konechnye linejnye gruppy, Zap. nauchn. sem. LOMI*, pp. 142–154.

14. Skubenko, B. F. 1981, "On the product of n linear forms of n variables", *Trudy MIAN SSSR*, no.158, pp. 175–179.

15. Skubenko, B. F. 1987, "Cyclic sets of points and lattices", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 8 Zap. nauchn. sem. LOMI*, pp. 151–158.

16. Skubenko, B. F. 1988, "The minima of a decomposable cubic form in three variables", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij.* 9 Zap. nauchn. sem. LOMI, no.168, pp. 151–158.

17. Skubenko, B. F. 1990, "Minima of decomposable forms of degree n of n variables for $n > 3$", *Modulyarnye funktsii i kvadratichnye formy. 1 Zap. nauchn. sem. LOMI*, no.183, pp. 142–154.

18. Trikolich, E. V., & Yushina, E. I. 2009, "Chain fractions for quadratic irrationalities from the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 10, no. 1, pp. 77–94.

19. Frolov, K. K. 1976, "Estimates from above of the error of quadrature formulas on function classes", *DAN SSSR*, no.4, pp. 818–821.

20. Frolov, K. K. 1979, "Quadrature formulas on function classes", Ph.D. Thesis, Computing Center of the Russian Academy of Sciences of the USSR, Moscow, Russia.

21. Shmeleva, T. S. 2009, "The continuity of the hyperbolic lattice parameter", *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki*, no.3, pp. 92–100.

22. Shmeleva, T. S. "On the continuity of the hyperbolic parameter of lattices", *Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya, posvyashhennoj pamyati professora Anatoliya Alekseevicha Karatsuby: materialy VII Mezhdunarodnoj konferentsii* (Algebra and Number Theory: Modern Problems and Applications, dedicated to the memory of Professor Anatoly Alekseevich Karatsuba: materials of the VII International Conference), Tula, 2010, pp. 202–206.

23. Shmeleva, T. S. "Approximation of lattices", *Materialy XII Mezhdunarodnoj konferentsii Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya, posvyashhennoj vos'midesyatiletiyu professora Viktora Nikolaevicha Latysheva* (Materials of the XII International Conference Algebra and Number Theory: Contemporary Problems and Applications, dedicated to the eightieth birthday of Professor Viktor Nikolaevich Latyshev), Tula, 2014, pp. 311–314.

24. Shmeleva, T. S. "Approximation of gratings and their application", *Materialy XIII Mezhdunarodnoj konferentsii Algebra,teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy i prilozheniya, posvyashhennoj vos'midesyatipyatiletiyu so dnya rozhdeniya professora Sergeya Sergeevicha Ryshkova* (Materials of the XIII International Conference Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications, dedicated to the eightieth anniversary of the birth of Professor Sergey Sergeevich Ryshkov), Tula, 2015, pp. 384–386.

Оренбургский государственный университет
Тульский государственный университет
Тульский государственный педагогический университет

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-338-346

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

В. Н. Чубариков, М. Л. Шарапова (г. Москва)

Аннотация

В настоящей работе построены эффективные многомерные интерполяционные формулы для периодических функций, точные на классах многочленов Фурье. Эта работа продолжает исследования Н.М.Коробова [5], В.С.Рябенького [11], С.М.Воронина [8] и других учёных по применению теоретико-числового метода в приближённом анализе. Эти авторы число узлов рассматриваемых ими сеток брали равным простому числу в кольце целых рациональных чисел и в кольцах целых алгебраических чисел.

Здесь мы рассматриваем класс строго регулярных периодических функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, имеющих период единица по каждой переменной и разлагающихся в абсолютно сходящийся ряд Фурье (см., например, [15], с.447) вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} c(m_1, \ldots, m_n) e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)},$$

где

$$c(m_1, \ldots, m_n) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n) e^{-2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Далее, выбирая число точек решётки N в виде $N = N_1 \ldots N_n$, где $(N_s, N_t) = 1$ при $s \neq t, 1 \leq s, t \leq n$ и $N_s \asymp N^{1/n}, 1 \leq n$, и используя китайскую теорему об остатках, строим интерполяционный многочлен вида

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{m_n=0}^{N_n-1} \tilde{c}(m_1, \ldots, m_n) e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots m_nx_n)},$$

где

$$c(m_1, \ldots, m_n) = \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^*k_1}{N_1}, \ldots, \frac{M_n^*k_n}{N_n}\right) e^{-2\pi i\left(\frac{M_1^*m_1}{N_1}+\cdots+\frac{M_n^*m_n}{N_n}\right)},$$

причём $N_sM_s = N, M_sM_s^* \equiv 1 \pmod{N_s}$.

Ключевые слова: теоретико-числовой метод в приближённом анализе, точки решётки, метод В.С.Рябенького, интерполяционный многочлен, кольца целых рациональных и целых алгебраических чисел, китайская теорема об остатках.

Библиография: 15 названий.

ON INTERPOLATION OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

V.N.Chubarikov, M.L.Scharapova (Moscow)

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант $\mathcal{N}$ 16-01-00-071

Abstract

In this paper we constructed effective multivariate interpolation formulas for periodic functions, which are the precise on the Fourier polynomial classes. This paper continues investigations by N.M.Korobov [5], V.S.Rjaben'kii [11], S.M.Voronin [8], and others scientists on the application of the number-theoretic methods in numerical analysis. These authors was given the number of knots of a network equals to a prime number in the ring of integer rational numbers and in rings of integer numbers in algebraic numbers.

Here we consider the class of strictly regular periodic functions $f(x_1,\ldots,x_n)$, having the period on of one the each variables, and expanding in the absolute convergent Fourier series (see, for example, [15], p. 447) of the form

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=-\infty}^{\infty}c(m_1,\ldots,m_n)e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)},$$

where

$$c(m_1,\ldots,m_n)=\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 f(x_1,\ldots,x_n)e^{-2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)}\,dx_1\ldots dx_n.$$

Further, we select the number of lattice points N in the form $N=N_1\ldots N_n$, where $(N_s,N_t)=1$ as $s\neq t, 1\leq s,t\leq n$, and $N_s\asymp N^{1/n}, 1\leq n$, and using the Chinesse theorem on remainders, we construct the interpolation polynomial of the form

$$P(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\cdots\sum_{m_n=0}^{N_n-1}\tilde{c}(m_1,\ldots,m_n)e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots m_nx_n)},$$

where

$$c(m_1,\ldots,m_n)=\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{N_n}f\left(\frac{M_1^*k_1}{N_1},\ldots,\frac{M_n^*k_n}{N_n}\right)e^{-2\pi i\left(\frac{M_1^*m_1}{N_1}+\cdots+\frac{M_n^*m_n}{N_n}\right)},$$

moreover $N_sM_s=N, M_sM_s^*\equiv 1 \pmod{N_s}$.

Keywords: the number-theoretic method in the numerical analysis, a lattice points, the V.S.Rjaben'kii method, the interpolation polynomial, rings of the integer rational and the integer algebraic numbers, the Chinesse theorem on remainders.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

В настоящей работе продолжены исследования В.С.Рябенького [11]по применению теоретико-числового метода к задаче интерполяции периодической функции многих переменных тригонометрическим многочленом. Этот многочлен называют интерполяционным, если при возрастании числа узлов интерполяции погрешность, т.е. разность между значением функции и рассматриваемым тригонометрическим многочленом, при каком-либо способе взятия предела стремится к нулю. Следуя Н.М.Коробову [5], в теоретико-числовом методе последовательность N чисел узлов интерполяции пробегала последовательность всех простых чисел. Здесь мы берем эту последовательность в виде

$$N=N_1\ldots N_n, N_r\asymp N^{1/n}, (N_s,N_t)=1, 1\leq r,s,t\leq n, s\neq t,$$

где n — число переменных интерполируемой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Заметим, что условие $N_r\asymp N^{1/n}, 1\leq r\leq n$, обеспечивает “равноправность” переменных $x_1,\ldots,x_n$, а условие $(N_s,N_t)=1, 1\leq s,t\leq n, s\neq t$, имеет арифметический характер и связано с применением китайской теоремы об остатках.

Для большей ясности изложения в качестве примера рассмотрим сначала случай функций одной переменной.

2. Одномерный случай

Пусть $f(x) \in E_1^\alpha, \alpha > 1$, и является периодической функцией, определенной на вещественной оси и имеющей ограниченную вариацию на периоде, равном 1. Тогда она разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье вида

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c(m)e^{2\pi imx}, \quad c(m) = c(m; f) = \int\limits_0^1 f(x)e^{-2\pi imx}\, dx.$$

Далее для любого натурального числа N определим функцию

$$F(x) = F_N(x) = \sum_{N/2<m\le N/2} \tilde{c}(m)e^{2\pi ix}, \quad \tilde{c}(m) = \tilde{c}(m; f) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) e^{-2\pi i\frac{mk}{N}}.$$

Пусть $R(x) = f(x) - F(x)$ погрешность при замене функции $f(x)$ на функцию $F(x)$. Оценим сверху величины $|R(x)|$ и

$$\Delta_2 = \sup_f \int\limits_0^1 |R(x)|^2\, dx,$$

где f принадлежит определённому выше классу функций.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема A. $\Delta_2 \ll N^{1-2\alpha}$.

Доказательство. Выразим коэффициенты $\tilde{c}(m)$ тригонометрического многочлена $F(x)$ через коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Для любых целых k и m имеем

$$c\left(m; e^{2\pi ikx}\right) = \int\limits_0^1 e^{2\pi i(k-m)x}\, dx = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k = m, \\ 0, & \text{если} \quad k \ne m, \end{cases}$$

$$\tilde{c}\left(m; e^{2\pi ikx}\right) = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} e^{2\pi i\frac{(k-m)l}{N}} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k \equiv m \pmod N, \\ 0, & \text{если} \quad k \not\equiv m \pmod N. \end{cases}$$

Таким образом, используя последние соотношения, находим

$$\tilde{c}(m) = \tilde{c}(m; f) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) e^{-2\pi i\frac{km}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c(l)e^{2\pi i\frac{kl}{N}}e^{-2\pi i\frac{km}{N}} =$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{c(l)}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i\frac{k(l-m)}{N}} = \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\equiv m \pmod N}}^{+\infty} c(l).$$

Равенство Ляпунова–Парсеваля даёт

$$\int\limits_0^1 |R(x)|^2\, dx = \sum_{N/2<m\le N/2} |\tilde{c}(m) - c(m)|^2 + \sum_{-N/2\le m} |c(m)|^2 + \sum_{m>N/2} |c(m)|^2.$$

Отсюда, используя предыдущее равенство, получим

$$\int\limits_0^1 |R(x)|^2\, dx = \sum_{-N/2<m\le N/2} \left| \sideset{}{'}\sum_{\substack{l=-\infty \\ l\equiv m \pmod N}}^{\infty} c(l) \right|^2 +$$

$$+\sum_{m\le -N/2}|c(m)|^2+\sum_{m>N/2}|c(m)|^2=R_1+R_2+R_3,$$

где штрих в суммировании означает, что $l\neq m$.

Следовательно,

$$R_1=\sum_{-N/2<m\le N/2}|\sum_{|q|\ge 1}c(Nq+m)|^2\ll\sum_{0\le m\le N/2}\left|\sum_{q\ge 1}\frac{1}{(Nq-m)^\alpha}\right|^2\ll N^{-2\alpha+1},$$

$$R_2+R_3\ll N^{-2\alpha+1}.$$

Теорема доказана.

Теорема Б. *Справедлива оценка*

$$|R(x)|\ll N^{-\alpha+1}.$$

Доказательство. Имеем

$$R(x)=\sum_{-N/2<m\le N/2}(c(m)-\tilde c(m))e^{2\pi ix}+\sum_{m\le -N/2}c(m)e^{2\pi imx}+\sum_{m>N/2}c(m)e^{2\pi imx}.$$

Поскольку

$$\tilde c(m)-c(m)=\sideset{}{'}\sum_{\substack{l=-\infty\\ l\equiv m \pmod N}}^{+\infty}c(l),$$

отсюда находим

$$|R(x)|\le\sum_{|m|\le N/2}|c(m)-\tilde c(m)|+\sum_{|m|\ge N/2}|c(m)|\ll N^{-\alpha+1}.$$

Теорема доказана.

3. Многомерный случай

Пусть функция $f(x_1,\dots,x_n)$, имеющая период 1 по каждой переменной, разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=-\infty}^{\infty}c(m_1,\dots,m_n)e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_nx_n)},\tag{1}$$

причём будем предполагать, что $f\in E_n^\alpha,\alpha>1$, то есть для всякого набора $(m_1,\dots,m_n)\in\mathbf{Z}^n$, справедливо неравенство

$$|c(m_1,\dots,m_n)|\le(\bar m_1\dots\bar m_n)^{-\alpha},\quad \bar m=\max\{1,|m|\},\tag{2}$$

и коэффициенты Фурье определяются равенствами

$$c(m_1,\dots,m_n)=c(\bar m;f)=\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 f(x_1,\dots,x_n)e^{-2\pi i(m_1x_1+\dots+m_nx_n)}\,dx_1\dots dx_n.\tag{3}$$

Пусть, далее, $N=N_1\dots N_n$, причём $N_r\asymp N^{1/n},r=1,\dots,n,(N_s,N_t)=1$ при $s\neq t,1\le s,t\le n$. Наконец, найдем для M_s, определяемого условием $M_sN_s=N$, вычеты

M_s^* из сравнения $M_s\dot{M}_s^* \equiv 1 \pmod{N_s}, 1 \le s \le n$. Из китайской теоремы об остатках любой вычет x по модулю N единственным способом представляется в виде

$$x \equiv M_1 M_1^* x_1 + \dots + M_n M_n^* x_n, \tag{4}$$

где вычеты x_r пробегают все классы вычетов по модулю $N_r, r = 1, \dots, n$.

Пусть $\min\{N_1, \dots, N_n\} = L$. Определим при $|m_1| \le N_1, \dots, |m_n| \le N_n$, набор чисел

$$\tilde{c}(m_1, \dots, m_n) = \tilde{c}(\bar{m}) = \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^* k_1}{N_1}, \dots, \frac{M_n^* k_n}{N_n}\right) \times$$

$$\times e^{-2\pi i\left(\frac{M_1^* m_1 k_1}{N_1} + \dots + \frac{M_n^* m_n k_n}{N_n}\right)}, \tag{5}$$

функцию

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{-N_1/2 < m_1 \le N_1/2} \dots \sum_{-N_n/2 < m_n \le N_n/2} \tilde{c}(m_1, \dots, m_n) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)}. \tag{6}$$

Положим

$$R(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n). \tag{7}$$

и

$$\Delta_2 = \sup_{f \in E_n^\alpha} \int_0^1 \dots \int_0^1 |R(x_1, \dots, x_n)|^2 \, dx_1 \dots dx_n. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть $f \in E_n^\alpha$. Тогда тригонометрический многочлен $F(x_1, \dots, x_n)$, определённый равенством (6), является интерполяционным и справедлива оценка $\Delta_2 \ll N^{2(1-\alpha)/n}$.*

Доказательство. Пользуясь равенством Ляпунова–Парсеваля, находим

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 |R(x_1, \dots, x_n)|^2 \, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \sum_{-N_1/2 < m_1 \le N_1} \dots \sum_{-N_n/2 < m_n \le N_n} |\tilde{c}(m_1, \dots, m_n) - c(m_1, \dots, m_n)|^2 +$$

$$+ \sum_{\substack{m_1 \\ \exists s : |m_s| > L_s}} \dots \sum_{m_n} |c(m_1, \dots, m_n)|^2 .$$

Имеем для коэффициентов Фурье функции $f(\bar{\mathbf{x}})$ и тригонометрического многочлена $F(\bar{\mathbf{x}})$ при $k_1, \dots, k_n \in \mathbf{Z}$ следующие соотношения

$$c(\bar{\mathbf{m}}; e^{2\pi i(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}})}) = \int_0^1 e^{2\pi i(\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{x}})} \, dx = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \bar{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{m}}, \\ 0, & \text{если} \quad \bar{\mathbf{k}} \ne \bar{\mathbf{m}}, \end{cases}$$

$$\tilde{c}(\bar{\mathbf{m}}; e^{2\pi i(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{x}})}) = \frac{1}{N} \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{l_n=0}^{N_n-1} e^{2\pi i\left(\frac{M_1^*(k_l - m_1) l_1}{N_1} + \dots + \frac{M_n^*(k_n - m_n) l_n}{N_n}\right)} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \bar{\mathbf{k}} \equiv \bar{\mathbf{m}} \pmod{\bar{\mathbf{N}}}, \\ 0, & \text{если} \quad \bar{\mathbf{k}} \not\equiv \bar{\mathbf{m}} \pmod{\bar{\mathbf{N}}}, \end{cases}$$

где выражение $\bar{\mathbf{k}} \equiv \bar{\mathbf{m}} \pmod{\bar{\mathbf{N}}}$ означает, что выполняются n сравнений вида $k_s \equiv m_s \pmod{N_s}$, $\quad s = 1, \dots, n$.

Наконец, имеем

$$\tilde{c}(\bar{\mathbf{m}}) = \tilde{c}(\bar{\mathbf{m}}; f) = \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^* k_1}{N_1}, \dots, \frac{M_n^* k_n}{N_n}\right) \exp\left\{-2\pi i \sum_{s=1}^{n} \frac{M_s^* k_s m_s}{N_s}\right\} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} \left(\sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{l_n=-\infty}^{+\infty} c(\bar{\mathbf{l}}) \exp\left\{2\pi i \sum_{s=1}^{n} \frac{M_s^* k_s l_s}{N_s}\right\}\right) \exp\left\{-2\pi i \sum_{s=1}^{n} \frac{M_s^* k_s m_s}{N_s}\right\} =$$

$$= \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{l_n=-\infty}^{N_n} c(\bar{\mathbf{l}}) \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} \exp\left\{2\pi i \sum_{s=1}^{n} \frac{M_s^* k_s (l_s - m_s)}{N_s}\right\} =$$

$$= \sum_{l_1 \equiv m_1 \pmod{N_1}} \cdots \sum_{l_n \equiv m_n \pmod{N_n}} c(l_1, \dots, l_n).$$

Таким образом, получим

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |R(x_1, \dots, x_n)|^2 \, dx_1 \dots dx_n = R_1 + R_2,$$

где

$$R_1 = \sum_{-N_1/2 < m_1 \le N_1/2} \cdots \sum_{-N_n < m_n \le N_n/2} \left| \sum_{\substack{l_1 \equiv m_1 \pmod{N_1} \\ l_1 \ne m_1}} \cdots \sum_{\substack{l_n \equiv m_n \pmod{N_n} \\ l_n \ne m_n}} c(l_1, \dots, l_n) \right|^2,$$

$$R_2 = \sum_{\substack{m_1 \\ \exists s: |m_s| \ge N_s/2}} \cdots \sum_{m_n} |c(m_1, \dots, m_n)|^2.$$

Сначала оценим R_1. Находим

$$R_1 \ll \sum_{-N_1 < m_1 \le N_1/2} \cdots \sum_{-N_n/2 < m_n \le N_n/2} \left| \sum_{q_1=1}^{+\infty} \cdots \sum_{q_n=1}^{+\infty} (\overline{N_1 q_1 + m_1} \dots \overline{N_n q_n + m_n})^{-\alpha} \right|^2,$$

Поскольку при $N_s \ge 1$ и $m_s \ge 0 \quad (s = 1, \dots, n)$

$$\sum_{q_s=1}^{+\infty} (\overline{N_s q_s + m_s})^{-\alpha} \le \frac{1}{(N_s + m_s)^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(N_s x + m_s)^\alpha} \le \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{1}{N_s^\alpha},$$

получим

$$R_1 \le \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^n N^{1-2\alpha}.$$

Теперь оценим R_2. Имеем

$$R_2 \ll \frac{n}{\alpha - 1} N^{2(1-\alpha)/n}.$$

Теорема 2. *Пусть $f \in E_n^\alpha$. Тогда тригонометрический многочлен $F(x_1,\ldots,x_n)$, определённый равенством (6), является интерполяционным и для функции $R(x_1,\ldots,x_n)$, определённой равенством (7), справедлива оценка $R(x_1,\ldots,x_n) \ll N^{(1-\alpha)/n}$.*

Доказательство. По формуле (7) имеем

$$F(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{-N_1/2<m_1\le N_1/2} \cdots \sum_{-N_n/2<m_n\le N_n/2} \tilde c(m_1,\ldots,m_n)e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)},$$

где

$$\tilde c(m_1,\ldots,m_n) = \tilde c(\bar m) = \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^*k_1}{N_1},\ldots,\frac{M_n^*k_n}{N_n}\right)\times$$
$$\times e^{-2\pi i\left(\frac{M_1^*m_1k_1}{N_1}+\cdots+\frac{M_n^*m_nk_n}{N_n}\right)}.$$

Отсюда получим

$$|R(x_1,\ldots,x_n)| \le R_1+R_2,$$

где

$$R_1 = \sum_{-N_1/2<m_1\le N_1/2}\cdots\sum_{-N_n<m_n\le N_n/2}\left|\sum_{\substack{l_1\equiv m_1 \pmod{N_1}\\ l_1\ne m_1}}\cdots\sum_{\substack{l_n\equiv m_n \pmod{N_n}\\ l_n\ne m_n}} c(l_1,\ldots,l_n)\right|,$$

$$R_2 = \sum_{\substack{m_1\\ \exists s:|m_s|\ge N_s/2}}\cdots\sum_{m_n}|c(m_1,\ldots,m_n)|.$$

Наконец, поскольку $f \in E_n^\alpha$, находим

$$R_1 \ll \sum_{-N_1<m_1\le N_1/2}\cdots\sum_{-N_n/2<m_n\le N_n/2}\left(\sum_{q_1=1}^{+\infty}\cdots\sum_{q_n=1}^{+\infty}(\overline{N_1q_1+m_1}\ldots\overline{N_nq_n+m_n})^{-\alpha}\right).$$

Пользуясь оценкой

$$\sum_{q_s=1}^{+\infty}(\overline{N_sq_s+m_s})^{-\alpha} \le \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{N_s^\alpha},$$

получим

$$R_1 \le \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^n N^{1-\alpha}.$$

Теперь оценим R_2. Имеем

$$R_2 \ll \frac{n}{\alpha-1}N^{(1-\alpha)/n}.$$

Теорема доказана.

4. Заключение

Отметим, что в настоящей работе в теоретико-числовом методе взяты простейшие узлы интерполяции в многомерном случае, обеспечивающие интерполяционный характер рассматриваемых формул, поэтому результаты теорем 1 и 2 могут быть улучшены. Естественно, если известны условия "неравноправия" переменных, то изменяя соотвествующие условия порядка, приведенные выше, в этом случае получим интерполяционные формулы, в которых степени интерполяционных тригонометрических многочленов по различным переменным будут отличаться друг от друга.

Другая сторона, связанная с арифметикой количества узлов интерполяции и применением китайской теоремы об остатках, также может быть модифицирована для большей привязки к условию решаемой задачи.

Наконец, последнее замечание касается использования алгебраических полей, более точно, арифметики колец целых чисел в них. Здесь будут продолжены исследования китайских математиков Хуа Ло-кена [6] и Ван Юаня [7], а также развита теория С.М.Воронина [8], продолженная в работах Н.Т.Темиргалиева.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2-е изд., М.: Наука, 1980, 144 с.

2. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях, М.: Гостехиздат, 1950, гл.III.

3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа, М.: Наука, 1986, 744 с.

4. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы: Учеб.пособие., М.: Наука, 1987, 600 с.

5. *Коробов Н. М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе, МЦНМО, 2004, 288 с.

6. *Hua L.-K.* Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.

7. *Wang Y.* Selected Papers. Bejing, 1999, pp. 458.

8. *Воронин С. М.* Избранные труды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006. 480 с.

9. *Архипов Г. И.* Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос.ун-та, 2013. 464 с.

10. *Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A.* Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 c.

11. Рябенький В. С. О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса // ДАН СССР. — 1960. — Т.131, № 5. — С.1025-1027.

12. Чубариков В. Н. Арифметические суммы от значений полинома// Докл. РАН — 2016. — Т.466, № 2. — С.152-153.

13. Чубариков В. Н., Шарапова М. Л. Об одной кубатурной формуле для периодических функций// Вестн. Моск. ун-та. Сер.I, Математика, механика. 2017. № 6. 59-62.

14. Чубариков В. Н., Шарапова М. Л. Об аналоге квадратуры Гаусса для периодических функций// Вестн. кибернетики. 2017. **28**, № 2. 60-65.

15. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов, 4-е изд., испр. — М: Дрофа, 2004. 640 с.

REFERENCES

1. [1]IMV *Vinogradov I. M.* Method of trigonometric sums in Number Theory, 2-nd edition, M.: Nauka, 1980, pp.144.
2. [2]ANK *Krylov A. N.* Lectures on numerical calculations, M.: Gostehizdat, 1950, ch.III.(in Russian).
3. [3]KIB *Babenko K. I.* Founndations of numerical analysis, M.: Nauka, 1986, pp. 744.(in Russian).
4. [4]BGK *Bahvalov N. S., Gidkov N. P., Kobel'kov G. M.* Numerical methods: Text-book, M.: Nauka, 1987, pp. 600.(in Russian).
5. [5]NMK *Korobov N. M.* Number theoretical methods in numerical analysis, MZNMO, 2004, pp. 288.(in Russian).
6. [6]LKH *Hua L.-K.* Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.
7. [7]WY *Wang Y.* Selected Papers. Bejing, 1999, pp. 458.(in Chinesse).
8. [8]SMV *Voronin S. M.* Selected Papers. M.: Publ. N.E.Bauman MGTU, 2006. pp. 480.(in Russian).
9. [9]Ar *Arkhipov G. I.* Selected Papers. Orel: Publ. Or'el State Univ., 2013. pp. 464.(in Russian).
10. [10]ACK *Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A.* Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 c.
11. [11]R Ryaben'kii V. S. On tables and interpolation of functions from some class// DAN SSSR . — 1960. — V.131, № 5. — p.1025-1027.
12. [12]Ch4 Chubarikov V. N. Arithmetical sums from polynomial values// Doklady RAS — 2016. — V.466, № 2. — p.152-153.
13. [13]Ch5 Chubarikov V. N., Scharapova M. L. On a cubature formulae for periodic functions// Bull. Moscow Univ. Ser.I, Math, mech. 2017. № 6. p. 59-62.
14. [14]CS Chubarikov V. N., Scharapova M. L. On analogue of .Gaussian quadrature for periodic functions// Bull. of Cybernetics. 2017. **28**, № 2, p. 60-65.(in Russian).
15. [15] ASC *Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N.* Lectures on mathematical analysis: University text-book, 4-th edition. — M: Drofa, 2004. pp. 640. (in Russian).

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет
Получено 11.12.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-347-350

ПАМЯТИ ДРУГА

А. И. Нижников, В. Н. Чубариков (г. Москва), А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский (г. Тула)

Аннотация

В работе приводятся краткие сведения о безвременно ушедшем Ярославе Андреевиче Ваграменко.

Ключевые слова: теория движения аппаратов, информатизация образования.

Библиография: 3 названия.

IN MEMORY OF A FRIEND

A. I. Nijnikov, V. N. Chubarikov (Moscow), A. R. Esayan, N. M. Dobrovol'skii (Tula)

Abstract

The paper presents brief information about the untimely death of Yaroslav Andreevich, Vagramenko.

Keywords: theory of movement of vehicles, Informatization of education.

Bibliography: 3 titles.

Рис. 34: Ярослав Андреевич Ваграменко (01.01.1936–26.11.2017)

Российская наука обеднела ещё на одного талантливого человека —- ушел из жизни Ваграменко Ярослав Андреевич, оставив на этой земле свои научные труды, свершения в развитии российского образования и остроумные сатирические литературные произведения. Так, в одной из своих притч-басен ещё в 2011 году он писал:

Кончается для путника банально
Дорожная вся эта канитель
Крестом, венком и словом поминальным.
Но разве это — всей затеи цель?

Но можно смело сказать — это не про него! Яркая жизнь Ваграменко Я. А. прожита не зря, и память о нем останется не столько в словах, сколько в реализованных им делах. Поэтому считаем необходимым для всех нас ещё раз вспомнить о его пути и достижениях, и просто вспомнить его как интересного многогранного человека, чтобы в очередной раз понять — каких замечательных людей дает российская земля!

Получив классическое базовое образование, которое до сих пор признается и ценится во всем мире (в 1958 г. он окончил физико-технический факультет Днепропетровского государственного университета) Ярослав Андреевич начинает работать в сфере развития тогда ещё советской космической отрасли. Он трудится над созданием высокозащитных стартовых комплексов и уже в 1964 году в МГТУ им. Н. Э. Баумана защищает кандидатскую диссертацию, содержащую решение актуальных задач газодинамики старта. С 1965 года он становится работником Центрально-научного исследовательского института ракетно-космической техники в г. Королеве, где в 1971–75 гг. возглавляет сначала лабораторию, а затем и головной научный отдел. В это же время он читает курс лекций в МИФИ по теории движения аппаратов с различным аэродинамическим качеством, а в 1980 году получает звание профессора.

Преподавание и образовательная деятельность постепенно захватывают творческую натуру Ваграменко, и в 1983 году он соглашается возглавить кафедру общетехнических дисциплин на Индустриально-педагогическом факультете МОПИ им. Н. К. Крупской. С этим вузом судьба связывает его на значительный период жизни — в 1987 году он становится проректором по научной работе, и следует отметить, что именно под его руководством была развернута разработка банка педагогических данных как современного средства оснащения педагогического труда. Кроме того, примечательно, что по инициативе Ваграменко Я. А. впервые в Советском Союзе и именно в МОПИ на индустриально-педагогическом факультете стали подготавливать и выпускать учителей информатики, первый выпуск которых состоялся в 1988г.

Да, наступали новые времена — реформа школы, перестройка, усиление технологических взглядов на образовательный процесс как понимание того, что новое время требует нового образовательного подхода. В это время Ярослав Андреевич становится Членом Научно-методического совета Министерства просвещения СССР по общетехническим дисциплинам, а уже в 1990г. назначается Директором нового научного учреждения в системе Гособразования СССР.

В 90-е годы компьютер входит в жизнь людей, и не только как средство игр и развлечений — очень скоро профессионалам становится понятно, что настал период информатизации всего социума, а значит, в первую очередь на запросы времени должна была ответить система российского образования. Примером понимания этого становится работа Ваграменко Я. А. "Электронная информационная среда для образования" [1].

Он понимает, что необходим переход в новые реалии на серьёзном научно-методологическом уровне, ведь российская практика математического и технического образования всегда была сильна именно научным подходом. Именно решением задач в этом русле можно расценить создание в России в 1996 году Межрегиональной Академии информатизации образования (АИО) с Президентом Ваграменко Я. А. во главе.

Со свойственным ему неравнодушием ученого и практика он подключается к развитию данного направления научно-практической деятельности в России — и как методолог, и как методист (см., например, его Учебную программу Теория и методика обучения информатики, М., 2000 в соавторстве с академиком Монаховым В. М.)

В 2003-2004 гг. Ярослав Андреевич становится председателем Научно-технического Совета Программы развития открытого образования Минобразования России, а также в качестве главного редактора возглавляет журнала «Педагогическая информатика». Заботясь о развитии потенциала российского образования в сфере информатизации, он является Председателем Совета по защите докторских диссертаций Д.212.136.02 по специальностям «Теория и методика преподавания информатики» и «Теория и методика преподавания математики». Этот значительный период профессиональной деятельности (вплоть до 2010г.) связан уже с МГОПУ им М. А. Шолохова — где в разное время, начиная с 1991г. Ваграменко возглавляет кафедру, а затем и вошедший в состав вуза в 2000г. Институт информатизации образования (ИНИНФО)

В это же время выходят его труды: «Педагогический виртуальный университет: основные задачи, принципы построения, структуры информационных ресурсов» (соавтор Зобов В. К.) [2], «Информатизация как направление развития образования» // «Современные проблемы преподавания математики и информатики: материалы международ. науч. конф.; посвященной 100-летию академика С. М. Никольского» (Москва, 4–8 мая, 2005 год). Секция «Проблемы преподавания информатики высшей и средней школы» [3]. Так, со свойственной ему прозорливостью ученого, он предвосхищает наступление поры дистанционного обучения и возможностей онлайн образования.

Но наши воспоминания о Ярославе Андреевиче были бы не полными без освещения ещё одной грани его одаренности, отмеченной не меньше, чем статус Члена Международного сообщества писательских союзов. Конечно, имеются в виду его любимые стихотворные басни, байки и притчи. Всегда злободневные, актуальные, остроумные и сатирически точные, они стали ярким воплощением содержания нашего российского времени с его фарсами, трагедиями, но и несомненными новациями и победами.

Для каждого случая как автор он находил подходяще точные слова и образы, позволяющие лучше понять и его самого. Несомненно, у него сложился свой поэтический стиль, а сам факт того, что «технарь» и математик замечательно реализовался на литературном поприще — ещё один аргумент в пользу надуманности существования вечного спора «физиков и лириков». Хочется, чтобы таким запомнили мы Ваграменко Ярослава Андреевича — ученого, педагога и поэта-сатирика!

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ваграменко Я. А. Электронная информационная среда для образования // Педагогика. 1994. №3. С. 28–31.

2. Я. А. Ваграменко, Б. И. Зобов, А. П. Осипов Педагогический виртуальный университет: основные задачи, принципы построения, структура информационных ресурсов // Педагогическая информатика. 2002. № 1. С. 18–25.

3. Я. А. Ваграменко Информатизация как направление развитие образования // Современные проблемы преподавания математики и информатики: материалы международ. науч. конф.; посвященной 100-летию академика С.М. Никольского (Москва, 4–8 мая, 2005 год). Секция «Проблемы преподавания информатики высшей и средней школы». М., 2005.

REFERENCES

1. Vagramenko, J. A., 1994, "Electronic information environment for education" , Pedagogy. No. 3. P. 28–31.

2. J. A. Vagramenko, B. I. Zobov, A. P. Osipov, 2002, "Pedagogical virtual University: the main objectives, principles, structure information resources" Pedagogical Informatics. No. 1. P. 18–25.

3. J. A. Vagramenko, 2005, "Information as the direction of the development of education" Modern problems of teaching mathematics and Informatics: proceedings of the international. science. Conf.; dedicated to the 100th anniversary of academician S. M. Nikolsky (Moscow, may 4–8, 2005). Section "Problems of teaching science in high and secondary schools" . M.

Московский педагогический государственный университет
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Механико-математический факультет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

Получено 11.12.2017