ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 4 раза в год

Свидетельство о регистрации
СМИ: ПИ № ФС77-47855
ISSN 2226-8383

Том XVIII

Выпуск 3 (63)

К ЮБИЛЕЮ

ВЛАДИМИРА АНАТОЛЬЕВИЧА ЛЕВИНА

Тула
2017

Учредитель: ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026, г. Тула, пр. Ленина, 125, каб. 310

Тел: +79065327314, 8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL: http://www.chebsbornik.ru

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др.
Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Выпуск осуществлен при финансовой поддержке РФФИ, грант 15-01-01540а.

Журнал выходит под эгидой Министерства образования и науки Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор
В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственный секретарь
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула), А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

В. А. Артамонов (Россия, г. Москва)
В. Н. Безверхний (Россия, г. Тула)
В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)
М. М. Глухов (Россия, г. Москва)
Е. С. Голод (Россия, г. Москва)
С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)
В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)
А. Р. Есаян (Россия, г. Тула)
А. М. Зубков (Россия, г. Москва)
В. И. Иванов (Россия, г. Тула)
В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)
В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
М. А. Королёв (Россия, г. Москва)
В. Н. Латышев (Россия, г. Москва)
С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)
Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
А. А. Фомин (Россия, г. Москва)
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)
В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)
А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)
З. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)

Председатель редакционного совета номера:

В. А. Левин (Россия, г. Москва)

Редакционный совет номера:

И. Г. Горячева (Россия, г. Москва)
А. Г. Куликовский (Россия, г. Москва)
В. П. Матвиенко (Россия, г. Пермь)
Б. Н. Четверушкин (Россия, г. Москва)

Данный выпуск журнала посвящен юбилею профессора Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Почетного работника высшего профессионального образования РФ, Заслуженного деятеля науки РФ Владимира Анатольевича Левина.



Владимир Анатольевич Левин

СОДЕРЖАНИЕ

Том 18 Выпуск 3

В. А. Левин, В. В. Лохин, Е. М. Морозов, В. Н. Чубариков К юбилею профессора Московского университета Владимира Анатольевича Левина 10

С. М. Абрамов, С. А. Амелькин, Л. В. Клюев, К. Ю. Крапивин, Ю. А. Ножницкий, А. Н. Серветник, А. А. Чичковский Использование программы Фидесис для моделирования развития больших пластических деформаций во вращающемся диске 15

А. А. Аксёнов, С. В. Жлуктов, Э. Е. Сон, А. А. Токарь, В. С. Карпенко Решение задач взаимодействия жидкости и конструкции с использованием программных комплексов Flowvision И CAE Fidesys 28

Ю. А. Алхименков, И. О. Баюк, С. А. Тихоцкий Влияние пространственного взаимодействия включений на эффективный тензор упругости поровотрещиноватых сред 44

А. Х. Ахунова, Р. Р. Мулюков, Р. В. Сафиуллин Конечноэлементное моделирование процессов сверхпластической формовки 55

А. А. Барях, Н. А. Самоделкина Об одном критерии прочности горных пород 72

И. М. Безмозгий, О. И. Казакова, Р. М. Магжанов, А. А. Смердов, А. Г. Чернявский, А. Г. Чернягин Результаты тестирования и оценка возможности построения системы специализированных решений для прочностного анализа на базе программного комплекса Фидесис 88

С. В. Белых, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Н. Прокудин Об учете вязких свойств материалов в теории больших упругопластических деформаций 109

В. Г. Бойков, И. В. Гаганов, Ф. Р. Файзуллин, А. А. Юдаков Моделирование движения механической системы, состоящей из деформируемых упругих тел, путём интеграции двух пакетов: Euler и Fidesys 131

А. В. Вершинин, Д. И. Сабитов, С. Ю. Ишбулатов, А. В. Мясников Моделирование гидрогеомеханических пластовых процессов путем внешнего сопряжения специализированных вычислительных пакетов и универсальной CAE Fidesys 154

В. В. Воеводин Параллелизм в сложных программных комплексах (почему сложно создавать эффективные прикладные пакеты) 187

Д. В. Георгиевский Линеаризация тензорно нелинейных определяющих соотношений в задачах устойчивости течений 201

В. И. Горбачёв Интегральные формулы решений основных линейных дифференциальных уравнений математической физики с переменными коэффициентами 209

Ф. В. Григорьев, И. В. Капырин, Ю. В. Василевский Моделирование тепловой конвекции в пористых средах с учетом объемного тепловыделения в коде GERA 234

К. М. Зингерман, Л. М. Зубов Точные решения задач теории многократного наложения больших деформаций для тел, образованных последовательным соединением деформированных частей 254

Зифенг Юань, Джейкоб Фиш Многомасштабное моделирование пониженного порядка для исследования деградации композиционных материалов под действием влаги 279

Д. А. Индейцев, Ю. А. Мочалова Диффузия примеси в материале под действием вибрационных нагрузок 290

Г. М. Кобельков, А. Г. Соколов Об одной неявной разностной схеме для уравнений баротропного газа 304

Д. А. Коновалов, М. Я. Яковлев О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью CAE FIDESYS 316

А. М. Кривцов, А. С. Мурачёв, Д. В. Цветков Нестационарные термодиффузионные процессы в конечном одномерном кристалле 330

С. Э. Лапин, В. Б. Писецкий К разработке геоинформационной панели безопасности подземных горных работ на основе связанных решений по прогнозу развития напряженного состояния массива горных пород и газовых потоков в рамках пакета прочностного анализа ФИДЕСИС 350

В. И. Левитас, М. Джаванбакхт Подход фазового поля к взаимодействию между фазовыми переходами и пластичностью на наноразмерном уровне при больших деформациях 363

В. М. Маркочев, М. И. Алымов О теории хрупкого разрушения Я. Френкеля и А. Гриффитса 377

Н. А. Махутов, М. М. Гаденин, Д. О. Резников, Д. А. Неганов Анализ напряженно-деформированных и предельных состояний в экстремально нагруженных зонах машин и конструкций 390

Е. М. Морозов Рост коротких трещин при циклическом нагружении. О реализации в пакете Фидесис. 413

И. Б. Петров Вычислительные проблемы моделирования природных и индустриальных процессов в Арктической зоне Российской Федерации 423

С. Г. Псахье, А. Ю. Смолин, А. И. Дмитриев, Е. В. Шилько, С. Ю. Коростелев Метод подвижных клеточных автоматов как направление дискретной вычислительной механики 439

А. С. Савиных, Г. В. Гаркушин, Г. И. Канель, С. В. Разоренов Затвердевание воды при динамическом сжатии и его влияние на динамику ударных волн 461

А. Б. Фрейдин, Л. Л. Шарипова, Н. Ф. Морозов О блокирующих деформациях в механохимии фронтов химических реакций 469

С. Л. Чернышев, М. Ч. Зиченков, Ф. З. Ишмуратов, В. В. Чедрик Тенденции развития вычислительной механики для прочностного проектирования конструкций ЛА 482

С. В. Шешенин Модуль механики композитов для пакета Fydesis 500

В. А. Левин Теория многократного наложения больших деформаций, развитие для решения междисциплинарных задач. Пути ее реализации в пакете Фидесис для проведения прочностного анализа в новых отраслях промышленности 518

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ 538

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS 547

РЕДКОЛЛЕГИЯ 555

THE EDITORIAL BOARD 559

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ НОМЕРА 563

THE EDITORIAL COUNCIL ISSUE 564

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ 565

TABLE OF CONTENTS 575

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

К ЮБИЛЕЮ ПРОФЕССОРА МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ВЛАДИМИРА АНАТОЛЬЕВИЧА ЛЕВИНА

В. А. Левин[1], В. В. Лохин[2], Е. М. Морозов[3], В. Н. Чубариков[4]
(г. Москва)

ANNIVERSARY OF THE PROFESSOR OF THE MOSCOW UNIVERSITY OF VLADIMIR ANATOLYEVICH LEVIN

V. A. Levin, V. V. Lohin, E. M. Morozov, V. N. Chubarikov
(Moscow)

Профессор кафедры «Вычислительная механика» механико-математического факультета Московского университета, «Почетный работник Высшего профессионального образования РФ», «Заслуженный деятель науки РФ» В.А. Левин – активно, упорно и плодотворно работающий ученый. Он имеет существенные результаты как в области фундаментальной, так и в области прикладной науки.

В фундаментальной науке В. А. Левин – известный специалист в области задач механики деформированного твердого тела, в которых необходимо учитывать наличие в теле больших деформаций и описывать их перераспределение в процессе нагружения. Им создана и детально разработана теория многократного наложения больших деформаций.

В области прикладной науки основные результаты В. А. Левина связаны с промышленной реализацией его результатов в фундаментальной науке и с разработкой промышленного программного обеспечения для инженерного прочностного анализа.

В. А. Левин – ключевой сооснователь и основной научный консультант инжиниринговой компании Фидесис. Компания Фидесис – резидент Научного парка МГУ им. М. В. Ломоносова, участник проекта Сколково. Компания разработала, развивает и внедряет в промышленность первый отечественный промышленный полнофункциональный кросплатформенный пакет

[1]Левин Владимир Алексеевич, академик Российской академии наук, заведующий кафедрой вычислительной механики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, levin@imec.msu.ru

[2]Lokhin Valery Viktorovich, старший научный сотрудник Института механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

[3]Морозов Евгений Михайлович, профессор кафедры физики прочности Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», evgeny.morozof@gmail.com

[4]Чубариков Владимир Николаевич, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, chubarik2009@live.ru

для прочностного инженерного анализа нового поколения Фидесис. Учитывая востребованность в нашей стране пакета Фидесис, по инициативе и под научно-техническим руководством В.А. Левина создан облачный сервис для мирового рынка, ориентированный на массового пользователя.

Созданная и детально проработанная В. А. Левиным теория многократного наложения больших деформаций позволила рассмотреть при больших деформациях новые классы статических и динамических задач, в которых дискретно (скачкообразно) или непрерывно в процессе нагружения изменяются границы, включая связность области, занимаемой телом, граничные условия, свойства части материала тела. Разработанная теория позволяет, в частности, при больших деформациях описывать процесс нагружения, в котором изменяется масса тела путем удаления или добавления его частей из того же или иного материала.

Теория многократного наложения больших деформаций создавалась и развивалась под патронатом академика Л. И. Седова, представлявшего статьи В. А. Левина в журнал «Доклады Академии Наук СССР» и «Доклады РАН». Академик Л. И. Седов также написал крайне ёмкое, указывающее место этой теории в механике деформируемого твердого тела и задающее вектор дальнейшего ее развития предисловие к первой монографии В. А. Левина в данном направлении.

Для читателей может быть интересен следующий краткий диалог академика Л. И. Седова с В. А. Левиным, состоявшийся дома у Леонида Ивановича в 1996 г. (по воспоминаниям В. В. Лохина).

Л. И. Седов «У Вас есть научные враги?»

В. А. Левин «Слава Богу, Леонид Иванович, думаю, что нет»

Л. И. Седов «Плохо. Очень плохо. С учетом Ваших результатов врагов уже давно пора иметь. Бороться с ними. Воевать. И лучший метод – внедрять результаты в практику, в производство».

На наш взгляд, это очень глубокая мысль Леонида Ивановича, позволяющая любому ученому, как адекватно определить уровень своих научных результатов (заменив словосочетание « научный враг» на словосочетание «последовательный критик»), так и оценить их правильность. На наш взгляд, В. А. Левин достаточно четко выполняет это указание академика Л. И. Седова.

На основе теории многократного наложения больших деформаций Владимиром Анатольевичом Левиным в ряде случаев совместно со своими учениками и коллегами получены следующие результаты в области фундаментальной науки:

— основной результат в области теории прочности при конечных деформациях – это модель развития дефекта в теле с конечными деформациями с учетом образования и эволюции зон предразрушения, впервые позволившая учесть перераспределение конечных деформаций при развитии дефекта. Предложены варианты нелокального критерия прочности при конечных деформациях. Сформулированная модель позволила описать вязкий рост трещин не нулевого раскрытия при конечных деформациях с учетом их пере-

распределения;

— модифицирована на случай перераспределения больших деформаций классическая модель твердотельного фазового перехода под действием механических напряжений, описывающая, в частности, образование устойчивых наноструктур; а также модель изменения механических характеристик полимера при нагружении;

— сформулирована при больших деформациях модель для описания нового класса задач о напряженно-деформированном состоянии в телах с концентраторами напряжений и решены двух- и трехмерные задачи о принудительном образовании и росте (или уменьшении) полостей и включений в нагруженном теле с конечными деформациями, включая задачи, когда форма полости, образованной в нагруженном теле, и форма самого тела известна в конечном состоянии (конфигурации); рассмотрены задачи о прохождении волны по телу с изменяющимися свойствами.

— разработана методика оценки эффективных механических характеристик пористых материалов при конечных деформациях и их перераспределении, а также методика оценки эффективных механических характеристик слоисто-волокнистых и тканых композитов, армированных эластомеров.

— получены точные решения ряда задач теории упругости при больших деформациях и их перераспределении, включая задачи о последовательном соединении предварительно нагруженных частей тела: задачи об изгибе бруса (в том числе для сред Коссера), образованного путем соединения нескольких предварительно сжатых или растянутых слоев, включая случай наличия в слоях распределенных дислокаций; задачи о кручении составного стержня с предварительно деформированным включением; обобщенной задачи Ламе-Гадолина.

Результаты опубликованы в 310 работах, включая 8 монографий. Владимир Анатольевич Левин – ключевой автор и научный редактор 5-ти томного цикла монографий «Нелинейная вычислительная механика прочности» (Москва, Физматлит, 125 п.л.). Вышли первые 4 тома. Предисловие к циклу монографий написал академик Г. И. Марчук. Издание осуществлено по рекомендации Бюро Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук.

Основной и ключевой результат В. А. Левина в области прикладной науки – созданный под его научно-техническим руководством промышленный пакет для прочностного анализа Фидесис. Этот пакет делает достаточно большой сегмент рынка прочностных расчетов в России, как минимум, независимым от пакетов зарубежных производителей, превосходит их для некоторых случаев для наукоемких задач по точности и производительности. Для случаев, связанных с реализацией теории многократного наложения больших деформаций, пакет станет уникальным на мировом рынке, позволяющим проводить высококачественные расчеты для некоторых наукоемких типов задач промышленности. К таким задачам относятся: прочностной анализ изделий, производимых с использованием аддитивных технологий; моделирование при создании новых материалов (включая «умные» материалы,

материалы-конструкции, метаматериалы) и прочностной анализ элементов конструкций из них; моделирование поведения конструкций и сооружений при закритических сценариях нагружения.

По инициативе В. А. Левина и его учеников в пакете Фидесис впервые в промышленном пакете наряду с методом конечного элемента реализован метод спектрального элемента, что дает значительные преимущества по точности и быстродействию перед имеющимися пакетами на мировом рынке. Например, инженер-прочнист при уточняющих расчетах может не перестраивать расчетную сетку (а это экономит до 40% времени при таких расчетах).

Пакет Фидесис включен в Единый реестр российского программного обеспечения, интегрирован с мировыми и российскими системами для инженерного проектирования (CAD-системами). Пакет Фидесис используется как крупными предприятиями различных отраслей промышленности, такими как «Севмаш», «Малахит», ЦИАМ им. П. И. Баранова, «Красная звезда», «Щекиноазот», НИИ «Аргон», НТЦ «Газпромнефть», «ВНИМИ», «Гипроникель» (стуктура «Норникиль»), так и малыми и средними проектными и сервисными предприятиями, включая предприятия горнодобывающей и нефтегазовой отраслей.

Промышленный пакет Фидесис используется в учебном процессе и научно-исследовательской деятельности профильными ВУЗами, включая МГУ им. М. В. Ломоносова, МГТУ им. Н. Э. Баумана, «СПб Горный университет», НИЯУ «МИФИ», НИТУ «МИСиС», Сколковским институтом науки и технологии, ВолГТУ, ИжГУ, НовГТУ ТПГУ, ТверГУ; и для решения фундаментальных задач – ИМАШ РАН им. Благонравова, ИНГГ СО РАН им. А. А. Трофимука. Пакет прошел промышленное тестирование на ряде предприятий ВПК, атомной, космической отраслей (например, РКК «Энергия», ЦАГИ).

На базе пакета Фидесис (расчетных ядер) по инициативе и под научно-техническим руководством В. А. Левина разрабатываются специализированные тиражируемые отраслевые решения (СТОР), уже есть их законченные промышленные реализации (например, СТОР «Геомеханика» для НТЦ «Газпромнефть»). В г. Тула создан совместно с ТПГУ им. Л. Н. Толстого Инжиниринговый центр «Цифровые средства производства» для разработки СТОР.

Полученные научно-технические результаты В. А. Левин внедряет в учебный процесс, дополняя чтение классических курсов курсами, связанными с созданием «цифровых средств производства» для прочностного инженерного анализа. Им подготовлен с соавторами 3-х томный учебник «Цифровые средства производства для прочностного инженерного анализа».

В. А. Левин – выпускник спец. школы– интерната №18 ФМШ при МГУ (сейчас СУНЦ (факультет) — школа-интернат имени А. Н. Колмогорова МГУ имени М. В. Ломоносова). Он один из инициаторов создания и один из учредителей клуба выпускников ФМШ при МГУ. В. А. Левин постоянно и старательно стремится привлечь выпускников СУНЦ на механико-математический факультет Московского университета, а после окончания

сохранить в науке в нашей стране, в том числе, привлекая их и для развития пакета Фидесис.

Учитывая, что юбиляр отец четырех детей и дед внука и внучки, авторы желают ему долгой плодотворной активной научной работы, продуктивной педагогической деятельности и радостей в личной жизни.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 519.6, 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-15-27

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММЫ ФИДЕСИС ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ БОЛЬШИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

С. М. Абрамов[1], С. А. Амелькин[2], Л. В. Клюев[3], К. Ю. Крапивин[4], Ю. А. Ножницкий[5], А. Н. Серветник[6], А. А. Чичковский[7] (Москва)

Аннотация

В статье приводится конечно-элементный анализ локализации пластических деформаций в области разрушения модельного диска при вращении. При определенной угловой скорости вращения диска экспериментально замечается «утяжка». Данный эффект возникает при потери материальной устойчивости, является аналогом известного образования «шейки» при растяжении образцов. В силу конечности наблюдаемых экспериментальных перемещений и для обнаружения эффекта «утяжки» в численном эксперименте уравнения равновесия интегрируются с учетом конечности деформаций. Модельный расчет проведен в квазистатической постановке с пошаговым увеличением частоты вращения. Пластическое поведение металлического сплава материала диска описывается согласно предельной поверхности Губера-Мизеса.

[1]Абрамов Сергей Михайлович, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН, sergey.a.amelkin@gmail.com

[2]Амелькин С. А., руководитель исследовательского центра системного анализа Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН, sergey.a.amelkin@gmail.com

[3]Клюев Леонид Владимирович, генеральный директор ООО ИММЕРС, l.klyuev@immers.ru

[4]Крапивин Кирилл Юрьевич, ведущий программист-алгоритмист ООО Фидесис, krapivin@saldlab.com

[5]Ножницкий Юрий Александрович, заместитель генерального директора Государственного научного центра Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный институт авиационного моторостроения имени П. И. Баранова» — начальник отделения «Динамика и прочность авиационных двигателей», nozhnitsky@ciam.ru

[6]Серветник Антон Николаевич, начальник сектора Государственного научного центра Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный институт авиационного моторостроения имени П. И. Баранова», servetnik@ciam.ru

[7]Чичковский А. А., директор по развитию ООО ИММЕРС, chaa14@gmail.com

Материальные параметры, используемые в расчете определены из экспериментальной кривой растяжения образца. Определяющие упруго-пластические соотношения записаны в конечных деформациях с мультипликативной декомпозицией деформационного градиента на упругую и пластическую компоненты. При полностью пластическом деформировании металлов в силу постоянства первого инварианта пластических деформаций процесс деформирования близок к изохорному. В таких случаях линейные изопараметрические конечные элементы проявляют эффект «объемного локинга», искажающий численный результат. В силу этого в вычислениях используем двадцати-узловые объемные конечные элементы второго порядка, которые указанной особенностью не обладают Вычисления проведены на аппаратно — программном комплексе ИММЕРС — Фидесис. Исследована энерго- и шумо- эффективность кластера в распределенных вычислениях. В заключении статьи приводятся сравнение численных результатов с экспериментальными данными и уровень энерго-эффективности кластера.

Ключевые слова: конечно-элементный анализ, мультипликативная пластичность, конечные деформации, высокопроизводительный вычислительный кластер.

Библиография: 18 названий.

MODELING THE DEVELOPMENT OF LARGE PLASTIC DEFORMATIONS IN A ROTATING DISK IN THE FIDESYS PROGRAM

S. M. Abramov, S. A. Amel'kin, L. V. Kljuev, K. Ju. Krapivin, Ju. A. Nozhnickij, A. N. Servetnik , A. A. Chichkovskij (Moscow)

Abstract

The paper presents a finite element analysis of the localization of plastic deformations in the region of fracture of the model disk during rotation. At a certain angular velocity of rotation of the disk, an "ejection"is observed experimentally. This effect occurs when the material stability is lost, is analogous to the known "necking"in the specimen tension. In view of the finiteness of the observed experimental displacements and for the detection of the "tightening"effect in a numerical experiment, the equilibrium equations are integrated taking into account the finite deformations. The model calculation was carried out in a quasi-static setting with a step-by-step increase in the rotational speed. The plastic behavior of the metal alloy of the disk material is described according to the Huber-Mises limit surface. The material parameters used in the calculation are determined from the experimental tension curve of the sample. Elasto-plastic governing relations are used in finite deformations with a multiplicative decomposition of the deformation gradient into the elastic and plastic components. In fully plastic deformation of metals, due to the constancy of the first invariant of plastic deformations, the process of

deformation is close to isochoric. In such cases, linear isoparametric finite elements show the effect of "volumetric locking which distorts the numerical result. Therefore, in calculations we use twenty-node volume finite elements of the second order, which have no specific feature. The calculations were carried out on the IMERS-Fidesis hardware-software complex. The energy and noise efficiency of a cluster in distributed computations is studied. The article concludes by comparing the numerical results with the experimental data and the energy efficiency level of the cluster.

Keywords: finite-element analysis, multiplicative plasticity, finite strains, HPC cluster.

Bibliography: 18 titles.

1. Введение

Определение разрушающих частот вращения и остаточных удлинений дисков газотурбинных двигателей (ГТД) является обязательным требованием при их проектировании и сертификации [1]. С этой целью обычно проводят разгонные испытания дисков или роторов на специальных установках [2]. Задача замены части испытаний расчетом на основе математической модели является актуальной в связи с необходимостью сокращения финансовых и временных затрат на испытания.

В последние годы при активном развитии численных методов, в частности метода конечных элементов [11, 12], стало возможным исследовать несущую способность дисков сложной конфигурации, использовать 3D расчетные схемы совместно с теорией пластического течения [3, 4]. Основной идеей моделирования является квазистатический пошаговый расчет диска при увеличении внешней нагрузки на расчетную модель. Для большинства конструкционных сплавов, используемых при изготовлении дисков ГТД, данный процесс сопровождается развитием больших пластических деформаций вплоть до разрушения.

В данной работе на основании использования промышленной системы прочностного инженерного анализа CAE Fidesys [9, 13, 16, 17] выполнено моделирование процесса раскрутки модельного диска под действием постепенно увеличивающейся центробежной нагрузки с учетом физической и геометрической нелинейностей [14, 15]. Для проверки работоспособности модели выполнено сопоставление расчетных удлинений наружного диаметра модельного диска с экспериментальными данными.

Задача решена на высокопроизводительном вычислительном кластере Иммерс [10] на основе системы погружного жидкостного охлаждения, позволяющей повысить плотность установки вычислительных узлов, существенно снизить уровень шума работающего кластера, а также обеспечить мобильность решения.

2. Постановка задачи

Математическая постановка задача включает в себя систему уравнений равновесия:

$$\mathrm{div}\sigma + f = 0$$

Запишем уравнения равновесия в слабой формулировке. В условиях конечности деформаций они выглядят так:

$$K_T du = f - \int_\omega B^T \sigma d\omega$$

где

$K_T = \int_\omega B_a^T D_T B_b d\omega + \int_\omega N_{a,i}\sigma_{ij}N_{b,j}d\omega$ — касательная матрица жесткости,

$f = \int_\omega N_a^T \varrho b d\omega + \oint_\gamma N_a t d\gamma$ — вектор внешних сил.

Полученная система нелинейных уравнений решается методом Ньютона-Рафсона [11, 12].

Для связи напряжений с деформациями используются гиперупругопластические определяющие соотношения, где деформационный градиент записывается в виде мультипликационной декомпозиции упругой и пластической компонент, $F = F^E e F^p$. Неогуковский материал с разделением на объемное изменение и сдвиг:

$$\tau = \frac{K}{2} J^e \left(J^e - \frac{1}{J^e} \right) + \mu dev[\bar{b}^e]$$

где $K,\ \mu$ — упругие постоянные,

$\bar{b}^e = J^{e^{-\frac{2}{3}}} \bar{b}^e$,

$\bar{b}^e = F^e F^{e^T} = FC^{p-1}F^T$ — правый тензор упругих деформаций Коши-Грина,

$C^p = F^{p^T} F^p$ — левый тензор пластических деформаций Коши-Грина,

$J^e = det\,[F^e]$.

Используется классическое условие текучести Губера - Мизеса, записанное в терминах напряжений Кирхгоффа:

$$f_y = ||dev[\tau]|| - sqrt\frac{2}{3}\left(h(\alpha) + \sigma_y\right) \geqslant 0$$

с мультилинейной функцией изотропного упрочнения

$$h(\alpha) = \sum_k E_{T_k} \Delta\alpha_k.$$

Замыкающими уравнениями являются условия Куна-Таккера, из которых определяется множитель совместности α:

$$f_y \leqslant 0, \dot{\alpha} \geqslant 0, \dot{\alpha} f_y(\alpha) = 0.$$

Тангенциальные модули E_T определяются непосредственно из истинной диаграммы деформирования.

Обновление напряжений на каждом временном шаге также как и для "малых деформаций" осуществляется по алгоритму "радиального возврата" [8]:

$\dot{C}^{p^{-1}} = \dot{\alpha}\frac{2}{3}tr(\bar{b}^e)F^{-1}nF,\ n = \frac{dev[\tau]}{||dev[\tau]||}$ — ассоциированный с условием текучести закон течения,

$dev[\tau_{n+1}] = dev[\tau^*_{n+1}] - 2\mu\Delta\gamma n,$

$\bar{\mu} = \bar{I}^e_{n+1},\ \bar{I}^e_{n+1} = \frac{1}{3}tr\left[\bar{b}^{e^*}_{n+1}\right],$

$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma.$

Компоненты линеаризованной тангенциальной матрицы $D^{ep}_T = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}$, связанные с алгоритмом «радиального возврата» вычисляются на каждой итерации, что обеспечивает квадратичную сходимость.

Используются 20-ти узловые гексаэдральные элементы 2-го порядка серендипового семейства. Для них функции формы элемента [12] записываются следующим образом:

$N = \frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta-2)$ — в вершинах

$N = \frac{1}{8}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta),$

$N = \frac{1}{8}(1-\eta^2)(1+\xi_i\xi)(1+\zeta_i\zeta),$

$N = \frac{1}{8}(1-\zeta^2)(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$ — в центрах ребер.

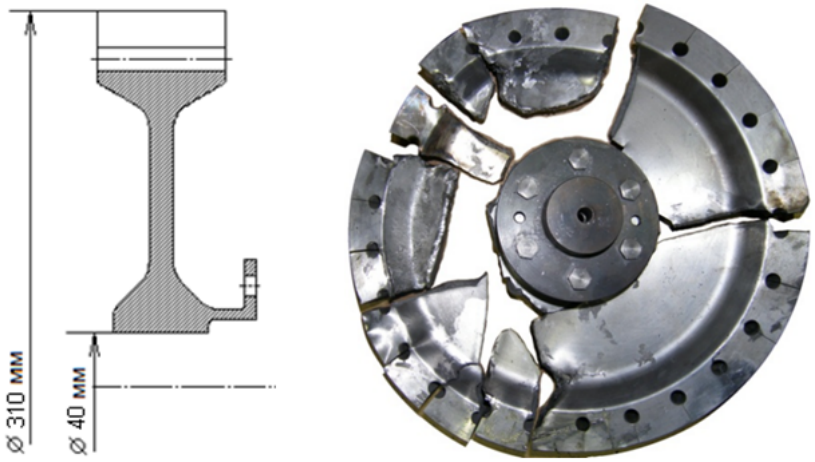
3. Объекты исследования и расчетная модель

Объектами исследования являлись две заготовки диска, отрезанные от прутка диаметром 330 мм из стали ЭИ961-ш. Из первой заготовки был изготовлен модельный диск для разгонных испытаний (рисунок 1а), а из второй – десять цилиндрических образцов для испытаний на разрыв для построения функции упрочнения.

Разгонные испытания диска проводились при нормальной температуре в один этап до разрушения на фрагменты. В процессе проведения испытания выполнялись записи частоты вращения и удлинения наружного диаметра диска по методу, описанному в работах [2, 5]. Объект разрушился при частоте вращения 24282 об/мин, при этом удлинение наружного диаметра диска в момент разрушения составило 4,4 мм. На рисунке 1б) показан разрушившийся модельный диск. Первичное разрушение произошло по цилиндрическому сечению на радиусе R=55 мм.

Оценка несущей способности диска по теории предельного равновесия [6] показала, что разрушение диска наступает в цилиндрическом сечении на ра-

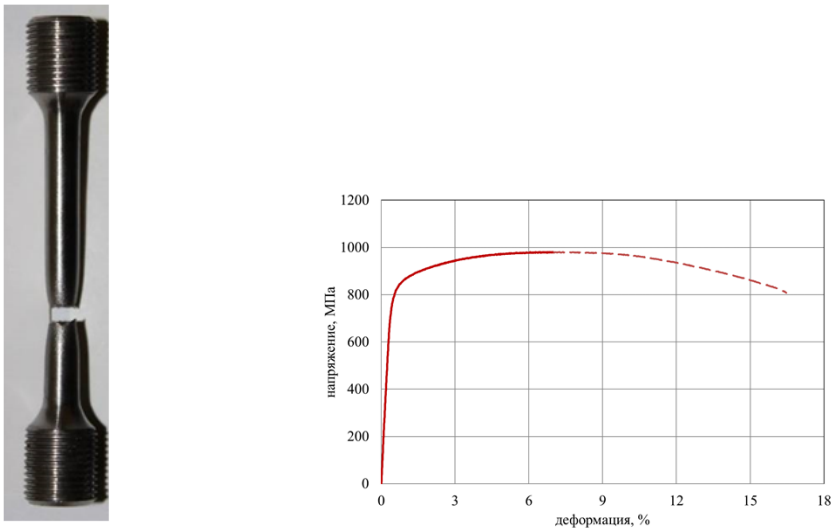
диусе R=56 мм при частоте вращения 23100 об/мин, что удовлетворительно совпадает с результатами испытаний.



а) б)

Рис. 1: Эскиз модельного диска (а) и характер его разрушения (б)

Испытания образцов на разрыв проводились в соответствии с ГОСТ 1497-84 при нормальной температуре с непрерывной записью диаграммы деформирования до момента начала образования «шейки» в образце (рисунок 2а). Построенная по средним значениям механических характеристик условная кривая деформирования представлена на рисунке 2б. Штриховой линией показан участок диаграммы растяжения после начала образования «шейки».



а) фото образца после разрыва б) диаграмма растяжения

Рис. 2: Результаты испытаний на разрыв образца из стали ЭИ961-ш

Расчетная модель диска представляет собой сектор с углом в основании

90° (рисунок 3). По меридиональным сечениям сектора задано граничное условие в виде равенства нулю окружных перемещений. К каждому узлу расчетной модели прикладывалась центробежная сила, пропорциональная квадрату частоты вращения и текущему радиусу, $\vec{f} = \rho\omega^2\vec{r}$. Для построения функции упрочнения было выполнено перестроение условной кривой деформирования в истинную в соответствии с допущением о постоянстве объема рабочей части образца до и после пластического деформирования [7].

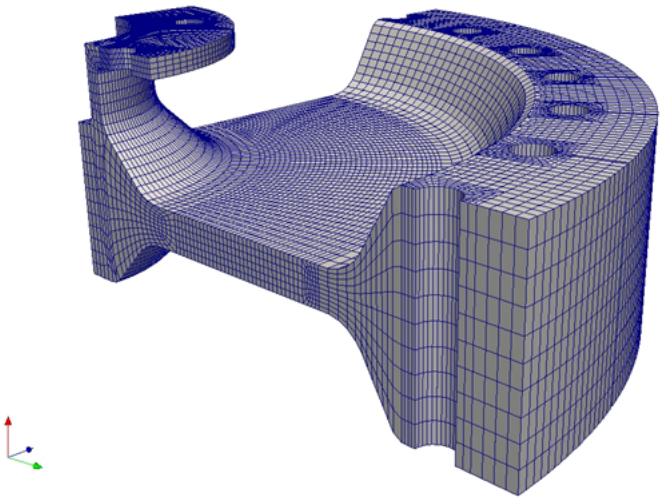


Рис. 3: КЭ сетка модельного диска

4. Особенности расчета на высокопроизводительном кластере ИММЕРС

Как показано на рисунке 3, расчетная сетка для проведения численного эксперимента состоит из большого числа элементарных ячеек. Для каждой ячейки независимо проводятся расчеты, поэтому максимальной скорости вычислений можно достичь при использовании мультипроцессорных систем. Вычислительная эффективность алгоритма расчета определяется формулой Амдала [18], однако увеличение количества процессоров влечет экспоненциальный рост энергозатрат. Использование современных суперкомпьютерных систем для задач математического моделирования сложных систем неразрывно связано с проблемой высокой энергоемкости вычислений. Энергоемкость вычислений в настоящее время не превышает 10 Гфлопс/Вт, а PUE вычислителей с воздушными системами охлаждения не менее 1,35, что при максимальной вычислительной эффективности алгоритмов расчета интенсивности вычислений приводит к необходимости обеспечивать мощность вычислительной машины на уровне 65 – 70 кВт. Учитывая, что вся потребляемая вычислительная мощность рассеивается центром обработки данных в

виде тепла, можно рассматривать такой суперкомпьютер, как источник теплового загрязнения. Поэтому поиск возможности увеличения энергетической эффективности вычислительных установок – актуальная задача, которая может быть решена как за счет использования инновационных систем охлаждения, так и за счет увеличения плотности расположения тепловыделяющих вычислительных плат.

5. Результаты расчета

Одним из характерных наблюдаемых в натурных экспериментах явлений, возникающих непосредственно перед разрушением диска, является локализованная «утяжка» диска, являющаяся аналогом «шейки» в образце и характеризующаяся развитием нелинейной упругопластической неустойчивости. Для моделирования данного эффекта выполнено большое количество шагов нагружения (с постепенно увеличивающейся частотой вращения диска) и итераций нелинейного алгоритма (метода Ньютона-Рафсона) в рамках каждого шага. При этом ввиду высокой нелинейности задачи пришлось задействовать прямой решатель систем линейных алгебраических уравнений, который является наиболее требовательным к вычислительным ресурсам.

Результаты расчета удлинений наружного диаметра модельного диска и их сопоставление с экспериментальными данными представлены на рисунке 4. Видно, что кривые прекрасно согласуются между собой. Начиная с частоты вращения 20000 об/мин происходит существенное изменение скорости роста удлинений модельного диска, а при приближении к разрушающей частоте вращения зависимость близка к вертикальной линии. При частоте вращения $\omega = 24375$ об/мин, близкой к разрушению, максимальные пластические деформации локализуются на радиусе диска R = 50–60 мм с образованием «утяжки» (рисунки 5 и 6), что согласуется с зоной разрушения модельного диска.

Проведенные расчеты диска на вычислительном кластере ИММЕРС [10], показали, что при сохранении интенсивности вычислительного процесса затраты энергии снижаются более, чем на 25%. Таким образом, погружные системы ИММЕРС обеспечивают величину PUE не превышающую 1,05.

6. Заключение

В результате апробации программно-аппаратного комплекса на основе CAE Fidesys и технологий ИММЕРС была решена задача моделирования развития больших пластических деформаций во вращающемся модельном диске. Результаты расчетов с использованием моделей физической и геометрической нелинейностей показали отличную сходимость с экспериментальными данными.

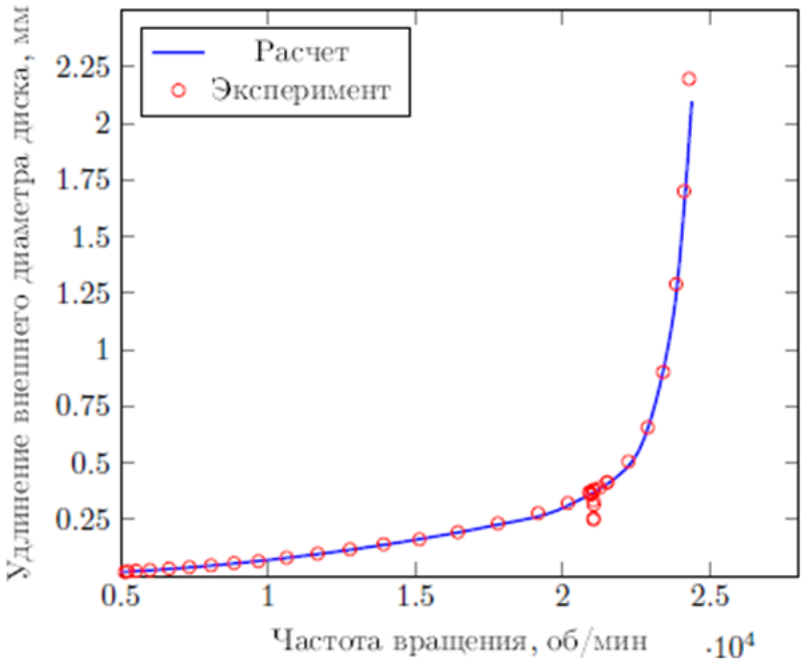


Рис. 4: Расчетная и экспериментальная кривые удлинения наружного диаметра модельного диска в зависимости от частоты вращения

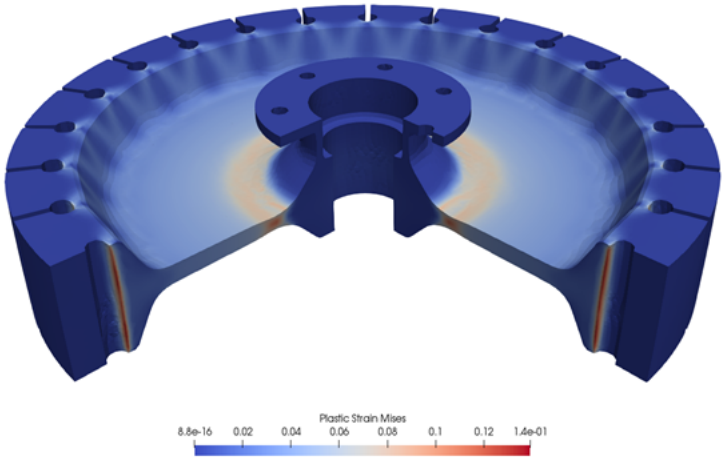


Рис. 5: Распределение пластических деформаций в диске при частоте вращения $\omega = 24375$ об/мин (размерность на шкале — отн.ед.)

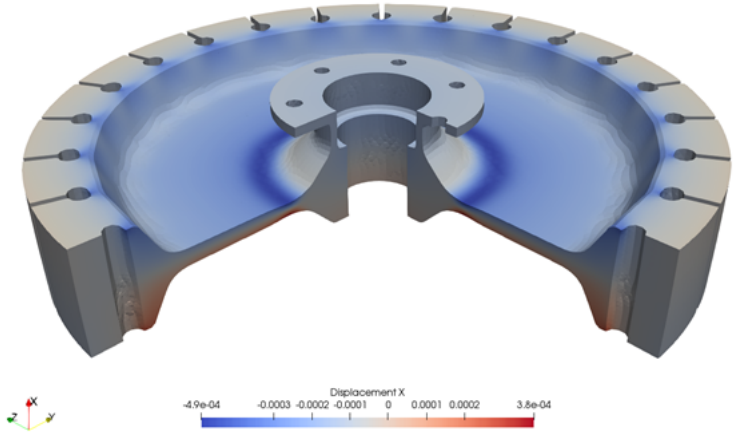


Рис. 6: Распределение осевых перемещений в модельном диске при частоте вращения $\omega = 24375$ об/мин (размерность на шкале — м)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нормы летной годности двигателей воздушных судов. АП-33, 2012 г.

2. Ю.А. Ножницкий, Ю.А. Федина, Д.В. Шадрин, Серветник А.Н. и др. Новые возможности применения разгонных стендов для обеспечения прочностной надежности газотурбинных двигателей // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2015. №3 (14). Часть 1. С.71-86.

3. Servetnik A. Energy-based method for gas turbine engine disks burst speed calculation. 28th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS2012), Brisbane, 2012 [электронный ресурс] URL: http://www.icas.org/ICAS_ARCHIVE/ICAS2012/PAPERS/888.PDF.

4. Nozhnitsky Yu, Karimbaev K., Servetnik A. Numerical simulation of spin testing for turbo machine disks using energy-based fracture criteria. ASME TURBO EXPO, Copenhagen, 2012 [Электронный ресурс], URL http://www.icas.org/ICAS_ARCHIVE/ICAS2012/PAPERS/340.PDF

5. Кузьмин Е.П., Серветник А.Н. Исследование поверхности нагружения материалов дисков газотурбинных двигателей при разгонных испытаниях модельных дисков // Наука и образование. 2014. №5. С.330-336. DOI: 10.7463/0514.0710005.

6. Биргер И.А., Шорр Б.Ф. Термопрочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1975. 454 с.

7. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит.

8. Simo J. C., Hughes T. J. R. Computational Inelasticity. Vol. 7 — Springer Verlag, New York, 1998. — P. 392.

9. Система прочностного анализа Fidesys, [электронный ресурс] URL http://www.cae-fidesys.com

10. Высокопроизводительная вычислительная система IMMERS 6R6, [электронный ресурс] URL: http://immers.ru/sys/immers6r6/

11. Левин В. А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. / Под ред. В.А Левина. – М., Физматлит, 2007. – 392 с.

12. Левин В. А., Вершинин А. В. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ Т.2 (Нелинейная вычислительная механика прочности. Цикл монографий в 5 томах под. ред. В.А. Левина). — ФИЗМАТЛИТ Москва, 2015. — С. 544.

13. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. — ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА URSS Москва, 2015. — С. 408.

14. Zingerman K. M., Vershinin A. V., Levin V. A. An approach for verification of finite-element analysis in nonlinear elasticity under large strains // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — Vol. 158. — P. 012104.

15. Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains / V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin et al. // International Journal of Solids and Structures. — 2013. — Vol. 50, no. 20-21. — P. 3119–3135.

16. Об использовании полнофункциональной CAE Fidesys при разработке инновационных изделий ОПК / А. В. Вершинин, В. А. Левин, Е. В. Комолова и др. // Межотраслевая информационная служба. — 2013. — № 4. — С. 38–40.

17. Левин В. А., Вершинин А. В. Промышленный пакет для прочностного инженерного анализа // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань 20-24 августа 2015 г. Сборник докладов. 4480с. — Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета Казань, 2015. — С. 2281–2283.

18. Sparsh Mittal and Jeffrey S. Vetter, 2013. A Survey of CPU-GPU Heterogeneous Computing Techniques. ACM Comput. Surv. X, Y, Article 1 (February 2015)

REFERENCES

1. (2012), "Normy letnoi godnosti dvigateley vozdushnih sudov. AP-33"[Airworthiness of aircraft engines. AR-33].

2. Nozhnitsky, Y.A., Fedina, Y.A., Shadrin, D.V., Servetnik A.N. (eds) (2015), "New possibilities of using spin rigs to provide gas turbine engine strength reliability *Vestnik of the Samara State Aerospace University*, Vol.14, no.3, part 1, pp. 71-87.

3. Servetnik, A.N. (2012), "Energy-based method for gas turbine engine disk burst speed calculation *28th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences 2012, ICAS 2012*, Brisbane, Australia, 23-28 September 2012, pp. 2443-2448.

4. Nozhnitsky, Yu.A., Karimbaev, K.D. and Servetnik, A.N. (2012), "Numerical Simulation of Spin Testing for Turbo Machine Disks Using Energy-based Fracture Criteria *Proceedings of the ASME Turbo Expo. 2012*, Copenhagen, Denmark, 11-15 June 2012, Vol.7, pp. 35-40.

5. Kuzmin, E.P. and Servetnik, A.N. (2014), "Yield surface investigation of alloys during model disk spin tests *Science and Education: Scientific Publication*, no.5, pp. 330-339.

6. Birger, I.A., Shorr, B.F. (eds) (1975), *Termoprochnost detaley mashin* [Thermal strength of machine parts], Mashinostroenie, Moscow, Russia.

7. Nadai, A. (1963), *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Vol. 2, McGraw-Hill, New York, P. 705.

8. Simo, J. C. and Hughes, T. J. R. (1998), *Computational Inelasticity*, Vol. 7, Springer Verlag, New York, P. 392.

9. The Fidesys system for strength analysis. Available at: http://www.cae-fidesys.com.

10. High-performance computing system IMMERS 6R6. Available at: http://www.immers.ru/sys/immers6r6

11. Levin, V.A., Kalinin, V.V., Zingerman, K.M. and Vershinin, A.V. (2007), *Growth of defects under finite strains.Computer simulation and physical modelling. Ed. by V.A. Levin*. Fizmatlit, Moscow.

12. Levin, V.A. and Vershinin, A.V. (2015), *Numerical methods. Parallel computing. Vol.2 (Nonlinear computational strength mechanics. Series of monographs. Ed. by V.A. Levin)*. Fizmatlit, Moscow.

13. Morozov, E.M., Levin, V.A. and Vershinin, A.V. (2015), *Strength analysis. Fidesys in the hands of an engineer*. URSS, Moscow.

14. Zingerman, K.M., Vershinin, A.V. & Levin V.A. (2016), “An approach for verification of finite-element analysis in nonlinear elasticity under large strains”, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 158, no. 012104

15. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Vershinin, A.V., Freiman, E.I. & Yangirova A.V. (2013), “Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 10, no. 50(20-21), pp. 3119-3135, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.05.019

16. Vershinin, A.V., Levin, V.A., Komolova, E.V. (eds) (2013), "Use of fully functional CAE Fidesys for the development of innovative parts for defence industry *Mezhotraslevaya informacionnaya sluzhba.* No. 4. pp. 38-40.

17. Levin, V.A. and Vershinin, A.V. (2015), "Industrial package for engineering strength analysis *Trudy XI Vserossiyskogo s'yezda po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mechaniki (Proc. XI All-Russian Congress on theoretical and applied mechanics)*, Kazan, 2015. P. 2281–2283.

18. Sparsh, M. and Jeffrey, S. V. 2015 “A Survey of CPU-GPU Heterogeneous Computing Techniques *ACM Comput. Surv.* Vol. 47, no. 4, Article No. 69, doi: 10.1145/2788396.

Институт программных систем имени А. К. Айламазяна РАН
ООО ИММЕРС
ООО Фидесис
Центральный институт авиационного моторостроения имени П. И. Баранова
получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 519:63; 532:5; 533:6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-28-43

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖИДКОСТИ И КОНСТРУКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ FLOWVISION И CAE FIDESYS[1]

А. А. Аксёнов[2], С. В. Жлуктов[3], Э. Е. Сон[4], А. А. Токарь[5], В. С. Карпенко[6]

Аннотация

В работе обсуждается численный метод решения задач сильного взаимодействия между жидкостью (газом) и деформируемым твердым телом: жидкость осуществляет силовое воздействие на тело, тело меняет форму, изменённая форма тела меняет течение. Разработанный метод демонстрируется на тестовой задаче обтекания клапана воздухом. Задача решается в трёхмерной постановке. Деформируемое тело обтекается неограниченным потоком воздуха под прямым углом. Рассматривается зависимость деформации тела при наличии в нём дефекта (отверстия), расположенном в различных положениях. Течение воздуха рассчитывается в программном комплексе FlowVision. FlowVision основан на конечно-объемном подходе к аппроксимации основных уравнений движения жидкости. В нём реализованы явный и неявный методы интегрирования этих уравнений. FlowVision позволяет решать междисциплинарные задачи: моделировать многофазные течения с помощью метода VOF, задавать движение тел (перемещение непроницаемых границ) по неподвижной расчетной сетке, моделировать течения во вращающихся машинах с использованием метода скользящей сетки, решать задачи взаимодействия жидкости и конструкции методом двухстороннего сопряжения FlowVision с конечно-элементными ПК. Деформация тела рассчитывается в программном комплексе CAE Fidesys.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 14-50-00124.

[2]Аксенов Андрей Александрович, заведующий лабораторией Объединенного института высоких температур РАН, andrey@tesis.com.ru

[3]Жлуктов Сергей Васильевич, старший научный сотрудник Объединенный институт высоких температур РАН

[4]Сон Эдуард Евгеньевич, академик Российской академии наук, заместитель директора по научной работе Объединенного института высоких температур РАН, son@ihed.ras.ru

[5]Токарь Антон Александрович, аспирант МГУ имени М.В. Ломоносова, kronoscentury@gmail.com

[6]Карпенко Виталий Сергеевич, ведущий-программист ООО “Фидесис”, vitkarpenko@gmail.com

CAE Fidesys позволяет проводить различные виды прочностного инженерного анализа полного цикла от построения расчетной сетки до визуализации результатов расчета. Для численного решения задач механики деформируемого твердого тела CAE Fidesys использует в своей основе метод конечных элементов и метод спектральных элементов. CAE Fidesys позволяет производить расчёт как линейных, так и нелинейных задач, статических и динамических задач прочности. Для обеспечения проведения совместного расчёта была разработана технология двухстороннего сопряжения, осуществляющая двустороннее взаимодействие между комплексами CAE Fidesys и FlowVision. С использованием данной технологии проведено численное исследование в задаче об обтекании клапана. Приводится сравнение поведения клапана при различных вариациях расположения эллиптического отверстия в нем. Результаты проведенного исследования демонстрируют, что сопряжённый программный комплекс FlowVision-CAE Fidesys позволяет рассчитывать характеристики клапана на относительно небольших расчетных сетках.

Ключевые слова: сильное взаимодействие жидкости и конструкции (FSI), метод конечных объёмов, метод конечных элементов, уравнения Навье-Стокса, клапан в канале, прочностной анализ, напряженно-деформированное состояние.

Библиография: 17 названий.

SOLVING FLUID-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS USING THE FLOWVISION AND CAE FIDESYS SOFTWARE PACKAGES

A. A. Aksenov, S. V. Zhluktov, E. E. Son, A. A. Tokar', V. S. Karpenko

Abstract

The paper considers the numerical method of solving problems of strong interaction between a liquid (gas) and a deformed body: the fluid exerts a force on the body, the body changes its shape, the altered shape of the body changes the flow. The developed method is demonstrated on the test problem of air flow around the valve. The problem is solved in a three-dimensional formulation. The deformable body flows around an unlimited airflow at right angles. The authors consider the body deformation dependence in the presence of a defect (hole) in it located in different positions. The air flow is calculated in the FlowVision software package. FlowVision uses the finite volume method for approximation of the fluid motion equations. It implements an explicit and implicit methods of integrating these equations. FlowVision can solve interdisciplinary problems: simulate multiphase flows using the VOF

method, set the motion of bodies (movement of impermeable boundaries) along a fixed computational grid, simulate flows in rotating machines using the sliding grid method, solve fluid-body interaction problems using two-way coupling between FlowVision and FEM software. The body deformation is calculated in the CAE Fidesys software package. CAE Fidesys allows to conduct various types of full-cycle strength engineering analysis from the construction of a mesh to the visualization of calculation results. For the numerical solution of solid mechanics problems CAE Fidesys uses the finite element method and the spectral elements method. CAE Fidesys allows to solve both linear and non-linear, static and dynamic strength problems. For joint calculation, a two-way coupling technology was developed that performs two-way communication between the CAE Fidesys and FlowVision systems. With the use of this technology, a numerical investigation of the problem of flow past a valve carried out. The behavior of the valve is compared with various variations in the location of the elliptical hole in it. The results lead to the conclusion that the associated FlowVision-CAE Fidesys software package calculates valve characteristics on meshes of moderate dimension with reasonable accuracy.

Keywords: strong fluid-structure interaction (FSI), finite volume method, finite element method, Navier-Stokes equations, valve in the channel, strength analysis, stress-strain state.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Задачи, в которых форма тела меняется в результате силового воздействия жидкости (газа), возникают в различных областях человеческой деятельности и в природе. Примеры таких задач: движение шины по дороге, покрытой слоем воды, течение масла в зазоре между штоком и уплотнителем, движение крови в сердце, флаттер крыла самолёта или крылатой ракеты. В данной статье рассматривается задача обтекания воздухом деформируемого клапана. Задача решается в трёхмерной постановке. Для численного решения задачи был разработан алгоритм решения связанных задач взаимодействия жидкости и конструкции (FSI). Алгоритм предполагает двухстороннее сопряжение гидродинамического программного комплекса (ПК) FlowVision [1-3] и прочностного ПК CAE Fidesys [4-9]. Течение воздуха рассчитывается в ПК FlowVision. Деформация клапана рассчитывается в ПК Fidesys. ПК FlowVision основан на методе конечных объёмов. ПК CAE Fidesys основан на методе конечных элементов. В статье описывается процедура сопряжения двух ПК. Приводятся результаты расчетов. Рассматривается деформации клапана при наличии в нём дефекта (отверстия). Исследуется зависимость деформации клапана от положения дефекта.

2. Программный комплекс FlowVision

Программный комплекс (ПК) FlowVision [1] используется для решения различных прикладных задач в различных областях промышленности. Его популярность основана на том, что он позволяет решать сложные нетрадиционные задачи, находящиеся на стыке различных дисциплин, а также на парадигме полной автоматизации таких трудоемких для инженера процессов, как построение расчетной сетки. FlowVision – это программный комплекс, полностью отчуждаемый от разработчиков. Он имеет развитый графический интерфейс, систему задания расчетного проекта и систему визуализации течений различными методами. Кроме этого, ПК FlowVision предоставляет пользователю возможность вычислять интегральные характеристики течения на различных поверхностях и в объёмах различных объектов.

ПК FlowVision основан на конечно-объемном подходе к аппроксимации основных уравнений движения жидкости. В нём реализованы явный и неявный методы интегрирования этих уравнений. ПК имеет автоматический построитель неструктурированной сетки с возможностью её локальной динамической адаптации. В ПК реализован двухуровневый параллелизм, позволяющий эффективно проводить расчёты на компьютерах, имеющих распределенную и общую память одновременно. FlowVision обладает широким спектром физико-математических моделей – турбулентности (URANS, LES, ILES), горения, массопереноса с учётом химических превращений и радиоактивного распада, электрогидродинамики. FlowVision моделирует несжимаемые (плотность не зависит от давления) и сжимаемые течения. FlowVision позволяет рассчитывать течения, в которых присутствуют гиперзвуковые зоны, застойные области и зоны рециркуляции. Это достигается использованием все-скоростного метода расщепления по физическим переменным для решения уравнений Навье-Стокса [2].

FlowVision позволяет решать междисциплинарные задачи: моделировать многофазные течения с помощью метода VOF, задавать движение тел (перемещение непроницаемых границ) по неподвижной расчетной сетке, моделировать течения во вращающихся машинах с использованием метода скользящей сетки, решать задачи взаимодействия жидкости и конструкции методом двухстороннего сопряжения FlowVision с конечно-элементными ПК.

3. Программный комплекс CAE Fidesys

Программный комплекс CAE Fidesys позволяет проводить различные виды прочностного инженерного анализа полного цикла от построения расчетной сетки до визуализации результатов расчета. Для численного решения задач механики деформируемого твердого тела CAE Fidesys использует в своей основе метод конечных элементов и метод спектральных элементов.

CAE Fidesys позволяет производить расчёт как линейных, так и нелинейных задач [6], статических [8] и динамических [7] задач прочности:

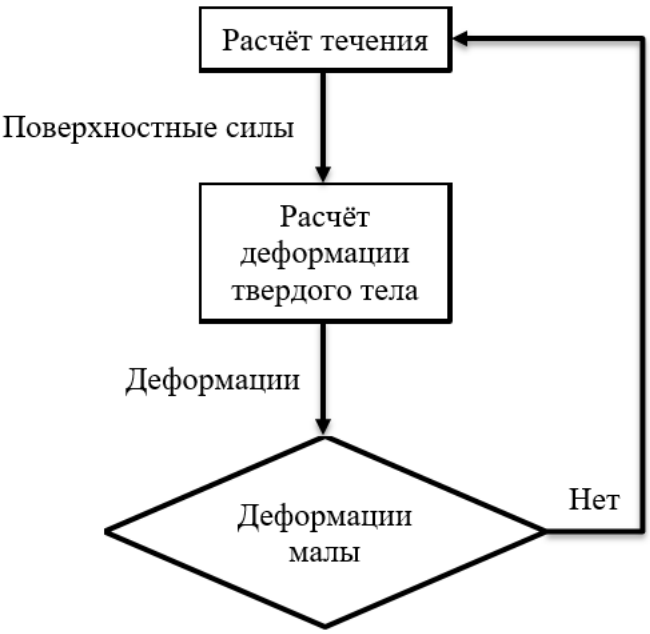
1. Задачи при плоских напряжениях и плоских деформациях
2. Расчет напряженно-деформированного состояния при статическом и динамическом нагружении
3. Расчет собственных частот и форм колебаний трехмерных тел
4. Расчет критических нагрузок и форм потери устойчивости
5. Задачи для моделей, содержащих элементы различных типов: балочные, оболочечные, твердотельные
6. Упругопластическое деформирование по моделям Мизеса и Друкера-Прагера
7. Геометрически нелинейные задачи
8. Физически нелинейные задачи
9. Контактные задачи
10. Решение задач теплопроводности и термоупругости

4. Взаимодействие CAE Fidesys и Flow Vision

Для обеспечения проведения совместного расчёта, двум программным комплексам необходимо осуществлять обмен актуальной информацией. Для этого был разработан программный модуль, осуществляющий двустороннее взаимодействие между комплексом CAE Fidesys и Flow Vision. Для обмена информацией с FlowVision используется Direct Coupling Co-Simulation протокол, совместимый с КЭ кодом Abaqus. Принципиальную схему можно изобразить следующим образом:



Для определения напряжённо-деформированного состояния и соответствующего ему распределения потока используется итерационный процесс. Предварительно происходит расчёт обтекания недеформированного тела. Рассчитанное воздействие в виде поверхностных сил передаётся в CAE Fidesys для расчёта деформированного состояния твёрдого тела. Затем, опять проводится расчёт течения, но уже с учётом деформированного состояния. Подобные шаги повторяются пока дополнительные перемещения не станут нулевыми, что является индикатором того, что итерационный процесс сошёлся. Этот алгоритм можно записать в виде блок-схемы:



При наличии решения для конкретного момента времени, выполняется шаг по времени с использованием неявной схемы. Внутри этой схема также выполняется серия итераций пока не будет достигнута сходимость. После этого решение на следующем шаге по времени полагается найденным.

5. Математическая модель

При моделировании течения воздуха в ПК FlowVision решаются следующие уравнения.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho V) = 0. \tag{1}$$

Здесь t - время, ρ - плотность, V - скорость потока.

Уравнение импульсов:

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \nabla (\rho V \otimes V) = -\nabla p + \nabla \cdot \hat{\tau}_{eff} + \rho g, \tag{2}$$

$$\hat{\tau}_{eff} = (\mu + \mu_t) \left(2 \hat{S} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot V) \hat{I} \right).$$

Здесь p - статической давление, g - ускорение свободного падения, $\hat{\tau}_{eff}$ - эффективный тензор вязких напряжений, μ - динамический коэффициент вязкости, μ_t - динамический коэффициент турбулентной вязкости, $\hat{S}$ - тензор скоростей деформации.

Уравнение энергии, записанное через полную энтальпию H:

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \nabla(\rho V H) = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho V \cdot g - \nabla \cdot J_q + \nabla \cdot (\hat{\tau}_{eff} \cdot V), \tag{3}$$

$$H = h + V^2/2.$$

или через термодинамическую энтальпию h:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla(\rho V h) = \frac{\partial p}{\partial t} + V \cdot \nabla P - \nabla \cdot J_q + \sum_{i,j=1}^{3} \tau_{ij} S_{ij} + \rho\varepsilon, \tag{4}$$

$$h = h_0(298.15) + \int_{298.15}^{T} C_p(T)\, dT.$$

Здесь $h_0(298.15)$ - энтальпия образования газа при 298.15 K, $C_p(T)$ - его удельная теплоёмкость при постоянном давлении, T - абсолютная статическая температура. Уравнение (3) решается при моделировании транс- и сверхзвуковых течений газа. Уравнение (4) решается при моделировании течений без ударных волн. В уравнениях (3) и (4) J_q - эффективный тепловой поток:

$$J_q = -\left(\lambda + \frac{\mu_t C_p}{\mathrm{Pr}_t}\right) \nabla T.$$

Здесь λ - коэффициент теплопроводности газа, Pr_t - турбулентное число Прандтля.

Система (1), (2), (3) или (1), (2), (4) дополняется уравнением состояния газа и уравнениями используемой модели турбулентности.

В ПК FlowVision реализовано 7 моделей турбулентности: алгебраическая модель Смагоринского (см. [10]), модель Спаларта-Аллмареса (см. [10] и [11]), модель Shear Stress Transport k-? (см. [12]) и четыре k-? модели – 'Стандартная' (см. [11]), AKN [13], квадратичная [14] и k-? модель турбулентности FlowVision (KEFV) [15, 16]. Константы моделей турбулентности и пристеночных функций выведены в интерфейс FlowVision. Значения констант по умолчанию обеспечивают высокую точность вычисления характеристик различных турбулентных течений. В общем случае, варьируя константы, пользователь может настроить ту или иную модель на конкретный класс задач.

В обсуждаемых расчётах использовалась модель турбулентности KEFV [15, 16]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla(\rho V k) = \nabla\left(\left(\mu + f_t \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\nabla k\right) + P_k + P_{k,gen} + G_k - \\ -\rho\varepsilon\left(1 + \xi\left(\max\left(M_t^2, M_{t0}^2\right) - M_{t0}^2\right)\right) - D_{pp},\end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\nabla(\rho V\varepsilon)=\nabla\left(\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\nabla\varepsilon\right)+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{Re_t}}}\frac{\varepsilon}{k}\left(C_{\varepsilon1}f_1(P_k+G_k)-C_{\varepsilon2}f_2\rho\varepsilon\right), \tag{6}$$

$$\mu_t=\rho C_\mu k^2/\varepsilon, \tag{7}$$

$$P_k=\mu_t\left(S-\frac{2}{3}(\nabla\cdot V)^2\right)-\frac{2}{3}\rho(\nabla\cdot V)k,$$

$$P_{k,gen}=\mu\mu^+_{gen}S\exp\left\{-\left(\frac{Re_t}{C_6}\right)^2\right\}, \tag{8}$$

$$G_k=\mu_t\frac{\beta}{\mathrm{Pr}_t}g\cdot\nabla T,$$

$$D_{pp}=\begin{cases}0 & y>L\cdot y^*_{pp}\\ C_{pp}\rho\{n\cdot\nabla(k|V|)\} & y\leqslant L\cdot y^*_{pp}\end{cases}, \tag{9}$$

$$f_t=1+C_1\exp\left\{-\left(\frac{Re_t}{C_2}\right)^2\right\},$$

$$f_1=1-C_{\varepsilon3}+C_{\varepsilon3}\frac{P_k}{\rho\varepsilon},$$

$$f_2=\frac{1}{1+C_{Rich}\sqrt{\frac{W}{S}}\left(\sqrt{\frac{W}{S}}-1\right)}\left\{1-\exp\left(-\frac{y^+_{Kolm}}{C_4}\right)\right\}^2\left[1-C_3\exp\left\{-\left(\frac{Re_t}{C_5}\right)^2\right\}\right], \tag{10}$$

$$y^+_{Kolm}=\frac{(\varepsilon\cdot\mu/\rho)^{1/4}y}{\mu/\rho}, Re_t=\frac{\rho k^2}{\mu\varepsilon}, M_t^2=\frac{2k}{a^2},$$

$$S=2\sum_{i,j}S_{ij}S_{ij}, S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right),$$

$$W=2\sum_{i,j}W_{ij}W_{ij}, W_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right).$$

Значения констант по умолчанию:

$$\sigma_k=1,\quad \sigma_\varepsilon=1.3,\quad C_{pp}=0.003,\quad y^*_{pp}=10^{20},$$
$$C_{\varepsilon1}=1.44,\quad C_{\varepsilon2}=1.92,\quad C_{\varepsilon3}=0.05,$$
$$C_1=5,\quad C_2=50,\quad C_3=0.335,\quad C_4=3.4,\quad C_5=5.8,$$
$$C_6=10000,\quad \mu^+_{gen}=0,\quad C_{Rich}=0,\quad \xi=1.5,\quad M_{t0}=0.25.$$

Здесь x_i - декартова координата, k - турбулентная энергия, ε - скорость диссипации турбулентной энергии, μ - динамический коэффициент вязкости, y - расстояние до стенки, β - коэффициент теплового расширения, a - скорость звука, $C_\mu=0.09$ - фиксированная модельная константа, y^*_{pp} - расстояние от стенки, определяющее зону действия члена D_{pp}, L - линейный масштаб задачи (характерный размер обтекаемого объекта), n - нормаль к стенке. Точное значение константы $y^*_{pp}\sim 1$ определяется решаемой задачей. Значение

по умолчанию $y^*_{pp} = 10^{20}$ означает, что член D_{pp} действует во всей расчётной области. Константа C_{Rich} в выражении (10) позволяет "включать" учёт кривизны линий тока. Константы ξ и M_{t0} определяют модель учёта сжимаемости. Задание ненулевого значения константы μ^+_{gen} в некоторой области инициирует генерацию турбулентности.

Поскольку расчёты проводятся при высоких числах Рейнольдса, используется модель пристеночных функций FlowVision [17].

6. Расчёты

Рассматривается трёхмерное течение воздуха около клапана. Деформируемое тело обтекается неограниченным потоком воздуха под прямым углом. Проводится два расчёта для тела с различно расположенными отверстиями (дефектами).

Геометрические свойства лопатки:

Длина (ось Y)	0.05
Ширина (ось)	0.005
Толщина (ось)	0.02

Первое отверстие расположено по центру и имеет следующую эллиптическую форму:

Главная полуось	0.003
Малая полуось	0.0025

Второе отверстие расположено ассиметрично и близко к краю. Имеет круглую форму с диаметром 0.004.
Первая модель показана на Рисунке 1.
Вторая модель показана на рисунке 2.

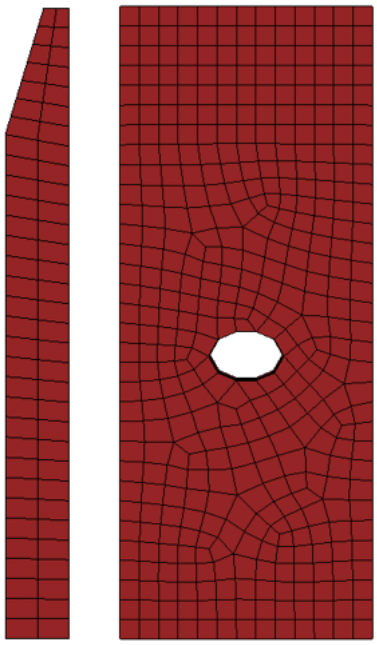


Рис. 1: Клапан с дефектом, расположенным в центре.

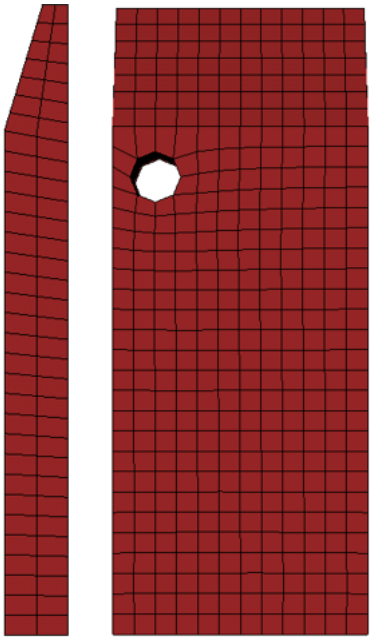


Рис. 2: Клапан с дефектом, смещённым к краю.

Параметры твёрдого материала лопатки:

Модуль Юнга	5e+9
Коэффициент Пуассона	0.3
Плотность	3500

На Рисунке 3 приведены значения напряжения по Мизесу в точке, располо-

женной по центру вблизи места закрепления.

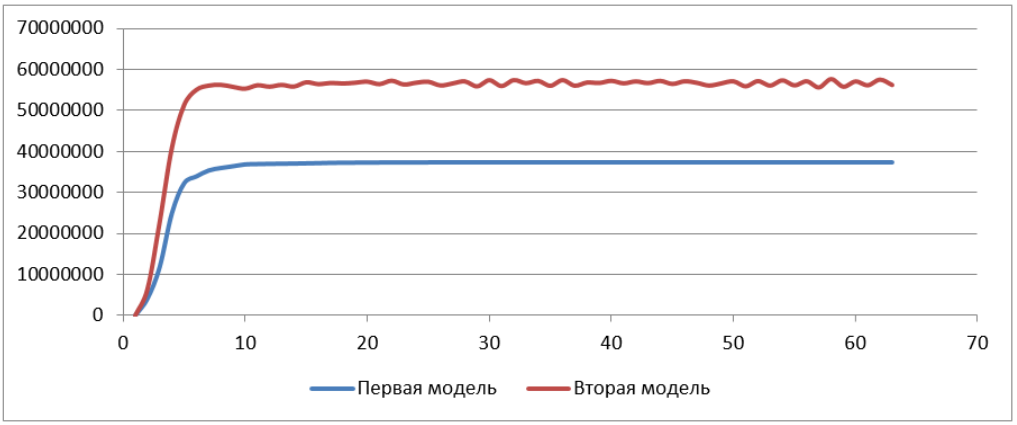
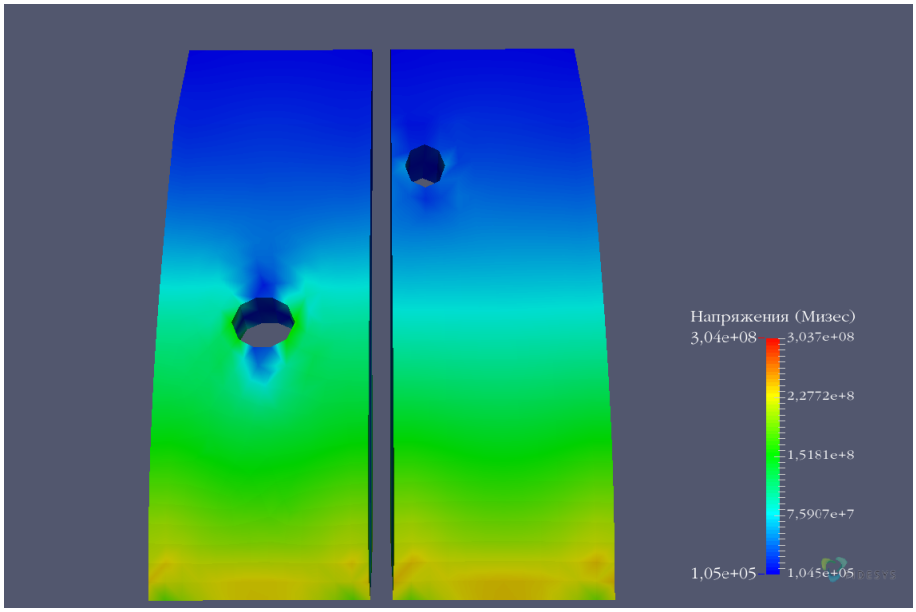


Рис. 3: Напряжение по Мизесу.

Напряжённо-деформированное состояние каждой из моделей в одном и том же потоке воздуха показано на Рисунке 4.



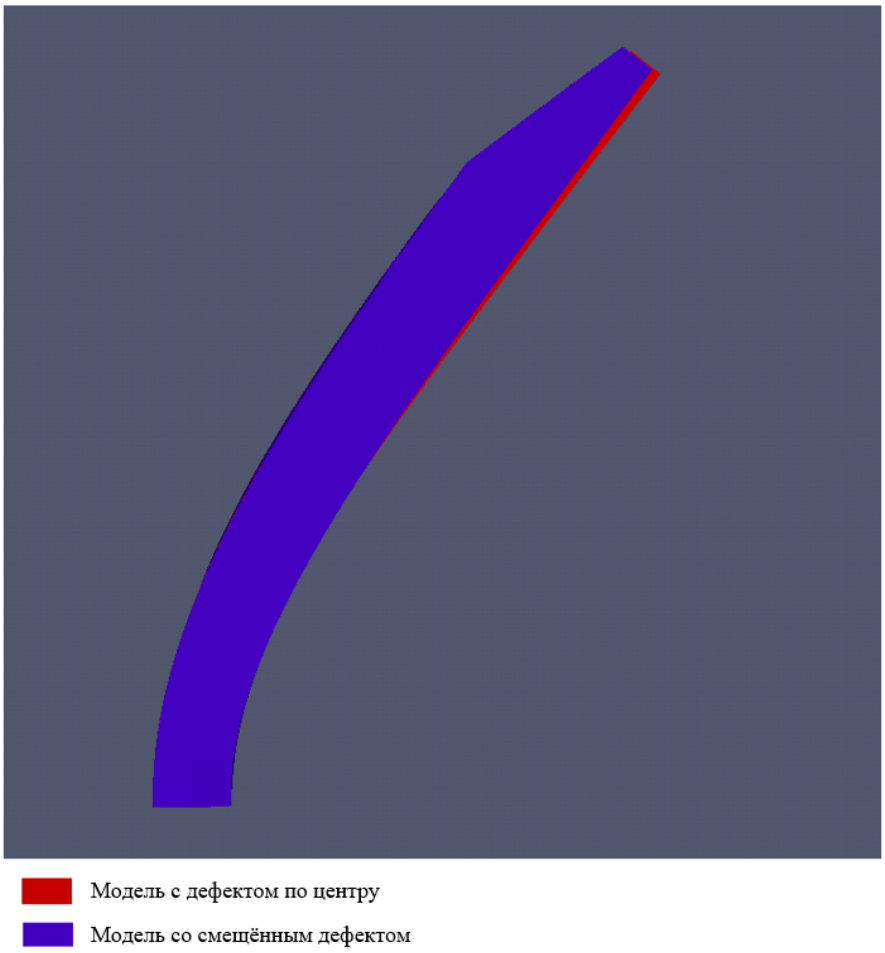


Рис. 4: Напряжённо-деформированные состояния двух моделей.

Деталь примыкает к одной из боковых сторон расчетной области. На этой стороне установлено граничное условие “симметрия”, на клапане – условие “стенка”, на остальных границах установлено “неотражающие” граничное условие со скоростью набегающего потока V_{in}, статическим давлением p_{in} и статической температурой T_{in}. Тело обтекается воздухом.

Расчетная сетка получена путем автоматической адаптации начальной сетки. Количество ячеек по каждому направлению начальной сетки равно N_x=90, N_y=36, N_z=46. По направлению x (по направлению потока) начальная сетка сгущается около тела. Адаптация проводится в объеме большого окружающего тело цилиндра до 1-го уровня, в объеме малого окружающего клапан цилиндра до 2-го уровня и по поверхности - до 3-го уровня (8 слоев). Общее количество ячеек в сетке N=700 000 ячеек. Данная расчетная сетка была выбрана в результате предварительного исследования сеточной сходимости результатов в ПК FlowVision.

7. Заключение

Разработана технология двухстороннего сопряжения программного комплекса вычислительной гидродинамики FlowVision, основанного на методе конечных объёмов, с конечно-элементным программным комплексом Fidesys. С использованием этой технологии проведено численное исследование обтекание клапана. Исследование показало, что сопряжённый программный комплекс FlowVision+Fidesys с удовлетворительной точностью рассчитывает характеристики сопряжённой задачи на сетках умеренной размерности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксёнов А. А. FlowVision: индустриальная вычислительная гидродинамика // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, №1. — С. 5-20.

2. Aksenov A.A., Zhluktov S.V., Savitskiy D.V., Bartenev G.Y., Pokhilko V.I. Simulation of 3D flows past hypersonic vehicles in FlowVision software // Journal of Physics: Conference Series, Volume 653, No. 012072, 2015, http://iopscience.iop.org/1742-6596/Y2015.

3. Markova T. V., Aksenov A. A., Zhluktov S. V., Savitsky D. V., Gavrilov A. D., Son E. E. Prokhorov A. N. Simulating flow around scaled model of a hypersonic vehicle in wind tunnel // Journal of Physics: Conference Series. – Vol. 774, No. 1 (012095). – 2016. – 9 p. http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/774/1/012095

4. В.А. Левин, А.В. Вершинин “Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ ”. 2й том пятитомного цикла монографий “Нелинейная вычислительная механика прочности”. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2015.

5. Е.М. Морозов, В.А. Левин, А.В. Вершинин “Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера”. М.: URSS, 2015. – 408 с.

6. Zingerman K. M., Vershinin A. V., Levin V. A. An approach for verification of finite-element analysis in nonlinear elasticity under large strains // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — Vol. 158. — P. 012104.

7. Vladimir A. Levin, Anatoly V. Vershinin, and Konstantin M. Zingerman. Numerical analysis of propagation of nonlinear waves in prestressed solids. Modern Applied Science, 10(4):158–167, 2016

8. Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains. Vladimir A. Levin, Konstantin M. Zingerman, Anatoly V. Vershinin, Eugene I. Freiman, Anastasia V. Yangirova. International Journal of Solids and Structures. 10/2013; 50(20-21):3119-3135. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.05.019

9. Вершинин А.В., Левин В.А., Комолова Е.В., Кукушкин А.В., Улькин Д.А. “Об использовании полнофункциональной CAE Fidesys при разработке инновационных изделий ОПК”. Научно-методический журнал Межотраслевая Информационная Служба ФГУП “ВИМИ”, 38-41 с. Выпуск 4 (165). Москва 2013

10. Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Моделирование турбулентности в расчётах сложных течений // Учебное пособие, Санкт-Петербург, Издательство Политехнического Университета, 2012, 88 с.

11. Wilcox D. C. Turbulence modeling for CFD // DCW Industries, Inc., 1994, 460 p.

12. Menter F. R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, and M. Tummers, Begell House, Inc., 2003, pp. 625 - 632.

13. Abe K., Kondoh T., CityplaceNagano Y. A New Turbulence Model for Predicting Fluid Flow and Heat Transfer in Separating and Reattaching flows-I. Flow Field Calculation // Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 37, No. 1, 1994, pp. 139-151.

14. Lien F.S., Chen W.L., Leschziner M.A. Low Reynolds-Number Eddy-Viscosity Modelling Based on Non-Linear Stress-Strain/Vorticity Relations // Engineering Turbulence Modelling and Measurements 3, Elsevier, 1996, pp. 91-100.

15. Жлуктов С. В., Аксёнов А. А., Карасёв П. И. “Моделирование ламинарно-турбулентного перехода в рамках k-epsilon подхода” Компьютерные исследования и моделирование, 2014, Том 6, № 6, с. 879-888.

16. Жлуктов С.В., Аксёнов А.А., Карасёв П.И. Моделирование отрывного течения с использованием двухпараметрической модели турбулентности // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, №1. — С. 79-88.

17. Жлуктов С.В, Аксёнов А.А. Пристеночные функции для высокорейнольдсовых расчетов в программном комплексе FlowVision // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7, №6. — С. 1221-1239.

REFERENCES

1. Aksenov A.A. 2017, “FlowVision: Industrial computational fluid dynamics”, *Computer Research and Modeling*, Vol. 9, no. 1, pp. 5-20

2. Aksenov, A.A., Zhluktov, S.V., Savitskiy, D.V., Bartenev, G.Y. & Pokhilko V.I. 2015, "Simulation of 3D flows past hypersonic vehicles in FlowVision software", *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 653, no. 012072, Avaliable at: http://iopscience.iop.org/

3. Markova, T.V., Aksenov, A.A., Zhluktov, S.V., Savitsky, D.V., Gavrilov, A.D., Son, E.E. & Prokhorov, A.N. 2016, "Simulating flow around scaled model of a hypersonic vehicle in wind tunnel", *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 774, no. 012095, p. 9, Avaliable at http://iopscience.iop.org/

4. Levin, V.A. & Vershinin, A.V. 2015, "Nelinejnaja vychislitel'naja mehanika prochnosti. V 5 tomah. Tom 2. Chislennye metody. Parallel'nye vychislenija na JeVM" ["Computational structural mechanics. Volume 2. Numerical methods. Parallel computing"], FIZMATLIT Moskva

5. Morozov, E.M., Levin, V.A. & Vershinin, A.V. 2015 "Prochnostnoj analiz. Fidesys v rukah inzhenera" ["Strength analysis. Fidesys in the hands of an engineer"]. URSS, p. 408

6. Zingerman, K.M., Vershinin, A.V. & Levin V.A. 2016 "An approach for verification of finite-element analysis in nonlinear elasticity under large strains", *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 158, no. 012104

7. Levin, V.A., Vershinin, A.V. & Zingerman, K.M. "Numerical analysis of propagation of nonlinear waves in prestressed solids", *Modern Applied Science*, Vol. 10, no. 4, pp. 158–167

8. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Vershinin, A.V., Freiman, E.I. & Yangirova A.V. 2013 "Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 10, no. 50(20-21), pp. 3119-3135, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.05.019

9. Vershinin A.V., Levin V.A., Komolova E.V., Kukushkin A.V. & Ulkin D.A. 2013 "Use of the CAE Fidesys in the development of innovative industrial products", *Nauchno-metodicheskij zhurnal Mezhotraslevaja Informacionnaja Sluzhba FGUP "VIMI"*, Vol. 4, no. 165, pp. 38-41

10. Garbaruk, A.V., Strelets, M.Kh. & Shur, M.L. 2012, "Modelirovanie turbulentnosti v raschjotah slozhnyh techenij" ["Turbulence modeling in calculations of complex flows"], p. 88

11. Wilcox, D.C. 1994, "Turbulence modeling for CFD", *DCW Industries, Inc.*, p. 460

12. Menter, F.R., Kuntz, M. & Langtry, R. 2003 "Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model", Turbulence, Heat and Mass

Transfer 4, ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, and M. Tummers, *Begell House, Inc.*, pp. 625-632.

13. Abe, K., Kondoh, T. & CityplaceNagano, Y. "A New Turbulence Model for Predicting Fluid Flow and Heat Transfer in Separating and Reattaching flows-I. Flow Field Calculation", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, no. 1, pp. 139-151

14. Lien, F.S., Chen, W.L. & Leschziner, M.A. 1996 "Low Reynolds-Number Eddy-Viscosity Modelling Based on Non-Linear Stress-Strain/Vorticity Relations", *Engineering Turbulence Modelling and Measurements 3, Elsevier*, pp. 91-100

15. Zhluktov, S.V., Aksenov, A.A. & Karasev, P.I. 2014 "Modeling of the laminar-turbulent transition in the Modeling of the laminar-turbulent transition in the framework of the k-epsilon approach", *Computer Research and Modeling*, Vol. 6, no. 6, pp. 879-888

16. Zhluktov, S.V., Aksenov & A.A., Karasev, P.I. 2016, "Modeling separated flow with use of two-equation turbulence model", *Computer Research and Modeling*, Vol. 8, no. 1, pp. 79-88

17. Zhluktov, S.V. & Aksenov, A.A. 2015, "Wall functions for high-Reynolds calculations in FlowVision software", *Computer Research and Modeling*, Vol. 7, no. 6, pp. 1221-1239

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 519.6, 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-44-54

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВКЛЮЧЕНИЙ НА ЭФФЕКТИВНЫЙ ТЕНЗОР УПРУГОСТИ ПОРОВО-ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕД

Ю. А. Алхименков[1], И. О. Баюк[2], С. А. Тихоцкий[3]

Аннотация

Задача определения эффективного тензора упругости микронеоднородной и, в общем случае, макроскопичеки однородной и анизотропной композитной среды относится к проблеме взаимодействия многих тел. Решение такой задачи возможно лишь приближенно. В работе рассматривается решение такой задачи для порово-трещиноватой среды – терригенной горной породы, упругие свойства которой анизотропные. Причем, анизотропия упругих свойств вызвана различными факторами – как собственной анизотропией глинистых минералов, так и преимущественной ориентацией неизометричных неоднородностей породы. Различные методы теории эффективных сред (ТЭС) для вычисления эффективного тензора упругости порово-трещиноватых сред используют так называемые гипотезы эффективного поля. Так, например, метод Т-Матрицы, метод Мори-Танака, метод Обобщенного Сингулярного приближения и метод Эффективного Поля используют гипотезы эффективного поля в различных вариациях. Таким образом, различные методы ТЭС показывают близкие результаты. В случае горной породы, которая рассматривается как природный композит, большое значение имеет аппроксимация реальной среды некой параметрической модельной средой, отражающей основные особенности микроструктуры породы, которая, в свою очередь, является следствием особенностей формирования конкретной породы. Следовательно, выбранная модель среды и выделенные модельные параметры играют очень важную роль в моделировании. Для подтверждения этого тезиса было проведено моделирование эффективных упругих характеристик порово-трещиноватой породы двумя различными методами: Т-матрицы и Обобщенного Сингулярного приближения для двух разных

[1]Алхименков Юрий Александрович, инженер Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, alkhimenkov.yury@gmail.com

[2]Баюк Ирина Олеговна, главный научный сотрудник Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, ibayuk@yandex.ru

[3]Тихоцкий Сергей Андреевич, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, sat@ifz.ru

параметрических моделей одной и той же горной породы, построенных независимо на основе визуального анализа микроструктуры породы в масштабе шлифа. Каждая из построенных моделей имеет разное количество параметров, которые также различны. Однако общим является то, что при моделировании таких пород необходимо учитывать жесткость контакта минеральных зерен и органического вещества, а также степень связности компонент. Найдены параметры каждой модели и определена область изменения пористости породы, в которой обе модели имеют сходные упругие свойства.

Ключевые слова: порово-трещиноватые среды, эффективные свойства, метод обобщенного сингулярного приближения.

Библиография: 15 названий.

INFLUENCE OF SPATIAL INTERACTIONS OF INCLUSIONS ON THE EFFECTIVE ELASTIC TENSOR OF CRACKED POROUS MEDIUM

Yu. A. Alkhimenkov, I. O. Bayuk, S. A. Tikhotskiy

Abstract

The determination of effective stiffness tensor of microinhomogeneous and, in general, macroscopically homogeneous composite medium is related to so-called problem of many-body interaction. Solution to the problem can be found only as an approximation. In this paper we consider a solution to such a problem for porous-cracked medium that is a terrigenous rock having anisotropic elastic properties. The elastic anisotropy is a result of many factors including anisotropic properties of clay minerals and preferential orientation of non-isometric heterogeneities. Different Effective Medium Theories for calculating effective stiffness tensor of cracked porous medium use so called Effective Field Hypothesis (H1, H2 and H3). For example, T-matrix method, Mori-Tanaka method, General Singular Approximation method, and Effective Field Methods use the Effective Field Hypothesis. Thus, different methods produce similar results. When constructing models of rock's effective properties the rock is treated a composite "made by nature". In this case of importance is a proper approximation of the real medium by a parametric model medium that reflects specific features of rock's microstructure. The microstructure is a result of rock evolution. Therefore, the model of the medium and the model parameters play very important roles in the modelling. To prove this statement, two models of a cracked-porous medium's properties were created using two different methods: the T-matrix method and General Singular Approximation Method. The methods were applied for two different parametric models of one and the same rock. The models were build based on visual analysis of rock's thin sections. Each of the constructed models has different number of parameters. The parameters are also different. However, a common

feature of the two models is that for rocks of this type it is necessary to take into account a rigidity of contact between mineral grains and organic material. Besides, a connectivity of different heterogeneities should be also parametrized. For each model a set of parameters was found and a porosity interval where the models produce similar results in terms of elastic wave velocities is determined.

Keywords: pore-fractured media, effective properties, generalized singular approximation method.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Определение эффективных характеристик порово-трещиноватых сред является актуальной задачей в различных разделах механики. Одним из реальных примеров такой среды являются горные породы. Под эффективными характеристиками здесь и далее понимаются такие физические свойства среды, которые определяют макроскопическую её реакцию на усреднённое по объёму воздействие. Горные породы могут быть представлены как композитный материал, содержащий поры и трещины, с различными модельными характеристиками, такими как форма трещин, форма пустотного пространства и т.д. Поровое пространство может быть заполнено различным флюидом: газом, водой, углеводородами и т.д. Методы теории эффективных сред (ТЭС) позволяют вычислять эффективный тензор упругости таких материалов на основе математической модели среды. Эта модельная среда состоит из трех компонент: 1) модельный шаблон среды, который отражает основные характеристики микроструктуры горной породы; 2) параметры модели, которые определяют форму, ориентацию и связанность пустотного пространства и свойства всех компонентов среды; 3) уравнения, которые связывают модельные параметры и физические свойства компонентов среды.

Горные породы неоднородны на различных масштабах, следовательно, микроструктура таких сред должна также изучаться на различных масштабах, а математическая модель породы должна отражать главные особенности строения среды в этих масштабах. Методы ТЭС как раз и предоставляют необходимые связывающие уравнения для вычисления эффективного тензора упругости для различных модельных параметров и физических характеристик компонент среды. Модельные параметры могут быть определены на образце горной породы или вычислены из других экспериментальных данных. Знание модельных параметров и физических свойств является необходимым для определения эффективного тензора упругости таких сред.

В настоящее время существует огромное множество методов ТЭС и порой трудно выбрать наиболее подходящий метод. В настоящем исследовании проанализированы некоторые методы гомогенизации, которые используются на практике при вычислении эффективных характеристик горных пород. Все эти методы основаны на подходах, разработанных в микромеханике неодно-

родных сред. Аналитически и численно показано, что многие методы очень похожи друг на друга и дают весьма сходные результаты для одинаковых модельных сред. Демонстрируется, что многие методы могут быть объединены в одну группу методов с использованием гипотез эффективного поля.

Для демонстрации данного тезиса проведено моделирование реальной горной породы – песчаника. Существует несколько подходов к параметризации реальной горной породы. Созданы две независимых модели горной породы и выполнена инверсия для определения их параметров. Известными характеристиками горной породы считаются скорости продольных и поперечных волн материала матрицы, минеральный состав и пористость. Несмотря на то, что рассмотренные модели горной породы имеют различные параметры, были выявлены ряд общих закономерностей. Показано, что при построении модели необходимо учитывать жесткость контакта минеральных зерен и органических компонентов породы и степень связанности компонентов породы.

2. Теория

Эффективный тензор упругости статистически однородной среды $C*$ определяется следующим выражением:

$$\langle \sigma(x) \rangle = C* : \langle \varepsilon(x) \rangle \,, \tag{1}$$

где $\langle \sigma(x) \rangle$ и $\langle \varepsilon(x) \rangle$ - осредненные по представительному объему среды поля напряжений и деформаций для настолько большого числа неоднородностей, чтобы имело смысл статистическое усреднение. Методы теории эффективных сред позволяют вычислить эффективный тензор упругости $C*$ используя параметры модели.

Практически все методы ТЭС, детальный обзор которых может быть найден в работе [11], используют три модельных предположения, называемых гипотезами эффективного поля: H1, H2 и H3. Согласно гипотезе H1, каждое включение в среде имеет эллипсоидальную форму и находится в некотором эффективном и однородном поле. Гипотеза H2 предполагает, что эффективное поле в любой точке внутри включения не зависит от поля напряжений внутри других включений в среде. В терминах теории упругости, гипотеза H2 называется квази-кристаллической аппроксимацией. Гипотеза H3 предполагает эллиптическую симметрию для распределения включений в среде [7, 15]. Парная корреляционная функция включений обладает эллиптической симметрией, но пространственный эллипсоид может отличаться от эллипсоида, определяющего форму включения. В работе [11] показано, что в статистически однородной среде и с граничными условиями определенного вида, эффективный тензор упругости не зависит от корреляционного радиуса и плотности распределения включений в среде.

Метод Т-матрицы (оптическая потенциальная аппроксимация и когерентная потенциальная аппроксимация) [13], методы эффективного поля [14] и

методы эффективной среды (метод обобщенного сингулярного приближения) [2, 7] используют гипотезы эффективного поля в том или ином виде. Некоторые частные методы, такие как метод Мори-Танака [13] и метод самосогласования [15] также используют гипотезы эффективного поля.

Во всех вышеперечисленных методах, общее интегральное уравнение для поля деформаций (2) имеет вид (для статистически однородной среды и с граничными условиями определенного вида):

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^{(0)} + \int_{\Omega} G^{(0)}(x - x')\delta C(x')\varepsilon(x')dx', \tag{2}$$

где ε^0 является константой, т.е. определяется граничными условиями. Этот член определяет поле деформаций, которое бы существовало в среде с однородными характеристиками $C^{(L)}$и соответствующими граничными условиями. $C^{(L)}$часто называют телом сравнения. Тензор четвертого ранга $G^{(r)}$ представляет собой вторую производную тензора Грина уравнения равновесия для среды со свойствами $C^{(L)}$ и является обобщенной функцией. Тензор $\delta C^{(r)}$ является флуктуацией локального тензора упругости в неоднородной среде.

Указанные выше гипотезы эффективного поля используются в процессе нахождения решения уравнения (2). Так как многие методы используют уравнение (2) и гипотезы эффективного поля для вывода конечных формул, многие методы дают одинаковые результаты. Например, для однородной среды с однонаправленными эллипсоидальными включениями, метод Мори-Танака и метод, предложенный в работе [15], приводят к одному и тому же эффективному тензору упругости. Более того, конечные формулы расчета эффективного тензора упругости метода Т-матрицы могут быть полностью переписаны без каких-либо упрощений в нотации, используемой в микромеханике. В этом случае, Т-матрица в выражениях может быть заменена на тензор концентрации свернутый с тензором флуктуаций (разность между упругими свойствами матрицы и включений). Можно показать, что многие методы, которые используют уравнение (2) и гипотезы эффективного поля, могут быть переформулированы друг в друга. Таким образом, для моделирования эффективного тензора упругости реальных сред, важнейшим является не выбор конкретного метода ТЭС, а выбор шаблона модели среды модельных параметров.

Выражение (2) является общим для всей механики микронеоднородных сред. Важно, что формула (2) имеет ту же форму, что и уравнение Липпмана-Швингера, известное в квантовой теории рассеяния. Один из подходов к решению данного уравнения, это использование ряда Дайсона:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^{(0)} + \bar{G}\delta C\varepsilon^{(0)} + \bar{G}\delta C\bar{G}\delta C\varepsilon^{(0)} + \cdots, \tag{3}$$

Аналогичное выражение можно записать с использованием Т-матрицы T:

$$T = \sum_r t^{(r)}\theta^{(r)} + \sum_r \sum_{u\neq r} t^{(r)}G^{(ru)}t^{(u)} + \sum_r \sum_{u\neq r} \sum_{v\neq u} t^{(r)}G^{(ru)}t^{(u)}G^{(uv)}t^{(v)} + \cdots . \quad (4)$$

Каждый последующий член в правой части выражения (4) учитывает взаимодействие включений более высокого порядка. Выражение (4) описывает рассеяние в типичной системе многих тел. Однако, как было показано в работе [12], при выводе выражений (2) и (3) уже использовались некоторые гипотезы. Таким образом, выражения (2) и (3) не являются точными. Более правильной альтернативой уравнению (2) является следующее выражение:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^{(0)} + \int_\Omega G^{(0)}(x - x') \left[\delta C(x')\varepsilon(x') - \langle \delta C\varepsilon\rangle\right] dx' \quad (5)$$

Основное отличие (5) от (2) в операции центрирования, оригинально предложенной в работе [7]. Рассматриваемые в данной работе методы основаны на уравнениях (2)–(4), следовательно, детальное изучение фундаментальных проблем микромеханики в виде уравнения (5) выходит за рамки данной работы. Однако мы хотели бы отметить важность данной проблемы для будущих исследований.

3. Пример вычисления эффективного тензора упругости реальной среды

Для верификации предложенных выводов, были независимо построены две модели горной породы – песчаника. Модельная среда показана на рисунке 1. Известные свойства породы – скорости продольных и поперечных волн минеральных компонентов, минеральный состав и объем порового пространства. Первая математическая модель породы была построена в два этапа. На каждом этапе был использован метод Т-матрицы (Оптическая Потенциальная Аппроксимация) с телом сравнения. В данной модификации метода Т-матрицы, была учтена связанность порового пространства с использованием специального параметра [1, 9]. Пространственное распределение включений было также учтено.

На первом шаге построения модели, поры (2% от объема породы) были помещены в минеральную матрицу, которая представляет собой смесь различных минералов. Поры представляли собой сферические включения. В результате первой ступени моделирования, эффективный тензор упругости “материал 1a” был получен. Независимыми параметрами на этом шаге были скорости упругих волн в матрице породы и параметр, описывающий связанность включений. Во втором шаге моделирования, изолированные удлинённые частицы глинистых минералов были помещены в “материал 1a”. Тензор упругости глинистых минералов был взят из работы [10]. В результате второй ступени моделирования, эффективный тензор упругости породы-песчаника

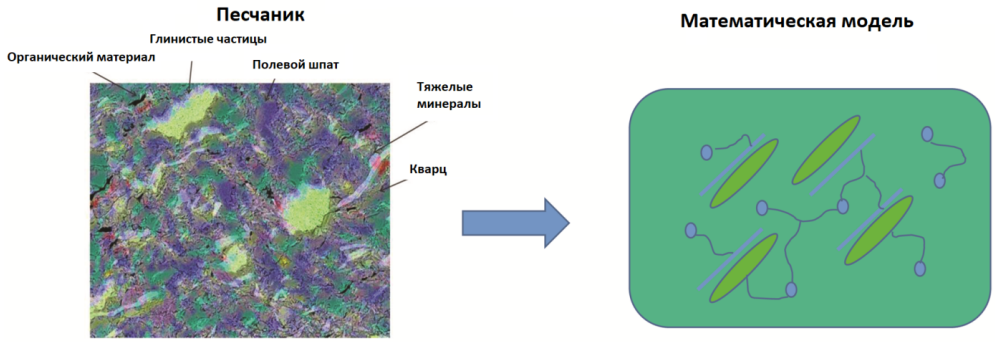


Рис. 1: Шлиф (срез) горной породы - песчаника (слева) и математическая модель (справа). Эллипсоидальные включения представляют собой удлиненные частицы глинистых минералов. Сферы и трещины представляют собой два типа пустотного пространства в среде.

был вычислен. Неизвестными параметрами модели на втором шаге являются аспектное отношение частиц глинистых минералов, аспектное отношение двух-точечной корреляционной функции, описывающей пространственное расположение включений и параметр жесткости контакта включений.

Таким образов, в первой модели всего пять неизвестных параметров. Инверсия была произведена с помощью алгоритма решения обратной задачи (т.е. минимизации функционала) с ограничениями на условия. Полученные параметры модели: связанность порового пространства 0.85; аспектное отношение глинистых минералов 0.26; аспектное отношение двух-точечной корреляционной функции 0.52; параметр жесткости включений 0.36; скорость продольных волн в матрице породы 5.44 км/с.

Вторая математическая модель горной породы была построена также в два этапа, но с существенными отличиями. На всех стадиях моделирования использовался метод обобщенного сингулярного приближения (ОСП). В этом методе возможно неявно учесть связанность включений при моделировании используя специальный параметр.

На первом шаге построения модели, изолированные удлиненные частицы глинистых минералов были помещены в минеральную матрицу, которая представляет собой смесь различных минералов. В этой модели был также использован анизотропный тензор упругости глинистых минералов [10]. Аспектное отношение включений глинистых минералов было задано равным 0.08 (оценка получена на основании микроскопического анализа шлифа породы). В результате был получен эффективный тензор упругости “материал 1б”. Неизвестными параметрами на этом шаге были скорости упругих волн в матрице породы. Во втором шаге, поры двух типов были помещены в “материал 1б”. Поры первого типа были ориентированы хаотически. Второй тип пор представлял собой ориентированные трещины. В результате второй ступени моделирования, эффективный тензор упругости породы-песчаника был посчитан. Независимые параметры во втором шаге были аспектное отношение хаотически ориентированных пор, аспектное отношение трещин, пара-

метр связанности пор и объем трещин.

Таким образом, в данной модели всего 6 независимых параметров. Использовался аналогичный метод инверсии путем минимизации функционала с ограничениями на параметры поиска. Параметры модели были усреднены среди всех найденных решений. Параметры модели (rms в скобках): аспектное отношение хаотически ориентированных пор 0.67 (0.23); аспектное отношение трещин 0.01 (0.001); параметр связанности пустотного пространства 0.1 (0.1); трещинная пористость 0.06 (0.06) %; скорости продольных и поперечных волн 5.04 (0.15) и 3.27 (0.04) км/с, соответственно. Две модели показывают одинаковые параметры инверсии (различие параметров менее 10%) в пределах изменения пустотного пространства модели от 0 до 5%. Для больших значений пористости модели показывают более существенное различие параметров, следовательно, необходимы дополнительные исследования.

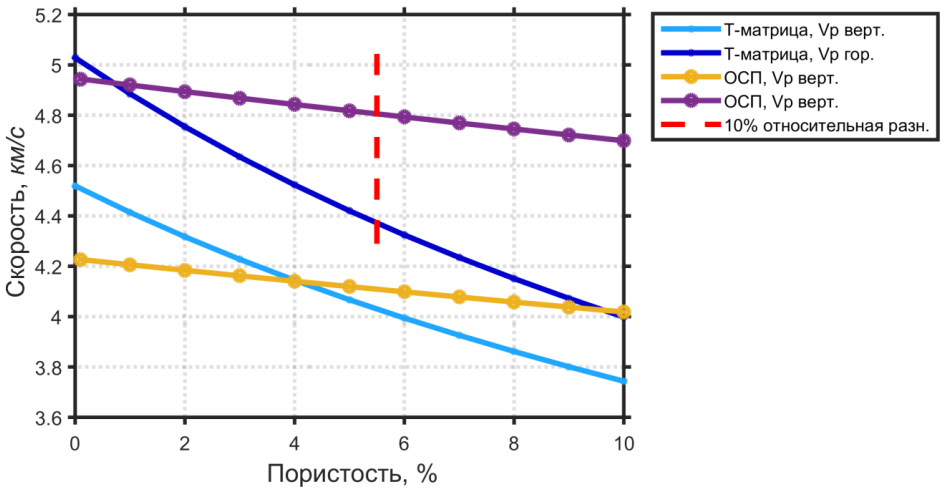


Рис. 2: Сравнение двух моделей, построенных методом Т-матрицы и Обобщенного Сингулярного приближения. Вертикальная ось представляет собой скорости продольных волн, посчитанных по данным эффективного тензора упругости для каждой модели. Различие вертикальных и горизонтальных скоростей волн обусловлено анизотропией среды (смотри [8]). Показано, что при пористости от 0 до (примерно) 5.5% модели показывают близкие значения скоростей продольных волн. Однако, при пористости более 5.5% (справа от красной вертикальной пунктирной лини) различие моделей становится очень явным.

4. Заключение

Многие методы теории эффективных сред основаны на уравнении (1) и используют гипотезы эффективного поля. При этом, различные методы показывают одни и те же результаты для одинаковых моделей. Получается,

что выбор метода не являются определяющим. С другой стороны, модельная среда и выбор параметров модели являются основными факторами в построении математических моделей реальных сред.

Для подтверждения приведенных выше выводов, были построены две модели реальной среды – горной породы, которая представляла собой поровотрещиноватый песчаник. Две сконструированные модели обладают разными параметрами. Однако были отмечены общие тенденции в моделировании реальных сред: 1) необходимость введения параметров, определяющих жесткость контакта минеральных зерен и 2) необходимость введения параметра, описывающего связанность компонентов модельной среды.

При этом необходимо постоянно помнить, что все используемые методы ТЭС основываются на модельных предположениях — гипотезах эффективного поля — и используют асимптотические методы оценки, а потому нуждаются в верификации на основании численных методов. В настоящее время нами ведутся работы по сопоставлению оценок, получаемых методами ТЭС, с результатами конечно-элементного расчёта напряжённо-деформированного состояния полиминерального пористого композита с использованием CAE FIDESYS [3, 4, 5, 6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алхименков Ю. А. Метод Т-матрицы для математического моделирования эффективных упругих свойств коллекторов углеводородов. Физика Земли, 2017, (3), 155–166.

2. Баюк И.О. Основные принципы математического моделирования макроскопических физических свойств коллекторов углеводородов // Технологии сейсморазведки, 2013, № 4. С. 5—18.

3. Баюк И.О., Д. Е. Белобородов, И. А. Березина, И. И. Вдовиченко, А. В. Вершинин, Д. Р. Гилязетдинова, В. Н. Горбунов, К. М. Зингерман, Д. В. Корост, М. А. Краснова, С. А. Тихоцкий, Д. А. Улькин, И. В. Фокин, М. Я. Яковлев, and Т. Р. Ялаев. Проблемы апскейлинга упругих свойств пород-коллекторов. // Материалы конференции Сейсмические технологии - 2016, pages 27–30. Москва, 2016.

4. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URRS, 2015 — 400 с.

5. Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М. Об одном способе оценки эффективных характеристик пористых тел при конечных деформациях.// Известия АН. Механика твердого тела. 1997, № 4. - С.45-50.

6. Левин В.А., Зингерман К.М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении.// Доклады РАН. 2002. Т. 382, № 4. – С. 482–487.

7. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.

8. Alkhimenkov Y. A., & Bayuk I. O. Analysis of anisotropy parameters of fractured carbonate reservoir. In 6th EAGE Saint Petersburg International Conference and Exhibition. 2014.

9. Alkhimenkov Y. Practical Applications of the T-Matrix Approach to Fractured Porous Rocks. In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2015.

10. Bayuk I. O., Ammerman M., & Chesnokov E. M. Elastic moduli of anisotropic clay. Geophysics, 2007, 72(5), D107–D117.

11. Buryachenko V.A. Micromechanics of Heterogeneous Materials. Springer, 2007.

12. Buryachenko, V. A. On the thermo-elastostatics of heterogeneous materials: I. General integral equation. Acta mechanica, 2010, 213(3), 359-374.

13. Jakobsen M., Hudson J., and Johansen T.A. T-matrix approach to shale acoustics // Geophys. J. Int. 2003. Vol. 154. P. 533–558.

14. Kanaun K.K., Levin V.M. Self-Consistent Methods for Composites. Vol. 1, 2. Springer, Dordrecht. 2008.

15. Willis J.R. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites // J. Mech. Phys. Solids, 1977, 25, 185–202.

REFERENCES

1. Alkhimenkov, Yu.A. 2017, “The T-matrix approach for the mathematical modeling of the effective elastic properties of hydrocarbon reservoirs”. *Izv., Phys. Solid Earth.* Vol. 53, Issue 3, pp. 477-487. https://doi.org/10.1134/S1069351317030016

2. Bayuk, I.O. 2013, “Main principles of the mathematicall modelling of the macroscopic physical properties of the hydrocarbon collectors”, *Tekhnologii Seismorazvedki*, no. 4, pp. 5-18

3. Bayuk, I.O., Beloborodov, D.E., Berezina, I.A., Vdovichenko, I.I., Vershinin, A.V., Gilyazetdinova, D.R., Gorbunov, V.N., Zingerman, K.M., Korost, D.V., Krasnova, M.A., Tikhotskiy, S.A., Ulkin, D.A., Fokin, I.V., Yakovlev, M.Ya. & Yalaev, T.R. “Problems of the collector rocks elastic properties upscaling”, Materialy konferencii “Seismicheskie technologii” (Proc. of the conference “Seismic technologies”). Moscow, 2016, pp. 27-30.

4. Morozov, E.M., Levin V.A. & Vershinin, A.V. 2015, *Strength Analysis: FIDESYS in engineer hands*, URSS, Moscow, 400 pp.

5. Levin, V.A., Lokhin, V.V. & Zingerman, K.M., 1997. "About one way of strength characteristics estimation for the porous bodies suspected to finite deformations". *Izvestya AN. Mechanika tverdogo tela*, no. 4, pp. 45-60.

6. Levin, V.A. & Zingerman, K.M., 2002. "About the effective constitutive relations for the porous materials suspected to finite deformations and their overlaing". *Doklady RAN*, Vol. 382, no. 4, pp. 482-487.

7. Shermergor, T.D. 1977, *Theory of elasticity for micro-inhomogeneous media*, Nauka, Moscow, 400 pp.

8. Alkhimenkov, Yu.A. & Bayuk, I.O., 2017. "Analysis of anisotropy parameters of fractured carbonate reservoir". *Proc. 6th EAGE Saint Petersburg International Conference and Exhibition*. Sankt-Petersburg, 2016.

9. Alkhimenkov, Y. "Practical Applications of the T-Matrix Approach to Fractured Porous Rocks". *Proc. SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers*. Houston, 2015.

10. Bayuk, I. O., Ammerman, M. & Chesnokov E. M., 2007. "Elastic moduli of anisotropic clay". *Geophysics*, vol. 72(5), D107-D117.

11. Buryachenko, V.A. 2007, *Micromechanics of Heterogeneous Materials*. Springer. 687 pp.

12. Buryachenko, V.A., 2010. "On the thermo-elastostatics of heterogeneous materials: I. General integral equation". *Acta mechanica*, vol. 213(3), pp. 359-374.

13. Jakobsen, M., Hudson, J. & Johansen T.A., 2003. "T-matrix approach to shale acoustics". *Geophysical Journal International*, vol. 154. pp. 533–558.

14. Kanaun, K.K. & Levin, V.M. 2008. "Self-Consistent Methods for Composites". Vol. 1, 2. Springer, Dordrecht.

15. Willis, J.R., 1977. "Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites". *Journal of the Mechanic and Physics of Solids*, vol. 25, pp.185–202.

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 621.98.04 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-55-71

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СВЕРХПЛАСТИЧЕСКОЙ ФОРМОВКИ

А. Х. Ахунова[1], Р. Р. Мулюков[2], Р. В. Сафиуллин[3] (Уфа)

Аннотация

В работе рассматриваются вопросы совершенствования процесса изготовления трехслойных полых конструкций из титанового сплава ВТ6, изготовленных по технологии, комбинирующей сверхпластическую формовку (СПФ) и сварку давлением (СД). Для оптимизации процесса формовки целесообразно использовать конечно-элементное моделирование, для которого необходимо задание адекватных определяющих соотношений, описывающих отклик материала на термомеханическое воздействие, а также феноменологического закона трения на поверхности контакта деформируемого материала с формообразующей матрицей. Для нахождения материальных констант в определяющих соотношениях и коэффициента трения прибегают к тестовым формовкам листового материала в матрицы различных форм. В таких экспериментах реализуется двухосное нагружение, как и в реальных процессах изготовления сложнопрофильных конструкций из листовых материалов методом СПФ. С этой целью выполнено конечно-элементное моделирование СПФ листовых заготовок в матрицы двух типов: протяженную, имеющую в поперечном сечении форму равнобедренного треугольника, и коническую. Даны рекомендации по выбору оптимального угла при вершине, определяющего геометрию матриц, при котором обеспечивается постоянство действующих напряжений в ходе формовки при постоянном давлении, что позволяет существенно упростить анализ результатов эксперимента. Установлено, что на выбор угла матриц оказывают влияние различные факторы: для протяженной матрицы это коэффициент трения на границе заготовка-матрица, а для конической матрицы - образующаяся при формовке разнотолщинность.

На основании численного моделирования процесса формовки листовых заготовок в матрицы дана методика оценки коэффициента трения на контактной поверхности заготовка-матрица. С использованием

[1]Ахунова Ангелина Халитовна, научный сотрудник Института проблем сверхпластичности металлов РАН, e-mail: akhunova.a.kh@gmail.com

[2]Мулюков Радик Рафикович, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института проблем сверхпластичности металлов РАН, e-mail: imsp@imsp.ru

[3]Сафиуллин Ринат Владикович, старший научный сотрудник Института проблем сверхпластичности металлов РАН, e-mail: dr_rvs@mail.ru

материальных констант определяющего соотношения, рассчитанных по предложенным методикам и рекомендациям, проведено конечно-элементное моделирование процесса СПФ трехслойных полых конструкций. Установлены технологические ограничения на геометрические параметры конструкций такие, как угол наклона ребер жесткости и отношение толщины обшивки к толщине заполнителя, обеспечивающие формовку без образования складок на обшивках и минимальную разнотолщинность ребер жесткости.

Ключевые слова: сверхпластическая формовка, матрица, трехслойная полая конструкция, метод конечных элементов.

Библиография: 24 названий.

FINITE-ELEMENT MODELING OF SUPER-PLASTIC FORMING PROCESSES

A. Kh. Akhunova, R. R. Mulyukov, R. V. Safiullin (Ufa)

Abstract

The present work is devoted to the development of the production of three-layered hollows structures made of VT6 titanium alloy by means of superplastic forming (SPF) and pressure welding. Finite-element modeling can be successfully applied to optimize the forming process, if the adequate constitutive relations would be defined and the friction at the contact surface of the material with the die would be specified. To find the friction coefficient and the parameters of the constitutive relations for metal forming process, test experiments are conducted to the forming of sheet into dies of various shapes. In such test experiments, a biaxial loading is realized, as in the actual processes of fabricating complicated structures from sheet by SPF. To this end, Finite-element modeling of the SPF process of sheet forming into dies of two types is performed: (i) into wedge die having cross section in the form of equilateral triangle, and (ii) cone die. Recommendations are given for the choice of the optimum angle at the vertex, determining the geometry of the dies, which results in the constancy of the stresses during forming at constant pressure.

The methodology for estimating the coefficient of friction on the contact surface between sheet and die is given. Finite-element modeling of the SPF process of three-layer hollow structures is carried out using the parameters of the constitutive relations obtained by the proposed methods. Technological constraints on the geometric parameters of structures, such as the angle of inclination of the stiffening ribs and the thickness ratio of outer to inner sheet thicknesses are established, which provides forming without the formation of folds on the shell and the minimum variability of ribs thickness.

Keywords: superplastic forming, die, three-layered hollow structure, finite element method.

Bibliography: 24 titles.

1. Введение

Совершенствование технологии сверхпластической формовки (СПФ) изделий из различных сплавов может быть сопряжено со значительными затратами времени и ресурсов. Существенное сокращение сроков разработки и отладки технологии может быть достигнуто за счет применения современных методов компьютерного моделирования, позволяющих проанализировать практически все аспекты процесса СПФ. Во-первых, моделирование позволяет подтвердить или опровергнуть возможность получения конечной конфигурации изделий, в частности, показать области утонения листовых заготовок или образования складок. Во-вторых, по результатам моделирования можно определить технологические ограничения на геометрические параметры изделия. В-третьих, с помощью моделирования можно оптимизировать закон подачи давления газа, с тем, чтобы обеспечить деформацию материала в наиболее деформируемых частях изделия со скоростями, обеспечивающими сверхпластическое течение, и минимизировать время формовки [1,2].

В настоящее время при моделировании процессов СПФ в основном используются программные продукты, основанные на методе конечных элементов. Это такие пакеты прикладных программ, как ANSYS, DEFORM–3D, Fidesys [3] и др. Алгоритмы решения физически и геометрически нелинейных задач, решение контактных задач и примеры их применения описаны в работах [4-6]. Использование программного обеспечения является более или менее рутинной задачей. Тем не менее, есть несколько важных аспектов, которые могут повлиять на точность и эффективность моделирования, такие как выбор определяющего соотношения, описывающего отклик материала на термомеханическое воздействие [7-8], а также установление феноменологического закона трения на поверхности контакта деформируемого материала с формообразующей матрицей.

Параметры определяющих соотношений (ОС) для различных материалов, как правило, находят из экспериментальных данных, полученных при одноосном растяжении образцов. Для получения более надежных определяющих соотношений следует использовать экспериментальные данные, где схема нагружения образца близка к той, что реализуется в реальном процессе СПФ.

В данной работе описываются технологические эксперименты, проводимые для установления параметров определяющих соотношений для материалов, деформируемых в режиме сверхпластичноской формовки. Рассматриваются методы учета трения между матрицей и формуемой деталью. С помощью компьютерного моделирования процесса СПФ с использованием параметров ОС, рассчитанных по приведенным методикам, определяются технологические ограничения на геометрические параметры трехслойных конструкций.

2. Сверхпластическая формовка листовых заготовок в формообразующие матрицы

Результаты использования пакета прикладных программ в значительной степени зависят от принятой модели деформируемого материала. При этом очевидна необходимость анализа имеющихся в пакете ОС и выбора такого соотношения, которое адекватно описывает поведение материала в исследуемом процессе. В этой связи, преимуществом обладают такие программные продукты, например, ANSYS, Fidesys [9], которые позволяют не только использовать ОС, уже имеющиеся в базе данных, но и вводить свои ОС, что существенно облегчает разработку математической модели технологического процесса.

ОС содержат параметры, которые должны быть установлены из экспериментальных данных. Сверхпластичность металлов и сплавов, как правило, исследуется с помощью испытаний на одноосное растяжение плоских образцов. В этом случае только одна из главных компонент напряжений не равна нулю $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, где $\sigma = P/S$, P - растягивающая нагрузка и S - площадь поперечного сечения образца.

Хорошо известно, что пластическое течение очень чувствительно к количеству ненулевых компонент главных напряжений. В процессе СПФ листовых материалов, как правило, два из трех компонентов главных напряжений не равны нулю и, таким образом, параметры определяющих соотношений должны определяться из экспериментов на двухосное нагружение.

Одним из наиболее популярных экспериментов, где реализуется двухосная схема нагружения, является свободная выдувка листового материала. Однако в таких испытаниях при постоянном давлении газа, напряжения и скорости деформации в вершине купола существенно зависят от времени. Поскольку напряжение течения сверхпластического материала показывает очень высокую чувствительность к скорости деформации, то желательно определять параметры материала из экспериментов при постоянной скорости деформации. Это может быть достигнуто при СПФ листовой заготовки в коническую (рис. 1) [10-12] или в протяженную клиновую (рис. 2) [7, 12-13] матрицы.

При формовке листовой заготовки в коническую матрицу деформируемая часть заготовки имеет форму части сферы (рис. 1), где реализуется напряженное состояние с главными компонентами тензора напряжений $\sigma_1 = \sigma_2 = pR/(2s)$, $\sigma_3 = 0$, где p - давление формующего газа, R - радиус кривизны сферической части образца, s - толщина листа в сферической части образца. Выбором угла раствора конической матрицы можно добиться постоянства напряжений в формуемой заготовке при постоянном давлении газа, при этом уменьшение радиуса кривизны сферы и ее толщины происходит так, что отношение R/s остается неизменным в ходе всего процесса.

Формовка в клиновую матрицу (рис. 2) осуществляется в условиях плоской деформации, поскольку на достаточном удалении от торцов заготовки

краевым эффектом, распространяющимся примерно на одну ширину матрицы, можно пренебречь. Деформируемая часть заготовки имеет при этом форму боковой части цилиндра. В предположении соосности девиаторов напряжений и деформаций для несжимаемого материала имеем следующие выражения для главных компонент тензора напряжений: $\sigma_1 = pR/s$, $\sigma_2 = pR/(2s)$, $\sigma_3 = 0$, где R - радиус кривизны цилиндрической части заготовки, а s - её толщина. Если матрица имеет в поперечном сечении форму клина с углом раствора α, то выбором этого угла можно добиться постоянства напряжений в формуемой части заготовки при постоянном давлении газа, как и в случае конической матрицы.

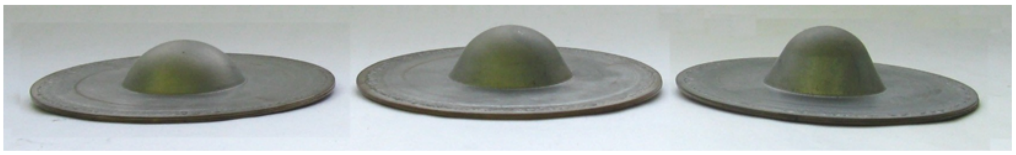


Рис. 1: Образцы после СПФ листовой заготовки в коническую матрицу. Часть листа, не пришедшая в соприкосновение с конической матрицей, деформируется свободно и имеет форму части сферы.

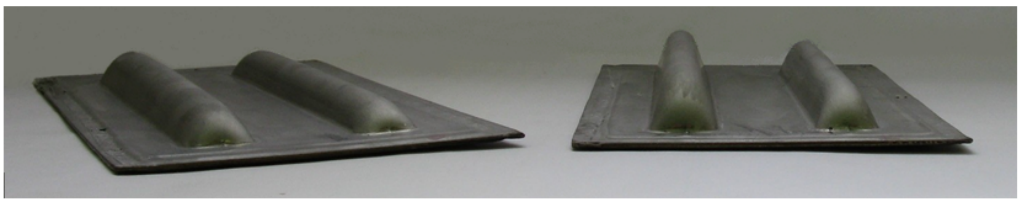


Рис. 2: Образцы после СПФ листовой заготовки в клиновую матрицу. Часть листа, не пришедшая в соприкосновение с клиновой матрицей, деформируется свободно и имеет форму части цилиндра.

Оптимизация угла матрицы.

Оценка оптимального угла конической и протяженной формообразующих матриц производилась со следующими предположениями [12]:

1. Толщина заготовки достаточно мала, так что можно пренебречь изгибными деформациями и при определении напряженного состояния образца пользоваться безмоментной теорией оболочек;

2. Купол в процессе СПФ принимает форму сегмента цилиндра (протяженная матрица) или сегмента сферы (коническая матрица), гладко сопряженных с частью заготовки, находящейся в контакте с матрицей;

3. Толщина части заготовки, находящейся в контакте с матрицей, изменяется вдоль меридиана по линейному закону;

4. В цилиндрическом или сферическом сегментах заготовки предполагается равнотолщинность;

5. На границе контакта заготовка-матрица отсутствует проскальзывание.

На рис. 3 представлена схема деформирования заготовки в моменты времени t и t'. Данная схема является общей как для формовки в коническую, так и в клиновую матрицы. В случае конической (клиновой) матрицы используют цилиндрическую (декартову) системы координат.

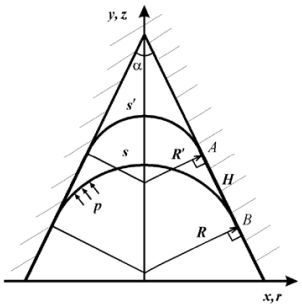


Рис. 3: Схема формовки листовой заготовки в формообразующую матрицу. В случае конической (клиновой) матрицы используют цилиндрическую (декартову) системы координат.

Формовка листовой заготовки в протяженную матрицу (плоская деформация)

Оценим оптимальный угол α между образующими плоскостями протяженной матрицы при сверхпластической формовке (рис. 3). Рассмотрим конфигурацию заготовки в моменты времени T и T' ($T < T'$). Считаем, что в момент времени T заготовка имеет форму сегмента цилиндра радиусом R и толщиной s. В момент времени T' часть материала оказывается в контакте с матрицей (отрезок AB) и приобретает форму пластин шириной H и средней толщиной $(s + s')/2$, гладко сопряженных с цилиндрическим сегментом радиусом R' и толщиной s'. Заметим, что R' и s' зависят от α, R и s, и их можно найти из условия сохранения объема материала

$$\frac{V}{V'} = \frac{sR\,(\pi - \alpha)\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)}{s'R'\,(\pi - \alpha)\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2) + (R - R')\,(s + s')} = 1, \tag{1}$$

где V и V' – объем материала заготовки в моменты времени T и T' соответственно.

Согласно безмоментной теории оболочек меридиональное разрывное усилие в цилиндрическом сегменте заготовки в момент времени T определяется как $\sigma = \frac{Rp}{s}$, а в момент времени T' величина усилия составляет $\sigma' = \frac{R'p}{s'}$, где p- давление газа. Приравнивая эти значения, получим условие постоянства напряжений в процессе деформации при постоянном давлении

$$\frac{R}{s} = \frac{R'}{s'}. \tag{2}$$

Выразив s' из уравнения (1), подставим его в уравнение (2). После элементарных преобразований получим уравнение для оптимального угла α:

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{(\pi - \alpha)}. \tag{3}$$

Корень этого уравнения $\alpha = 46°$является значением оптимального угла между образующими плоскостями протяженной матрицы, при котором напряжения в цилиндрическом сегменте заготовки будут постоянными в процессе формовки с постоянным давлением.

Формовка листовой заготовки в коническую матрицу (осесимметричная деформация)

Оценим оптимальный угол α конической матрицы. Аналогично первому случаю, рассмотрим конфигурацию заготовки в моменты времени T и T' $(T < T')$. Считаем, что в момент времени T заготовка имеет форму сегмента сферы радиусом R и толщиной s (см. рис. 1(c)). В момент времени T' часть материала оказывается в контакте с матрицей (отрезок AB) и приобретает форму усеченного конуса средней толщиной $(s + s')/2$, гладко сопряженного со сферическим сегментом радиусом R' и толщиной s'. Условие равенства объема материала в рассматриваемые момента времени имеет вид:

$$\frac{V}{V'} = \frac{4\pi R^2 S\,(1 - \sin(\alpha/2))\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)}{4\pi R'^2 S'\,(1 - \sin(\alpha/2))\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2) + \pi\,(S + S')\,(R - R')\cos(\alpha/2)(R + R')} = 1. \tag{4}$$

Согласно безмоментной теории оболочек меридиональное разрывное усилие в сферическом сегменте заготовки в момент времени T равняется $\sigma = \frac{Rp}{2s}$, а в момент времени T' достигает значения $\sigma' = \frac{R'p}{2s'}$. Условие постоянства напряжений и в этом случае сводится к выражению (2). Получив выражение для s' из (4), подставим его в уравнение (2). Положив $R' = R - \varepsilon$, где $\varepsilon << 1$, после линеаризации по малому параметру ε получим уравнение для оптимального угла α:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Корень этого уравнения $\alpha = 60°$ дает значение оптимального угла раствора конической матрицы, при котором напряжения в куполе остаются постоянными в процессе формовки при постоянном давлении.

Трение между матрицей и листовой заготовкой.

Известно, что снижение поверхностного трения между деформируемым листом и поверхностью матрицы позволяет улучшить распределение толщины в отформованной части заготовки [14]. В процессе СПФ в протяженную и коническую матрицы лист металла частично контактирует с матрицей. Следовательно, эти эксперименты могут быть использованы как для подгонки материальных констант, так и для определения констант модели трения. Параметры, соответствующие наилучшему приближению к экспериментальным данным, рекомендуются для использования в компьютерном моделировании СПФ с использованием коммерческих программных продуктов.

Чтобы описать действие контактного трения при формовке коническую матрицу, проводилось моделирование СПФ в матрицу с углом α=58° для диапазона значений коэффициента трения [15]. По результатам моделирования рассчитывалась толщина отформованной заготовки s по формуле $s = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, где (r_1, z_1) и (r_2, z_2)- координаты точек внешней и внутренней поверхностей образца, лежащих на нормали к срединной поверхности, а $r = (r_1 + r_2)/2$ - радиус (рис.4). Было выявлено, что коэффициент трения заметно влияет на наклон линейного участка кривых $s(r)$ (толщина заготовки как функция радиальной координаты). Действительным значением коэффициента трения принимался тот, при котором тангенс угла наклона φ линейного участка кривой $s(r)$, построенный по результатам моделирования для различных значений коэффициентов трения (сплошная линия $\mathrm{tg}\varphi_{mod}$ на рис. 5), совпадал с $\mathrm{tg}\varphi$, полученным из экспериментов (пунктирная линия $\mathrm{tg}\varphi_{\mathrm{exp}}$ на рис. 5).

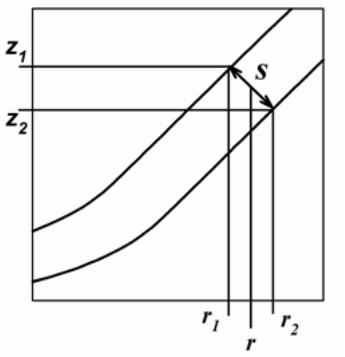


Рис. 4: Схема измерения толщины образца s.

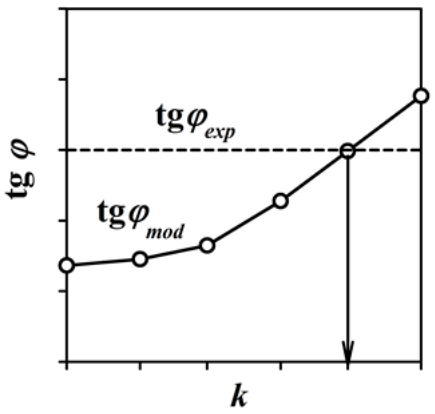


Рис. 5: Зависимость тангенса угла наклона φ линейного участка кривой $s(r)$ от коэффициента трения k, представленного в логарифмической шкале.

В случае клиновой матрицы для оценки коэффициента трения k было проведено моделирование СПФ в матрицы с углами $\alpha = 35°$ и $\alpha = 45°$ для

диапазона значений коэффициента трения. Действительным значением коэффициента трения считался тот, при котором происходило совпадение положения полюса и формы куполов, полученных при расчете и из эксперимента.

3. Моделирование СПФ трехслойных полых конструкций.

При разработке современных авиадвигателей нового поколения особый интерес представляют трехслойные полые конструкции, состоящие из обшивок и образующего ребра жесткости гофрированного заполнителя, изготавливаемые из двухфазных титановых сплавов по технологии, сочетающей сверхпластическую формовку (СПФ) и сварку давлением (СД) [16-19] (рис. 6). Применение таких конструкций позволяет снизить вес летательного аппарата, что делает актуальным совершенствование технологии их изготовления [20].



Рис. 6: Трехслойная конструкция.

Технология получения трехслойных полых конструкций методом СПФ/СД включает в себя подготовку пакета из трех листовых заготовок, где верхняя и нижняя заготовки играют роль обшивок, а средняя – заполнителя. На обшивки наносят рисунок противосварочного покрытия и проводят сварку пакета давлением. Пакет после сварки помещают в формообразующую матрицу и подачей инертного газа в полость пакета производят формовку изделия в условиях сверхпластичности. При этом лист заполнителя образует ребра жесткости, а обшивки принимают форму полости матрицы. В процессе формовки трехслойных полых конструкций необходимо обеспечивать оптимальные температурно-скоростные условия деформации листовой заготовки заполнителя для того, чтобы избежать его разрыва и уменьшить разнотолщинность ребер жесткости.

При совершенствовании технологии процесса СПФ трехслойных полых конструкций важнейшим моментом является определение технологических

ограничений на такие геометрические параметры конструкции, как угол наклона ребер жесткости и отношение толщин обшивок и заполнителя. Определение рациональных геометрических параметров направлено на обеспечение формообразования изделий без складок на обшивках и на уменьшение разнотолщинности ребер жесткости. Решение этой задачи многовариантно и основывается, как правило, на производственном опыте. Существенную помощь при этом может оказать компьютерное моделирование [20-21].

Компьютерное моделирование выполнялось на базе универсального комплекса ANSYS10.0 (ED). При моделировании использовалось ОС Пежины. Параметры ОС определялись по результатам СПФ листовых заготовок из титанового сплава ВТ6 в протяженную клиновую матрицу при температуре 900°С [12-13]. Выбор данного эксперимента для определения параметров обусловлен тем, что напряженно-деформированное состояние при СПФ трехслойной конструкции, и при СПФ листовой заготовки в протяженную клиновую матрицу, близко к плоской деформации.

Моделирование СПФ трехслойной полой конструкции проводилось в двумерной постановке (плоская деформация) [22-24]. Конечно-элементная модель исходного пакета, состоящего из трех листовых заготовок, представлена рис. 7, а. Пакет помещался в абсолютно жесткую матрицу. СПФ конструкции осуществлялась путем подачи давления инертного газа в полость пакета, в результате чего конструкция принимала форму матрицы, а из листа заполнителя формировались ребра жесткости, как показано на рис. 7, б. Ввиду симметрии пакета при моделировании рассматривалась половина всей конструкции. Расчетная область разбивалась на восьмиузловые изопараметрические конечные элементы «PLANE183» с квадратичной аппроксимацией поля перемещений. Формообразующий инструмент определялся элементом «TARGE169». Граничные условия на поверхности раздела формообразующего инструмента и деформируемого пакета задавались контактным элементом «CONTA172». Давление газа при формовке увеличивалось по линейному закону.

Результаты экспериментов показывают, что при СПФ трехслойных конструкций для малых значений отношений толщины обшивки к толщине заполнителя возникает опасность образования складок на обшивках. В этой связи появляется задача определения минимально возможной величины $s_о/s_з$, (где $s_о$ и $s_з$ это исходные толщины обшивки и заполнителя, соответственно), обеспечивающей СПФ без образования складок. С этой целью было проведено моделирование СПФ трехслойных конструкций с толщиной заполнителя $s_з$=0,8 мм для набора толщин обшивок $s_о$=$\{$0,5; 0,7; 0,8; 1,2; 1,5$\}$ мм, т.е. для $s_о/s_з$=$\{$0,6; 0,9; 1,0; 1,5; 1,9$\}$. Скорость увеличения давления газа была принята dp/dt = 12000Па/с.

Расчеты показали, что при малых $s_о/s_з$ на обшивке возникают области с большой кривизной поверхности, что приводит к уменьшению напряжений в данных областях. Напряжения можно грубо оценить как $\sigma = p/(\rho s)$, где p – давление газа, s – толщина обшивки в зоне с большой кривизной поверхности ρ. С уменьшением отношения $s_о/s_з$ существенно возрастает общее время

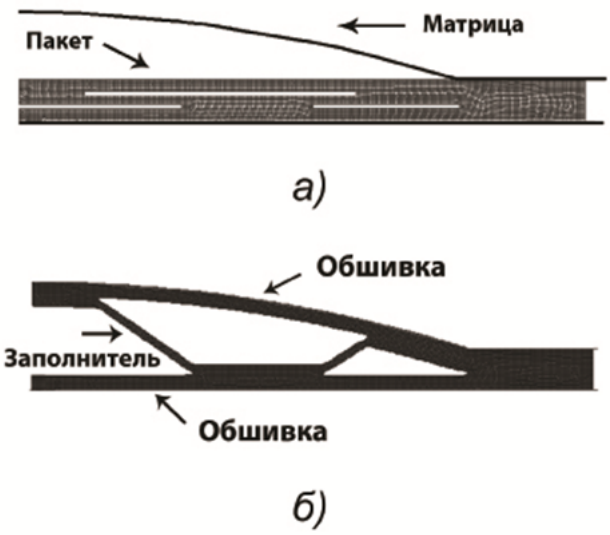


Рис. 7: Конечно-элементная модель *а*) исходного и *б*) отформованного пакета.

формовки, которое необходимо для разглаживания областей с большой кривизной. Более того, когда отношение $s_о/s_з$ становиться меньше определенной величины, которую обозначим $(s_о/s_з)_{\min}$, кривизна обшивок приводит к образованию складок, которые уже невозможно устранить. Для рассматриваемой геометрии трехслойной полой конструкции с гофрированным заполнителем $(s_о/s_з)_{\min}$=0,9. Результаты формовки конструкции с отношением $s_о/s_з$<0,9 представлены на рис. 8.

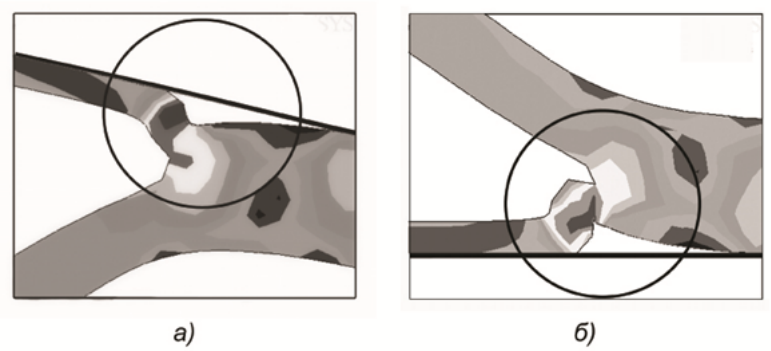


Рис. 8: Результаты моделирования для конструкции с отношением $s_о/s_з$=0,6. Образование складок а) на верхней и б) на нижней обшивке.

Важным параметром качества трехслойной полой конструкции с гофрированным заполнителем является однородность толщины ребер жесткости. Разнотолщинность ребер определим как $(1 - s_{\min}/s_{\max}) \times 100\%$, где s_{min} и s_{max} – минимальная и максимальная толщина ребра. Моделирование формовки трехслойной полой конструкции проводилось для набора значений отношения толщин обшивки и заполнителя $s_о/s_з$ (от 0,6 до 1,9 мм), и угла

наклона ребер жесткости, α={30°; 40°; 50° }. Скорость увеличения давления газа была принята dp/dt 12000Па/с.

Приведенные результаты моделирования СПФ трехслойной полой конструкции показывают, что разнотолщинность ребер жесткости возрастает как с увеличением отношения $s_o/s_з$, так и с увеличением угла наклона ребра жесткости. При этом угол наклона ребра жесткости влияет на значение $(s_o/s_з)_{\min}$.

Увеличение угла наклона ребра приводит к увеличению значения $(s_o/s_з)_{\min}$, а именно, с $(s_o/s_з)_{\min}$ =0,75 для угла 30° до $(s_o/s_з)_{\min}$ =1,1 для угла 50°.

Разнотолщинность в ребре жесткости с наклоном 50° изменяется от 23% до 39% в зависимости от значения отношения $s_o/s_з$. При этом она значительно выше, чем в ребрах с наклоном 30° и 40°, разнотолщинность которых варьируется от 5% до 10%. Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что выбор конкретного сочетания угла наклона ребер жестокости и отношения $(s_o/s_з)_{\min}$ зависит от допуска на разнотолщинность конкретного изделия.

4. Заключение

Проведено компьютерное моделирование процесса СПФ трехслойной конструкции с использованием параметров ОС, найденных по результатам СПФ листовой заготовки в протяженную клиновую матрицу

Установлено, что при значении отношения толщины обшивки s_o к толщине заполнителя $s_з$ ниже предельного возникает опасность образования складок на обшивке. Кроме того, при достаточно малых отношениях $s_o/s_з$, на обшивке могут образовываться участки с большой кривизной поверхности, что приводит к необходимости значительно увеличивать время формовки для того, чтобы разгладить эти участки;

Разнотолщинность ребер жесткости возрастает как с увеличением угла наклона ребер, так и с увеличением отношения толщин обшивки и заполнителя, при этом, разнотолщинность не превышает 10% для угла наклона ребер не более 40°.

Применение компьютерного моделирования позволяет определить условия образования неустранимых дефектов в конструкциях еще на стадии разработки, тем самым уменьшив количество брака на стадии производства.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bonet J., Gil A., Wood R.D., Said R., Curtis R.V. Simulating superplastic forming // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2006. Vol. 195. Issue 48-49. P. 6580–6603. doi: 10.1016/j.cma.2005.03.012

2. Pradeep P., Ayyanar S., Balasubramanian M., Ramanathan K. and Senthilkumar V.S. Advanced Finite Element Analysis and Simulation in Superplastic Forming Process of Stepped Semispherical Die // Journal of Applied Sciences. 2012. Vol. 12. Issue 10. P. 1048-1052.

3. Система прочностного анализа Fidesys, [электронный ресурс] URL http://www.cae-fidesys.com

4. Левин В.А. Зингерман К.М. Точные и приближенные аналитические решения при конечных деформациях и их наложении. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 393 с.

5. Левин В. А., Калинин В. В., Зингерман К. М., Вершинин А. В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование / Под ред. В. А. Левина. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 392 с.

6. Левин В. А., Морозов Е. М., Матвиенко Ю. Г. Избранные нелинейные задачи механики разрушения / Под ред. В. А. Левина. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 407 с.

7. Akhunova A., Dmitriev S., Kruglov A., Safiullin R., Constitutive relations for superplastic flow modeling from two axial loading experiments // Key Engineering Materials. 2010. Vol. 433. P. 319-323.

8. Левин В.А., Зингерман К.М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении // Доклады РАН. 2002. Т. 382, № 4. С. 482–487.

9. Simulation designed for designers, [электронный ресурс] URL https://www.sim4design.com/en/index

10. Lederich R.J., Sastry S.M.L., Hayase M., Mackay T.L. Superplastic formability testing // Journal of Metals. 1982. Vol. 34. Issue 8. P. 16-20.

11. Ghosh A.K., Hamilton C.H. On constant membrane stress test for superplastic metals // Metallurgical Transactions A. 1980. Vol. 11. Issue 11. P. 1915-1918.

12. Ахунова А. Х., Дмитриев С. В. Оптимизация формы матриц для тестовых сверхпластических формовок листовых заготовок // Деформация и разрушение материалов. 2009. № 11. С. 40-44.

13. Ахунова А. Х., Дмитриев С. В., Круглов А. А., Сафиуллин Р. В. Сверхпластическая формовка листовых заготовок в протяженную клиновую матрицу // Деформация и разрушение материалов. 2010. №9. С. 38-41.

14. Панченко Е.В., Алексеев П.А. Влияние контактного трения на формообразование тонкостенных оболочек в режиме сверхпластичности // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2012. № 7. С. 37-40.

15. Ахунова А.Х., Дмитриев С.В., Круглов А.А., Сафиуллин Р.В. Методика оценки коэффициента трения при сверхпластической формовке листового материала в конической матрице // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2009. № 6. С. 15-19.

16. Петров Е.Н., Родионов В.В., Кузьмин Э.Н., Лутфуллин Р.Я., Сафиуллин Р.В. Ячеистые конструкции. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2008, 176 с.

17. Сафиуллин Р.В. Сверхпластическая формовка и сварка давлением многослойных полых конструкций Часть I. Международный опыт // Письма о материалах. 2012. Т. 2(1). С. 32-35.

18. Сафиуллин Р.В. Сверхпластическая формовка и сварка давлением многослойных полых конструкций Часть II. Опыт ИПСМ РАН // Письма о материалах. 2012. Т. 2(1). С. 36-39.

19. Способ изготовления полой вентиляторной лопатки // Патент РФ 2555274, МПК, B21D 53/78. Опубликован 10.07.2015. Бюл. №19. / Морозов М.А., Трифонов В. Г., Харин С.А., Сафиуллин Р.В., Мулюков Р.Р., Манапов И.У., Иноземцев А.А., Павлинич С.П., Артюхов А.В.

20. Темис Ю. М., Худяков А. П. Математическое моделирование операций изотермической штамповки и сверхпластической формовки изготовления полой лопатки вентилятора // Вестник УГАТУ. 2015. Т. 19, № 3 (69). С. 50–60.

21. Ахунова А.Х., Дмитриев С.В., Круглов А.А., Сафиуллин Р.В. Моделирование процесса сверхпластической формовки полых конструкций с гофрированным заполнителем из титанового сплава ВТ6 // Перспективные материалы. 2011. № 12. С. 42-44

22. Ахунова А.Х., Дмитриев С.В., Круглов А.А., Сафиуллин Р.В. Моделирование процесса сверхпластической формовки трехслойных полых конструкций для определения ограничений на их геометрические параметры // Деформация и разрушение материалов. 2012. №11. С. 38-41.

23. Ахунова А.Х., Пшеничнюк А.И., Дмитриев С.В., Сафиуллин А.Р., Сафиуллин Р.В. Оптимизация параметров сверхпластической формовки полых трехслойных конструкций // Деформация и разрушение материалов. 2013. №7. С. 33-38.

24. Сафиуллин А.Р., Сафиуллин Р.В., Сафин Ф.Ф., Ахунова А.Х., Дмитриев С.В. Оптимизация процесса сверхпластической формовки трехслойных полых конструкций // Перспективные материалы. 2013. № 15. С. 114-118.

REFERENCES

1. Bonet, J., Gil, A., Wood, R.D., Said, R. & Curtis, R.V. 2006, "Simulating superplastic forming", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, issue 48-49, pp. 6580–6603. doi: 10.1016/j.cma.2005.03.012

2. Pradeep, P., Ayyanar, S., Balasubramanian, M., Ramanathan, K. & Senthilkumar, V.S. 2012, "Advanced Finite Element Analysis and Simulation in Superplastic Forming Process of Stepped Semispherical Die", *Journal of Applied Sciences*, vol. 12, issue 10, pp. 1048-1052. doi: 10.3923/jas.2012.1048.1052

3. Strength analysis system Fidesys (2012), Available at: http://www.caefidesys.com (Accessed 5 August 2017).

4. Levin, V.A. & Zingerman, K.M. 2016. *Tochnyye i priblizhennyye analiticheskiye resheniya pri konechnykh deformatsiyakh i ikh nalozhenii* [Exact and approximate analytical solutions for finite deformations and their imposition], Fizmatlit, Moscow, Russia.

5. Levin, V. A., Kalinin, V. V., Zingerman, K. M. & Vershinin, A. V. 2007. *Razvitiye defektov pri konechnykh deformatsiyakh. Komp'yuternoye i fizicheskoye modelirovaniye* [Development of defects in finite deformations. Computer and physical modeling], Fizmatlit, Moscow, Russia.

6. Levin, V. A., Morozov, Ye. M. & Matviyenko, Yu. G. 2004. *Izbrannyye nelineynyye zadachi mekhaniki razrusheniya* [Selected nonlinear problems of fracture mechanics], Fizmatlit, Moscow, Russia.

7. Akhunova, A., Dmitriev, S., Kruglov, A. & Safiullin, R. 2010, "Constitutive relations for superplastic flow modeling from two axial loading experiments", *Key Engineering Materials*, vol. 433, pp. 319-323. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.433.319

8. Levin, V.A. & Zingerman, K.M. 2002, "On the construction of effective constitutive relations for porous elastic materials subjected to finite deformations including the case of their superposition", *Doklady RAN*, vol. 382, no. 4, pp. 482–487.

9. Simulation designed for designers (2016), Available at: https://www.sim4design.com/en/index (Accessed 5 August 2017).

10. Lederich, R.J., Sastry, S.M.L., Hayase, M. & Mackay, T.L. 1982, "Superplastic formability testing", *Journal of Metals*, vol. 34, issue 8, pp. 16-20. doi: 10.1007/BF03338067

11. Ghosh, A.K. & Hamilton, C.H. 1980, "On constant membrane stress test for superplastic metals", *Metallurgical Transactions A*, vol. 11, issue 11, pp. 1915-1918.

12. Akhunova, A. Kh. & Dmitriev, S. V. 2009, "Optimization of the shape of dies for test superplastic forming of sheet", *Russian metallurgy (Metally)*, no. 11, p. 40-44.

13. Akhunova, A. Kh., Dmitriev, S. V., Kruglov, A. A. & Safiullin, R. V. 2010, "Superplastic forming of sheet into wedge die", *Russian metallurgy (Metally)*, no. 9, pp. 38-41.

14. Panchenko, Ye.V. & Alekseyev, P.A. 2012, "Effect of contact friction on the formation of thin-walled shells in the superplasticity regime", *Forging and Stamping Production. Material Working by Pressure*, no. 7, pp. 37-40.

15. Akhunova, A.Kh., Dmitriev, S.V., Kruglov, A.A. & Safiullin, R.V. 2009, "Method for estimating the friction coefficient for superplastic forming of sheet into cone die", *Forging and Stamping Production. Material Working by Pressure*, no. 6, pp. 15-19.

16. Petrov, Ye.N., Rodionov, V.V., Kuz'min, E.N., Lutfullin, R.YA. & Safiullin, R.V. 2008, *Yacheistyye konstruktsii* [Cellular structures], RFYATS-VNIITF, Snezhinsk, Russia.

17. Safiullin, R.V. 2012, "Superplastic forming and pressure welding of multilayer hollow structures Part I. International experience", *Letters on materials*, V. 2, issue 1(5), pp. 32-35.

18. Safiullin, R.V. 2012, "Superplastic forming and pressure welding of multilayer hollow structures Part II. Experience of IMSP RAS", *Letters on materials*, V. 2, issue 1(5), pp. 36-39.

19. Morozov, M.A, Trifonov, V.G., Kharin, S.A., Safiullin, R.V., Mulyukov, R.R., Manapov, I.U., Inozemtsev, A.A., Pavlinich, S.P. & Artyukhov, A.V. Institute for Metals Superplasticity Problems RAS, UEC-Aviadvigatel (2015), Sposob izgotovleniya poloy ventilyatornoy lopatki [Method of manufactured hollow fan blade], RU, Pat. № 2555274, B21D 53/78.

20. Temis, YU. M. & Khudyakov, A. P. 2015, "Mathematical modeling of isothermal stamping and superplastic forming operations for manufacturing a hollow fan blade", *Vestnik UGATU*, vol. 19, issue 3 (69), pp. 50–60.

21. Akhunova, A.Kh., Dmitriyev, S.V., Kruglov, A.A. & Safiullin, R.V. 2011, "Modeling of the process of superplastic forming of hollow structures with goffred filler produced from titanium alloy Ti-6Al-4V", *Journal of Advanced Materials*, no. 12, pp. 42-44.

22. Akhunova, A.Kh., Dmitriyev, S.V., Kruglov, A.A. & Safiullin, R.V. 2012, "Modeling of the process of superplastic forming of three-layer hollow structures for determining constraints on their geometric parameters", *Russian metallurgy (Metally)*, no. 11, pp. 38-41.

23. Akhunova, A.Kh., Pshenichnyuk, A.I., Dmitriyev, S.V., Safiullin, A.R. & Safiullin, R.V. 2013, "Optimization of parameters of superplastic forming of hollow three-layer structures", *Russian metallurgy (Metally)*, no. 7, pp. 33-38.

24. Safiullin A.R., Safiullin R.V., Safin F.F., Akhunova A.KH. & Dmitriyev S.V. 2013, "Optimization of the process of superplastic forming of three-layer hollow structures", *Journal of advanced materials*, no. 15, pp. 114-118.

ФГБУН Институт проблем сверхпластичности металлов РАН
получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.4, 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-72-87

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД[1]

А. А. Барях[2], Н. А. Самоделкина[3]

Аннотация

Пластичное деформирование горных пород и формирование поля остаточных деформаций связано с образованием трещин сдвига и отрыва. Для условий объемного напряженного состояния предложен критерий прочности (пластичности), учитывающий совместное действие двух видов разрушения (сдвиг и отрыв) и базирующийся на ассоциированном законе течения. Построенные критериальные соотношения верифицированы при описании результатов механических испытаний горных пород. Получено приемлемое соответствие расчетных и экспериментальных разрушающих напряжений и деформаций. Разработанный алгоритм определения предельных напряжений, упругих и пластических деформации достаточно просто численно реализуется в трехмерных задачах математического моделирования процессов деформирования и разрушения крупномасштабных горнотехнических объектов.

Ключевые слова: критерий прочности (пластичности), горные породы, трехмерные задачи, пластические деформации, численное моделирование.

Библиография: 15 названий.

ABOUT ONE CRITERIA OF STRENGTH OF ROCKS

A. A. Baryakh, N. A. Samodelkina

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда №16-17-00101.

[2]Барях Александр Абрамович, член-корреспондент Российской академии наук, директор Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН, bar@mi-perm.ru

[3]Самоделкина Надежда Анатольевна, ведущий научный сотрудник Горного института УрО РАН, samolelkina@mi-perm.ru

Abstract

Plastic deformation of rocks and generation of residual deformation field are related to shear and tensile cracks formation. For conditions of three-dimensional stress state a strength (yield) criterion is proposed that takes into consideration combined effect of two kinds of failure (shear and tensile failure) and is based on associated flow rule. The developed criteria relations were verified during description of results of rocks mechanical tests. Acceptable concordance between calculated and experimental values of breaking stresses and strains was obtained. Developed algorithm for critical stresses, elastic and plastic deformations determining is easy enough for numerical realization in three-dimensional problems of mathematical modelling of deformation and failure processes of large-scale mine technical objects.

Keywords: strength (yield) criterion, rocks, three-dimensional problems, plastic deformation, numerical simulation.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Пластичный характер деформирования горных пород и формирование поля остаточных деформаций, как правило, связаны с образованием трещин сдвига и отрыва и последующим полным разрушением в виде дезинтеграции. В этой связи переход в режим пластичности для горных пород, зачастую, отождествляется с их предельным состоянием.

Существует множество подходов к описанию предельных состояний твердых деформируемых тел [1-4 и др.]. В практике механики горных пород наиболее часто рассматриваются хорошо опробованные критерии Мизеса, Кулона-Мора [5]. Их применение при математическом моделировании, в основном ограничивается условиями плоского деформированного состояния, поскольку для трехмерных задач реализация этих условий связана с определенными трудностями [6].

В данной работе рассмотрен критерий прочности (пластичности) для трехмерных задач, вид которого подобен критериям Боткина А.И. [7] и Миролюбова И.Н. [8]. Предложенный критерий не требует сложного параметрического обеспечения, легко программируется и обеспечивает достаточно простой алгоритм численной реализации при трехмерном математическом моделировании.

2. Критерий прочности

Процесс разрушения твердого тела в локальной области может быть связан с образованием трещин сдвига под действием касательных напряжений,

величина которых достаточно полно характеризуется интенсивностью напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]/2}, \tag{1}$$

и трещин отрыва под действием нормальных напряжений, уровень которых определяется шаровым тензором

$$I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \tag{2}$$

($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные напряжения, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$).

Рассмотрим критерий прочности, учитывающий совместное действие двух видов разрушения (сдвиг и отрыв):

$$\sigma_i^2 + bI = c. \tag{3}$$

Параметры b и c определим на основании испытаний горных пород при простейших напряженных состояниях.

При одноосном сжатии: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_{\text{сж}}$.
При одноосном растяжении: $\sigma_1 = \sigma_{расm}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Подставляя последние выражения последовательно в (1)-(2), а затем в (3), получим систему уравнений относительно параметров b и c:

$$\begin{cases} \sigma_{\text{сж}}^2 - b\sigma_{\text{сж}} = A \\ \sigma_{\text{раст}}^2 + b\sigma_{\text{раст}} = A \end{cases},$$

решением которой являются следующие соотношения:

$$b = \sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}}, A = \sigma_{\text{сж}}\sigma_{\text{раст}}. \tag{4}$$

Подставляя выражения (4) в (3), получаем критерий прочности (пластичности) в следующем виде:

$$F = \frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] + (\sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_{\text{сж}}\sigma_{\text{раст}} \tag{5}$$

При $F < 0$ напряженно-деформированное состояние соответствует упругой модели деформирования; при $F > 0$ - пластической модели деформирования, при $F = 0$ выражение (5) определяет поверхность предельных напряжений, представленную на рис.1

Предельная поверхность – параболоид вращения относительно оси $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$: внутренние точки соответствуют упругому состоянию. Здесь и далее растягивающие напряжения принимают положительные значения, сжимающие – отрицательные.

3. Сопоставление критериев прочности (пластичности)

Наиболее часто применяемым критерием прочности (пластичности) для горных пород является критерий прочности Кулона, согласно которому условием разрушения за счет образования трещин сдвига является выполнение

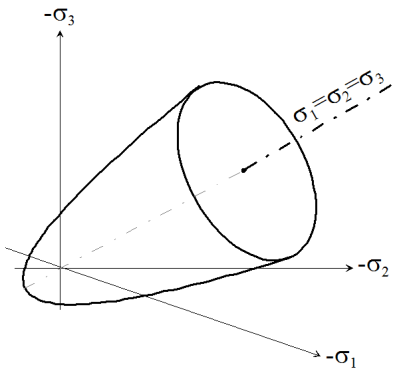


Рис. 1: Поверхность предельных напряжений

неравенства:

$$\tau_{\max} \geqslant \tau_{\text{пр}} = C + \sigma_n tg\varphi. \tag{6}$$

Касательное ($\tau_{\max}$) и нормальное (σ_n) напряжения определяются на площадках, где отношение $\tau_{\max}/\tau_{\text{пр}}$ достигает максимального значения.

Критерий прочности, основанный на параболической огибающей кругов Мора [9], построенной по известным значениям их пределов прочности на растяжение ($\sigma_{\text{раст}}$) и сжатие ($\sigma_{\text{сж}}$), имеет следующий вид:

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{пр}}} = \frac{\tau_{\max}}{\sqrt{(\sigma_{\text{раст}} + \sigma_n)[2 \cdot \sigma_{\text{раст}} - 2\sqrt{\sigma_{\text{раст}}(\sigma_{\text{раст}} + \sigma_{\text{сж}})} + \sigma_{\text{сж}}]}} \geqslant 1 \tag{7}$$

В области растяжения предельное напряжение ограничивается пределом прочности на растяжение:

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{раст}}. \tag{8}$$

Критерии прочности (6) и (7) не учитывают среднюю компоненту главных напряжений - σ_2, а полностью определяются максимальным и минимальным напряжениями σ_1, σ_3:

$$\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}; \sigma_n = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}. \tag{9}$$

Сопоставление предложенного критерия прочности (пластичности) (5) и критериев (6) и (7) проводили для условий плоского деформированного (ПДС) и плоского напряженного (ПНС) состояний.

Для ПДС $\varepsilon_2 = 0$, а следовательно из закона Гука $\sigma_2 = v(\sigma_1 + \sigma_3)$ (ν-коэффициент Пуассона). Для ПНС $\sigma_2 = 0$, исключая таким образом из выражения (5) σ_2, получаем следующее представление критерия (5):

$$A\sigma_1^2 + B\sigma_1 + C = 0, \tag{10}$$

где для ПДС: $A = 1 - \nu + \nu^2$;

$$B = \sigma_3(2\nu^2 - 2\nu - 1) + (\sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}})(1 + \nu);$$

$$C = \sigma_3^2(\nu^2 - \nu + 1) + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст})(1 + \nu)\sigma_3 - \sigma_{сж}\sigma_{раст},$$

а для ПНС: $A = 1$;

$$B = -\sigma_3 + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст});$$

$$C = \sigma_3^2 + (\sigma_{сж} - \sigma_{раст})\sigma_3 - \sigma_{сж}\sigma_{раст}.$$

Задаваясь последовательно значением σ_3 и вычисляя из квадратного уравнения (10) величину σ_1, эти значения σ_1, σ_3 будут определим в соответствии с критерием (5) предельное состояние.

Результаты сопоставления полученных оценок приведены на рис.2.

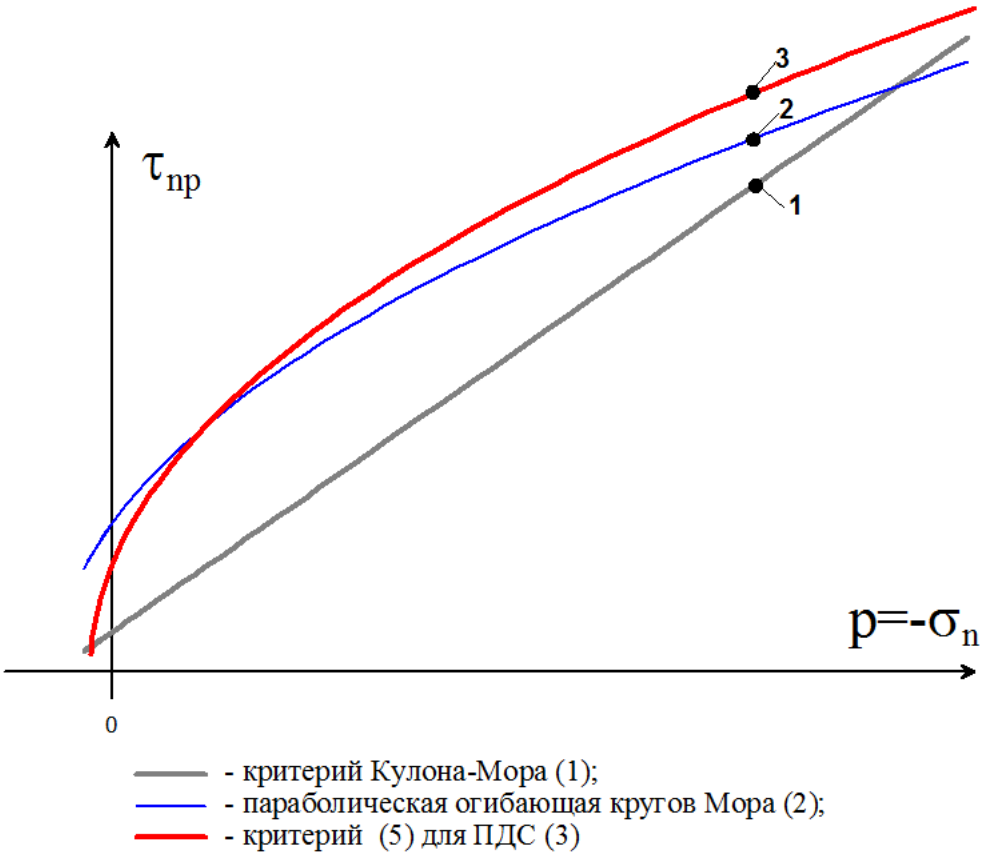


Рис. 2: Графики зависимостей предельных значений касательных напряжений от нормальных напряжений

Использование нелинейного критерий прочности (5), в отличии от линейного Кулоновского критерия, объясняет тот факт, что прочность с увеличением нормального напряжения не должна стремиться к бесконечности. Вместе с тем, во всем диапазоне изменения нормальных напряжений наблюдается приемлемое соответствие параболической огибающей (кривая 2), в целом соответствующей экспериментальным данным, и предложенного критерия прочности (кривая 3).

4. Определение пластичеких деформаций и предельных напряжений

Как уже отмечалось выше, если в локальной области критерий пластичности (5) принимает положительное значение ($F > 0$), то упругая модель деформирования является не правомерной. В этом случае необходимо разделить деформации на упругую и пластическую составляющие $\varepsilon = \varepsilon^{\text{упр}} + \varepsilon^{\text{пр}}$.

Напряжения, соответствующие упругой составляющей деформации, определяют предельное напряжение, то есть соответствующая им точка находится на поверхности пластичности (рис.1).

Примем, что пластическое деформирование подчиняется ассоциированному закону течения, то есть компоненты пластических деформаций определяются соотношениями [10]:

$$\varepsilon_1^{\text{пл}} = \lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_1}; \varepsilon_2^{\text{пл}} = \lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}; \varepsilon_3^{\text{пл}} = \lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_3}, \tag{11}$$

где F- аналитический критерий пластичности (5),
λ - некоторый скалярный множитель;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial\sigma_1} &= 2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + (\sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}});\\
\frac{\partial F}{\partial\sigma_2} &= 2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1 + (\sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}});\\
\frac{\partial F}{\partial\sigma_3} &= 2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2 + (\sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}}).
\end{aligned} \tag{12}$$

Напряжения, соответствующие пластическим деформациям, определятся как:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^{\text{пл}} &= \lambda D_{11}\frac{\partial F}{\partial\sigma_1} + \lambda D_{12}\frac{\partial F}{\partial\sigma_2} + \lambda D_{13}\frac{\partial F}{\partial\sigma_3},\\
\sigma_2^{\text{пл}} &= \lambda D_{21}\frac{\partial F}{\partial\sigma_1} + \lambda D_{22}\frac{\partial F}{\partial\sigma_2} + \lambda D_{23}\frac{\partial F}{\partial\sigma_3},\\
\sigma_3^{\text{пл}} &= \lambda D_{31}\frac{\partial F}{\partial\sigma_1} + \lambda D_{32}\frac{\partial F}{\partial\sigma_2} + \lambda D_{33}\frac{\partial F}{\partial\sigma_3},
\end{aligned} \tag{13}$$

где D_{ij} - компоненты матрицы упругости. Считая геоматериал изотропным $D_{11} = D_{22} = D_{33}$, $D_{12} = D_{21} = D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32}$, в дальнейших выкладках можно использовать только компоненты D_{11} и D_{12}.

Выразим с учетом (13) значения предельных напряжений, соответствующие упругим деформациям:

$$\sigma_1^{\text{пр}} = \sigma_1 - \sigma_1^{\text{пл}}, \sigma_2^{\text{пр}} = \sigma_2 - \sigma_2^{\text{пл}}, \sigma_3^{\text{пр}} = \sigma_3 - \sigma_3^{\text{пл}} \tag{14}$$

Подставив (14) в выражение (5) и учитывая, что точка, соответствующая $\sigma_1^{\text{пр}}, \sigma_2^{\text{пр}}, \sigma_3^{\text{пр}}$, располагается в пределах поверхности пластичности ($F = 0$), получаем уравнение относительно неизвестного параметра λ:

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \tag{15}$$

где $A = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_1 s_2 - s_2 s_3 - s_3 s_1$,

$$B = -2s_1\sigma_1 - 2s_2\sigma_2 - 2s_3\sigma_3 + s_1(\sigma_2 + \sigma_3) + s_2(\sigma_3 + \sigma_1) + s_3(\sigma_1 + \sigma_2) - \\ -(\sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}})(s_1 + s_2 + s_3), \tag{16}$$

$$C = \frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] + \\ +(\sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_{\text{сж}}\sigma_{\text{раст}}.$$

Входящие в (16) выражения s_1, s_2, s_3 определяются следующим образом:

$$s_1 = D_{11}\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + D_{12}\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}\right),$$

$$s_2 = D_{11}\frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + D_{12}\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}\right), \tag{17}$$

$$s_3 = D_{11}\frac{\partial F}{\partial \sigma_3} + D_{12}\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_1}\right).$$

Таким образом, используя последовательно соотношения (12), (17), (16) и (15) определяем параметр λ, а затем, используя выражение (11) находим пластические деформации и значения предельных напряжений по формулам (13)-(14).

4.1. Определение пластических деформаций и предельных напряжений при $\sigma_1 > 0$ ($\sigma_2 < 0$,$\sigma_3 < 0$)

.

Если в локальной области аналитический критерий пластичности принимает положительное значение ($F > 0$), а наибольшая компонента главных напряжений $\sigma_1 > 0$, то согласно экспериментальным исследованиям [2] разрушение происходит путем отрыва в направлении перпендикулярном σ_1, и соответственно

$$\sigma_1^{\text{пр}} = 0, \tag{18}$$

кроме того в данной области необходимо принять $\sigma_{pacm} = 0$.

Определение упругих деформаций и предельных напряжений следует проводить, используя соотношение (18):

$$\sigma_1^{\text{пр}} = D_{11}\varepsilon_1^{\text{упр}} + D_{12}(\varepsilon_2^{\text{упр}} + \varepsilon_3^{\text{упр}}) = 0,$$

из которого следует:

$$\varepsilon_1^{\text{упр}} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}(\varepsilon_2^{\text{упр}} + \varepsilon_3^{\text{упр}}). \tag{19}$$

Упругие составляющие деформаций $\varepsilon_2^{\text{упр}}, \varepsilon_3^{\text{упр}}$ находятся, как и в предыдущем разделе:

$$\varepsilon_2^{\text{упр}} = \varepsilon_2 - \lambda\frac{\partial F}{\partial \sigma_2}, \varepsilon_3^{\text{упр}} = \varepsilon_3 - \lambda\frac{\partial F}{\partial \sigma_3}. \tag{20}$$

Подставив (20) в (19) получим:

$$\varepsilon_1^{\text{упр}} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}(\varepsilon_2 - \lambda\frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \varepsilon_3 - \lambda\frac{\partial F}{\partial \sigma_3}).(20*')$$

На основании соотношений (20) и (20*) определяем предельные (упругие) напряжения, которые удовлетворяют условию $F = 0$.

Проведя последовательную подстановку, получаем уравнение относительно неизвестного параметра λ

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

где $A = q_2^2 + q_3^2 - q_2 q_3$;

$$B = -2k_2q_2 - 2k_3q_3 + k_2q_3 + k_3q_2 - (\sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}})(q_2 + q_3); \tag{21}$$

$$C = k_2^2 + k_3^2 - k_2k_3 + (\sigma_{\text{сж}} - \sigma_{\text{раст}})(k_2 + k_3) - \sigma_{\text{сж}}\sigma_{\text{раст}}.$$

Входящие в (21) выражения q_2, q_3 и k_2, k_3 определяются следующим образом:

$$q_2 = D_{11}\frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + D_{12}\frac{\partial F}{\partial \sigma_3} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}\right);$$

$$q_3 = D_{11}\frac{\partial F}{\partial \sigma_3} + D_{12}\frac{\partial F}{\partial \sigma_2} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}\right); \tag{22}$$

$$k_2 = D_{11}\varepsilon_2 + D_{12}\varepsilon_3 - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3); k_3 = D_{11}\varepsilon_3 + D_{12}\varepsilon_2 - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Подставляя последовательно выражения (22), (21) в уравнение относительно параметра λ, затем используя формулы (20), (20*) находим упругие и пластические деформации и значения предельных напряжений.

Замечание: при определении упругих и пластических деформаций, а также значений предельных напряжений может возникнуть следующая ситуация: критерий пластичности, определенный при $\sigma_1 > 0$ принимает положительное значение ($F|_{\sigma_1>0} > 0$), а задаваясь $\sigma_1 = 0$, получаем отрицательное значение критерия пластичности ($F|_{\sigma_1=0} < 0$). Данная ситуация приведена на рис.3. На рисунке данная зона обозначена как III*, точки, принадлежащие этой зоне (точка B), попадают в зону пластичности по отношению к $F|_{\sigma_1>0} > 0$ и зону «упругости» по отношению $F|_{\sigma_1=0} < 0$.

Для зоны III* определение упругих деформаций осуществляется по формулам (20) и (20*) при $\lambda = 0$.

4.2. Определение пластических деформаций и предельных напряжений при $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ $(\sigma_3 < 0)$.

Рассмотрим случай, когда критерий пластичности $F > 0$ при двух положительных компонентах главных напряжений: $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$. Тогда

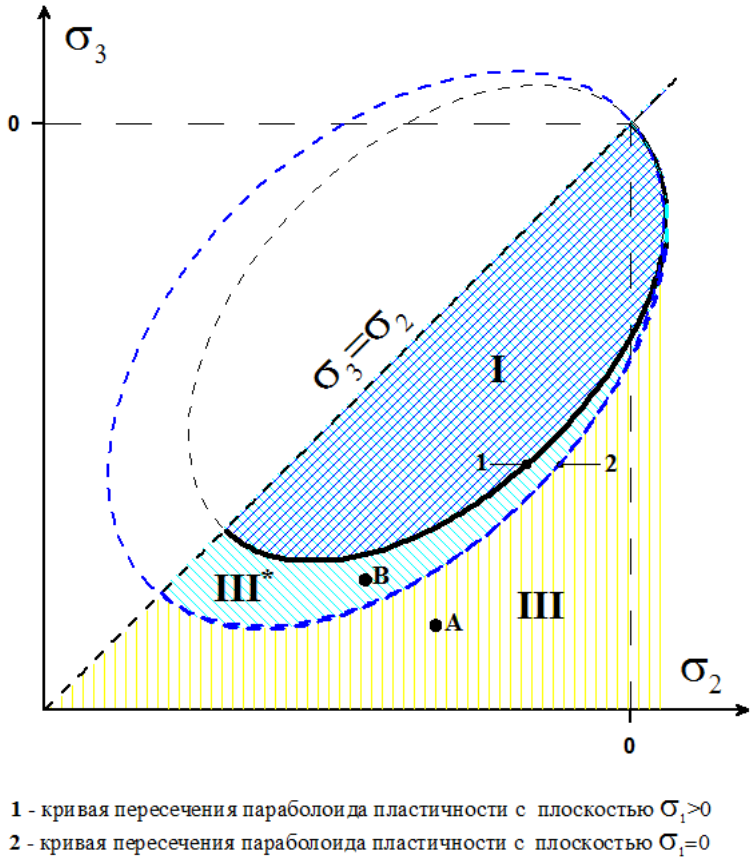


Рис. 3: Положение зон пластичности при положительном значении главного напряжения σ_1

разрушение вследствие отрыва реализуется в направлениях перпендикулярных σ_1 и σ_2, и соответствующие предельные напряжения принимают нулевое значение:

$$\sigma_1^{\text{пр}} = 0; \sigma_2^{\text{пр}} = 0, \tag{23}$$

а значение предела прочности на растяжение $\sigma_{расm} = 0$.

Соотношение (23) означает, что рассматриваемая локальная область находится в одноосном напряженном состоянии и значение третьей компоненты главных напряжений не должны по модулю превосходить предела прочности на сжатие:

$$\sigma_3^{np} \geqslant -\sigma_{\text{сж}}.$$

В том случае, если $\sigma_3 < -\sigma_{\text{сж}}$,

$$\sigma_3^{np} = -\sigma_{\text{сж}}, \tag{24}$$

данный вариант соответствует зоне IV на рис.4; а если $0 > \sigma_3 > -\sigma_{\text{сж}}$, то

$$\sigma_3^{np} = \sigma_3, \tag{25}$$

а этот вариант соответствует зоне V на рис.4.

Упругие деформации определятся из закона Гука по главным предельным напряжениям $\sigma_1^{\text{пр}}, \sigma_2^{\text{пр}}, \sigma_3^{\text{пр}}$, а пластические деформации – как разность исходных и упругих деформаций.

4.3. Определение пластических деформаций и предельных напряжений при $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_3 > 0$.

Если в локальной области аналитический критерий пластичности принимает положительное значение ($F > 0$), а все три компоненты главных напряжений положительны, то это означает, что разрушение отрывом происходит в направлениях перпендикулярных σ_1, σ_2 и σ_3. Предельные напряжения в этих направлениях принимают нулевое значение:

$$\sigma_1^{\text{пр}} = 0; \sigma_2^{\text{пр}} = 0; \sigma_3^{\text{пр}} = 0 \tag{26}$$

значение предела прочности на растяжение $\sigma_{pact} = 0$.

Данный вариант соответствует зоне VI на рис.4.

5. Алгоритм опредения предельных напряжений, упругих и пластических деформаций

1. Задаваясь тремя главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, определяем значение аналитического критериального параметра F по формуле (5);

2. Если $F < 0$, то напряженное состояние рассматриваемой области является упругим. Деформации, соответствующие главным напряжениям также являются упругими. Данный вариант соответствует внутренней зоне параболоида пластичности – зоне ***I***.

3. Если $F > 0$, а все три компоненты главных напряжений принимают отрицательное значение, то, используя последовательно соотношения (12), (17), (16) и (15) определяем параметр λ, а затем, используя выражение (11) находим пластические деформации и значения предельных напряжений по формулам (13)-(14). Данный вариант соответствует внешней зоне параболоида пластичности – зоне II (на рисунках не показана, соответствует внешней области предельной поверхности).

4. Если $F > 0$, а одна компонента главных напряжений положительна $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$, $\sigma_3 < 0$, то следует определить значение $F^* = F|_{\sigma_1=0}$.

Для случая $F > 0$ и $F^* > 0$, подставляя последовательно выражения (22), (21) в уравнение (15) определяем значение параметра λ. Затем, используя формулы (20), (20*), находим упругие деформации, по которым согласно закону Гука определяем предельные напряжения. Пластические деформации вычисляются, как разность исходных и упругих деформаций. Данный вариант соответствует ***III*** зоне.

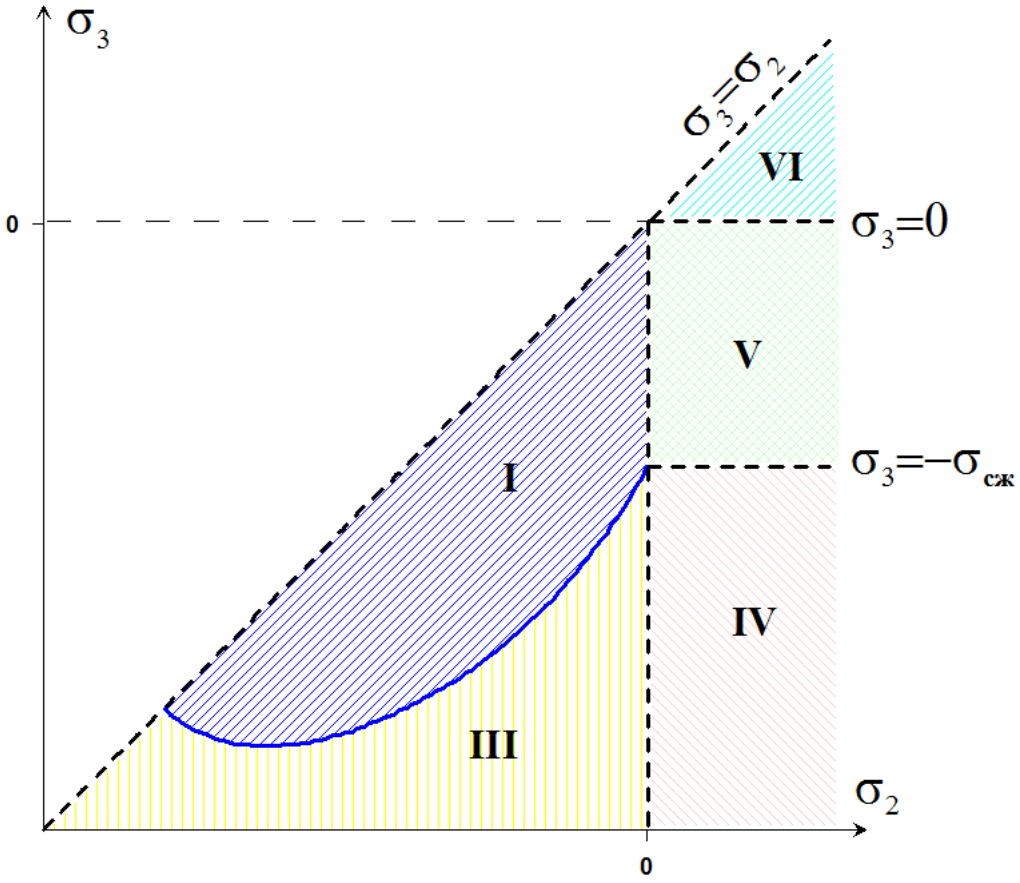


Рис. 4: Положение зон пластичности при положительных значениях главных напряжений

При $F > 0$, а $F^* < 0$, принимаем значение параметра $\lambda = 0$, а дальнейшие вычисления соответствуют предыдущей процедуре. Данный вариант соответствует ***III***** зоне.

5. При $F > 0$, а $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_3 > 0$, предельные напряжения σ_1^{np} и σ_2^{np} определятся соотношением (23), а σ_3^{np} соотношением (24), если $\sigma_3 < -\sigma_{\text{сж}}$ (данный вариант соответствует ***IV*** зоне), и соотношением (25), если $\sigma_3 > -\sigma_{\text{сж}}$ (данный вариант соответствует ***V*** зоне).

6. Если $F > 0$, а $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_3 > 0$, то предельные напряжения определятся соотношением (26). Данный вариант соответствует ***VI*** зоне.

7. Если деформирование локальной области определяется зонами ***III,*** ***III*****, ***IV,*** ***V*** и ***VI*** , то значение предела прочности на растяжение для этой области в последующих вычислениях следует принять $\sigma_{раст} = 0$.

6. Экспериментальное апробирование

Разработанный критерий прочности (пластичности) использовался для описания процесса разрушения цилиндрических соляных образцов [11] при одноосном нагружении (рис.5а). В условиях полного сцепления на контактах их напряженное состояние является объемным.

Расчетная схема математического моделирования упругопластического поведения соляных пород представлена на рис.5б.

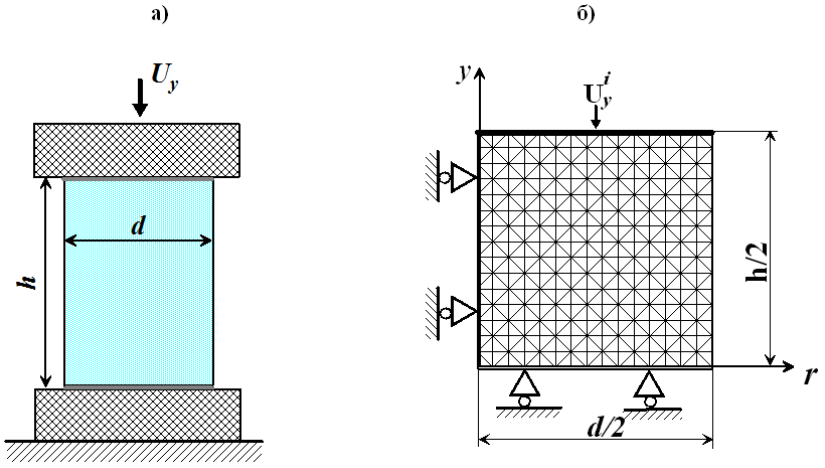


Рис. 5: Схема нагружения цилиндрического образца.

Расчет проводился методом конечных элементов осесимметричной задачи теории упругости в перемещениях [12]. В каждом конечном элементе определялись деформации, напряжения и значение функции прочности (пластичности) F. При F>0 по приведенному выше алгоритму находились пластические и упругие деформации и предельные напряжения. Численная реализация упруго-пластической задачи осуществлялась методом начальных напряжений [13].

Математическое моделирование проводилось для образцов сильвинита со следующими геометрическими параметрами: диаметр образцов d = 60мм, высота - h=20, 30, 40, 48, 54, 60, 90, 120, 150, 180 мм. Для каждого образца путем математического моделирования строились диаграммы деформирования (рис.6), по которым определялись значения разрушающих деформаций ε_p и напряжений σ_p. Результаты расчетов сопоставлялись с соответствующими экспериментальными данными (рис.7).

Представленные результаты показывают (рис.7) хорошее качественное и количественное соответствие расчетных и экспериментальных параметров деформирования соляных пород.

Таким образом, разработанная математическая модель пластического деформирования соляных пород для трехмерного напряженного состояния является вполне работоспособной и использовалась при моделировании более

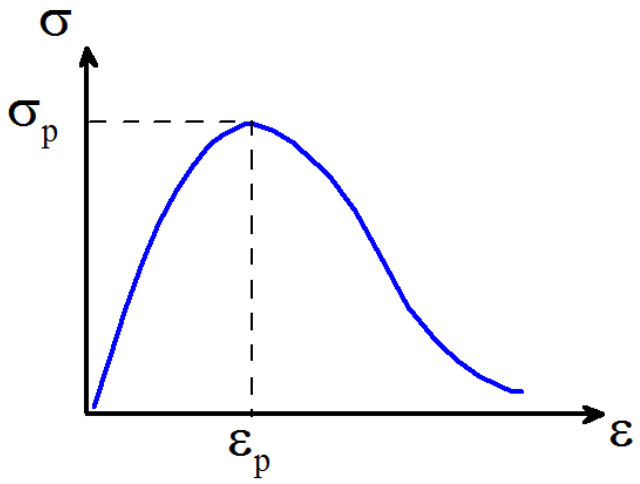


Рис. 6: Схема диаграммы деформирования.

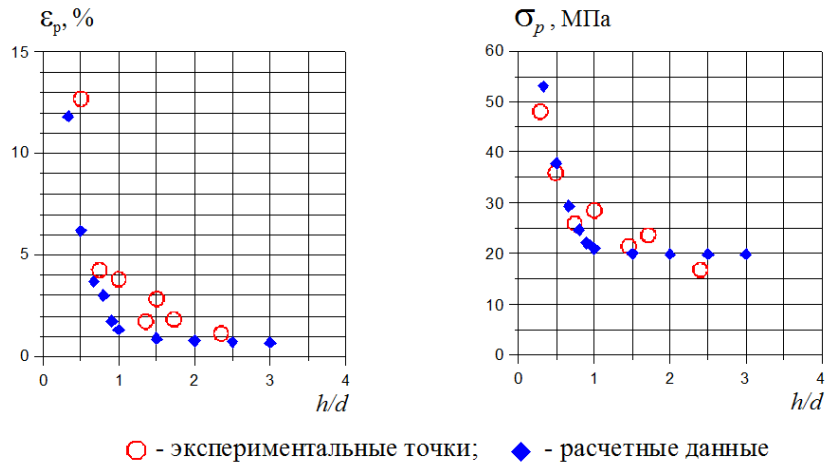


Рис. 7: Сопоставление расчетных и экспериментальных значений разрушающих деформации (а) и напряжений (б)

сложных геомеханических процессов [14, 15].

7. Заключение

1. Предложенный критерий прочности отражает основные особенности пластического деформирования горных пород, обусловленных формированием трещин сдвига и отрыва с последующей их полной дезинтеграцией. Построенные критериальные соотношения верифицированы при описании результатов механических испытаний горных пород. Получено приемлемое соответствие расчетных и экспериментальных разрушающих напряжений и деформаций.

2. Разработанный алгоритм определения предельных напряжений, упру-

гих и пластических деформации достаточно просто численно реализуется в трехмерных задачах математического моделирования процессов деформирования и разрушения крупномасштабных горнотехнических объектов. Предложенный подход может быть распространен для любого вида критериев пластичности, основанных на ассоциированном законе течения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие / под ред. В. В. Панасюка. В 4т. - Киев: Наук. Думка, 1988-1990. - Т. 1. Основы механики разрушения. – 488 с.

2. Карташов Ю. М., Матвеев Б. В., Михеев Г. В., Фадеев А. Б. Прочность и деформируемость горных пород. М., Недра, 1979, 269 с.

3. Левин В. А. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 456 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В.А. Левина: В 5 т. Т.1)

4. Оловянный А.Г. Механика горных пород: Моделирование разрушений/ СПБГУ.-СПб, 2012.-278с.

5. Baryakh A. A., Samodelkina N. A. Mathematikal modelining of underworked rock strata failure process.// Solid State Phenomena. – 2016. Т. 243. P.17-22

6. Барях А. А., Самоделкина Н. А. Разрушение водоупорных толщ при крупномасштабных горных работах. Ч.II // Физ.-тех. пробл. разраб. полезных ископаемых.2012. №6. С. 12-20

7. Боткин А. И. О прочности сыпучих и хрупких материалов // Изв. ВНИИ гидротехники. 1940. Т. 26. С. 205-236.

8. Миролюбов И. Н. К вопросу об обобщении теории прочности октаэдрических касательных напряжений на хрупкие материалы / Тр. Ленингр. технологич. ин-та. 1953. Вып. 2. С. 42-52.

9. Кузнецов Г. Н. Механические свойства горных пород. М., Углетехиздат, 1947.

10. Кац Ш. Н. О пластических деформациях при сложном напряженном состоянии. – В кн.: Теория пластичности. – М.: Наука. 1969. – 400 с.

11. Барях А. А., Константинова С. А., Асанов В. А. Деформирование соляных пород. – Екатеринбург: УрО РАН , 1996. – 203 с.

12. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. – 541 с.

13. Фадеев А. Б. Метод конечных элементов в геомеханике. М.: Недра, 1987. – 221 с.

14. Самоделкина Н. А. Прогноз деформаций земной поверхности при различных сценариях затопления рудника СКРУ-2 // Стратегия и процессы освоения георессурсов: сб. науч. тр. Вып. 14 / ГИ УрО РАН. – Пермь, 2016.-С. 84-86

15. Барях А.А., Самоделкина Н.А. Геомеханическая оценка интенсивности деформационных процессов над затопленным калийным рудником // Физ.-тех. пробл. разраб. полезных ископаемых. 2017. №4. С. 33-46

REFERENCES

1. Panasyuk V.V., Andreykiv A.E., Parton V.Z., 1988, *"Osnovyi mehaniki razrusheniya , Tom 1", Mehanika razrusheniya i prochnost materialov, [Fracture mechanics and rock strength]* , Naukova Dumka, Kiev, 488 p.

2. Kartashov Y.M., Matveev B.V., Mikheev G.V., Fadeev A. B. , 1979, *Prochnost' i deformiruemost' gorny'kh porod [Strength and deformability of rocks]*, Nedra, Moscow, 269 p.

3. Levin V. A. , J 2015, *Modeli imetodyi. Obrazovanie i razvitie defektov [Models and methods. Formation and development of faults]*, PHYSMATHLIT, Moscow, 456 p

4. Olovyanny A.G., J 2012, *Mehanika gornyih pord. Modelirovanie razrusheniy [Rock mechanics. Failure modeling]*, Saint Petersburg University, Saint Petersburg, 278 p.

5. Baryakh A. A., Samodelkina N. A., 2016, "Mathematikal odelining of underworked rock strata failure process", *Solid State Phenomena*, vol. 243, pp. 17-22

6. Baryakh A. A., Samodelkina N. A., 2012, "Water-tight stratum rupture under large-scale mining. Part II", *(Journal of mining science)*, vol. 48, no. 6, pp. 954-961

7. Botkin A. I., 1940, "On strength of bulk solids and brittle materials", *Izvestiya VNII gidrotehniki*, vol. 26, pp. 205-236

8. Mirolyubov I.N., 1953, "On the question of generalization of octahedral shear stress theory on brittle materials", *Tr. Leningr. tehnologich. in-ta,*. issue 2, pp. 42-52

9. Kuznetsov G. N., 1947, *Mehanicheskie svoystva gornyih porod [Mechanical properties of rock]*, Ugletechizdat, Moscow, 247 p.

10. Kats. Sh. N. ,1969, "On plastic deformations under compound stress", *Teoriya plastichnosti [Theory of plasticity]*, Nauka, Moscow, 400 p.

11. Baryakh A. A., Konstantinova S. A., Asanov V.A., 1996, *Deformirovanie solyanyih porod [Deformation of salt rocks]*, UrO RAN, Ekaterinburg, 203 p.

12. Zienkiewich O. C., 1971, *The finite element method in engineering science. Mcgraw-Hill-London*, 521 p.

13. Fadeev A. B. , 1987, *Metod konechnyih elementov v geomehanike [The finite element method in geo mechanics]*, Nedra, Moscow, 221 p.

14. Samodelkina N. A. , 2016, "Forecast of earth surface deformations for different flooding scenarios of mine SKRU-2", *Sb. nauch. Tr. Strategiya i protsessyi osvoeniya georessursov*, Mine Institute of Ural Branch of Russian Academy of Science, issue 14, Perm, pp. 84-86

15. Baryakh A. A., Samodelkina N. A., 2017, "Geomechanical estimation of deformation processes intensity over flooded potash mine", *Fiziko-Tekhnicheskie Problemy Razrabotki Poleznykh Iskopaemykh (Journal of mining science)*, vol. 4, pp. 33–46

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 519.6, 519.681 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-88-108

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ И ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПРОЧНОСТНОГО АНАЛИЗА НА БАЗЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ФИДЕСИС

И. М. Безмозгий[1], О. И. Казакова[2], Р. М. Магжанов[3], А. А. Смердов[4], А. Г. Чернявский[5], А. Г. Чернягин[6]

Аннотация

Рассматривается возможность построения системы специализированных решений для прочностного анализа на базе программного комплекса Фидесис. Приведены результаты тестирования программного комплекса Фидесис. В программно комплексе реализован метод конечных элементов и метод спектральных элементов для задач механики деформируемого твердого тела. Высказывается мнение, что на данном этапе развития программного комплекса Фидесис он может быть использован как альтернативный пакет проведения контрольных расчетов, особенно при решении не типовых задач, при решении которых возникает потребность модификации и настройки основных вычислительных алгоритмов, заложенных в программном комплексе.

В составе программного комплекса Фидесис имеются все необходимые элементы, обеспечивающие эффективность его применения - препроцессор, обеспечивающий построение конечно-элементных моделей, модульный процессор для решения линейных и нелинейных статических и динамических задач, расчета устойчивости конструкций, определения эквивалентных характеристик композитных конструкций, контактных задач, постпроцессор для визуализации и обработки результатов.

[1]Безмозгий Иосиф Менделевич, начальник отдела ПАО РКК Энергия, iosif.bezmozgy@rsce.ru

[2]Казакова Ольга Игоревна, инженер-конструктор 1 категории ПАО РКК Энергия, olga.kazakova@rsce.ru

[3]Магжанов Раис Мухтясибович, заместитель генерального конструктора ПАО РКК Энергия, rais.magzhanov@rsce.ru

[4]Смердов Алексей Андреевич, инженер конструктор 2 категории ПАО РКК Энергия, aleksey.smerdov2@rsce.ru

[5]Чернявский Александр Григорьевич, советник генерального директора ПАО РКК Энергия, alexander.cherniavsky@rsce.ru

[6]Чернягин Александр Григорьевич, ведущий научный сотрудник ПАО РКК Энергия, alexander.chernyagin@rsce.ru

Приводятся результаты тестирования программного комплекса Фидесис в сравнении с результатами, полученными на основе программного комплекса ANSYS.

Основной задачей тестирования являлась оценка возможности программного комплекса Фидесис в части: импорта геометрии из 3D пакетов; эффективности построения сеток конечных элементов; определения напряженно-деформируемого состояния сборок с переменной зоной контакта; решения динамических задач, включая модальный и гармонический анализ.

Тестирование программного комплекса Фидесис проведено на задачах, имитирующих наиболее часто встречающиеся в практической деятельности задачах.

Отмечается, что отличительной особенностью программного комплекса Фидесис является наличие спектральных элементов высокого порядка, позволяющих, в ряде случаев, повысить точность расчета без перестроения сетки конечных элементов.

Отмечается, что сравнительный анализ расчетов на моделях с близкими сетками конечных элементов, проведенных в программном комплексе Фидесис и программном комплексе ANSYS, показывает хорошее совпадение результатов.

Делается вывод что программный комплекс Фидесис может быть использован для решения ряда задач в области анализа прочности конструкций при наличии другого пакета у предприятия, а также с учетом практических потребностей активных пользователей, он может быть при совместной доработке с учетом требования пользователя как основа для отраслевого решения в части прочности.

Ключевые слова: программный комплекс, прочностной инженерный анализ, результаты тестирования, модификация и настройка вычислительных алгоритмов.

Библиография: 15 названий.

RESULTS OF TESTING AND ASSESSMENT OF THE POSSIBILITY OF BUILDING A SYSTEM OF SPECIALIZED SOLUTIONS FOR STRENGTH ANALYSISBASED ON CAE FIDESYS

I. M. Bezmozgiy, O. I. Kazakova, R. M. Magzhanov, A. A. Smerdov, A. G. Chernyavsky, A. G. Chernyagin

Abstract

The possibility of constructing a system of specialized solutions for strength analysis based on CAE Fidesys is considered. The results of testing CAE Fidesys are presented. The finite element method and the spectral element method implemented in CAE Fidesys are discussed for

the problems of mechanics of a deformable solid. The opinion is expressed that at this stage of the development of CAE Fidesys it can be used as an alternative CAE for carrying out control calculations, especially when solving non-typical tasks, in the solution of which there is a need to modify and adjust the main computational algorithms incorporated in the software.

As a part of CAE Fidesys all the necessary elements are provided to ensure the effectiveness of its application - a preprocessor that provides the generation of finite element models, a modular processor for solving linear and nonlinear static and dynamic problems, buckling problems, estimation effective properties of composite materials, contact problems, postprocessor for visualization and processing of results.

The results of testing CAE Fidesys are presented in comparison with the results obtained in ANSYS.

The main purpose of the testing was to evaluate the possibilities of CAE Fidesys in terms of: importing geometry from CAD systems; the effectiveness of finite element mesh generator; determination of the stress-strain state of assemblies with a variable contact zone; solving dynamic problems, including modal and harmonic analysis.

Testing of CAE Fidesys was performed on test cases representing the problems which are frequently faced in practical work.

It is noted that the distinctive feature of CAE Fidesys is the high-order spectral elements allowing one, in some cases, increase the accuracy of calculation without rebuilding the finite element mesh.

It is noted that a comparative analysis of the calculations done on the models with similar finite element meshes conducted in CAE Fidesys and ANSYS shows good coincidence of the results.

The conclusion is that CAE Fidesys can be used for solving different problems of structural analysis in addition to another CAE software available on the enterprise, and also taking into account the practical needs of active users, it can be considered, when combined with the user's requirements, as the basis of an industrial solution for a structural analysis.

Keywords: software complex, strength engineering analysis, test results, modification and tuning of computational algorithms.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

В настоящее время повсеместное распространение получили универсальные пакеты, реализующие МКЭ [5, 11] (ANSYS, Nastran, Abaqus [12,13,15]), имеющие широкое возможности в области задач механики. В то же время, их активное применение периодически выявляет потребности в доработках и модификации. Следует отметить, что, хотя большинство распространенных программных комплексов (ПК), реализующих МКЭ, имеют мощный командный язык, обеспечивающий весьма широкие возможности в процессе пре- и постпроцессорной обработки, однако, возможности вмешательства в основные вычислительные алгоритмы, заложенных в ПК, весьма ограничены.

Кроме того, использование такого командного языка при работе с большими массивами данных значительно, на порядки, уступает по времени эффективности, достижимой при реализации требуемых изменений непосредственно в исходном коде. Запросы на доработки упомянутых ПК в интересах отечественных пользователей, учитывая незначительный объем Российского рынка программного обеспечения (ПО), как правило, остаются без внимания. В этой связи разработка отечественного ПК, реализующего МКЭ, авторы которого находятся в непосредственном контакте с активными пользователями, разработка и модификация которого ведется с учетом их потребностей, является весьма актуальной.

Целью настоящей работы являлось тестирование программного комплекса Фидесис. ПК Фидесис [6,14] позиционируется как пакет, реализующий метод конечных элементов для задач механики. На данном этапе ПК Фидесис может быть использован как альтернативный пакет для проведения контрольных расчетов, особенно при решении нетиповых задач[1,2,3,4,7,8], при решении которых возникает потребность модификации и настройки основных вычислительных алгоритмов, заложенных в ПК.

В составе комплекса имеются все необходимые элементы, обеспечивающие эффективность его применения - препроцессор, обеспечивающий построение конечно-элементных моделей, модульный процессор для решения линейных и нелинейных статических и динамических задач, расчета устойчивости конструкций, определения эквивалентных характеристик композитных конструкций и др., постпроцессор для визуализации и обработки результатов.

Основная часть

Ниже приводятся результаты тестирования ПК Фидесис в сравнении с результатами, полученными на основе ПК ANSYS.

Основной задачей тестирования являлась оценка возможности ПК Фидесис в части:

- импорта геометрии из 3D пакетов;

- эффективности построения сеток конечных элементов;

- определения НДС сборок с переменной зоной контакта;

- решения динамических задач, включая модальный и гармонический анализ.

Тестирование ПК Фидесис проведено на задачах, имитирующих наиболее часто встречающиеся в практической деятельности. Все тестовые задачи параллельно решались с помощью программного комплекса ANSYS.

2. Определение НДС в упругом элементе и усилия срабатывания цангового замка

2.1. Постановка задачи, описание модели

Одной из наиболее востребованных задач, решаемых в процессе разработки конструкций, является определение НДС сборок или их фрагментов с учетом контактов, изменяющихся в процессе деформирования. В качестве такой тестовой задачи рассмотрено взаимодействие элементов типового цангового замка в процессе его раскрытия. Схема замка представлена на рисунке1а. При открытии замка шток смещается внутри цанги, после чего цанга вытягивается из втулки. Определению подлежат усилие, необходимое для раскрытия замка и НДС в гибких элементах цанги. Элементы конструкции, участвующие в расчете показаны на рисунке 1б. Задача решается в геометрически нелинейной постановке. Для получения расчетной модели использовалась 3D модель, разработанная в ПК Pro/ENGINEER.

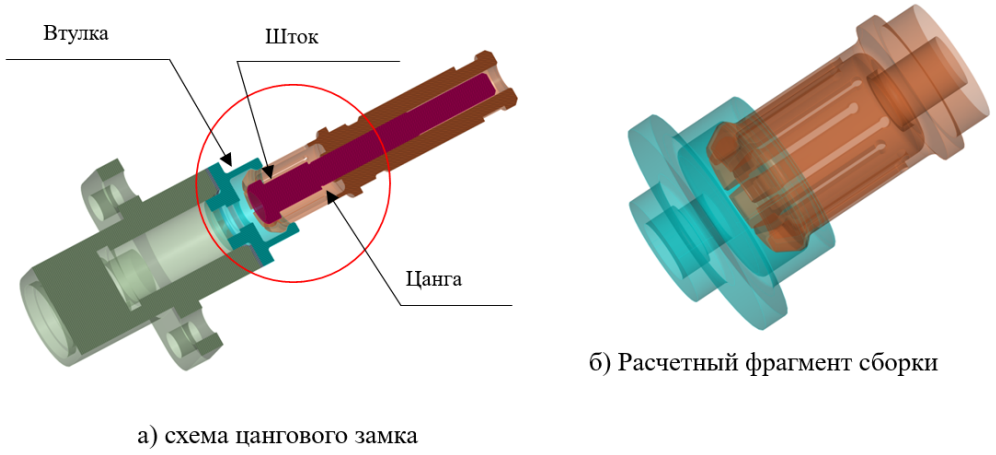


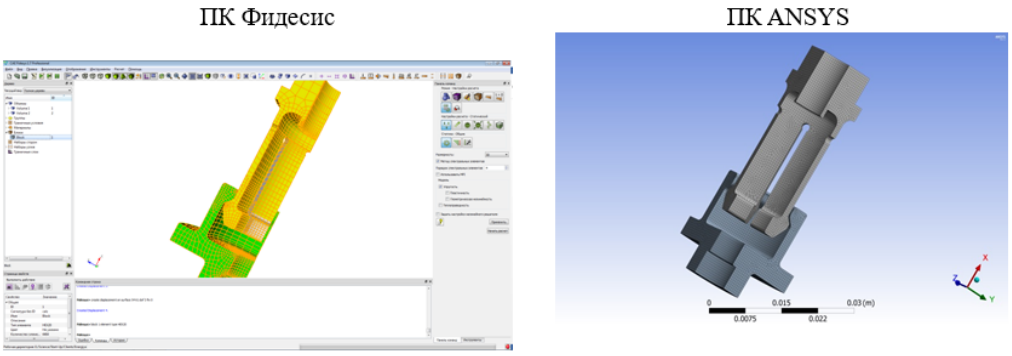
Рис. 1: Геометрическая модель сборки цангового замка

2.2. Результаты расчета

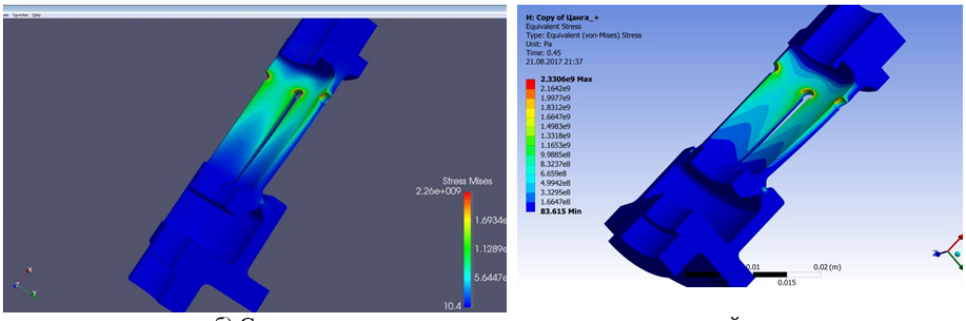
Расчет проведен в ПК Фидесис и в ПК ANSYS. С учетом циклической симметрии конструкции расчету подвергался фрагмент сборки. КЭ модель фрагмента и схема распределения эквивалентных напряжений в момент возникновения максимальных напряжений, полученные в обоих пакетах показаны на рисунке 2. В модели использованы объемные конечные элементы.

2.3. Выводы

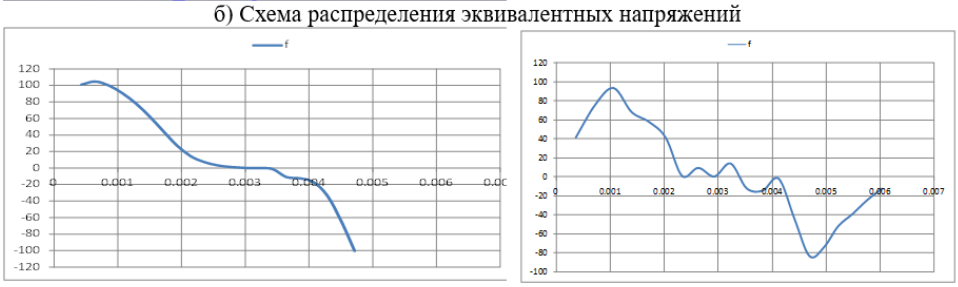
На основе решения данной задачи в ПК Фидесис и сравнения полученных результатов с результатами расчетов в ПК ANSYS можно сделать следующие



а) КЭ модель



б) Схема распределения эквивалентных напряжений



в) Изменения усилия в процессе вытягивания цанги

Рис. 2: Результаты расчета

выводы:

-ПК Фидесис обеспечивает возможность создания расчетной модели с использованием объемных конечных элементов на базе 3D моделей;

-ПК Фидесис обеспечивает возможность расчета НДС сборок с учетом нелинейностей и автоматического определения контакта в процессе деформирования;

-различие результатов, полученных в ПК Фидесис и ПК ANSYS составляет менее 5% по напряжениям и не превышает 10% по усилию, что в данном случае объясняется некоторым различием сетки конечных элементов. При этом следует отметить, что полученная в Фидесис кривая изменения усилия в зависимости от перемещения более гладкая, в зоне

прохождения цилиндрического участка втулки имеет практически нулевое значение, что является более корректным.

3. Динамические задачи на примере панели с приборами

3.1. Гармонический анализ.

Постановка задачи, описание модели При создании и эксплуатации современных изделий большое значение имеет возможность расчета отклика конструкции на различные динамические воздействия, для чего необходимо наличие достоверной динамической модели изделия, параметры которой настроены по результатам динамических испытаний. Одним из таких испытаний, на основе результатов которых проводится настройка параметров модели, являются вибропрочностные испытания, при проведении которых конструкция нагружается синусоидальным воздействием изменяемой в заданном диапазоне частоты. В программных комплексах, реализующих МКЭ, моделирование подобных испытаний базируется на решении задачи гармонического анализа. Настройка модели проводится на основе сравнения результатов моделирования испытаний (гармонического анализа) с результатами вибропрочностных испытаний путем варьирования жесткостных и диссипативных параметров.

К числу важнейших характеристик динамической модели, определяющих её достоверность, относятся демпфирующие свойства конструкции, закладываемые в модель. При этом в различных программных комплексах, реализующих технологию МКЭ, существует достаточно большое разнообразие типов параметров демпфирования, которые могут быть использованы при построении моделей. Это и общее конструкционное демпфирование, демпфирование по жесткости и по массе, демпфирование по частоте, демпфирующие свойства отдельных элементов и материалов. К сожалению, в упомянутых выше ПК, реализующих МКЭ, существует ряд ограничений, не позволяющих использовать полный набор параметров демпфирования для различных видов динамического анализа. На практике это приводит к значительным сложностям при валидации динамических моделей по результатам различных видов динамических испытаний. Так, динамическая модель, настройка которой по результатам модальных или гармонических испытаний проведена путем задания параметров общего конструкционного демпфирования, не может без перенастройки использоваться для расчета отклика на динамическое воздействие с использованием методов прямого интегрирования (FULL).

В текущей версии Fidesys матрица демпфирования в наиболее общей форме имеет вид:
$[C] = \alpha\,[M] + \left(\beta + \frac{2}{\Omega}\xi\right)[K] + \sum_{j=1}^{N_m}\left[\alpha_j^m\,[M_j]\right] + \sum_{j=1}^{N_m}\left[\left(\beta_j^m + \frac{2}{\Omega}\xi_j^m\right)[K_j]\right] + \sum_{k=1}^{N_e}[C_k]$,
где
$[C]$ - матрица демпфирования;

α- демпфирование, связанное с матрицей масс;
$[M]$- матрица масс;
β- демпфирование, связанное с матрицей жесткости;
ξ- конструкционное демпфирование;
$[K]$-матрица жесткости;
α_j^m- коэффициент демпфирования матрицы масс -го материала;
β_j^m- коэффициент демпфирования матрицы жесткости j-го материала;
ξ_j^m- конструкционное демпфирование j-го материала;
$[C_k]$- матрица демпфирования элемента;
N_m- количество материалов с заданным демпфированием;
N_e- количество элементов с заданным демпфированием.

Принятый вид матрицы демпфирования аналогичен используемому в ПК ANSYS версии 14. При этом следует отметить, на протяжении ряда лет в ПК ANSYS от версии к версии менялся набор параметров демпфирования, что подтверждает важность и в тоже время сложность обозначенной проблемы.

Однако, основная проблема (различный набор допустимых параметров демпфирования в зависимости от вида динамического анализа) не решена и, судя по тому, что иностранные разработчики ПО слабо прислушиваются к замечаниям из России, ещё долго останется нерешенной. Хотя на сегодня эта проблема не решена и в ПК Фидесис, близость разработчиков ПК Фидесис, а также возможность совместной работы с ними, позволяет рассчитывать на скорейшее решение этой проблемы.

Для анализа возможности использования ПК Фидесис при моделировании вибропрочностных испытаний решена задача гармонического анализа тестовой модели – пластины с установленными на ней имитаторами приборов. В отличие от предыдущего примера модель создавалась средствами ПК Фидесис и, для решения контрольной задачи, средствами ПК ANSYS. КЭ модели для расчетных систем обоих ПК представлены на рис. 3

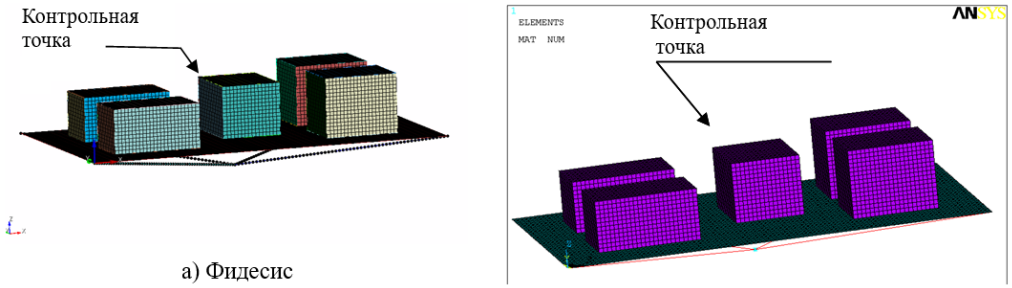


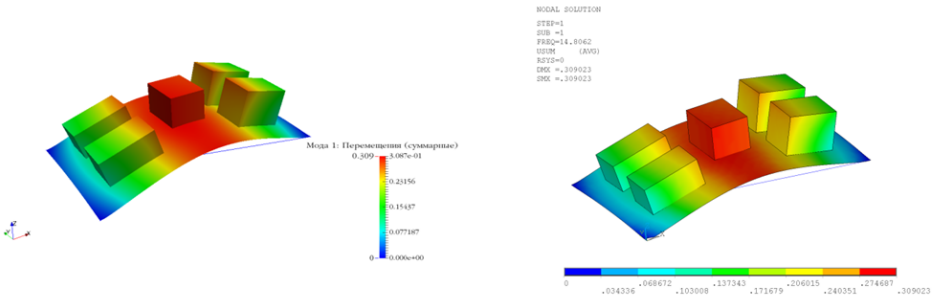
Рис. 3: Расчетная модель

Результаты решения Решение задачи гармонического анализа проводилось двумя методами - методом суперпозиции форм (Mode Superpos'n) и

полным (Full). При использовании метода суперпозиции форм задача решается в два этапа, первым из которых является модальный анализ.

1. (a) i. A. Результаты модального анализа

Полученные в результаты модального анализа первые формы колебаний представлены на рисунке 4 –Первые формы колебаний в ПК Фидесис а) и ПК ANSYS б). Собственные частоты, полученные в ПК Фидесис и ПК ANSYS приведены в таблице 4 –Первые формы колебаний в ПК Фидесис а) и ПК ANSYS б). Расхождение значений собственных частот не превышает 1%. Практически полное совпадение амплитуд перемещений показывает, что в ПК Фидесис используются близкие к принятым в ПК ANSYS подходы, включая нормирование перемещений при определении собственных форм колебаний.



а) б)

Рис. 4: Первые формы колебаний в ПК Фидесис а) и ПК ANSYS б)

Таблица1 – Сравнение собственных частот, полученных в Ansys и Fidesys.

Фидесис		**Ansys**
№	частота, Hz	частота, Hz
1	14.59	14.81
2	44.02	44.51
3	57.17	57.84
4	60.54	61.22
5	87.87	88.35
6	95.57	96.49
7	118.24	119.47
8	144.78	145.84
9	161.35	162.27
10	207.93	209.32

1. (а) i. А. Результаты гармонического анализа

Ниже приводятся результаты расчета отклика (ускорения) в контрольной точке при воздействии синусоидальной вибрации амплитудой 1 g без демпфирования (рисунок 4 –Первые формы колебаний в ПК Фидесис а) и ПК ANSYS б)а, 4 –Первые формы колебаний в ПК Фидесис а) и ПК ANSYS б)б) и при заданных в таблице 4 –Первые формы колебаний в ПК Фидесис а) и ПК ANSYS б) параметрах демпфирования (рисунок 4 –Первые формы колебаний в ПК Фидесис а) и ПК ANSYS б)в, 4 –Первые формы колебаний в ПК Фидесис а) и ПК ANSYS б)г).

Таблица2. Используемые значения демпфирования.

вид демпфирования	ξ	α	β	ξ_j^m	α_j^m	ξ_j^m
значение	0.01	2	0.0001	0.01	2	0.0001

3.2. Расчет на нестационарное воздействие

Постановка задачи, описание модели С использованием той же модели проведен расчет отклика конструкции на нестационарное кинематическое воздействие, заданное в виде ускорения по нормали в углах пластины. График воздействия представлен на рисунке 6.

Результаты решения Ниже приводятся результаты расчета отклика (ускорения) в контрольной точке при указанном нестационарном воздействии и при заданных в таблице 4 –Первые формы колебаний в ПК Фидесис а) и ПК ANSYS б) параметрах демпфирования.

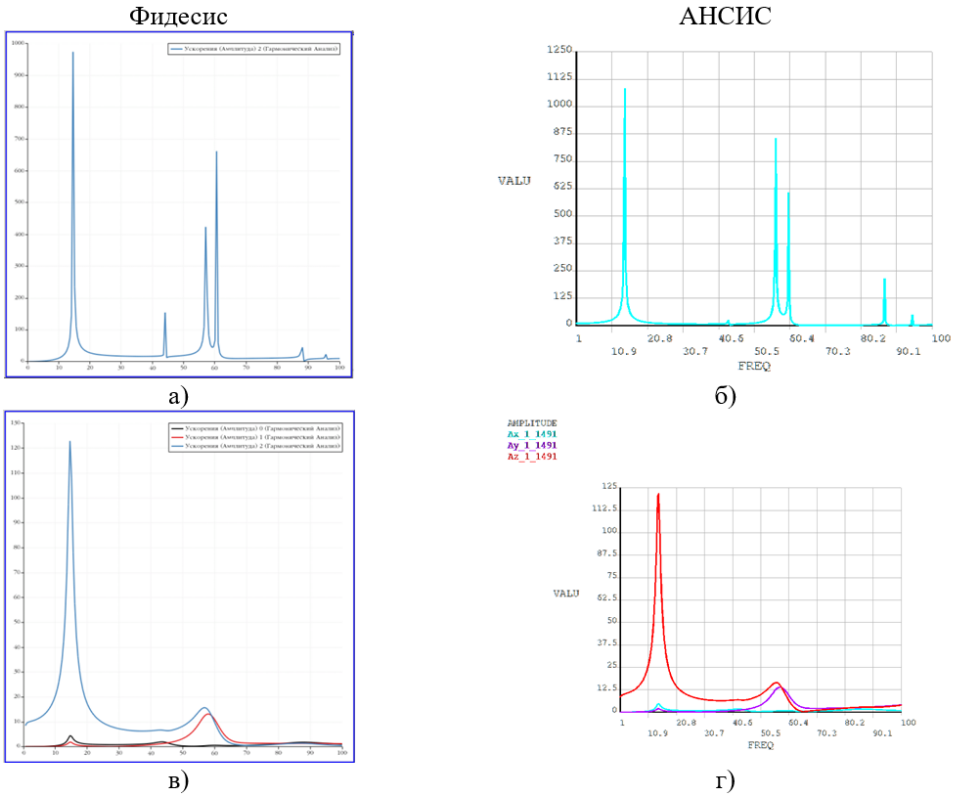


Рис. 5: Результаты гармонического анализа в ПК Фидесис а), в) и ПК ANSYS б), г)

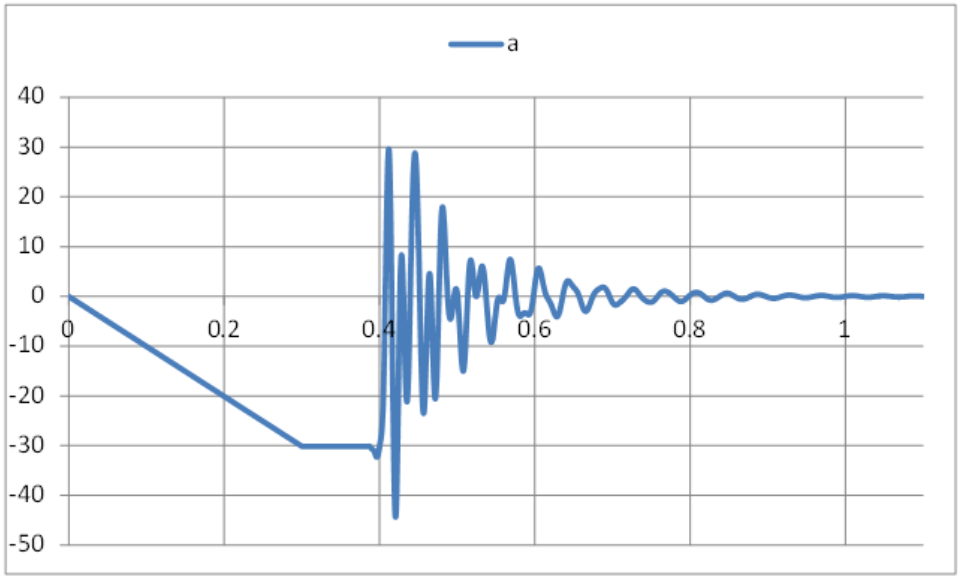
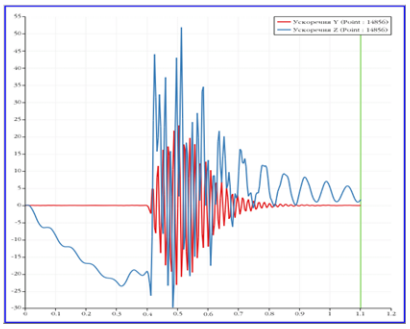


Рис. 6: Нестационарное воздействие (м/с^2) в углах пластины

3.3. Выводы

На основе решения данной задачи в ПК Фидесис и сравнения полученных результатов с результатами расчетов в ПК ANSYS можно сделать следующие

Фидесис



АНСИС

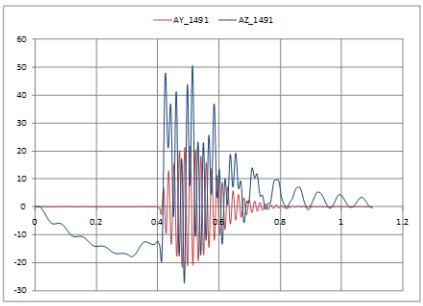


Рис. 7: Ускорения в контрольной точке (рис. 3) при нестационарном воздействии (рис. 6)

выводы:

-ПК Фидесис обеспечивает возможность решения задач модального и гармонического анализа, а также проведение расчета конструкций при нестационарном динамическом воздействии;

-обеспечивается возможность использования различных видов демпфирования как для отдельных материалов, так и для конструкции в целом. Близость разработчиков ПК ФИДЕС и возможность совместной работы, позволяет в дальнейшем рассчитывать на расширение типов параметров демпфирования, используемых при проведении различных видов динамического анализа;

-при решении указанных задач наблюдается хорошее совпадение результатов (различие не превышает 1%).

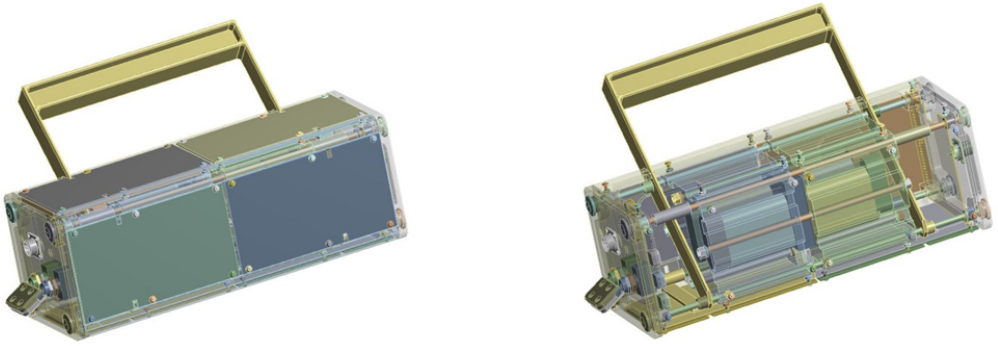
4. Модальный анализ конструкции с большим количеством контактных групп

4.1. Постановка задачи, описание модели

Практически все современные ПК, реализующие МКЭ, обеспечивают автоматическое определение контактных поверхностей, что существенно облегчает процесс построения сеток. Однако, наличие большого количества контактных поверхностей, даже при условии реализации контакта типа «склейка», приводит при расчете свободной (free-free) конструкции к появлению «паразитных» ненулевых частот, в то время, как теоретически, в такой постановке конструкция должна иметь шесть нулевых частот, соответствующих смещениям конструкции как жесткого тела. Величина этих паразитных

частот зависит от метода реализации контактов, однако, даже для варианта Multi Point Contact (MPC) – рекомендация разработчиков ПК ANSYS - остается весьма значительной.

В качестве такого примера рассмотрено задача определения собственных форм и частот типовой конструкции микроспутника CUB-Satформата 3U (рисунок 8а), внутренняя структура которого показана на рисунке 8б.

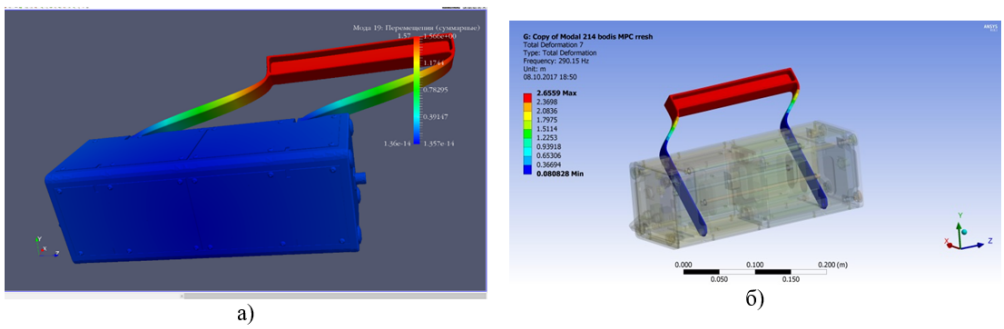


а) б)

Рис. 8: Конструктивная схема микроспутника CUB-Sat

4.2. Результаты расчета

Задача решалась с в ПК ANSYSи ПК Фидесис. В обоих случаях для построения КЭ - модели использовался один и тот же внешний файл в формате «parasolid» (*.x_t), полученный из 3Д модели. Определению подлежали формы колебаний свободной конструкции. Формы колебаний, соответствующих первому упругому тону колебаний, полученных в ПК Фидесис и ПК ANSYS, представлены на рисунке 9.



а) б)

Рис. 9: Первый упругий тон колебаний в ПК Фидесис - а) и ПК ANSYS- б)

Полученные в качестве контрольного расчета в ПК Ансис результаты модального анализа, как при значениях «по умолчанию», так и в варианте

контактов типа «MPC» (см. таблицу 3) оказались существенно не нулевыми. При первичном модальном анализе, проведенном с помощью ПК Фидесис, частоты с 4 по 6, соответствующие смещениям как жесткого целого также существенно отличались от нуля.

После обсуждения полученных результатов с разработчиками ПК Фидесис был доработан в части реализации жестких контактов, что в конечном итоге позволило избавиться от «паразитных» ненулевых частот при решении задачи модельного анализа.

Таблица3 – Результаты модального анализа в ПКFidesys.

	Ansys		**Fidesys**
	Метод Лагранжа	MPC	Жесткий контакт
№	частота, Hz	частота, Hz	частота, Hz
1.	0	0,	0
2.	0	1,1731e-002	0
3.	8,4933e-003	2,1982e-002	0
4.	122,43	2,7237e-002	0
5.	126.34	4,8227	0
6.	132,67	6,3501	0
7.	389,02	374,93	370,15

4.3. Выводы

На основе представленных результатов можно сделать следующие выводы:

-при работе со сложными моделями ПК Фидесис обеспечивает возможность автоматического определения контактных поверхностей;

-при наличии большого количества контактных поверхностей реализованный в ПК Фидесис для учета зон контакта метод «прямого исключения» обеспечивает более корректное построение глобальных матриц жесткости и, как следствие, более корректное проведение различных видов динамического анализа.

5. Расчет скважины с давлением (использование спектральных элементов)

5.1. Постановка задачи, описание модели

Одной из интересных особенностей ПК Фидесис является возможность использования элементов высокого порядка - «спектральных» элементов. Применение спектральных элементов в задачах, имеющих плохую сходимость, позволяют существенно повысить точность решения при относительно грубой сетке конечных элементов. Ниже рассмотрен пример использования

спектральных элементов для расчета пластических деформаций в бесконечной цилиндрической скважине в сплошной породе при приложении давления. Для материала породы принята модель пластичности Друкера – Прагера.

Конечно-элементная схема задачи в ПК Фидесис содержит 900элементов (рисунок 10 –КЭ модели зоны скважины а) ПК Фидесис, б), в) г) – ПК ANSYS. а). При решении использовались элементы пятого и седьмого порядка. При этом количество узлов в модели составляло 900*5*5 и 900*7*7 соответственно. При проведении сравнительного расчета в ПК ANSYS было рассмотрено несколько вариантов сеток (рисунок 10 –КЭ модели зоны скважины а) ПК Фидесис, б), в) г) – ПК ANSYS. б, 10 –КЭ модели зоны скважины а) ПК Фидесис, б), в) г) – ПК ANSYS. в, 10 –КЭ модели зоны скважины а) ПК Фидесис, б), в) г) – ПК ANSYS. г) на основе наиболее точных (8-ми узловых) элементов второго порядка, включая и значительно более густую сетку, содержащую более 49000 элементов и 148000 узлов.

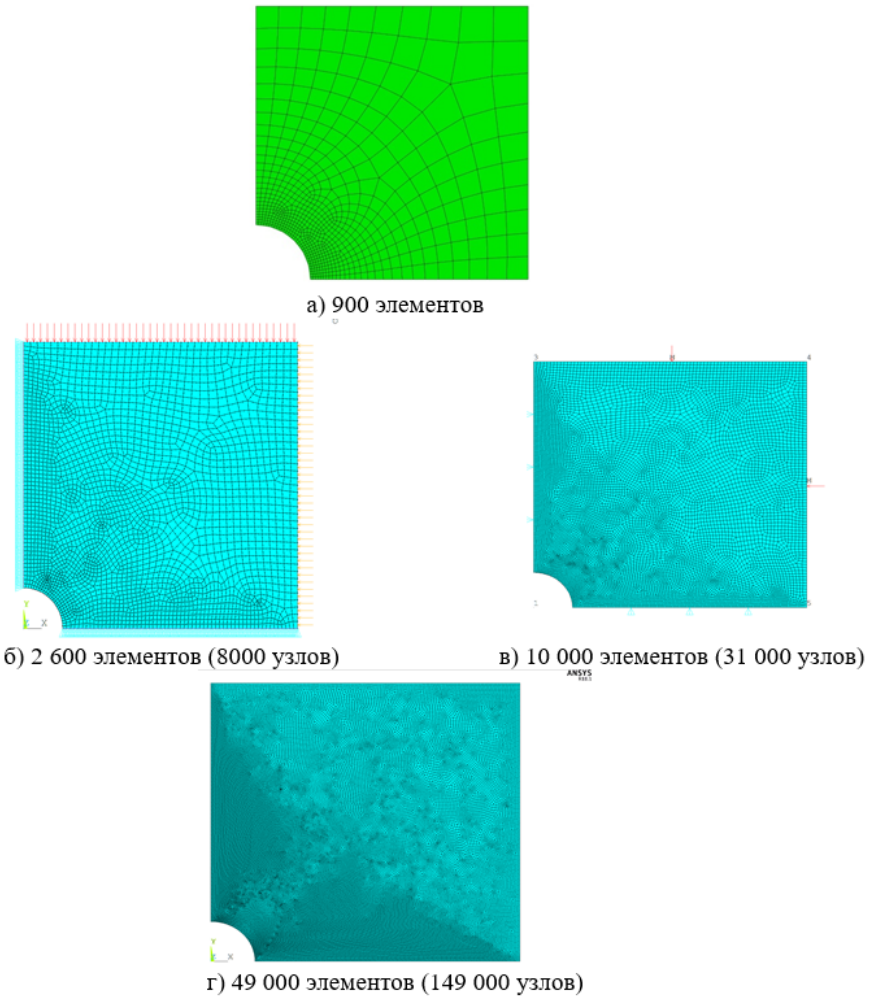


Рис. 10: КЭ модели зоны скважины а) ПК Фидесис, б), в) г) – ПК ANSYS.

5.2. Результаты расчета

Результаты расчета в ПК Фидесис представлены на рисунке 10 –КЭ модели зоны скважины а) ПК Фидесис, б), в) г) – ПК ANSYS.. Как видно из представленных результатов, четкая система полос скольжения хорошо видна уже при использовании элементов пятого порядка. Результаты расчета пластических деформаций в ПК ANSYS показаны на рисунке 10 –КЭ модели зоны скважины а) ПК Фидесис, б), в) г) – ПК ANSYS.. При решении задачи в ПК ANSYS некоторый намёк на систему полос скольжения начинает проявляться лишь во второй схеме, при существенно более мелкой, чем в ПК Фидесис сетке конечных элементов. Отчетливые очертания полосы скольжения приобретают лишь в третьей расчетной схеме. При этом, в результатах, полученных в ПК ANSYSотсутствует численная сходимость по величинам пластических деформаций.

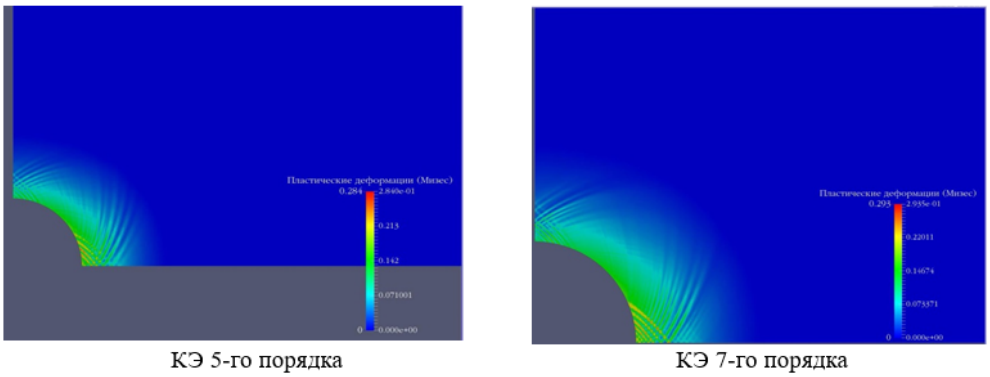


Рис. 11: Пластические деформации, полученные в ПК Фидесис

5.3. Выводы

Наличие в ПК Фидесис спектральных элементов[5, 9,10] обеспечивает

-более корректное решение задач с глубокой пластикой;

-возможность уточнения КЭ моделей без перегенерации расчетных сеток;

6. Заключение (Общие результаты тестирования ПК Фидесис)

В процессе тестирования решены задачи по определению НДС при переменном статическом воздействии, определению форм и частот собственных

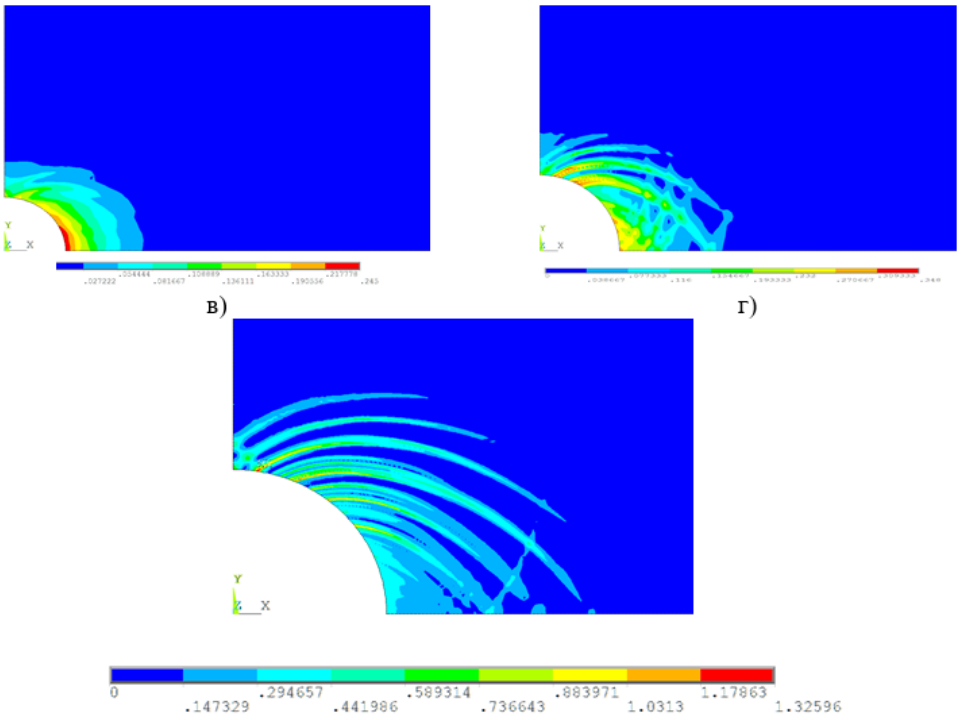


Рис. 12: Пластические деформации, полученные в ПК АНСИС

колебаний, определению реакции конструкции при гармоническом воздействии (моделированию виброиспытаний). При этом были опробованы возможности пакета в части импорта внешних геометрических моделей и собственные возможности ПК для построения геометрических и расчетных моделей. На основании проведенных работ можно сделать следующие выводы.

В целом ПК Фидесис показал свою работоспособность.

В настоящее время возможности ПК Фидесис в части подготовки сложных КЭ моделей типа изделия уступают импортным универсальным пакетам (ANSYS, Nastran). Тем не менее в составе ПК Фидесис имеются все необходимые элементы, обеспечивающие эффективность его применения:

-препроцессор, обеспечивающий построение геометрических моделей, конвертирование из 3D моделей, построение конечно-элементных моделей;

-модульный процессор для решения линейных и нелинейных статических и динамических задач, расчета устойчивости конструкций, определения эквивалентных характеристик композитных конструкций и др.;

-постпроцессор для визуализации и обработки результатов.

Набор конечных элементов на сегодня включает одно, двух и трехмерные элементы, позволяет создавать весьма сложные модели. Для более эффективного применения ПК требуется продолжить расширение набора конечных

элементов, приближая его к наиболее распространенным импортным пакетам.

Сравнительный анализ расчетов на моделях с близкими сетками конечных элементов, проведенных в ПК Фидесис и ПК ANSYS, показывает хорошее совпадение результатов.

В процессе тестирования была также опробована и подтверждена эффективность взаимодействия с разработчиками ПК, в результате чего был реализован и включен в состав ПК новый алгоритм учета контактных элементов, позволяющий повысить точность расчетов при динамическом анализе в моделях с большим количеством контактов.

Отличительной особенностью ПК Фидесис является наличие спектральных элементов высокого порядка, позволяющих, в ряде случаев, повысить точность расчета без перестроения сетки конечных элементов.

Сильной стороной пакета является нацеленность на реализацию практических потребностей пользователей и возможность отладки новых решений в виде специализированных блоков с последующим включением в пакет.

К недостаткам ПК Фидесис на сегодня следует отнести отсутствие полноценного конвертора моделей из ПК ANSYS. Создание подобного конвертора позволит ускорить внедрение ПК Фидесис в практику работы за счет возможности использования существующих моделей.

В целом, результаты тестирования показывают, что ПК Фидесис при решении ряда задач в области анализа прочности конструкций может быть использован как второй (контрольный) ПК. При дальнейшей совершенствовании с учетом практических потребностей активных пользователей ПК Фидесис может быть использован как основа для создания отраслевого решения в области динамического моделирования и прочности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безмозгий И.М., Софинский А.Н., Чернягин А.Г. Напряженно-деформированное состояние и прочность сварной оболочки с тоннельной трубой // Космическая техника и технологии. 2016. № 3(14). С. 43–55.

2. Безмозгий И.М., Бобылев С.С., Софинский А.Н., Чернягин А.Г. Нагружение и прочность конструкций транспортного космического корабля при воздействии отсечки тяги двигателя третьей ступени ракеты-носителя "Космическая техника и технологии"№2,2017 с.62-79

3. Безмозгий И.М., Софинский А.Н., Чернягин А.Г. Отработка вибропрочности узлового модуля Российского сегмента Международной космической станции // Космическая техника и технологии. 2015. № 3(10). С. 15–25.

4. Безмозгий И.М., Казакова О.И., Софинский А.Н., Чернягин А.Г. Отработка вибропрочности автоматического космического аппарата дистан-

ционного зондирования Земли // Космическая техника и технологии. 2014. № 4(7). С. 31–41.

5. Левин В.А., Вершинин А.В. 2015, Нелинейная вычислительная механика прочности в 5 томах. "Том 2. Численные методы. Реализация на высокопроизводительных вычислительных системах". М.: Физматлит – 543с.

6. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. 2015, Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URRS – 400 с., https://cae-fidesys.com.

7. V.A. Levin, K.M. Zingerman, A.V. Vershinin, E.I. Freiman, A.V. Yangirova. Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains // International Journal of Solids and Structures. 2013. V. 50. No. 20-21. P.3119-3135. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.05.019.

8. Levin V.A., Morozov E.M. Nonlocal criteria for determining a prefracture zone in the process of defect growth for finite strains. Doklady Physics. 2007. V. 52. No. 7. P. 391-393. DOI: 10.1134/S1028335807070129.

9. Seriani G. A parallel spectral element method for acoustic wave modeling // J. Comput. Acoust. 2007. V. 5, № 1. P. 53–69. 982.

10. Seriani G. 3-D large-scale wave propagation modeling by spectral element method on Cray T3E multiprocessor // Comput. Meth. Appl. Mech. a. Eng. 2008. V. 164, № 1–2. P. 235–247.

11. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method. V. 2. Solid mechanics. — L.: Butterworth–Heinemann, 2000. — 479 p.

12. https://www.3ds.com/products-services/simulia/

13. http://www.ansys.com

14. http://www.cae-fidesys.ru

15. http://www.nastran.com

REFERENCES

1. Bezmozgii I.M., Soinskii A.N., Chernyagin A.G. 2016, Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie i prochnost' svarnoi obolochki s tonnel'noi truboi [Mode of deformation and strength of welded shell with tunnel pipe]. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii*, no. 3(14), pp. 43–55.

2. Bezmozgiy I.M., Bobylev S.S., Soinskiy A.N., Chernyagin A.G. 2017, The efect of thrust cut-of of the third stage of the launch vehicle on the loading and strength of the transport cargo vehicle structure *"SPACE ENGINEERING AND TECHNOLOGY»*, №2, p.62-79

3. Bezmozgii I.M., Soinskii A.N., Chernyagin A.G. 2015, Otrabotka vibroprochnosti uzlovogo modulya Rossiiskogo segmenta Mezhdunarodnoi kosmicheskoi stantsii [vibration strength design for the node module of the Russian Segment of the International Space Station]. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii*, no. 3(10), pp. 15–25.

4. Bezmozgii I.M., Kazakova O.I., Soinskii A.N., Chernyagin A.G. 2014, Otrabotka vibroprochnosti avtomaticheskogo kosmicheskogo apparata distantsionnogo zondirovaniya Zemli [Perfecting vibration strength properties of an unmanned Earth remote sensing spacecraft]. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii*, no. 4(7), pp. 31–41.

5. Levin V.A., Vershinin A.V. 2015, *Nonlinear computational mechanics of strength in 5 volumes. "Vol. 2. Numerical methods. Implementation on high-speed computational systems"*. M.: Fizmatlit – 543p.

6. Morozov Ye.M., Levin V.A., Vershinin A.V. 2015, *Strength analysis. Fidesys in engineer's hands.* M.: URRS – 400p., https://cae-fidesys.com

7. V.A. Levin, K.M. Zingerman, A.V. Vershinin, E.I. Freiman, A.V. Yangirova. 2013, Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains // *International Journal of Solids and Structures*. V. 50. No. 20-21. P.3119-3135. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.05.019.

8. Levin V.A., Morozov E.M. 2007, Nonlocal criteria for determining a prefracture zone in the process of defect growth for finite strains. *Doklady Physics*. V. 52. No. 7. P. 391-393. DOI: 10.1134/S1028335807070129.

9. Seriani G. A 2007. parallel spectral element method for acoustic wave modeling // *J. Comput. Acoust.* V. 5, № 1. P. 53–69. 982.

10. Seriani G. 3-D large-scale wave propagation modeling by spectral element method on Cray T3E multiprocessor // *Comput. Meth. Appl. Mech. a. Eng.* 2008. V. 164, № 1–2. P. 235–247.

11. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. 2000, The finite element method. *V. 2. Solid mechanics. — L.: Butterworth–Heinemann*, — 479 p.

12. DASSAULT SYSTÈMES, THE 3DEXPERIENCE COMPANY official website available at: https://www.3ds.com/products-services/simulia/

13. ANSYS official website available at: http://www.ansys.com

14. Fidesys official website available at: http://www.cae-fidesys.ru

15. NASTRAN official website available at: http://www.nastran.com

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3. 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-109-130

ОБ УЧЕТЕ ВЯЗКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ В ТЕОРИИ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

С. В. Белых[1], А. А. Буренин[2], Л. В. Ковтанюк[3], А. Н. Прокудин[4]

Аннотация

Предлагается геометрически и термодинамически непротиворечивая математическая модель больших деформаций материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами. Считается, что на стадии деформирования, предваряющей пластическое течение и при разгрузке вязкие свойства материала обеспечивают процесс ползучести и таким способом медленный рост необратимых деформаций. При быстром росте необратимых деформаций в условиях пластического течения вязкие свойства выступают в качестве механизма, тормозящего данное течение. Накопление необратимых деформаций, таким образом, происходит последовательно: первоначально в процессе ползучести, далее при пластическом течении и, наконец, снова за счет ползучести материала (при разгрузке). На упругопластических границах, продвигающихся по деформируемому материалу, происходит перемена в механизме роста необратимых деформаций с ползучести на пластичность и наоборот. Такая перемена возможна только в условиях непрерывности необратимых деформаций и скоростей их изменения, что накладывает требование о согласованности в определениях скоростей необратимых по распределению напряжений, то есть на законы ползучести и пластичности. Смена механизмов производства необратимых деформаций означает разное задание источника в дифференциальном уравнении изменения (переноса) этих деформаций, следовательно необратимые деформации не разделяются на пластические и деформации ползучести. С целью наибольшей обозримости соотношений модели принимается гипотеза о независимости термодинамических потенциалов (внутренняя энергия,

[1]Белых Сергей Викторович, проректор по науке и инновационной работе, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, prorector-nir@knastu.ru

[2]Буренин Анатолий Александрович, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института машиноведения и металлургии ДВО РАН, mail@imim.ru

[3]Ковтанюк Лариса Валентиновна, заведующая лабораторией механики необратимого деформирования, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, lk@iacp.dvo.ru

[4]Прокудин Александр Николаевич, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, prokudin@imim.ru

свободная энергия) от необратимых деформаций. Следствием принятия гипотезы получен аналог формулы Мурнагана, классическое положение упругопластичности о том, что напряжения в материале полностью задаются уровнем и распределением обратимых деформаций. Основные положения предлагаемой модели иллюстрируются решением в ее рамках краевой задачи о движении упруговязкопластического материала в трубе за счет изменяющегося перепада давления.

Ключевые слова: большие деформации, упругость, вязкоупругость, пластичность, разгрузка.

Библиография: 31 название.

ON ACCOUNT OF VISCOUS PROPERTIES OF MATERIALS IN THE THEORY OF LARGE ELASTOPLASTIC STRAINS

S. V. Belykh, A. A. Burenin,L. V. Kovtanyuk, A. N. Prokudin

Abstract

A geometrically and thermodynamically consistent mathematical model of large strains of materials with elastic, viscous and plastic properties is proposed. It is believed that at the stage of a strain, which precedes the plastic flow and during unloading, the viscous material properties provide the creep process and thus a slow growth of irreversible strains. While rapid growth of irreversible strains under plastic flow conditions, viscous properties act as a mechanism that retards the flow. The accumulation of irreversible strains, therefore, occurs successively: initially, in the creep process, then under plastic flow and, finally, again due to creep of the material (during unloading). On the elastoplastic boundaries advancing along the deformable material, there is a change in the growth mechanism of irreversible strains from creep to plasticity and vice versa. Such a change is possible only under conditions of continuity of irreversible strains and their change rates, which imposes the requirement of consistency in the definitions of irreversible stress distribution rates, i.e., the laws of creep and plasticity. Changing the production mechanisms of irreversible strains means various setting up of the source in the differential equation of the change (transfer) of these strains, hence irreversible strains are not divided into plastic strains and creep strains. To maximize the visibility of the model's correlations, the hypothesis on the independence of thermodynamic potentials (internal energy, free energy) on irreversible strains is accepted. As a consequence of the hypothesis, an analog of the Murnaghan formula is obtained, the classical position of the elastoplasticity is that the stresses in the material are completely determined by the level and distribution of reversible strains. The main provisions of the proposed model are illustrated by the solution in its framework of the boundary value problem of the elastoviscoplastic material motion in a pipe due to a varying pressure drop.

Keywords: large deformations, elasticity, viscoelasticity, plasticity, unloading.

Bibliography: 31 titles.

1. Введение

Существуют технологии интенсивного формоизменения материалов, техническими условиями которых не допускаются высокие скорости процесса. В таких операциях (их называют холодной формовкой) формоизменение достигается за счет преимущественно медленного процесса ползучести [1]. Скорости роста необратимых деформаций ползучести задаются уровнем и распределением напряжений в деформируемом материале. Однако и уровень и распределение напряжений существенным образом зависит от наличия хотя бы малых по объему областей пластического течения, полностью избавиться от которых невозможно, так как они необходимо присутствуют в местах воздействия на материал оснасткой. Следовательно расчетное прогнозирование подобных технологический обязано опираться на математическую модель больших деформаций, одновременно учитывающую и медленный процесс ползучести и более быстрый процесс пластического течения.

Современные пакеты прикладных программ основываются, чаще всего, на предложении Р. Хилла [2] проводить расчеты в скоростях деформирования, принимая аддитивное разложение скоростей деформаций на упругую и пластическую составляющие: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij}$ [2]. Такой же подход переносится на случай больших деформаций [3]. При этом скорость пластических деформаций определяется с помощью ассоциированного закона пластического течения, а скорость упругих деформаций – с помощью модели гипоупругости [3], которая предполагает использование какой-либо объективной производной тензора напряжений Коши-Эйлера.

Такая модель оказывается не только неоднозначной вследствие произвола в выборе объективной производной, но и геометрически и термодинамически некорректной [5]. При ее использовании необходимо отслеживать непрерывность перемещений на упругопластических границах, так как иначе можно получить необъяснимые физические эффекты в расчетах. . Однако указанные недостатки практически не сказываются на результатах, когда упругие деформации являются малыми [6]. Теория используется во многих конечно-элементных пакетах и применяется для моделирования процессов обработки металлов давлением [7].

Геометрически безупречной является модель, предложенная Е. Ли [8], в которой разделение полных деформаций на обратимую (упругую) и необратимую (пластическую) составляющие связывается с мультипликативным разделением градиента деформаций: $F = F^e F^p$. Такое разделение предполагает использование разгруженной конфигурации, где обратимые деформации отсутствуют. Недостижимость такой конфигурации при разгрузке и ее возможная неединственность [10] существенно затрудняют постановку краевых задач основанную на такой модели. Но привлекательность такого подхода из-за его геометрической и термодинамческой корректности привела к попыткам его использования в численных расчетах конечных упругопластических деформаций и упругого отклика [10, 11]. Стоит отметить, что в рамках данной модели больших деформаций практически неизвестны точ-

ные решения простых модельных задач.

Также отметим теорию многократного наложения больших деформаций [12], разрабатываемую под руководством В.А. Левина. Программная реализация [13] теории выполнена в рамках CAE для прочностного инженерного анализа Фидесис и, в частности, позволяет решать задачи, в которых при конечных деформациях в процессе нагружения непрерывно или скачкообразно изменяются границы и граничные условия.

Моделирование больших упругопластических деформаций в рамках деформационной теории пластичности, включая методы расчетов можно найти в монографиях [14, 15].

В работе используется математическая модель больших упругопластических деформаций, предложенная в [16] и подробно обоснованная в [17]. Достоинством подхода, принятого в [16, 17], является выполнение положений классической теории упругопластичности, состоящих в том, что тензор необратимых деформаций в условиях деформирования, предваряющего течение, и при разгрузке неизменен, а напряжения полностью задаются уровнем и распределением обратимых деформаций.

Для следования последнего потребовалось принять гипотезу о независимости термодинамических потенциалов (внутренняя энергия, свободная энергия) от необратимых деформаций. Именно эти обстоятельств позволили в рамках модели [16, 17] поставить и получить решения, включая точные, ряда краевых задач теории больших деформаций [18-22]. Обобщение модели на неизотермический случай проведено в [23], первое решение краевой задачи в рамках такой обобщенной модели получено в [24].

2. Кинематика больших деформаций

Движение точки деформируемого тела в прямоугольной системе декартовых координат зададим зависимостями:

$$\begin{aligned} a_i &= a_i(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_i &= x_i - a_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t) \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t - время, a_i - координаты точки в отсчетной конфигурации тела, когда деформации и напряжения в нем равны нулю (свободное состояние), x_i - координаты данной точки в актуальном состоянии (переменные Эйлера), u_i - компоненты вектора перемещений.

Для компонент $a_{i,j} = \partial a_i / \partial x_j$ тензора дисторсии и компонент $g_{ij} = a_{k,i} a_{k,j}$ метрического тензора имеем дифференциальные уравнения их изменения (переноса) в форме:

$$\begin{aligned}
&\frac{da_{i,j}}{dt} + a_{i,k}v_{k,j} = 0;\\
&\frac{dg_{i,j}}{dt} + g_{ik}v_{k,j} + v_{k,j}g_{kj} = 0;\\
&v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j u_{i,j}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Для компонент $d_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - g_{ij})$ тензора деформаций Альманси согласно (1, 2) следует уравнение переноса вида:

$$\begin{aligned}
&\frac{dd_{i,j}}{dt} + d_{ik}v_{k,j} + v_{k,j}g_{kj} = \varepsilon_{ij};\\
&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}).
\end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение переноса для тензора деформаций принципиально отлично от уравнений изменения для тензора дисторсии и метрического тенора наличием в нем источника в правой части, каким является тензор скоростей деформаций Эйлера. Если тензор дисторсии и метрический тензор сохраняются, то деформации производятся при движении рассматриваемой точки тела по своей траектории. Деформации не изменяются, когда $\varepsilon_{ij} = 0$. В этом случае тело движется как жесткое целое. Уравнения переноса тензора деформаций и метрического тензора можно переписать в виде:

$$\frac{\overline{D}d_{ij}}{\overline{D}t} = \varepsilon_{ij}; \frac{\overline{D}g_{ij}}{\overline{D}t} = 0 \tag{4}$$

где символом $\frac{\overline{D}}{\overline{D}t}$ обозначена объективная производная в смысле Коттера-Ривлина. При $\varepsilon_{ij} = 0$ последняя переходит в объективную производную Яумана:

$$\begin{aligned}
&\frac{\hat{D}g_{ij}}{\hat{D}t} = \frac{dg_{ij}}{dt} + g_{ik}\omega_{kj} + \omega_{ki}g_{kj} = 0\\
&\frac{\hat{D}d_{ij}}{\hat{D}t} = \frac{dd_{ij}}{dt} + d_{ik}\omega_{kj} + \omega_{ki}d_{kj} = 0\\
&\omega_{ij} = v_{i,j} - \varepsilon_{ij}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Тензор вращений ω_{ij} задает мгновенную угловую скорость вращения твердого тела, когда деформации в нем не изменяются $\varepsilon_{ij} = 0$. В основании кинематических построений Е. Ли [8] при формулировании кинематики упругопластического деформирования стояло предложение о введение наряду с начальной (свободное состояние) и актуальной конфигурациями деформируемого тела еще и конфигурацию разгруженного состояния, такую, чтобы в ней отсутствовали обратимые деформации. Очевидно, что в любом упругопластическом процессе достижение такой конфигурации неосуществимо,

так как для этого пришлось бы разбить тело на бесконечно малые объемы и снять любые нагрузки с последних. иначе после снятия внешней нагрузки в теле наряду с необратимыми деформациями всегда будут присутствовать обратимые и, как следствие, напряжения будут отличными от нуля. Данные напряжения называют остаточными. Они могут играть положительную роль, обеспечивая, например, натяг в сборке, но чаще приходится проводить специальные технологические операции (отпуск, отжиг) с целью снизить их уровень. В представлении Е. Ли данное состояние служит самому определению обратимых и необратимых деформаций и позволяет осуществить построение геометрически непротиворечивой кинематики. В наших обозначениях данное предложение следует записать в форме:

$$g_{ij} = g^p_{ik} g^e_{kj} = \frac{\partial a_m}{\partial b_i} \frac{\partial a_m}{\partial b_k} \frac{\partial b_n}{\partial x_k} \frac{\partial b_n}{\partial x_j} \tag{6}$$

В (6) b_i - координаты точки деформируемой среды в состоянии полной разгрузки тела, когда в нем отсутствуют обратимые деформации. Разделение деформаций на свои составляющие предстает зависимостями:

$$g_{ij} = (\delta_{ik} - 2e^p_{ik})(\delta_{kj} - 2e^e_{kj}) \tag{7}$$

Данные соотношения непосредственно следуют из (6), а тензоры с компонентами e^e_{ij} и e^p_{ij} определяются в качестве тензоров обратиимых и необратимых составляющих полных деформаций.

Для компонент тензора дисторсии и метрического тензора g_{ij} введем представление

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= Y_{i,k}(\delta_{kj} - e_{kj}) \\ g_{ij} = a_{s,i} a_{s,j} &= (\delta_{ik} - e_{ik})(\delta_{km} - 2p_{km})(\delta_{mj} - e_{mj}) \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь δ_{ij} - компоненты единичного тензора (символы Кронекера).

Для тензора p_{ij} из (2) непосредственно следует:

$$p_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - Y_{m,i} Y_{m,j})$$

Таким образом, введенный в (8) тензор с компонентами p_{ij} является симметричным $p_{ij} = p_{ji}$. Но тензор с компонентами e_{ij}, в общем случае представленный в (8), может и не быть симметричным; первое равенство из (8) не является полярным разложением тензора дисторсии. Исходя из (1) и (8), возможно записать уравнения изменения для введенных в (8) тензоров.

$$\begin{aligned} \frac{de_{ij}}{dt} &= v_{i,j} - b_{ij} - e_{ik} v_{k,j} + b_{ik} e_{kj} \\ \frac{dp_{ij}}{dt} &= \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) - p_{ik} b_{kj} + b_{ki} p_{kj} \\ b_{ij} &= -Y^{-1}_{ik} \frac{dY_{kj}}{dt} \end{aligned} \tag{9}$$

Потребуем теперь, чтобы тензор с компонентами e_{ij} был симметричным. Это возможно только при условии, следующем из (9)

$$b_{km}(\delta_{mj} - e_{mj}) - (\delta_{km} - e_{km})b_{mj} = (\delta_{km} - e_{km})v_{m,j} - v_{m,k}(\delta_{mj} - e_{mj}) \qquad (10)$$

Таким образом для симметрии $e_{ij} = e_{ji}$ тензора в (9) требуется выполнение условия (10). Иначе, тензор с компонентами b_{km} не может быть произвольным, а обязан удовлетворять зависимостям (10), и только в этом случае $e_{ij} = e_{ji}$. Тензорное равенство (10) в таком случае следует рассматривать в качестве уравнения для b_{km}. Решением данного уравнения является:

$$b_{ij} = r_{ij} + (\delta_{ik} - e_{ik})t_{kj} \qquad (11)$$

В решении (11) t_{kj} – компоненты произвольного, но симметричного тензора: $t_{kj} = t_{jk}$. Тензор с компонентами r_{ij} является кососимметричным $r_{ij} = -r_{ji}$ и для него

$$r_{ij} = w_{ij} + A^{-1}[B^2(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj}) + B(\varepsilon_{ik}e_{km}e_{mj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mj}) + e_{ik}\varepsilon_{km}e_{mn}e_{nj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mn}e_{nj}$$

$$v_{i,j} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) - \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) = \varepsilon_{ij} + w_{ij}$$

$$A = 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3;\ B = 2 - E_1;$$

$$E_1 = e_{jj}; E_2 = e_{ij}e_{ji}; E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}. \qquad (12)$$

Зависимости (11) и (12) дают возможность переписать уравнения изменения (9) компонент e_{ij} и p_{ij} в форме

$$\frac{de_{ij}}{dt} = \varepsilon_{ij} - t_{ij} - r_{ij} + w_{ij} - e_{ik}(\varepsilon_{kj} + w_{kj} - t_{kj}) + (r_{ik} + t_{ik})e_{kj} - e_{im}t_{mk}e_{kj}$$

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = t_{ij} - \frac{1}{2}(e_{ik}t_{kj} + t_{ik}e_{kj}) + (r_{ik} - t_{ik})p_{kj} - p_{ik}(r_{kj} + t_{kj}) + p_{ik}e_{km}t_{mj} + t_{im}e_{mk}p_{kj} \qquad (13)$$

Положим первоначально в (11) компоненты произвольного симметричного тензора t_{ij} равными нулю. Тогда уравнения переноса (13) упрощаются

$$\frac{de_{ij}}{dt} = \varepsilon_{ij} + w_{ik}e_{kj} - e_{ik}w_{kj} - \frac{1}{2}(e_{ik}\varepsilon_{kj} + \varepsilon_{ik}e_{kj}) + \frac{1}{2}(z_{ik}e_{kj} + e_{ik}z_{kj})$$

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = w_{ik}p_{kj} - p_{ik}w_{kj} + z_{ik}p_{kj} - p_{ik}z_{kj} \qquad (14)$$

$$z_{ij} = r_{ij} - w_{ij}$$

Если бы среда не деформировалась, то $\varepsilon_{ij} \equiv 0$, а из (12) следовало бы, что $z_{ij} = 0$. Тогда из второго равенства (14) вытекало бы, что производная Яумана от тензора с компонентами p_{ij} равна тождественно нулю и данные компоненты изменяются также, как если среда двигалась бы как жесткое

целое. Но присутствие двух последних слагаемых во втором соотношении (14), отличающих его от объективной производной от p_{ij} по времени в смысле Яумана, не меняют существа этого вывода, меняя только саму объективную производную.

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \frac{dp_{ij}}{dt} - r_{ik}p_{kj} + p_{ik}r_{kj} = 0 \tag{15}$$

В отличие от производной Яумана в (15) вместо тензора вращений с компонентами w_{ij} используется другой кососимметричный тензор ($r_{ij} = -r_{ji}$), компоненты r_{ij} которого в своей главной линейной части совпадают с w_{ij}. Согласно (15) изменяются компоненты p_{ij} при неизменном в целом данном тензоре. Это обстоятельство предоставляет возможность отождествить компоненты p_{ij} с необратимыми деформациями, а случай с $t_{ij} \equiv 0$ считать процессом обратимого деформирования. При этом необратимые деформации в среде могут присутствовать, но изменяться в соответствии с (15), то есть так, как если бы среда двигалась как жесткое целое, не изменяя тензор необратимых деформаций. Наличие двух последних слагаемых во втором равенстве из (14) связано с геометрической корректностью в «выборе» объективной производной с тем, чтобы тензор необратимых деформаций с компонентами p_{ij} не менялся в случае обратимого деформирования $t_{ij} \equiv 0$. Заметим, что обратимое деформирование таким образом полностью кинематически определено, поскольку оно продолжается в течение такого промежутка времени, когда неизвестный до сих пор тензор остается нулевым ($t_{ij} \equiv 0$). Тогда же, когда необратимые деформации накапливаются, компоненты произвольного симметричного тензора t_{ij} обязаны быть определены из других условий. Заметим, наконец, что компоненты d_{ij} полных деформаций Альманси, следуя (2), вычисляются через e_{ij}, p_{ij} зависимостями:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj} \tag{16}$$

Согласно (16) при признании p_{ij} необратимыми деформациями, в качестве тензора обратимых деформаций следует считать тензор с компонентами $s_{ij} = e_{ij} - 0.5e_{ik}e_{kj}$

3. Определяющие законы

Рассмотрим первоначальный случай, когда необратимые деформации в среде не накапливаются, то есть в случае обратимого деформирования. Исходим из закона сохранения энергии, который запишем в форме:

$$\rho\frac{de}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{17}$$

здесь ρ - плотность среды, e - плотность распределения внутренней энергии, q_i - компоненты вектора потока тепла, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений.

Рассматривая медленные процессы, в качестве термодинамического потенциала будем использовать свободную энергию, для плотности распределения Ψ которой имеем:

$$\begin{aligned} \Psi(e_{ij}, T) &= e(e_{ij}, s) - sT; \\ \frac{\partial \Psi}{\partial T} &= -s; \\ \frac{\partial e}{\partial s} &= T. \end{aligned} \tag{18}$$

где T - температура, s - плотность распределения энтропии. В (18) принимается гипотеза о том, что термодинамические потенциалы деформирования задаются лишь консервативным механизмом деформирования, а диссипативный механизм полностью ответственен за производство энтропии. Иными словами полагаем, что Ψ не зависит от необратимых деформаций.

Подстановка (18) в (17) приводит к соотношению:

$$\rho(\frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} \frac{de_{ij}}{dt} + T\frac{ds}{dt}) + q_{i,j} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = 0 \tag{19}$$

Исключив из (19) производные деформаций с помощью первого равенства из (14), его можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &(\rho(\frac{\partial \Psi}{\partial e_{ij}} - \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}} e_{kj} + A^{-1}B^2(e_{ik}\frac{\partial \Psi}{\partial e_{km}} e_{mj} - \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}} e_{km}e_{mj}) + \\ &A^{-1}B(e_{ik}e_{km}\frac{\partial \Psi}{\partial e_{mn}} e_{nj} - \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}} e_{km}e_{mn}e_{nj}) + A^{-1}(e_{ik}e_{km}\frac{\partial \Psi}{\partial e_{mn}} e_{nt}e_{tj} - e_{ik}\frac{\partial \Psi}{\partial e_{km}} e_{mn}e_{nt}e_{tj}))\sigma_{ij})\varepsilon_{ij} \\ &+\rho r_{ij}(e_{ik}\frac{\partial \Psi}{\partial e_{kj}} - \frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}} e_{kj}) + \rho T\frac{ds}{dt} + q_{i,j} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Отсюда в силу независимости процессов, задаваемых e_{ij}, r_{ij} и T, учитывая симметрию тензора напряжений, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \rho\frac{\partial \Psi}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \\ \rho T\frac{ds}{dt} &+ q_{i,j} = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Первое соотношение из (21) представляет собой аналог известной в нелинейной теории упругости формулы Мурнагана, второе - уравнение баланса энтропии в условиях обратимого деформирования. В областях, где необратимые деформации отсутствуют ($p_{ij} \equiv 0$), формула Мурнагана принимает классическую форму записи:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \rho\frac{\partial \Psi}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) \\ d_{ij} &= e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} \end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом, напряжения через деформации вычисляются либо зависимостью (22) при отсутствии необратимых деформаций, либо первым соотношением из (21), когда необратимые деформации в среде присутствуют. При этом конкретные деформационные свойства среды обязаны определяться заданием конкретной функции $\Psi = \Psi(e_{ij}, T)$ или в случае отсутствия необратимых деформаций, функцией $\Psi = \Psi(d_{ij}, T)$. Данные функции обязаны совпадать при p_{ij}, стремящемся к нулю. Важно подчеркнуть, что формула Мурнагана задает напряжения в среде в зависимости только от обратимых деформаций, и это справедливо также и тогда, когда необратимые деформации изменяются.

Такое положение вполне аналогично классическому случаю упругопластической среды в математических моделях типа Прандтля-Рейса [26, 27]. В нашем случае задание напряжений уровнем и распределением обратимых деформаций является следствием гипотезы о независимости термодинамических потенциалов (свободная энергия, внутренняя энергия) от необратимых деформаций.

Пусть теперь $t_{ij} \neq 0$ в процессе деформирования. В таком случае в среде могут накапливаться необратимые деформации. Теперь вместо первой зависимости (14) в уравнение (19) следует подставить первую же зависимость из (13). Результат такой подстановки запишем в виде:

$$\begin{gathered}(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}(\delta_{ij} - e_{kj}) - \sigma_{ij})\varepsilon_{ij} + \rho T\frac{ds}{dt} + q_{j,i} = \tau_{ij}t_{ij} \\ \tau_{ij} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - 2e_{kj} + e_{km}e_{mj}) = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - s_{kj})\end{gathered} \tag{23}$$

Как и следовало ожидать, из (23) следует формула Мурнагана (21) и уравнение баланса энтропии с источником. Перепишем последнее уравнение в канонической форме уравнения баланса:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -(T^{-1}q_j + \rho s v_j)_j - T^{-2}q_j T_{,j} + T^{-1}\tau_{ij}t_{ji} \tag{24}$$

В (24) первое слагаемое правой части представляет собой полный поток энтропии, а два последующих задают производство энтропии за счет необратимых процессов теплопроводности и необратимого деформирования соответственно. Ограничимся далее изотермическим процессом деформирования. Обобщение на неизотермический случай, по-видимому, не встретит дополнительных сложностей, как это было в случае, где приобретение необратимых деформаций связывалось только с идеальным пластическим течением. В изотермическом случае производство энтропии осуществляется только за счет необратимого процесса деформирования, то есть за счет пластического течения, либо за счет вязкого сопротивления деформированию, либо в процессе ползучести, что также связано с учетом вязких свойств среды. Производство энтропии за счет пластичности и вязкости происходит по-разному, но его можно обобщенно представить одним соотношением:

$$D = \sigma_{ij}\gamma_{ij} \tag{25}$$

Действительно, если среда не обладает пластическими свойствами, а только вязкими, или пластические свойства не проявляются в процессах, предваряющих течение, или при разгрузке, то имеем классическое представление для источника энтропии [28]:

$$D = \sigma_{ij}e^v_{ij} \tag{26}$$

В случае же идеальной пластичности для производства энтропии (его часто называют диссипативной функцией) также имеем классическое представление [24]:

$$D = \sigma_{ij}e^p_{ij} \tag{27}$$

В (26) и (27) e^v_{ij} и e^p_{ij} соответственно скорости деформации ползучести и пластичности. Следовательно $\gamma_{ij} = \varepsilon^v_{ij}$ в областях, где не происходит пластическое течение и $\gamma_{ij} = e^p_{ij}$ при пластическом течении. Более сложное представление для γ_{ij} остается для областей течения, когда такое течение невозможно считать идеальным. Вязкие свойства среды могут тормозить течение, что часто моделируется добавлением соответствующих слагаемых в пластический потенциал (поверхность нагружения). Однако представление (25) будет справедливо и в этом случае; для γ_{ij} только следует находить более точное определение. Согласно (24, 25) в самом общем случае изотермического деформирования получаем:

$$\sigma_{ij}\gamma_{ij} = T^{-1}\tau_{ij}t_{ij} \tag{28}$$

Вместе с (21) и (23) последнее соотношение позволяет записать:

$$\begin{gathered}\tau_{ij} = T\sigma_{ik}(\delta_{kj} - e_{kj}) \\ \gamma_{ij} = t_{ik}(\delta_{kj} - e_{kj})\end{gathered} \tag{29}$$

Последняя зависимость (29) связывает до настоящего времени неизвестный симметричный тензор с компонентами t_{ik} с компонентами γ_{ij} тензора скоростей необратимых деформаций p_{ij}. Исключая данный неизвестный тензор при помощи второй зависимости из (29) из уравнений изменения составляющих тензора полных деформаций (13), получим:

$$\begin{gathered}\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}\left((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \gamma_{kj} - z_{kj})\right), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} = \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}, \\ \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}.\end{gathered} \tag{30}$$

Согласно (30) материал деформируется оратимо только в случае $\gamma_{ij} = 0$. Иначе, при $\gamma_{ij} = 0$ компоненты p_{ij} изменяются также, как и при жестком

движении тела. Введение объективной производной специального вида (15) служит выполнению данного требования к геометрической корректности кинематических построений.

До сих пор необратимые деформации не разделялись на деформации пластического течения и деформации ползучести. Такое различие свяжем только с механизмом их роста. Скорости роста деформаций ползучести ε_{ij}^{v} задаются уровнем и распределением напряжений в материале и отличны от нуля, если только напряжения присутствуют. Скорости пластических деформаций ε_{ij}^{p} возникают только при выходе напряженных состояний на поверхность нагружения (при выполнении условий пластического течения). Таким образом область деформирования разделяется на части в зависимости от того удовлетворяют или нет напряжения условию пластичности. При этом в области пластического течения происходит быстрый рост необратимых деформаций, а в области ползучести необратимые деформации растут более медленно. Продвигающиеся упругопластические границы, разделяющие такие области, оказываются местом изменения механизмов накопления необратимых деформаций. Отметим, что конкретизация этих механизмов ползучести или пластического течения, впрочем как и закона упругости, в части формулировки соответствующих законов может быть любой в зависимости от предпочтений конструкторов моделей и нужд технологической практики. Предыдущие фундаментальные зависимости для этого оставляют полную свободу. При этом необходимо следить, чтобы законы ползучести и законы пластического (чаще вязкопластического) течения были бы согласованы между собой так, чтобы необратимые деформации и скорости деформаций были бы непрерывны на упругопластических границах.

считаем, что вязкие свойства деформируемого материала проявляются на стадиях деформирования, предваряющих пластическое течение, и при разгрузке в форме его деформаций ползучести. В условиях пластического течения эти же свойства выступают в качестве сопротивления материала его пластическому течению. В простейшем случае при таких условиях необходимо полагать, что поверхность нагружения в пространстве напряжений имеет уравнение: $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}) = 0$. Тогда в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса имеем ассоциированный закон пластического течения в форме:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^{p} - \varepsilon_{ij}^{v_0} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \lambda(\varepsilon_{ij}^{p}, \varepsilon_{ij}^{v_0}) > 0 \tag{31}$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^{v_0}$ - скорость деформаций ползучести в момент прихода в данную точку материала упругопластической границы, то есть в момент начала пластического течения. Такая скорость изменения необратимых деформаций является начальным значением для последующего их роста в условиях пластического течения. Вследствие такого обобщения условия пластичности классическое условие максимальных касательных напряжений, к примеру, приобретает вид:

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon_k^{p} - \varepsilon_k^{v_0}| \tag{32}$$

В (32) $\sigma_i, \varepsilon_k^p$ - главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, $\varepsilon_k^{v_0}$ - главные значения тензора $\varepsilon_{ij}^{v_0}$, k - предел текучести, η - коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

Когда пластический потенциал кусочно-линейный, как в случае условия пластичности Треска-Сен-Венана (32), то удобно и потенциал ползучести задавать в кусочно-линейной форме [29, 30]:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}; \Sigma = \max|\sigma_i - \sigma_j|; V = B\Sigma^n \tag{33}$$

Зависимостями (33) задается двухконстантный (B, n) степенной закон ползучести Нортона. Подчеркнем еще раз ,что (32) и (33) являются простейшими и возможных и ограничений для использования иных законов пластичности и ползучести построенная математическая модель не выдвигает. Конкретизация закона упругости также может быть любой, здесь для решения конкретных задач упругий потенциал, принимая условия несжимаемости среды, будем задавать зависимостью [31]:

$$\begin{gathered} W = W(J_1, J_2) = \rho^{-1} = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b-\mu)J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \ldots \\ J_1 = s_{jj}, J_2 = s_{ij}s_{ji}, s_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} \\ \sigma_{ij} = -P_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \end{gathered} \tag{34}$$

Здесь P_1 - добавочное гидростатическое давление, μ - модуль сдвига, b, χ - упругие постоянные более высокого порядка.

4. Течение упруговязкопластической среды в цилиндрической трубе

Теперь рассмотрим пример использования введенной математической модели больших деформаций. Пусть сплошная среда занимает цилиндрическую трубу радиуса R. Введем цилиндрическую систему координат ρ, φ, z. Считаем, что деформирование среды вызвано действием градиента давления:

$$\frac{\partial P_1(\rho,\ z,\ t)}{\partial z} = -\psi(t),\ \psi(0) = 0. \tag{35}$$

Начальные и граничные условия задачи имеют вид:

$$\begin{gathered} e_{ij}|_{t=0} = p_{ij}|_{t=0} = 0 \\ \vec{u}\Big|_{\rho=R} = \vec{v}\Big|_{\rho=R} = 0 \end{gathered} \tag{36}$$

Считаем, что неизвестные вектор перемещений и скорости имеют только одну ненулевую компоненту – вертикальную. С учетом осевой симметрии

получим:

$$\begin{gathered} u = \ u_z\left(\rho,\ t\right),\ v = \ v_z\left(\rho,\ t\right) \\ d_{\rho\rho} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2;\ d_{\rho z} = d_{z\rho} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \rho} \\ \varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{z\rho} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \rho};\ w_{z\rho} = -w_{\rho z} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \rho} \end{gathered} \tag{37}$$

В качестве термодинамического потенциала использовалась свободная энергия Гельмгольца. Предполагая, что плотность распределения ψ свободной энергии не зависит от необратимых деформаций, получаем: $W = \rho_0\psi$. Тогда упругий потенциал для изотропной несжимаемой среды в виде разложения в ряд Тейлора относительно свободного состояния запишется в виде:

$$\begin{gathered} W = W\left(I_1, I_2\ \right) = \left(\alpha - \mu\right) I_1 + \alpha I_2 + \beta I_1^2 - \xi I_1 I_2 - \zeta I_1^3 + \ldots \\ J_1 = s_{jj},\ J_2 = s_{ij}s_{ji},\ s_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} \end{gathered} \tag{38}$$

здесь $\mu,\ \alpha,\ \beta,\ \xi, \chi$ – параметры материала.

Далее подставим последнее соотношение в формулы (22) и получим соотношения связывающие обратимые деформации и напряжения:

$$\begin{gathered} \sigma_{\rho\rho} = -\left(P_1 + 2\mu\right) + 2b\left(e_{\rho\rho} + e_{zz} + e_{\varphi\varphi}\right) + 2\mu e_{\rho\rho} + \mu e_{\rho z}^2 + \ldots \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\left(P_1 + 2\mu\right) + 2b\left(e_{\rho\rho} + e_{zz} + e_{\varphi\varphi}\right) + 2\mu e_{\varphi\varphi} - 2\mu e_{\rho z}^2 + \ldots \\ \sigma_{zz} = -\left(P_1 + 2\mu\right) + 2b\left(e_{\rho\rho} + e_{zz} + e_{\varphi\varphi}\right) + 2\mu e_{zz} + \mu e_{\rho z}^2 + \ldots \\ \sigma_{\rho z} = 2\mu e_{\rho z} + \ldots \end{gathered} \tag{39}$$

Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии и без учета массовых и инерционных сил:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\rho} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\rho} = 0 \end{gathered} \tag{40}$$

Уравнения переноса для компонент тензоров необратимых и обратимых

деформаций:

$$\begin{gathered}
\gamma_{\rho\rho} = \frac{dp_{\rho\rho}}{dt} + 2\left(p_{\rho\rho}\gamma_{\rho\rho} + p_{\rho z}\left(r_{z\rho} + \gamma_{\rho z}\right)\right) \\
\gamma_{zz} = \frac{dp_{zz}}{dt} + 2\left(p_{zz}\gamma_{zz} + p_{\rho z}\left(r_{\rho z} + \gamma_{\rho z}\right)\right) \\
\gamma_{\rho z} = \frac{dp_{\rho z}}{dt} + r_{z\rho}\left(p_{\rho\rho} - p_{zz}\right) + \left(p_{\rho z}\left(\gamma_{zz} + \gamma_{\rho\rho}\right) + \gamma_{\rho z}\left(p_{zz} + p_{\rho\rho}\right)\right) \\
\gamma_{\varphi\varphi} = \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} + 2p_{\varphi\varphi}\gamma_{\varphi\varphi} \\
-\gamma_{\rho\rho} = \frac{de_{\rho\rho}}{dt} + 2r_{z\rho}e_{\rho z} \\
-\gamma_{zz} = \frac{de_{zz}}{dt} + 2r_{\rho z}e_{\rho z} \\
\varepsilon_{\rho z} - \gamma_{\rho z} = \frac{de_{\rho z}}{dt} + r_{\rho z}\left(e_{\rho\rho} - e_{zz}\right) + \\
+\frac{1}{2}\left(e_{\rho\rho}\left(\gamma_{\rho z} - \varepsilon_{\rho z}\right) + e_{zz}\left(\varepsilon_{\rho z} - \gamma_{\rho z}\right) + e_{\rho z}\left(\gamma_{zz} - \gamma_{\rho\rho}\right)\right) \\
-\gamma_{\varphi\varphi} = \frac{de_{\varphi\varphi}}{dt}
\end{gathered} \tag{41}$$

Перейдем к определению источника необратимых деформаций. Запишем потенциал ползучести V в соответствии со степенным законом ползучести Нортона:

$$\begin{gathered}
V\left(\sigma_{ij}\right) = B\Sigma^n\left(\sigma_1,\ \sigma_2, \sigma_3\right) \\
\Sigma = \max\left|\sigma_i - \sigma_j\right|
\end{gathered} \tag{42}$$

где σ_i – главные значения тензора напряжений, B, n – параметры ползучести материала, определяемые экспериментально.

Величина Σ выражается через координатные напряжения следующим образом:

$$\Sigma = \sqrt{4\sigma_{\rho z}^2 + \left(\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{zz}\right)^2} \tag{43}$$

Найдем выражения для источника деформаций ползучести:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{\rho z}^c = (-1)^n 2^n Bn\mu^{n-1}e_{\rho z}^{n-1}; \\
\varepsilon_{\rho\rho}^c = -\varepsilon_{zz}^c = \frac{\varepsilon_{\rho z}^c}{2}\left(\frac{e_{\rho\rho} - e_{zz}}{e_{\rho z}}\right).
\end{gathered} \tag{44}$$

Рассмотрим модифицированный пластический потенциал Мизеса с учетом упрочнения и вязкости:

$$f\left(\tau_{ij},\ p_{ij}, \varepsilon_{ij}^p\right) = \left(\tau_{ij} - cp_{ij} - \eta\varepsilon'^p_{ij}\right)\left(\tau_{ji} - cp_{ji} - \eta\varepsilon'^p_{ij}\right) - \frac{8}{3}k^2 \tag{45}$$

где $\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$, $\varepsilon'^p_{ij} = \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}^p\delta_{ij}$, c – параметр материала, характеризующий проявление эффекта Баушингера, η – коэффициент вязкости пластического течения, k – предел текучести материала.

Из ассоциированного закона пластического течения получим:

$$\varepsilon_{ij}^{p} = \frac{2\lambda\left(\tau_{ij} - cp_{ij}\right)}{1 + 2\lambda\eta} \tag{46}$$

Подставляя последнее соотношение в выражение для пластического потенциала

$$f\left(\tau_{ij},\ p_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}\right)$$

найдем неизвестную функцию λ и получим выражения для скоростей пластических деформаций. Далее выразим скорости пластических деформаций через компоненты обратимых деформаций с помощью соотношений (39) и получим окончательно:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{\rho\rho}^{p} = \frac{1}{3\eta}\frac{Q - \sqrt{\frac{8}{3}}k}{Q}\left(\mu\left(4e_{\rho\rho} - 2e_{\varphi\varphi} - 2e_{zz} + 3e_{\rho z}^{2}\right) - 3cp_{\rho\rho}\right) \\
\varepsilon_{\varphi\varphi}^{p} = \frac{1}{3\eta}\frac{Q - \sqrt{\frac{8}{3}}k}{Q}\left(\mu\left(4e_{\varphi\varphi} - 2e_{\rho\rho} - 2e_{zz} - 6e_{\rho z}^{2}\right) - 3cp_{\varphi\varphi}\right) \\
\varepsilon_{zz}^{p} = \frac{1}{3\eta}\frac{Q - \sqrt{\frac{8}{3}}k}{Q}\left(\mu\left(4e_{zz} - 2e_{\rho\rho} - 2e_{\varphi\varphi} + 3e_{\rho z}^{2}\right) - 3cp_{zz}\right) \\
\varepsilon_{rz}^{p} = \frac{1}{\eta}\frac{Q - \sqrt{\frac{8}{3}}k}{Q}\left(2\mu e_{rz} - cp_{\rho z}\right)
\end{gathered} \tag{47}$$

Величина Q при этом:

$$\begin{gathered}
Q = \sqrt{\frac{1}{3}\left(3c^{2}B_{1} + 2c\mu B_{2} + 2\mu^{2}B_{3}\right)} \\
B_{1} = p_{\rho\rho}^{2} + p_{\varphi\varphi}^{2} + p_{zz}^{2} + 2p_{\rho z}^{2} \\
B_{2} = 3e_{\rho z}^{2}\left(-p_{\rho\rho} + 2p_{\varphi\varphi} - p_{zz}\right) + 2e_{rr}\left(-2p_{\rho\rho} + p_{\varphi\varphi} + p_{zz}\right) + \\
+2e_{\varphi\varphi}\left(p_{\rho\rho} - 2p_{\varphi\varphi} + p_{zz}\right) + 2e_{zz}\left(p_{\rho\rho} + p_{\varphi\varphi} - 2p_{zz}\right) - 12e_{\rho z}^{2}p_{\rho z} \\
B_{3} = 12e_{\rho z}^{2} + 6e_{\rho z}^{2}\left(e_{rr} - 2e_{\varphi\varphi} + e_{zz}\right) + 4e_{\rho\rho}^{2} + \\
+4e_{\varphi\varphi}^{2} + 4e_{zz}^{2} - 4e_{rr}e_{zz} - 4e_{rr}e_{\varphi\varphi} - 4e_{rr}e_{zz} + 9e_{\rho z}^{4}
\end{gathered} \tag{48}$$

Для второго уравнения равновесия (40) с учетом (35) можно найти общее решение

$$\sigma_{\rho z}\left(\rho,\ t\right) = -\frac{\psi\left(t\right)}{2}\rho \tag{49}$$

Использовались следующие безразмерные переменные:

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{R},\ \hat{z} = \frac{z}{R}, \hat{u} = \frac{u}{R}, \tau = \frac{t}{R}\sqrt{\frac{\mu}{\rho_{0}}},\ \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu},\ \hat{b} = \frac{b}{\mu}, \hat{k} = \frac{k}{\mu},\ \hat{c} = \frac{c}{\mu} \tag{50}$$

где ρ_{0} – плотность среды.

Рис. 1: Необратимые деформации p_{rz}

Рис. 2: Перемещения u

Рис. 3: Необратимые деформации p_{rr}

Рис. 4: Необратимые деформации p_{zz}

Рис. 5: Результаты расчетов для моментов времени τ_1, τ_2, τ_3

Параметры материала и процесса:

$$n = 3,\ \frac{BnR\mu^{n-1}\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\mu}} = 3.5, \hat{\eta} = \frac{2\sqrt{\mu}R\sqrt{\rho_0}}{\eta} = 1.0,\ \hat{b} = 4, \hat{k} = 0.00125, \hat{c} = 0.05;$$
$$\tau_1 = 16, \tau_2 = 32, \tau_3 = 48, \psi_{max} = 5 \cdot 10^{-3} \tag{51}$$

В качестве градиента давления использовалась следующая кусочно-заданную функцию:

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \frac{\psi_{max}}{2} \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{t_1}\tau - \frac{\pi}{2}\right)\right),\ 0 \le \tau \le \tau_1 \\ \psi_{max},\ \tau_1 < \tau \le \tau_2 \\ \frac{\psi_{max}}{2} \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{(t_3 - t_2)}(\tau - \tau_2) + \frac{\pi}{2}\right)\right),\ \tau_2 < \tau \le \tau_3 \end{cases} \tag{52}$$

Полученная система дифференциальных уравнений (41) и первое уравнение равновесия (40) в безразмерных переменных (50) решалась численно с учетом начальных и граничных условий (36). Для аппроксимации пространственных производных используется центральная разностная схема, а производных по времени – явная схема. Граница, отделяющая область вязкоупругого деформирования от области пластического течения определялась в ходе численных расчетов с помощью следующего условия:

$$Q - \sqrt{\frac{8}{3}}k = 0 \tag{53}$$

Графики необратимых деформаций $p_{\rho z}, p_{\rho\rho}, p_{zz}$ и перемещений u для моментов времени τ_1, τ_2, τ_3 изображены на рис. 5.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олейников, А. И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей /А. И. Олейников, А. И. Пекарш – М. : Эком, 2009. – 109 с.

2. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 6, Issue 3, 1958, Pages 236-249

3. Truesdell C. Hypo-elasticity. J. Rat. Mech. Anal. Volume 4, 1955, Pages 83–133

4. Simo J.C., Pister K.S. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 46, Issue 2, 1984, Pages 201-215

5. Khan, A.S., Huang, S.J. Continuum Theory of Plasticity. Wiley, New York. 1995.

6. Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A. Elastoplasticity beyond small deformations. Acta Mech. 2006. 182, 31–111.

7. Firat, M., Kaftanoglu, B., Eser, O. Sheet metal forming analyses with an emphasis on the springback deformation. J. Mater. Process. Technol. 2008. 196 (1–3), 135–148.

8. Lee EH. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. ASME. J. Appl. Mech. 1969;36(1):1-6

9. Naghdi P.M. A critical review of the state of finite plasticity. ZAMP. 1990. 41, 315-394.

10. Vladimirov, I.N., Pietryga, M.P., Reese, S. Anisotropic finite elastoplasticity with nonlinear kinematic and isotropic hardening and application to sheet metal forming. Int. J. Plasticity. 2010. 26 (5), 659–687.

11. Sansour, C., Karšaj, I., Soric, J. On a numerical implementation of a formulation of anisotropic continuum elastoplasticity at finite strains. J. Comput. Phys. 2008. 227 (16), 7643–7663.

12. Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и взякоупругих телах. – М.: Наука, Физматлит, 1999. – 223 с.

13. Левин В.А. Теория многократного наложения больших деформаций и ее промышленная реализация в полнофункциональной CAE для прочностного инженерного анализа // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – №2-2 – С. 156–178

14. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. – М.: Физматлит, 2013. – 319 с.

15. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упруго-пластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.

16. Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // ДАН. – 1996. – Т. 347. – №. 2. – С. 199–201

17. Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последействие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк – Владивосток. : Дальнаука, 2013. – 312 с.

18. Буренин, А. А. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. В. Полоник // ПММ. – 2003. – Т. 64. – Вып. 2 – С. 316–325

19. Буренин, А. А. Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки А. А. Буренин, А. С. Устинова // Успехи механики сплошных сред. К 70-летию В.А. Левина. Владивосток: Дальнаука – 2009. – С. 91–102

20. Ковтанюк, Л. В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую цилиндрическую матрицу / Л. В. Ковтанюк // ДАН. – 2005. – Т. 400. – №. 6. – С. 764–767

21. Ковтанюк, Л. В. Вязкопластическое течение и остаточные напряжения в тяжелом слое несжимаемого материала, находящегося на наклонной плоскости / Л. В. Ковтанюк // Сб. математические модели и методы механики сплошных сред. к 60-летию А.А. Буренина. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН – 2007. – С. 120–128

22. Буренин, А. А. Развитие и торможение прямолинейного осесимметричного вязкопластического течения и упругое последействие после его остановки / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Л. Мазелис // ПМТФ. – 2010. – №2 – С. 140–147

23. Ковтанюк, Л. В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае / Л. В. Ковтанюк // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т. 5. – №. 1. – С. 104–117

24. Буренин, А. А. Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // ДАН. – 2015. – Т. 464. – №. 3. – С. 284-287

25. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев – Владивосток.: Дальнаука, 1998. – 528 с.

26. Галин, Л. А. Упругопластические задачи / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1984. – 232 с.

27. Де Грост, С. Неравновесная термодинамика / С. де Грост, П. Мазур — М.: Мир, 1964. — 456 с.

28. Быковцев, Г. И. Об особенностях модели неустановившейся ползучести, основанной на использовании кусочно-линейных потенциалов / Г. И. Быковцев, В. М. Ярушина // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций. К 60-летию Г.И. Быковцева. Владивосток: Дальнаука – 1998. – С. 9-26

29. Буренин, А. А. Плоское напряженное состояние в условиях нелинейной неустановившейся ползучести / А. А. Буренин, В. М. Ярушина // Дальневосточный математический журнал. – 2002. – Т. 3. – №. 1. – С. 64–78

30. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

REFERENCES

1. Olejnikov, AI & Pekarsh, AI 2009, *Integrirovannoe proektirovanie processov izgotovleniya monolitnyh panelej [Integrated design of monolithic panel manufacturing processes]*, Ekom, Moscow.

2. Hill, R. 1958, "A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 6, no. 3, pp. 236–249, doi: 10.1016/0022-5096(58)90029-2

3. Truesdell, C. 1955, "Hypo-elasticity", Journal of Rational Mechanics and Analysis, vol. 4, pp. 83–133.

4. Simo, J. C., & Pister, K. S. 1984, "Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 46, no. 22, pp. 201–215, doi: 10.1016/0045-7825(84)90062-8

5. Khan, AS & Huang, S 1995 Continuum Theory of Plasticity, Wiley, New York.

6. Xiao, H., Bruhns, O. T., & Meyers, A. 2006, "Elastoplasticity beyond small deformations", Acta Mechanica, vol. 182, no. 1–2, pp. 31–111, doi: 10.1007/s00707-005-0282-7

7. Firat, M., Kaftanoglu, B., & Eser, O. 2008, "Sheet metal forming analyses with an emphasis on the springback deformation", Journal of Materials Processing Technology, vol. 196, no. 1–3, pp. 135–148, doi: 10.1016/j.jmatprotec.2007.05.029

8. Lee, E. H. 1969, "Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains", Journal of Applied Mechanics, vol. 36, no. 1, pp. 1–6. doi: 10.1115/1.3564580

9. Naghdi, P. M. 1990, “A critical review of the state of finite plasticity”, Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP, vol. 41, no. 3, pp. 315–394, doi: 10.1007/BF00959986

10. Vladimirov, I. N., Pietryga, M. P., & Reese, S. 2010, “Anisotropic finite elastoplasticity with nonlinear kinematic and isotropic hardening and application to sheet metal forming”, International Journal of Plasticity, vol. 26, no. 5, pp. 659–687. doi: 10.1016/j.ijplas.2009.09.008

11. Sansour, C., Karšaj, I., & Sorić, J. 2008, “On a numerical implementation of a formulation of anisotropic continuum elastoplasticity at finite strains”, Journal of Computational Physics, vol. 227, no. 16, pp. 7643–7663, doi: 10.1016/j.jcp.2008.04.025

12. Levin VI 1999, Mnogokratnoe nalozhenie bolshih deformacij v uprugih i vyazkouprugih telah [Multiple superposition of large deformations in elastic and viscoelastic bodies], Nauka:Fizmatlit, Moscow.

13. Levin V.I. 2013 “The theory of multiple superposition of large deformations and its industrial implementation in a full-featured CAE for strength engineering analysis”, Izvestiya Tul’skogo gosudarstvennogo universiteta. Yestestvennyye nauki. , no. 2-2, pp. 156-178

14. Markin, AA & Sokolova, Myu 2013, Termomekhanika uprugoplasticheskogo deformirovaniya [Thermomechanics of elastoplastic deformation], Fizmatlit, Moscow.

15. Pozdeyev, A.A, Trusov, PV & Nyashin, YuI 1986 Bol’shiye uprugo-plasticheskiye deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya [Large elastic-plastic deformations: theory, algorithms, applications], Nauka, Moscow.

16. Burenin, A.A., Bykovtsev, G.I. & Kovtanyuk, L.V. 1996, “One simple model for elastoplastic medium at finite deformations”, Doklady akademii nauk, vol. 347, no. 2, pp. 199-201

17. Burenin, AA & Kovtanyuk, LV 2013, Bol’shiye neobratimyye deformatsii i uprugoye posledeystviye [Large irreversible deformations and elastic aftereffects], Dal’nauka, Vladivostok.

18. Burenin, A.A., Kovtanyuk, L.V., Polonik, M.V. 2003, “Forming a one-dimensional residual stress field in the vicinity of a cylindrical defect of continuity of an elastoplastic medium”, Prikladnaya matematika i mekhanika, vol. 64, no. 2, pp. 316-325.

19. Burenin, A.A. & Ustinova A.S. “Development and inhibition of viscoelastic viscous flow with the calculation of elastic response after stopping flow and unloading”, “Progress in Continuum Mechanics” to the 70th anniversary of VA. Levin. Vladivostok, 2009, pp. 91-102.

20. Kovtanyuk, L.V. 2005, “On extrusion of elastoviscoplastic material through a rigid cylindrical matrix”, Doklady akademii nauk, vol. 400, no. 6, pp. 764-767.

21. Kovtanyuk, L.V. “Viscoplastic flow and residual stresses in a heavy layer of incompressible material located on an inclined plane”, “Mathematical models and methods of continuum mechanics” to the 60th anniversary of AA. Burenin. Vladivostok, 2007, pp. 120-128.

22. Burenin, A.A., Kovtanyuk, L.V. & Mazelis A.L. 2010, “Development and inhibition of a rectilinear axisymmetric viscoplastic flow and elastic aftereffect after its stoppage”, Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, vol. 51, no. 2, pp. 140-147.

23. Kovtanyuk, L.V. 2004, “Modeling of large elastoplastic deformations in the non-isothermal case”, Dal’nevostochnyy matematicheskiy zhurnal, vol. 5, no. 1, pp. 104-117.

24. Burenin, A.A., Kovtanyuk, L.V. & Panchenko G.L. 2015 “Nonisothermal motion of an elastoviscoplastic medium through a pipe under a changing pressure drop”, Doklady akademii nauk, vol. 464, no. 3, pp. 284-287.

25. Bykovtsev, GI & Ivlev, DD 1998, Teoriya plastichnosti [Theory of plasticity], Dal’nauka, Vladivostok.

26. Galin, LA 1984, Uprugoplasticheskiye zadachi [Elastic-plastic problems], Nauka, Moscow.

27. De Groot, SR & Mazur, P 1969, Non-Equilibrium Thermodynamics, North-Holland.

28. Bykovtsev, GI & Yarushina, VM “On the features of the unsteady creep model based on the use of piecewise linear potentials”, “Problems of mechanics of continuous media and structural elements” to the 60th anniversary of G.I. Bykovtsev, Dal’nauka, Vladivostok, 1998, pp. 9-26

29. Burenin, A.A. & Yarushina, V.M. 2002, “Plane stress state under nonlinear unsteady creep”, Dal’nevostochnyy matematicheskiy zhurnal, vol. 3, no. 1, pp. 64-78

30. Lurie, A.I. 1980, Nelineynaya teoriya uprugosti [Nonlinear theory of elasticity], Nauka, Moscow.

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-131-153

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДЕФОРМИРУЕМЫХ УПРУГИХ ТЕЛ, ПУТЁМ ИНТЕГРАЦИИ ДВУХ ПАКЕТОВ: EULER И FIDESYS

В. Г. Бойков[1], И. В. Гаганов[2], Ф. Р. Файзуллин[3], А. А. Юдаков[4]
(Москва)

Аннотация

Статья посвящена описанию теоретических основ моделирования движения деформируемого твердого тела в составе системы и практического опыта реализации такого моделирования на основе интеграции промышленных пакетов инженерного программного обеспечения EULER и Fidesys. Предполагается, что деформируемое тело подвержено большому движению в составе многокомпонентной механической системы и малым упругим деформациям [2]. Вывод общих уравнений динамики упругих конструкций впервые опубликован в [3]. Он базируется на использовании классического (линейного) метода конечных элементов (МКЭ) и редукции модели методом Крейга-Бэмптона. Никаких дополнительных приближений не вводится, тем самым получаются уравнения движения упругих тел в составе системы, наиболее общие в рассматриваемой постановке. Метод Крейга-Бэмптона [1] - это метод редуцирования КЭ-модели деформируемого тела путем аппроксимации малых упругих перемещений тела набором допустимых форм: статических форм от единичных смещений интерфейсных узлов тела и собственных форм колебаний при зажатых интерфейсных узлах. Полная КЭ-модель упругого тела и ее редукция подготавливаются в ПК Fidesys [4] и передаются в ПК EULER для расчета динамики тела в составе системы. Для представления пространственного движения

[1]Бойков Владимир Георгиевич, доцент, кафедра оптимального управления факультета ВМиК Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, генеральный директор, ООО "АвтоМеханика boykov@euler.ru

[2]Гаганов Илья Валерьевич, студент, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, программист-разработчик ООО Фидесис

[3]Файзуллин Фарис Рафаэльевич, аспирант, кафедра СМ1 МГТУ им. Н. Э. Баумана, инженер, ООО "АвтоМеханика jake-take@yandex.ru

[4]Юдаков Алексей Александрович, научный сотрудник, ООО "АвтоМеханика you_ad@mail.ru

упругого тела используется метод присоединенной системы координат (ПСК): эта система координат определяет движение тела как твердого и относительно нее тело совершает малые упругие колебания. Уравнения динамики упругих тел выводятся из уравнения Лагранжа второго рода, в качестве обобщенных координат используется положение ПСК и вектор модальных координат. Из выражения для кинетической энергии тела получены формулы расчета обобщенной матрицы масс и вектора сил инерции. Также в статье приведены остальные члены уравнения движения и формулы расчета компонент уравнений связей.

В статье приведен пример реального практического моделирования движения механической системы автомобиля КАМАЗ-5308 с упругой рамой. Для учета деформируемости разработана конечноэлементная модель рамы с платформой. При моделировании автомобиля и разработке КЭ-модели дополнительные навески на раму и на платформу, деревянный настил платформы считаются значительно менее жесткими, чем основная конструкция; кронштейны крепления подвески, кабины считаются очень жесткими по сравнению с самой конструкцией; не учитываются радиусы скругления и технологические отверстия. В качестве интерфейсных для динамической редукции указаны 26 узлов, соответствующих местам крепления к раме остальной конструкции автомобиля – подвески, груза и кабины. После разработки КЭ-модели в ПК Fidesys формируются четыре файла, содержащих матрицы жесткости и масс, геометрию модели, собственные и статические формы. Полученная модель рамы используется в ПК EULER и рассчитывается в составе многокомпонентной механической системы. Модель автомобиля с деформируемой рамой используется для учета влияния динамики автомобиля в целом на напряженно-деформированное состояние рамы в испытании «Переставка».

Ключевые слова: деформируемое твердое тело, линейный метод конечных элементов, редукция модели методом Крейга-Бэмптона, присоединенная система координат, многокомпонентная механическая система, динамика системы тел, уравнения связей, интеграция, пакеты инженерного программного обеспечения, автоматизация расчетов, испытание маневра автомобиля, деформируемая рама автомобиля, ПК EULER, ПК Fidesys

Библиография: 15 названий.

MODELING THE MOTION OF A MECHANICAL SYSTEM CONSISTING OF DEFORMABLE ELASTIC BODIES, BY INTEGRATING TWO PACKAGES: EULER AND FIDESYS

V. G. Boikov, I. V. Gaganov, F. F. Rafaelyevich, A. A. Yudakov
(Moscow)

Abstract

In the article theoretical basis of flexible bodies' large displacement within a multibody system as well as practical experience of flexible multibody dynamics simulation with integrated computer-aided design software systems EULER and Fydesis are considered. The hypothesis of flexible body undergoing both small elastic deformations and large motion within a multibody system is used [2]. The derivation of dynamic equations of motion of flexible bodies was first published in [3]. The derivation uses classical (linear) finite element method (FEM) and the Craig–Bampton method [1] of FE model's matrices reduction. No additional approximations are involved, thus obtaining the most general equations in given problem definition. In the Craig–Bampton method a finite element model of a flexible body is reduced approximating small elastic deformation with a set of modes: static modes where the bound nodes' displacements equal one unit, and normal modes where the bound nodes are fixed. The full finite element model and the reduced model are prepared in Fidesys software [4] and are transferred to EULER software to be used in a dynamics simulation as a part of a multibody system. For the flexible body's spatial motion representation a floating frame of reference is used. A floating frame of reference defines the motion of a rigid body, related to which flexible body's motion is considered as small deformations. The dynamic equation for flexible bodies are derived from Lagrange equations of the second kind. As generalized coordinates the floating frame of reference's position and the modal coordinates vector are used. The expressions for the inertial forces vector and the generalized mass matrix are derived from the expression for the kinetic energy of the body. The article also contains all the other terms of the dynamic equation and the expressions for constraint equations' components calculation.

In the article an example of real practical motion simulation for KAMAZ-5308 vehicle with taking into consideration the flexibility of the vehicle's frame is given. A finite element model of the frame with the load platform was developed to consider it's flexible deformations. The following assumptions have been adopted for simulating the vehicle: additional attachments to the frame and platform, load platform's wooden flooring are considered significantly less rigid than the basic structure; brackets for attaching the suspension and the cabin are considered very rigid in comparison with the structure itself; roundings and technological apertures are not considered. As the interface for dynamic reduction, there are 26 nodes corresponding to the places of attachment to the frame of the rest of the car - suspension, load and cabin. After the development of the finite element model in the Fidesys software, four files are created, containing the stiffness and mass matrices, model geometry, normal and static modes. The obtained model of the frame is used in the EULER software as part of a multibody system motion simulation. The model of a car with a flexible frame is used to take into account the effect of the dynamics of the car as a whole on the stress-strain state of the frame in the lane change maneuver.

Keywords: deformable solid body, linear finite element method, Craig-Bampton model reduction, floating frame of reference, multibody system,

multibody dynamics, constraint equations, software integration, CAE, simulation, vehicle maneuver test, deformable vehicle frame, EULER software, Fidesys software

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Рассматривается реализация интерфейса для расчетов с использованием конечно-элементных моделей в виде упругих звеньев в ПК EULER. Это позволяет учесть влияние упругих деформаций звеньев механизма на динамику движения, а также быстро и удобно рассматривать эффекты изменения параметров движения и структуры механизма на напряженно-деформированное состояние в детали.

2. Теоретические основы расчета

1) деление узлов на *интерфейсные* (узлы воздействия силовых элементов и шарниров и узлы, приближенное представление движения которых нежелательно) и *внутренние*;

2) расчет *статических форм* от единичных смещений по всем степеням свободы интерфейсных узлов;

3) расчет *собственных форм колебаний* при зажатых интерфейсных узлах;

4) построение *модальной матрицы* H_F, *редуцированных матриц масс и жесткости*: $\bar{M} = H_F^T M_{FEM} H_F$, $\bar{C} = H_F^T C_{FEM} H_F$, где M_{FEM}, C_{FEM} – полные матрицы масс и жесткости МКЭ-модели тела; при этом малые упругие перемещения тела аппроксимируются набором допустимых форм: $x_n = H_F w$, где x_n – координаты всех узлов МКЭ-модели в *собственной системе координат тела*, w – набор модальных координат размера H, где H – полное количество используемых форм;

5) ортонормализация базиса модального пространства на основе решения $\bar{Y}$ обобщенной проблемы собственных значений для редуцированных матриц: $\left(\bar{C} - \lambda \bar{M}\right) \bar{y} = 0$; получение модальной матрицы H_R, ортонормальной относительно полных матриц модели: $H_R = H_F \bar{Y}$, тогда: $\bar{M} = H_R^T M_{FEM} H_R$ – единичная, $\bar{C} = H_R^T C_{FEM} H_R$ – диагональная. При этом $x_n = H_R w$.

Упомянутая собственная система координат тела, в которой упругие перемещения аппроксимируются набором допустимых форм, – это так называемая присоединенная система координат (ПСК) тела. Это система координат, связанная с телом. Если тело не совершает упругих колебаний (условно говоря, заморожено), то всё движение тела определяется движением ПСК. Именно относительно ПСК рассматривается понятие малости упругих перемещений x_n в методе Крейга-Бэмптона. Для краткости базовую инерциальную систему координат будем называть СК0.

Везде далее под модальной матрицей H, вообще говоря, подразумевается *произвольная* матрица допустимых форм, при этом вектор модальных координат w выбирается таким образом, что

$$x_n = Hw \tag{1}$$

Тем самым достигается общая независимость от используемого метода редукции. В частности, это может быть матрица H_F или H_R из модели Крейга-Бэмптона. Нужно отметить, однако, что для обеспечения корректности дальнейших выкладок линейная зависимость между допустимыми и твердотельными формами тела должна быть исключена каким-либо способом. Этого можно достичь, если, например, при ортонормализации модального подпространства в методе Крейга-Бэмптона не включать формы колебаний с нулевой частотой в модальную матрицу H_R.

Уравнения динамики упругих тел выводятся из уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = s \tag{2}$$

где T - кинетическая энергия, U - потенциальная, q - вектор обобщенных координат тела, s - вектор обобщенных сил. В качестве q выберем совокупность двух векторов: шестимерного вектора (r, ϕ), характеризующего положение ПСК относительно СК0, и вектора модальных координат w:

Для любых векторов a, b, ... обозначим через $(a, b, ...)$ их объединение в общий вектор. Для удобства записи формул и их анализа примем в качестве r и ϕ такие вектора, что:

$$\dot{r} = v, \dot{\phi} = \omega$$

где v, ω - линейная и угловая скорости ПСК относительно СК0. Пусть $a = \dot{v}$, $\varepsilon = \dot{\omega}$ - линейное и угловое ускорения ПСК относительно СК0, $\xi = \dot{w}$, $\zeta = \ddot{w}$.

Пусть N - число всех узлов МКЭ-модели тела, тогда число степеней свободы модели равно $6N$, размер модальной матрицы H равен $6N \times H$, где H - количество используемых форм. Индекс r соответствует поступательным перемещениям, φ - вращательным, $k = \overline{1, N}$ - упругим; индексы k и l - индексы узлов, $k, l = \overline{1, N}$, i и j - индексы форм, $i, j = \overline{1, H}$. Обозначим через $x_{n,k}$ шестимерный вектор положения k-ого узла в ПСК, H_k - часть модальной матрицы, относящуюся к этому узлу:

$$x_{n,k} = \begin{bmatrix} r_k \\ \phi_k \end{bmatrix} = H_k w = \begin{bmatrix} H_k^r \\ H_k^\varphi \end{bmatrix} w$$

Пусть $h_{k,i}$ – i-ый столбец матрицы H_k: $H_k = \begin{bmatrix} h_{k,1} & \cdots & h_{k,H} \end{bmatrix}$; $h_{k,i} = \left(h^r_{k,i}, h^\varphi_{k,i}\right)$. Обозначим через ρ_k вектор начального положения центра k-ого узла относительно ПСК. Тогда с учетом (1) положение центра k-ого узла относительно СК0 в любой момент времени можно записать в виде:

$$r_k = r + \rho_k + H_k^r w \tag{3}$$

Суть вывода уравнений упругих конструкций заключается в записи формул для расчета всех членов уравнения Лагранжа (2). Из теории классического метода конечных элементов известно уравнение для расчета кинетической энергии МКЭ-модели тела:

$$T = {}^1\!/_2 v_n^T M_{FEM} v_n \tag{4}$$

где v_n - скорости всех узлов МКЭ-модели тела, M_{FEM} - полная матрица масс. В классическом МКЭ предполагается, что тело не подвержено большому движению как целое, поэтому и скорости, и матрица масс записываются относительно базовой инерциальной СК. Основная идея применения этой формулы в рассматриваемой в настоящей статье постановке заключается в следующем: полная матрица масс постоянна в собственной СК тела, то есть в ПСК. Это утверждение очевидно из определения присоединенной системы координат, поскольку движение ПСК определяет движение тела как целого, и относительно ПСК рассматриваются все упругие перемещения точек тела.

Все физические величины в рамках одной формулы, естественно, должны выражаться в одной системе координат. В формуле (3) вектор скоростей v_n удобно выразить в ПСК, поскольку матрица масс постоянна в ПСК. При этом, конечно же, скорости записываются относительно базовой СК0. Вектор v_n равен: $v_n = (v_1, \omega_1, ..., v_N, \omega_N)$, где v_k, ω_k - линейная и угловая скорости k-ого узла относительно СК0. С учетом формулы (2) можно показать, что:

$$v_k = \begin{bmatrix} I & -\tilde{(}\rho_k + H_k^r w) & H_k^r \end{bmatrix} \cdot \dot{q}, \omega_k = \begin{bmatrix} 0 & I & H_k^\varphi \end{bmatrix} \cdot \dot{q}$$

Знак "$\sim$" над трехмерным вектором обозначает операцию взятия кососимметрической матрицы для этого вектора; знак "$\sim$" над открывающей скобкой применяется к результату выражения в скобках.

Если ввести матрицы $I_k^0 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{P}_k = \begin{bmatrix} -\tilde{(}\rho_k + H_k^r w) \\ I \end{bmatrix}$, $I^0 = \begin{bmatrix} I_1^{0T} & \cdots & I_N^{0T} \end{bmatrix}^T$, $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1^T & \cdots & \mathrm{P}_N^T \end{bmatrix}^T$, то вектор скоростей можно выразить в виде:

$$v_n = \begin{bmatrix} I^0 & \mathrm{P} & H \end{bmatrix} \cdot \dot{q} \tag{5}$$

Пусть полная матрица масс имеет произвольный вид:

$$M_{FEM} = \begin{bmatrix} M_{FEM,11} & \cdots & M_{FEM,1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{FEM,N1} & \cdots & M_{FEM,NN} \end{bmatrix},$$

$$M_{FEM,kl} = \begin{bmatrix} m_{rr,kl} & m_{r\varphi,kl} \\ m_{\varphi r,kl} & m_{\varphi\varphi,kl} \end{bmatrix}, k, l = \overline{1, N} \tag{6}$$

где $m_{rr,kl}$, $m_{r\varphi,kl}$, $m_{\varphi r,kl}$, $m_{\varphi\varphi,kl}$ - блоки размера 3×3. Подставив формулы (5) и (6) в формулу (3), выражение для расчета кинетической энергии можно записать в виде:

$$T = {}^1\!/_2\ \dot{q}^T M \dot{q} \tag{7}$$

Здесь M - обобщенная матрица масс. Чтобы выписать формулы для расчета всех ее компонент, нужно ввести 18 матриц, представленных в таблице 1. Каждая сумма здесь – это сумма по индексам k, l от 1 до N, то есть двойная сумма по всем узлам тела. Все эти матрицы постоянны в ПСК.

$I_{rr} = \sum m_{rr,kl}$	$I_{\varphi r,\,h_i} = \sum m_{\varphi r,kl}\tilde{h}^r_{l,\,i}$	$I_{rr,\,\rho h_i} = \sum \tilde{\rho}_k m_{rr,kl}\tilde{h}^r_{l,\,i}$
$I_{r\varphi} = \sum m_{r\varphi,kl}$	$I_{rr,\,H} = \sum m_{rr,kl}H^r_l$	$I_{rr,\,\rho H} = \sum \tilde{\rho}_k m_{rr,kl}H^r_l$
$I_{\varphi\varphi} = \sum m_{\varphi\varphi,kl}$	$I_{r\varphi,\,H} = \sum m_{r\varphi,kl}H^\varphi_l$	$I_{r\varphi,\,\rho H} = \sum \tilde{\rho}_k m_{r\varphi,kl}H^\varphi_l$
$I_{rr,\,\rho} = \sum m_{rr,kl}\tilde{\rho}_l$	$I_{\varphi r,\,H} = \sum m_{\varphi r,kl}H^r_l$	$I_{rr,\,h_ih_j} = \sum \tilde{h}^r_{k,\,i}m_{rr,kl}\tilde{h}^r_{l,\,j}$
$I_{\varphi r,\,\rho} = \sum m_{\varphi r,kl}\tilde{\rho}_l$	$I_{\varphi\varphi,\,H} = \sum m_{\varphi\varphi,kl}H^\varphi_l$	$I_{rr,\,h_iH} = \sum \tilde{h}^r_{k,\,i}m_{rr,kl}H^r_l$
$I_{rr,\,h_i} = \sum m_{rr,kl}\tilde{h}^r_{l,\,i}$	$I_{rr,\,\rho\rho} = \sum \tilde{\rho}_k m_{rr,kl}\tilde{\rho}_l$	$I_{r\varphi,\,h_iH} = \sum \tilde{h}^r_{k,\,i}m_{r\varphi,kl}H^\varphi_l$

Таблица 1: Компоненты обобщенной матрицы масс

Формулы для расчета блоков матрицы масс можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
J_{rr} &= I_{rr} \\
J_{r\varphi} &= I_{r\varphi} - \left(I_{rr,\,\rho} + \sum_{i=1}^{H} I_{rr,\,h_i} w_i \right) \\
J_{rw} &= I_{rr,\,H} + I_{r\varphi,\,H} \\
J_{\varphi\varphi} &= I_{\varphi\varphi} - \Big\{ I_{rr,\,\rho\rho} + I_{\varphi r,\,\rho} + I^T_{\varphi r,\,\rho} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{H} \left(I_{rr,\,\rho h_i} + I^T_{rr,\,\rho h_i} + I_{\varphi r,\,h_i} + I^T_{\varphi r,\,h_i} \right) w_i + \sum_{i,\,j=1}^{H} I_{rr,\,h_ih_j} w_i w_j \Big\} \\
J_{\varphi w} &= I_{rr,\,\rho H} + I_{r\varphi,\,\rho H} + I_{\varphi r,\,H} + I_{\varphi\varphi,\,H} + \sum_{i=1}^{H} \left(I_{rr,\,h_iH} + I_{r\varphi,\,h_iH} \right) w_i \\
J_{ww} &= H^T M H = \bar{M}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Видно, что J_{rr}, J_{rw}, J_{ww} - постоянны в ПСК, $J_{r\varphi}$, $J_{\varphi w}$ - линейно зависят от w, а $J_{\varphi\varphi}$ - квадратично. Матрица масс M в ПСК имеет простой вид:

$$M = \begin{bmatrix} J_{rr} & J_{r\varphi} & J_{rw} \\ J^T_{r\varphi} & J_{\varphi\varphi} & J_{\varphi w} \\ J^T_{rw} & J^T_{\varphi w} & J_{ww} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Очевидно, что M симметрична. Из сопоставления формул (3) и (7) для расчета кинетической энергии легко получить, что если M_{FEM} положительно определена, то и M также положительно определена.

Итак, получены окончательные формулы для расчета обобщенной матрицы масс. Подставив формулы (7) и (9) в уравнение Лагранжа (2), можно показать, что:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = M\ddot{q} - k$$

где k - вектор обобщенных сил инерции, который в ПСК можно записать в виде:

$$k = -\left(\bar{k}_r, \bar{k}_\phi, \bar{k}_w\right) \tag{10}$$

Если ввести вектора $k_{w,r\varphi}, k_{w,\varphi\varphi}, k_{w,\varphi w}$, компоненты которых равны:

$$\begin{aligned} k_{w,r\varphi,i} &= -\omega^T \left(\partial J_{r\varphi}^T / \partial w_i\right) v \\ k_{w,\varphi\varphi,i} &= -1/2 \omega^T \left(\partial J_{\varphi\varphi} / \partial w_i\right) \omega \\ k_{w,\varphi w,i} &= -\omega^T \left(\partial J_{\varphi w} / \partial w_i\right) \xi. \end{aligned}$$

то формулы для расчета компонент вектора обобщенных сил инерции запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \bar{k}_r &= \left(\tilde{\omega} J_{rr} - J_{rr}\tilde{\omega}\right) v + \tilde{\omega} J_{r\varphi}\omega + \dot{J}_{r\varphi}\omega + \tilde{\omega} J_{rw}\xi \\ \bar{k}_\varphi &= \tilde{v} J_{rr} v + \tilde{\omega} J_{\varphi\varphi}\omega + \dot{J}_{\varphi\varphi}\omega + \\ &\quad + \left(\dot{J}_{r\varphi}^T + \tilde{\omega} J_{r\varphi}^T - J_{r\varphi}^T\tilde{\omega} - \tilde{(}J_{r\varphi}\omega)\right) v + \left(\tilde{v} J_{rw} + \tilde{\omega} J_{\varphi w} + \dot{J}_{\varphi w}\right) \xi \\ \bar{k}_w &= k_{w,r\varphi} + k_{w,\varphi\varphi} + k_{w,\varphi w} - J_{rw}^T \tilde{\omega} v + \dot{J}_{\varphi w}^T \omega. \end{aligned}$$

Рассмотрим далее остальные члены уравнения Лагранжа (2). Полная потенциальная энергия тела равна: $U = U_C + U_g$, где U_C - потенциальная энергия упругих деформаций, U_g - потенциальная энергия гравитации. Используя формулу для расчета энергии упругих деформаций МКЭ-модели тела:

$$U_C = 1/2 x_n^T C_{FEM} x_n$$

и учитывая, что полная матрица жесткости постоянна в ПСК (по аналогии с матрицей масс), можно показать, что: $\partial U_C / \partial q = Cq$, где $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{bmatrix}$ - обобщенная матрица жесткости, $\bar{C} = H^T C_{FEM} H$ - редуцированная матрица жесткости. Значит обобщенная сила упругости равна:

$$s_C = -Cq.$$

Если обозначить через g_r - вектор ускорения свободного падения, можно показать, что: $\partial U_g/\partial q = -Mg$, где $g = (g_r; 0; 0)$. Поэтому обобщенная сила гравитации равна:

$$s_g = Mg$$

Математическая модель демпфирования строится известными методами на основе диссипативной функции Рэлея: $R = \frac{1}{2}\dot{q}^T D\dot{q}$, где D - обобщенная матрица демпфирования: $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{D} \end{bmatrix}$. Редуцированная матрица демпфирования $\bar{D}$ получается либо методом Рэлея: $\bar{D} = \alpha\bar{C} + \beta\bar{M}$, где α и β – некоторые константы, либо на основе представления свободных колебаний тела набором независимых уравнений движения с одной степенью свободы, тогда: $\bar{D} = diag\,(d_1; ...; d_H)$, где $d_k = 2\gamma_k\omega_k$, γ_k – критический коэффициент затухания соответствующей формы, ω_k - ее собственная частота колебаний. Обобщенная сила демпфирования при этом равна:

$$s_D = -D\dot{q}$$

Пусть к k-ому интерфейсному узлу приложены сила f_k и момент m_k в точке, отстоящей от этого узла на вектор $\rho_{f,k}$, тогда $s_{n,k} = \left(s^r_{n,k}, s^\varphi_{n,k}\right) = = (f_k, m_k + \tilde{\rho}_{f,k} f_k)$ - приложенная сила, приведенная к центру узла. Из условия равенства виртуальных работ на возможных перемещениях по обобщенным координатам получим (суммирование ведется по всем узлам тела, к которым приложены силы):

$$\begin{aligned} s_{\varphi,k} &= s^\varphi_{n,k} + \tilde{(}\rho_k + H^r_k w) \cdot s^r_{n,k}, \\ s_{\varphi,k} &= s^\varphi_{n,k} + \tilde{(}\rho_k + H^r_k w) \cdot s^r_{n,k} \\ s_{r,k} &= s^r_{n,k}, \\ s_{w,k} &= H^T_k \cdot s_{n,k}. \end{aligned}$$

Двусторонние связи, накладываемые на упругое тело, моделируются аналогично связям на твердые тела. Подробно принципы построения уравнений связи рассмотрены в статье [2]; здесь приведем их коротко. Общий вид уравнения связи:

$$g(a\varepsilon_c, v\omega_c, r\phi_c, t) = 0$$

где $a\varepsilon_c, v\omega_c, r\phi_c$ - ускорения, скорости и положения i-ой локальной системы координат (ЛСК) связи относительно СК0. Продифференцировав, можно получить уравнение для расчета ускорений в связи (суммирование ведется по всем ЛСК данной связи):

$$\sum_i Gc_i \cdot a\varepsilon_{c,i} = h_c$$

где $Gc_i = (Gc_{r,i}, Gc_{\varphi,i})$ – матрица производных невязок связи по движениям i-ой ЛСК связи, h_c – вектор невязки ускорения связи, определяемый в зависимости от типа связи. Выразив параметры ЛСК, которая связана с твердым или упругим телом, через параметры этого тела, получаем:

$$\sum_i G_i \ddot{q}_i = h_c + h_a$$

где $h_a = \sum_i h_{a,i}$, G_i - матрица производных невязок i-ой ЛСК связи по обобщенным координатам соответствующего тела (обобщенный якобиан связи). Если i-ая ЛСК связи относится к k-ому интерфейсному узлу тела и отстоит от него на вектор ρ_c, то опуская индекс i, можно записать:

$$\begin{aligned}
G &= (G_r, G_\varphi, G_w) \\
G_\varphi &= Gc_\varphi - Gc_r \cdot \tilde{(}\rho_k + H_k^r w + \rho_c) \\
G_r &= Gc_r \\
G_w &= Gc_r \cdot H_k^r + (-Gc_r \cdot \tilde{\rho}_c + Gc_\varphi) \cdot H_k^\varphi \\
h_a &= -Gc_r \cdot \left[\tilde{\omega} \cdot \tilde{\omega} \cdot (\rho_k + H_k^r w + \rho_c) + 2\tilde{\omega} \cdot H_k^r \xi + \tilde{(}2\omega + H_k^\varphi \xi) \cdot \tilde{(}H_k^\varphi \xi) \cdot \rho_c\right]
\end{aligned}$$

Обобщенные силы реакции связей можно выразить формулой (см. [2]):

$$R = G^T \lambda$$

где λ - силовые факторы в связях.

Таким образом, рассмотрены все члены уравнения Лагранжа (2). Сводя их воедино, получаем уравнение для расчета движения деформируемого тела в общей постановке:

$$M\ddot{q} = s_g + s_a - Cq - D\dot{q} + k + R \tag{11}$$

где M, C, D – обобщенные матрицы масс, жесткости и демпфирования, k – вектор сил инерции, s_g – обобщенная сила гравитации, s_a – обобщенные активные силы, R - силы реакций связей. Уравнение (11) можно записать в виде:

$$M \cdot \ddot{q} = s + k + R$$

где $s = s_g + s_a - Cq - D\dot{q}$ - сумма обобщенных сил упругости, демпфирования, гравитации и активных сосредоточенных сил. Оно имеет вид такой же, как и обобщенное уравнение движения твердого тела. Тем самым оказывается возможным моделировать динамику упругой конструкции в составе многокомпонентной механической системы.

3. Модель автомобиля КАМАЗ-5308

Модель автомобиля КАМАЗ-5308 состоит из агрегата Несущий модуль, включающего в себя агрегат Рама_Упругая, и остальных агрегатов: Груз,

Кабина, Моторно-трансмиссионная установка, Навеска, Опорно-ходовой модуль, Рулевое управление. Часть геометрии модели создана в программе NX. Изображение модели с упругой рамой приведено на Рис. 1.

Расчетные схемы передней и задней подвески показаны на Рис. 2 и Рис. 3. В моделях подвесок приняты следующие допущения:

1. мост и рычаги моста считаются абсолютно жесткими;
2. деформации и трение в шарнирах подвески отсутствуют.

В автомобиле КАМАЗ-5308 используется система рулевого управления, поворачивающая колеса одной оси при помощи неразрезной трапеции и рулевого механизма с вращательным перемещением выходного звена. Схема модели приведена на Рис. 4.

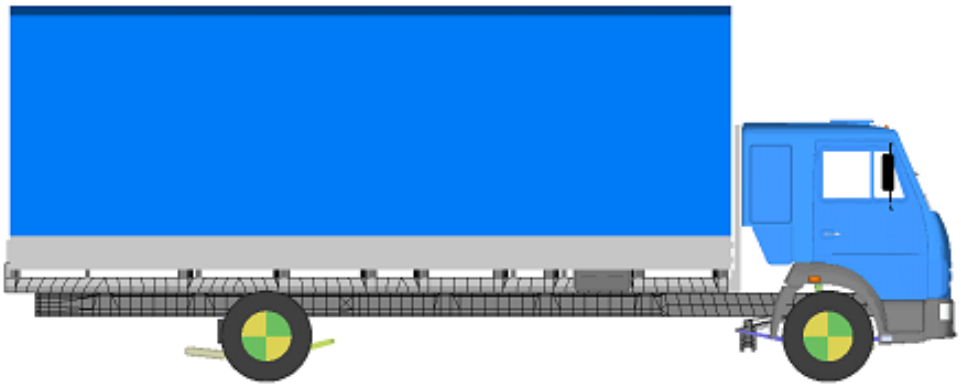


Рис. 1: Вид модели автомобиля КАМАЗ-5308 с включенной КЭ моделью рамы.

4. Конечно-элементная модель несущего модуля автомобиля КАМАЗ-5308

Конечно-элементная модель несущего модуля автомобиля КАМАЗ-5308 состоит из следующих элементов:

1. Рама изделия
2. Платформа изделия

При моделировании были сделаны следующие допущения:

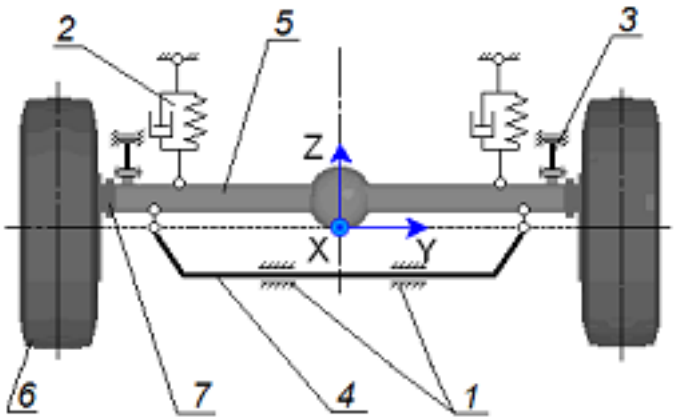


Рис. 2: Схема модели передней подвески: 1– базовое звено; 2– упруго-демпфирующий элемент; 3– продольный рычаг; 4– стабилизатор; 5– мост; 6 – колесо; 7 – цапфа.

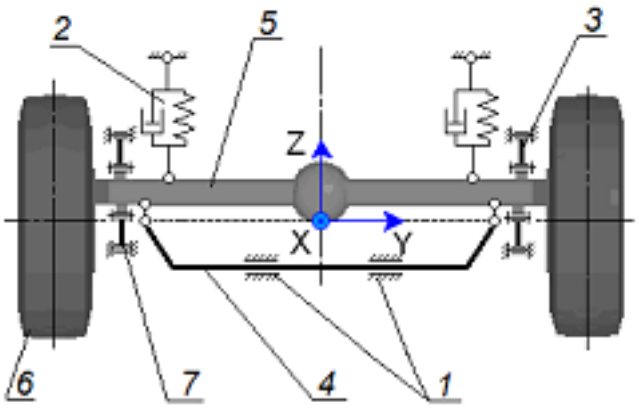


Рис. 3: Схема модели задней подвески: 1– базовое звено; 2– упруго-демпфирующий элемент; 3– продольный рычаг; 4– стабилизатор; 5– мост; 6 – колесо; 7 – дополнительный продольный рычаг.

1. Дополнительные навески на раму и на платформу, деревянный настил платформы считаются значительно менее жесткими, чем основная конструкция
2. Не учитываются радиусы скругления
3. Кронштейны крепления подвески, кабины считаются очень жесткими по сравнению с самой конструкцией
4. Не учитываются технологические отверстия

В модели используется система измерений СИ. Модель состоит из 5415

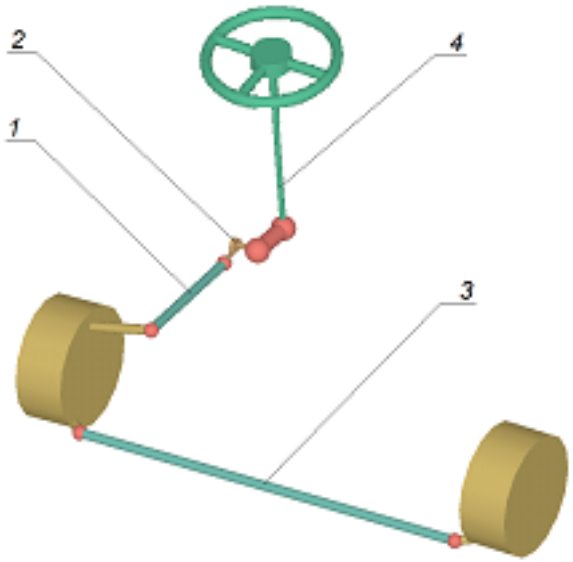


Рис. 4: Схема модели рулевого управления: 1 – тяга продольная; 2 – сошка; 3 – тяга поперечная; 4 – рулевая колонка.

четырехузловых оболочечных элементов типа CQUAD4. Материал (сталь) задан модулем Юнга, коэффициентом Пуассона и плотностью.

В качестве интерфейсных для динамической редукции указаны 26 узлов. Они соответствуют местам крепления к раме остальной конструкции автомобиля – подвески, груза и кабины.

Общий вид модели показан на Рис. 5.

5. Вычисление собственных и статических форм с помощью ПК Fidesys[4]

.

Процесс начинается с загрузки модели в Fidesys[6][7][8]. Fidesys поддерживает множество форматов, а также возможность создания самой модели в Fidesys[15][16]. При наличии готовой модели, после её загрузки, необходимо лишь выбрать интерфейсные узлы.

В следующей реализации связки, при наличии готовой модели, необязательно запускать интерфейс Fidesys[9]. Планируется, что пользователь сможет запустить расчёт из интерфейса Euler. Таким образом, при изучении данной технологии пользователю нет необходимости разбираться в интерфейсах двух программ одновременно.

Алгоритм автоматически выполнит втягивание модели в Fidesys и все необходимые расчёты.[13][14]

Необходимо определить количество степеней свободы у интерфейсных узлов. В нашем примере модель полностью состоит из двумерных деталей[5][11]

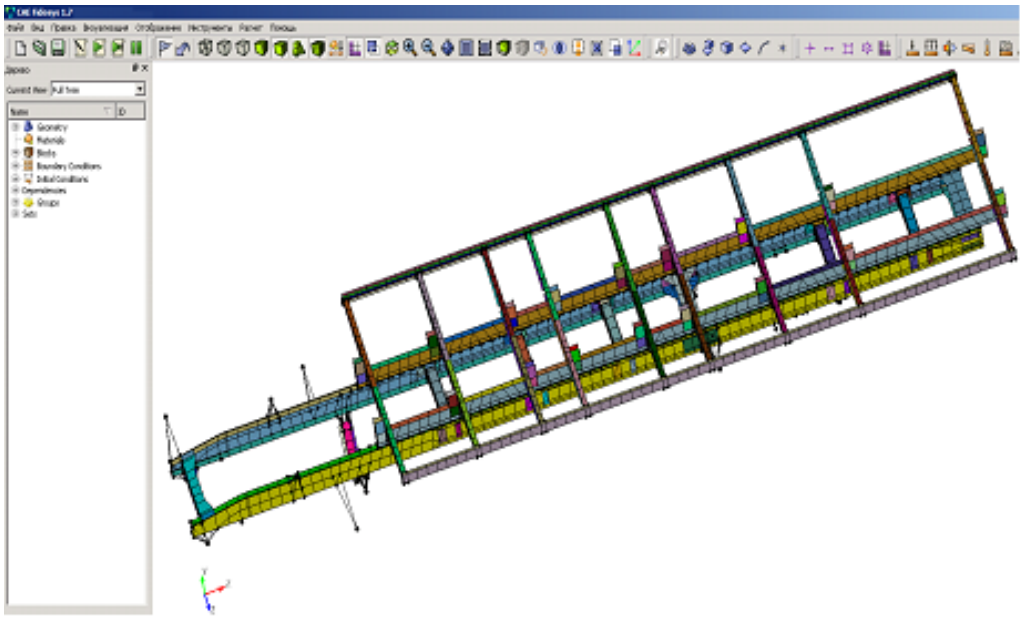


Рис. 5: Общий вид модели открытой в Fidesys.

и соответственно всего степеней свободы будет $26 \cdot 6 = 156$. Следуя алгоритму Крейга-Бэмптона[3] необходимо сделать 156 расчётов на статику, где каждый расчёт представляет собой следующее[10] – все интерфейсные узлы полностью закреплены, кроме одного; у этого узла производится единичное смещение по одной из степеней свободы, но по оставшимся степеням свободы узел будет так же полностью закреплён.

Один отдельный расчёт на собственные частоты на модели, где все интерфейсные узлы зафиксированы.

Отдельно происходит выгрузка геометрии модели, матриц масс и жёсткости.

При наличии жёстких связей, матрицы сокращаются на строки соответствующие зависимым степеням свободы. [12]

Для передач разреженных матриц был выбран формат .HB.

Для передачи собственных и статических форм был разработан специальный формат .cbm

В итоге мы получаем 4 файла:

M_CCS.hb и K_CCS.hb – матрицы масс и жёсткости соответственно.

geometry.vtk – файл с геометрией модели.

forms.cbm – файл с собственными и статическими формами.

В случае наличия жёстких связей информация о них помещается в vtk файл.

В случае нашего примера все файлы суммарно занимают около 102 мегабайт.

Все эти файлы считываются Euler.

В расчете динамики используется 10 первых собственных форм упругого тела.

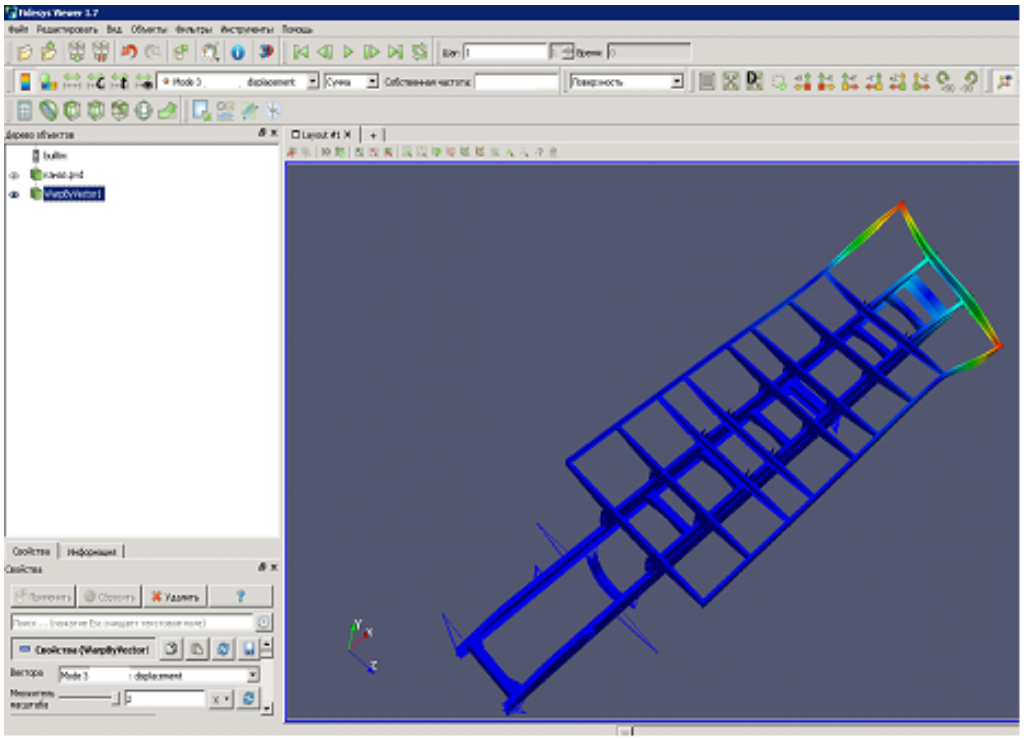


Рис. 6: Собственные формы, используемые в расчете динамики.

6. Испытание «Переставка»

Модель предназначена для определения максимальной скорости маневра при смене полосы движения на ограниченном участке пути, при которой не происходит отрыва колес от дороги или выхода КМ за пределы габаритного коридора. Данный тип испытания регламентируется ГОСТ Р 52302-2004.

В процессе расчета управление машиной осуществляется при помощи системы управления с обратной связью. Для моделирования испытания используется размеченный коридор, показанный на Рис. 8. Параметры сцепления полигона задаются пользователем.

КМ сообщается начальная скорость V_{x0} движения на участке 1 размеченного коридора. Данная скорость по желанию пользователя может поддерживаться на протяжении всего испытания при помощи регулятора скорости.

На участке 1 размеченного коридора рулевое колесо удерживается в нейтральном положении.

С момента пересечения точкой в середине первой оси КМ границы между участками 1 и 2 начинается работа алгоритма управления, описанного выше.

На участке 3 рулевое колесо удерживается в нейтральном положении.

На всех участках выход КМ за пределы размеченного коридора отслеживается по положению специальных габаритных точек, закрепленных на раме КМ вдоль обоих бортов. Габаритные точки располагаются в районе каждой оси КМ на высоте центров колес и на расстоянии половины заданной габаритной ширины КМ от его продольной плоскости.

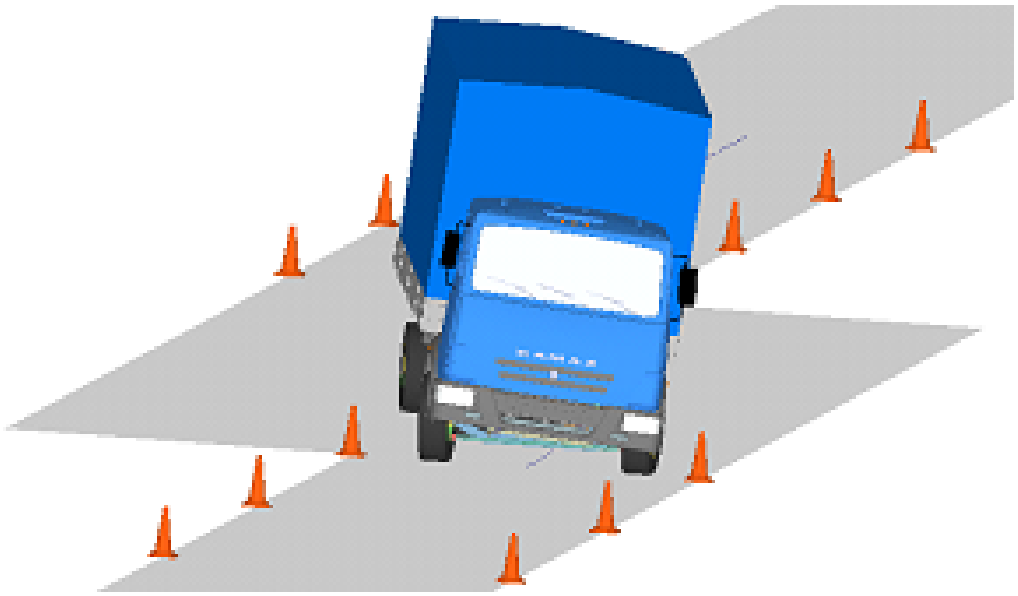


Рис. 7: Внешний вид модели.

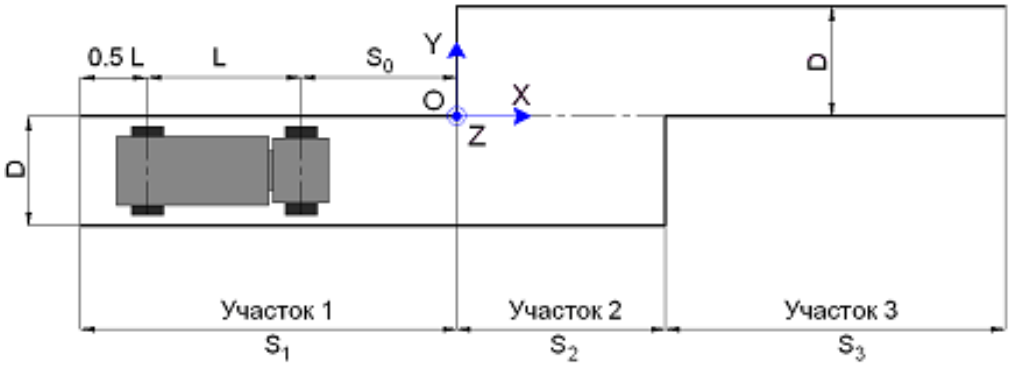


Рис. 8: Разметка участка модели испытаний “переставка”.

Отрыв колес от дороги отслеживается по датчикам прогиба шин.

Завершение заезда производится автоматически после прохождения КМ расстояния $(S_0 + 4 \cdot S_2) \cdot 1.2$. Если начальная скорость V_{x0} КМ меньше или равна 0.1 м/с, заезд завершается через 10 с модельного времени.

7. Результаты тестовых расчетов

Для тестирования работы упругих звеньев и влияния учета упругости звеньев на результаты расчетов для автомобиля КАМАЗ-5308 проведены расчеты испытаний «Переставка» для случаев с жесткой и с упругой рамой.

Испытание проводилось на скорости автомобиля ч30 км/ч. и 55 км/ч. Длина участка переставки – 20 м.

На Рис. 9 - Рис. 11 показаны результаты испытания «Переставка» на скорости 30 км/ч (черные линии – упругая рама, красные линии – жесткая рама). Также для рамы получены значения упругих перемещений (не учитывающие перемещения рамы как единого целого). Наибольшие упругие перемещения испытывает передняя часть рамы, максимальное значение – 11 мм.

На Рис. 12 - Рис. 14 показаны результаты испытания «Переставка» на скорости 55 км/ч (черные линии – упругая рама, красные линии – жесткая рама). Для рамы получены значения упругих перемещений (не учитывающие перемещения рамы как единого целого). Наибольшие упругие перемещения испытывает передняя часть рамы, максимальное значение – 21 мм.

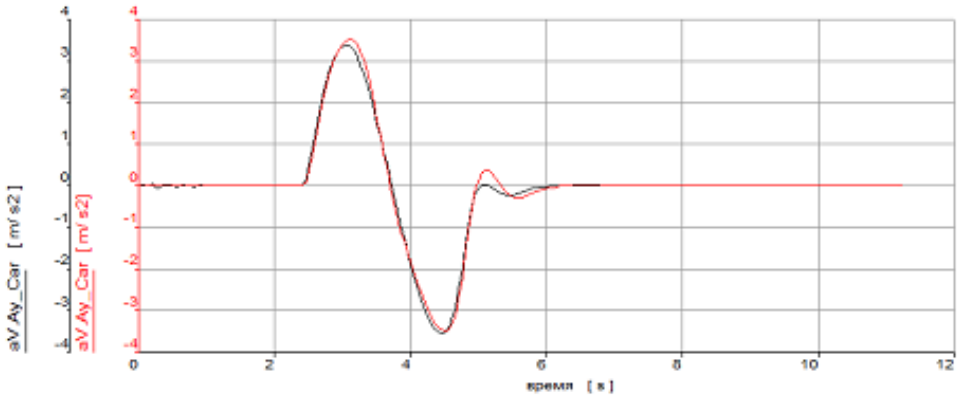


Рис. 9: Боковое ускорение для жесткой и упругой рамы на скорости испытания 30 км/ч.

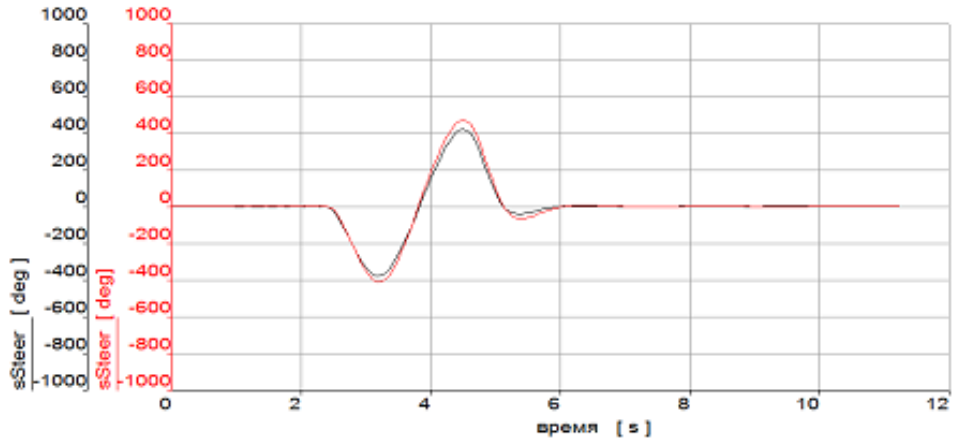


Рис. 10: Угол поворота руля для жесткой и упругой рамы на скорости испытания 30 км/ч.

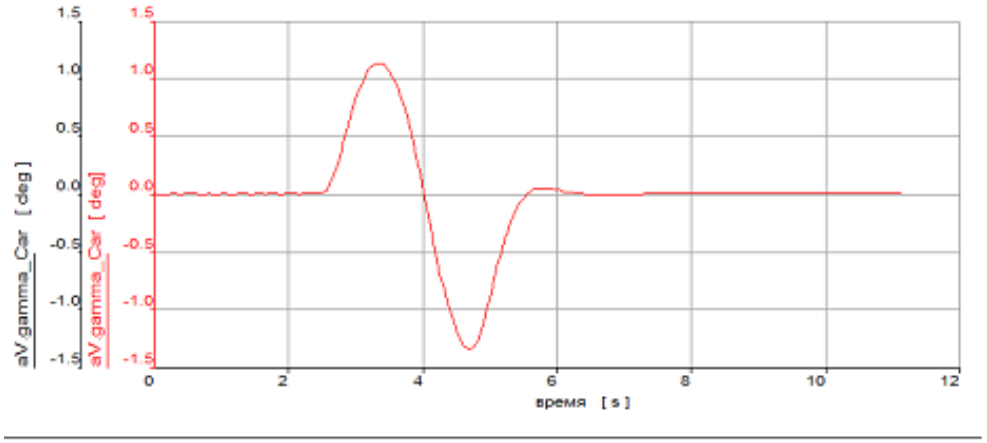


Рис. 11: Угол поперечного крена для жесткой и упругой рамы на скорости испытания 30 км/ч.

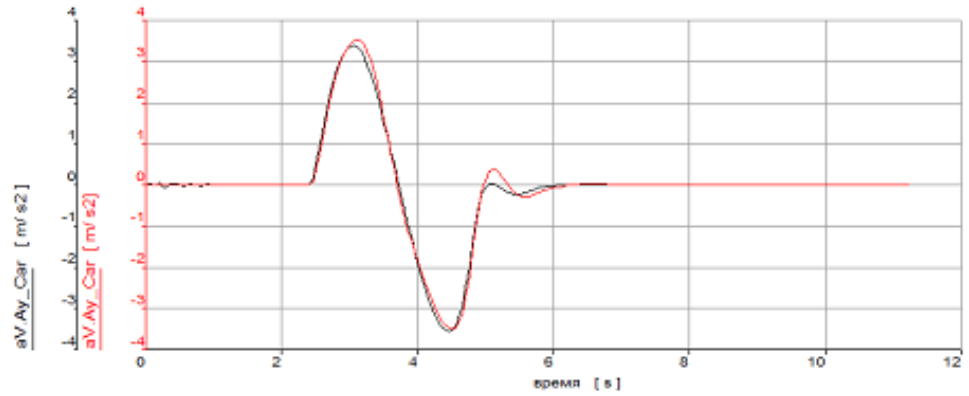


Рис. 12: Боковое ускорение для жесткой и упругой рамы на скорости испытания 55 км/ч.

В данной статье использование МКЭ-модели было использовано для учета влияния динамики движения автомобиля в целом на напряженно-деформированное состояние рамы.

Таким образом, МКЭ-модель, подготовленная в ПК Fidesys, может быть втянута в ПК EULER и рассчитана в составе многокомпонентной механической системы в рамках классического метода конечных элементов и с использованием редукции методом Крейга-Бэмптона. Для демонстрации произведен расчет динамики модели на примере испытания "Переставка"для автомобиля КАМАЗ-5308 с упругой рамой.

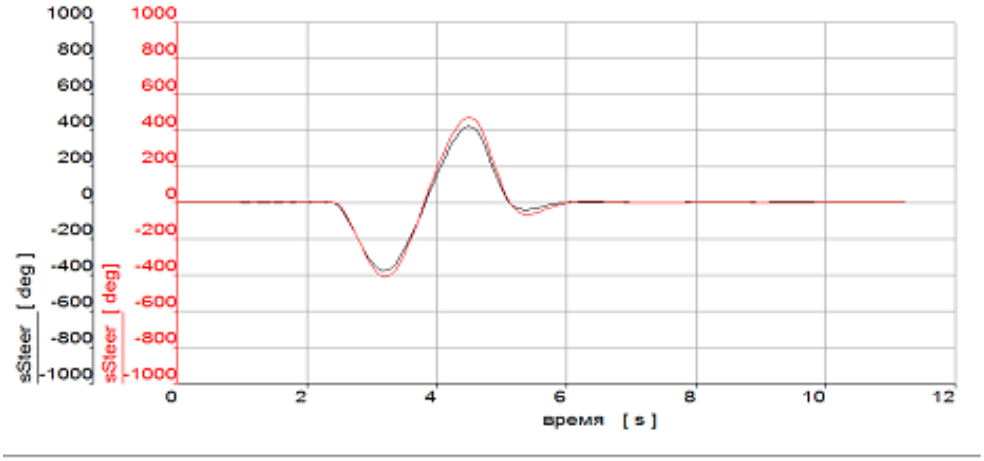


Рис. 13: Угол поворота руля для жесткой и упругой рамы на скорости испытания 55 км/ч.

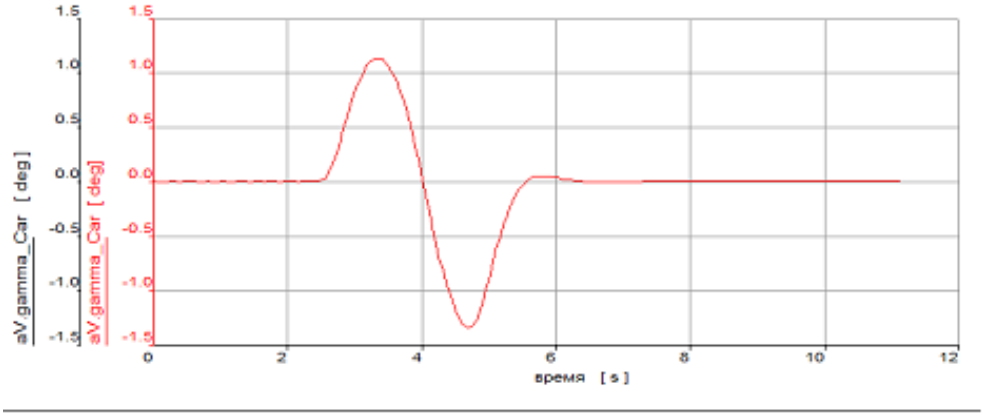


Рис. 14: Угол поперечного крена для жесткой и упругой рамы на скорости испытания 55 км/ч.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Craig R.R., Bampton M.C. Coupling of substructures for dynamic analysis // AIAA Journal. 1968. Vol. 6. N 7. P. 1313-1319.

2. Бойков В.Г., Юдаков А.А. Моделирование динамики системы твердых и упругих тел в программном комплексе EULER // Информационные технологии и вычислительные системы. 2011. № 1. С. 42-52.

3. Юдаков А.А. Принципы построения общих уравнений динамики упругих тел на основе модели Крейга-Бэмптона и их практически значимых приближений // Вестник Удмуртского университета. Серия 1: Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 126–140

4. https://cae-fidesys.com

5. Решение плоской задачи о концентраторе напряжений произвольной формы, образованном в нагруженном теле. Конечные деформации / В. А. Левин, В. В. Калинин, А. В. Вершинин, Г. Е. Пекарь // *Известия ТулГУ. Серия "Дифференциальные уравнения и прикладные задачи"*. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 167–172.

6. *Левин В. А., Вершинин А. В.* ПРОМЫШЛЕННЫЙ ПАКЕТ ДЛЯ ПРОЧНОСТНОГО ИНЖЕНЕРНОГО АНАЛИЗА // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань 20-24 августа 2015 г. Сборник докладов. 4480с. — Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета Казань, 2015. — С. 2281–2283.

7. *Левин В. А.* Промышленная система инженерного прочностного анализа ФИДЕСИС. Обзор функциональных возможностей версии 1.5 // Доклады 25-го симпозиума "Проблемы шин, РТИ и эластомерных композитов". 13-17 октября 2014 г. — ООО НПКЦ ВЕСКОМ Москва, 2014. — С. 51–53.

8. *Левин В. А.* О разработке и использовании полнофункциональной многоплатформенной сае ФИДЕСИС // Материалы Международной научной конференции Современные проблемы математики, механики, информатики. Тула, 17 - 21 сентября 2012 г. — 2012. — С. 192–193.

9. *Левин В. А.* К разработке универсальной прочностной сае “fidesys”. Модели, методы, результаты // Материалы Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики"(Россия, Тула, 22-26 ноября 2010 г.). — ТулГУ Тула, 2010. — С. 169–171.

10. *Левин В. А., Морозов Е. М., Матвиенко Ю. Г.* Избранные нелинейные задачи механики разрушения (под редакцией В.А. Левина). — ФИЗМАТЛИТ г. Москва, 2004. — С. 408.

11. *Левин В. А., Зингерман К. М.* Плоские задачи многократного наложения больших деформаций. Методы решения. — Физматлит Москва, 2002. — С. 272.

12. *Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В.* Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. — ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА URSS Москва, 2015. — С. 408.

13. *Левин В. А., Вершинин А. В.* Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ Т.2 (Нелинейная вычислительная механика прочности . Цикл монографий в 5 томах под. ред. В.А. Левина). — ФИЗМАТЛИТ Москва, 2015. — С. 544.

14. Использование суперкомпьютерных технологий в задачах прочности. Пакет fidesys / В. А. Левин, А. В. Вершинин, Д. И. Сабитов и др. // Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности / Под редакцией: академика В.А. Садовничего, академика Г.И. Савина, чл.-корр. РАН Вл.В. Воеводина. — Т. 2 из *Суперкомпьютерное образование.* — Издательство Московского университета Москва Москва, 2010. — С. 162–166.

15. *Левин В. А.* К разработке cae-систем для нелинейных задач прочности // Материалы Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики"(Россия, Тула, 23-27 ноября 2009 г.). — ТулГУ Тула, 2009. — С. 222–224.

REFERENCES

1. Craig, R.R. & Bampton, M.C. 1968, “Coupling of substructures for dynamic analysis”, AIAA Journal, vol. 6, no. 7, pp. 1313–1319.

2. Boikov, V.G. & Yudakov, A.A. 2011, “Simulation of rigid and flexible multibody system dynamics with EULER software”, Inform. Tekhn. Vych. Sist., no. 1, pp. 42–52.

3. Yudakov, A.A. 2012, “Principles of flexible body general dynamic equations derivation based on the Craig–Bampton model and of their practically significant approximations”, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki (The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science), issue 3, pp. 126–140.

4. Main website Fidesys, Available at: https://cae-fidesys.com (accessed 21 December 2017).

5. Levin V. A., Kalinin V. V., Vershinin A. V., Pekar' G. E.*”Reshenie ploskoj zadachi o koncentratore napryazhenij proizvol'noj formy, obrazovannom v nagruzhennom tele. Konechnye deformacii”* (The solution of a plane problem of stress concentrators of arbitrary shape formed in a loaded body. Finite deformation) // Izvestiya TulGU. Series *"Differencial'nye uravneniya i prikladnye zadachi"*. — 2006. — vol. 12, No 1. — p. 167–172.

6. Levin V. A., Vershinin A. V. *“PROMYSHLENNYJ PAKET DLYA PROCHNOSTNOGO INZHENERNOGO ANALIZA”* (INDUSTRIAL PACKAGE FOR STRESS ENGINEERING ANALYSIS) // XI All-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics. Kazan, August 20-24, 2015 the proceedings volume 4480p. — Publishing house of Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, 2015. — p. 2281–2283.

7. Levin V. A. *"Promyshlennaya sistema inzhenernogo prochnostnogo analiza FIDESIS. Obzor funkcional'nyh vozmozhnostej versii 1.5"* (Industrial system engineering strength analysis FIDESYS. Functional overview version 1.5) // he reports of the 25th Symposium "Problems of tires, rubbers and elastomeric composites". 13-17 October 2014— OOO NPKC VESKOM Moskva, 2014. p. 51–53.

8. Levin V. A. *"O razrabotke i ispol'zovanii polnofunkcional'noj mnogoplatformennoj cae FIDESIS"* (On the development and use of a full-featured multiplatform cae FIDESYS) Materials of the International scientific conference Modern problems of mathematics, mechanics, Informatics. Tula, 17 - 21 September 2012. — p. 192–193.

9. Levin V. A. *"K razrabotke universal'noj prochnostnoj cae "fidesys"*. Modeli, metody, rezul'taty" (Developing universal strength cae "Fidesys". Mo- Delhi, methods, results) // Materials of the International scientific conference "Modern problems of mathematics, mechanics, Informatics"(Russia, Tula, 22-26 November 2010) — TulGU Tula, 2010. — p. 169–171.

10. Levin V. A., Morozov E. M., Matvienko YU. G. *"Izbrannye nelinejnye zadachi mekhaniki razrusheniya (pod redakciej V.A. Levina)."* (Selected nonlinear problems fracture mechanics (edited by V. A. Levin)) — FIZMAT-LIT g. Moscow, 2004. — p. 408.

11. Levin V. A., Zingerman K. M. *"Ploskie zadachi mnogokratnogo nalozheniya bol'shih deformacij. Metody resheniya."* (Plane problem of repeated superposition of large deformations. Methods of solution.) — Fizmatlit Moscow, 2002. — p. 272.

12. Morozov E. M., Levin V. A., Vershinin A. V. Prochnostnoj analiz. *"Fidesis v rukah inzhenera. — IZDATEL'SKAYA GRUPPA URSS Moskva"* (The strength analysis. Fidesys in the hands of the engineer.), 2015. — p. 408.

13. Levin V. A., Vershinin A. V. *"CHislennye metody. Parallel'nye vychisleniya na EHVM T.2 (Nelinejnaya vychislitel'naya mekhanika prochnosti. Cikl monografij v 5 tomah pod. red. V.A. Levina)"* (Parallel computing on computers, vol. 2 Nonlinear computational mechanics of durability). — FIZMATLIT Moscow, 2015. — p. 544.

14. V. A. Levin, A. V. Vershinin, D. I. Sabitov / *"Ispol'zovanie superkomp'yuternyh tekhnologij v zadachah prochnosti. Paket fidesys"* (The use of supercomputer technologies in problems of durability. Package Fidesys)//— vol. 2 of Supercomputing education. — Publishing house of Moscow University, Moscow, 2010. — p. 162–166.

15. Levin V. A. *"K razrabotke cae-sistem dlya nelinejnyh zadach prochnosti "* (The development of cae-systems for nonlinear problems of strength)//Materials of the International scientific conference "Modern problems of mathematics,

mechanics, Informatics"(Russia, Tula, 23-27 November 2009). — TulGU Tula, 2009. — p. 222–224.

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.4, 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-154-186

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПЛАСТОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПУТЕМ ВНЕШНЕГО СОПРЯЖЕНИЯ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПАКЕТОВ И УНИВЕРСАЛЬНОЙ CAE FIDESYS[1][2]

А. В. Вершинин[3], Д. И. Сабитов[4], С. Ю. Ишбулатов[5], А. В. Мясников[6] (г. Москва)

Аннотация

В статье рассматриваются различные алгоритмы решения связанной задачи гидрогеомеханического моделирования фильтрации жидкости в деформируемой трещиноватой породе, позволяющие учитывать взаимное влияние процессов фильтрации и деформирования горных пород на динамические параметры среды: пористость, проницаемость, жесткость породы и раскрытие трещин. Данные алгоритмы позволяют решать задачи о выборе места и траектории бурения скважины и их устойчивости, об обеспечении высокой продуктивности пласта за счет оптимизации дизайна ГРП и контроля за пескопроявлением. Мониторинг естественного напряженно-деформированного состояния, в окрестности скважины при добыче углеводородов, позволяет предотвратить развитие процессов деформации и образования зон разрушения.

[1]Исследования для данной работы были частично выполнены в ООО «Фидесис» при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (Соглашение о предоставлении субсидии №14.579.21.0112, уникальный идентификатор ПНИЭР: RFMEFI57915X0112).

[2]Исследования для данной работы были частично выполнены в рамках договора №923/PSA со Сколковским институтом науки и технологий от «1» сентября 2016 г.

[3]Вершинин Анатолий Викторович, доцент кафедры вычислительная механика механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, versh1984@mail.ru

[4]Сабитов Денис Иджадович, старший научный сотрудник Центра добычи углеводородов Сколковского института науки и технологий, d.sabitov@skoltech.ru

[5]Ишбулатов Салават Юлаевич, аспирант, Сколковский институт науки и технологий, salavat.ishbulatov@skoltech.ru

[6]Мясников Артем Вениаминович, доктор физико-математических наук, профессор, Сколковский институт науки и технологий, a.myasnikov@skoltech.ru

На первой стадии авторами проводилась верификация процедуры итерационного внешнего сопряжения и процедуры итерационного внутреннего сопряжения. При внутреннем сопряжении использовался специально разработанный авторами исследовательский код, в задачи которого входит организация итерационного процесса работы геомеханического и гидродинамического симуляторов, чтение форматов данных симуляторов, преобразование единиц измерения величин, а также проекция полей величин на различные модельные сетки. Для внешнего сопряжения был использован симулятор "CAE FIDESYS", численно решающий задачи о распределении геомеханических напряжений и деформаций в горной породе методами конечных элементов.

В данной работе приводятся результаты численного моделирования экспериментального варианта разработки месторождения, с приближенными к реальной среде свойствами. Одной из целей проводимых вычислений является определение влияния степени сопряжения алгоритма, реализующего данную методику, на результат. В связи с тем, что эффективные упруго-прочностные свойства численно определяются в каждой точке пространства в результате решения пространственной упругопластической задачи, сокращение частоты обмена данными является важным в данном подходе. По результатам расчетов на примере процедуры циклической закачки CO2 в формации Баженовской свиты (Пальяновский разрез) определено, что локальные характеристики добычи чувствительны к степени сопряжения. Полученные в статье результаты позволяют сделать вывод о важности учета геомеханических эффектов деформирования трещиноватых горных пород, насыщенных жидкостью, при моделировании внутрипластовых процессов.

Ключевые слова: геомеханика, эффективные свойства, трещиноватые среды, численное моделирование, метод конечных элементов, сопряжение.

Библиография: 75 названий.

HYDROGEOMECHANICAL MODELING OF RESERVOIR BY EXTERNAL COUPLING OF SPECIALIZED COMPUTATIONAL SOFTWARE AND UNIVERSAL CAE FIDESYS

A. V. Vershinin, D. I. Sabitov, S. Y. Ishbulatov, A. V. Myasnikov (Moscow)

Abstract

We study several algorithms for solving the coupled problem of hydrogeomechanical modeling of fluid filtration in a deformed fractured rock, allowing to describe the mutual influence of filtration and rock deformation processes on the dynamic parameters of the medium: porosity, permeability, rock stiffness and fracture extensions. These algorithms allow solving the problems of choosing the location and drilling trajectory

of a well either wellbore stability, ensuring high productivity of the formation due to optimization of the design of hydraulic fracturing and sand control. Together with seismic and reservoir testing data, coupled hydrogeomechanical modeling allows optimizing the tactics and strategy of reservoir development. The disturbance of formation stress-strain state in the near-well zone leads to the development of deformation processes and fracture zones, as well as changes in pore pressure and filtration properties in the reservoir. At the first stage, we verify external and internal iterative external coupling procedures. The specially developed research code was used for internal coupling procedure. For external coupling, a finite element simulator FIDESYS was used which solves numerically the problems of geomechanical stresses and deformation distributions in the rock. We developed the control module to organize the iterative process of geomechanical and hydrodynamic simulators, including reading special simulation data formats, unit conversion, as well as the value fields projection on different model grids.

In this paper, we present the modeling for several problems and discuss the computation results. Effective elastic-strength properties are determined numerically at every mesh node as a result of solving the time consuming spatial elastoplastic problem. Therefore, the reduction in the frequency of data exchange is important in this approach.

One of the goals of this numerical study, related to the above methodology, is to determine the effect of the coupling frequency on the solution. Based on the computation results for the example of the cyclic CO2 injection procedure in the Bazhenov Formation formation (Palyanovo section), only the local production characteristics are sensitive to the coupling frequency. The results obtained in this paper allow us to conclude that the role of geomechanical effects of fractured rock deformations saturated with a fluid is significant for modeling the formation processes.

Keywords: geomechanics, effective properties, fractured media, numerical modeling, finite element method, coupling.

Bibliography: 75 titles.

1. Введение

Актуальность исследования, проведенного в настоящей работе, обусловлена необходимостью решения практических задач нефтегазовой гидрогеомеханики с заданной точностью. К таким задачам относятся задача о выборе места и траектории бурения скважины и их устойчивости, об обеспечении высокой продуктивности пласта за счет оптимизации дизайна ГРП и контроля за пескопроявлением. Совместно с данными сейсморазведки и тестирования пласта, гидрогеомеханическое моделирование позволяет оптимизировать тактику и стратегию разработки пласта, с тем, чтобы избежать в частности, катастрофических сценариев, типа Екофиск [Andersen, 1995]). Нарушение естественного напряженно-деформированного состояния, в окрестности скважины [Stefanov & Myasnikov, 2015], [Соннов и др., 2016] или на

масштабе резервуара [Bagheri & Setari 2005, 2006, 2008], приводит к развитию процессов деформации и образованию зон разрушения, а также изменению порового давления и фильтрационных свойств в пласте [Yarushina et al 2013]. Исследование данной проблемы требует разработки соответствующих моделей, которые позволят, с одной стороны, описать развитие упругопластической деформации в требуемых условиях и рассчитать напряженно-деформированное состояние. С другой стороны, позволят учесть перераспределения пластового, призабойного и скважинного давления за счет движения флюида в скважине, переноса им проппанта, утечек и взаимодействия жидкости гидроразрыва с пластовыми флюидами [Yarushina et al 2013].

Основной целью проекта является, таким образом, разработка инструментария, позволяющего совместно использовать гидродинамический и геомеханический модули для описания изменения напряженно-деформированного состояния пласта при техногенном воздействии на него. Совокупный (сопряженный) программный продукт должен адекватно и вычислительно эффективно описывать особенности развития упругой и неупругой деформации под воздействием эффективных напряжений (учитывающих влияние перераспределенного порового давления) в породе с анизотропными упругопрочностными свойствами. Параметры анизотропии, определяемые параметрами системы микронеоднородностей (трещин, лагун, включений других минералов), могут меняться в процессе технологического воздействия на породу за счет изменения формы и жесткости этих микронеоднородностей [Myasnikov et al 2016], что также должно адекватно описываться совокупным продуктом.

В настоящей статье рассмотрены различные алгоритмы сопряжения гидродинамической и геомеханической моделей в задаче фильтрации жидкости сквозь деформируемую пористую среду. В случае трещиновато-пористой среды, то есть пористой среды, пронизанной к тому же системами трещин, общие алгоритмы специфицируются до алгоритма, позволяющего учитывать динамическое изменение пористости и проницаемости в процессе фильтрации. На основе этого алгоритма разработан программный модуль для интеграции гидродинамического симулятора и геомеханических решателей в составе CAE Fidesys. Приведены результаты решения различных тестовых задач для верификации разработанных алгоритмов и, в частности, специализированного программного модуля, а также результаты решения практически важной задачи об оптимизации режима закачки жидкости на месторождении. Обсуждаются полученные результаты решения и влияние геомеханических эффектов на них.

2. Алгоритмы сопряжения гидродинамической и геомеханической моделей

Алгоритмы сопряжения классифицируются по нескольким признакам. Наиболее важными из них являются (1) характер сопряжения – внеш-

нее (3) выбор методики, по которой рассчитывается изменение пористости при новом эффективном напряженно-деформированном состоянии [Khalili & Valliapan, 1996], [Wilmanski 2008], [Yarushina & Podladchikov 2015], [Bagheri & Setari 2005, 2008].

Выбор алгоритма сопряжения существенно зависит от решаемой задачи. С вычислительной точки зрения наиболее точными являются полностью сопряженные алгоритмы (могут быть реализованы лишь при внутреннем сопряжении) – скорости жидкости и смещения вычисляются одновременно в процессе решения системы линейных уравнений, дискретизирующую единообразно замкнутую систему уравнений. Однако такое сопряжение не всегда требуется или практически неосуществимо – инженер обладает лицензиями двух коммерческих пакетов (например, CAE Fidesys и Eclipse 300 или tNavigator) и ищет пути их наиболее эффективного совместного использования. Поэтому в настоящей работе сделан акцент на внешнем сопряжении двух коммерческих пакетов, например, CAE Fidesys и какого-либо гидродинамического пакета (рассматривались CMG Stars, Eclipse 300, tNavigator), хотя для верификационных целей предлагается целесообразным реализовать алгоритм полного внутреннего сопряжения [Yarushina & Podladchikov 2015], хоть это выходит за рамки настоящей работы.

По степени сопряжения не полностью сопряженные алгоритмы условно делятся на итерационно сопряженные, явно сопряженные, псевдосопряженные и полностью несопряженные. Хотя формально все эти алгоритмы считаются основанными на хорошо зарекомендовавшим себя методе расщепления по физическим процессам [Марчук Г.И., 1977], с математической точки зрения, это можно отнести лишь к итерационно сопряженным, в которых на каждом шаге интегрирования по времени независимо отыскиваются решения геомеханической и гидродинамической задач, после чего происходит обмен значениями найденных полей, связывающих две задачи, и решения повторяются до достижения сходимости. Во всех прочих не полностью сопряженных алгоритмах обмен значениями полей происходит далеко не на каждом шаге по времени, что экономит время расчета, но зато требует в каждом конкретном случае анализировать сходимость решения по отношению к частоте обмена. Несмотря на то, что установленная в этом смысле сходимость может и не обеспечить сходимость решения в математическом смысле слова, данный подход обладает неоспоримым преимуществом – возможностью использования готовых решателей (программных комплексов) для моделирования отдельных физических процессов в рамках связанной задачи при обеспечении соответствующей интеграции между ними.

Хотя выбор степени внешнего сопряжения, в том числе частоты обмены данными между решателями, существенно зависит от специфики решаемой задачи, представляется целесообразным реализовать на стадии разработки алгоритма все доступные степени внешнего сопряжения, чтобы в процессе дальнейших массовых расчетов организовывать оптимизационный рабочий процесс, концепция которого изложена в [Хакимова и др 2017].

Последний, третий отмеченный выше признак классификации алгорит-

мов сопряжения является наименее тривиальным. Начиная с классических работ Био в литературе предпринимаются многочисленные попытки вывести феноменологическое уравнение для пористости либо из физически наглядных представлений об изменении поровых объемов одного (или, в случае трещиноватых сред, двух и более) континуумов от полного напряжения и давлений каждой индивидуальной среды, либо, из основных принципов многофазной механики сплошной среды.

В первом случае физическая наглядность ограничивается линейной упругостью и теоремой взаимности Бетти, хотя, в этом приближении было получено несколько практически важных результатов. Так, в девяностые годы было опубликовано сразу несколько различных моделей, расширяющих теорию Био на случай двойной пористости [Khalili & Valliapan, 1996] (см. также обзорную работу [Chen & Teufel, 1997]) которые включили в свою согласованную модель зависимость деформации от давления в обоих средах. Позднее, [Lewis & Pao, 2002] обобщили модель на случай двух и трехфазной жидкости.

Во втором случае исследования носят существенно фундаментальный характер, поскольку вывод уравнения для пористости неразрывно связан с нелинейным обобщением теории Био [Wilmanski 2008]. При этом далеко не во всех работах учитывают тот факт, что скелет должен является равноценной фазой в этих построениях. Не вдаваясь здесь в обсуждение различных многочисленных и взаимоисключающих подходов, отметим, что наиболее последовательными и внутренне непротиворечивыми нам представляется подход [Yarushina & Podladchikov, 2015], который, однако существенно требует применение алгоритма полного внутреннего сопряжения.

Альтернативной и, как нам представляется, перспективной, представляется идея отказа от использования уравнения для пористости [Bagheri & Settari 2005, 2008]. В этом подходе пористости на новом шаге по времени пересчитываются из решений упруго-пластической задачи на микромасштабной ячейке периодичности. Подход подразумевает итерационное сопряжение, как внутренне, так и внешнее. В настоящей работе используется внешнее сопряжение с использованием в качестве геомеханического решателя CAE Fidesys

Необходимо отметить, что CAE Fidesys выбран в качестве примера геомеханического решателя, поскольку в нем реализован уникальная методика наложения больших деформаций, что позволяет, помимо реализации сопряжения, добавлять в вычислительный комплекс пакет определения эффективных упруго-прочностных свойств среды в приближении мульти-пористости и мульти-проницаемости. Первые шаги в этом направлении сделаны в работах [Мифтахов и др 2015] и [Мясников и др 2016].

3. Структура не полностью сопряженного алгоритма решения гидрогеомеханической задачи фильтрации в трещиновато-пористой среде: модель [Khalili & Valliapan, 1996]

Структура не полностью сопряженного алгоритма решения гидрогеомеханической задачи фильтрации трещиновато-пористой среде в рамках модели [Khalili & Valliapan, 1996] будет продемонстрирована в приближении «черной (нелетучей) нефти» для каждого из континуумов. Уравнения для пористости континуума пор (ϕ^p) и трещин (ϕ^f) в модели [Khalili & Valliapan, 1996]

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \phi^f}{\partial t} = \beta^f \left(\frac{\partial tr[\varepsilon]}{\partial t} + \frac{1}{K^m} \frac{\partial \bar{p}^f}{\partial t} \right) + C^{fp} \frac{\partial \left(\bar{p}^f - \bar{p}^p \right)}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi^p}{\partial t} = \beta^p \left(\frac{\partial tr[\varepsilon]}{\partial t} + \frac{1}{K^m} \frac{\partial \bar{p}^p}{\partial t} \right) + C^{fp} \frac{\partial \left(\bar{p}^p - \bar{p}^f \right)}{\partial t} \end{array} \quad (1)$$

Где $\beta^f = (C^p - C^s)/C$, $\beta^p = 1 - C^p/C$, $K^m = \beta^f/((\varphi^f - \beta^f * C^s)$, $C^{fp} = (\beta^f * \beta^p - \beta^f * \varphi^p) * C$, а C^s, C^p и C – сжимаемости зерен горной породы, пористых блоков и трещиноватой среды соответственно; p^p, p^f - давления в пористой среде и трещинах, насыщенных флюидом, соответственно, черта над давлением означает усреднение по фазам в каждом из континуумов; *tr[ε]* – след (первый инвариант) тензора деформаций, который находится из решения задачи

$$\nabla \cdot \sigma' = f, \quad \sigma' = \sigma(\varepsilon) - \sum_{i=p,f} \alpha^i \bar{p}^i \mathrm{I} \quad (2)$$

Здесь σ – тензор напряжений, α^i - коффициенты Био.

Предлагается организовать оптимизационный рабочий процесс [Хакимова и др. 2017] по решению задачи итерационным и псевдо-итерационным внешним и внутренним сопряжением. Общая структура оптимизационного рабочего процесса представлена на Рисунке 1. Процесс предоставляет опционную возможность осуществлять итерации вплоть до сходимости в цикле по k, который может быть совмещен с циклом по n, что соответствует итерационному сопряжению. Предлагается совершать итерационный процесс вплоть до сходимости в решении гидродинамической задачи на $T_{k+1} - T_k$ с подразбиением на интервалы $t_1^k, ..., t_N^k$, в которых изменения пористости в соответствии с уравнениями (1) происходит на предыдущей итерации [Daim et al 2002]

На первой стадии была верифицирована процедура итерационного внешнего сопряжения против процедуры итерационного внутреннего сопряжения. При внутреннем сопряжении использовался специально разработанный исследовательский код. Для внешнего сопряжения был использован конечно-элементный симулятор “CAE FIDESYS”, а для сопряжения решений написан специальный скрипт на языке “Python”, блок-схема которого представлена

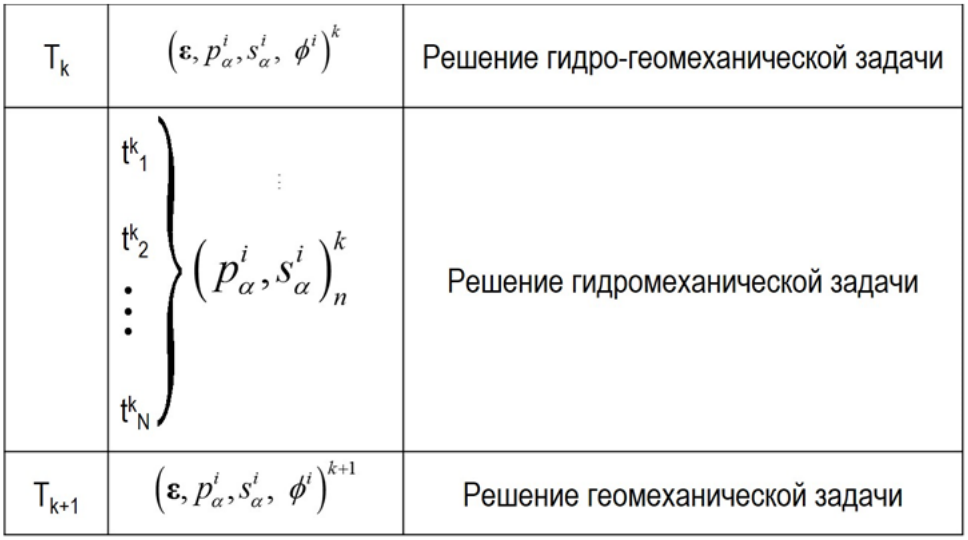


Рис. 1: Схема сопряжения решений гидродинамической и геомеханической задач на основе итерационного и псевдо-итерационного сопряжения.

на Рисунке 2. Данный скрипт является управляющим модулем для процесса сопряжения, в его задачи входит организация итерационного процесса работы геомеханического и гидродинамического симуляторов, чтение форматов данных симуляторов, преобразование единиц измерения величин, а также проекция полей величин на различные модельные сетки. С помощью разработанного модуля для интеграции гидродинамического симулятора и геомеханических решателей в составе CAE Fidesys была решена серия задач о фильтрации жидкости в деформируемой трещиноватой среде с учетом динамического изменения пористости и проницаемости в соответствии с изложенным в предыдущем пункте алгоритмом сопряжения.

В качестве первого примера для верификации итерационного алгоритма внешнего сопряжения была выбрана часть шестого сравнительного теста SPE [Firoozabadi & Thomas, 1990], которая также использовалась в [Lewis & Ghafouri, 1997] и [Lewis & Pao, 2002] для верификации их геомеханической модели. Псевдотрехмерная расчетная область (Рисунок 3) имеет пять вертикальных слоев высотой 15.2 метра каждый, которые разбиваются на 10 горизонтальных ячеек размером 61 м. Механические свойства слоев, относительные проницаемости, капиллярные давления для нефти, газа и воды в поровом пространстве матрицы и трещинах, PVT данные для нефти, газа и воды приведены в [Lewis & Pao, 2002] и здесь не дублируются.

Единственное отличие нашей модели состоит в условии на скважине – мы использовали условие фиксированного объемного расхода пластового флюида, равного 950 кубических метров пока давление не упадет до 6894 KPa. Результаты расчетов нашей модели приведены на Рисунке 4. Нетрудно видеть, что, во-первых, геомеханические эффекты оказывают в данном случае огромное влияние на решение, во-вторых, процедура внешнего итерационного сопряжения верифицирована по отношению к внутренней, и в-третьих,

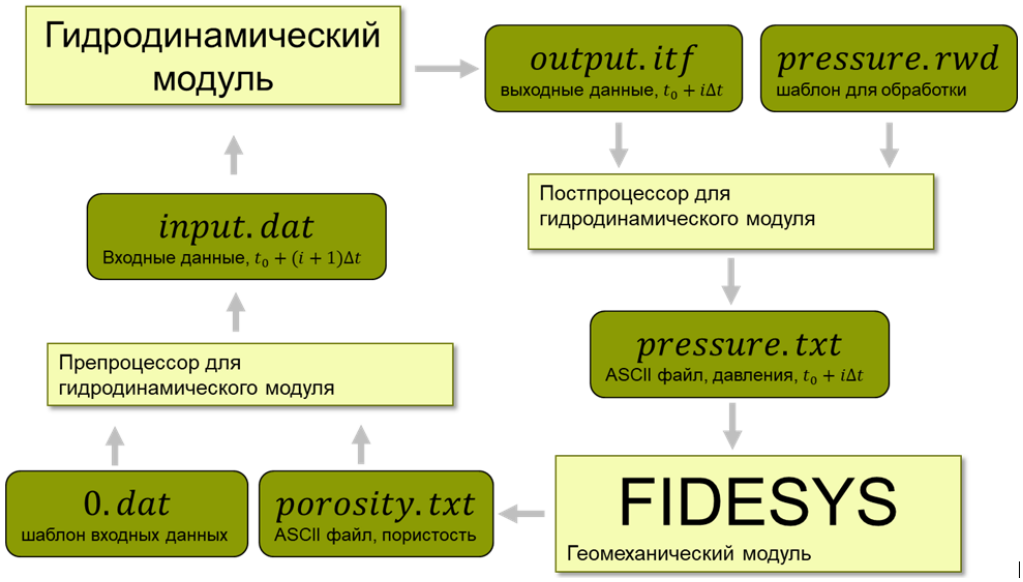


Рис. 2: Блок-схема работы программного модуля для интеграции гидродинамического симулятора и геомеханических решателей в составе CAE Fidesys

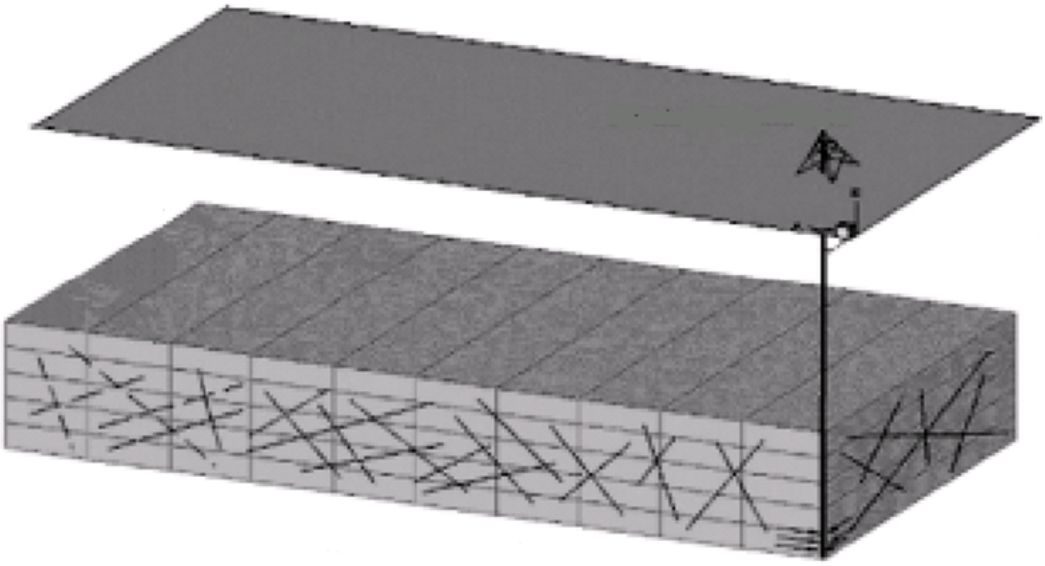


Рис. 3: Пример для верификации алгоритма внешнего итерационного сопряжения: часть шестого сравнительного теста SPE для валидации моделей двойной пористости. Рисунок адаптирован из работы [Lewis & Pao, 2002].

наше решение качественно совпадает с решением [Lewis & Pao, 2002]. Количественные различия обусловлены грубостью сетки и различными граничными условиями на скважине.

В качестве второго примера для верификации алгоритма внешнего итерационного сопряжения была выбрана та же задача, что и в предыдущем случае, но в редуцированной постановке к случаю с нулевой проницаемостью

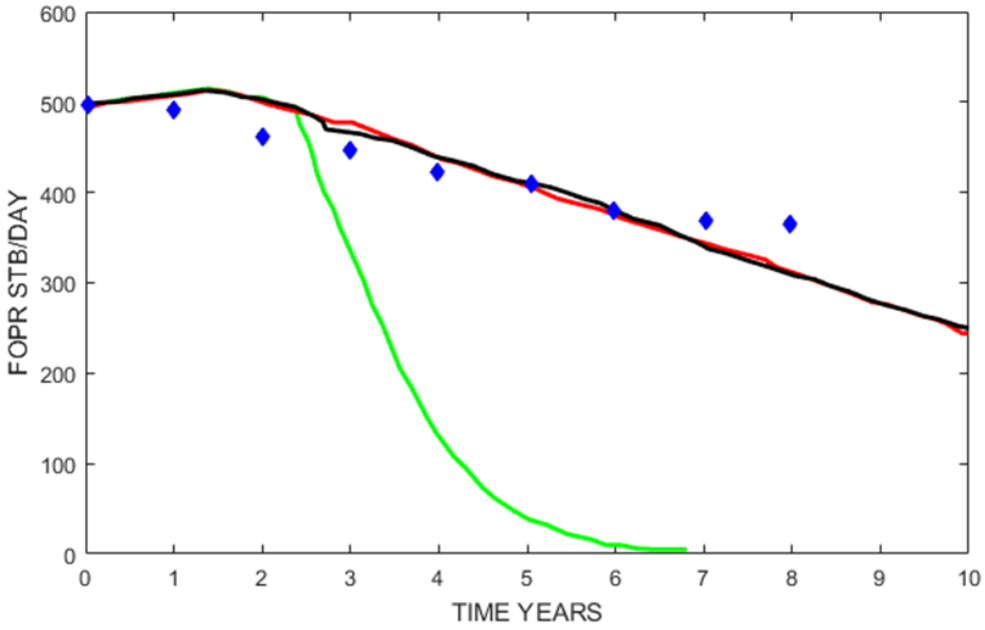
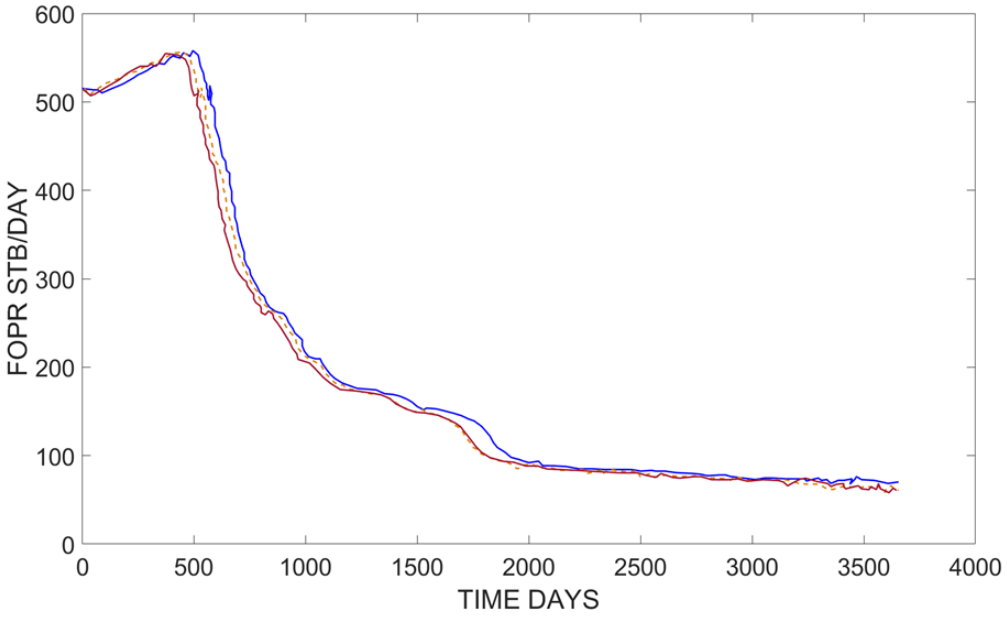


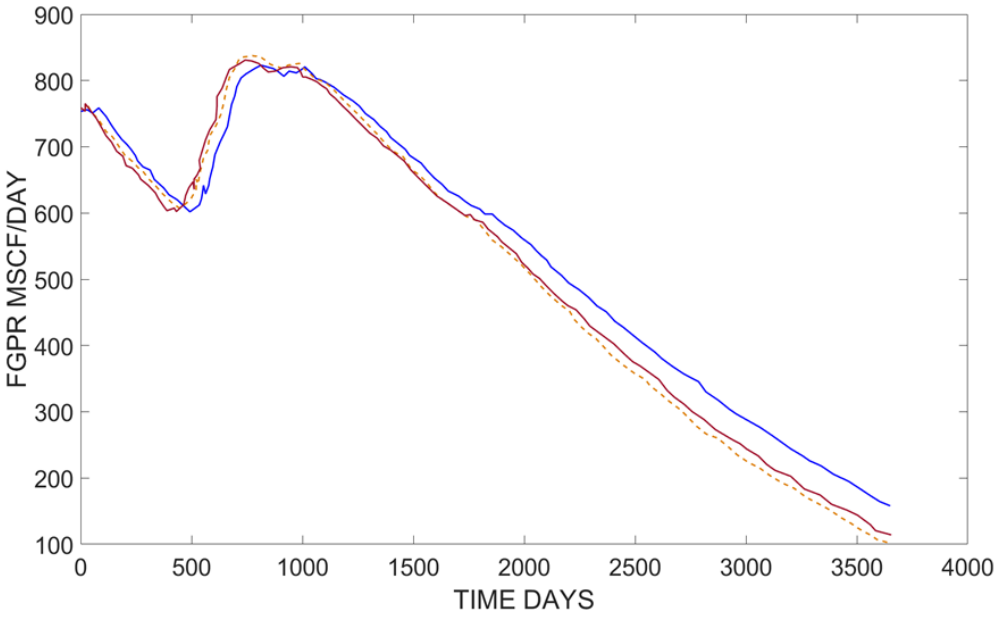
Рис. 4: Расчет дебета нефти во времени для примера верификации, представленного на Рисунке 3. Зеленая кривая относится к случаю с постоянной сжимаемостью (нет геомеханических эффектов), красная и черная – к случаю с учетом геомеханических, причем красная получена с помощью алгоритма внешнего итерационного сопряжения, черная – внутреннего. Синие кружки – оцифрованное решение этой же задачи из работы [Lewis & Pao, 2002].

матрицы. Целью этого эксперименты было сопоставление рассматриваемого алгоритма с алгоритмом полного внутреннего сопряжения, реализованного в исследовательском коде в случае одинарной пористости. Результаты расчетов по алгоритму полного внутреннего сопряжения представлены на Рисунке 05 синими линиями. Коричневыми линиями – представлены результаты расчетов по алгоритму итерационного внешнего сопряжения.

Кроме того, был реализован алгоритм, предложенный в [Samier & DeGennaro, 2007]. В терминах классификации [Jalali & Dusseault, 2008] и в [Hernandez, 2011], алгоритм [Samier & DeGennaro, 2007], который авторы называют новым алгоритмом внешнего итерационного сопряжения, по сути является полностью несопряженным или, в лучшем случае, гибридом полностью несопряженного и псевдосопряженного алгоритмов. В [Samier & DeGennaro, 2007] предлагается сначала провести гидродинамическое моделирование на достаточно длительном времени (сопоставимом со временем разработки месторождения или history matching), в процессе которого сделать несколько фиксированных записей поля давления. Эти данные, в соответствие с общей стратегией полностью несопряженных алгоритмов, надлежит затем использовать как зависящую от времени нагрузку, передаваемую геомеханическому симулятору. По полученным новым значениям деформаций предлагается определять новые пористости в соответствии, например, с урав-

нениями (1), и проницаемости в некоторые моменты времени, и передавать их опять гидродинамическому симулятору. Сходимость этого процесса предлагается в буквальном смысле слова устанавливать на глаз, что избавляет от необходимости добиваться сходимости на каждом шаге по времени, как в классическом IC-методе, и получать решение через три-четыре глобальных итерации. Результаты второй итерации этой процедуры, применительно к редуцированной модели, представлены на Рисунке 5 красным пунктиром. Результаты третьей итерации неотличимы от внешнего итерационного сопряжения.





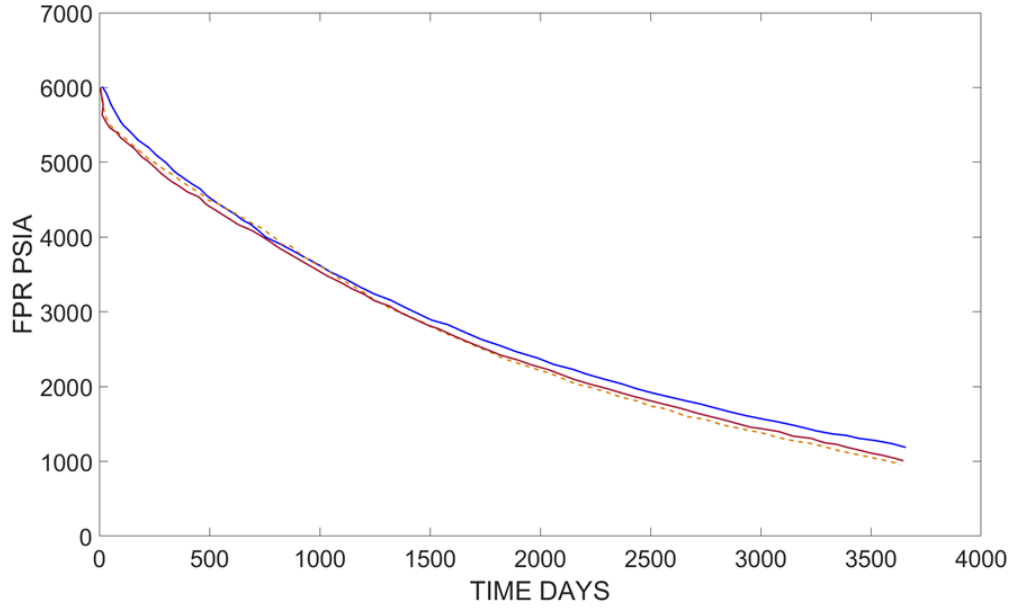


Рис. 5: Сопоставление работы алгоритмов полного внутреннего сопряжения (синие кривые) и итерационного внешнего сопряжения (коричневые кривые). Красными пунктирными кривыми представлены результаты второй итерации в алгоритме [Samier & DeGennaro, 2007].

4. Структура не полностью сопряженного алгоритма решения гидрогеомеханической задачи фильтрации трещиновато-пористой среде: модель [Bagheri & Settari, 2005, 2008]

Рассматриваемая в статьях [Bagheri & Settari, 2005, 2008] геомеханическая модель трещиноватой среды состоит из двух взаимодействующих на разных масштабах континуумов – как и в стандартной модели двойной пористости один включает в себя пористую среду горного массива, второй соответствует естественным и искусственным трещинам в породе. Следуя модели упрощенной трещиноватой породы, принятой в [Settari et al, 2005, 2006, 2008], будем далее моделировать второй тип континуума состоящим из нескольких множеств трещин, в каждом множестве содержится некоторое количество одинаково направленных трещин с одинаковой толщиной, но различным распределением в объеме породы. Каждое множество трещин характеризуется собственным коэффициентом жесткости, который определяет реакцию трещин на приложенное напряжение.

Выбранная геомеханическая модель взаимодействует с гидродинамической моделью (Рисунок 6) при помощи обмена с определенной частотой значениями пористости, проницаемости, давлений в порах и трещинах, насы-

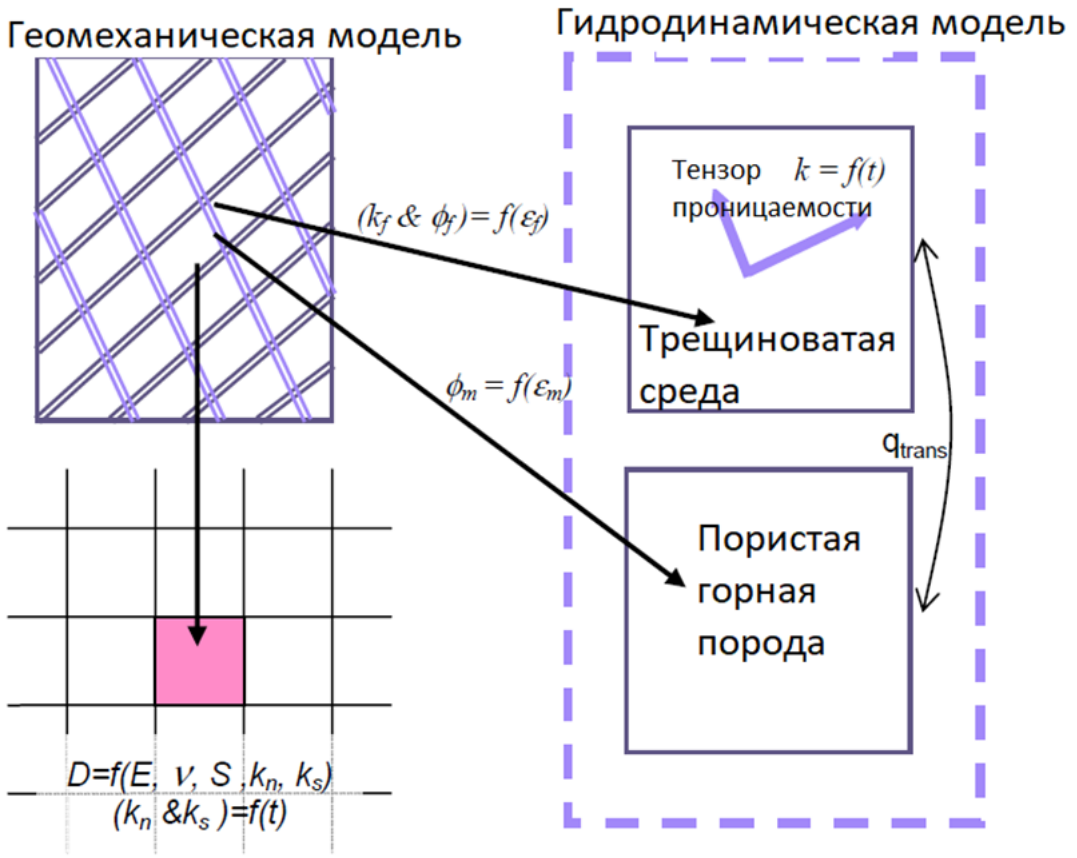


Рис. 6: Два масштаба в гидрогеомеханическом сопряжении

щенных фильтруемой жидкостью. Другой, не менее важный эффект, отличающий модель Setari от Hallili, заключается в возможности контроля изменений величины раскрытия трещин и, возможно, их направления, что позволяет явно определить наведенную НДС анизотропию тензора проницаемости.

Таким образом, одним из главных результатов использования геомеханической модели является прямое моделирование динамической проницаемости, вызванной деформированием трещиноватых пористых резервуаров в процессе фильтрации жидкости. При этом, как уже отмечалось, моделирование и расчет параметров НДС в рамках данной модели осуществляется в 2 этапа/масштаба (Рисунок 6).

На первом этапе находятся эффективные механические характеристики (эквивалентная матрица жесткости) для каждой подобласти (пористая упругая матрица + системы трещины внутри нее) на основе решения серии задач на ячейке периодичности [Мясников А.В. и др., 2016]. Далее на основе найденных эффективных механических параметров в подобластях решается геомеханическая задача о нахождении НДС во всей области. После чего идет обратная процедура - на основе рассчитанных глобальных напряжений решаются серии задач о нагружении матрицы и трещин в каждой из подобластей

для определения деформаций внутри матрицы и раскрытий (aperture) трещин, соответствующих текущему локальному НДС в окрестности трещины. Наконец, рассчитанные деформации матрицы и раскрытия трещин используются при вычислении пористости и проницаемости трещиноватой среды. При этом жесткость самих трещин также может меняться в процессе их деформирования. Рассчитанные пористости и проницаемости (матрицы и трещиноватой среды внутри нее) передаются в гидродинамический симулятор на основе модели двойной пористости, который определяет поле давлений во всей модели. Затем на основе рассчитанных давлений в матрице pm и трещинах pf определяется среднее давление в эффективном континууме и повторяется расчет НДС и параметров геомеханической модели. Уравнение для пористости в этом подходе не используется.

В случае итерационного сопряжения, описанный цикл повторяется в рамках одного шага по времени до тех пор, пока не будет достигнута сходимость между геомеханическим решателем и гидродинамическим симулятором. Для улучшения сходимости внутренних итераций можно зафиксировать пористость и проницаемость трещин (пористость матрицы при этом продолжает меняться), и производить их пересчет только в конце текущего шага по времени (Рисунок 7).



Рис. 7: Внутренние итерации в методе расщепления по физическим процессам для решения связанной гидрогеомеханической задачи о фильтрации жидкости сквозь пористую трещиноватую породу

Рассмотрим детальнее каждый шаг описанного алгоритма.

1. Начальные условия.

В начальный момент времени значения поровых давлений, пористости и проницаемости передаются из гидродинамической модели. Дополнительные

константы и коэффициенты, присутствующие в уравнениях, описывающих геомеханическую модель, передаются из результатов лабораторных испытаний на образцах керна. Множества трещин задаются в соответствии с результатами лабораторных испытаний, согласованно, для гидродинамической и геомеханической моделей. На их основе определяются начальные жесткости трещин и рассчитываются эффективные свойства для каждой из ячеек периодичности, соответствующей подобласти с заданными механическими свойствами матрицы и геометрией трещин. После чего рассчитывается начальное распределение напряжений и деформаций в рассматриваемой области на основе горного давления, соответствующего глубине залегания моделируемых пластов. Возможно также задание областей аномально высоких и аномально низких давлений, при помощи модификации начальных условий на определенных участках расчетной сетки.

1. Определение эффективных свойств пористой трещиноватой среды на ячейке периодичности.

Общая деформация ячейки периодичности состоит из деформации пористой среды (I) и деформации трещин (J), строчные индексы i и j соответствуют глобальной системе координат

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon^I_{ij} + \Delta\varepsilon^J_{ij}$$

Деформация каждого из континуумов рассчитывается при помощи закона Гука, здесь стоит напомнить, что переменная отвечающая за напряжения является функцией деформации и температуры, что позволяет учитывать пластические и термальные эффекты в породе

$$\Delta\varepsilon^I_{ij} = C^I_{ijkl}\Delta\sigma'_{kl}$$

$$\Delta\varepsilon^J_{ij} = C^J_{ijkl}\Delta\sigma'_{kl}$$

Здесь$\Delta\varepsilon^I_{ij}, \Delta\varepsilon^J_{ij}$ - тензоры деформаций в континуумах I и J, коэффициенты C^I_{ijkl}, C^J_{ijkl} – это коэффициенты комбинированной матрицы жесткости, $\Delta\sigma'_{kl}$ – комбинированный эффективный тензор напряжений, единый для обоих континуумов. Эффективный тензор напряжений учитывает НДС, а также поле давлений, создаваемых флюидом, насыщающим пористую среду и трещины (см. формулу (2)).

Помимо гидравлических эффектов, выраженных в виде поля давлений, матрица жесткости включает в себя геомеханические эффекты, связанные с деформацией трещин. Нормальные напряжения для одной трещины описываются в соответствии с гиперболической моделью [Bandis et al., 1983]

$$\sigma_n = \frac{\Delta v}{a - b\Delta v}$$

В этом выражении,Δv – представляет величину раскрытия трещины, коэффициенты a и b – константы определяемые из предельных случаев. Трещина

максимально закрывается при $\sigma_n \to \infty$, что соответствует

$$\Delta v_{\max} = \frac{a}{b}$$

При нулевом нормальном напряжении ($\sigma_n = 0$) коэффициент жесткости трещины в направлении нормали к её плоскости принимает асимптотическое значение

$$k_n = \frac{d\sigma_n}{d\Delta v} = \frac{1}{a\left(1 - \frac{b}{a}\Delta v\right)^2}$$

$$k_{ni} = k_n|_{\sigma_n \to 0} = \frac{1}{a}$$

Здесь k_{ni}– это изначальное значение коэффициента жёсткости.
В итоге получаем:

$$k_n = \frac{k_{ni}}{\left(1 - \frac{\Delta v}{\Delta v_{\max}}\right)^2}$$

Коэффициент жесткости определяет реакцию трещины на приложенное напряжение, что создаёт связь между трещиной и окружающим её материалом. Изменяя начальное значение этого коэффициента, можно моделировать трещины в различных материалах, используя различные значения k_{ni}, соответствующие этим материалам.

Коэффициенты жесткости эффективным образом входят в элементы матрицы жесткостиD_{IJ} для трещин. Согласно энергетическому методу Хуанга [Huang et al, 1995], матрица жесткости D связывает деформацию трещины $\Delta\delta_J^f$ с приложенной к плоскости трещины силой с учетом того, что трещина насыщена флюидом с давлением p

$$\Delta\delta_J^f = D_{JK}\Delta\Gamma'_K$$

$$\Delta\Gamma'_K = \Delta\Gamma_K - p$$

Сила, приложенная вдоль нормали к плоскости трещины, выражается через НДС на ее берегах. Стоит заметить, что деформация трещины представлена в локальной системе координат, обозначенной заглавными индексами J, K, тогда как выражение для силы представлено в глобальной системе координат

$$\Delta\Gamma_k = \Delta\sigma_{kl}n_l^f$$

В итоге получаем следующую связь между деформациями и напряжениями по берегам трещины [Bagheri & Settari 2005, 2008]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_n^e \\ \varepsilon_s^e \\ \varepsilon_t^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{WK_n^e} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & \frac{1}{WK_s^e} & 0 \\ D_{13} & 0 & \frac{1}{WK_t^e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_n' \\ \tau_s' \\ \tau_t' \end{Bmatrix}$$

Здесь K_n, K_s, K_t – текущие нормальная и тангенциальные жесткости трещин соответственно, W – текущее раскрытие трещины, D_{12} и D_{13} связывают сдвиговые напряжения и деформации по нормали к трещине.

Расчет эффективных механических свойств ячейки периодичности, содержащей пористую породу, пронизанную семействами трещин, присутствующих в контрольном объеме, производится на основе конечноэлементного решения серии задач об определении НДС внутри ячейки периодичности с заданными выше упругими модулями матрицы и трещин и прямого численного осреднения полученных результатов [Мясников А.В. и др., 2016].

1. Решение геомеханической задачи.

На основе рассчитанных на предыдущем шаге эффективных механических характеристик пористой трещиноватой среды и эффективного порового давления решается геомеханическая задача об определении НДС в области, занимаемой моделируемом пластом (2).

1. Пересчет параметров пористой трещиноватой среды.

На основе рассчитанного поля напряжений решается серия задач об определении НДС на ячейках периодичности в подобластях с граничными условиями, соответствующими локальному значению напряжений. По полученным нормальным напряжениям на берегах трещин определяются их новые величины раскрытий:

$$\sigma_n = \frac{\Delta v}{a - b\Delta v}$$

и новые значения жесткостей трещин:

$$k_n = \frac{k_{ni}}{\left(1 - \frac{\Delta v}{\Delta v_{\max}}\right)^2}$$

Далее пористость матрицы ϕ_m пересчитывается на основе полученных значений объемной деформации матрицы и пористости матрицы ϕ_i на предыдущем шаге:

$$\phi = \phi_i \left(1 + \varepsilon_v\right)$$

Объемная деформацияε_vопределяется на основе значений главных деформаций ε_1, ε_2 и ε_3

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \{\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\}$$

Здесь $\Delta V/V$– это соотношение изменения контрольного объема к его значению до деформации. В предположении малых деформаций, член, заключенный в фигурные скобки, стремится к нулю и объемную деформацию можно представить в простом виде

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Новая проницаемость породы вычисляется согласно уравнению Козени-Кармана [Costa, 2006], как функция пористости породы и геометрических характеристик каналов в пористой среде:

$$k = \frac{\phi}{f\tau\Sigma_p^2}$$

Здесь f– параметр формы пористых каналов, $\tau = (L_a/L)^2$– коэффициент извилистости пористых каналов, где L_a – это длина извилистого канала и L это длина контрольного объема, вдоль которого проходит извилистый канал,Σ_p – площадь удельной поверхности порового пространства.

Аналогично обновленная пористость трещин ϕ_fопределяется на основе изменения объема, занимаемого трещинами в ячейке периодичности (рассчитывается на основе деформаций берегов трещин), и изменения объема самой ячейки, рассчитываемого по формуле:
$BV = (1 + \varepsilon_v) * BV_i$, здесь BV, BV_i – текущий и начальный объемы ячейки периодичности соответственно.

Новая проницаемость трещин рассчитывается на основе полученных выше новых величин раскрытий трещин путем их подстановки в эмпирическую модель, описанную в [Gupta et al., 2001]:

$k_f = \lambda$*f*ν^3, здесь ν – раскрытие трещины, безразмерная константа λ изменяется от 0 до 1/12, приближаясь к верхнему предельному значению 1/12, когда система трещин представляет собой плоские параллельные каналы, а нижнее предельное значение - 0, когда в системе нет проточных каналов (закрытые трещины), f – плотность трещин, равная числу трещин в ячейке периодичности трещиноватой породы, деленную ее на характерный размер.

В упрощенном варианте возможно не решать задачу об определении НДС на каждой ячейке периодичности, а напрямую использовать локальные напряжения, полученные из решения геомеханической задачи в пласте, для расчета новых пористостей и проницаемостей в матрице и трещинах по формулам, приведенным выше. Однако в этом случае необходимо разделить суммарные напряжения на напряжения в матрице и трещинах для определения соответствующих деформаций. Напряжения в трещине рассчитываются по формуле

$\Gamma_n = \sigma_{nn}$-p^f, здесь Γ_n – нормальные напряжения, действующие на берегах трещины, σ_{nn} – проекция полных напряжений на нормаль к трещине, p^f –давление жидкости в трещине.

Для определения новой пористости трещин необходимо вначале определить объем, занимаемый ими. Объем в этом случае рассчитывается как произведение нового раскрытия на площадь поверхности трещин, которая, в свою очередь, определяется по приближенной формуле:

$A^f = BV/S$

Здесь BV – актуальный объем ячейки периодичности, S – расстояние между трещинами.

Аналогично напряжения в матрице находятся по формуле (2).

Рассчитанные пористости и проницаемости матрицы и трещин передаются далее в гидродинамический симулятор для определения новых полей давлений.

5. Численные исследования

Первостепенным численным исследованием, связанным с описанной выше методикой, является определение степени влияния на результат сопряжения алгоритма. Исходная методика [Bagheri & Setari] основывалась на сильно ограниченном аналитическом решении для определения эффективных упругих свойств и не претендовала на определение прочностных. Поэтому их метод сопряжения был итерационным и менять его на псевдоитерационные не было особой необходимости.

В нашем случае эффективные упруго-прочностные свойства определяются численно в каждой точке пространства в результате решения пространственной упругопластической задачи. Поэтому сокращение частоты обмена данными, то есть уменьшение степени сопряжения, является принципиально важным в данном подходе.

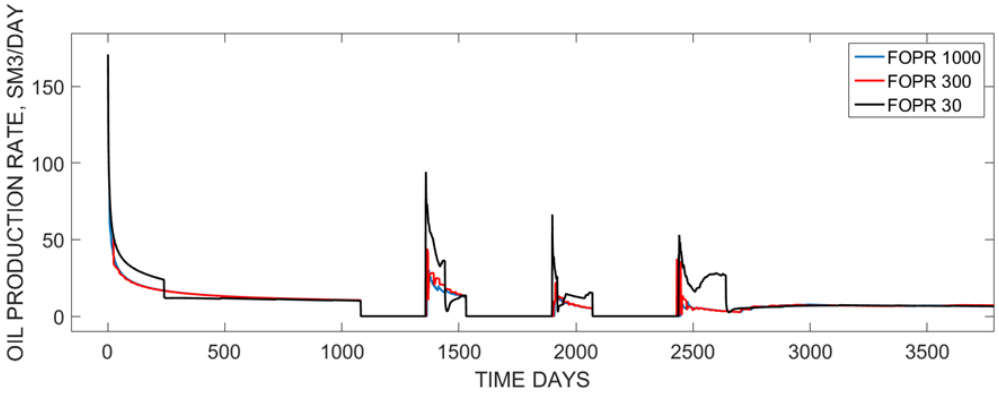


Рис. 8: График дневной нефтедобычи на скважине при циклической закачке CO_2. Коричневая кривая: 30 шагов процедуры сопряжения; красная кривая: 300 шагов процедуры сопряжения; синяя кривая: 1000 шагов процедуры сопряжения.

Для ответа на вопрос о влиянии степени сопряжения на итоговый результат было проведено моделирование процедуры циклической закачки CO_2 в формации Баженовской свиты (Пальяновский разрез). Для проведения расчетов были использованы технологические, геометрические и петрофизические параметры модели из ранее описанной работы [Popov et al, 2016]. Жесткость трещины определялась исходя из модуля Юнга ряда сланцевых пород: использовалось значение 8 ГПа, что является типовым для Баженовской свиты.

На рисунках 8 и 9 приведены результаты расчетов суточной и накопленной добычи нефти с различной степенью сопряжения. Как видно из гра-

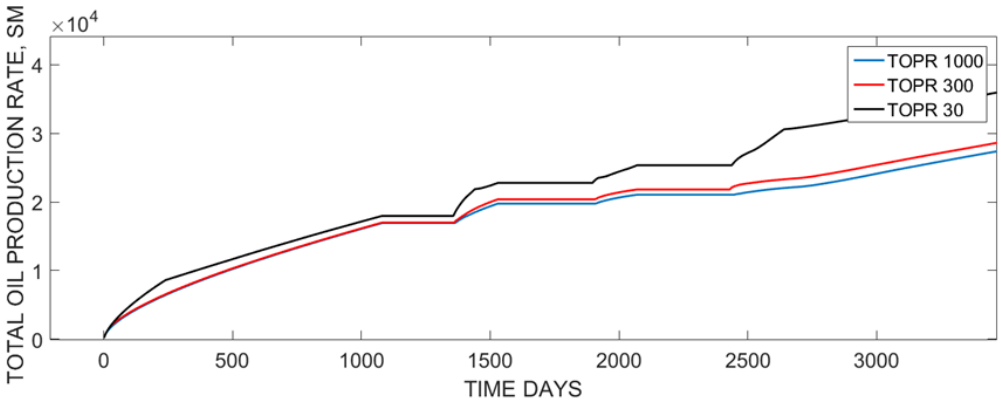


Рис. 9: График интегральной нефтедобычи на скважине при циклической закачке CO_2. Коричневая кривая: 30 шагов процедуры сопряжения; красная кривая: 300 шагов процедуры сопряжения; синяя кривая: 1000 шагов процедуры сопряжения.

фиков, при малом количестве шагов сопряжения гидродинамической и геомеханической модели (30 шагов на 20 лет расчета), результаты вычислений демонстрируют более позитивный прогноз эффективности технологии закачки CO_2. Однако при дальнейшем увеличении количества точек сопряжения (300 шагов), результаты демонстрируют снижение эффективности, как по накопленной, так и по суточной добыче. Стоит отметить, что при дальнейшем увеличении шагов, результаты существенно не меняются, что позволяет утверждать о стабильности полученного решения. Таким образом, существует минимальное необходимое число точек совмещения гидродинамической и геомеханической моделей, в рамках выше описанного алгоритма. Вопрос устойчивости решений при выбранной степени сопряжения на данный момент детально не изучен и является целью для дальнейших работ.

На рисунке 10 представлены гистограммы распределения проницаемостей на различных шагах совмещения гидродинамической и геомеханической моделей.

Как видно из Рисунка 10, учет геомеханических процессов в породе существенно сказывается на распределении проницаемостей и, соответственно, фильтрационных свойствах породы. Стоит отметить, что определяющую роль на изменение напряженного состояния пласта оказывает режим работы скважины. Так, если на графике 10.1 мы видим распределение проницаемости близкое к значению 0.17 (изначально оно полагалось равным 0.17 мД), то через 2 месяца работы скважины на истощение, гистограмма проницаемости стала смещаться в область минимальных значений. Противоположный эффект наблюдается на графике 10.5, который соответствует моменту конца третьего цикла закачки CO_2: проницаемости в ячейках смещаются к максимальным значениям. Интересный эффект наблюдается на рисунке 10.6, когда в процессе длительной работы скважины на истощение распределение стремится к равномерному. Это можно интерпретировать как появление

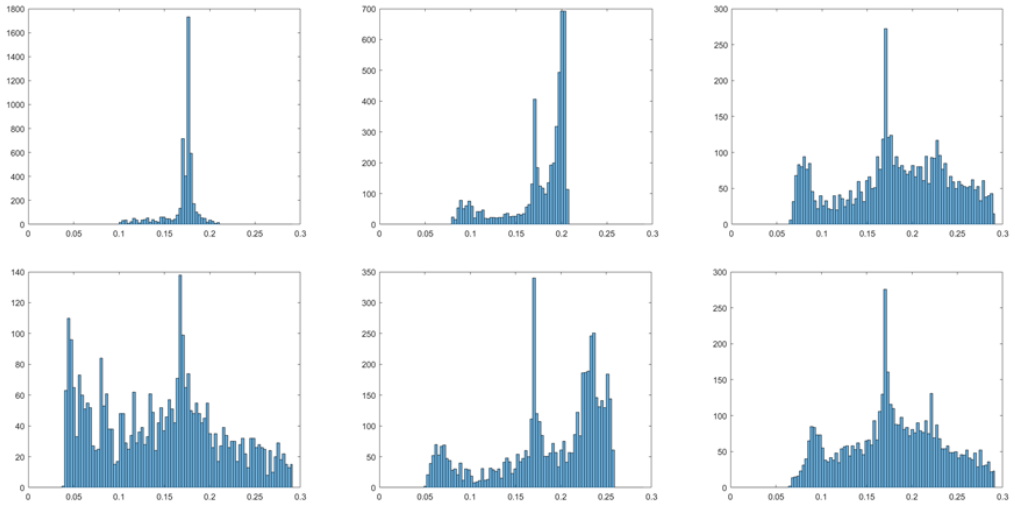


Рис. 10: Гистограммы распределений кубов проницаемостей на различных шагах совмещения для расчета прогноза добычи на 20 лет с 1000 шагами совмещения. Слева-направо, сверху-вниз: 1) первый цикл, 2) 10-ый цикл 3) 100-ый цикл 4) 200-ый цикл 5) 400-ый цикл 6) 800-ый цикл.

зон с сомкнувшимися трещинами в одном направлении и появление зон разряжения в противоположном. Данный вопрос стоит изучить в дальнейших работах.

6. Заключение

В статье представлена краткая классификация алгоритмов сопряжения гидродинамических и геомеханических симуляторов, позволяющих моделировать связанные процессы деформирования трещиноватых пород и фильтрации жидкости в них с учетом динамического изменения параметров среды: пористость, проницаемость, упругие модули породы и раскрытие трещин. Особое внимание уделено алгоритму внешнего итерационного и псевдоитерационного сопряжения гидродинамического симулятора с CAE Fidesys. В сочетании с методикой Багери-Сетари, такие алгоритмы сопряжения позволяют обойтись без явного вывода уравнения для пористости и определять в процессе расчета эффективные упруго-прочностные параметры среды, меняющиеся в процессе разработки. Проведены первичные исследования зависимости степени сопряжения на результаты расчетов. Оказалось, что для среды с параметрами Пальяновского месторождения Баженовской свиты степень сопряжения влияет на характеристики добычи, что может критически сказаться на эффективности применения новых технологий разработки нетрадиционных коллекторов.

Авторы выражают благодарность профессору МГУ имени М.В. Ломоносова В.Ан. Левину за внимание при подготовке данной статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вавакин Л.С., Салганик Р. Л. Об эффективных характеристиках неоднородных сред с изолированными неоднородностями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела 1975, № 3. С. 65-75.

2. Зингерман К. М., Левин В. А. Перераспределение конечных упругих деформации после образования включений. Приближенное аналитическое решение// Прикладная математика и механика 2009. Т. 73, выпуск 6. С. 983-1001.

3. Коноваленко Иг. С., Смолин А. Ю., Никонов А. Ю., Псахье С. Г. Многоуровневое моделирование деформации и разрушения хрупких пористых материалов на основе метода подвижных клеточных автоматов. Физическая мезомеханика. Выпуск№ 5 / том 12 / 2009.

4. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М., Мир, 1982.

5. Левин В. А., Зингерман К. М., Вершинин А. В. Геомеханическое моделирование роста трещин при конечных деформациях. Зоны предразрушения //Технологии сейсморазведки. — 2014. — № 4. — С. 34–39.

6. Левин В. А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. / Под ред. В.А Левина. – М., Физматлит, 2007. – 392 с.

7. Левин В.А. О концентрации напряжений вблизи отверстия, образованного в предварительно напряженном теле из вязкоупругого материала // ДАН СССР. 1988. Т. 299, № 5.

8. Левин В.А., Зингерман К.М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении // Доклады РАН. 2002. Т. 382, № 4. – С. 482-487.

9. Левин В. А., Вершинин А. В. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ Т.2 (Нелинейная вычислительная механика прочности. Цикл монографий в 5 томах под. ред. В.А. Левина). — ФИЗМАТЛИТ Москва, 2015. — С. 544.

10. Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М. Об оценке эффективных характеристик пористых материалов при больших деформациях // Вестник МГУ. Серия Математика, механика 1996, № 6. С. 48-50.

11. Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. — М.: Наука. Физматлит, 1999. — 224 с.

12. Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М. Об одном способе оценки эффективных характеристик пористых тел при конечных деформациях // Известия РАН Механика твердого тела. 1997. № 4. С 45-50.

13. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М., Наука, 1980. – 512 с.

14. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», Л1, 1977, 456 стр.

15. Мифтахов Р.Ф., Мясников А.В., Вершинин А.В., Чугунов С.С., Зингерман К.М.О построении гидрогеомеханических моделей сланцевых формаций // Технологии сейсморазведки. — 2015. — № 4. — С. 97–108.

16. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. — ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА URSS Москва, 2015. — С. 408.

17. Мясников А. В., Стефанов Ю. П., Стенин В. П., Бек Д.Д., Ахтямова А.И. О возможном решении задачи дизайна многостадийного ГРП в баженовских формациях // Недропользование XXI. — 2016. — № 6. — С. 62–79.

18. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов — М. Изд-во МГУ, 1984.-336 с.

19. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – Издательство Московского Университета, 1995.

20. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. — М.: Физматгиз, 1962. - 284 с.

21. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2 — М. Наука, 1994 —560 с.

22. Соннов Максим, Вершинин Анатолий, Жуков Владислав, Юрий Овчаренко, Сергей Лукин, Александра Глазырина. Геомеханическое моделирование околоскважинной зоны // Oil&Gas Journal Russia. — 2017. — № 1-2 [112]. — С. 72–76.

23. Фильштинский Л.А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий// Прикл. матем. и мех. 1964. Т. 28, № 3. С. 430-441.

24. Хакимова Л. А., Мясников А. В., Бондаренко Т. М., Попов Е.Ю., Черемисин А.Н., Карпов И.А. Валидация численной модели процесса закачки воздуха высокого давления на месторождении баженовской свиты на основе результатов физического моделирования // Нефтяное хозяйство. — 2017. — № 4. — С. 85–89.

25. Aboudi J. Micromechanics-based thermoviscoelastic constitutive equations for rubber-like matrix composites at finite strains // International Journal of Solids and Structures. 2004. V. 41. – P. 5611–5629.

26. Amadei, B., and Goodman, R.E. 1981. A 3-D constitutive relation for fractured rock masses. In Proceedings of the International Symposium on the Mechanical Behavior of Structured Media,Ottawa. pp. 249–268.

27. Andersen M.A. (1995). "Petroleum Research in North Sea Chalk". Stavanger, Norway: RF–Rogaland Research (1995): 142.

28. Bagheri, M. 2006. Modeling geomechanical effects on the flow properties of fractured reservoirs. Ph.D thesis, University of Calgary, Calgary, Alta.

29. Bagheri, M., Settari, A. Modeling of Geomechanics in Naturally Fractured Reservoirs – SPE-93083-MS, SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, USA, 2005.

30. Bagheri, M., Settari, A. Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // Can. Geotech. J. 43: 574–586 (2006) doi:10.1139/T06-024.

31. Bagheri, M., Settari, A. Modeling Coupled Fluid Flow and Deformation of Fractured Reservoirs Using Full Tensor Permeability // SPE paper 113319. Europec/EAGE Conference and Exhibition, 9-12 June 2008, Rome, Italy. DOI: http://dx.doi.org/10.2118/113319-MS.

32. Bandis, S.C., Lumsden, A.C., and Barton, N.R. 1983. Fundamentals of rock joint deformation. International Journal of Rock Mechanics and Mining Science and Geomechanics Abstracts, 20: 249–268.

33. Barton, N.R., and Choubey, V. 1977. The shear strength of rock joints in theory and practice. Rock Mechanics, 10: 1–54.

34. Bruhns O. T., Schiesse P. A continuum model of elastic-plastic materials with anisotropic damage by oriented microvoids // European Journal of Mechanics A: Solids. 1996. V. 15, 3. – P. 367–396.

35. Chen, H.-Y., & Teufel, L. W. (1997, January 1). Coupling Fluid-Flow and Geomechanics in Dual-Porosity Modeling of Naturally Fractured Reservoirs. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/38884-MS.

36. Costa A. Permeability-porosity relationship: A reexamination of the Kozeny-Carman equation based on a fractal pore-space geometry assumption // Geophysical Research Letters. 2006. 33. 2. C.

37. Daim F., Eymard R., Hilhorst D., Mainguy M., Masson R. A Preconditional Conjugate Gradient Based Algorithm for Coupling Geomechanical-Reservoir Simulations Rev. IFP. 2002. T. 57. – C.515-524.

38. Firoozabadi, A., Thomas, L. K. Sixth Comparative Solution Project: Dual Porosity Simulators Journal of Petroleum Technology. 1990. T. 42. – C.710 – 715.

39. Fish J., Fan R. Mathematical homogenization of nonperiodic heterogeneous media subjected to large deformation transient loading // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 76. – P. 1044–1064.

40. Fish J. Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. 2011. V. 55. – P. 215-231.

41. Goodman, R.E. 1976. Methods of geological engineering in discontinuous rocks. West Publication Company.

42. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1962. V. 10. – P. 335–342.

43. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiscale materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1963. V. 11. – P. 127–140.

44. Hashin. Z. The elastic moduli of heterogeneous materials. – J. Appl. Mech., 1962, v.29, p. 143.

45. Hernandez I., Numerical Reservoir Simulation Coupled with Geomechanics. 2011. SPE-152364-STU.

46. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1963. V. 11. – P. 357–372.

47. Hohe J., Becker W. A probabilistic approach to the numerical homogenization of irregular solid foams in the finite strain regime // International Journal of Solids and Structures. 2005. V. 42. – P. 3549–3569.

48. Huang, T. H., Chan, C. H., Yang, Z. Y. Elastic Moduli for Fractured Rock Mass Rock Mechanics and Rock Engineering. 1995. Т. 28, № 3. – С.135–144.

49. Jalali M., Dusseault M. Coupled Fluid-Flow and Geomechanics In Naturally Fractured Reservoirs ISRM-ARMS5-2008-153.

50. Kachanov M., Sevostianov I. On quantitative characterization of microstructures and effective properties // International Journal of Solids and Structures. 2005. V. 42. – P. 309-336.

51. Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of a solid with holes and cavities of various shapes// Appl. Mech. Reviews. 1994. V. 47, № 1, Part 2. P. S151-S174.

52. Khalili, N., Valliapan, S. Unified theory of flow and deformation in double porous media European Journal of Mechanics. 1996. Т. 15, № 2. – P. 321–336.

53. Levin V.A., Zingerman K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains// Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2003. Vol. 70, No. 6. – P. 809–816.

54. Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2000. V. 67, No. 4. – P. 667-670.

55. Lewis, R. W., Ghafouri, H. R. A novel FE DP model for multiphase flow through deformable fractured porous media Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1997. T. 21. – C.789–816.

56. Lewis, R. W., Pao, W. K. S. Numerical simulation of Three-Phase Flow in Deformning Fractured Reservoir Oil & Gas Science and Technology. 2002. T. 57, № 5. – C. 499–514.

57. Mauge C., Kachanov M. Effective elastic properties of an anisotropic material with arbitrary oriented interacting cracks // J. Mech. Phys. Solids. Vol. 42 №4. P. 561-584.

58. Mercier S., Molinari A., Berbenni S., Berveiller M. Comparison of different homogenization approaches for elastic–viscoplastic materials // Modeling and Simulation in Material Science and Engineering. 2012. V. 20. 024004.

59. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metallurgica. 1973. V. 21. – P. 571-574.

60. Myasnikov, A. V., Vershinin, A. V., & Sboychakov, A. M. A generalization of geomechanical model for naturally fractured reservoirs // Proceedings – SPE Russian Petroleum Technology Conference and Exhibition, 24-26 October 2016, Moscow, Russia. — Vol. 2. — Moscow, 2016. — P. 1050–1092.

61. Popov E., Myasnikov A., Cheremisin A., Miftakhov R., Stukachev V., Mukhametdinova A. Experimental and computational complex for determination of the effectiveness of cyclic carbon dioxide injection for tight oil reservoirs / Proceedings - SPE Russian Petroleum Technology Conference and Exhibition, 24-26 October 2016, Moscow, Russia. — Vol. 2. — Moscow, 2016. — P. 811–830.

62. Samier, P., DeGennaro, S. Practical iterative coupling of GeoMechanics with reservoir simulation, SPE 106188. 2007.

63. Smit R.J.M., Brekelmans W.A.M., Meijer H.E.H. Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1998. V. 155, 1–2. – P. 181–192.

64. Stefanov Y. P., Myasnikov A. V. Modeling of inelastic deformation around vertical and horizontal wells // AIP Conference Proceedings. — 2015. — Vol. 1683. — P. 020221–1 –020221–4.

65. Talbot D.R. S., Willis J. R. Bounds for the effective constitutive relation of a nonlinear composite // Proceedings of the Royal Society A. 2004. V. 460. – P. 2705–2723.

66. Tsukrov I., Kachanov M. Effective Moduli of an Anisotropic Material with Elliptical Holes of Arbitrary Orientational Distribution // International Journal of Solids and Structures. 2000. V. 37. – P. 5919-5941.

67. Tsukrov I., Novak J. Effective Elastic Properties of Solids with Defects of Irregular Shapes // International Journal of Solids and Structures. 2002. V. 39. – P. 1539-1555.

68. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Adv. Eng. Softw., V. 86, 2015. – P. 80–84.

69. Wilmanski, K.: Continuum Thermodynamics, Part I: Foundations, Wold Scientific, Singapore, 2008, ISBN 978-981-283-556-7.

70. Yarushina V. M., Bercovici D. and Oristaglio M. L., Rock deformation models and fluid leak-off in hydraulic fracturing. Geophysical Journal International, Volume 194, issue 3, pages 1514-1526. DOI: http://dx.doi.org/10.1093/gji/ggt199.

71. Yarushina, V. M., and Y. Y. Podladchikov (2015), (De)compaction of porous viscoelastoplastic media: Model formulation, J. Geophys. Res. Solid Earth, 120, doi:10.1002/2014JB011258.

72. Youshinaka, R., and Yamabe, T. 1986. Joint stiffness and the deformation behavior of discontinuous rock. International Journal of Rock Mechanics and Mining Science and Geomechanics Abstracts, 23(1): 19–28.

73. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. The finite element method. Vol. 1. The basis. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 707 pp.

74. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. The finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 479 pp.

75. Официальный сайт ООО “Фидесис” www.cae-fidesys.com

REFERENCES

1. Aboudi, J. 2004, "Micromechanics-based thermoviscoelastic constitutive equations for rubber-like matrix composites at finite strains" *International Journal of Solids and Structures*. Vol. 41, pp. 5611–5629

2. Amadei, B., Goodman, R.E. 1981, "A 3-D constitutive relation for fractured rock masses". *In Proceedings of the International Symposium on the Mechanical Behavior of Structured Media*, Ottawa. pp. 249–268

3. Andersen, M.A. 1995, "Petroleum Research in North Sea Chalk".*Rogaland Research*, Stavanger, Norway. RF, pp. 142

4. Bagheri, M. 2006, "Modeling geomechanical effects on the flow properties of fractured reservoirs".*Ph.D thesis, University of Calgary*, Calgary, Alta.

5. Bagheri, M., Settari, A. 2005, "Modeling of Geomechanics in Naturally Fractured Reservoirs",*In: SPE Reservoir Simulation Symposium*, Houston, USA, SPE-93083-MS

6. Bagheri, M., Settari, A. 2006, "Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling", *Can. Geotech. J*, no. 43, pp. 574–586. doi:10.1139/T06-024

7. Bagheri, M., Settari, A. 2008, "Modeling Coupled Fluid Flow and Deformation of Fractured Reservoirs Using Full Tensor Permeability", *In: EAGE Conference and Exhibition*, Rome, Italy, SPE paper 113319

8. Bandis, S.C., Lumsden, A.C., and Barton, N.R. 1983. "Fundamentals of rock joint deformation". *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science and Geomechanics Abstracts*, no. 20, pp. 249–268

9. Barton, N.R. & Choubey, V. 1977. "The shear strength of rock joints in theory and practice". *Rock Mechanics*, no. 10, pp. 1–54

10. Bruhns, O.T., Schiesse P. 1996, "A continuum model of elastic-plastic materials with anisotropic damage by oriented microvoids", *European Journal of Mechanics A: Solids*. no.3, Vol. 15, pp. 367–396

11. Chen, H.-Y. & Teufel, L. W. 1997, "Coupling Fluid-Flow and Geomechanics in Dual-Porosity Modeling of Naturally Fractured Reservoirs". *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/38884-MS

12. Christensen, R. 1982, Introduction to Composite Mechanics, Mir

13. Costa, A. 2006, "Permeability-porosity relationship: A reexamination of the Kozeny-Carman equation based on a fractal pore-space geometry assumption", *Geophysical Research Letters*, no. 2, Vol. 33

14. Daim, F., Eymard R., Hilhorst D., Mainguy M., Masson R. 2002, *A preconditional Conjugate Gradient Based Algorithm for Coupling Geomechanical-Reservoir Simulations Rev*, IFP, Vol. 57, pp. 515-524

15. Filshtinskij, L.A. 1964, "Napryazheniya i smeshcheniya v uprugoj ploskosti, oslablennoj dvoyakoperiodicheskoj sistemoj odinakovyh kruglyh otverstij", *Prikl. matem. i mekh.*, no.3, Vol. 28, pp. 430-441

16. Firoozabadi, A., Thomas, L. K. 1990, "Sixth Comparative Solution Project: Dual Porosity Simulators", *Journal of Petroleum Technology*, no. 42, pp. 710 – 715

17. Fish, J. 2011, "Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures", *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics,*. Vol. 55, pp. 215-231

18. Fish, J., Fan, R. 2008, "Mathematical homogenization of nonperiodic heterogeneous media subjected to large deformation transient loading", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 76, pp. 1044–1064

19. Goodman, R.E. 1976, *Methods of geological engineering in discontinuous rocks*, West Publication Company

20. Hashin, Z. 1962, "The elastic moduli of heterogeneous materials", *J. Appl. Mech.*, Vol. 29, pp. 143

21. Hashin, Z., Shtrikman, S. 1962, "On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Vol. 10, pp. 335–342

22. Hashin, Z., Shtrikman, S. 1963, "A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiscale materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 11, pp. 127–140

23. Hernandez, I. 2011, *"Numerical Reservoir Simulation Coupled with Geomechanics"*. SPE-152364-STU

24. Hill, R. 1963, "Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 11, pp. 357–372

25. Hohe, J., Becker, W. 2005, "A probabilistic approach to the numerical homogenization of irregular solid foams in the finite strain regime", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 3549–3569

26. Huang, T. H., Chan, C. H., Yang, Z. Y 1995, "Elastic Moduli for Fractured Rock Mass Rock", *Mechanics and Rock Engineering*, Vol. 28, no. 3, pp. 135–144

27. Jalali, M., Dusseault, M.2008, *"Coupled Fluid-Flow and Geomechanics In Naturally Fractured Reservoirs"*. ISRM-ARMS5-2008-153.

28. Kachanov, M., Sevostianov I. 2005, "On quantitative characterization of microstructures and effective properties", *International Journal of Solids and Structures*,Vol. 42, pp. 309-336

29. Kachanov, M., Tsukrov, I., Shafiro, B 1994, "Effective moduli of a solid with holes and cavities of various shapes", *Appl. Mech. Reviews*, Vol. 47, no. 1, issue 2, pp 151-174

30. Khakimova, L.A., Myasnikov A.V., Bondarenko T.M., Popov E.Yu., Cheremisin A.N., Karpov I.A. 2017, "Validaciya chislennoj modeli processa zakachki vozduha vysokogo davleniya na mestorozhdenii bazhenovskoj svity na osnove rezul'tatov fizicheskogo modelirovaniya", *Neftyanoe hozyajstvo*, no. 4.pp. 85-89

31. Khalili, N., Valliapan, S. 1996, "Unified theory of flow and deformation in double porous media", *European Journal of Mechanics*, Vol. 15, no 2, pp. 321–336.

32. Konovalenko, Ig.S., Smolin, A.Yu., Nikonov, A.Yu., Psakhier, S.G. 2009, "Multilevel modeling of deformation and destruction of brittle porous materials based on the method of mobile cellular automata". *Physical mesomechanics*. No. 5, Vol. 12

33. Levin V.A., Zingerman K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains// Trans. ASME. *Journal of Applied Mechanics*. 2003. Vol. 70, No. 6. – P. 809–816.

34. Levin, V.A. & Vershinin, A.V. 2015, "Nelinejnaja vychislitel'naja mehanika prochnosti. V 5 tomah. Tom 2. Chislennye metody. Parallel'nye vychislenija na JeVM" *["Computational structural mechanics. Volume 2. Numerical methods. Parallel computing"]*, FIZMATLIT Moskva

35. Levin, V.A. 1988, *"O koncentracii napryazhenij vblizi otverstiya, obrazovannogo v predvaritel'no napryazhennom tele iz vyazkouprugogo materiala"*, DAN SSSR. Vol. 299, no. 5

36. Levin, V.A. 1999, *"Mnogokratnoe nalozhenie bol'shih deformacij v uprugih i vyazkouprugih telah"*, Nauka, Fizmatlit, pp. 224

37. Levin, V.A., Kalinin, V.V., Zingerman, K.M., Vershinin, A.V. 2007, "Development of defects in finite deformations". *Computer and physical modeling*, Fizmatlit, pp. 392

38. Levin, V.A., Lokhin, V.V., Zingerman, K.M. 1996, *"Ob ocenke ehffektivnyh harakteristik poristyh materialov pri bolshih deformaciyah"*, Vestnik MGU, 1996, no. 6, Vol. 48-50

39. Levin, V.A., Lokhin, V.V., Zingerman, K.M. 1997, "Ob odnom sposobe ocenki ehffektivnyh harakteristik poristyh tel pri konechnyh deformaciyah", *Izvestiya RAN Mekhanika tverdogo tela*, no. 4, pp. 45-50

40. Levin, V.A., Lokhin, V.V., Zingerman, K.M. 2000, "Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation", Trans. ASME. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 67, no. 4, pp. 667-670

41. Levin, V.A., Zingerman, K.M. 2002, "O postroenii ehffektivnyh opredelyayushchih sootnoshenij dlya poristyh uprugih materialov pri konechnyh deformaciyah i ih nalozhenii", *Reports of the Russian Academy of Sciences*, Vol. 382, no. 4, pp. 482-487

42. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Vershinin, A.V. 2014, "Geomechanical modeling of crack growth for finite deformations. Zones of pre-destruction". *Technologies of seismic prospecting*, no. 4, pp. 34-39

43. Lewis, R.W., Ghafouri, H.R. 1997, "A novel FE DP model for multiphase flow through deformable fractured porous media", *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 21, pp. 789–816

44. Lewis, R.W., Pao, W.K. 2002, "Numerical simulation of Three-Phase Flow in Deforming", *Fractured Reservoir Oil & Gas Science and Technology*, Vol. 57, no. 5, pp. 499–514

45. Lurie, A.I. 1980, *Nonlinear theory of elasticity*, Nauka, Moscow, pp. 512

46. Marchuk, G.I. 1977, *Methods of computational mathematics*, Nauka, no.1, pp. 456

47. Mauge, C., Kachanov, M., "Effective elastic properties of an anisotropic material with arbitrary oriented interacting cracks", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 42, no. 4, pp. 561-584

48. Mercier, S., Molinari, A., Berbenni, S., Berveiller, M. 2012, "Comparison of different homogenization approaches for elastic–viscoplastic materials", *Modeling and Simulation in Material Science and Engineering*, Vol. 20.

49. Miftakhov, R.F., Myasnikov, A.V., Vershinin, A.V., Chugunov, S.S., Zingerman, K.M. 2015, "On the construction of hydrogeomechanical models of shale formations", *Technologies of seismic prospecting*, no. 4, pp. 97-108

50. Mori, T., Tanaka, K. 1973, "Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions", *Acta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 571-574

51. Morozov, E.M., Levin, V.A. & Vershinin, A.V. 2015 "Prochnostnoj analiz. Fidesys v rukah inzhenera" *["Strength analysis. Fidesys in the hands of an engineer"]*. URSS, p. 408

52. Myasnikov, A.V., Stefanov, Yu.P., Stenin, V.P., Beck, D.D., Akhtyamova, A.I. 2016, "O vozmozhnom reshenii zadachi dizajna mnogostadijnogo GRP v bazhenovskih formaciyah", *Nedropolzovanie XXI*, no. 6, pp. 62-79

53. Myasnikov, A.V., Vershinin, A.V., Sboychakov, A. M 2016, "A generalization of geomechanical model for naturally fractured reservoirs", *In: SPE Russian Petroleum Technology Conference and Exhibition*, Moscow, Vol. 2, pp. 1050–1092

54. Pobedrya, B.E. 1984, "Mekhanika kompozicionnyh materialov", *Izd-vo MGU*, Moscow, pp. 336

55. Pobedrya, B.E. 1995, *Chislennye metody v teorii uprugosti i plastichnosti*, Publishing house of Moscow University

56. Popov, E, Myasnikov, A., Cheremisin, A., Miftakhov, R., Stukachev, V., Mukhametdinova, A. 2016, "Experimental and computational complex for determination of the effectiveness of cyclic carbon dioxide injection for tight oil reservoirs", *In: SPE Russian Petroleum Technology Conference and Exhibition*, Moscow, Vol.2., pp. 811-830

57. Samier, P., DeGennaro, S. 2007, *"Practical iterative coupling of GeoMechanics with reservoir simulation"*. SPE 106188

58. Sedov, L.I. 1962, *Vvedenie v mekhaniku sploshnoj sredy*, Fizmatgiz, Moscow, pp. 284

59. Sedov, L.I. 1994, *Mekhanika sploshnoj sredy*, Nauka, Moscow, Vol. 2, pp. 560.

60. Smit, R.J.M., Brekelmans, W.A.M., Meijer, H.E.H 1998, "Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 155, pp. 181-192

61. Sonnov, M., Vershinin, A., Zhukov, V., Ovcharenko, Y., Lukin, S., Glazyrina, A. 2017, "Geomechanical modeling of the near wellbore zone", *Oil & Gas Journal Russia*, no. 1-2, Vol. 112, pp. 72-76.

62. Stefanov, Y.P., Myasnikov, A.V. 2015, "Modeling of inelastic deformation around vertical and horizontal wells", *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1683.pp. 020221-1–4

63. Talbot, D.R.S., Willis, J. R. 2004, "Bounds for the effective constitutive relation of a nonlinear composite", *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 460, pp. 2705-2723

64. Tsukrov, I., Kachanov, M 2000, "Effective Moduli of an Anisotropic Material with Elliptical Holes of Arbitrary Orientational Distribution", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37, pp. 5919-5941

65. Tsukrov, I., Novak, J. 2002, "Effective Elastic Properties of Solids with Defects of Irregular Shapes", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 1539-1555

66. Vavakin, LS, Salganik, R.L. 1975, "Ob effektivnyh harakteristikah neodnorodnyh sred s izolirovannymi neodnorodnostyami", *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, no. 3, pp. 65-75

67. Vershinin, A.V., Levin, V.A., Zingerman, K.M., Sboychakov, A.M., Yakovlev, M.Ya 2015, "Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for", *Adv. Eng. Softw.*, Vol. 86, pp. 80-84

68. Wilmanski, K. 2008, *Continuum Thermodynamics*, Part I: Foundations, Wold Scientific, Singapore, ISBN 978-981-283-556-7

69. Yarushina, V.M. & Podladchikov, Y. Y. (2015), "(De)compaction of porous viscoelastoplastic media: Model formulation", *J. Geophys. Res. Solid Earth*, pp. 120. doi:10.1002/2014JB011258

70. Yarushina, V.M., Bercovici, D., Oristaglio, M. L. 2013, "Rock deformation models and fluid leak-off in hydraulic fracturing", *Geophysical Journal International*, Vol. 194, issue 3, pp. 1514-1526. doi: 10.1093/gji/ggt199

71. Youshinaka, R. & Yamabe, T. 1986, "Joint stiffness and the deformation behavior of discontinuous rock", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science and Geomechanics Abstracts*, Vol. 23(1), pp. 19–28.

72. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L 2000, *The finite element method, Solid mechanics*. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, Vol. 2, pp. 479.

73. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L 2000, *The finite element method, The basis*. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, Vol. 1, pp. 707.

74. Zingerman, K.M., Levin, V.A. 2009, "Pereraspredelenie konechnyh uprugih deformacii posle obrazovaniya vklyuchenij. Priblizhennoe analiticheskoe reshenie", *Prikladnaya matematika i mekhanika*, Vol. 73, no 6., pp. 983-1001

75. Fidesys LLC official website http://www.cae-fidesys.com

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-187-200

ПАРАЛЛЕЛИЗМ В СЛОЖНЫХ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСАХ (ПОЧЕМУ СЛОЖНО СОЗДАВАТЬ ЭФФЕКТИВНЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ПАКЕТЫ)[1]

В. В. Воеводин[2] (г. Москва)

Аннотация

В работе рассмотрены виды параллелизма, применяемые в архитектурах современных компьютерных систем, и описаны способы их проявления в программах. Проанализированы шесть парадигм параллельного программирования, и показана связь парадигм с поколениями высокопроизводительных вычислительных систем. Рассмотрены методы описания и представления параллелизма с помощью разного рода моделей программ. Обсуждаются причины, определяющие сложности разработки эффективного программного обеспечения для параллельных вычислительных систем. Отмечается связь обсуждаемого материала с активно развиваемой Интернет-энциклопедией свойств и особенностей параллельных алгоритмов AlgoWiki.

Ключевые слова: Параллельные вычисления, архитектура компьютерных систем, технологии параллельного программирования, высокопроизводительные вычисления.

Библиография: 9 названий.

PARALLELISM IN LARGE SOFTWARE PACKAGES (WHY IS IT DIFFICULT TO CREATE EFFICIENT SOFTWARE)

V. V. Voevodin

Abstract

[1]Исследование выполнено в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00190).

[2]Воеводин Владимир Валентинович, член-корреспондент Российской академии наук, заместитель директора НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, voevodin@parallel.ru

In the article, types of parallelism used in architectures of modern computer systems are considered, and the ways of their manifestation in programs are described. Six paradigms of parallel programming are analyzed, and the relationship of paradigms to generations of high-performance computing systems is shown. Different methods of description and representation of parallelism based on various kinds of program models are considered. The reasons that determine challenges of developing efficient software packages for parallel computing systems are discussed. The connection between the material under discussion and the actively developed Internet encyclopedia of properties and features of AlgoWiki parallel algorithms is noted.

Keywords: Parallel computing, computer architecture, parallel computing technologies, high performance computing

Bibliography: 9 titles.

1. Введение

Разработка эффективного программного обеспечения всегда было дело не самым простым, но за последние годы ситуация значительно усложнилось. Создавая программу, разработчик всегда принимает компромиссное решение между эффективностью, переносимостью и продуктивностью, что определяет и технологию программирования, и стиль программирования, и всё остальное. Если нужно быстро получить работающий вариант программы, то акцент делается на продуктивности. Если важна работоспособность программы на многих архитектурах, то переносимость имеет явный приоритет. В реальности, в той или иной степени приходится учитывать все три параметра, что отражается на всем цикле разработки программного обеспечения.

Высокопроизводительные вычисления ориентированы, прежде всего, на минимизацию времени решения задач, а значит всё то, что определяет эффективность программ, должно рассматриваться особенно аккуратно. И в первую очередь – особенности архитектуры компьютеров: если они учтены, программа использует весь потенциал архитектуры, в противном случае эффективность снижается и, как следствие, падает производительность. Учесть нюансы конкретной архитектуры сложно, но вполне реалистично. Однако за последние 40 лет сменилось, по крайней мере, шесть поколений архитектур параллельных вычислительных систем, и каждая их них требовала как специальных свойств от алгоритмов, так и своего стиля написания программ. По существу, каждое новое поколение архитектуры компьютеров приводило к необходимости полного пересмотра программного обеспечения. Сделав эффективный пакет под одну архитектуру, уже через несколько лет в пакет нужно вносить серьезные изменения, иначе его конкурентоспособность будет потеряна. Компьютерный мир исключительно динамичен, и наибольшие сложности вызывают изменения, привносимые различными видами параллельной обработки данных. Из-за них приходится менять технологии про-

граммирования, детально исследовать используемые алгоритмы, проводить глубокий анализ динамических свойств программ.

Основная цель данной работы – проанализировать особенности параллелизма, свойственные вычислительным системам, и соотнести с возможными формами их отражения в программах. Это один их элементов суперкомпьютерного кодизайна, без учета которого невозможно проектировать эффективные параллельные приложения. В работе будут рассмотрены виды параллелизма, применяемые в архитектурах компьютерных систем (раздел 1), и способы их проявления в программах (раздел 2). Будут рассмотрены методы описания и представления параллелизма (раздел 3) с помощью разного рода моделей программ. В процессе изложения будет показана глубокая связь обсуждаемого материала с активно развиваемой энциклопедией свойств и особенностей параллельных алгоритмов AlgoWiki [1].

2. Параллелизм в компьютерных системах

Рассмотрим особенности организации шести поколений архитектур параллельных вычислительных систем. Это поможет не столько понять специфику поколения прошлых лет, сколько ощутить потенциал средств параллельной обработки, используемых при построении компьютерных систем, как современных, так и будущих.

Поколение векторно-конвейерных компьютеров начало активно развиваться с середины 70-х годов прошлого века, когда был выпущен суперкомпьютер Cray-1. Машины этого класса опирались на конвейерную обработку векторов данных, что поддерживалось векторными функциональными устройствами и векторными инструкциями в системе команд компьютеров. Самый эффективный способ выполнения программы – это векторизация, т.е. трансляция фрагментов исходного кода в векторные команды. Естественными кандидатами на векторизацию являются самые внутренние циклы. Необходимое условие векторизации состоит в отсутствии информационной зависимости между итерациями цикла, чтобы их можно было бы исполнять независимо друг от друга, в частности, параллельно. Полная векторизация программы подразумевает векторизацию всех самых внутренних циклов, однако на практике интерес представляет, конечно же, лишь вычислительное ядро: если оно векторизовано, то и выполнение программы будет эффективным. Еще один вид параллелизма в компьютере представлен независимыми функциональными устройствами, которые можно использовать в режиме зацепления наряду с операциями чтения/записи. В этом случае создаётся дополнительный уровень конвейерной обработки, что обеспечивает и дополнительное ускорение.

В 80-х годах стали появляться компьютеры, имеющие в своей архитектуре не один, а несколько независимых векторно-конвейерных процессоров: векторно-параллельные компьютеры. Типичные представители компьютеров этого класса того времени: Cray X-MP, Cray Y-MP, позднее Cray C90/T90. К

параллелизму рассмотренного выше векторно-конвейерного процессора добавился уровень нескольких процессоров (от 2 до 32), работающих независимо друг от друга. Требования на структуру программ стали иными. Для поддержки конвейерной обработки векторов, как и в предыдущем случае, нужен параллелизм внутренних циклов. Но теперь в программах нужно найти и описать дополнительный ресурс параллелизма, обеспечивающий независимую работу процессоров.

В начале 90-х годов широкое распространение получили массивно-параллельные компьютеры с распределенной памятью, объединяющие в своем составе тысячи относительно маломощных, но серийно производимых процессоров. Примером могут служить Intel Paragon XP/S (3680 процессоров Intel i860, 50MHz), IBM SP2 (512 процессоров IBM POWER2, 66MHz) или Cray T3D (1024 процессора DEC Alpha EV4, 149MHz). Для эффективного выполнения программ на подобной архитектуре требуются два действия. Во-первых, нужно выделить в алгоритмах и отразить в программах значительный ресурс параллелизма для обеспечения независимой работы большого числа процессоров. Во-вторых, нужно найти и описать такое распределение данных по процессорам, при котором обмен по коммуникационной сети в процессе выполнения программы был бы минимальным. Необходимость выполнения этих действий потребовала не только пересмотра алгоритмического багажа, новой технологии программирования (стандартом де-факто стала технология MPI [2]), но и полного переписывания программного обеспечения. Заметим, что к уровню параллелизма, отражающему множество независимых процессоров, добавляется и внутренний параллелизм самих процессоров. И если суперскалярность и VLIW отражают параллелизм на уровне команд, поддерживаются аппаратурой и/или компиляторами и, как правило, не требуют вмешательства программиста, то для полного использования потенциала конвейерности и параллельности необходимы явные изменения программы.

Чуть позже стали появлялись компьютеры с общей памятью. Общая память значительно упрощала взаимодействие между процессорами, значительно сокращая накладные расходы на обмен данными и синхронизацию. Появилась технология OpenMP [2], которая отражала идею работы параллельных программ в парадигме единого адресного пространства. А это значит – новая модель параллельной программы, новые средства и методы программирования, новые конструкции, и, следовательно, программы для компьютеров с общей памятью пришлось создавать заново.

В начале 2000-х годов появились компьютеры, соединившие особенности двух предыдущих классов: кластеры с распределенной памятью, построенные на основе узлов с общей памятью. Типичный пример: суперкомпьютер МГУ “Чебышев”, объединяющий 625 узлов, каждый их которых состоит из двух 4-ядерных процессоров. При программировании таких систем одну часть ресурса параллелизма нужно оставить для использования независимых узлов, а другую часть – под использование нескольких процессоров или ядер в рамках каждого узла. В параллельных приложениях первая часть

описывается, как правило, через MPI, и одновременно вторая с помощью OpenMP, и оба этих уровня параллелизма должны найти отражение в результирующей программе.

С 2007 года в архитектуре компьютеров начали активно использоваться ускорители: сначала графические процессоры от NVIDIA и AMD, затем ускорители типа Intel Xeon Phi. Но чтобы ускоритель был бы эффективно использован, следует учитывать, по крайне мере, три факта. Во-первых, ускоритель может работать параллельно с управляющим процессором (хостом). Во-вторых, для передачи данных на ускоритель требуется время. И, в-третьих, степень параллельности современных ускорителей очень велика: графические процессоры содержат сотни и тысячи ядер, да и общая степень параллельности процессоров семейства Phi составляет величину порядка 2000.

Сейчас ускорители стали обычным явлением, в том числе в составе больших кластеров. Например, в состав части узлов суперкомпьютера МГУ "Ломоносов" входят ускорители NVIDIA 2070/2090 [2], в состав каждого вычислительного узла суперкомпьютера МГУ "Ломоносов-2" входит один ускоритель NVIDIA Tesla K40, а все узлы китайского суперкомпьютера Tianhe-2 содержат по три ускорителя Intel Xeon Phi. Но что означает наличие ускорителей в архитектуре суперкомпьютеров с точки зрения создания приложений? Во-первых, в программе нужно выделить весомый ресурс параллелизма для использования множества вычислительных узлов. Во-вторых, дополнительный параллелизм должен быть в каждом параллельном MPI-процессе для использования нескольких ядер на узле. В-третьих, должен остаться значительный объём параллелизма, чтобы использовать возможности ускорителей на каждом узле. И все эти уровни должны быть представлены в программе, отражая сложную иерархичную модель параллелизма вычислительных систем.

Каждое из шести рассмотренных поколений привносило новые особенности в архитектуру компьютеров, что с необходимостью вызывало изменения в программах, часто кардинальные. В последние годы этот процесс идёт еще более активно: частота процессоров не растет, и эпоха бесплатного роста производительности завершилась. Это стараются компенсировать увеличением степени параллелизма в архитектуре, объединяя отработанные в предыдущих поколениях технологии с новыми идеями. Компьютеры, как и параллелизм в их архитектуре, становятся все более и более неоднородными, что опять требует и ревизии свойств алгоритмов, и пересмотра технологий создания программ. В самом деле, в современных компьютерах можно найти абсолютно все обсуждавшиеся выше элементы параллелизма, свойственные предыдущим поколениям параллельных вычислительных систем. Суперкомпьютер Tianhe-2 состоит из 16000 узлов, в каждом узле по два 12-ядерных процессора и по три ускорителя Intel Xeon Phi 31S1P. Появившаяся ещё на заре суперкомпьютерных технологий векторная обработка активно используется не только в больших машинах типа NEC SX-ACE и поддерживается процессорами Intel Xeon Phi, но также включена в архитектуру будущих

процессоров от ARM и Fujitsu. Практически все серверные процессоры являются суперскалярными, а многие графические процессоры опираются на идеи SIMD/VLIW обработки. Растет число ядер в процессорах и число узлов в кластерах. Компания Intel анонсировала интеграцию FPGA-сегментов с многоядерными процессорами. Компания NVIDIA объявила о выпуске процессора Volta: TESLA V100, который содержит 5120 CUDA-ядер и ориентирован на задачи глубокого обучения. Как должна быть написана программа, чтобы использовать всё это потенциальное богатство? Ясно, что в таких условиях поддерживать конкурентоспособность прикладных пакетов крайне не просто: приходится либо жертвовать эффективностью, либо вкладывать дополнительные средства и постоянно переписывать код, адаптируя его под бесконечные изменения в архитектуре вычислительных систем.

3. Параллелизм в программах

Теперь посмотрим на ту же проблему с другой стороны: как параллелизм может (или должен) быть представлен в программах, чтобы отражать все описанные выше особенности архитектуры? Проблема в том, что есть лишь несколько счастливых исключений, когда пользователям в этом плане ничего делать не нужно: суперскалярность и VLIW. Суперскалярность поддерживается на уровне аппаратуры, а планирование кода для использования VLIW-возможностей берёт на себя компилятор. В остальных случаях пользователи должны описать параллелизм явно. Безусловно, можно вызвать процедуру из уже оптимизированной библиотеки, которая скроет работу с параллелизмом. Однако для нас это сейчас принципиально ничего не меняет, поскольку проблема остаётся и просто перекладывается с пользователей на разработчиков библиотеки.

На самом верхнем уровне параллелизм программ можно разделить на два больших класса: конечный и массовый. Конечный параллелизм определяется независимостью какого-то числа фрагментов программы: операторов, линейных участков, циклов либо же просто каких-то ее больших или маленьких частей. Число независимых фрагментов определяется информационной структурой и не зависит от входных данных программы. Выразить конечный параллелизм в программах просто, например, с помощью директив OpenMP “#pragma omp sections”. Но в использовании данный вид параллелизма не удобен: ресурс параллелизма сильно ограничен и фиксирован, а вычислительная сложность, как и состав операций независимых частей, могут сильно различаться, привнося значительный дисбаланс в вычисления.

Массовый (итеративный) параллелизм определяется независимыми итерациями циклов. Поскольку число итераций циклов может быть значительным, отсюда и название. Это основной ресурс параллелизма, который позволят создавать масштабируемые программы. Вместе с этим, наличие массового параллелизма является всего лишь необходимым, но не достаточным условием для хорошей масштабируемости программ: многое зависит, в част-

ности, от особенностей взаимодействия программы с памятью.

Самый простой пример массового параллелизма в программе – это одиночный цикл с независимыми итерациями. Такой цикл может быть распараллелен, например, с помощью директив OpenMP “#pragma omp for”. С помощью последовательности эквивалентных преобразований текста программы (loop interchange, loop distribution, loop fusion) такой цикл во многих случаях можно сделать самым внутренним, и тогда возможна его векторизация.

Более сложный вариант представления массового параллелизма в программах задают многомерные вложенные циклические конструкции. В этом случае массовый параллелизм дополнительно делится на два класса: координатный и скошенный. Говорят, что гнездо циклов обладает координатным параллелизмом, если множества независимых итераций можно расположить на гиперплоскостях, перпендикулярных одной из координатных осей, использованных для описания пространства итераций данного гнезда. На рис.1 (а,б) показан фрагмент программы, являющийся двумерным гнездом циклов, и отвечающий фрагменту информационный граф. Данный фрагмент обладает координатным параллелизмом: необходимые гиперплоскости с независимыми итерациями перпендикулярны оси j.

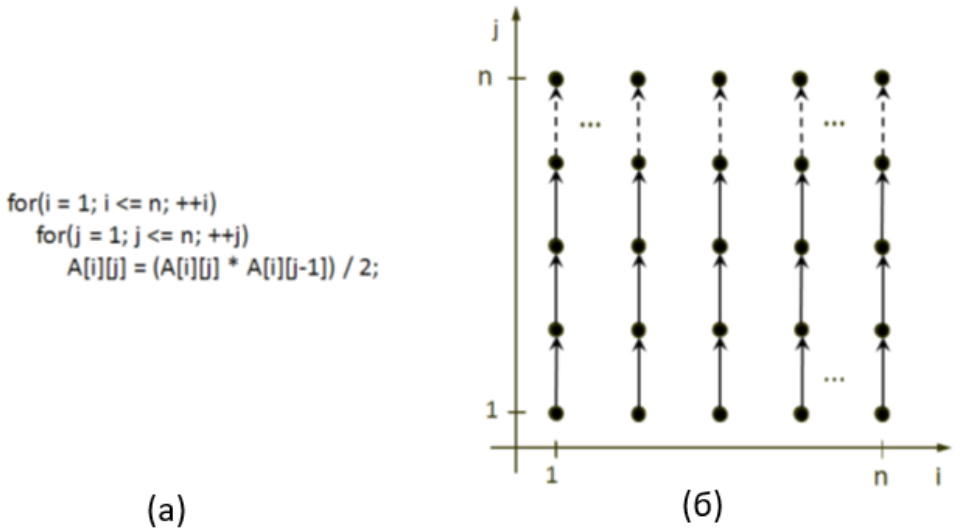


Рис. 1: Координатный массовый параллелизм в программах: исходный текст программы (а) и ее информационная структура (б)

Координатный параллелизм удобен на практике. Во-первых, для его выражения можно использовать директивы OpenMP типа “#pragma omp for”, которые достаточно расположить перед заголовком соответствующего цикла без необходимости дополнительного преобразования текста программы. Во-вторых, сбалансированность результирующей параллельной программы определяется сбалансированностью итераций цикла, что контролировать, как правило, проще.

В некоторых случаях программы обладают массовым параллелизмом, но гиперплоскостей с необходимыми свойствами нет. Типичный пример показан на рис. 2 (а,б,в): гиперплоскости с независимыми итерациями есть, но они расположены под углом ко всем координатным осям. Именно этот факт определил и специальное название для такого вида параллелизма – скошенный. В таком случае нельзя просто поставить аналогичную директиву OpenMP перед каким-либо циклом, да и для выражения такого параллелизма программу предварительно необходимо преобразовать, что не всегда тривиально. Это первый недостаток скошенного параллелизма. Вторая сложность связана с потенциально высокой несбалансированностью параллельной программы. Это более серьезная проблема, чем разовое преобразование текста, поскольку эта особенность определяет качество будущей параллельной программы. В самом деле, в приведенном примере (рис.2в) число независимых итераций в ярусах параллельно формы сначала постепенно растет от 1 до n, а затем снова уменьшается до 1.

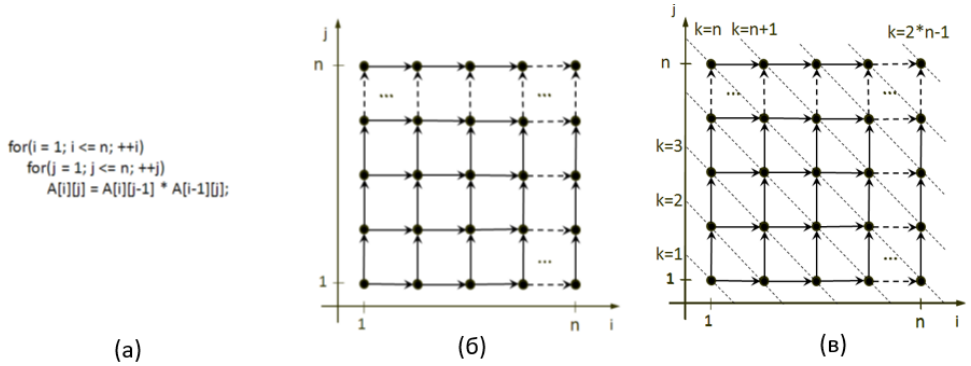


Рис. 2: Скошенный массовый параллелизм в программах: исходный текст программы (а), ее информационная структура (б) и гиперплоскости с независимыми операциями (в)

Скошенный параллелизм является частным случаем параллелизма, который может быть описан с помощью механизма разверток [4, 5]. В общем случае фронт волны, содержащий независимые операции, имеет форму более сложную, чем гиперплоскость, что не просто найти и описать. Вместе с этим, когда других вариантов для создания параллельной программы нет, то приходится использовать любую возможность, пусть даже сложную и неудобную.

Очень важное свойство параллелизма программ – его иерархичность. При этом иерархичность определяется как структурой программы в терминах процедур и функций, так и комбинацией конечного и массового параллелизма. Конечный параллелизм на внешнем уровне программы определяет несколько параллельных ветвей вычислений. Ветви могут содержать вызовы процедур, каждая из которых может отвечать фрагменту программы произвольной сложности. В ветвях может быть какое-то число одномерных или многомерных параллельных циклов, обладающих координатным или ско-

шенным параллелизмом. Каждая итерация таких циклов может быть единственным оператором присваивания, но может быть и сложным фрагментом программы, имеющим свой конечный параллелизм, где в параллельных ветвях снова могут содержаться циклы и так далее до отдельных операторов программы.

Подобная иерархическая структура параллелизма лежит в основе такого понятия, как потенциал (или ресурс) параллелизма программы. Определить и описать его не просто, поэтому на практике для получения эффективных параллельных программ, чаще всего, рассматривают лишь локальный параллелизм в пределах небольшого фрагмента. Иногда этого оказывается достаточным, но в некоторых случаях получить хорошую реализацию можно только после анализа всего ресурса параллелизма и последующего глубокого преобразования программы.

4. Представление потенциала параллелизма программ

Представление потенциального параллелизма в программах определяется упомянутой выше иерархичностью. Конечный и массовый параллелизм описывается разного рода информационными моделями программ. Для описания конечного параллелизма хорошо подходит информационный граф программы, в котором вершины отвечают фрагментам программы, а дуги – зависимости по данным, причем число вершин и дуг определяется лишь количеством операторов и никак не зависит от входных параметров программы. Для описания массового параллелизма необходимо обратиться к более общему понятию графа алгоритма (граф зависимостей по данным, data-flow граф). В отличие от информационного графа программы, где каждый оператор представлен лишь одной вершиной, в графе алгоритма для каждого срабатывания каждого оператора есть отдельная вершина. Исследование графа алгоритма позволяет выделить массовый параллелизм во всей его полноте, как координатный, так и скошенный.

Параллелизм программ (т.е., в конечном итоге, и параллелизм алгоритмов) нужно каким-то образом описать. Оснований для этого много, но основная причина – это обеспечение переносимости программ с одной архитектуры на другую с сохранением разумного уровня производительности. Если результаты анализа потенциала параллелизма отражены в программе, то становится понятным, на что можно рассчитывать при переносе программы на новую параллельную платформу.

Это сложный вопрос, который в полной мере не решен до сих пор. Но вопрос очень важный, который позволит накапливать и сохранять знание о параллельной структуре программ и алгоритмов. Частичное решение может быть получено с использованием традиционных технологий параллельного программирования, в которых предусмотрено выражение параллелизма. Возьмем, например, OpenMP: как конечный, так и координатный парал-

лелизм можно описать соответствующими директивами. Полного решения проблемы это не дает, но часть потенциала параллелизма уже становится понятной. Чтобы описать скошенный параллелизм, и тем самым потенциал параллелизма общего вида, требуется привлекать механизм разверток: эта техника в вычислительной практике пока не отработана, но она незаменима для обеспечения переносимости программ.

Обратим внимание на три дополнительных способа представления структуры программ, которые используются редко, но исключительно удачно показывают потенциал координатного параллелизма, наиболее востребованного на практике. Первый способ – это циклический профиль. Пример циклического профиля показан на рис.3. Это своего рода "разрез" программы (процедуры, фрагмента) или же взгляд "сбоку". Мы видим циклическую структуру данного фрагмента в целом, на которой одновременно выделены и все параллельные циклы (цифрами '1' и '2'). Подобная информация о структуре фрагмента исключительно важна на практике, поскольку, в частности, для распараллеливания можно сразу воспользоваться параллельностью внешнего цикла '1'. Вместе с этим, для векторизации нужен другой ресурс параллельности, выраженный в данном примере циклами с пометкой '2'.



Рис. 3: Циклический профиль программы, содержащий информацию о параллельной структуре циклов

Второй способ, учитывая структуру вызовов процедур, расширяет возможности циклического профиля по описанию координатного параллелизма на всю программу. Это циклический профиль путей программы. Данная конструкция исключительно удобна когда нужно быстро оценить как циклическую структуру всей программы в целом, так и ее циклическую сложность (см. рис.4). Для более точного анализа потенциала программы важно знать не только глубину вложенности циклических конструкций в процедурах, но и уметь оценивать общее число объемлющих циклов, в телах которых вызывалась каждая процедура.

$$10 : (GCMA^{3} \xrightarrow{2} DYNIMP^{1} \xrightarrow{1} HHSOLV^{3} \xrightarrow{1} GAUSPH^{2} \xrightarrow{1} SINGL^{5}),$$
$$8 : (GCMA^{3} \xrightarrow{2} RADFL\,2^{4} \xrightarrow{1} RADFSW^{3} \xrightarrow{1} VARP\,8^{4}) \xrightarrow{2} DELED\,3^{1},$$
$$7 : (GCMA^{3} \xrightarrow{2} DYNIMP^{1} \xrightarrow{1} DYNADD^{1} \xrightarrow{0} MMATR\,2^{4}).$$

Рис. 4: Циклический профиль путей программы

Конструкция вида $X^{\alpha} \xrightarrow{\gamma} Y^{\beta}$, используемая на рис.4 в качестве основного элемента каждого пути, означает следующее: процедура X вызывает процедуру Y в γ-мерном цикле, причем максимальная глубина вложенности циклов в самих процедурах X и Y равна α и β соответственно. Если

X содержит несколько вызовов Y, то на месте γ будет указано максимальное значение. Для локализации вычислительного ядра программы интерес представляет как значение α, так и $\gamma + \beta$. Самая левая колонка циклического профиля на рис.4 показывает максимальную суммарную вложенность циклов по каждому пути, а скобками отмечена та цепочка пути, на которой достигается указанное значение. Разметив подобным образом все пути графа вызовов, легко выделить наиболее "весомые которые должны стать кандидатами для детального анализа.

Третий способ: расширенный граф вызовов, является объединением циклического профиля, циклического профиля путей программы и графа вызовов. В каждую вершину графа вызовов добавляется циклический профиль соответствующей процедуры с указанием параллельности циклов профиля. Дуга, связывающая вершины A и B, выходит из того места циклического профиля вершины A, где расположен вызов процедуры B. Если вызовов несколько, то каждому отвечает своя дуга. Расширенный граф вызовов построить и изобразить не так просто, но он исключительно информативен, делая понятным ресурс координатного параллелизма всей программы.

Описанные в данном разделе методы очень хорошо подходят для представления иерархического параллелизма программ. В самом деле, комбинируя информационные модели (граф алгоритма, информационный граф программы) с описательными возможностями циклических профилей и графа вызовов, мы получаем полное описание ресурса координатного параллелизма программ. Важно и то, что составляя модельные программы, реализующие те или иные алгоритмы, мы одновременно получаем и способ описания потенциального параллелизма алгоритмов.

5. Заключение

Суммируя все описанные выше факты, становится понятным, почему столь сложно создавать эффективные прикладные пакеты [6]. Найденный вариант построения параллельной программы для одной платформы, скорее всего, не будет столь же хорошо отражать свойства других платформ, а, значит, не будет и должного уровня эффективности. Отсюда необходимость постоянной модификации прикладных пакетов и все новые и новые затраты на их разработку и развитие. В идеале, программа должна сама автоматически настраиваться на особенности каждой платформы, для чего она должна не только обладать всеми только что описанными сведениями, но и уметь модифицировать свою структуру. Пока это фантастика. В некоторых случаях программы могут “подстраиваться” под структуру иерархии памяти, меняя размеры рабочих массивов (так делается, например, в пакете ATLAS [7]), или выбирать наиболее подходящий код из нескольких заранее скомпилированных вариантов (многовариантная генерация кода), но не более. Принятие более сложных решений – это дело будущего, но к нему нужно двигаться, выделяя, описывая и накапливая ключевые особенности алгорит-

мов, программ и архитектур. В противном случае мы обрекаем себя на вечное переделывание программ под постоянно меняющиеся вычислительные системы. Отчасти на решение этой же задачи направлена и энциклопедия свойств и особенностей алгоритмов AlgoWiki, где основной акцент делается на глубоком исследовании и описании свойств алгоритмов с учетом специфики различных вычислительных платформ.

Поводом для написания данной статьи послужил юбилей Владимира Анатольевича Левина – основного идеолога известного пакета Fidesys [8]. Пакет позволяет осуществить полный цикл прочностного инженерного анализа, предоставляя исключительно развитую функциональность. Существуя в течение уже многих лет, пакет в полной мере отражает все те сложности, с которыми сталкиваются разработчики сложного вычислительно ёмкого программного обеспечения из-за постоянно меняющегося компьютерного мира [9]. И то, что Fidesys удается оставаться успешным проектом и много лет быть востребованным индустриальным и академическим вычислительным сообществом, лишний раз говорит об исключительно высоком уровне команды разработчиков.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Antonov, V. Voevodin, and J. Dongarra, “Algowiki: an Open encyclopedia of parallel algorithmic features"// Journal of Supercomputing Frontiers and Innovations, vol. 2, no. 1, 2015, pp. 4-18.

2. А.С.Антонов, “Технологии параллельного программирования MPI и OpenMP”. Изд-во Московского университета, М., 2012, 344с.

3. V. Sadovnichy, A. Tikhonravov, Vl. Voevodin, and V. Opanasenko "Lomonosov": Supercomputing at Moscow State University. In Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale (Chapman & Hall/CRC Computational Science), pp.283-307, Boca Raton, USA, CRC Press, 2013.

4. V. Voevodin, Mathematical Foundations of Parallel Computing. World Scientific Publishing Co., Series in Computer Science, 1992, vol. 33, 364pp.

5. V. Voevodin, Vl. Voevodin, Parallel Computing. BHV-Petersburg, St. Petersburg, 2004, 608pp.

6. V. Voevodin, “Parallel Algorithms: Theory, Practice and Education”// Proceedings of the Joint Workshop on Sustained Simulation Performance, University of Stuttgart (HLRS) and Tohoku University, Springer International Publishing, 2016, pp. 3-10.

7. ATLAS installation guide. [Online] Available: http://math-atlas.sourceforge.net/atlas_install/

8. Fidesys – программный пакет для инженерного анализа. [Online] Available: https://cae-fidesys.com/ru

9. Левин В. А., Вершинин А. В., Сабитов Д. И. и др. Использование суперкомпьютерных технологий в задачах прочности. Пакет Fidesys // Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности. — 2-е изд. — М.: МГУ, 2010, с.161-166.

REFERENCES

1. Antonov, A.S., Voevodin, V.V. & Dongarra, J. 2015, “Algowiki: an Open encyclopedia of parallel algorithmic features *Journal of Supercomputing Frontiers and Innovations*, vol. 2, no. 1, pp. 4-18.

2. Antonov, A 2012, *Tehnologii parallel'nogo programmirovanija MPI i OpenMP [Parallel Programming Technologies MPI and OpenMP]*. Izdatelskij Dom MGU, Moscow, 344p.

3. Sadovnichy, V., Tikhonravov, A., Voevodin, V. & Opanasenko V. 2013, "Lomonosov": Supercomputing at Moscow State University. In Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale” (Chapman & Hall/CRC Computational Science), CRC Press, Boca Raton, USA, pp. 283-307.

4. Voevodin, V. 1992 Mathematical Foundations of Parallel Computing (Series in Computer Science), World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd., Singapure, vol. 33, 364p.

5. Voevodin, V.V., Voevodin, Vl.V. 2004, Parallel'nye vychislenija [Parallel computing], BHV-Peterburg, St. Petersburg, 608p.

6. Voevodin V. “Parallel Algorithms: Theory, Practice and Education”, (Proceedings of the Joint Workshop on Sustained Simulation Performance, University of Stuttgart (HLRS) and Tohoku University), Springer International Publishing, 2016, pp. 3-10.

7. ATLAS installation guide (2016), Available at: http://math-atlas.sourceforge.net/atlas_install/ (accessed 5 December 2017).

8. Fidesys – software package for engineering analysis (2017), Available at: https://cae-fidesys.com/ru/download (accessed 5 December 2017).

9. Levin, V.A., Vershinin A.V., Sabitov D.I., Nikiforov I.V. & Pendjur D.A. 2010 “Using a supercomputer technologies in strength problems. Fidesys Package”, Supercomputer technologies in science, education and industry, Izdatelskij Dom MGU, Moscow, vol.2., pp.161-166.

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-201-208

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ТЕНЗОРНО НЕЛИНЕЙНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ

Д. В. Георгиевский[1] (Москва)

Аннотация

Аппарат тензорно нелинейных функций занимает важное место в нелинейной механике сплошной среды, причём как в гидродинамических приложениях, так и в задачах механики деформируемого твёрдого тела, прочности и разрушения [1]. Тензорно нелинейные определяющие соотношения моделируют так называемые ортогональные эффекты напряжённо-деформированного состояния (см. в [2] обзор по данному вопросу), характеризуемые неколлинеарностью девиаторов напряжений и соответствующего кинематического тензора. Такой неколлинеарностью могут быть объяснены эффект Пойнтинга и рэтчет [3–9]. Как и определению параметров основного течения, большое внимание в литературе уделяется устойчивости такого течения относительно малых возмущений, принадлежащих тому или иному классу. Постановка краевой задачи в возмущениях предполагает линеаризацию всех уравнений системы вблизи основного процесса, в том числе и определяющих соотношений. Наряду с общим видом тензорно нелинейных определяющих соотношений расссмотрены тензорно линейные изотропные среды, тензорно линейные потенциальные среды, тело Бингама (двухконстантная вязкопластическая модель), течение Сен-Венана (идеально жёсткопластическая модель) и ньютоновская вязкая жидкость.

Ключевые слова: Определяющие соотношения, линеаризация, тензорно нелинейные функции, напряжение, скорость деформации, потенциальные среды, тело Бингама, ньютоновская вязкая жидкость.

Библиография: 15 названий.

[1]Георгиевский Дмитрий Владимирович, профессор РАН, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, georgiev@mech.math.msu.su

LINEARIZATION OF TENSOR NONLINEAR CONSTITUTIVE RELATIONS IN THE PROBLEMS ON STABILITY OF FLOWS

D. V. Georgievskii

Abstract

The apparatus of tensor nonlinear functions occupies an important place in the nonlinear mechanics of a continuous medium, both in hydrodynamic applications and in problems of mechanics of a deformed solid, strength and fracture [1]. Tensor nonlinear defining correlations simulate the so-called orthogonal effects of the stress-strain state (see in [2] a review on the issue), characterized by noncollinearity of voltage deviators and the corresponding kinematic tensor. Such a noncollinearity can explain the Poynting effect and ratchet [3–9]. The scientific works pays much attention both to the definition of the main flow parameters and to the stability of such a flow with respect to small perturbations belonging to a particular class. The statement of the boundary value problem in perturbations assumes the linearization of all the system equations near the main process, including the defining correlations. Along with the general form of the tensor-nonlinear determining relations, the paper considers tensor-linear isotropic media, tensor linear potential media, the Bingham body (a two-constant viscoplastic model), the Saint-Venant flow (ideally rigid-plastic model), and the Newtonian fluid.

Keywords: Constitutive relations, linearization, tensor nonlinear functions, stress, strain rate, potential media, Bingham solid, Newtonian viscous fluid

Bibliography: 15 titles.

1. Тензорно нелинейные функции в теории определяющих соотношений

Рассмотрим класс несжимаемых сплошных сред с определяющими соотношениями, задаваемыми нелинейными изотропными тензорными функциями

$$\underset{\sim}{s} = A_1(I_{v2}, I_{v3})\underset{\sim}{v} + A_2(I_{v2}, I_{v3})\Big(\underset{\sim}{v}^2 - \frac{1}{3}I_{v2}^2\,\underset{\sim}{I}\Big) \tag{1}$$

$$\underset{\sim}{v} = B_1(I_{s2}, I_{s3})\underset{\sim}{s} + B_2(I_{s2}, I_{s3})\Big(\underset{\sim}{s}^2 - \frac{1}{3}I_{s2}^2\,\underset{\sim}{I}\Big) \tag{2}$$

$$I_{v2} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{v}^2)}, \quad I_{v3} = \sqrt[3]{\mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{v}^3)}, \quad I_{s2} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{s}^2)}, \quad I_{s3} = \sqrt[3]{\mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{s}^3)} \tag{3}$$

где $\underset{\sim}{I}$ — единичный тензор второго ранга; $\underset{\sim}{s}(\mathbf{x}, t)$ — девиатор тензора напряжений $\underset{\sim}{\sigma} = -p\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{s}$ в точке $\mathbf{x} \in R^3$ в момент времени t; $\underset{\sim}{v}(\mathbf{x}, t)$ — тензор скоростей деформаций в той же точке $\mathbf{x}$ в тот же момент времени; $p(\mathbf{x}, t)$ —

давление; I_{v2}, I_{v3}, I_{s2}, I_{s3} — квадратичные и кубические инварианты тензоров $\underset{\sim}{v}$ и $\underset{\sim}{s}$ ($\operatorname{tr}\underset{\sim}{v}=0$ в силу предполагаемой несжимаемости, $\operatorname{tr}\underset{\sim}{s}=0$ в силу того, что $\underset{\sim}{s}$ является девиатором); A_1, A_2, B_1, B_2 — материальные функции пар инвариантов, характеризующие данную среду в классе определяющих соотношений (1), (2).

Из теоремы Гамильтона – Кели следует [10, 11], что взаимообратные квадратичные тензор-функции (1) и (2) в трёхмерном пространстве являются наиболее общей полиномиальной формой (вблизи нуля) связи двух симметричных девиаторов второго ранга. Вычисляя из (1) $\operatorname{tr}(\underset{\sim}{s}^2)$ и $\operatorname{tr}(\underset{\sim}{s}^3)$ и опять же используя теорему Гамильтона – Кели, можно прийти к связям пар инвариантов I_{s2}, I_{s3} и I_{v2}, I_{v3}:

$$I_{s2}^2 = I_{v2}^2 A_1^2 + 2I_{v3}^3 A_1 A_2 + \frac{1}{6} I_{v2}^4 A_2^2 \tag{4}$$

$$I_{s3}^3 = I_{v3}^3 A_1^3 + \frac{1}{2} I_{v2}^4 A_1^2 A_2 + \frac{1}{2} I_{v2}^2 I_{v3}^3 A_1 A_2^2 - \frac{1}{36} I_{v2}^6 A_2^3 + \frac{1}{3} I_{v3}^6 A_2^3 \tag{5}$$

называемым в механике сплошной среды скалярными определяющими соотношениями. Большое внимание в экспериментальной механике [12] уделяется установочным экспериментам для нахождения двух материальных функций $A_1(I_{v2}, I_{v3})$ и $A_2(I_{v2}, I_{v3})$. Литература по этому вопросу и описание некоторых новых таких экспериментов приводятся в [13, 14].

По известным функциям A_1 и A_2 можно вычислить и B_1, B_2:

$$B_1 = \frac{-6A_1^2 + I_{v2}^2 A_2^2}{-6A_1^3 + 3I_{v2}^2 A_1 A_2^2 + 2I_{v3}^3 A_2^3}, \quad B_2 = \frac{6A_2}{-6A_1^3 + 3I_{v2}^2 A_1 A_2^2 + 2I_{v3}^3 A_2^3} \tag{6}$$

Для существования скалярного потенциала тензор-функции (1), или так называемого “вязкого потенциала”, необходимо, чтобы материальные функции удовлетворяли условию потенциальности [11]

$$I_{v2}\frac{\partial A_1}{\partial I_{v3}} = I_{v3}^2 \frac{\partial A_2}{\partial I_{v2}} \tag{7}$$

2. Малые возмущения и линеаризация определяющих соотношений.

Пусть заданный невозмущённый процесс деформирования, или невозмущённое течение, характеризуется кинематическим тензором $\underset{\sim}{v}^\circ(\mathbf{x}, t)$, а также тензором напряжений $\underset{\sim}{\sigma}^\circ = -p^\circ(\mathbf{x}, t)\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{s}^\circ(\mathbf{x}, t)$, причём тензоры $\underset{\sim}{s}^\circ$ и $\underset{\sim}{v}^\circ$ связаны определяющими соотношениями (1). Наряду с этим процессом будем рассматривать возмущённый процесс (возмущённое течение), в котором

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}^\circ + \delta\underset{\sim}{v}(\mathbf{x}, t), \quad \underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{s}^\circ + \delta\underset{\sim}{s}(\mathbf{x}, t), \quad p = p^\circ + \delta p(\mathbf{x}, t) \tag{8}$$

где $\delta\underset{\sim}{v}$, $\delta\underset{\sim}{s}$ и δp — малые по некоторой мере возмущения.

Положим, что *a)* $\operatorname{tr}\delta\underset{\sim}{v}=0$, т. е. возмущённое течение, по-прежнему, несжимаемо; *b)* свойства материала при переходе от невозмущённого состояния в возмущённое остаются неизменными, т. е. материальные функции A_1 и A_2 как функции инвариантов I_{v2} и I_{v3} не меняются.

Тогда линеаризация соотношения (1) вблизи состояния, помечаемого верхним индексом "$\circ$", приводит к следующей тензорно линейной связи между $\delta\underset{\sim}{s}$ и $\delta\underset{\sim}{v}$:

$$\begin{aligned}\delta\underset{\sim}{s}=\underset{\sim}{v}^{\circ}\delta A_1+A_1^{\circ}\,\delta\underset{\sim}{v}+\left(\underset{\sim}{v}^{\circ 2}-\frac{1}{3}I_{v2}^{\circ\,2}\underset{\sim}{I}\right)\delta A_2+\\ +A_2^{\circ}\left(\underset{\sim}{v}^{\circ}\cdot\delta\underset{\sim}{v}+\delta\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v}^{\circ}-\frac{2}{3}\left(\underset{\sim}{v}^{\circ}:\delta\underset{\sim}{v}\right)\underset{\sim}{I}\right)\end{aligned}\tag{9}$$

$$A_{\alpha}^{\circ}=A_{\alpha}(0,I_{v2}^{\circ},I_{v3}^{\circ}),\quad \alpha=1,2\tag{10}$$

$$\delta A_{\alpha}=\left(\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial I_{v2}}\right)^{\circ}\frac{\underset{\sim}{v}^{\circ}:\delta\underset{\sim}{v}}{I_{v2}^{\circ}}+\left(\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial I_{v3}}\right)^{\circ}\frac{\underset{\sim}{v}^{\circ 2}:\delta\underset{\sim}{v}}{I_{v3}^{\circ\,2}}\tag{11}$$

Соотношения (9) в безындексной записи можно представить в декартовых компонентах в наиболее общем виде линейной связи двух тензоров второго ранга

$$\delta s_{ij}=D_{ijkl}^{\circ}\delta v_{kl}\tag{12}$$

с помощью тензора четвёртого ранга D_{ijkl}°, зависящего лишь от параметров основного течения:

$$\begin{aligned}D_{ijkl}^{\circ}=A_1^{\circ}\Delta_{ijkl}+A_2^{\circ}\left(v_{ik}^{\circ}\delta_{jl}+v_{jk}^{\circ}\delta_{il}-\frac{2}{3}\,v_{kl}^{\circ}\delta_{ij}\right)+\\ +v_{ij}^{\circ}\left[\frac{1}{I_{v2}^{\circ}}\left(\frac{\partial A_1}{\partial I_{v2}}\right)^{\circ}v_{kl}^{\circ}+\frac{1}{I_{v3}^{\circ 2}}\left(\frac{\partial A_1}{\partial I_{v3}}\right)^{\circ}v_{km}^{\circ}v_{ml}^{\circ}\right]+\\ +\left(v_{im}^{\circ}v_{mj}^{\circ}-\frac{1}{3}\,I_{v2}^{\circ 2}\delta_{ij}\right)\left[\frac{1}{I_{v2}^{\circ}}\left(\frac{\partial A_2}{\partial I_{v2}}\right)^{\circ}v_{kl}^{\circ}+\frac{1}{I_{v3}^{\circ 2}}\left(\frac{\partial A_2}{\partial I_{v3}}\right)^{\circ}v_{km}^{\circ}v_{ml}^{\circ}\right]\end{aligned}\tag{13}$$

Здесь δ_{ij} и $\Delta_{ijkl}=(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})/2$ — компоненты единичных тензоров второго и четвёртого рангов.

Соотношения (12) представляют собой хоть и линейную, но уже анизотропную связь $\delta\underset{\sim}{s}$ и $\delta\underset{\sim}{v}$, необходимую для замыкания системы четырёх уравнений в возмущениях

$$-\operatorname{grad}\delta p+\operatorname{Div}\delta\underset{\sim}{s}\left[\delta\underset{\sim}{v}(\delta\mathbf{v})\right]=\rho\left[\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t}+\left(\delta\mathbf{v}\otimes\nabla\right)\cdot\mathbf{v}^{\circ}+\left(\mathbf{v}^{\circ}\otimes\nabla\right)\cdot\delta\mathbf{v}\right]\tag{14}$$

$$\operatorname{div}\delta\mathbf{v}=0\tag{15}$$

относительно трёх компонент вектора скорости $\delta\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ и давления $\delta p(\mathbf{x},t)$. В уравнениях (14) необходимо учесть соотношения Стокса $\delta\underset{\sim}{v}(\delta\mathbf{v})=\operatorname{Def}\delta\mathbf{v}$.

3. Частные случаи. Классические сплошные среды.

Рассмотрим подробнее некоторые классические типы сплошных сред и линеаризованные определяющие соотношения для них. Всюду, как и ранее, будем предполагать выполнение условия несжимаемости.

3.1. Тензорно линейные изотропные среды. К таким материалам по определению относятся те, у которых девиатор напряжений пропорционален (коллинеарен) тензору скоростей деформаций. В (1) и (2) необходимо положить $A_2 \equiv 0$, $B_2 \equiv 0$. Тогда $B_1(I_{s2}, I_{s3}) = 1/A_1(I_{v2}, I_{v3})$. С учётом равенств $A_2 \equiv 0$ и $\delta A_2 \equiv 0$ выражения (9) и (13) упростятся.

3.2. Тензорно линейные изотропные потенциальные среды. По сравнению с п. 3.1 дополнительно должно быть выполнено условие потенциальности (7), что влечёт независимость A_1 от кубического инварианта I_{v3}:

$$\delta\underset{\sim}{s} = A_1^\circ(I_{v2})\,\delta\underset{\sim}{v} + \left(\frac{dA_1}{dI_{v2}}\right)^\circ \frac{\underset{\sim}{v}^\circ : \delta\underset{\sim}{v}}{I_{v2}^\circ}\,\underset{\sim}{v}^\circ \tag{16}$$

$$D_{ijkl}^\circ = A_1^\circ \Delta_{ijkl} + \frac{1}{I_{v2}^\circ}\left(\frac{dA_1}{dI_{v2}}\right)^\circ v_{ij}^\circ v_{kl}^\circ \tag{17}$$

Скалярная нелинейность определяется одной материальной функцией одного переменного $A(I_{v2})$.

Различным аспектам анализа с помощью метода интегральных соотношений задач на собственные значения, основанных на замкнутой системе уравнений (14)–(16), посвящена монография [15].

3.3. Тело Бингама (двухконстантная вязкопластическая модель). Данная модель — частный случай предыдущего пункта, если положить

$$A(I_{v2}) = \frac{\sigma_s}{I_{v2}} + 2\mu \tag{18}$$

где σ_s — предел текучести, μ — динамическая вязкость. Из (16) и (17) следует

$$\delta\underset{\sim}{s} = \left(\frac{\sigma_s}{I_{v2}^\circ} + 2\mu\right)\delta\underset{\sim}{v} - \sigma_s \frac{\underset{\sim}{v}^\circ : \delta\underset{\sim}{v}}{{I_{v2}^\circ}^3}\,\underset{\sim}{v}^\circ, \quad D_{ijkl}^\circ = \left(\frac{\sigma_s}{I_{v2}^\circ} + 2\mu\right)\Delta_{ijkl} - \frac{\sigma_s}{I_{v2}^{\circ 3}}\, v_{ij}^\circ v_{kl}^\circ \tag{19}$$

3.4. Течение Сен-Венана (идеально жёсткопластическая модель). Обращая в (18) коэффициент вязкости в нуль, из (19) получим

$$\delta\underset{\sim}{s} = \frac{\sigma_s}{I_{v2}^\circ}\,\delta\underset{\sim}{v} - \sigma_s \frac{\underset{\sim}{v}^\circ : \delta\underset{\sim}{v}}{{I_{v2}^\circ}^3}\,\underset{\sim}{v}^\circ, \quad D_{ijkl}^\circ = \frac{\sigma_s}{I_{v2}^\circ}\,\Delta_{ijkl} - \frac{\sigma_s}{I_{v2}^{\circ 3}}\, v_{ij}^\circ v_{kl}^\circ \tag{20}$$

3.5. Ньютоновская вязкая жидкость. Это единственная физически линейная модель среди всего класса сред, описываемых определяющими соотношениями (1), (2). Для неё $A_1 \equiv 2\mu$ и

$$\delta\underset{\sim}{s} = 2\mu\,\delta\underset{\sim}{v}, \quad D_{ijkl}^\circ = 2\mu\Delta_{ijkl} \tag{21}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин В.А. Нелинейная вычислительная механика прочности. Т. 1. Образование и развитие дефектов. М.: Физматлит, 2015. 456 с.

2. Георгиевский Д.В. Об “ортогональных эффектах” напряжённо-деформированного состояния в механике сплошной среды // Вестник Киевского нац. ун-та. Сер. физико-математические науки. 2013. № 3. С. 114–116.

3. Poynting J.H. On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted, and on the pressure of distorsional waves in steel // Proc. Roy. Soc. London. 1912. Ser. A86. P. 534–561.

4. Green A.E. A note on second-order effect in the torsion of incompressible cylinders // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1954. V. 50. No. 3. P. 488–490.

5. Chen M., Chen Z. Second-order effect of an elastic circular shaft during torsion // Appl. Math. Mech. 1991. V. 12. No. 6. P. 769–776.

6. Chaboche J.L. Modeling of ratcheting: evaluation of various approaches // Europ. J. Mech. Ser. A. Solids. 1994. V. 13. No. 4. P. 501–518.

7. Delobelle P., Robinet P., Bocher L. Experimental study and phenomenological modelization of ratchet under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel // Internat. J. Plasticity. 1995. V. 11. No. 4. P. 295–330.

8. Batra R.C., dell'Isola F., Ruta G.C. Generalized Poynting effects in prismatic bars // J. Elasticity. 1998. V. 50. No. 2. P. 181–196.

9. Akinola A. An energy function for transversely-isotropic elastic material and the Poynting effect // Korean J. Comput. Appl. Math. 1999. V. 6. No. 3. P. 639–649.

10. Rivlin R.S., Ericksen J.L. Stress-deformation relations for isotropic materials // J. Rational Mech. Anal. 1955. V. 4. No. 2. P. 323–425.

11. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 263 с.

12. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твёрдых тел. Ч. 2. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.

13. Георгиевский Д.В., Мюллер В.Х., Абали Б.Э. Установочные эксперименты для нахождения материальных функций тензорно нелинейных определяющих соотношений // Изв. РАН. Сер. физическая. 2012. Т. 76. № 12. С. 1534–1537.

14. Георгиевский Д.В. Наборы установочных экспериментов в тензорно-нелинейных теориях МСС // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. № 2. С. 66–68.

15. Георгиевский Д.В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: Изд-во УРСС, 1998. 176 с.

REFERENCES

1. Levin, V.A. 2015, *Nonlinear Computational Mechanics of Strength. V. 1. Formation and Development of Defects,* Moscow, Fizmatlit.

2. Georgievskii, D.V. 2013, "On the Orthogonal Effects of Stress-Strain State in Mechanics of Continuum *Vestnik Kievskogo Nats. Univ. Ser. Fiziko-Matematich. Nauki,* no. 3, pp. 114–116.

3. Poynting, J.H. 1912, "On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted, and on the pressure of distorsional waves in steel" *Proc. Roy. Soc.* London, ser. A86, pp. 534–561.

4. Green, A.E. 1954, "A note on second-order effect in the torsion of incompressible cylinders" *Proc. Cambridge Philos. Soc.,* vol. 50, no. 3, pp. 488–490.

5. Chen, M. & Chen, Z. 1991, "Second-order effect of an elastic circular shaft during torsion" *Appl. Math. Mech.,* vol. 12, no. 6, pp. 769–776.

6. Chaboche, J.L. 1994, "Modeling of ratcheting: evaluation of various approaches" *Europ. J. Mech. Ser. A. Solids.,* vol. 13, no. 4, pp. 501–518.

7. Delobelle, P., Robinet, P. & Bocher, L. 1995, "Experimental study and phenomenological modelization of ratchet under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel" *Internat. J. Plasticity.,* vol. 11, no. 4, pp. 295–330.

8. Batra R.C., dell'Isola F. & Ruta G.C. 1998, "Generalized Poynting effects in prismatic bars" *J. Elasticity.,* vol. 50, no. 2, pp. 181–196.

9. Akinola, A. 1999, "An energy function for transversely-isotropic elastic material and the Poynting effect" *Korean J. Comput. Appl. Math.,* vol. 6, no. 3, pp. 639–649.

10. Rivlin, R.S. & Ericksen J.L. 1955, "Stress-deformation relations for isotropic materials" *J. Rational Mech. Anal.,* vol. 4, no. 2, pp. 323–425.

11. Pobedria, B.E. 1986, *Lectures on Tensor Analysis,* Noscow, Moscow State University Ed.

12. Bell, J.F. 1973, *Mechanics of Solids. Vol. I: The Experimental Foundations of Solid Mechanics,* Berlin, Springer.

13. Georgievskii, D.V., Müller, W.H. & Abali, B.E. 2012, "Establishing experiments for obtaining of the material functions in tensor nonlinear constitutive relations" *Izvestiya RAN. Ser. fizich.,* vol. 76, no. 12, pp. 1534–1537.

14. Georgievskii, D.V. 2016, "Establishing experiments in tensor nonlinear theories of continuum mechanics" *Vestnik Moskovskogo Univ. Ser. 1. Matematika, mekhanika,* no. 2, pp. 66–68.

15. Georgievskii, D.V. 1998, *Stability of Viscoplastic Solids Deformation Processes,* Moscow, URSS.

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 519.6, 539.30 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-209-233

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЙ ОСНОВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.[1]

В. И. Горбачёв[2](г. Москва)

Аннотация

В статье рассматриваются начально-краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений математической физики (эллиптических, гиперболических и параболических) с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени. Такие уравнения вместе с входными данными будем называть исходными. Уравнения с переменными коэффициентами описывают процессы в композиционных материалах, у которых механические характеристики меняются либо скачком либо непрерывно в пограничной области между фазами. Многие задачи из различных разделов линейной и нелинейной механики сводятся к решению линейных уравнений с переменными коэффициентами.

В случае периодических по координатам коэффициентов одним из популярных способов решения уравнений является метод осреднения Бахвалова–Победри (МБП), основанный на представлении решения исходной задачи в виде асимптотического ряда по степеням малого геометрического параметра, равного отношению характерного размера ячейки периодичности к характерному размеру тела. В этом методе исходная краевая задача сводится к двум рекуррентным последовательностям задач. Первая рекуррентная последовательность заключается в нахождении периодических решений вспомогательных задач в ячейке периодичности. Вторая последовательность состоит в решении начально-краевых задач для уравнения с постоянными эффективными коэффициентами. Эти коэффициенты находятся после решения на

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 14.577.21.0207, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57715X0207). ФГБОУ ВПО "ТГПУ им. Л.Н.Толстого - получатель субсидии Министерства образования и науки.

[2]Горбачёв Владимир Иванович, заведующий кафедрой механики композитов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, vigorby@mail.ru

ячейке периодичности вспомогательных задач. Базой рекурсии во второй последовательности в МБП служит решение начально-краевой задачи для уравнения с эффективными коэффициентами в области определения, имеющей ту же самую форму и точно с такими же входными данными, что и исходная задача.

Входные данные в каждой из рекуррентных последовательностей на каком либо шаге находятся лишь после того как решены *все* предыдущие рекуррентные задачи.

В настоящей статье получены новые интегральные формулы, позволяющие выразить решение исходной задачи для уравнения с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени, через решение такой же задачи для уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение с постоянными коэффициентами называется сопутствующими уравнениями, а задача соответственно сопутствующей задачей. В ядро интегральной формулы входит функция Грина и разность коэффициентов исходного и сопутствующего уравнений. С помощью разложения сопутствующего решения в многомерный ряд Тейлора из интегральной формулы получено эквивалентное представление решения исходной задачи в виде ряда по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи. Коэффициенты при производных называются структурными функциями. Они являются непрерывными функциями координат и времени, обращающимися в нуль при совпадении исходных и сопутствующих коэффициентов. Для определения структурных функций построена система рекуррентных уравнений. Через структурные функции определяются коэффициенты сопутствующих уравнений, совпадающие в периодическом случае с эффективными коэффициентами в МБП. В отличие от метода Бахвалова–Победри в новом подходе нужно решать одну рекуррентную последовательность задач для нахождения структурных функций и один раз решить задачу для однородного тела с эффективными характеристиками.

Ключевые слова: Уравнения математической физики, уравнения с переменными коэффициентами, интегральные формулы, осреднение дифференциальных уравнений, структурные функции, эффективные коэффициенты.

Библиография: 41 названий.

INTEGRAL FORMULAS OF SOLUTIONS OF THE BASIC LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS WITH VARIABLE FACTORS

V. I. Gorbachev (Moscow)

Abstract

In paper initial-regional problems for linear differential equations are considered The mathematical physics (elliptic, hyperbolic and parabolic)

with variables In the factors depending on coordinates and time. Such equations together with input datas we will be To name initial. The equations with variable factors describe processes in the composite Materials at which mechanical performances change or a saltus or it is continuous in Boundary region between phases. Many problems from various sections linear and nonlinear Mechanics are reduced to a solution of simple equations with variable factors.

In case of periodic factors on coordinates one of popular modes of a solution of the equations The method of average of Bahvalova–Pobedri (MBP), based on representation of a solution is initial Problems in the form of an asimptotical series on degrees of the small geometrical parametre equal to the ratio Characteristic size of a mesh of periodicity to a characteristic size of a skew field. In this method the initial The boundary value problem is reduced to two recurrent sequences of problems. The first recurrent The sequence consists in determination of periodic solutions of auxiliary problems in a mesh Periodicity. The second sequence consists in a solution of initial-regional problems for the equation with In constant effective factors. These factors are after a solution on a mesh Periodicity of auxiliary problems. As base of a recursion in the second sequence in MBP serves Solution of a initial-regional problem for the equation with effective factors in definition range, Having the same form and it is exact with the same input datas, as an initial problem.

Input datas in each of recurrent sequences on what or a pitch are only after that as the previous recurrent problems are solved all.

In the present paper the new integral formulas are received, allowing to express a solution of the initial Problems for the equation with the variable factors depending on co-ordinates and time, through a solution The same problem for the equation with constant factors. The equation with constant factors Is called as the accompanying equations, and the problem according to accompanying a problem. In the kernel The integral formula the Green function and a difference of factors initial and accompanying enters The equations. By means of expansion of an accompanying solution in a many dimensional Taylor series from the integral Formulas equivalent representation of a solution of an initial problem in the form of a series on the various is received Derivative of a solution of an accompanying problem. Factors at derivatives are called as structural Functions. They are continuous functions of coordinates and time, converted in zero at Coincidence of initial and accompanying factors. For definition of structural functions it is constructed System of the recurrent equations. Through structural functions factors of the accompanying are defined The equations, coinciding in a periodic case with effective factors in MBP. Unlike Method of Bahvalova–Pobedri in the new approach it is necessary to solve one recurrent sequence of problems For determination of structural functions and once to solve a problem for a homogeneous skew field with the effective In performances.

Keywords: The equations of mathematical physics, integral formulas, average of differential equations, structural functions, effective factors.

Bibliography: 41 titles.

1. Введение

Задачи для неоднородных тел с быстроосциллирующими коэффициентами рассматривались в семидесятые годы В.А. Ломакиным и его учениками [1]. К настоящему времени наиболее распространенным методом решения подобных задач является асимптотический метод малого геометрического параметра. В России и за рубежом вышло большое количество статей и монографий, посвященных этому направлению, применительно к линейным и нелинейным задачам механики композитов. Опубликовано большое количество работ математиков и механиков [2, 3, 4, 5]. Отметим, что в 1984 году, практически одновременно, в СССР вышли три замечательные книги посвященные методу осреднения. Это книги Н.С. Бахвалова, Г.П. Панасенко [6], Б.Е. Победри [7] и Э. Санчес-Паленсия [8]. После этого последовало резкое увеличение количества публикаций российских и иностранных авторов в этой области. Учитывая, что целью настоящей публикации не является подробный литературный обзор, упомянем лишь некоторые книги из обширного списка книг и статей: [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] и др. В этих книгах можно найти более подробную библиографию работ по теории осреднения уравнений с периодическими коэффициентами.

Огромный вклад в развитие метода осреднения внесли ученые МГУ имени М.И. Ломоносова, в частности в 1985 г. Н.С. Бахвалов и Б.Е. Победря в составе коллектива авторов за создание методов расчета конструкций из композиционных материалов получили Государственную премию СССР в области науки. В 1987 г. на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова была организована кафедра механики композитов, которую с первого дня и до своей кончины 1 марта 2016 г. возглавлял Борис Ефимович Победря. Метод осреднения в механике композитов с регулярной структурой по праву называется методом осреднения Бахвалова–Победри.

В настоящей работе показано, что решение исходной задачи для уравнения с переменными коэффициентами связано с решением такой же задачи для уравнения с постоянными коэффициентами (сопутствующая задача) с помощью интегральной формулы. Приведена единая интегральная формула пригодная для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени. Наряду с интегральными представлениями получены представления решений исходных уравнений в виде рядов по всевозможным производным от решений сопутствующих уравнений с постоянными коэффициентами. Коэффициенты при производных называются структурными функциями. Они существенно зависят от характера неоднородности исходных коэффициентов. Для их определения выписаны системы рекуррентных уравнений. Через структурные функции вычисляются постоянные коэффициенты сопутствующего уравнения. В механике периодически неоднородных компо-

зитов они называются эффективными коэффициентами [6, 7]. Проблема эффективных коэффициентов в механике деформируемых твердых тел в геометрически нелинейном случае рассмотрена в работах [18, 19]

Решение рекуррентных специальных задач для структурных функций в одномерном случае находятся аналитически. В других случаях применяются приближенные способы вычислений, например метод Бубнова-Галеркина [20, 21]. Кроме этого, широко применяется метод конечных элементов реализованный, в частности, в виде отечественного программного комплекса "ФИДЕСИС" [22].

В настоящей статье показано, что решение исходной задачи для уравнения с переменными коэффициентами связано с решением такой же задачи для уравнения с постоянными коэффициентами (сопутствующая задача) с помощью интегральной формулы. Приведена единая интегральная формула пригодная для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени. Наряду с интегральными представлениями получены представления решений исходных уравнений в виде рядов по всевозможным производным от решений сопутствующих уравнений с постоянными коэффициентами. Коэффициенты при производных называются структурными функциями. Они существенно зависят от характера неоднородности исходных коэффициентов. Для их определения выписаны системы рекуррентных уравнений. Через структурные функции вычисляются постоянные коэффициенты сопутствующего уравнения. В механике периодически неоднородных композитов они называются эффективными коэффициентами [6, 7]. Проблема эффективных коэффициентов в механике деформируемых твердых тел в геометрически нелинейном случае рассмотрена в работах [18, 19]

Решение рекуррентных специальных задач для структурных функций в одномерном случае находятся аналитически. В других случаях применяются приближенные способы вычислений, например метод Бубнова-Галеркина [20, 21]. Кроме этого, широко применяется метод конечных элементов реализованный, в частности, в виде отечественного программного комплекса "ФИДЕСИС" [22].

2. Постановка задач и вывод интегральной формулы

В области V, ограниченной поверхностью Σ, рассматривается начально-краевая задача для уравнения вида

$$\left[C_{ij}(x,t)\,u_{,j}\right]_{,i} - \eta(x,t)\,\dot{u} - \left[\rho(x,t)\,\dot{u}\right]^{\cdot} + X(x,t) = 0\,, \qquad (1)$$

где t - время; одна или две точки над символом обозначают, соответственно, первую или вторую производную по времени; x - декартовы координаты x_1, x_2, x_3; индекс после запятой обозначает производную по соответствующей

координате; по повторяющимся индексам предполагается суммирование в соответствующих пределах; коэффициенты $C_{ij}(x,t)$, $\eta(x,t)$ и $\rho(x,t)$ являются интегрируемыми функциями координат и времени, C_{ij} — симметричные положительно определенные коэффициенты; $X(x,t)$ — заданная функция координат и времени. Искомая величина $u(x,t)$ может быть как скалярной, так и векторной функцией с компонентами u_1, u_2, u_3, при этом коэффициенты C_{ij} не симметричны и являются положительно определенными матрицами $C_{ij} = (C_{kilj})$.

В зависимости от физического смысла коэффициентов уравнение (1) описывает различные процессы. Далее их конкретизировать не будем. Не будем также конкретизировать типы граничных и начальных условий. Задачу для уравнения (1) будем называть исходной задачей.

Наряду с уравнением (1), в той же области V, рассматривается уравнение с постоянными коэффициентами $C^o_{ij} = C^o_{ji} = const.$, $\eta^o = const.$, $\rho^o = const.$

$$C^o_{ij}\, v_{,ij} - \eta^o\, \dot{v} - \rho^o\, \ddot{v} + X(x,t) = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что функция v удовлетворяет таким же, что и u граничным и начальным условиям. Задачу для уравнения (2) назовем сопутствующей задачей. Отметим, что коэффициенты C^o_{ij}, η^o, ρ^o сопутствующего уравнения (2), в общем случае, являются любыми физически допустимыми величинами и никак не связаны с коэффициентами уравнения (2) исходной задачи. Ниже будет показано, что в случае периодически неоднородных исходных коэффициентов, сопутствующие коэффициенты, необходимым образом, совпадают с эффективными коэффициентами в смысле определения [6, 7]. Полученные при этом выражения сопутствующих коэффициентов обобщаются на случай произвольных исходных коэффициентов, зависящих от координат и времени.

В уравнении (1) заменим t на τ, затем умножим его на функцию $G(x, t-\tau)$ и проинтегрируем по области V и по τ от нуля до t, получим:

$$\int_0^t d\tau \int_V \Big\{ \big[C_{ij}(x,\tau)\, u_{,j}\big]_{,i} - \eta(x,\tau)\, \dot{u}_\tau - \big[\rho(x,\tau)\, \dot{u}_\tau\big]^{\cdot}_{\tau} + X(x,\tau) \Big\}\, G(x, t-\tau)\, dV = 0 \tag{3}$$

Функция $G(x,t)$ пока, что произвольная непрерывная функция, имеющая нулевые начальные и граничные значения, сообразные граничным значениям исходной задачи. Интегралы в (3) преобразуем с помощью теоремы Гаусса–Остроградского [23] и используем то обстоятельство, что *входные данные для основной и сопутствующей задач одинаковы, а начальные и граничные значения функции* $G(x,t)$ *— нулевые.* После преобразований тождество (3)

приобретает вид:

$$\int_0^t d\tau \int_V \Big[(C_{ij}\, G_{,i})_{,j} - \eta\, \dot{G} - \big(\rho\, \dot{G}\big)^{\cdot} \Big] [u(x,\tau) - v(x,\tau)]\, dV + \\ + \int_0^t d\tau \int_V (C^o_{ij} - C_{ij})\, v_{,j}\, G_{,i}\, dV + \int_0^t d\tau \int_V (\eta^o - \eta) \dot{v}_\tau\, G\, dV + \\ + \int_0^t d\tau \int_V (\rho^o - \rho) \ddot{v}_\tau\, G\, dV = 0 \tag{4}$$

Ограничим еще больше произвол в выборе функций $G(x,t)$, подчинив их внутри области V уравнению

$$[C_{ij}(x,t)\, G_{,j}]_{,i} - \eta(x,t)\, \dot{G} - \big(\rho\, \dot{G}\big)^{\cdot} = -\delta(x-\xi)\, \delta(t-\tau)\,, \tag{5}$$

где $\delta(x-\xi)$ и $\delta(t-\tau)$ - дельта-функции Дирака [24, 25], причем $\delta(x-\xi) = \\ = \delta(x_1-\xi_1) \times \delta(x_2-\xi_2)\delta(x_3-\xi_3)$. Таким образом, $G(x,t) = G(x,\xi,t-\tau)$ — функция Грина исходной задачи [26, 27]. В результате после подстановки (5) в (3), замены $x \leftrightarrow \xi$ и с учетом (2) получим окончательно

$$u(x,t) = v(x,t) + \int_0^t d\tau \int_V G_{|k}(x,\xi,t-\tau)\, [C^o_{kl} - C_{kl}(\xi,\tau)]\, v_{|l}(\xi,\tau)\, dV_\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_V G(x,\xi,t-\tau) \Big\{ \big[\eta^o - \eta(\xi,\tau)\big] \dot{v}_\tau(\xi,\tau) + \big[\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big] \ddot{v}_\tau(\xi,\tau) \Big\}\, dV_\xi \tag{6}$$

Здесь индекс после вертикальной черты обозначает производную по соответствующей переменной ξ. Убедимся, что выражение (6) удовлетворяет исходному уравнению. Вначале вычислим все слагаемые, входящие в (1)

$$\big[C_{ij}(x,t)\, u_{,j}\big]_{,i} = \big(C_{ij}\, v_{,j}\big)_{,i} + \int_0^t d\tau \int_V \big(C_{ij}\, G_{,j}\big)_{,i|k} [C^o_{kl} - C_{kl}(\xi,\tau)]\, v_{|l}(\xi,\tau)\, dV_\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_V \big(C_{ij}\, G_{,j}\big)_{,i} \big[\big(\eta^o - \eta(\xi,\tau)\big) \dot{v}_\tau(\xi,\tau) + \big(\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big) \ddot{v}_\tau(\xi,\tau)\big]\, dV_\xi\,,$$

$$\dot{u} = \dot{v} + \int_0^t d\tau \int_V \dot{G}_{|k}(x,\xi,t-\tau)\, [C^o_{kl} - C_{kl}(\xi,\tau)]\, v_{|l}(\xi,\tau)\, dV_\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_V \dot{G}(x,\xi,t-\tau) \big[\big(\eta^o - \eta(\xi,\tau)\big) \dot{v}_\tau(\xi,\tau) + \big(\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big) \ddot{v}_\tau(\xi,\tau)\big]\, dV_\xi\,,$$

$$\big[\rho(x,t)\,\dot u\big]^{\cdot} = \big(\rho\,\dot v\big)^{\cdot} + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \big(\rho\,\dot G\big)^{\cdot}_{|k}\,\big[C^o_{kl} - C_{kl}(\xi,\tau)\big]\,v_{|l}(\xi,\tau)\,dV_\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \big(\rho\,\dot G\big)^{\cdot}\,\big[\big(\eta^o - \eta(\xi,\tau)\big)\dot v_\tau(\xi,\tau) + \big(\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big)\ddot v_\tau(\xi,\tau)\big]\,dV_\xi$$

Подстановка этих выражений в исходное уравнение дает:

$$\big(C_{ij}\,u_{,j}\big)_{,i} - \eta\,\dot u - \big(\rho\,\dot u\big)^{\cdot} + X(x,t) = \big(C_{ij}\,v_{,j}\big)_{,i} - \eta\dot v - \big(\rho\,\dot v\big)^{\cdot} + X(x,t) +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \Big[\big(C_{ij}\,G_{,j}\big)_{,i} - \eta\dot G - \big(\rho\,\dot G\big)^{\cdot}\Big]_{|k}\,\big[C^o_{kl} - C_{kl}(\xi,\tau)\big]\,v_{|l}(\xi,\tau)\,dV_\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \Big[\big(C_{ij}\,G_{,j}\big)_{,i} - \eta\dot G - \big(\rho\,\dot G\big)^{\cdot}\Big]\,\big[\big(\eta^o - \eta(\xi,\tau)\big)\dot v_\tau(\xi,\tau) +$$

$$+ \big(\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big)\ddot v_\tau(\xi,\tau)\big]\,dV_\xi =$$

$$= \big(C_{ij}\,v_{,j}\big)_{,i} - \eta\dot v - \big(\rho\,\dot v\big)^{\cdot} + X(x,t) -$$

$$- \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \underbrace{\delta(x-\xi)_{|k}}_{=-\delta(x-\xi)_{,k}}\,\delta(t-\tau)\,\big[C^o_{kl} - C_{kl}(\xi,\tau)\big]\,v_{|l}(\xi,\tau)\,dV_\xi -$$

$$- \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\,\big[\big(\eta^o - \eta(\xi,\tau)\big)\dot v_\tau(\xi,\tau) +$$

$$+ \big(\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big)\ddot v_\tau(\xi,\tau)\big]\,dV_\xi =$$

$$= \big(C_{ij}\,v_{,j}\big)_{,i} - \eta\dot v - \big(\rho\,\dot v\big)^{\cdot} + X(x,t) + \big[\big(C^o_{kl} - C_{kl}(x,t)\big)\,v_{,l}(x,t)\big]_{,k} -$$

$$- \big[\big(\eta^o - \eta(x,t)\big)\dot v(x,t) + \big(\rho^o - \rho(x,t)\big)\ddot v(x,t)\big] =$$

$$= C^o_{kl}v_{,lk} - \eta^o\dot v - \rho^o\ddot v + X(x,t) = 0 \qquad \textbf{Ч. Т. Д.}$$

Из формул (4), (5) при $\rho^o = 0$ и $\rho(\xi,t) \equiv 0$ следует интегральная формула для уравнения параболического типа. Интегральная формула для эллиптического уравнения получается из (4), (5) при $\eta^o = 0$, $\rho^o = 0$, и $\eta(\xi,t) \equiv 0$, $\rho(\xi,t) \equiv 0$, $C_{ij} = C_{ij}(\xi)$, $u = u(x)$, $v = v(x)$, $G = G(x,\xi)$.

Не представляет труда получить из общей формулы (6) интегральную формулу для случая когда u и v — векторы, а C_{ij} — несимметричные по ij матрицы вида $C_{ij} = (C_{ikjl})$. Коэффициенты C_{ikjl} симметричны по первой и второй парам индексов, а также по индексам в парах. В этом случае функция Грина $G(x,\xi,t-\tau)$ переходит в тензор Грина, соответствующей исходной задачи [28]. В векторном виде интегральная формула мало чем отличается

от формулы (6), тем не менее, приведем ее здесь:

$$\vec{u}(x,t) = \vec{v}(x,t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \underset{\sim}{G}_{|k}(x,\xi,t-\tau)\left[\underset{\sim}{C}{}^o_{kl} - \underset{\sim}{C}_{kl}(\xi,\tau)\right]\vec{v}_{|l}(\xi,\tau)\,dV_\xi +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \underset{\sim}{G}(x,\xi,t-\tau)\left\{\left[\eta^o - \eta(\xi,\tau)\right]\frac{\partial\vec{v}(\xi,\tau)}{\partial\tau} + \left[\rho^o - \rho(\xi,\tau)\right]\frac{\partial^2\vec{v}(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right\}dV_\xi \tag{7}$$

В этой формуле волна снизу символа означает матрицу 3×3

$$\underset{\sim}{C}_{kl} \equiv \begin{pmatrix} C_{1k1l} & C_{1k2l} & C_{1k3l} \\ C_{2k1l} & C_{2k2l} & C_{2k3l} \\ C_{3k1l} & C_{3k2l} & C_{3k3l} \end{pmatrix}, \qquad \underset{\sim}{G} \equiv \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}$$

В компонентной записи формула (7) принимает вид:

$$u_i(x,t) = v_i(x,t) +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V G_{im|k}(x,\xi,t-\tau)[C^o_{mknl} - C_{mknl}(\xi,\tau)]\,v_{n|l}(\xi,\tau)\,dV_\xi +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V G_{im}(\xi,x,t-\tau)\left\{\left[\eta^o - \eta(\xi,\tau)\right]\frac{\partial v_m(\xi,\tau)}{\partial\tau} + \right. \tag{8}$$
$$\left. + \left[\rho^o - \rho(\xi,\tau)\right]\frac{\partial^2 v_m(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\right\}dV_\xi\,,$$

где $G_{im}(x,\xi,t-\tau)$ — компоненты тензора Грина исходной задачи. В статическом случае вместо (6) и (8) имеем

$$u(x) = v(x) + \int\limits_V G_{|i}(x,\xi)\left[C^o_{ij} - C_{ij}(\xi)\right]v_{|j}(\xi)\,dV_\xi\,,$$

$$u_i(x) = v_i(x) + \int\limits_V G_{im|k}(x,\xi)\left[C^o_{mknl} - C_{mknl}(\xi)\right]v_{n|l}(\xi)\,dV_\xi\,.$$

Интегральная формула для уравнений теории упругости неоднородного анизотропного тела получена впервые в 1991 году в работе [38]. Аналогичная формула в динамической задаче теории упругости выводится в [34]. Осреднение гофрированных пластин с применением интегральных формул проведено в работе [37]. Для связанных задач моментной теории упругости и нестационарной задачи термоупругости интегральные формулы найдены в [32, 36]. Интегральная формула в связанной задаче электромагнитоупругости опубликована в работе [30].

3. Представление решения исходной задачи в виде ряда по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи. Структурные функции.

Перемещение u, представленное формулой (6), можно использовать непосредственно, если известны тензор Грина исходной задачи и решение сопутствующей задачи. Интегральная формула использовалась при исследовании устойчивости неоднородных стержней с переменным поперечным сечением в работе [33], при определении собственных частот колебаний неоднородных стержней с переменным поперечным сечением в работах [31, 35]. В этих случаях исходные уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Сопутствующая задача решается точно аналитически, а задача для функции Грина — приближенно. В результате удается найти приближенные аналитические выражения для критической силы и для первых собственных частот при различных условиях закрепления концов.

В плоском и, тем более, в трехмерном случае поиск тензора Грина представляет гораздо большую проблему, чем сама исходная задача. Поэтому интегральная формула (6), на первый взгляд, представляет академический интерес. Похожая ситуация изначально возникала и с интегральными формулами Сомилианы, однако, позднее из них вырос популярный метод граничных интегральных уравнений [39].

Для того, чтобы продвинуться дальше предположим, что функция $v(\xi,\tau)$ бесконечно дифференцируема по всем переменным и раскладываются в ряд Тейлора по времени и координатам в окрестности точки (x,t), т.е.

$$v(\xi,\tau)=\sum_{\substack{p+q=0\\ p\geqslant 0;\ q\geqslant 0}}^{\infty}\frac{(t-\tau)^p}{p!}\,\Pi_{i_1\dots i_q}(\xi,x)\frac{\partial^p v_{,i_1\dots i_q}(x,t)}{\partial t^p}\,,$$

$$\Pi_{i_1\dots i_q}(\xi,x)\equiv\frac{1}{q!}\,(\xi_{i_1}-x_{i_1})\dots\big(\xi_{i_q}-x_{i_q}\big)$$

Тогда в интегралах формулы (6)

$$v_{|l}(\xi,\tau)=\sum_{\substack{p+q=1\\ p\geqslant 0;\ q\geqslant 1}}^{\infty}\frac{(t-\tau)^p}{p!}\,\Pi_{i_1\dots i_{q-1}}(\xi,x)\delta_{li_q}\frac{\partial^p v_{,i_1\dots i_q}(x,t)}{\partial t^p}\,,$$

$$\dot v(\xi,\tau)_\tau=-\sum_{\substack{p+q=1\\ p\geqslant 1;\ q\geqslant 0}}^{\infty}\frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!}\,\Pi_{i_1\dots i_q}(\xi,x)\frac{\partial^p v_{,i_1\dots i_q}(x,t)}{\partial t^p}\,,$$

$$\ddot v(\xi,\tau)_\tau=\sum_{\substack{p+q=2\\ p\geqslant 2;\ q\geqslant 0}}^{\infty}\frac{(t-\tau)^{p-2}}{(p-2)!}\,\Pi_{i_1\dots i_q}(\xi,x)\frac{\partial^p v_{,i_1\dots i_q}(x,t)}{\partial t^p}$$

В результате $u(x,t)$ представляется в виде ряда по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи

$$u(x,t)=\sum_{p+q=0}^{\infty} N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,t)\,\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p};\qquad p=0,1,2,\ldots;\ q=0,1,2,\ldots \tag{9}$$

В формуле (9) верхний и нижний индексы в круглых скобках обозначают порядок производной по времени и координате соответственно. Функции с отрицательным верхним или нижним индексом тождественно равны нулю. Функция $N^{(0)}_{(0)}\equiv 1$, а $N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,t)$ при $p+q>0$ — непрерывные функции координат x_1,x_2,x_3 и времени t, представляющие собой взвешенные моменты функции Грина и ее производных. Как видно из (9), функции $N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,t)$ симметричны по индексам $i_1\ldots i_q$. N-функции обращаются в нуль при равенстве исходных и сопутствующих коэффициентов. Если исходные коэффициенты периодичны по координатам, то и N-функции, вдали от границы тела, являются периодическими функциями по координатам, с теми же периодами. Будем называть N-функции структурными функциями.

Уравнения для структурных функций получаются при подстановке ряда (9) в исходное уравнение (1), сбора коэффициентов при одинаковых производных и учета сопутствующего уравнения (2). Вначале проведем подготовительную работу

$$u_{,j}=\sum_{p+q=0}^{\infty}\left[N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q,j}+N^{(p)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1}}\delta_{ji_q}\right]\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p}$$

$$\dot u=\sum_{p+q=0}^{\infty}\left[\dot N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}+N^{(p-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}\right]\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p},$$

$$\left(C_{ij}u_{,j}\right)_{,i}=\sum_{p+q=0}^{\infty}\left[\left(C_{ij}N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q,j}+C_{ii_q}N^{(p)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1}}\right)_{,i}+C_{i_qj}N^{(p)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1},j}+\right.$$

$$\left.+C_{i_qi_{q-1}}N^{(p)}_{(q-2)i_1\ldots i_{q-2}}\right]\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p},\quad \left(\rho\,\dot u\right)^{\cdot}=\sum_{p+q=0}^{\infty}\left\{\left[\varrho\left(\dot N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}+N^{(p-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}\right)\right]^{\cdot}+\right.$$

$$\left.+\varrho\left(\dot N^{(p-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}+N^{(p-2)}_{(q)i_1\ldots i_q}\right)\right\}\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p}$$

Здесь учтено, что N-функции с отрицательным верхним или нижним индексом тождественно равны нулю. Подстановка ряда (9) в исходное уравнение переводит последнее в дифференциальное уравнение бесконечного порядка для функции $v(x,t)$, которая, на самом деле, удовлетворяет сопутствующему

уравнению (2)

$$\begin{gathered}\left[C_{ij}(x,t)\,u_{,j}\right]_{,i}-\eta(x,t)\,\dot u-\left[\rho(x,t)\,\dot u\right]^{\cdot}+X(x,t)=\\ =\sum_{p+q=0}^{\infty}\left\{\left[C_{ij}N^{(p)}_{(q)i_1\dots i_q,j}+C_{ii_q}N^{(p)}_{(q-1)i_1\dots i_{q-1}}\right]_{,i}+\right.\\ +C_{i_qj}N^{(p)}_{(q-1)i_1\dots i_{q-1},j}+C_{i_qi_{q-1}}N^{(p)}_{(q-2)i_1\dots i_{q-2}}-\\ -\eta\left[\dot N^{(p)}_{(q)i_1\dots i_q}+N^{(p-1)}_{(q)i_1\dots i_q}\right]-\left[\varrho\left(\dot N^{(p)}_{(q)i_1\dots i_q}+N^{(p-1)}_{(q)i_1\dots i_q}\right)\right]^{\cdot}-\\ \left.-\varrho\left[\dot N^{(p-1)}_{(q)i_1\dots i_q}+N^{(p-2)}_{(q)i_1\dots i_q}\right]\right\}\frac{\partial^p v_{,i_1\dots i_q}}{\partial t^p}+\\ +X(x,t)=C^o_{ij}\,v_{,ij}-\eta^o\,\dot v-\rho^o\,\ddot v+X(x,t)\end{gathered}$$

Сравнивая теперь коэффициенты при производных от v справа и слева от полученного равенства получаем уравнения для структурных функций

в случае $p+q=1$

$$\begin{gathered}\left[C_{ij}(x,t)N^{(0)}_{(1)i_1,j}+C_{ii_1}(x,t)\right]_{,i}-\eta(x,t)\dot N^{(0)}_{(1)i_1}-\left[\varrho(x,t)\dot N^{(0)}_{(1)i_1}\right]^{\cdot}=0\\ \left[C_{ij}(x,t)N^{(1)}_{(0),j}\right]_{,i}-\eta(x,t)\left(\dot N^{(1)}_{(0)}+1\right)-\left[\varrho(x,t)\left(\dot N^{(1)}_{(0)}+1\right)\right]^{\cdot}=-\eta^o\end{gathered}\qquad(10)$$

в случае $p+q=2$

$$\begin{gathered}\left[C_{ij}N^{(0)}_{(2)i_1i_2,j}+C_{ii_2}N^{(0)}_{(1)i_1}\right]_{,i}-\eta\dot N^{(0)}_{(2)i_1i_2}-\left(\varrho\dot N^{(0)}_{(2)i_1i_2}\right)^{\cdot}+C_{i_2j}N^{(0)}_{(1)i_1,j}+\\ +C_{i_2i_1}=C^o_{i_2i_1}\\ \left[C_{ij}N^{(1)}_{(1)i_1,j}+C_{ii_1}N^{(1)}_{(0)}\right]_{,i}-\eta\left(\dot N^{(1)}_{(1)i_1}+N^{(0)}_{(1)i_1}\right)-\\ -\left[\varrho\left(\dot N^{(1)}_{(1)i_1}+N^{0}_{(1)i_1}\right)\right]^{\cdot}+C_{i_1j}N^{(1)}_{(0),j}=0\\ \left[C_{ij}N^{(2)}_{(0),j}\right]_{,i}-\eta\left(\dot N^{(2)}_{(0)}+N^{(1)}_{(0)}\right)-\left[\varrho\left(\dot N^{(2)}_{(0)}+N^{(1)}_{(0)}\right)\right]^{\cdot}-\varrho\left(\dot N^{(1)}_{(0)}+1\right)=-\varrho^o\end{gathered}\qquad(11)$$

в случае $p+q=n\geqslant 3$

$$\begin{gathered}\left[C_{ij}N^{(p+q)}_{(q)i_1\dots i_q,j}+C_{ii_q}N^{(p+q)}_{(q-1)i_1\dots i_{q-1}}\right]_{,i}-\eta\left(\dot N^{(p+q)}_{(q)i_1\dots i_q}+N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\dots i_q}\right)-\\ -\left[\varrho\left(\dot N^{(p+q)}_{(q)i_1\dots i_q}+N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\dots i_q}\right)\right]^{\cdot}+\\ +C_{i_qj}N^{(p+q)}_{(q-1)i_1\dots i_{q-1},j}+C_{i_qi_{q-1}}N^{(p+q)}_{(q-2)i_1\dots i_{q-2}}-\varrho\left(\dot N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\dots i_q}+N^{(p+q-2)}_{(q)i_1\dots i_q}\right)=0\end{gathered}\qquad(12)$$

Уравнения для структурных функций представляют собой группы рекуррентных уравнений. Началом рекурсии служит группа уравнений $p+q=1$, из

решения которых находятся функции $N^{(0)}_{(1)i_1}(x,t)$ и $N^{(1)}_{(0)}(x,t)$. В каждой группе уравнения одного и того же типа. Свободные члены в уравнениях группы определяются через структурные функции из двух предыдущих групп. Для единственного решения структурных уравнений (10)-(12) нужно к каждому уравнению добавить граничные и начальные условия. Например, в случае первой начально-краевой задачи в области V, ограниченной поверхностью Σ из условия совпадения граничных и начальных условий в исходной и сопутствующей задачах получаем следующие условия на структурные функции:

$$N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,t)\Big|_{x\in\Sigma}=0\,,\qquad N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,0)=0\,,$$
$$\dot N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,0)=0\,,\qquad p>0,\ q>0$$

Рекуррентные уравнения существенно упрощаются в том случае, когда коэффициенты исходного уравнения не зависят от времени. В этом случае можно принять, что и структурные функции от времени не зависят. Тогда ряд для решения исходного уравнения (1), в котором коэффициенты не зависят от времени представляется в том же самом виде (9), где все структурные функции зависят от координат

$$u(x,t)=\sum_{p+q=0}^{\infty} N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x)\,\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p};\qquad p=0,1,2,\ldots;\ q=0,1,2,\ldots \tag{13}$$

Подстановка этого ряда в исходное уравнение приводит к рекуррентным уравнениям вида (10)-(12), в которых нужно убрать все производные по времени

в случае $p+q=1$

$$\Big[C_{ij}(x)N^{(0)}_{(1)i_1,j}+C_{ii_1}(x)\Big]_{,i}=0\,,\qquad \Big[C_{ij}(x)N^{(1)}_{(0),j}\Big]_{,i}-\eta(x)=-\eta^o\,; \tag{14}$$

в случае $p+q=2$

$$\Big[C_{ij}(x)N^{(0)}_{(2)i_1i_2,j}+C_{ii_2}(x)N^{(0)}_{(1)i_1}\Big]_{,i}+C_{i_2j}(x)N^{(0)}_{(1)i_1,j}+C_{i_2i_1}(x)=C^o_{i_2i_1}\,,$$
$$\Big[C_{ij}(x)N^{(1)}_{(1)i_1,j}+C_{ii_1}(x)N^{(1)}_{(0)}\Big]_{,i}+C_{i_1j}(x)N^{(1)}_{(0),j}-\eta(x)N^{(0)}_{(1)i_1}=0\,,$$
$$\Big[C_{ij}(x)N^{(2)}_{(0),j}\Big]_{,i}-\eta(x)N^{(1)}_{(0)}-\varrho(x)=-\varrho^o\,; \tag{15}$$

в случае $p+q=n\geqslant 3$

$$\Big[C_{ij}N^{(p+q)}_{(q)i_1\ldots i_q,j}+C_{ii_q}N^{(p+q)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1}}\Big]_{,i}+C_{i_qj}N^{(p+q)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1},j}+C_{i_qi_{q-1}}N^{(p+q)}_{(q-2)i_1\ldots i_{q-2}}-$$
$$-\eta N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}-\varrho N^{(p+q-2)}_{(q)i_1\ldots i_q}=0\,. \tag{16}$$

Уравнения (14)-(15) имеют одну и ту же структуру. Они представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных с переменными коэффициентами эллиптического типа, независимо от типа исходного и сопутствующего уравнений. Если исходное и сопутствующее уравнения эллиптического типа, то все структурные функции с верхним индексом $p>1$ тождественно равны нулю. Пусть, теперь, исходное гиперболическое уравнение

(1) рассматривается в слое $-\infty < x_1, x_2 < \infty,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant L$ и коэффициенты являются кусочно-непрерывными функциями координаты x_3. В этом случае структурные функции будут зависеть от x_3 и уравнения (14)-(15) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые решаются в общем виде. Например, уравнения (14) начала рекурсии принимают вид:

$$\Big[C_{33}(x_3)N^{(0)\prime}_{(1)i_1} + C_{3i_1}(x_3)\Big]' = 0\,, \qquad \Big[C_{33}(x_3)N^{(1)\prime}_{(0)}\Big]' - \eta(x_3) = -\eta^o \tag{17}$$

Штрихом обозначена производная по x_3. Общее решение уравнений (17) очевидно:

$$\begin{gathered} N^{(0)}_{(1)i_1}(x_3) = \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)dy\, A_{i_1} - \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)C_{3i_1}(y)dy + B_{i_1}\,, \\ N^{(1)}_{(0)}(x_3) = \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)dy \int\limits_0^{y} \big[\eta(z) - \eta^o\big]dz + \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)dy\, A + B \end{gathered} \tag{18}$$

Здесь $A_{i_1},\ B_{i_1}$, и $A,\ B$ — константы интегрирования. В случае первой краевой задачи все структурные функции на границе тела обращаются в нуль, т.е.

$$N^{(0)}_{(1)i_1}(0) = N^{(0)}_{(1)i_1}(L) = 0\,, \qquad N^{(1)}_{(0)}(0) = N^{(1)}_{(1)}(L) = 0\,,$$

тогда формулы (18) принимают вид:

$$\begin{gathered} N^{(0)}_{(1)i_1}(x_3) = \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)\Big[\big\langle C^{-1}_{33}\big\rangle^{-1}\big\langle C^{-1}_{33}C_{3i_1}\big\rangle - C_{3i_1}(y)\Big]dy\,, \\ N^{(1)}_{(0)} = \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y) \int\limits_0^{y} \bar\eta(z)dzdy - \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)dy\, \big\langle C^{-1}_{33}\big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{33}\int\limits_0^{y}\bar\eta(z)dz\Big\rangle \\ \bar\eta(z) \equiv \eta(z) - \eta^o \end{gathered} \tag{19}$$

Здесь угловые скобки обозначают среднее значение функции по толщине слоя.

Рассмотрим и другую ситуацию, когда коэффициенты исходного уравнения зависят только от времени и не зависят от координат. В этом случае структурные функции также зависят только от времени. Ряд для искомой функции практически тот же самый, что и в общем случае

$$u(x,t) = \sum_{p+q=0}^{\infty} N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(t)\,\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p}; \qquad p = 0,1,2,\ldots;\ q = 0,1,2,\ldots \tag{20}$$

Рекуррентные уравнения для структурных функций можно получить либо подстановкой ряда ряда (20) в исходное уравнение, либо просто удалением

лишних слагаемых из общих уравнений (10)-(12)

В случае $p+q=1$

$$\Big(\varrho\dot N^{(0)}_{(1)i_1}\Big)^{\cdot}+\eta\dot N^{(0)}_{(1)i_1}=0\,,\qquad \Big[\varrho\Big(\dot N^{(1)}_{(0)}+1\Big)\Big]^{\cdot}+\eta\Big(\dot N^{(1)}_{(0)}+1\Big)=\eta^o\,. \tag{21}$$

В случае $p+q=2$

$$\Big(\varrho\dot N^{(0)}_{(2)i_1i_2}\Big)^{\cdot}+\eta\dot N^{(0)}_{(2)i_1i_2}=C_{i_2i_1}(t)-C^o_{i_2i_1}\,,\ \Big[\varrho\Big(\dot N^{(1)}_{(1)i_1}+N^0_{(1)i_1}\Big)\Big]^{\cdot}+$$
$$+\eta\Big(\dot N^{(1)}_{(1)i_1}+N^{(0)}_{(1)i_1}\Big)=-\varrho\dot N^0_{i_1}\,,$$
$$\Big[\varrho\Big(\dot N^{(2)}_{(0)}+N^{(1)}_{(0)}\Big)\Big]^{\cdot}+\eta\Big(\dot N^{(2)}_{(0)}+N^{(1)}_{(0)}\Big)=\varrho^o-\varrho\Big(\dot N^{(1)}_{(0)}+1\Big)\,. \tag{22}$$

В случае $p+q=n\geqslant 3$

$$\Big[\varrho\Big(\dot N^{(p+q)}_{(q)i_1\dots i_q}+N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\dots i_q}\Big)\Big]^{\cdot}+\eta\Big(\dot N^{(p+q)}_{(q)i_1\dots i_q}+N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\dots i_q}\Big)=C_{i_qi_{q-1}}N^{(p+q)}_{(q-2)i_1\dots i_{q-2}}-$$
$$-\varrho\Big(\dot N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\dots i_q}+N^{(p+q-2)}_{(q)i_1\dots i_q}\Big) \tag{23}$$

Все дифференциальные уравнения (21)-(23) представимы в виде:

$$\Big(\varrho\dot Y\Big)^{\cdot}+\eta\dot Y=f(t) \tag{24}$$

Общее решение уравнения (24) представляется следующей формулой:

$$Y(t)=\begin{cases}\int\limits_0^t\frac{\varphi(\xi)}{\varrho(\xi)}\,d\xi+K_2\,, & \eta\neq0\,,\ \varrho\neq0\\ \int\limits_0^t\frac{1}{\varrho(\xi)}\left[K_1+\int\limits_0^\xi f(\tau)d\tau\right]d\xi+K_2\,, & \eta=0\,,\ \varrho\neq0\\ \int\limits_0^t\frac{f(\tau)}{\eta(\tau)}\,d\tau+K_1\,, & \eta\neq0\,,\ \varrho=0\end{cases} \tag{25}$$

Здесь K_1, K_2 — константы интегрирования. Функция $\varphi(t)$ имеет вид:

$$\varphi(t)=\left[K_1+\int\limits_0^t f(\tau)\,e^{\int\limits_0^\tau a(s)ds}d\tau\right]\ e^{-\int\limits_0^t a(s)ds}\,,\qquad a(s)=\frac{\eta(s)}{\varrho(s)}$$

В начале рекурсии, т.е. при $p=0$, $q=1$ правая часть уравнения (24) $f(t)=0$, следовательно, при замене в (25) $Y(t)$, K_1, K_2, $\varphi(t)$ на $N^{(0)}_{(1)i_1}(t)$, K_{1i_1}, K_{2i_1}, $\varphi_{i_1}(t)$ получим общее решение первого из уравнений (24)

$$N^{(0)}_{(1)i_1}(t)=\begin{cases}K_{1i_1}\int\limits_0^t\frac{1}{\varrho(\xi)}\,\exp\Big(-\int\limits_0^\xi a(s)ds\Big)\,d\xi+K_{2i_1}\,, & \eta\neq0\,,\ \varrho\neq0\\ K_{1i_1}\int\limits_0^t\frac{1}{\varrho(\xi)}d\xi+K_{2i_1}\,, & \eta=0\,,\ \varrho\neq0\\ K_{1i_1}\,, & \eta\neq0\,,\ \varrho=0\end{cases} \tag{26}$$

Если же $p=1$, $q=0$, то правая часть уравнения (24) $f(t)=\eta^o$, при этом $Y=N^{(1)}_{(0)}(t)+t$, следовательно

$$N^{(1)}_{(0)}(t)=-t+\begin{cases}\int\limits_0^t \frac{\varphi(\xi)}{\varrho(\xi)}\,d\xi+K_2\,, & \eta\neq 0\,,\ \varrho\neq 0\\ \int\limits_0^t \frac{K_1+\eta^o\xi}{\varrho(\xi)}d\xi+K_2\,, & \eta=0\,,\ \varrho\neq 0\\ \int\limits_0^t \frac{\eta^o}{\eta(\tau)}\,d\tau+K_1\,, & \eta\neq 0\,,\ \varrho=0\end{cases} \tag{27}$$

где

$$\varphi(\xi)=\left[K_1+\int\limits_0^\xi \eta^o\, e^{\int\limits_0^\tau a(s)ds}d\tau\right]\ e^{-\int\limits_0^\xi a(s)ds}\,,\qquad a(s)=\frac{\eta(s)}{\varrho(s)}$$

4. Выбор коэффициентов сопутствующего уравнения

Как уже отмечалось, коэффициенты C^o_{ij}, η^o, ϱ^o сопутствующего уравнения (2) это любые физически допустимые величины в каждом физическом процессе, описываемом исходным уравнением (1). При использовании структурных функций выбор сопутствующих коэффициентов влияет на скорость сходимости ряда (9) к точному решению. Рассмотрим сначала случай когда коэффициенты C_{ij}, η, ϱ зависят только от координат и периодичны по всем трем координатам. В этом частном случае структурные функции будут непрерывны и периодичны с теми же периодами по координатам. Кроме этого, непрерывны и периодичны выражения в квадратных скобках в уравнениях (14)-(16). Обозначим любую из ячеек периодичности через Ω и усредним по ячейке уравнения (14)-(16). В результате получим формулы для коэффициентов C^o_{ij}, η^o, ϱ^o в сопутствующих уравнениях

$$C^o_{i_2i_1}=\left\langle C_{i_2j}N^{(0)}_{(1)i_1,j}+C_{i_2i_1}\right\rangle_\Omega\,,\qquad \eta^o=\left\langle\eta\right\rangle_\Omega\,,\qquad \varrho^o=\left\langle\varrho+\eta N^{(1)}_{(0)}\right\rangle_\Omega \tag{28}$$

В этих формулах участвуют только начальные структурные функции, которые являются периодическими решениями уравнений (26) на ячейке периодичности. Как показано в работе [6] периодические решения структурных уравнений существуют и определены с точностью до постоянных величин. Эти постоянные величины определяются из условия нормировки, т.е. из условия равенства нулю средних значений структурных функций в ячейке периодичности. В этом случае среднее в любой ячейке от решения исходного уравнения, представленного рядом (13), стремится к решению сопутствующего уравнения при дроблении структуры.

Решение уравнений (26) можно искать и из условия равенства нулю искомых структурных функций на границе ячейки. В этом случае получаются

также непрерывные периодические структурные функции, причем эффективные характеристики, найденные по формулам (27) практически не отличаются [40, 41].

В случае, когда коэффициенты C_{ij}, η, ϱ произвольные интегрируемые функции координат сопутствующие коэффициенты будем определять по тем же самым формулам (27), только усреднять будем не по отдельной ячейке, а по всей области

$$C^o_{i_2 i_1} = \left\langle C_{i_2 j} N^{(0)}_{(1) i_1, j} + C_{i_2 i_1} \right\rangle, \qquad \eta^o = \left\langle \eta \right\rangle, \qquad \varrho^o = \left\langle \varrho + \eta N^{(1)}_{(0)} \right\rangle \tag{29}$$

Здесь усреднение берется по области V определения исходной задачи и обозначается просто угловыми скобками. В периодическом по координатам случае формулы (27) и (29) дают разные результаты, однако они сближаются с дроблением структуры, т.е. с увеличением числа ячеек периодичности в области V. Это объясняется тем, что в периодическом случае в области V имеется пограничный слой толщиной порядка характерного размера ячейки периодичности, в котором структурные функции перестраиваются от граничных до периодических внутри области функций.

Формулы (29) будем использовать и в самом общем случае зависимости коэффициентов от координат и времени. В этом случае сопутствующие коэффициенты будут функциями времени $C^o_{ij}(t)$, $\eta^o(t)$, $\varrho^o(t)$. Причем, в начальный момент времени "плотность" $\varrho^o(0) =< \varrho(x,0) >$, поскольку в силу начального условия $N^{(1)}_{(0)}(x,0) = 0$. При конкретных расчетах удобно принять в качестве сопутствующих коэффициентов выражения (29) в начальном моменте времени.

Заметим, что интегральная формула (6) остается справедливой и в том случае, когда изначально сопутствующие коэффициенты являются функциями времени. Она справедлива даже в том случае, когда сопутствующие коэффициенты — функции координат и времени.

Вернемся к случаю коэффициентов, зависящих от одной координаты x_3. Подставим в формулы (29) структурные функции (19) и получим явные аналитические выражения для сопутствующих коэффициентов C^o_{ij} и ϱ^o

$$C^o_{ij} = \left\langle C_{i3} C^{-1}_{33} \right\rangle \left\langle C^{-1}_{33} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{33} C_{3j} \right\rangle - \left\langle C_{i3} C^{-1}_{33} C_{3j} \right\rangle,$$

$$\begin{aligned} \varrho^o = \left\langle \varrho \right\rangle + \left\langle \eta \int_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y) \int_0^{y} \bar{\eta}(z) dz dy \right\rangle - \left\langle \eta \int_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y) dy \right\rangle \\ \left\langle C^{-1}_{33} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{33} \int_0^{x_3} \bar{\eta}(z) dz \right\rangle = \end{aligned} \tag{30}$$

$$= \left\langle \varrho \right\rangle + \left\langle \eta \int_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y) \left[\int_0^{y} \bar{\eta}(z) dz - \left\langle C^{-1}_{33} \right\rangle^{-1} \left\langle C^{-1}_{33}(y_1) \int_0^{y_1} \bar{\eta}(z) dz \right\rangle \right] dy \right\rangle$$

Здесь $\bar{\eta} = \eta(x_3) - \langle\eta\rangle$.

5. Заключение

Разработана методика осреднения исходного линейного уравнения математической физики с переменными коэффициентами, основанная на интегральной формуле представления решения уравнения с переменными коэффициентами через решение сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами. Из интегральной формулы, в предположении о гладкости сопутствующего решения, получены представления в виде рядов по всевозможным производным от сопутствующего решения. Коэффициенты рядов названы структурными функциями. Это название связано с тем, что коэффициенты рядов зависят от типа функций, описывающих зависимость исходных коэффициентов от координат и времени. Структурные функции обращаются в нуль при стремлении исходных коэффициентов к сопутствующим коэффициентам. Для них получены системы вспомогательных рекуррентных уравнений. Исследованы частные случаи зависимости исходных коэффициентов только от координат и только от времени. В последнем случае рекуррентные уравнения представляют собой системы однотипных обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых найдено общее решение. Показано, что в частном случае периодической зависимости коэффициентов от координат сопутствующие коэффициенты с необходимостью выражаются через начальные структурные функции. Эти формулы распространены на непериодический случай. При зависимости исходных коэффициентов от координат и времени предложено выбирать сопутствующие коэффициенты по формулам непериодического случая в начальный момент времени. Найдены аналитические формулы для сопутствующих коэффициентов в случае неоднородного по толщине, бесконечного в плане слоя. Интересным является то обстоятельство, что в случае исходного уравнения параболического типа с коэффициентами, зависящими от координаты по толщине слоя, эффективное сопутствующее уравнение является гиперболическим уравнением. Из этого следует вывод, что в теле, в котором процесс описывается параболическим уравнением с переменными по координатам коэффициентами возмущения распространяются с конечной скоростью [29].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.

2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов.Перевод с английского Е.В. Малиновской под редакцией академика Н.Н. Боголюбова. М.: Иностранная литература, 1960. 511 с.

3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1963. 412 с.

4. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974. 416 с.

5. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. 1983. 448 с.

6. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осредненние процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

7. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

8. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.

9. Шкиль Н. И., Вороной А. Н, Лейфура В. Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Киев: Вища школа, 1985. 248 с.

10. Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.

11. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. 311 с.

12. Kalamkarov A. L. Composite and reinforced elements of construction. Baffins Lane, Chechester, West Sussex PO19, England.: John wiley & Sons Ltd. 1992. 286 с.

13. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1993. 462 с.

14. Levinski T., Telega J. J. Plates, Laminates and shells. Asymptotic Analysis and Homogenization. N.J.: World Scientific Publishing Co, 2000. 739 с.

15. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Едиториал УРСС. 2003. 376 с.

16. Колпаков А. Г. Композиционные материалы и элементы конструкций с начальными напряжениями. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2007. 254 с.

17. Большаков В. И., Андрианов И. В., Данишевский В. В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. Днепропетровск: Пороги. 2008. 197 с.

18. Левин В. А., Лохин В. В., Зингерман К. М. Об одном способе оценки эффективных характеристик пористых тел при конечных деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела, 1997. № 4. С. 45–50.

19. Левин В. А., Лохин В. В., Зингерман К. М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении // Доклады РАН. 2002.Т. 382. № 4. С. 482–487.

20. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1995. 366 с.

21. Зубчанинов В. Г. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа. 1990. 368 с.

22. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ. ФИДЕСИС в руках инженера. М.: ЛЕНАНД, 2015.

23. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа. 1999. 695 с.

24. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Изд.2. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.

25. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.

26. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 443 с.

27. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.

28. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

29. Горбачев В. И. О распространении тепла в неоднородном стержне с переменным поперечным сечением // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 2017. №2. С. 48–54.

30. Gorbachev V. I. Integral formulas in electromagnetic elasticity of heterogeneous bodies. application in the mechanics of composite materials // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International J. // 2017. V. 8. № 2. С. 147–170.

31. Горбачев В. И. О собственных частотах продольных колебаний неоднородного стержня с переменным поперечным сечением // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 2016. №1. С. 31–39.

32. Горбачев В.И. Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости. Применение в механике композитов // Прикладная математика и механика. 2014. Т.78. № 2. С. 277–299.

33. Горбачев В.И., Москаленко О.Б. Устойчивость стержней с переменной жесткостью при сжатии распределенной нагрузкой // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 2012. №2. С. 41–47.

34. Горбачев В.И. Динамические задачи механики композитов // Известия РАН. Серия физическая. 2011. Т. 75. № 1. С. 117–122.

35. Горбачев В.И. О колебаниях в неоднородном упругом теле. Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 г. М.: Изд-во МГУ. 2011. С. 319–326.

36. Горбачев В.И. Интегральные формулы в симметричной и несимметричной упругости // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 2009. №6. С. 52–56.

37. Архангельский А.Ф., Горбачев В.И. Эффективные характеристики гофрированных пластин // Изв. РАН МТТ. 2007. № 3. С. 137–155

38. Горбачев В.И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. № 2. 61–76.

39. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.

40. Олехова Л.В. Кручение неоднородного анизотропного стержня. Диссертация кандидата физико-математических наук. Master's thesis, МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, 2009.

41. Емельянов А.Н. Эффективные характеристики в моментной теории упругости. Диссертация кандидата физико-математических наук. Master's thesis, МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, 2016.

REFERENCES

1. Lomakin, V.A. 1976, *Teoriya uprugosti neodnorodnyh tel [The theory of elasticity of nonhomogeneous bodies]*, Izdatel'stvo MGU imeni M.V. Lomonosova, Moscow, pp. 367.

2. Chapman, S. & Kauling, T. 1952, *The mathematical theory of non-uniform gases*, At the University Press, Camdridge, pp. 511.

3. Bogolyubov, N.N. & Mitropolsky, Ju.A. 1976, *Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]*, Nauka, Moscow, pp. 412.

4. Marchenko, V.A. & Hruslov, E.Ja. 1974, *Kraevye zadachi v oblastyah s melkozernistoj granicej [The regional problems in areas with fine-grained boundary]*, Naukova Dumka, Kiev, pp. 416.

5. Berdichevsky, V.L. 1983, *Variacionnye principy mekhaniki sploshnoj sredy [Variational principles of a mechanics of a continuous medium]*, Nauka, Moscow, pp. 448.

6. Bahvalov, N.,C. & Panasenko, G.P. 1984 *Osrednennie processov v periodicheskih sredah [Averaging of processes in periodic Materials]*, Nauka, Moscow, pp. 352.

7. Pobedria, B.E. 1984 *Mekhanika kompozicionnyh materialov [Mechanics of composite materials]*, Izdatel'stvo MGU imeni M.V. Lomonosova, Moscow, pp. 336.

8. Sanchez-Palencia, E. 1980 *Non-Homogeneous Media and Vibration theory*, Springer-Verlag, New York, pp. 472.

9. Shkil, N.I., Voronoi, A.N. & Lejfura, V.N. 1985, *Asimptoticheskie metody v differencial'nyh i integro-differencial'nyh uravneniyah [Asymptotic methods in the differential And the integro-differential equations]*, Vishaya shkola, Kiev, pp. 248.

10. Andrianov, I.V,, Lesnichaja, V.A. & Manevich, L.I. 1985, *Metod usredneniya v statike i dinamike rebristyh obolochek [Method of an average in a statics and dynamics Ridge covers*, Nauka, Moscow, pp. 221.

11. Oleynik, O. A., Iosifjan, G.A. & Shamaev, A.S. 1990, *Matematicheskie zadachi teorii sil'no neodnorodnyh sred [Mathematical problems of the theory it is strong Non-Homogeneous media]*, Izdatel'stvo MGU imeni M.V. Lomonosova, Moscow, pp. 311.

12. Kalamkarov, A.L. 1992, *Composite and reinforced elements of construction*, John wiley & Sons Ltd., Baffins Lane, Chechester, West Sussex PO19 1 UD, England, pp. 286.

13. Jikov, V.V., Kozlov, S.M. & Oleynik, O.A. 1993, *Usrednenie differencial'nyh operatorov [Averaging of differential operators]*, Fizmatlit, Moscow, pp. 462.

14. Levinski, T. & Telega, J.J. 2000, *Plates, Laminates and shells. Asymptotic Analysis and Homogenization*, World Scientific Publishing Co, pp. 739.

15. Bardzokas, D.I. & Zobnin, A.I. 2003, *Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov v kompozicionnyh materialah periodicheskoj struktury [Mathematical modeling of physical processes in Composite materials of periodic structure]*, Editorial URSS, Moscow, pp. 376.

16. Colpakov, A.G. 2007, *Kompozicionnye materialy i ehlementy konstrukcij s nachal'nymi napryazheniyami [Composite materials and elements of structures with initial stress]*, Izdatel'stvo SO RAN, Novosibirsk, pp. 254.

17. Bolshakov, V.I., Andrianov, I.V. & Danishevsky, V.V. 2008, *Asimptoticheskie metody rascheta kompozitnyh materialov s uchetom vnutrennej struktury [Asymptotic methods of calculation of composite materials taking into account interior structure]*, Porogi, Dnepropetrovsk, pp. 197.

18. Levin, V.A., Lohin, V.V., & Zingerman, K.M. 1997, "About one expedient of an estimation of the effective Performances of porous skew fields at final strains", *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* (Mechanics of Solids), no. 4, pp. 45 - 50.

19. Levin, V.A., Lohin, V.V., & Zingerman, K.M. 2002, "About construction of the effective defining Relations for porous elastic materials at final strains and their superposition", Doklady RAN (Reports of the Russian Academy of Sciences), vol. 382, no. 4. pp. 482 - 487.

20. Pobedria, B.E. 1995, *Chislennye metody v teorii uprugosti i plastichnosti [Numerical methods in the elasticity and plasticity theory]*, Izdatel'stvo MGU imeni M.V. Lomonosova, Moscow, pp. 366.

21. Zubchaninov, V G. 1990, *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti [Bases of the elasticity and plasticity theory]*, Vysshaya shkola, Moscow, pp. 368.

22. Morozov, E.M., Levin, V.A., & Vershinin, A.V. 2015, *Prochnostnoj analiz. FIDESIS v rukah inzhenera [Strengths Analysis. FIDESIS in hands of the engineer*, LENLAND, Moscow, pp. 408.

23. Arhipov, G.I., Sadovnichy, V.A., & Chubarikov, V.N. 1999, *Lekcii po matematicheskomu analizu [Lectures on the mathematical analysis]*, Visshaia Shkola, Moscow, pp. 695.

24. Gelfand, I.M., & Shilov, G.E. 1959, *Obobshchennye funkcii i dejstviya nad nimi. Izd.2 [Generalised functions and actions over them. Ed. 2]*, Fizmatgiz, Moscow, pp. 470.

25. Kech, V., & Teodoresku, P. 1978, *Vvedenie v teoriyu obobshchennyh funkcij s prilozheniyami v tekhnike [Introduction in the theory of generalised functions with applications in the technician]*, Mir, Moscow, pp. 518.

26. Sobolev, S.L. 1966, *Uravneniya matematicheskoj fiziki [The equations of mathematical physics]*, Nauka, Moscow, pp. 443.

27. Vladimirov, V.S. 1976, *Obobshchennye funkcii v matematicheskoj fizike [Generalised functions in the mathematical physics]*, Nauka, Moscow, pp. 280.

28. Novatsky, V. 1975, *Teoriya uprugosti [The elasticity theory]*, Mir, Moscow, pp. 872.

29. Gorbachev, V.I. 2017, "Heat propagation in a nonuniform rod of variable cross section", *Moscow University Mechanics Bulletin*, Vol. 72, no. 2, pp. 48–53. doi: 10.3103/S0027133017020042

30. Gorbachev, V.I. 2017, "Integral formulas in electromagnetic elasticity of heterogeneous bodies. aplication in the mechanics of composite materials", *Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International J.*, Vol. 8. no. 2, pp. 147 - 170. doi: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v8.i2.40

31. Gorbachev, V.I. 2016, "Natural frequencies of longitudinal oscillations for a nonuniform variable cross-section rod", *Moscow University Mechanics Bulletin*, Vol. 71, no. 1, pp. 7–15. doi: 10.3103/S0027133016010027

32. Gorbachev, V.I. 2014, "Integral formulae in the coupled problem of the thermoelasticity of an inhomogeneous body. application in the mechanics of composite materials", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 78, no. 2, pp. 192–208. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2014.07.013

33. Gorbachev V.I., & Moskalenko O.B. 2012, "Stability of bars with variable rigidity compressed by a distributed force", *Moscow University Mechanics Bulletin*, Vol. 67, no. 1, pp. 5–10. doi: 10.3103/S0027133012010025

34. Gorbachev, V.I. 2011, "Dynamic problems of composite mechanics", *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.*, Vol. 75, no. 1, pp. 110–115. doi: 10.3103/S1062873810121068

35. Gorbachev, V.I. 2011, "About oscillations in an inhomogeneous elastic body", *Elasticity and an unelasticity. Materials of the international scientific symposium on problems of the mechanics of deformable bodies, devoted to the 100 anniversary from the date of A.A.Ilyushin's birth (Moscow, on January, 20-21th, 2011)*, *Izdatel'stvo MGU imeni M.V. Lomonosova*, Moscow, pp. 319–326.

36. Gorbachev, V.I. 2009, "Integral formulas in symmetric and asymmetric elasticity", *Moscow University Mechanics Bulletin*, Vol. 64, no. 6, pp. 148–151. doi: 10.3103/S002713300906003X

37. Arkhangel'skyi, A. F., & Gorbachev, V. I. 2007, "Effective characteristics of corrugated plates", *Mechanics of Solids*, Vol. 42, no. 3. pp. 447–462. doi: 10.3103/S0025654407030132

38. Gorbachev, V. I. 1991, "Method of tensors of Green for a solution of boundary value problems of the theory of elasticity of inhomogeneous media", *The Computing mechanics of a deformable rigid body*, Moscow, no. 2, pp. 61 - 76.

39. Brebbia, C., Telles, J., & Vroubel, L. 1984, Boundary elements techniques, Springer-verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, pp 526.

40. Olekhova, L. V. 2009, *Torsion of an inhomogeneous non-isotropic rod. A thesis of the candidate Physical and mathematical sciences. Master's thesis*, The Moscow State University of M.V.Lomonosova, Mehaniko-mathematical Faculty.

41. Yemelyanov, A. N. 2016, *Effective performances in moment elasticity theories. A thesis The candidate of physical and mathematical sciences. Master's thesis*, The Moscow State University of M.V.Lomonosova, Mehaniko-mathematical Faculty.

получено 23.06.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 621.039 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-234-253

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С УЧЕТОМ ОБЪЕМНОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ В КОДЕ GERA

Ф. В. Григорьев[1], И. В. Капырин[2], Ю. В. Василевский[3] (г. Москва)

Аннотация

В статье рассматривается задача моделирования тепловой конвекции в пористых средах с учетом объемного тепловыделения, возникающая при оценке безопасности захоронений радиоактивных отходов (РАО).

В первом разделе представлен краткий обзор известных гидрогеологических расчетных кодов, обладающих функционалом для решения тепловых задач (FEFLOW, SUTRA, SEAWAT, TOUGH2). Отмечается отсутствие возможности учета объемного тепловыделения вследствие радиоактивного распада в данных программных комплексах. Дается описание расчетного кода GeRa собственной разработки.

Во втором разделе рассмотрена математическая модель сопряженных процессов фильтрации, массо- и теплопереноса, реализованная в коде GeRa. Модель описывает процессы в насыщенной пористой среде и учитывает радиоактивный распад, сорбцию на породе, зависимость плотности и вязкости жидкости от температуры. Уравнение теплопереноса записывается в предположении теплового равновесия между раствором и породой. Учитывается перенос тепла конвекцией и кондукцией-термодисперсией, источники в виде скважин и объемного тепловыделения вследствие радиоактивного распада.

В третьем разделе представлен численный метод, реализованный в коде GeRa для решения сопряженной задачи. Дискретизация по пространству осуществляется с использованием методов конечных объемов (МКО). Для дискретизации по времени применяется схема полно-

[1]Григорьев Федор Владимирович, инженер-исследователь ИБРАЭ РАН, grigfedor@yandex.ru

[2]Капырин Иван Викторович, заведующий лабораторией геомиграционного моделирования Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, старший научный сотрудник Института вычислительной математики РАН, ivan.kapyrin@gmail.com

[3]Василевский Юрий Викторович, член-корреспондент Российской академии наук, заместитель директора ИВМ РАН, yuri.vassilevski@gmail.com

стью неявного итерационного сопряжения, на каждой итерации которой последовательно решаются задачи фильтрации, тепло- и массопереноса.

В четвертом разделе приводится тестовая задача о конвекции тепловыделяющей жидкости в замкнутой двумерной полости с изотермическими стенками, заполненной пористой средой. Результаты решения кодом GeRa сравниваются с асимптотическим решением, полученным Haajizadeh. В пятом разделе представлены результаты моделирования в коде GeRa экспериментов Buretta и Berman по изучению режимов свободной тепловой конвекции жидкости с объемным тепловыделением в пористой среде. Сравниваются зависимости числа Нуссельта от числа Рэлея, полученные в натурном эксперименте и численно.

В шестом разделе рассматривается тестовая задача о непрерывной закачке высокоактивных РАО в пласт-коллектор. Демонстрируется возможность совместного расчета процессов фильтрации, тепло- и массопереноса. Численное решение, полученное в коде GeRa, сравнивается с известным аналитическим решением.

Ключевые слова: численное моделирование, тепловая конвекция в пористых средах, объемное тепловыделение, код GeRa.

Библиография: 24 названий.

MODELING OF THERMAL CONVECTION IN POROUS MEDIA WITH VOLUMETRIC HEAT SOURCE USING THE GERA CODE

F. V. Grigoriev, I. V. Kapyrin, Y. V. Vassilevski (Moscow)

Abstract

This article is devoted to the problem of thermal convection in porous media with volumetric heat generation modelling, arising in practice of radioactive waste (RW) disposal safety assessment.

In the first section a brief overview of widespread hydrogeological codes (FEFLOW, SUTRA, SEAWAT, TOUGH2) featuring the ability to solve thermal problems is done. We point out the lack of heat generation caused by radioactive decay model in these programs. The GeRa numerical code developed by the authors is presented.

In the second section we consider the mathematical model of coupled groundwater flow, solute and heat transport, which is implemented in GeRa. The model describes these processes in saturated porous media and takes into account radioactive decay, sorption on the rock, the dependences of density and viscosity on temperature. The heat transport equation is written assuming thermal equilibrium between the fluid and the rock. The model includes heat transport by convection and conduction-thermal

dispersion. The heat source terms can be wells and volumetric heat generation due to radioactive decay.

The numerical scheme implemented in GeRa to solve the aforementioned coupled problem is introduced in the third section. The space discretization is done using finite volume methods (FVM). Sequential iterative coupling implicit scheme is used for temporal discretization. On each iteration of the scheme the flow, heat transport and solute transport problems are solved sequentially.

The fourth section is devoted to the test problem of heat generating fluid convection in a closed two-dimensional cavern filled by porous material with isothermal walls. The results obtained using GeRa code are compared to the asymptotical solution deduced by Haajizadeh.

In the fifth section we present the results of modelling with GeRa the experiments of Buretta and Berman in which they investigated the regimes of free thermal convection of fluid with volumetric heat generation in porous media. The dependences of Nusselt number on the Raley number measured in the experiments and calculated numerically are compared.

In the sixth section we consider the test problem of continuous injection of high-level RW into an aquifer. Here the ability to model coupled flow, heat and solute transport processes is shown. The numerical solution obtained using GeRa is compared to a known analytical one.

Keywords: numerical modeling, thermal convection in porous media, the GeRa code, volumetric heat source.

Bibliography: 24 titles.

1. Введение

В процессе переноса радионуклидов в подземной гидросфере возможно возникновение значительных перепадов температуры флюида вследствие тепловыделения при радиоактивном распаде, что способно оказать заметное влияние на процесс фильтрации. Это означает, что в таких условиях при оценке безопасности захоронений радиоактивных отходов (РАО) численное моделирование геомиграции радионуклидов должно быть сопряжено с моделированием теплопереноса.

Модели тепловых процессов существуют во многих гидрогеологических расчетных кодах. Один из наиболее известных – FEFLOW (Finite Element Subsurface Flow and Transport Simulation System). Разработка данной программы началась в 1979 году Диршем (Hans-Jorg G. Diersch) и продолжается до сих пор подразделением MIKE организации DHI. Код способен моделировать трехмерную фильтрацию в пористых средах с учетом плотностных эффектов, тепло-, массопереноса, химических взаимодействий. Для дискретизации уравнений используются конечно-элементные методы. Подробная документация возможностей кода в области физико-химических моделей и численных методов приведена в книге [1].

SUTRA – конечно-элементный код, выпущенный геологической службой США (USGS) в 1984 году [2] для двумерных задач и в 2002 году [3] для трехмерных задач. Последнее обновление программы вышло в 2010 году. С помощью этого кода было исследовано множество задач, связанных со свободной конвекцией, ставших затем бенчмаркинговыми [4, 5]. Моделирование может проводиться только на гексаэдральных сетках. Одновременное моделирование тепло- и массопереноса невозможно.

SEAWAT – еще один код, выпущенный USGS. Дискретизация уравнений основана на методе конечных разностей. Важной особенностью программы можно назвать то, что она является результатом синтеза двух популярных гидрогеологических пакетов: MODFLOW (моделирование фильтрации) и MT3DMS (моделирование массопереноса) [6]. Последнее обновление SEAWAT v4 вышло в 2012 году.

TOUGH2 (Transport of Unsaturated Groundwater and Heat) [7] – численный код, разрабатываемый национальной лабораторией им. Лоуренса в Беркли для моделирования геотермальных процессов и задач, связанных с изоляцией высокоактивных РАО. Пространственная дискретизация в программе основана напрямую на законах сохранения в интегральной форме без перевода их в уравнения в частных производных (т. н. “integral finite difference method” – IFDM). Используя различные модули программы, можно учесть двойную пористость и проницаемость среды, многофазность течения (в том числе фазовые переходы).

Следует отметить, что во всех перечисленных выше кодах отсутствует возможность учета объемного тепловыделения вследствие радиоактивного распада. Возможно, это обусловлено тем, что закачка радиоактивных отходов в геологические формации является уникальной отечественной практикой, и потому функционал подобного рода не представлял интереса для западных разработчиков.

В данной работе излагается модель теплопереноса и тепловой конвекции, реализованная в коде GeRa. Расчетный код GeRa разрабатывается специалистами ИБРАЭ РАН и ИВМ РАН. Он предназначен для гидрогеологического моделирования в задачах по обоснованию безопасности захоронений РАО (см. [8]). Моделирование геофильтрации, геомиграции и теплопереноса в GeRa осуществляется на неструктурированных многогранных сетках с помощью метода конечных объемов. Для выполнения операций с сетками и их элементами, для сборки и решения линейных систем, а также для хранения данных в последовательном и параллельном режимах в коде используется программная платформа INMOST [9, 10]. Способность кода GeRa моделировать процессы теплопереноса и тепловой конвекции с учетом объемного тепловыделения вследствие радиоактивного распада в данной работе проверяется сравнением численного решения верификационных задач с референтными результатами, основанными на экспериментальных данных и на аналитических расчетах.

2. Модель теплопереноса в пористой среде

Система уравнений, описывающая сопряженную модель фильтрации, массо-, теплопереноса в насыщенной пористой среде с учетом радиоактивного распада и сорбции, выглядит следующим образом [11]:

$$\rho S\frac{\partial h}{\partial t} - \varphi\rho_0\beta\frac{\partial T}{\partial t} + \varphi\sum_{i=1}^{N_{comp}}\kappa_{vol,i}\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{u}) = \rho_s q_s, \tag{1}$$

$$\vec{u} = -K\left(\nabla h + \frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\nabla z\right), \tag{2}$$

$$[\varphi\rho_0 c_f + (1-\varphi)\rho_r c_r]\frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 c_f\nabla(\vec{u}T) - \nabla(\lambda\nabla T) = q_s\rho_s c_f T_s + W, \tag{3}$$

$$\frac{\partial(\varphi R_i C_i)}{\partial t} + \Lambda_i\varphi R_i C_i + \nabla(\vec{u}C_i) - \nabla(D_i\nabla C_i) = C_{s,i}q_s, i = 1, ..., N_{comp}. \tag{4}$$

Выпишем для нее замыкающие соотношения:

$$\begin{cases} \rho = \rho_0(1-\beta(T-T_0)) + \sum\limits_{i=1}^{N_{comp}}\kappa_{vol,i}C_i, \\ h = \dfrac{p}{\rho_0 g} + z, \\ K = \dfrac{k\rho_0 g}{\mu(T)}, \\ \lambda = \varphi\lambda_f + (1-\varphi)\lambda_r + \varphi\rho_0 c_f D_{disp}, \\ D = D_{diff} + D_{disp}, \\ D_{disp} = \|\vec{u}\|((\alpha_l-\alpha_t)E(\vec{u}) + \alpha_t I). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь использованы следующие обозначения: ρ – плотность жидкости, S – коэффициент упругой емкости, h – гидравлический напор, φ – пористость среды, ρ_0 – плотность жидкости без примесей при референтной температуре, T – температура среды, $\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T}$ – коэффициент объемного теплового расширения жидкости, C_i – концентрация i-й примеси, $\kappa_{vol,i} = \frac{\partial\rho}{\partial C_i}$ – коэффициент объемного расширения для i-й примеси, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – скорость фильтрации, ρ_s – плотность жидкости в источнике, q_s – интенсивность источников и стоков, K – тензор фильтрации, z – вертикальная координата, отсчитываемая относительно некоторого уровня, c_f – удельная теплоемкость жидкости, ρ_r – плотность породы, c_r – удельная теплоемкость породы, λ – теплопроводность пористой среды (жидкости и породы), λ_f – теплопроводность жидкости, λ_r – теплопроводность породы, T_s – температура источника, W – мощность объемного тепловыделения, R_i – коэффициент сорбционной задержки для i-го компонента, Λ_i – константа радиоактивного распада для i-го компонента, $C_{s,i}$ – концентрация в источнике, p – давление жидкости, g

– ускорение свободного падения, k – проницаемость среды, μ – динамическая вязкость жидкости, D_{diff} – изотропный тензор эффективной молекулярной диффузии, D_{disp} – тензор дисперсии, α_l – продольная дисперсивность, α_t – поперечная дисперсивность, $E(\vec{u}) = \frac{u_i u_j}{\|\vec{u}\|^2}$, I – единичная матрица размером 3x3.

Уравнение (3) записано в предположении теплового равновесия между раствором и породой. Сорбция в уравнении (4) также предполагается равновесной.

Формула для тепловыделения вследствие радиоактивного распада с учетом собированного вещества выглядит следующим образом:

$$W = N_A \sum_i \frac{E_i}{M_i}(1 - \delta_i)\Lambda_i C_i \varphi R_i \tag{6}$$

Здесь N_A – число Авогадро, M_i – молярная масса i-го вещества, E_i – средняя энергия, выделяющаяся при одном акте распада, δ_i – доля энергии, уносимая нейтрино (для случая бета-распада).

Формула (6) записана в предположении о том, что тепловыделение происходит в той же точке, где произошел распад. Это предположение обосновано тем фактом, что длина ионизационного пробега в воде альфа-частиц (с типичными для радионуклидов РАО энергиями в диапазоне от 3 до 8 МэВ) составляет 30–100 мкм. Для бета-частиц – 1.5–5 мм. Длина половинного ослабления гамма-излучения с энергиями 0.5–4 МэВ в воде составляет 28–35 см [12]. Такие расстояния гораздо меньше характерных пространственных масштабов фильтрационных процессов, протекающих в геологических средах.

3. Численный метод

Для дискретизации по времени решения сопряженной задачи (1) – (4) в GeRa используется схема итерационного сопряжения. Представим дискретную систему уравнений, соответствующую системе дифференциальных уравнений (1) – (4), в следующем виде:

$$\begin{cases} F(h^{n+1}, C^{n+1}, T^{n+1}) = 0, \\ H(h^{n+1}, C^{n+1}, T^{n+1}) = 0, \\ M(h^{n+1}, C^{n+1}) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь h^{n+1}, T^{n+1}, C^{n+1} – векторы значений напора, температуры, концентраций растворенных компонентов в ячейках расчетной сетки на следующем, $(n+1)$-ом шаге по времени. Система (7) состоит из трех подсистем нелинейных уравнений. Первая, $F(h^{n+1}, C^{n+1}, T^{n+1}) = 0$ соответствует уравнению фильтрации (1). Вторая, $H(h^{n+1}, C^{n+1}, T^{n+1}) = 0$, состоит из дискретных уравнений теплопереноса, соответствующих (3) (зависимость от C^{n+1} обусловлена источником радиогенного тепла). Третья подсистема соответствует уравнению массопереноса (4).

При решении транспортных подзадач системы (7) могут быть использованы явно-неявная и полностью неявная дискретизации по времени. В первом случае для дискретизации оператора конвекции применяется явная TVD-схема метода конечных объемов (МКО) с кусочно-линейным восполнением концентрации на ячейках расчетной сетки (аналогично [13]). Во втором случае дискретизация конвективного оператора осуществляется с помощью неявной противопотоковой схемы первого порядка. Для оператора диффузии в обоих случаях используется неявная схема МКО с линейной двухточечной аппроксимацией потоков. Эта же схема применяется при решении фильтрационной подзадачи.

Для решения нелинейной системы (7) используется метод простой итерации. В этом случае шаг схемы по времени строится следующим образом:

1. В качестве начального приближения выбираются значения с предыдущего шага по времени: $h^{n+1,0} = h^n$, $T^{n+1,0} = T^n$, $C^{n+1,0} = C^n$. Устанавливается счетчик итераций $k = 0$.

2. Рассчитывается фильтрационная задача с плотностью, концентрацией и температурой с предыдущей итерации: $F(h^{n+1,k+1}, C^{n+1,k}, T^{n+1,k}) = 0$. Находятся напор $h^{n+1,k+1}$ и соответствующий ему фильтрационный поток $\vec{u}^{n+1,k+1}$.

3. Рассчитывается задача массопереноса с известным потоком $\vec{u}^{n+1,k+1}$: $M(h^{n+1}, C^{n+1}) = 0$. Отсюда находится концентрация на новой итерации $C^{n+1,k+1}$.

4. Рассчитывается задача теплопереноса с известным потоком $\vec{u}^{n+1,k+1}$ и концентрацией $C^{n+1,k+1}$: $H(h^{n+1}, C^{n+1}, T^{n+1}) = 0$. Отсюда находится температура на новой итерации $T^{n+1,k+1}$.

5. Обновляется счетчик итераций $k = k + 1$.

6. Проверяется критерий сходимости итерационного процесса. Если критерий выполнен, положим $h^{n+1} = h^{n+1,k}$, $T^{n+1} = T^{n+1,k}$, $C^{n+1} = C^{n+1,k}$. В ином случае возвращаемя к шагу 2.

Поясним теперь проверку критерия сходимости нелинейного решателя. Пользователем задана исходно величина: ε_{rel}. Считается, что сходимость достигнута при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} \dfrac{\|h^{n+1,k} - h^{n+1,k-1}\|}{\max\left(\|h^{n+1,k}\|, \|h^{n+1,k-1}\|\right)} < \varepsilon_{rel}, \\ \dfrac{\|C^{n+1,k} - C^{n+1,k-1}\|}{\max\left(\|C^{n+1,k}\|, \|C^{n+1,k-1}\|\right)} < \varepsilon_{rel}, \\ \dfrac{\|T^{n+1,k} - T^{n+1,k-1}\|}{\max\left(\|T^{n+1,k}\|, \|T^{n+1,k-1}\|\right)} < \varepsilon_{rel}. \end{cases} \tag{8}$$

4. Сравнение с аналитическим решением

В работе Haajizadeh и др. [14] было выведено асимптотическое (для относительно малых чисел Рэлея $Ra < 100$) решение для свободной конвекции тепловыделяющей жидкости в замкнутой двумерной полости с изотермическими вертикальными стенками, заполненной пористой средой. Это решение предлагается в качестве тестовой задачи для кода GeRa.

Задача формулируется в двумерной прямоугольной области размерами Ax1 (A –аспектный параметр: отношение высоты к ширине). На вертикальных стенках задана постоянная температура $T = 0$. На верхней и нижней границах задан нулевой поток тепла. На всей границе задано условие непротекания.



Рис. 1: Область решения задачи о свободной конвекции тепловыделяющей жидкости в прямоугольной каверне

Начальное условие задачи теплопереноса – однородное распределение нулевой температуры. Начальное условие фильтрационной задачи – однородное распределение напора $h = 0$. Расчет проводится до установления стационарного состояния.

В работе [14] показано, что основным параметром, определяющим режим течения в данной системе, является число Рэлея следующего вида (форма записи несколько отличается от [14] ввиду использования в данной работе других обозначений):

$$Ra = \frac{\rho_0 c_f \beta K W d^3}{\lambda^2} \tag{9}$$

где d – ширина прямоугольной каверны.

Приводится асимптотическое решение стационарной системы уравнений фильтрации-теплопереноса:

$$\begin{cases} \nabla(\rho\vec{u}) = 0, \\ \rho_0 c_f \nabla(\vec{u}T) - \nabla(\lambda\nabla T) = W, \\ \rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)). \end{cases} \tag{10}$$

Оно представлено в виде разложения температуры и функции тока в ряд по степеням Ra:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} Ra^n \psi_n(x, y), \\ T &= \sum_{n=0}^{\infty} Ra^n T_n(x, y). \end{aligned} \tag{11}$$

Вычислены коэффициенты от $n = 0$ до $n = 2$.

Задача решается кодом GeRa на равномерной гексаэдральной сетке с разбиением 25 x 1 x 50. Шаг по времени равен 10 сек. При решении подзадачи теплопереноса в (7) используется явно-неявная схема (см. раздел 3). Расчет производится до установления стационарного состояния. Числовые параметры задачи приведены в таблице 1.

Таблица 1: Параметры задачи о свободной конвекции тепловыделяющей жидкости в прямоугольной каверне

Параметр	Значение	Система единиц
K	1	м/сек
S	10^{-6}	м
φ	0.2	-
ρ_0	1000	кг/м^3
λ_f	0.65	Вт/(м °C)
λ_s	2.7125	Вт/(м °C)
β	10^{-4}	1/°C
T_0	0	°C
c_f	4200	Дж/(кг °C)
W	1.259	Вт/м^3

На рисунке 2 представлены профили обезразмеренной горизонтальной скорости вдоль прямой $x = 0.2$ для аспектных отношений $A = 5$, $A = 2$ и числа Рэлея $Ra = 50$, полученные численно в коде GeRa в сравнении с аналитическим решением. Безразмерная компонента скорости u и размерная компонента u' связаны следующим образом: $u = u' d\rho_0 c_f/\lambda$. Рисунок 2 демонстрирует хорошее соответствие результатов аналитических расчетов [14] и численного решения кодом GeRa.

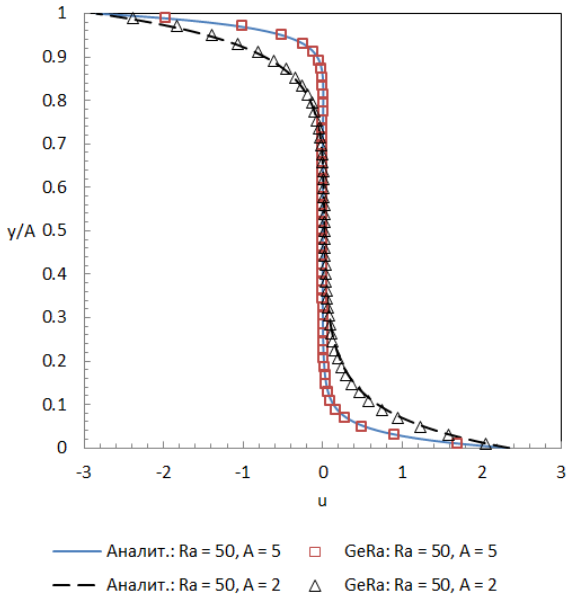


Рис. 2: Профиль горизонтальной скорости u вдоль прямой $x = 0.2$: численное решение кодом GeRa и аналитика [14] для различных аспектных отношений A и числа Рэлея $Ra = 50$

5. Сравнение с экспериментом

В работе [15] приведены результаты экспериментов Buretta и Berman по изучению режимов свободной тепловой конвекции жидкости с объемным тепловыделением за счет джоулева тепла в пористой среде в цилиндрическом сосуде с изотермической верхней крышкой и теплоизолированной нижней крышкой и боковыми стенками. Дана теоретическая оценка критического числа Рэлея (такого числа Рэлея, при котором происходит переход из кондуктивного режима теплопереноса в конвективный): $Ra_c = 32.8$. Эта оценка была сверена с результатами эксперимента: $Ra = 31.8$. Также была построена зависимость определенного в эксперименте числа Нуссельта от числа Рэлея. Данная зависимость имела интересный вид: она разделялась на две ветки с разными наклонами в логарифмическом масштабе, причем при некотором числе Рэлея происходил перескок с одной ветки на другую. В последующих экспериментах на аналогичных установках Hardee и Nilson [16], Rhee и др. [17], Kulacki и Freeman [18] так и не удалось воспроизвести этот скачок. Причем если в первых двух работах результаты лучше коррелировали с верхней ветвью зависимости, то в работе Kulacki и Freeman, наоборот, результаты лучше соотносились с нижней ветвью. Данные расхождения результатов до сих пор не получили окончательного убедительного объяснения [19]. Полученные в эксперименте критические числа Рэлея также значительно разнятся: $Ra_c = 32$ у Hardee и Nilson [16], $Ra_c = 46$ у Rhee и др. [17], $Ra_c = 36$ у Kulacki и Freeman [18].

Приведем результаты моделирования в коде GeRa эксперимента Buretta

и Berman [15]. Расчетная область имеет форму цилиндра диаметром 30 см и высотой 4.64 см. Используется треугольно-призматическая сетка с числом слоев по вертикали 10, длина ребра ячейки у границы $d \approx 1$ см. Всего сетка содержит 28600 ячеек. Область моделирования изображена на рисунке 3.

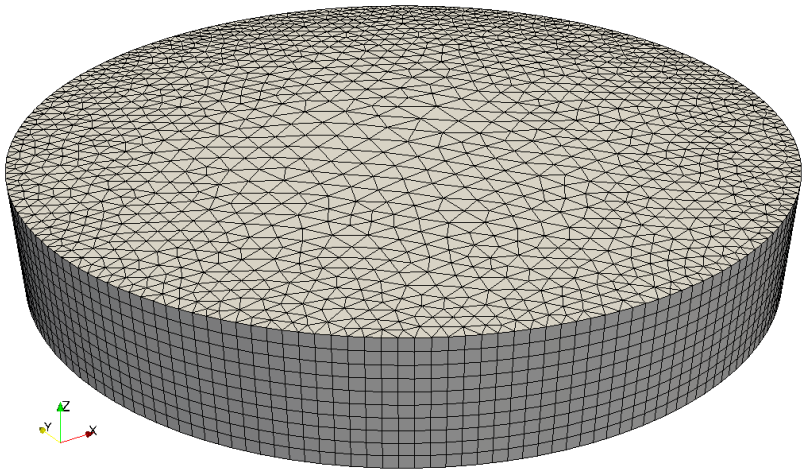


Рис. 3: Область моделирования эксперимента по конвекции тепловыделяющей жидкости

Моделирование проводилось при числах Рэлея $Ra = 15-245$. Число Рэлея в данной задаче определяется следующим образом:

$$Ra = \frac{\rho_0 c_f \beta K W h^3}{2\lambda^2}. \tag{12}$$

Теплоперенос характеризуется числом Нуссельта, записываемым в следующей форме:

$$Nu = \frac{W h^2}{2\lambda \Delta T}, \tag{13}$$

где $\Delta T = T_{bottom} - T_{up}$. Температура на верхней границе поддерживается постоянной $T_{up} = 21°C$. Температура на теплоизолированной нижней границе может быть неоднородной. Поэтому под величиной T_{bottom} подразумевается среднее значение:

$$T_{bottom} = \frac{1}{S} \iint\limits_{bottom} T(x, y) dx dy. \tag{14}$$

Числовые параметры задачи приведены в таблице 2.

Величина шага по времени для $Ra = 15 - 105$: $\Delta t = 100$ с, для $Ra = 140 - 245$: $\Delta t = 25$ с. При решении подзадачи теплопереноса в (7) используется полностью неявная схема (см. раздел 3). Результаты вычислительных экспериментов при различных числах Рэлея представлены на рисунке 4.

Таблица 2: Параметры моделирования эксперимента по конвекции тепловыделяющей жидкости

Параметр	Значение	Система единиц
K	30	см/с
φ	0.4	-
β	0.0005	1/°C
c_f	4200	Дж/(кг °C)
c_s	0	Дж/(кг °C)
λ_f	0.0065	Дж/(см °C с)
λ_s	0.013	Дж/(см °C с)
ρ_0	0.001	кг/см^3
S	10^{-6}	1/см
T_{up}	21	°C
T_0	21	°C
$W(Ra = 15 - 245)$	$0.00052 - 0.00842$	Вт/см^3

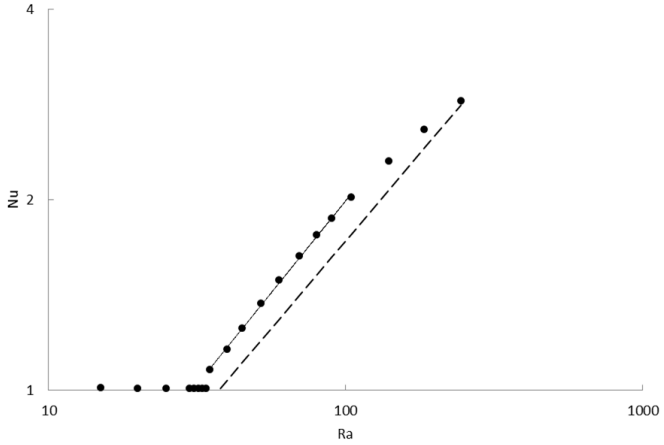


Рис. 4: Зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея: результаты численного моделирования, аппроксимирующая прямая (15) (сплошная линия) и прямая (16) (штриховая линия)

В районе $Ra = 30$ конвективные потоки значительно изменяют картину поля температуры, и число Нуссельта становится больше единицы. При $Ra = 35 - 100$ точки зависимости числа Рэлея от числа Нуссельта хорошо легли в логарифмическом масштабе на аппроксимирующую прямую (см. рисунок 4), соответствующую уравнению:

$$\lg Nu = 0.5799 \lg Ra - 0.8617, \tag{15}$$

что неплохо соотносится с верхней веткой зависимости, полученной Buretta и Berman [15]:

$$\lg Nu = 0.553 \lg Ra - 0.871. \tag{16}$$

При $Ra > 105$ не удалось получить стационарное решение задачи. Соответствующие точки на рисунке 4 определены с использованием усредненной по времени температуры T_{bottom} и отклоняются вниз относительно зависимости (15). На пересечении прямой (15) с осью находим критическое число Рэлея $Ra_c^{num} = 30.6$.

6. Задача о непрерывной закачке высокоактивных РАО в пласт-коллектор

В статье [20] приведено аналитическое решение задачи о температурном поле при закачке тепловыделяющих РАО в пласт-коллектор с учетом отведения тепла кондукцией во вмещающие породы. В работе [21] это решение было использовано для верификации программы TOUGH2-EOS7R, модифицированной для учета радиогенного тепла.

Аналитическое решение было получено для бесконечно глубоко залегающего горизонтального пласта постоянной мощности. Теплофизические свойства пород, покрывающих и подстилающих пласт-коллектор, считались одинаковыми, а распределение температуры – симметричным относительно середины пласта-коллектора. Таким образом, из-за симметрии задачи можем проводить моделирование только половины области, поставив на подошве граничные условия непротекания и нулевого потока тепла и задав мощность кровли достаточно большой, чтобы за время расчета тепловой фронт не достиг верхней границы модели. Числовые параметры модели приведены в таблице 3.

При решении задачи кодом GeRa область разбивается на ячейки треугольно призматической сеткой (см. рисунок 5). Пласт-коллектор содержит один слой ячеек, кровля – 14 слоев. В центре области находится скважина радиусом 0.1 м. От центра области ячейки увеличиваются в размере, и у границы длина ребра достигает $d \approx 90$ м. Всего сетка состоит из 47010 призм.

Расчет проводится на период 20 лет. Шаг по времени – 50 сут. Задачи массо-, теплопереноса считаются с помощью полностью неявной схемы (см. раздел 3). Результаты расчетов представлены на рисунке 6 в сравнении с аналитическим решением [20]. Видно хорошее соответствие результатов. Небольшое размазывание фронта можно объяснить численной диффузией и тем, что при выводе аналитического решения пренебрегли теплопроводностью в радиальном направлении.

Таблица 3: Параметры задачи о непрерывной закачке высокоактивных РАО в пласт-коллектор

Параметр	Значение	Система единиц
K (пласт-коллектор)	0.8	м/сут
K (вмещающие породы)	10^{-6}	м/сут
φ	0.2	-
ρ_0	1000	кг/м^3
ρ_{bulk}	1920	кг/м^3
S	10^{-6}	1/м
λ_f	56160	Дж/(м °C сут)
λ_s	234360	Дж/(м °C сут)
c_f	4200	Дж/(кг °C)
c_s	1000	Дж/(кг °C)
T_0	0	°C
T_w (темп. закачиваемой воды)	12	°C
Период полураспада	10585	сут
W	2.01	Вт/м^3
E (тепловыделение на 1 акт распада	1.126	МэВ/распад
Мощность пласта-коллектора	12.5	м
Мощность кровли	87.5	м
Радиус области	700	м
Дебит скважины	164.16	м^3/сут
Концентрация РАО в закачиваемой жидкости	$5.58 \cdot 10^{13}$	Бк/м^3

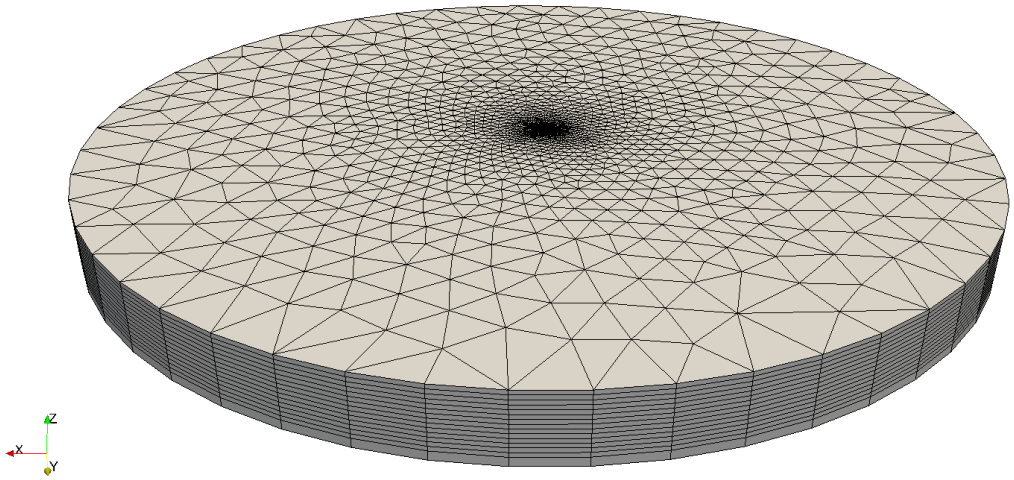
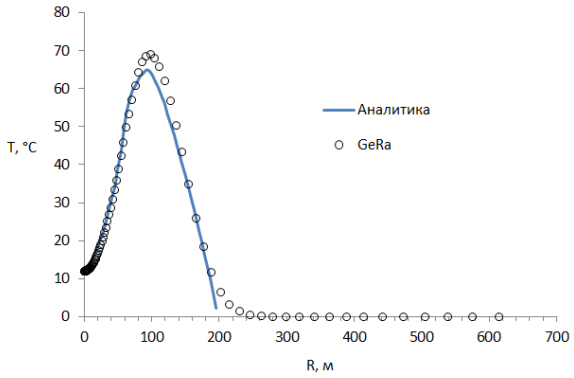
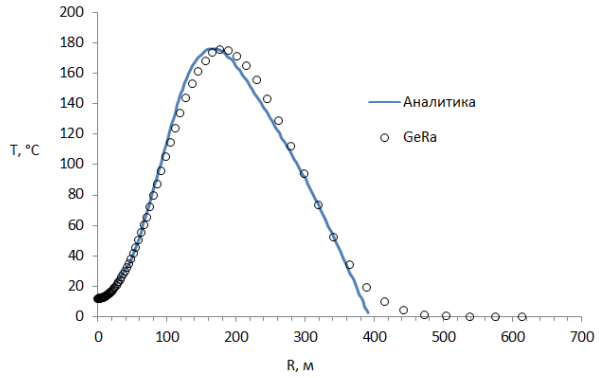


Рис. 5: Область моделирования задачи о непрерывной закачке РАО



(а)



(б)

Рис. 6: Зависимость температуры в пласте-коллекторе от расстояния до скважины: (а) – через 5 лет, (б) – через 20 лет. Приведены результаты численного расчета кодом GeRa в сравнении с аналитическим решением [20]

7. Заключение

В данной работе изложена численная модель теплопереноса и тепловой конвекции с учетом тепловыделения при радиоактивном распаде, реализованная в расчетном коде GeRa. Собрана верификационная база, включающая аналитические тесты и экспериментальные результаты. Численное решение верификационных задач показало хорошее совпадение с референтными результатами, свидетельствуя о том, что код GeRa адекватно моделирует сопряженные процессы геофильтрации, транспорта радионуклидов, теплопереноса и тепловыделения при радиоактивном распаде в геологических средах. Реализованная модель позволит использовать код GeRa в задачах оценки безопасности таких сложных объектов, как полигоны глубинной закачки жидких радиоактивных отходов [22], для которых характерен сильный разогрев пласта в прискважинной зоне, обусловленный объемным тепловыделением вследствие радиоактивного распада. Также возможным объектом моделирования является проектируемый пункт глубинного захоронения высокоактивных отходов в Нижнеканском массиве (ПГЗРО) [23]. При иссле-

довании его эволюции перспективным усовершенствованием GeRa должно стать внедрение моделей напряженно-деформированного состояния сред [24], что позволит применять код в полной мере для моделирования не только дальней, но и ближней зоны захоронения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Diersh H.-J. G. FEFLOW – Finite element modeling of flow, mass and heat transport in porous and fractured media. Springer, 2014, Berlin Heidelberg, XXXV, 996 pp.

2. Voss C.I. A finite-element simulation model for saturated-unsaturated, fluid-density-dependent ground-water flow with energy transport or chemically-reactive single-species solute transport: U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 84-4369. 1984, 409 pp.

3. Voss C.I., Provost A.M. SUTRA, A Model for Saturated-Unsaturated Variable-Density Ground-Water Flow with Solute or Energy Transport: Geological Survey Water-Resources Investigations Report 02-4231. 2002, 250 pp.

4. Weatherhill D., Simmons C.T., Voss C.E., Robinson N.I. Testing density-dependent ground-water models: twodimensional steady state unstable convection in infinite, finite and inclined porous layers // Advances in Water Resources. 2004. Vol. 27, P. 547-562.

5. Ranganathan V., Hanor J.S. Basin density-driven groundwater flow near salt domes // Chem. Geol. 1988. №74. P. 173–188.

6. Langevin C.D., Thorne D.T., Jr., Dausman A.M., Sukop M.C., Guo, Weixing SEAWAT Version 4: A Computer Program for Simulation of Multi-Species Solute and Heat Transport: U.S. Geological Survey Techniques and Methods Book 6, Chapter A22, 2007, 39 pp.

7. Pruess K., Oldenburg C., Moridis G. TOUGH2 User's Guide, ver. 2.0. Lawrence Berkeley National Laboratory. 1999.

8. Капырин И. В., Иванов В. А., Копытов Г. В., Уткин С. С. Интегральный код GeRa для обоснования безопасности захоронения РАО // Горный журнал. 2015. №10. С. 44-50.

9. Василевский Ю. В., Коньшин И. Н., Копытов Г. В., Терехов К. М. INMOST - программная платформа и графическая среда для разработки параллельных численных моделей на сетках общего вида. М.: Издательство Московского университета, 2013. 144 с.

10. Официальная страница программной платформы INMOST: www.inmost.org.

11. Diersh H.-J. G., Kolditz O. Coupled groundwater flow and transport: 2. Thermohaline and 3D convection systems // Advances in Water resources. 1998. Vol. 21, P. 401-425.

12. Кимель Л. Р., Машкович В. П. Защита от ионизирующих излучений. Справочник. Изд. 2. М.: Атомиздат, 1972. 312 с.

13. Nikitin K., Vassilevski Yu. A monotone nonlinear finite volume method for advection–diffusion equations on unstructured polyhedral meshes in 3D // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2010. Vol. 25. №4. P.335-358.

14. Haajizadeh M., Ozguc A. F., Tien C. L. Natural convection in a vertical porous enclosure with internal heat generation // Int. J. Heat Mass Transfer. 1985. Vol. 27, №10. P. 1893–1902.

15. Buretta R. J., Berman A. S. Convective heat transfer in a liquid saturated porous layer // ASME J. Appl. Mech. 1976. Vol. 43, P. 249–253.

16. Hardee H. C., Nilson R. H. Natural convection in porous media with heat generation // Nucl. Sci. Engng. 1977. Vol. 63, P. 119–132.

17. Rhee S. J., Dhir V. K., Catton I. Natural convection heat transfer in beds of inductively heated particles // ASME J. Heat Transfer. 1978. Vol. 100, P. 78–85.

18. Kulacki F. A., Freeman R. G. A note on thermal convection in a saturated, heat generating porous layer // ASME J. Heat Transfer 1979. Vol. 101, P. 169–171.

19. Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media (5th edition). Springer, 2017.

20. Окуньков Г. А., Рыбальченко А. И., Куваев А. А. Тепловой режим геологической среды при захоронении жидких радиоактивных отходов // Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология. 2003. №3. С.237–244.

21. Кирюхин А. В., Куваев А. А. Моделирование тестовой задачи по закачке высокоактивных РАО в водоносный горизонт с учетом радиогенного разогрева пласта // Материалы международной научной конференции «Гидрогеология сегодня и завтра», МГУ. 2013. С.204–209.

22. Рыбальченко А. И., Пименов М. К., Костин П. П. и др. Глубинное захоронение жидких радиоактивных отходов. М.: ИздАт. 1994. С. 120.

23. Мальковский В. И., Пэк А. А., Кочкин Б. Т., Озерский А. Ю. Оценка потенциального загрязнения геологической среды при подземном захоронении радиоактивных отходов на участке «Енисейский» Нижнеканского массива (Красноярский край) // Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология. 2013. №6. С. 483-490.

24. Левин В. А., Модели и методы. Образование и развитие дефектов. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2015. 456 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В. А. Левина: В 5 т. Т. 1).

REFERENCES

1. Diersh, H.-J. G., 2014, *FEFLOW – Finite element modeling of flow, mass and heat transport in porous and fractured media*, Springer, Berlin Heidelberg, XXXV, 996 pp.

2. Voss, C.I., 1984, *A finite-element simulation model for saturated-unsaturated, fluid-density-dependent ground-water flow with energy transport or chemically-reactive single-species solute transport: U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 84-4369*, 409 pp.

3. Voss, C.I., Provost, A.M. 2002, SUTRA, *A Model for Saturated-Unsaturated Variable-Density Ground-Water Flow with Solute or Energy Transport: Geological Survey Water-Resources Investigations Report 02-4231*, 250 pp.

4. Weatherhill, D., Simmons, C.T., Voss, C.E., Robinson N.I. 2004, "Testing density-dependent ground-water models: twodimensional steady state unstable convection in infinite, finite and inclined porous layers", *Advances in Water Resources*, vol. 27, pp. 547-562.

5. Ranganathan, V., Hanor, J.S. 1988, "Basin density-driven groundwater flow near salt domes" *Chem. Geol.*, No 74, pp. 173–188.

6. Langevin, C.D., Thorne D.T., Jr., Dausman A.M., Sukop M.C., Guo, Weixing, 2007, *SEAWAT Version 4: A Computer Program for Simulation of Multi-Species Solute and Heat Transport: U.S. Geological Survey Techniques and Methods Book 6*, Chapter A22, 39 pp.

7. Pruess, K., Oldenburg, C., Moridis, G., 1999, *TOUGH2 User's Guide, ver. 2.0*, Lawrence Berkeley National Laboratory.

8. Kapyrin, I. V., Ivanov, V. A., Kopytov, G. V., Utkin, S. S. 2015, "Integral code GeRa for RAW disposal safety validation" , *Gornyi zhurnal*, no. 10, pp. 44-50.

9. Vassilevski, Y. V., Konshin I. N., Kopytov, G. V., Terekhov K. M. 2013, *INMOST – programmnaja platforma i graficheskaja sreda dlja razrabotki parallel'nyh chislennyh modelej na setkah obshhego vida* [INMOST – a Software Platform and Graphical Environment for Development of Parallel Numerical Models on General Meshes], Izdatelstvo Moskovskogo Universiteta Moscow. (Russian)

10. INMOST project page, Available at: www.inmost.org.

11. Diersh, H.-J. G., Kolditz, O. 1998, "Coupled groundwater flow and transport: 2. Thermohaline and 3D convection systems", *Advances in Water Resources*, vol. 21, pp. 401-425.

12. Kimel, L. R., Mashkovich, V. P. 1972, *Zaschita ot ioniziruyuschih izlucheniy* [Protection against ionizing radiation], 2-nd ed., Atomizdat, Moscow. (Russian)

13. Nikitin, K., Vassilevski, Yu. 2010, "A monotone nonlinear finite volume method for advection–diffusion equations on unstructured polyhedral meshes in 3D", *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling*, vol. 25, no. 4, pp. 335-358.

14. Haajizadeh, M., Ozguc, A. F., Tien, C. L. 1985, "Natural convection in a vertical porous enclosure with internal heat generation", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 27, no. 10, pp. 1893–1902.

15. Buretta, R. J., Berman, A. S. 1976, "Convective heat transfer in a liquid saturated porous layer" *ASME J. Appl. Mech.*, vol. 43, pp. 249–253.

16. Hardee, H. C., Nilson, R. H. 1977, "Natural convection in porous media with heat generation" *Nucl. Sci. Engng.*, vol. 63, pp. 119–132.

17. Rhee, S. J., Dhir, V. K., Catton, I. 1978, "Natural convection heat transfer in beds of inductively heated particles" *ASME J. Heat Transfer.*, vol. 100, pp. 78–85.

18. Kulacki, F. A., Freeman, R. G. 1979, "A note on thermal convection in a saturated, heat generating porous layer" *ASME J. Heat Transfer*, vol. 101, pp. 169–171.

19. Nield, D.A., Bejan, A., *Convection in Porous Media (5th edition)*, Springer, 2017.

20. Okounkov, G. A., Rybalchenko, A. I., Kuvaev A. A. 2003, "Thermal behaviour of geologic environment used for nuclear waste disposal", *Geojekologija. Inzhenernaja geologija. Gidrogeologija. Geokriologija*, no. 3, pp. 237-244.

21. Kirjuhin, A. V., Kuvaev, A. A. "Modeling of the test case of high-level radioactive waste injection in aquifer with radiogenic heat", *Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Gidrogeologija segodnja i zavtra», MGU* ["Groundwater geology today and tomorrow" international scientific conference proceedings, MSU]. Moscow, 2013, pp. 204–209.

22. Rybalchenko, A. I., Pimenov, M. K., Kostin, P. P. et al., 1994, *Glubinnoe zahoronenie zhidkih radioaktivnyh othodov* [Deep geological liquid radioactive waste disposal], IzdAt, Moscow.

23. Mal'kovskii, V.I., Pek, A.A., Kochkin, B.T., Ozerskii, A.Yu. 2013, "Assessment of potential pollution of the geological environment upon underground disposal of radioactive waste at the "Eniseiskii" site in the Nizhnekanskii mountain range (Krasnoyarsk region)", *Geojekologija. Inzhenernaja geologija. Gidrogeologija. Geokriologija*, no. 6, pp. 483-490.

24. Levin, V.A., 2015, Modeli i metody. *Obrazovanie i razvitie defektov. Nelinejnaja vychislitel'naja mehanika prochnosti. T.1.* [Models and methods. Defect formation and growth. Nonlinear computational mechanics of strength. Vol. 1.], FIZMATLIT, Moscow. (Russian)

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-254-278

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО НАЛОЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ ТЕЛ, ОБРАЗОВАННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЧАСТЕЙ[1]

К. М. Зингерман[2] (г. Тверь), Л. М. Зубов[3] (г. Ростов-на-Дону)

Аннотация

В статье приведены и развиты разработанные совместно с профессором МГУ им. М.В. Ломоносова В.Ан. Левиным подходы к точному аналитическому решению задач о больших деформациях составных изделий (тел) из несжимаемых изотропных нелинейно-упругих материалов, части которых предварительно деформированы. Решение этих задач представляет интерес при анализе напряжений в элементах конструкций, изготавливаемых из предварительно нагруженных частей. Результаты могут быть использованы для тестирования промышленного программного обеспечения, предназначенного для численного моделирования аддитивных технологий.

Постановка задач осуществляется на основе теории наложения больших деформаций и в рамках этой теории может быть сформулирована следующим образом. Части изделия, первоначально не связанные между собой, подвергаются начальному деформированию и переходят в промежуточное состояние. Затем эти части соединяются между собой. Соединение происходит по некоторым поверхностям, общим для каждой пары соединяемых частей. Далее тело, составленное из нескольких частей, деформируется как единое целое под действием приложенной к нему дополнительной нагрузки и переходит в конечное состояние. Предполагается, что на поверхностях, по которым соединены части тела, выполняются условия идеального контакта, т.е. векторы перемещений в соединяемых частях изделия на этих поверхностях совпадают.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки России в рамках базовой части Государственного задания (проект № 9.7446.2017/8.9).

[2]Зингерман Константин Моисеевич, заведующий кафедрой вычислительной математики Тверского государственного университет, Zingerman.KM@tversu.ru

[3]Зубов Леонид Михайлович, профессор кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ, lmzubov@sfedu.ru

Точные решения для изотропных несжимаемых материалов найдены с использованием известных универсальных решений и могут быть рассмотрены как обобщение этих решений на случай наложения больших деформаций.

В статье детально рассмотрены следующие задачи:

— задача о напряженно-деформированном состоянии в двух полых круговых упругих цилиндрах (трубах), один из которых был предварительно деформирован и вставлен в другой цилиндр (задача Ламе-Гадолина);

— задача о кручении составного цилиндра;

— задача о больших деформациях изгиба составного бруса, состоящего из нескольких предварительно деформированных частей (слоев). Приведены математические постановки этих задач, методы и некоторые результаты их решения. Исследовано влияние предварительных деформаций на напряженно-деформированное состояние, анализируются нелинейные эффекты.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, наложение больших деформаций, предварительно деформированные тела, точные аналитические решения, аддитивные технологии.

Библиография: 25 названий.

EXACT SOLUTIONS OF PROBLEMS OF THE THEORY OF REPEATED SUPERPOSITION OF LARGE STRAINS FOR BODIES CREATED BY SUCCESSIVE JUNCTION OF STRAINED PARTS

K. M. Zingerman (Tver), L. M. Zubov (Rostov-na-Donu)

Abstract

Large strains of composite solids made of incompressible isotropic nonlinear-elastic materials are analyzed for the case in which the parts of these solids are preliminarily strained. The approaches to exact analytical solutions of these problems are given and developed in cooperation with V.An. Levin. He is a professor at the Lomonosov Moscow University. The solution of these problems is useful for stress analysis in members containing preliminarily stressed parts. The results can be used for the verification of industrial software for numerical modeling of additive technologies.

The problems are formulated using the theory of repeated superposition of large strains. Within the framework of this theory these problems can be formulated as follows. Parts of a member, which are initially separated from one another, are subjected to initial strain and passes to the intermediate state. Then these parts are joined with one another. The joint is performed by some surfaces that are common for each pair of connected parts. Then

the body, which is composed of some parts, is strained as a whole due to additional loading. The body passes to the final state. It is assumed that the ideal contact conditions are satisfied over the joint surfaces. In other words, the displacement vector in the joined parts is continuous over these surfaces.

The exact solutions for isotropic incompressible materials are obtained using known universal solutions and can be considered as generalizations of these solutions for superimposed large strains.

The following problems are considered in detail:

— the problem of stress and strain state in two hollow circular elastic cylinders (tubes) one of which is preliminarily strained and inserted into another cylinder (the Lamé-Gadolin problem);

— the problem of torsion of a composite cylinder;

— the problem of large bending strains of a composite beam consisting of some preliminarily strained parts (layers). The mathematical statements of these problems are given, the methods of solution are presented, and some results of solution are shown. The impact of preliminary strains on the state of stresses and strains is investigated, and nonlinear effects are analyzed.

Keywords: nonlinear theory of elasticity, superposition of large strains, prestrained bodies, exact analytical solutions, additive technologies.

Bibliography: 25 titles.

1. Введение

В статье приведены и развиты разработанные совместно с профессором МГУ им. М.В. Ломоносова В.Ан. Левиным подходы к точному аналитическому решению задач о больших деформациях составных изделий (тел) из несжимаемых изотропных нелинейно-упругих материалов, части которых предварительно деформированы. Решение этих задач представляет интерес при анализе напряжений в элементах конструкций, изготавливаемых из предварительно нагруженных частей. Результаты могут быть использованы для тестирования промышленного программного обеспечения, предназначенного для численного моделирования аддитивных технологий.

Постановка задач осуществляется на основе теории наложения больших деформаций [1, 2, 3, 4, 5] и в рамках этой теории может быть сформулирована следующим образом. Части изделия, первоначально не связанные между собой, подвергаются начальному деформированию и переходят в промежуточное состояние. Затем эти части соединяются между собой. Соединение происходит по некоторым поверхностям, общим для каждой пары соединяемых частей. Далее тело, составленное из нескольких частей, деформируется как единое целое под действием приложенной к нему дополнительной нагрузки и переходит в конечное состояние. Предполагается, что на поверхностях, по которым соединены части тела, выполняются условия идеального

контакта, т.е. векторы перемещений в соединяемых частях изделия на этих поверхностях совпадают.

Точные решения для изотропных несжимаемых материалов найдены с использованием известных универсальных решений [6, 7, 8] и могут быть рассмотрены как обобщение этих решений на случай наложения больших деформаций.

2. Задача Ламе-Гадолина

Рассматривается для случая конечной плоской деформации задача о напряженно-деформированном состоянии в двух полых круговых упругих цилиндрах (трубах), один из которых был предварительно деформирован и вставлен в другой цилиндр. Эта задача может быть рассмотрена как обобщение задачи Гадолина [10] на случай наложения конечных деформаций [2]. Отметим, что решение этой задачи при малых деформациях хорошо известно. Это решение приведено, например, в [11].

Постановка задачи в общем случае следующая. Первый цилиндр, к внутренней поверхности которого может быть приложено давление, деформируется под действием этого давления и некоторой нагрузки, приложенной к внешней поверхности, таким образом, что его границы сохраняют круговую форму, а внешний радиус уменьшается на заданную величину. Затем этот цилиндр вставляется во второй (недеформированный) цилиндр, внутренняя поверхность которого совпадает с внешней поверхностью первого цилиндра после предварительной деформации. Цилиндры находятся в промежуточном состоянии (для второго цилиндра оно совпадает с недеформированным). Затем нагрузка, приложенная к внешней поверхности первого цилиндра, «мгновенно» убывает до нуля. Цилиндры приходят во взаимодействие. Вследствие этого в них возникают дополнительные деформации и соответствующие им напряжения. Затем возможно изменение давления, приложенного к внутренней поверхности первого цилиндра. Это также приводит к возникновению дополнительных деформаций и напряжений. Границы цилиндров меняются, и они переходят в конечное (текущее) состояние.

Результаты решения этой задачи могут быть использованы при расчете остаточных напряжений, возникающих при запрессовке полых цилиндров, и при исследовании их возможного разрушения под действием этих напряжений на основе различных критериев [14]. Результаты могут быть также применены для тестирования CAE-систем на основе метода конечных элементов, учитывающих эффекты, связанные с перераспределением больших деформаций.

2.1. Математическая постановка задачи.

В данной задаче можно различать три состояния системы цилиндрических тел: начальное, промежуточное и конечное. Для обозначения этих со-

стояний далее используются индексы 0, 1 и 2 соответственно.

Математическая постановка задачи в координатах промежуточного состояния в обозначениях теории наложения больших деформаций [2] имеет следующий вид:

— для промежуточного состояния (т.е. для определения начальной деформации первого цилиндра) записывается уравнение равновесия

$$\overset{1}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,1} = 0, \tag{1}$$

граничные условия

$$\overset{1}{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,1}\Big|_{\Gamma_1^1} = -P\overset{1}{\mathbf{N}}, \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)|_{\Gamma_2^1} = \mathbf{u}_\Gamma, \tag{2}$$

и кинематическое соотношение

$$\boldsymbol{\Psi}_{0,1} = (\overset{1}{\nabla}\mathbf{r}_0)^{-1}. \tag{3}$$

— для конечного состояния (т.е. для задачи о совместном деформировании цилиндров после того, как один из них вставлен в другой) записывается уравнение равновесия

$$\overset{1}{\nabla} \cdot \left[(\boldsymbol{\Psi}_{1,2})^{*\,-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2}\right] = 0, \tag{4}$$

граничные условия

$$\overset{2}{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2}\Big|_{\Gamma_1^2} = -P\overset{2}{\mathbf{N}}, \quad \overset{2}{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2}\Big|_{\Gamma_3^2} = 0, \tag{5}$$

и кинематические соотношения

$$\boldsymbol{\Psi}_{1,2} = \overset{1}{\nabla}\mathbf{r}_2 = \mathbf{I} + \overset{1}{\nabla}\mathbf{u}_2, \quad \boldsymbol{\Psi}_{0,2} = \boldsymbol{\Psi}_{0,1} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{1,2}. \tag{6}$$

Постановка задачи для обоих состояний включает также определяющие соотношения для материала Бартенева–Хазановича [9]

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,n} = 2\mu {\mathbf{F}_{0,n}}^{1/2} - p_{0,n}\mathbf{I}, \quad \mathbf{F}_{0,n} = \boldsymbol{\Psi}^*_{0,n} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{0,n}, \quad n = 1, 2 \tag{7}$$

и условия несжимаемости

$$\det \boldsymbol{\Psi}_{k,n} = 1, \quad n = 1, 2, \quad k < n. \tag{8}$$

Кроме того, в постановку задачи входит условие непрерывности вектора $\mathbf{r}_2$ и вектора нормальных напряжений $\overset{2}{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2}$ на границе Γ_2^2 между цилиндрами в текущем состоянии. Здесь использованы следующие обозначения: $\boldsymbol{\sigma}_{0,n}$ — тензор истинных полных для n-го состояния напряжений; $\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{k,n}}$ — аффинор деформации при переходе из сосотяния k в состояние n; $\mathbf{F}_{0,n}$ — мера деформации, соответствующая мере Фингера при переходе из состояния k

в состояние n; $\mathbf{u}_n$ — вектор перемещений при переходе из $(n-1)$-го в n-е состояние; Γ_1^k и Γ_2^k — внутренняя и внешняя граница первого цилиндра в k-м состоянии соответственно (Γ_2^k при $k = 1, 2$ является и внутренней границей второго цилиндра в соответствующем состоянии); Γ_3^k — внешняя граница второго цилиндра в k-м состоянии; $\mathbf{u}_\Gamma$ — заданный вектор смещения внешней границы первого цилиндра при его начальной деформации; P — давление, приложенное к внутренней границе первого цилиндра.

Отметим, что вследствие осевой симметрии задачи вектор единичной нормали к границам цилиндров не меняется при деформации, т.е. $\overset{2}{\mathbf{N}} = \overset{1}{\mathbf{N}}$. Это позволяет переписать граничные условия (5) и условие непрерывности вектора нормальных напряжений в координатах промежуточного состояния.

Рассмотрим решение задачи в цилиндрической системе координат (r, θ, z). Пусть r_0 — радиальная координата частицы в начальном состоянии, r — в промежуточном, ρ — в конечном. Обозначим через b внутренний радиус первого цилиндра в промежуточном состоянии. Его внешний радиус в этом состоянии без ограничения общности можно считать равным 1. Пусть внешний радиус первого цилиндра в начальном состоянии равен $1 + e$, а внешний радиус второго цилиндра до деформации — c.

2.2. Нахождение решения.

Для решения применяется известный подход, основанный на использовании универсального решения задачи об осесимметричной деформации полого цилиндра из несжимаемого изотропного материала при больших деформациях [7]. Отличие состоит в том, что в данном случае деформирование осуществляется в два этапа, поэтому необходимо сначала определить начальные деформации, а затем — дополнительные.

Интегрирование условий несжимаемости (8) с учетом осевой симметрии задачи (и в предположении о том, что движение частиц происходит только в радиальном направлении) позволяет получить выражения для r_0 и ρ через r с точностью до постоянной. После подстановки полученных выражений в кинематические и определяющие соотношения и затем в уравнения равновесия получаются линейные дифференциальные уравнения для множителей Лагранжа $p_{0,n}$ $(n = 1, 2)$. Решение этих уравнений позволяет определить $p_{0,n}$ и затем — напряжения. Постоянные определяются из граничных условий.

Сначала определим начальную деформацию первого цилиндра. Условие несжимаемости (8) при $n = 1$ может быть записано в виде $\dfrac{r_0}{r}\dfrac{dr_0}{dr} = 1$, откуда

$$r_0 = \sqrt{r^2 + C}. \tag{9}$$

Диагональные компоненты аффинора начальных деформаций с учетом (9) определяются по формулам

$$(\Psi_{0,1})_{rr} = \left(\frac{dr_0}{dr}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{r^2 + C}}{r}, \quad (\Psi_{0,1})_{\theta\theta} = \frac{r}{r_0} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + C}}, \quad (\Psi_{0,1})_{zz} = 1,$$

а недиагональные компоненты равны нулю.

Подстановка этих компонент в определяющие соотношения (7) дает:

$$(\sigma_{0,1})_{rr} = \frac{2\,\mu\,\sqrt{r^2+C}}{r} + p_{0,1}, \quad (\sigma_{0,1})_{\theta\theta} = \frac{2\,\mu\,r}{\sqrt{r^2+C}} + p_{0,1}. \tag{10}$$

Наконец, после подстановки выражений (10) в уравнение равновесия

$$\frac{d}{dr}\left[(\sigma_{0,1})_{rr}\right] + \frac{1}{r}\left[(\sigma_{0,1})_{rr} - (\sigma_{0,1})_{\theta\theta}\right] = 0$$

получается дифференциальное уравнение для $p_{0,1}$:

$$\frac{d}{dr}(p_{0,1}) = 0,$$

откуда $p_{0,1} = B$, B — постоянная. Подстановка этого выражения в формулы (10) позволяет получить окончательные выражения для начальных напряжений. Постоянные C и B определяются из граничных условий (2), которые могут быть записаны в виде

$$r_0|_{r=1} = 1 + e, \quad (\sigma_{0,1})_{rr}\big|_{r=b} = -P.$$

В частности, первое из этих условий с учетом (9) позволяет найти C:

$$C = 2\,e + e^2. \tag{11}$$

Найдем теперь дополнительные деформации. Характеристики напряженно-деформированного состояния в первом цилиндре будем помечать верхним индексом int, а во втором цилиндре — индексом ext. Индекс 0,2, указывающий номера состояний (0 — начальное, 2 — конечное), будем для краткости опускать. Тензор дополнительных деформаций $\mathbf{\Psi}_{1,2}$ будем обозначать через $\mathbf{\Phi}$, чтобы отличать его от тензора полных деформаций $\mathbf{\Psi}_{0,2} = \mathbf{\Psi}$.

Условие несжимаемости $\det \mathbf{\Psi}_{1,2} = 1$ может быть записано в виде $\dfrac{\rho}{r}\dfrac{d\rho}{dr} = 1$, откуда

$$\rho = \sqrt{r^2+Q}, \tag{12}$$

Q — постоянная. Поскольку должно выполняться условие непрерывности ρ на границе между цилиндрами, значение этой постоянной будет одним и тем же для обоих цилиндров.

Ненулевые компоненты аффинора дополнительных деформаций с учетом (12) определятся следующим образом:

$$\Phi_{rr} = \frac{d\rho}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2+Q}}, \quad \Phi_{\theta\theta} = \frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{r^2+Q}}{r}, \quad \Phi_{zz} = 1. \tag{13}$$

Для ненулевых компонент аффинора полных деформаций в первом цилиндре имеют место следующие выражения:

$$\Psi^{\mathrm{int}}_{rr} = (\Psi_{0,1})_{rr}\Phi_{rr} = \frac{\sqrt{r^2+2\,e+e^2}}{\sqrt{r^2+Q}}, \quad \Psi^{\mathrm{int}}_{\theta\theta} = (\Psi_{0,1})_{\theta\theta}\Phi_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{r^2+Q}}{\sqrt{r^2+2\,e+e^2}},$$

$$\Psi_{zz}^{\text{int}} = 1.$$

Во втором цилиндре начальные деформации отсутствуют, поэтому полные деформации в нем равны дополнительным.

После подстановки компонент этих тензоров в определяющие соотношения (7) имеем:

$$\sigma_{rr}^{\text{int}} = \frac{2\,\mu\,\sqrt{r^2+2\,e+e^2}}{\sqrt{r^2+Q}} + p^{\text{int}}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{\text{int}} = \frac{2\,\mu\,\sqrt{r^2+Q}}{\sqrt{r^2+2\,e+e^2}} + p^{\text{int}}, \tag{14}$$

$$\sigma_{rr}^{\text{ext}} = \frac{2\,\mu\,r}{\sqrt{r^2+Q}} + p^{\text{ext}}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}} = \frac{2\,\mu\,\sqrt{r^2+Q}}{r} + p^{\text{ext}}. \tag{15}$$

Уравнение равновесия (4) для внутреннего цилиндра может быть записано в виде

$$\frac{d}{dr}\left[\sigma_{rr}^{\text{int}}/\Phi_{rr}\right] + \frac{1}{r}\left[\sigma_{rr}^{\text{int}}/\Phi_{rr} - \sigma_{\theta\theta}^{\text{int}}/\Phi_{\theta\theta}\right] = 0.$$

Аналогично записывается уравнение равновесия для внешнего цилиндра. Подставляя в эти уравнения выражения (13), (14), (15), получаем дифференциальные уравнения для множителей Лагранжа

$$\frac{d}{dr}(p^{\text{ext}}) = 0, \quad \frac{d}{dr}(p^{\text{int}}) = 0,$$

откуда

$$p^{\text{int}} = B^{\text{int}}, \quad p^{\text{ext}} = B^{\text{ext}}, \tag{16}$$

B^{int} и B^{ext} — постоянные. Подстановка этих выражений в формулы (14), (15) позволяет получить окончательные выражения для напряжений. Постоянные Q, B^{int} и B^{ext} определяются из граничных условий (5) и условия непрерывности нормальных напряжений на границе между цилиндрами. С учетом сделанного выше замечания о неизменности единичых нормалей к цилиндрическим поверхностям при деформации эти условия могут быть записаны в виде

$$\sigma_{rr}^{\text{int}}\big|_{r=b} = -P, \quad \sigma_{rr}^{\text{ext}}\big|_{r=c} = 0, \quad \sigma_{rr}^{\text{ext}}\big|_{r=1} = \sigma_{rr}^{\text{int}}\big|_{r=1}.$$

После подстановки в эти условия выражений (14), (15), (16) они запишутся в виде

$$\frac{2\,\mu\,\sqrt{b^2+2\,e+e^2}}{\sqrt{b^2+Q}} + B^{\text{int}} = -P, \quad \frac{2\,\mu\,c}{\sqrt{c^2+Q}} + B^{\text{ext}} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{2\,\mu\,\sqrt{1+2\,e+e^2}}{\sqrt{1+Q}} + B^{\text{int}} - \frac{2\,\mu}{\sqrt{1+Q}} - B^{\text{ext}} = 0. \tag{18}$$

Выражая B^{int} и B^{ext} из уравнений (17) и подставляя полученные выражения в (18), получаем уравнение

$$2\,\mu\left[\frac{\sqrt{1+2\,e+e^2}}{\sqrt{1+Q}} - \frac{\sqrt{b^2+2\,e+e^2}}{\sqrt{b^2+Q}} - \frac{1}{\sqrt{1+Q}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+Q}}\right] = P,$$

из которого может быть найдена постоянная Q. Решив это нелинейное уравнение численно, можно найти B^{int} и B^{ext} из уравнений (17).

2.3. Результаты числовых расчетов.

Рассмотрим некоторые числовые результаты. Отметим, что в данной задаче более естественно задавать в качестве исходного данного внутренний радиус первого цилиндра не в промежуточном, а в начальном состоянии. Этот радиус (обозначим его b_0) связан с радиусом b в промежуточном состоянии соотношением

$$b = \sqrt{{b_0}^2 - 2\,e - e^2},$$

которое можно получить, подставив $r = b$ и $r_0 = b_0$ в (9) с учетом (11).

Для тонкостенных цилиндров наблюдается немонотонная зависимость напряжений в первом цилиндре от параметра e, т.е. при некотором значении e напряжения с дальнейшим ростом e начинают убывать. В качестве примера рассмотрим случай $c = 1.1$, $b_0 = (1 + e)/1.1$. Для этого случая на рис. 1 дана зависимость напряжения σ_{rr} на границе между цилиндрами от e, а на рис. 2 показаны зависимости напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на границах цилиндров от e. Сплошная линия на этом рисунке соответствует напряжению на внутренней границе первого цилиндра, пунктирная линия с длинными штрихами — напряжению на его внешней границе (эти два напряжения взяты с противоположным знаком), штрихпунктирная линия — напряжению на внутренней границе второго цилиндра, пунктирная линия с короткими штрихами — напряжению на его внешней границе.

[tbh]

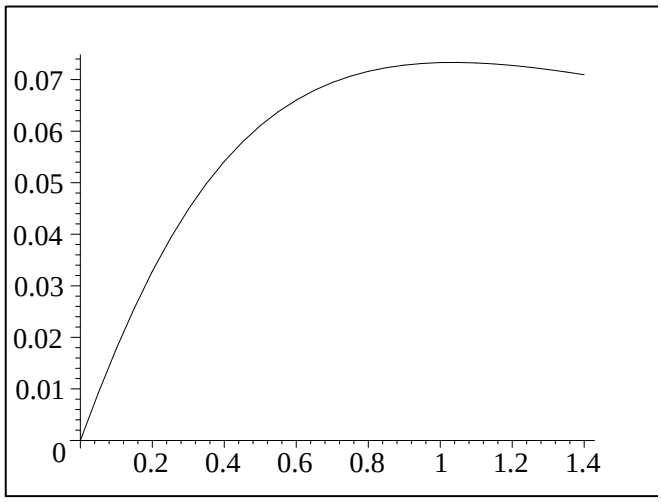


Рис. 1: Зависимость напряжения σ_{rr} на границе между цилиндрами от e для материала Бартенева–Хазановича при $c = 1.1$, $b_0 = (1 + e)/1.1$. Напряжение взято с противоположным знаком

На всех рисунках напряжения отнесены к модулю μ.

[tbh]

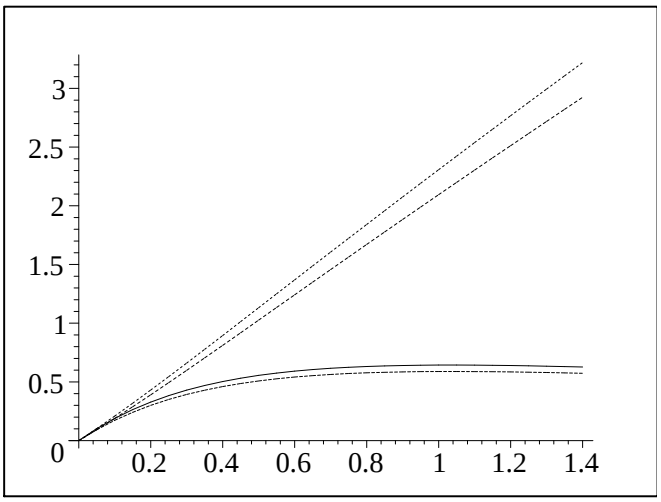


Рис. 2: Зависимости напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на границах цилиндров от e для материала Бартенева–Хазановича при $c = 1.1$, $b_0 = (1 + e)/1.1$

3. Кручение составного цилиндра с предварительно деформированным включением

В данном параграфе приведено решение статической задачи о кручении составного цилиндра из несжимаемых нелинейно-упругих материалов. Цилиндр содержит центральное круговое цилиндрическое включение, которое предварительно скручено и растянуто (или сжато) вдоль оси и скреплено с ненапряженным внешним полым цилиндром. Точное аналитическое решение этой задачи для произвольных нелинейно-упругих изотропных несжимаемых материалов получено [12, 13] на основе универсального решения для несжимаемого материала — решения задачи о кручении, растяжении и изменении диаметра круглого цилиндра [15, 6, 7, 16]. Детальный анализ решения выполнен для случая, когда цилиндры изготовлены из материалов типа Муни [17].

Постановка задачи в рамках теории наложения больших деформаций может быть сформулирована следующим образом. В начальном состоянии во внутреннем цилиндре отсутствуют напряжения и деформации. Этот цилиндр подвергается начальному деформированию — скручиванию и осевому растяжению или сжатию, которое вследствие несжимаемости материала цилиндра сопровождается изменением его диаметра. В результате этой деформации цилиндр переходит в промежуточное состояние, в котором он находится в равновесии. Далее этот цилиндр вставляется в полый недеформированный цилиндр, внутренний радиус которого совпадает с радиусом первого (сплошного) цилиндра. Цилиндры скрепляются и подвергаются совместной дополнительной деформации — скручиванию и осевому растяжению или сжатию,

которое, как и ранее, сопровождается изменением диаметров цилиндров. Составной цилиндр переходит в конечное состояние, в котором он находится в равновесии. Боковая поверхность составного цилиндра в этом состоянии считается свободной от нагрузок, а к его основаниям приложены осевая сила и крутящий момент (рис. 3).

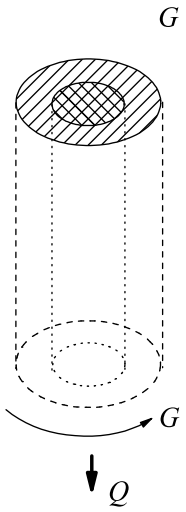


Рис. 3: Схема нагружения составного цилиндра. Q — осевая сила, G — крутящий момент.

Решение этой задачи позволяет, в частности, исследовать эффект Пойнтинга, который состоит в изменении длины цилиндрического тела при кручении [18]; исследование этого эффекта для однородного цилиндра из несжимаемого материала выполнено в [19].

3.1. Основные обозначения.

Для краткости будем опускать в этом параграфе нижние индексы у тензоров, описывающих переход из начального в конечное состояние.

$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{0,2}$ — тензор напряжений Коши,

$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{0,2}$ — мера деформации Фингера,

$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}_{0,2}$ — аффинор полной деформации,

$\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{init}} = \boldsymbol{\Psi}_{0,1}$ — аффинор начальной деформации, соответствующей переходу из начального состояния в промежуточное,

$\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{add}} = \boldsymbol{\Psi}_{1,2}$ — аффинор дополнительной деформации, т.е. деформации при переходе из промежуточного состояния в конечное;

$\mathrm{tr}\mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$ — след тензора второго ранга $\mathbf{A}$,

$\mathbf{R}$ — радиус-вектор частицы в конечном состоянии,

x_s $(s = 1, 2, 3)$ — декартовы координаты частиц в начальном (недеформированном) состоянии, x'_m $(m = 1, 2, 3)$ — в промежуточном, X_k $(k = 1, 2, 3)$ — в конечном.

$\mathbf{i}_k$ — координатные орты декартовых координат,

p — давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию.

ρ, θ, ζ — цилиндрические координаты частиц внутреннего цилиндра в естественном (недеформированном) состоянии;

r, φ, z — цилиндрические координаты частиц внутреннего цилиндра в промежуточном (предварительно напряженном) состоянии и частиц внешнего цилиндра в естественном (недеформированном) состоянии;

R, Φ, Z — цилиндрические координаты частиц цилиндров в конечном состоянии.

Указанные координаты связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$x_1 = \rho\cos\theta, \quad x_2 = \rho\sin\theta, \quad x_3 = \zeta$$

$$x'_1 = r\cos\varphi, \quad x'_2 = r\sin\varphi, \quad x'_3 = z,$$

$$X_1 = R\cos\Phi, \quad X_2 = R\sin\Phi, \quad X_3 = Z.$$

$\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\zeta, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z$ — орты, касательные координатным линиям цилиндрических координат:

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{i}_1\cos\theta + \mathbf{i}_2\sin\theta, \quad \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}_1\sin\theta + \mathbf{i}_2\cos\theta, \quad \mathbf{e}_\zeta = \mathbf{i}_3;$$

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}_1\sin\varphi + \mathbf{i}_2\cos\varphi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{i}_3;$$

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{i}_1\cos\Phi + \mathbf{i}_2\sin\Phi, \quad \mathbf{e}_\Phi = -\mathbf{i}_1\sin\Phi + \mathbf{i}_2\cos\Phi, \quad \mathbf{e}_Z = \mathbf{i}_3.$$

3.2. Начальная деформация внутреннего цилиндра.

Начальная (предварительная) деформация включения представляет собой осевое растяжение-сжатие и кручение и задается отображением [16, 6, 7, 15]

$$r = r(\rho), \quad \varphi = \theta + \psi_0\zeta, \quad z = \lambda_0\zeta \tag{19}$$

$$\psi_0 = \text{const}, \quad \lambda_0 = \text{const}$$

Тензор $\mathbf{\Psi}_{\text{init}}$, отвечающий начальной деформации (19), имеет следующее выражение

$$\mathbf{\Psi}_{\text{init}} = \frac{dr}{d\rho}\mathbf{e}_\rho\,\mathbf{e}_r + \frac{r}{\rho}\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\varphi + \psi_0 r\mathbf{e}_\zeta\mathbf{e}_\varphi + \lambda_0\mathbf{e}_\zeta\mathbf{e}_z \tag{20}$$

В (19), (20) ψ_0 и λ_0 — угол закручивания и кратность осевого удлинения, определяющие начальную деформацию включения.

На основании (20) из условия несжимаемости

$$\det\mathbf{\Psi}_{\text{init}} = \frac{r}{\rho}\frac{dr}{d\rho}\lambda_0 = 1$$

находим функцию $r(\rho)$:

$$r(\rho) = \lambda_0^{-\frac{1}{2}}\rho \tag{21}$$

С учетом (21) выражение (20) принимает вид

$$\mathbf{\Psi}_{\text{init}} = \lambda_0^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\varphi) + \psi_0 r\mathbf{e}_\zeta\mathbf{e}_\varphi + \lambda_0\mathbf{e}_\zeta\mathbf{e}_z \tag{22}$$

3.3. Деформации и напряжения в составном цилиндре.

Рассмотрим задачу о кручении и растяжении-сжатии составного цилиндра. Цилиндрический стержень, подвергнутый описанной выше начальной деформации, вставляется в полый круговой цилиндр, находящийся в естественном, ненапряженном состоянии. После скрепления центрального включения с внешним цилиндром составной цилиндр подвергается кручению и растяжению-сжатию как одно целое силами, приложенными к торцам цилиндра. Внешний цилиндр в ненапряженном состоянии занимает область $0 \leqslant z \leqslant l,\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_0$. Отсюда находится радиус включения: $0 \leqslant \rho \leqslant \lambda_0^{\frac{1}{2}} r_1$. За отсчетную конфигурацию составного цилиндра примем такую, в которой точки тела имеют цилиндрические координаты r, φ, z. Эта конфигурация является естественной для внешней цилиндрической оболочки и предварительно напряженной для центрального включения. Решение задачи о совместном кручении и осевом растяжении-сжатии составного цилиндра ищем в виде

$$R = R(r), \quad \Phi = \varphi + \psi z, \quad Z = \lambda z, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0 \tag{23}$$

где ψ и λ — угол закручивания и кратность удлинения составного цилиндра (ψ, λ = const). Условие несжимаемости позволяет определить функцию $R(r)$:

$$R(r) = \lambda^{-\frac{1}{2}} r \tag{24}$$

При помощи (23), (24) вычисляется аффинор дополнительной деформации $\mathbf{\Psi}_{\text{add}}$

$$\mathbf{\Psi}_{\text{add}} = \lambda^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi) + \psi R\mathbf{e}_z\mathbf{e}_\Phi + \lambda\mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z \tag{25}$$

Аффинор $\mathbf{\Psi}$ полной деформации для внутреннего цилиндра представляется в виде

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}_{\text{init}} \cdot \mathbf{\Psi}_{\text{add}}; \quad \mathbf{\Psi}_{\text{add}} = \frac{\partial X_k}{\partial x'_m}\mathbf{i}_m\,\mathbf{i}_k, \quad \mathbf{\Psi}_{\text{init}} = \frac{\partial x'_m}{\partial x_s}\mathbf{i}_s\,\mathbf{i}_m \tag{26}$$

Для внешнего цилиндра начальная деформация отсутствует, поэтому для него $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}_{\text{add}}$.

Обозначив через R_1 и R_0 соответственно радиус внутреннего цилиндра и внешний радиус внешнего цилиндра в конечном (деформированном) состоянии, на основании (24) имеем

$$R_1 = R(r_1) = \lambda^{-\frac{1}{2}} r_1, \quad R_0 = R(r_0) = \lambda^{-\frac{1}{2}} r_0. \tag{27}$$

Определяющее соотношение для произвольного изотропного несжимаемого материала имеет вид [6]

$$\boldsymbol{\sigma} = \chi_1(I_1, I_2)\mathbf{F} - \chi_2(I_1, I_2)\mathbf{F}^{-1} - p\mathbf{I}, \tag{28}$$

здесь $\mathbf{F}$ — мера деформации Фингера:

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \boldsymbol{\Psi}, \tag{29}$$

$$\chi_1 = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \chi_2 = 2\frac{\partial W}{\partial I_2},$$

$W\,(I_1,\, I_2)$ — функция удельной потенциальной энергии упругого материала, I_1, I_2 — инварианты деформации: $I_1 = \mathrm{tr}\mathbf{F}$, $I_2 = \mathrm{tr}\,(\mathbf{F}^{-1})$. Далее будем обозначать функции χ_1, χ_2, характеризующие механические свойства материала внутреннего цилиндра, через χ_1^0 и χ_2^0, чтобы отличить их от функций χ_1 и χ_2, характеризующих механические свойства материала внешнего цилиндра.

Учитывая (29), (26), (25), можно получить выражения меры деформации Фингера $\mathbf{F}$, обратного тензора $\mathbf{F}^{-1}$ и инвариантов деформации во внутреннем цилиндре $0 \leqslant R < R_1$ и во внешнем полом цилиндре $R_1 < R \leqslant R_0$. Далее, используя (28), можно получить выражение тензора напряжений Коши в составном цилиндре как функции координат R, Φ, Z в конечном состоянии. Это выражение подставляется в уравнение равновесия, что позволяет найти функцию $p = p(R)$. Зная эту функцию, можно найти окончательные выражения для напряжений [13]. Эти выражения здесь не приводятся ввиду их громоздкости. С использованием этих выражений определяются продольная сила Q и крутящий момент G, приложенные к каждому основанию цилиндра:

$$Q = 2\pi\int\limits_0^{R_0} \sigma_Z R dR, \quad G = 2\pi\int\limits_0^{R_0} \tau_{Z\Phi} R^2 dR \tag{30}$$

3.4. Результаты численных расчетов.

При описании численных результатов будем использовать следующие представления для постоянных материалов:

$$C_1 = \frac{\mu(1+\beta)}{4}, \quad C_2 = \frac{\mu(1-\beta)}{4}, \quad C_1^0 = \frac{\mu_0(1+\beta_0)}{4}, \quad C_2^0 = \frac{\mu_0(1-\beta_0)}{4}, \tag{31}$$

здесь μ_0 и μ — модули сдвига материалов внутреннего и внешнего цилиндров соответственно, β_0 и β — безразмерные постоянные. Отметим, что условиями положительности потенциальной энергии деформации являются неравенства [6]

$$\mu > 0, \quad \mu_0 > 0, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad -1 \leq \beta_0 \leq 1.$$

Численные расчеты были выполнены при следующих значениях параметров: модуль сдвига включения $\mu_0 = 2\mu$, $\beta_1 = \beta = -0.24$, $r_0 = 1.75r_1$, угол начального закручивания $\psi_0 = (r_1)^{-1}$. кратность начального осевого удлинения $\lambda_0 = 2$.

Была исследована зависимость угла закручивания ψ от кратности осевого удлинения λ при полной деформации для случая, когда осевая сила равна 0. Эта зависимость приведена на рис. 4 для разных значений λ_0. Угол закручивания отнесен к величине $(r_1)^{-1}$.

Из рисунка можно видеть, что в составном цилиндре имеет место эффект Пойнтинга, т.е. кручение цилиндра сопровождается его осевым растяжением или сжатием. Если $\lambda_0 < 1$, то при сравнительно малых по модулю углах закручивания имеет место осевое сжатие ($\lambda < 1$), а в остальных случаях — растяжение. Если же $\lambda_0 > 1$, то при любых углах закручивания имеет место осевое растяжение.

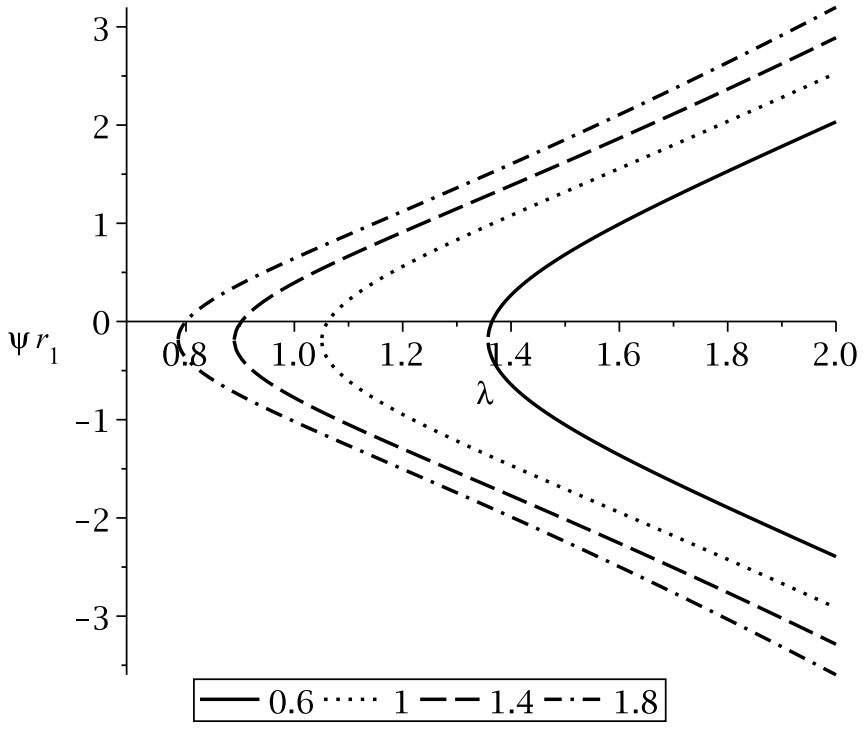


Рис. 4: Зависимость угла закручивания ψ от кратности осевого удлинения λ для разных значений λ_0 (эти значения указаны под рисунком).

Как отмечено в [20, 21], знак эффекта Пойнтинга в нелинейно-упругих материалах зависит от того, выполняются ли для этих материалов дополнительные неравенства, в частности, так называемое эмпирическое неравенство. Указано, что если материал несжимаемый и удовлетворяет эмпирическому неравенству, то для такого материала возможен только положительный эффект Пойнтинга, т.е. при кручении однородного стержня, изготовленного из такого материала, длина стержня увеличивается. Для материала типа Муни эмпирические неравенства совпадают с условиями положительности потенциальной энергии деформации, т.е. $\mu > 0$, $-1 < \beta < 1$. Таким образом, при выполнении этих неравенств в стержне из материала типа Муни возможен только положительный эффект Пойнтинга, т.е. $\lambda > 1$. А для

составных предварительно нагруженных стержней из материалов типа Муни, как видно из рис. 4, возможно как удлинение, так и укорочение. Это нетривиальный эффект, вызванный предварительной деформацией внутренней части стержня.

4. Изгиб составного бруса с предварительно деформированными слоями

В данном параграфе решена плоская задача о больших деформациях изгиба составного бруса, состоящего из нескольких предварительно деформированных частей (слоев). Получено [23] точное аналитическое решение этой задачи для случая, когда брус изготовлен из изотропных нелинейно-упругих несжимаемых материалов. Решение является универсальным для данного класса материалов и обобщает известное универсальное решение для однородного бруса [6, 7, 16].

Механическая постановка задачи следующая. Брусья в форме прямоугольного параллелепипеда из несжимаемого материала, находящиеся в ненапряженном состоянии, подвергаются начальной деформации — растяжению или сжатию — и переходят в промежуточное состояние. Начальная деформация каждого бруса однородна, но различна для разных брусьев. Для некоторых брусьев начальная деформация может отсутствовать. Далее эти брусья соединяются между собой (рис. 5). Предполагается, что на гранях, по которым происходит соединение, выполняются условия идеального контакта, т.е. совпадают перемещения соединяемых брусьев. К торцам составного бруса прикладывается изгибающий момент. Далее составной брус деформируется как единое целое. Под действием изгибающего момента и вследствие начальной деформации слоев происходит его изгиб. Брус переходит в конечное состояние.

4.1. Основные уравнения постановки задачи

Используются те же основные обозначения, что и в предыдущем параграфе.

Постановка задачи осуществляется в координатах промежуточного состояния и включает следующие уравнения.

Уравнение равновесия (массовые силы отсутствуют)

$$\overset{1}{\nabla} \cdot \overset{1}{\mathbf{D}} = 0. \tag{32}$$

Здесь $\overset{k}{\mathbf{D}}$ — несимметричный тензор напряжений Пиолы, определенный в конфигурации k-го состояния. Этот тензор выражается через тензор истинных напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ следующим образом:

$$\overset{1}{\mathbf{D}} = (\det \mathbf{F}_{\text{add}}) \left(\boldsymbol{\Psi}_{\text{add}}^{T}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \tag{33}$$

Упругий потенциал W и определяющие соотношения для несжимаемых изотропных нелинейно-упругих материалов [6]:

$$W = W\left(I_1,\, I_2\right), \tag{34}$$

$$\overset{1}{\mathbf{D}} = \left[\chi_1\left(I_1,\, I_2\right) + I_1\chi_2\left(I_1,\, I_2\right)\right]\boldsymbol{\Psi}_{\text{init}}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} - \chi_2\left(I_1,\, I_2\right)\boldsymbol{\Psi}_{\text{init}}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\Psi} - p\,\left(\boldsymbol{\Psi}_{\text{add}}^T\right)^{-1}, \tag{35}$$

$$\chi_1 = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \chi_2 = 2\frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad I_1 = \operatorname{tr}\mathbf{G}, \quad I_2 = \operatorname{tr}\left(\mathbf{G}^{-1}\right). \tag{36}$$

Здесь I_1, I_2 — инварианты деформации, χ_1, χ_2 — функции отклика материала, p — множитель Лагранжа, определяющий давление в несжимаемом теле.

Условия несжимаемости материала:

$$\det\,\boldsymbol{\Psi}_{\text{init}} = \det\boldsymbol{\Psi}_{\text{add}} = \det\boldsymbol{\Psi} = 1. \tag{37}$$

Кинематические соотношения:

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Psi}^T, \quad \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}_{\text{init}} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{\text{add}}. \tag{38}$$

Рассмотрим плоскую деформацию прямоугольного составного бруса, занимающего в промежуточном состоянии область $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y \leqslant h$ (рис. 5). Через x, y, z обозначены декартовы координаты частицы бруса в промежуточном состоянии. Размер по координате z, один и тот же для всех слоев, значения не имеет. Брус состоит из n слоев, k-й слой занимает в промежуточном состоянии область $h_{k-1} \leqslant y \leqslant h_k$ $(0 = h_0 \leqslant h_1 \leqslant \ldots \leqslant h_{n-1} \leqslant h_n = h)$. Начальная (предварительная) деформация k-го слоя $(k = 1, \ldots, n)$ относительно начального ненапряженного состояния материала однородна и задается следующим аффинором деформации ($\lambda_{(k)} = \text{const}$):

$$\boldsymbol{\Psi}_{\text{init}} = \lambda_{(k)}\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1 + \lambda_{(k)}^{-1}\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\,\mathbf{i}_3, \tag{39}$$

где $\mathbf{i}_j$ — координатные орты.

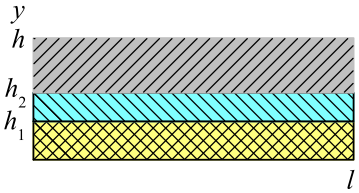


Рис. 5: Форма составного бруса в промежуточном состоянии

Если k-й слой бруса не был предварительно напряжен, то промежуточное состояние этого слоя совпадает с начальным, $\lambda_{(k)} = 1$ и $\mathbf{\Psi}_{\text{init}} = \mathbf{I}$.

Материалы слоев составного бруса могут различаться. Будем далее обозначать функцию потенциальной энергии деформации k-го слоя ($h_{k-1} \leqslant y < h_k$) через $W^{(k)}$, а соответствующие функции отклика через $\chi_1^{(k)}$ и $\chi_2^{(k)}$: $\chi_1^{(k)} = 2\dfrac{\partial W^{(k)}}{\partial I_1}$, $\chi_2^{(k)} = 2\dfrac{\partial W^{(k)}}{\partial I_2}$.

Отметим, что для расматриваемого класса задач $I_1 = I_2$ вследствие условия несжимаемости и условия плоской деформации.

4.2. Нахождение решения задачи.

Дополнительную деформацию составного бруса будем разыскивать в виде, соответствующем нелинейному чистому изгибу [22]

$$X = \rho\,(y)\,\sin\beta\,x, \quad Y = \rho\,(y)\,\cos\beta\,x, \quad Z = z, \quad \beta = \text{const}. \tag{40}$$

где X, Y, Z — декартовы координаты точек бруса в конечном состоянии. При деформации (40) каждая прямая $y = \text{const}$ превращается в дугу окружности с радиусом $\rho\,(y)$. Геометрический смысл параметра β состоит в том, что $\beta\,x$ — угол поворота сечения $x = \text{const}$ вокруг оси, ортогональной плоскости бруса. Форма составного бруса в конечном состоянии показана на рис. 6. Отметим, что при $\beta > 0$ брус изгибается выпуклостью вверх, а при $\beta < 0$ — выпуклостью вниз.

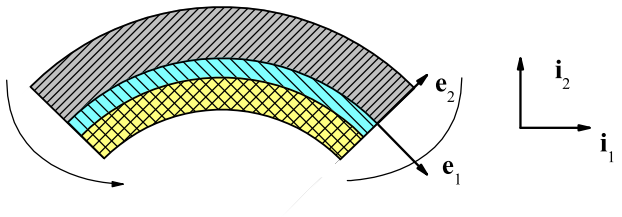


Рис. 6: Форма составного бруса в конечном состоянии

Аффинор дополнительной деформации, отвечающий отображению (40), имеет вид

$$\begin{gathered}\mathbf{\Psi}_{\text{add}} = \beta\rho\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{e}_1 + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}y}\mathbf{i}_2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3\,\mathbf{i}_3, \\ \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1\cos\,\beta\,x - \mathbf{i}_2\sin\,\beta\,x, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_1\sin\,\beta\,x + \mathbf{i}_2\cos\,\beta\,x.\end{gathered} \tag{41}$$

Для k-го слоя бруса в соответствии с формулами (38), (39), (41)

$$\mathbf{\Psi} = \lambda_{(k)}\beta\rho\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{e}_1 + \lambda_{(k)}^{-1}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}y}\mathbf{i}_2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3\,\mathbf{i}_3. \tag{42}$$

Вычисляемая на основании (38), (41), (42) мера деформации Коши–Грина для k-го слоя бруса (в области $h_{k-1} < y < h_k$) имеет следующий вид:

$$\mathbf{G} = {\lambda_{(k)}}^2 \beta^2 \rho^2 \mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1 + {\lambda_{(k)}}^{-2} \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}y}\right)^2 \mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\,\mathbf{i}_3. \tag{43}$$

Эта мера деформации не зависит от координаты x, что обеспечивает сведение исходной двумерной задачи к одномерной.

Функция $\rho\,(y)$ находится из условия несжимаемости

$$\beta\rho\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}y} = 1. \tag{44}$$

Уравнение (44) имеет следующее решение:

$$\rho^2 = \rho_0^2 + 2\beta^{-1}y, \quad \rho_0 = \rho\,(0), \tag{45}$$

где ρ_0 — неизвестная постоянная.

Подстановка полученных выражений в определяющие соотношения позволяет найти напряжения. Подставив выражения для напряжений в уравнения равновесия, можно найти функцию p для каждого слоя бруса. Для нахождения постоянных интегрирования используются граничные условия

$$D_{22}^{(1)}(0) = 0, \quad D_{22}^{(n)}(h) = 0, \tag{46}$$

обозначающие отсутствие нагружения оснований составного бруса, и условия сопряжения на поверхностях раздела слоев

$$D_{22}^{(k-1)}(h_k) = D_{22}^{(k)}(h_k), \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{47}$$

Для того, чтобы удовлетворить краевым условиям на концах бруса $x = 0$, $x = l$ в интегральном смысле, определим главный вектор $\mathbf{f}$ и главный момент $\mathbf{M}$ сил, действующих в сечении $x = \mathrm{const}$ при деформации вида (40). Из уравнений равновесия и граничных условий (46), (47) вытекает, что $\mathbf{f} = 0$ [24, 25]. Поскольку главный вектор равен нулю, главный момент не зависит от точки приведения (полюса). Выбирая за полюс центр окружностей, в которые переходят при изгибе бруса прямые $y = \mathrm{const}$, получим

$$\mathbf{M} = M\,\mathbf{i}_3, \quad M = M(\beta) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{h_{k-1}}^{h_k} D_{11}^{(k)} \rho\, dy. \tag{48}$$

Согласно (48) изгибающий момент одинаков во всех сечениях бруса. Это означает, что реализация деформации изгиба (40) требует приложения к концам бруса только изгибающих моментов, величина которых определяется формулой (48). Функция $M\ (\beta)$ является основной характеристикой, определяющей сопротивление составного бруса при изгибе.

4.3. Результаты численных расчетов

Приведем некоторые результаты численных расчетов для материала Трелоара (неогуковского материала) [6], когда $\chi_1^{(k)} = \mu_k = \text{const}$, $\chi_2^{(k)} = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

На рис. 7, 8 даны результаты расчетов для трехслойного бруса ($n = 3$) при $h_2 = 3h_1$, $h_3 = h = 5h_1$, $\mu_2 = 2\mu_1$, $\mu_3 = \mu_1$, $\lambda_{(1)} = \lambda_{(3)} = 1$ (т.е. нижний и верхний слои предварительно не деформированы и имеют одинаковые свойства, а предварительно деформирован только средний слой; кратность $\lambda_{(2)}$ начального удлинения этого слоя в направлении оси x будем обозначать через λ).

На рис. 7 показаны зависимости изгибающего момента M от параметра β для разных значений начального удлинения λ. Эти зависимости монотонны и асимптотически стремятся к некоторым предельным значениям, зависящим от λ, при $\beta \to \pm\infty$.

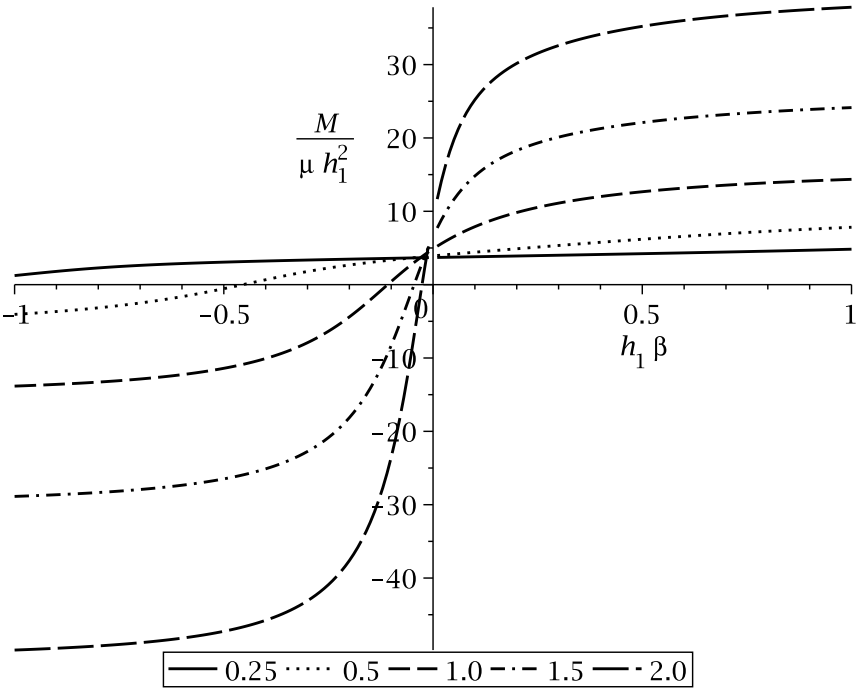


Рис. 7: Зависимости изгибающего момента M от параметра β для разных значений кратности начального удлинения λ для материала Трелоара (значения λ указаны под рисунком)

На рис. 8 приведена зависимость параметра β от кратности начального удлинения λ для случая $M = 0$, т.е. при отсутствии внешних нагрузок. Можно видеть, что если средний слой бруса предварительно растянут в направлении оси x (т.е. при $\lambda > 1$), то брус изгибается выпуклостью вверх, а если этот слой предварительно сжат ($\lambda < 1$), то брус изгибается выпуклостью вниз.

Отметим также, что зависимость $\lambda(\beta)$ при отсутствии внешних нагрузок немонотонна и имеет точку максимума при $\lambda \approx 1.75$. Это означает, что в случае предварительного растяжения среднего слоя существует предельный относительный угол поворота поперечных сечений бруса при отсутствии внешних нагрузок.

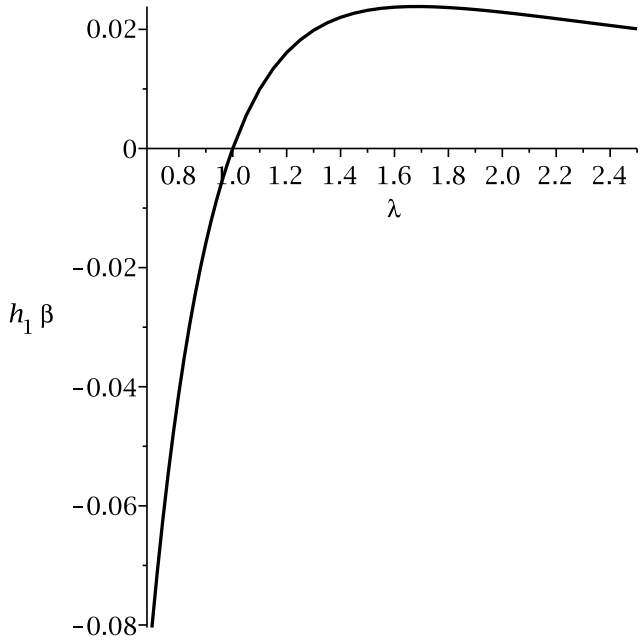


Рис. 8: Зависимость параметра β от кратности начального удлинения λ для материала Трелоара при отсутствии изгибающего момента

Авторы благодарят профессора В.Ан. Левина (МГУ им. М.В. Ломоносова) за совместное обсуждение подходов к постановке задач и результатов их решения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Levin V.A. Theory of repeated superposition of large deformations. Elastic and viscoelastic bodies// International Journal of Solids and Structures. 1998. V. 35. P. 2585–2600.

2. Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. М.: Наука. Физматлит, 1999. 224 с.

3. Левин В.А., Зингерман К.М. Плоские задачи многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М.: Физматлит, 2002. 272 с.

4. V.A. Levin, K.M. Zingerman, A.V. Vershinin, E.I. Freiman, A.V. Yangirova. Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in

previously loaded viscoelastic bodies at finite strains// International Journal of Solids and Structures. 2013. Vol. 50. Issue 20-21. P. 3119–3135.

5. Levin V.A., Vershinin A.V. Non-stationary plane problem of the successive origination of stress concentrators in a loaded body. Finite deformations and their superposition// Communications in Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 24. P. 2229–2239.

6. Лурье А.И Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

7. Труселл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. — 592 с.

8. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear, and flexure// Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1949. A252. P. 173–195.

9. Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н. О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. 1960. Т. 2, № 1. С.20–28.

10. Гадолин А.В. Теория орудий, скрепленных обручами. Артиллерийский журнал. 1861, № 12.

11. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1994. 560 с.

12. Левин В.А., Зубов Л.М., Зингерман К.М. Кручение составного нелинейно упругого цилиндра с предварительно напряжённым включением // Докл. РАН. 2013. Т. 453, № 5. С. 507-–510.

13. Levin V.A., Zubov L. M., Zingerman K. M. The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains // Int. J. Solids a. Struct. 2014. V. 51. № 6. P. 1403–1409.

14. Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. (под редакцией В.А. Левина) Избранные нелинейные задачи механики разрушения. М.: Физматлит, 2004. — 407 с.

15. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1955. 445 с.

16. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials // Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1948. A240. P. 459-508.

17. Moony M.A. Theory of large elastic deformation // Journal of Applied Physics. 1940. № 11. P. 582-592.

18. Poynting J. H. On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted// Proc. R. Soc. Lond. A 1909 **82**, p. 546–559.

19. Зубов Л.М. О прямом и обратном эффекте Пойнтинга в упругих цилиндрах // Докл. РАН. 2001. Т. 380, № 2. С. 194–196.

20. Mihai L.A., Goriely A. Positive or negative Poynting effect? The role of adscititious inequalities in hyperelastic materials // Proc. R. Soc. A. 2011. V. 467. P. 3633—3646.

21. Moon H., Truesdell C. Interpretation of adscititious inequalities through the effects pure shear stress produces upon an isotropic elastic solid // Arch. Ration. Mech. Anal. 1974. V. 55. P. 1-–17.

22. Зеленина А. А, Зубов Л.М. Нелинейная теория чистого изгиба призматических упругих тел// Прикл. мат. и мех. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 416–424.

23. Левин В.А., Зубов Л.М., Зингерман К.М. Точное решение задачи о нелинейном изгибе составного бруса с предварительно деформированным слоем при конечных деформациях // Докл. РАН. 2015. Т. 460, № 2. С. 155-–158.

24. Levin V.A., Zubov L. M., Zingerman K. M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains // Int. J. Solids a. Struct. 2015. V. 67—68. P. 244-–249.

25. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains. Part 2. Solution for different types of incompressible materials // International Journal of Solids and Structures. 2016. V.100-101. P.558-565.

REFERENCES

1. Levin V.A. Theory of repeated superposition of large deformations. Elastic and viscoelastic bodies. *International Journal of Solids and Structures.* 1998. V. 35. P. 2585–2600.

2. Levin, VA 1999, *Mnogokratnoe nalozhenie bol'shih deformaciy v uprugih i vyazkouprugih telah [Repeated superposition of large deformationsin elastic and viscoelastic bodies],* Fizmatlit, Moscow.

3. Levin, VA & Zingerman, KM 2002, *Ploskie zadachi mnogokratnogo nalozheniya bol'shih deformaciy. Metody resheniya. [Plane problems of repeated superposition of large strains. Methods of solution]* Fizmatlit, Moscow.

4. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Vershinin, A.V., Freiman, E.I., Yangirova, A.V. 2013. "Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains"*Int. J. Solids and Structures.* Vol. 50. Issue 20-21. P. 3119–3135.

5. Levin V.A., Vershinin A.V. 2008. "Non-stationary plane problem of the successive origination of stress concentrators in a loaded body. Finite deformations and their superposition" *Communications in Numerical Methods in Engineering.* Vol. 24. P. 2229–2239.

6. Lurie, AI. 1980, *Nelineynaya teoriya uprugosti [Nonlinear theory of elasticity]* Nauka, Moscow.

7. Truesdell, C. 1972, *A First Cource in Rational Continuum Mechanics.* Baltimore, Maryland, The Johns Hopkins University.

8. Rivlin R.S. 1949. "Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear, and flexure." *Philos. Trans. Roy. Soc. London* , Vol. A252. P. 173–195.

9. Bartenev, G.M., Khazanovich, T.N. 1960. "The law of high-elastic strains of mesh polymers". *Vysokomolekulyarnye soedineniya.* Vol. 2, № 1. P. 20–28.

10. Gadolin, A.V., 1861. "Theory of cannons fastened by bands." *Artilleriyskiy zhurnal.* 1861, № 12.

11. Sedov, LI 1994, *Mekhanika Sploshnoy Sredy [Mechanics of Continuous Medium]* Vol. 2. Nauka, Moscow.

12. Levin, V.A., Zubov, L.M. & Zingerman, K.M. 2013 "Torsion of a composite nonlinear elastic cylinder with a prestressed inclusion," *Doklady Physics*, Vol. 58, No. 12, pp. 540–543.

13. Levin V.A., Zubov L.M. & Zingerman K.M. 2014. "The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains" *Int. J. Solids a. Struct.* Vol. 51. № 6. P. 1403–1409.

14. Levin, VA, Morozov, EM & Matvienko Yu.G. (Ed. by V.A. Levin). 2004, *Izbrannye Nelineinye Zadachi Mehaniki Razrusheniya [Selected Nonlinear Problems of Fracture Mechanics]* Fizmatlit, Moscow.

15. Green, A.E., & Adkins, J.E., 1960. Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics. Oxford, Clarendon Press.

16. Rivlin R.S. 1948. "Large elastic deformations of isotropic materials" *Philos. Trans. Roy. Soc. London,* Vol. A240. P. 459–508.

17. Moony, M.A. 1940. "Theory of large elastic deformation," *Journal of Applied Physics.* № 11. P. 582-592.

18. Poynting J. H. 1909, "On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted," *Proc. R. Soc. Lond. A.* Vol. 82, pp. 546–559.

19. Zubov, L.M., 2001. "Direct and inverse Poynting effects in elastic cylinders," *Doklady Physics* Vol. 46, pp. 675-–677.

20. Mihai, L.A., Goriely, A., 2011. "Positive or negative Poynting effect? The role of adscititious inequalities in hyperelastic materials," *Proc. R. Soc. A.* V. 467. P. 3633—3646.

21. Moon, H., Truesdell, C. 1974. "Interpretation of adscititious inequalities through the effects pure shear stress produces upon an isotropic elastic solid," *Arch. Ration. Mech. Anal.* Vol. 55. P. 1-–17.

22. Zelenina, A.A., & Zubov, L.M., 2000. "The non-linear theory of the pure bending of prismatic elastic solids," *J. Appl. Math. Mech.* Vol. 64, pp. 399–406.

23. Levin, V.A., Zubov L.M., Zingerman, K.M., 2015. "Exact solution of the nonlinear bending problem for a composite beam containing a prestressed layer at large strains," *Doklady Physics*. Vol. 60, No. 1. P. 24–27.

24. Levin V.A., Zubov L.M., & Zingerman, K.M. 2015. "An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains," *Int. J. Solids a. Struct.* Vol. 67—68. P. 244-–249.

25. Levin V.A., Zubov L.M., & Zingerman, K.M. 2016. "An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains. Part 2. Solution for different types of incompressible materials," *International Journal of Solids and Structures.* Vol.100–101. P.558–565.

Тверской государственный университет.
Южный федеральный университет.
Получено 10.07.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3, 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-279-289

МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕГРАДАЦИИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЛАГИ

Зифенг Юань, Джейкоб Фиш (г. Колумбия)

Аннотация

Имеется множество факторов, влияющих на деградацию композиционных материалов под действием окружающей среды. В настоящей работе изучается два источника деградации. Во-первых, мы исследуем накопление повреждений в материале, состоящем из углеродных волокон и эпоксидной смолы, при циклическом нагружении. Во-вторых, развит многомасштабный и мультифизический подход к исследованию деградации материала, состоящего из стекловолокна и нейлона, вследствие накопления влаги. Мультифизический и многомасштабный подход учитывает совместное протекание реакционно-диффузионных и механических процессов на нескольких масштабных уровнях.

Ключевые слова: Композиционные материалы, многомасштабный многофизический подход, деградация композиционных материалов.

Библиография: 24 название.

REDUCED ORDER MULTISCALE ANALYSIS OF MOISTURE DEGRADATION IN COMPOSITE MATERIALS

Zifeng Yuan[1], Jacob Fish[2] (Colombia)

Abstract

There are variety of factors affecting degradation of composite materials due to environmental effects. In the present manuscript, two sources of degradation are studied. We first consider an accumulation of damage in carbon-fiber/epoxy-resin material system subjected to cyclic load. A

[1]Zifeng Yuan, Postdoctoral Researcher at Columbia University in the City of New York
[2]Jacob Fish, The Carleton Professor, Columbia University in the City of New York (Civil Engineering and Engineering Mechanics), fishj@columbia.edu

multiscale-multiphysics approach is developed for degradation of glass-fiber/Nylon material system due to moisture accumulation. A multiphysics-multiscale approach couples diffusion-reaction-mechanical process at multiple spatial scales.

Keywords: Composite materials, multi-scale multi-physical approach, degradation of composite materials.

Bibliography: 24 titles.

1. Introduction

Composites are widely used in aircraft, automotive and other industries due to their light weight, high strength and stiffness. Behavior of composite materials subjected to various environmental effects is not fully understood due to variety of factors, chief among them is understanding of the complex interplay between multiple spatial and temporal scales and interacting multiple physical processes. Herein, we focus on accumulation of moisture in glass-fiber/Nylon material system.

Considerable research efforts have been devoted towards developing predictive multiphysics simulation capabilities. For instance, Gerad et al. [1, 2] studied the coupling between chemical leaching in underground cementitious structures in the presence of water. Ulm et al. [3] pioneered a homogenization-based chemo-mechanical approach aimed at understanding the effect of chemical leaching on the structural integrity of concrete structures. Terada and Kurumatani [4] developed a two-scale diffusion-deformation model to analyze microcrack propagation and aging in quasi brittle solids in the presence of moisture. Yu and Fish [5] developed a space-time homogenization approach to resolve complex deformation processes in thermo-viscoelastic composites. Kuznetsov and Fish [6] devised an efficient coupling scheme between electrical and mechanical field in heterogeneous solids. In recent paper Klepach and Zohdi developed strongly-coupled, deformation-dependent diffusion model in composite media at finite strains [7]. This model based on computational multiphysics framework developed in [8, 9, 10]. Bailakanavar et al developed reduced order multiscale-multiphysics approach for chopped fiber composites [11]. An excellent treatise of coupled chemo-thermo-mechanical ageing processes of elastomers based thermodynamically coupled material model has been given by Johlitz and Lion. This work is based multiphase continuum theory [15–19] that finds its roots in earlier work of Truesdell [20].

Molecular processes occurring during penetration of fluid into a polymeric material systems are not well understood primarily due to lack of experimental data at that scale. There is no experimental data on mobility of polymer chains, their polarization, and configuration of free spaces occupied by the penetrant. Obviously, one can consider idealized scenarios with respect to molecular structure, and consequently postulate Gibbs free energy of mixtures, but without experimental backing for the material system of choice, such an approach will

have limited practical use. Our goals are less ambitions in this regard. We will not postulate energy or entropy equations and will not attempt to derive a thermodynamically consistent framework for processes that presently are not well understood. The primary objectives are follows: (i) postulate physically motivated constitutive equations of the mechano-diffusion model at a microscale, i.e. at a level of microconstituents, i.e. fiber-matrix scale; (ii) upscale the coupled physics micromechanical model using classical mathematical homogenization theory; (iii) focus on model reduction of the two physical processes that would permit effective consideration of component scale (macro problems) having complex microstructure; (iv) identify model parameters appearing in the micromechanical model against uniform field macroscopic experiments, and (v) validate the model against more complex experiments (4-point bending problem).

We study degradation of glass-fiber/Nylon due to moisture accumulation. We consider coupling of three physical fields: diffusion and reaction of water with Nylon, and subsequent degradation of mechanical properties. The problem is a two-way coupled. On the one hand, water, which is absorbed by Nylon affects mechanical behavior. On the other hand, the mechanical damage accelerates diffusion of water. A first-order computational homogenization (FOCH) is employed for both diffusion-reaction and mechanical problems. Simulation results are compared to experimental measurements conducted at General Motors [21].

2. Diffusion-reaction process for glass-fiber-Nylon with moisture

2.1. Constitutive model of resin

Herein, we study environmental degradation of glass-fiber/Nylon material system caused by moisture accumulation, where water is absorbed by Nylon and, consequently, its strength decreases [22]. Water diffusion is enhanced by formation of microcracks. Thus, the process is a two-way coupled multiscale-multiphysics problem. The unit cell consists of random chopped fibers embedded in an epoxy resin as shown in Figure 1.

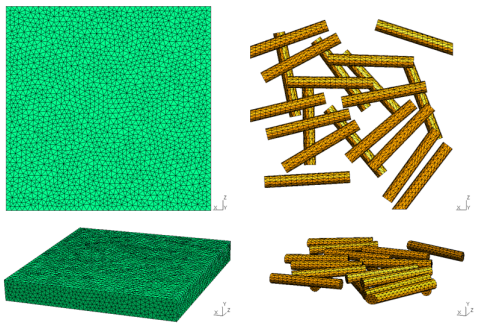


Рис. 1: Microstructure of random chopped glass fibers (right) embedded in the epoxy resin (left)

The process of absorption of Nylon and water molecules consists of two stages depicted in Figure 2. First, the reaction process, where one Nylon molecule absorbs three water molecules. Second, the diffusion process, where water molecule diffuses from high mass concentration to low mass concentration based on the Fick's law. The governing equations for the reaction-diffusion problem are given by

$$\begin{aligned} \dot{c}_w &= \nabla \cdot (\mathbf{D} \cdot \nabla c_w) + r_w (c_N, c_w) \\ \dot{c}_N &= r_N (c_N, c_w) \end{aligned} \tag{1}$$

where c_w and c_N denote the mass concentration of water and Nylon, respectively; $\mathbf{D}$ is the nonlinear diffusivity tensor. The reaction terms r_w and r_N are given by

$$\begin{aligned} r_w (c_N, c_w) &= -k \cdot c_N \cdot (c_w)^{3/2} \\ r_N (c_N, c_w) &= -k \cdot c_N \cdot (c_w)^{3/2} \end{aligned} \tag{2}$$

where k is a reaction coefficient.

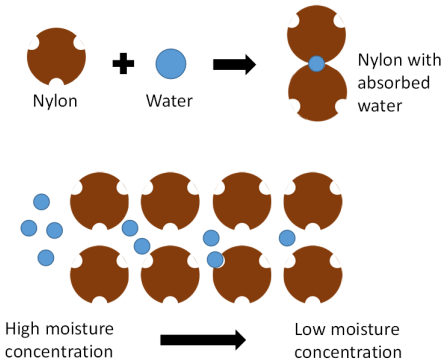


Рис. 2: Reaction (top) and diffusion (bottom) process of Nylon-water system

2.2. Model Reduction

To reduce the computational cost associated with multiple nonlinear unit cell solutions, the model reduction scheme process [22, 23] is employed. The model reduction technique is based on the construction of residual-free scalar (moisture diffusion) and vector (deformation) fields. The fine-scale perturbation of the displacement field $u_i^{(1)}$ is constructed to satisfy the unit cell equilibrium equations for arbitrary coarse-scale strains and eigenfields [23]

$$\begin{aligned} u_i^{(1)}(x,y,t) = H_i^{kl}(y)\varepsilon_{kl}^c(x,t) + \int_\Theta \tilde{h}_i^{kl}(y,\tilde{y})\mu_{kl}^f(x,\tilde{y},t)d\tilde{\Theta} + \\ + \int_S \breve{\breve{h}}_i^{\breve{n}}(y,\breve{y})\delta_{\breve{n}}^f(x,\breve{y},t)d\breve{S} \end{aligned} \tag{3}$$

where H_i^{kl}, $\tilde{h}_i^{kl}$, and $\breve{\breve{h}}_i^{\breve{\breve{n}}}$ are the influence functions for the coarse-scale strains ε_{kl}^c, fine-scale eigenstrains μ_{kl}^f, and fine-scale eigenseparations $\delta_{\breve{\breve{n}}}^f$, respectively.

Likewise, the fine-scale perturbation of the moisture concentration $c^{(1)}$ is constructed to satisfy the fine-scale diffusion equations for arbitrary coarse-scale concentration gradients $c_{,i}^c$ and fine-scale eigenconcentration gradient η_i^f as follows

$$c^{(1)}(x,\tilde{y},t) = H^i(y)c_{,i}^c(x,t) + \int_\Theta h^i(y,\tilde{y})\eta_i^f(x,\tilde{y},t)d\tilde{\Theta} \tag{4}$$

where $H^i(y)$ and $h^i(y,\tilde{y})$ are the influence functions for the coarse-scale concentration gradient the eigenconcentration gradient, respectively. Inserting (3) and (4) into constitutive eqution yields

$$\left(L_{ijkl}(y)\left(\begin{array}{l}\left(I_{klmn}+H_{(k,y_l)}^{mn}\right)\varepsilon_{mn}^c(x,t)+\left(\int_\Theta \tilde{h}_{(k,y_l)}^{mn}(y,\tilde{y})\ \mu_{mn}^f(x,\tilde{y},t)d\tilde{\Theta}-\mu_{kl}^f(x,y,t)\right)\\ +\int_S \breve{\breve{h}}_{(k,y_l)}^{\breve{\breve{n}}}(y,\breve{\breve{y}})\ \delta_{\breve{\breve{n}}}^f(x,\breve{\breve{y}})d\breve{\breve{S}}\end{array}\right)\right)_{,y_j}=0 \tag{5}$$

$$\left(-D_{ij}'(y)\left(\left(I_{jk}+H_{,y_j}^k(y)\right)c_{,k}^c(x,t)+\left(\int_\Theta h_{,y_j}^k(y,\tilde{y})\eta_k^f(x,\tilde{y},t)d\Theta-\eta_j^f(x,y,t)\right)\right)\right)_{,y_j}=0 \tag{6}$$

The eigenstrains, eigenseparations and eigenconcentration gradients are discretized in terms of phase eigenstrains $\mu_{kl}^{(\alpha)}$, phase eigenseparations $\delta_{\breve{\breve{n}}}^{(\alpha)}$ and phase eigenconcentration gradients $\eta_k^{(\alpha)}$ over the phase domain $\Theta^{(\alpha)}$ as follows

$$\begin{aligned}\mu_{ij}^f(x,y,t) &= \sum_{\alpha=1}^n \tilde{N}^{(\alpha)}(y)\mu_{ij}^{(\alpha)}(x,t)\\ \delta_{\breve{\breve{n}}}^f(x,y,t) &= \sum_{\xi=1}^m \breve{\breve{N}}^{(\xi)}(y)\delta_{\breve{\breve{n}}}^{(\xi)}(x,t)\end{aligned} \tag{7}$$

$$\eta_k^f(x,y,t) = \sum_{\alpha=1}^n \tilde{N}^{(\alpha)}(y)\eta_i^{(\alpha)}(x,t). \tag{8}$$

The shape functions $\tilde{N}^{(\alpha)}(y)$ for the eigenstrain and eigenconcentration gradient are chosen to be $C^{-1}(\Theta)$ functions since the eigenfields can be discontinuous between the phases. The eigenseparation shape functions are chosen to be $C^0(S)$ functions since cracks (displacement jumps) should be continuous

across the interfaces. The eigenstrain and eigenseparation shape functions are chosen as

$$\tilde{N}^{(\alpha)}(y) = \begin{cases} 1 & y \in \Theta^{(\alpha)} \\ 0 & y \in \Theta^{(\alpha)} \end{cases}, \qquad \breve{N}^{(\xi)}(y) = \begin{cases} \sum\limits_{A \in S^{(\xi)}} N_A^f(y) & y \in S^{(\xi)} \\ 0 & y \notin S^{(\xi)} \end{cases} \tag{9}$$

For more details we refer to [11, 24, 23].

2.3. Model validation

For validation, we study mechanical behavior of the glass-fiber/epoxy-resin material system subjected to moisture. The sample is exposed to moisture for 350 hours and then tested in a uniaxial tension. We will refer to such a sample condition as the moisture conditioned (MC) state. A dry-as-molded (DAM) sample state will be also tested for comparison.

The simulation of moisture conditioned (MC) samples will be divided into two steps: (i) simulation of diffusion-reaction process and (ii) simulation of a uniaxial tension till failure. A first-order computational homogenization (FOCH) approach is adopted for both diffusion-reaction and mechanical problems. Due to symmetry, the macroscopic model consists of one quarter of the sample as shown in Figure 3.

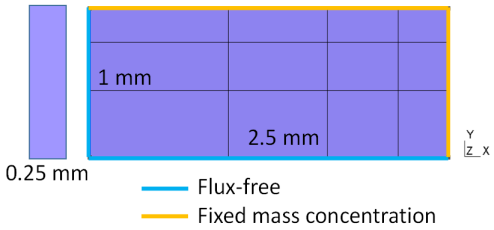


Рис. 3: Macroscopic model for the diffusion-reaction problem

Figure 4 compares the weight gain (%) as obtained by the simulation and physical experiments. It is evident that simulations predict correct amount of water absorption throughout the entire time history.

Next, we study mechanical behavior of DAM and MC samples in uniaxial tension up to failure. The comparison of simulated and experimental strain-stress curves is depicted in Figure 5 for the two states. The numerical model predicts correct mechanical response as well as the onset of failure. It can be seen that the peak stress (or strength) in DAM samples is higher than in MC samples. In contrast, the failure strain in DAM samples is lower than in the MC samples. Thus, the MC samples are more ductile than those of DAM.

A similar conclusion can be drawn by observing microscopic damage pattern depicted in Figure 6. The damage pattern exhibits brittle crack in DAM samples,

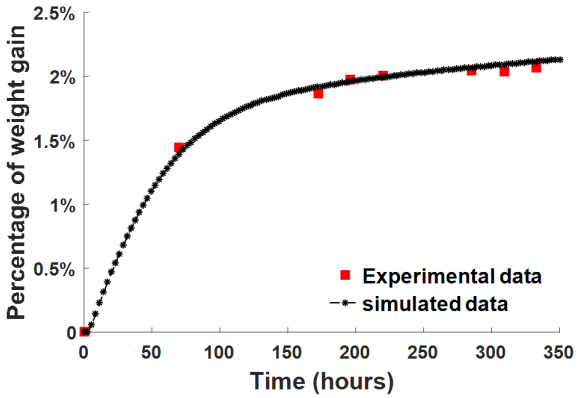


Рис. 4: Comparison of weight gain (%): experiments vs simulation

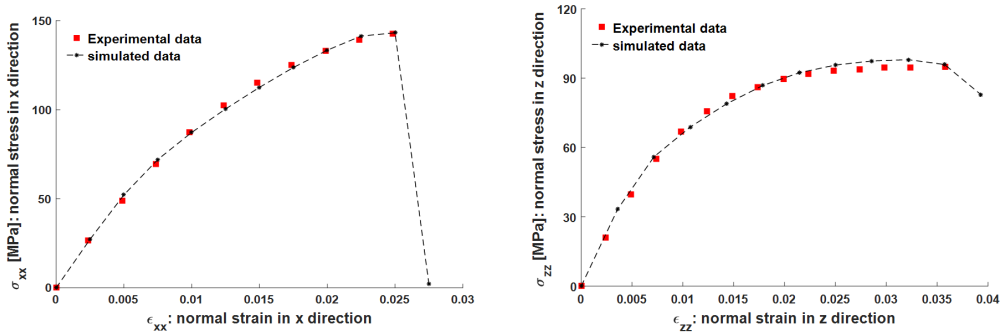


Рис. 5: Stress-strain response in DAM (left) and MC (right) samples as obtained in simulations and experiments

where the crack is localized in a single layer of elements. On the other hand, the damage pattern is much more diffuse in MC samples.

3. Conclusion

In the present manuscript, we present a multiscale approach for simulating degradation of composite structures in two environments: cyclic loading and exposure to humidity. For the carbon-fiber/epoxy-resin material system, we generalized the cycle block scheme to account for hybrid brittle-ductile failure. A reduced-order homogenization (ROH) approach is adopted for the prediction of damage accumulation in various microphases. For the glass-fiber/Nylon material system exposed to moisture we generalized the Fickian diffusion model [12] to account for the reaction of Nylon with water. The diffusion-reaction and mechanical problems were assumed to be two-way coupled where Nylon absorbed by water affects the mechanical behavior, while the damage accumulation is enhanced by the diffusion process of water. A first-order computational homogenization (FOCH) is employed for both diffusion-reaction and mechanical problems.

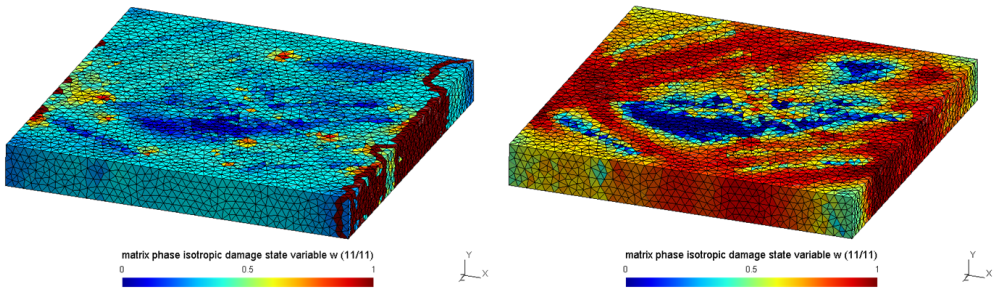


Рис. 6: The distribution of damage state variable in DAM (left) and MC (right) samples

Acknowledgment

We gratefully acknowledge the support of the Office of Naval Research under Grant N00014-15-1-2053

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gerard, B., G. Pijaudier-Cabot, and C. Laborderie, Coupled diffusion-damage modelling and the implications on failure due to strain localisation. International Journal of Solids and Structures. International Journal of Solids and Structures, 35(31-32): p. 4107-4120.

2. Gerard, B., C. Le Bellego, and O. Bernanrd, Simplified modelling of calcium leaching of concrete in various environment. Materials and Structures, 2002. 35: p. 632-640.

3. Ulm, F.J., E. Lemarchand, and F. Heukamp, H., Elements of chemomechanics of calcium leaching of cement-based materials at different scales. Engineering Fracture Mechanics, 2003. 70: p. 871-889.

4. Terada, K. and M. Kurumatani, Two-scale diffusion–deformation coupling model for material deterioration involving micro-crack propagation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010. 83(4): p. 426-451.

5. Q. Yu and J. Fish, Multiscale asymptotic homogenization for multiphysics problems with multiple spatial and temporal scales: a coupled thermo-viscoelastic example problem, International journal of solids and structures 39 (26), 6429-6452, 2002

6. Kuznetsov, S. and J. Fish, Mathematical homogenization theory for electroactive continuum. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2012. 91(11): p. 1199-1226.

7. D. Klepach and T.I. Zohdi. Modeling and simulation of deformation-dependent diffusion in composite media. Composites Part B: Engineering. Volume 56, 413-423, 2014

8. T.I Zohdi and P. Wriggers. Introduction to computational micromechanics. Second Reprinting. Springer-Verlag., 2008.

9. T.I. Zohdi. An adaptive-recursive staggering strategy for simulating multifield coupled processes in microheterogeneous solids. The International Journal of Numerical Methods in Engineering. 53, 1511-1532, 2002.

10. T.I. Zohdi. Modeling and simulation of a class of coupled thermo-chemo-mechanical processes in multiphase solids. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 193/6-8 679-699, 2004.

11. M. Bailakanavar, J. Fish, V. Aitharaju and W. Rodgers, Coupling of moisture diffusion and mechanical deformation in polymer matrix composites Volume 98, Issue 12, pages 859–880, 2014.

12. R.J. Atkin and R.E. Craine. Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development. Q.J. Mechanics Appl. Math., 29(2), 209–244, 1976.

13. R.M. Bowen. Theory of mixture. Continuum Physics III, 1–127, 1976.

14. R. Dunwoody. A thermomechanical theory of diffusion in solid-fluid mixtures. Arch. Ration. Mech. Anal. 38, 348–371, 1970.

15. K. Hutter and K. Jöhnk. Continuum Methods of Physical Modeling. Springer, Berlin, 2004

16. S. Lustig, J. Caruthers and N. Peppas. Continuum thermodynamics and transport theory for polymer-fluid mixtures. Chem. Eng. Sci., 47, 3037–3057, 1992.

17. I. Müller. A thermodynamic theory of mixtures of fluids. Arch. Ration. Mech. Anal. 28, 1–39, 1968.

18. N. Quang, I. Samohýl and H. Thoang. Irreversible (rational) thermodynamics of mixtures of a solid substance with chemical reacting fluids. Collect. Czech. Chem. Commun. 53, 1620–1635, 1988.

19. I. Samohýl and X.N.M. Šípek. Irreversible (rational) thermodynamics of fluid-solid mixtures. Collect. Czech. Chem. Commun. 50, 2346–2363, 1985.

20. C. Truesdell C. Mechanical basis of diffusion. J. Chem. Phys. Vol. 37, pp. 2336–2344, 1962.

21. V. Aitharaju, W. Rodgers, Internal General Motors Report, 2010.

22. H. K. Reimschuessel, "Relationships on the effect of water on glass transition temperature and young's modulus of nylon 6," J. Polym. Sci. Polym. Chem. Ed., vol. 16, no. 6, pp. 1229–1236, Jun. 1978.

23. J. Fish, Practical Multiscaling, Wiley 2013

24. Z. Yuan and J. Fish. Hierarchical model reduction at multiple scales. Hierarchical Model Reduction at Multiple Scales,"International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 79, Issue 3, pp. 314–339, (2009)

REFERENCES

1. Gerard, B., G. Pijaudier-Cabot, and C. Laborderie, 1998, Coupled diffusion-damage modelling and the implications on failure due to strain localisation. International Journal of Solids and Structures. *International Journal of Solids and Structures*, 35(31-32): p. 4107-4120.

2. Gerard, B., C. Le Bellego, and O. Bernanrd, 2002, Simplified modelling of calcium leaching of concrete in various environment. *Materials and Structures*, 35: p. 632-640.

3. Ulm, F.J., E. Lemarchand, and F. Heukamp, H., 2003, Elements of chemomechanics of calcium leaching of cement-based materials at different scales. *Engineering Fracture Mechanics*, 70: p. 871-889.

4. Terada, K. and M. Kurumatani, 2010, Two-scale diffusion–deformation coupling model for material deterioration involving micro-crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(4): p. 426-451.

5. Q. Yu and J. Fish, 2002, Multiscale asymptotic homogenization for multiphysics problems with multiple spatial and temporal scales: a coupled thermo-viscoelastic example problem, *International journal of solids and structures* 39 (26), 6429-6452,

6. Kuznetsov, S. and J. Fish, 2012, Mathematical homogenization theory for electroactive continuum. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(11): p. 1199-1226.

7. D. Klepach and T.I. Zohdi. 2014, Modeling and simulation of deformation-dependent diffusion in composite media. *Composites Part B: Engineering*. Volume 56, 413-423,

8. T.I Zohdi and P. Wriggers, 2008, Introduction to computational micromechanics. Second Reprinting. Springer-Verlag.,

9. T.I. Zohdi. An adaptive-recursive staggering strategy for simulating multifield coupled processes in microheterogeneous solids. *The International Journal of Numerical Methods in Engineering*. 53, 1511-1532, 2002.

10. T.I. Zohdi. 2004, Modeling and simulation of a class of coupled thermo-chemo-mechanical processes in multiphase solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 193/6-8 679-699,

11. M. Bailakanavar, J. Fish, V. Aitharaju and W. Rodgers, 2014, *Coupling of moisture diffusion and mechanical deformation in polymer matrix composites Volume 98*, Issue 12, pages 859–880,

12. R.J. Atkin and R.E. Craine, 1976, Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development. *Q.J. Mechanics Appl. Math.*, 29(2), 209–244,

13. R.M. Bowen, 1976, *Theory of mixture. Continuum Physics III*, 1–127,

14. R. Dunwoody, 1970, A thermomechanical theory of diffusion in solid-fluid mixtures. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 38, 348–371,

15. K. Hutter and K. Jöhnk, 2004, *Continuum Methods of Physical Modeling*. Springer, Berlin,

16. S. Lustig, J. Caruthers and N. Peppas, 1992, Continuum thermodynamics and transport theory for polymer-fluid mixtures. *Chem. Eng. Sci.*, 47, 3037–3057,

17. I. Müller, 1968, A thermodynamic theory of mixtures of fluids. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 28, 1–39,

18. N. Quang, I. Samohýl and H. Thoang, 1988, Irreversible (rational) thermodynamics of mixtures of a solid substance with chemical reacting fluids. *Collect. Czech. Chem. Commun.* 53, 1620–1635

19. I. Samohýl and X.N.M. Šípek, 1985, Irreversible (rational) thermodynamics of fluid-solid mixtures. *Collect. Czech. Chem. Commun.* 50, 2346–2363,

20. C. Truesdell, 1962, C. Mechanical basis of diffusion. *J. Chem. Phys.* Vol. 37, pp. 2336–2344,

21. V. Aitharaju, W. Rodgers, 2010, *Internal General Motors Report*

22. H. K. Reimschuessel, 1978, "Relationships on the effect of water on glass transition temperature and young's modulus of nylon 6," *J. Polym. Sci. Polym. Chem. Ed.*, vol. 16, no. 6, pp. 1229–1236, Jun.

23. J. Fish, 2013, *Practical Multiscaling*, Wiley

24. Z. Yuan and J. Fish, 2009, Hierarchical model reduction at multiple scales. Hierarchical Model Reduction at Multiple Scales, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 79, Issue 3, pp. 314–339

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3 538.9(09) DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-290-303

ДИФФУЗИЯ ПРИМЕСИ В МАТЕРИАЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВИБРАЦИОННЫХ НАГРУЗОК[1]

Д. А. Индейцев[2], Ю. А. Мочалова[3]

Аннотация

В рамках континуальной механики разрабатывается двухкомпонентная модель материала, содержащего примесь, и исследуется взаимное влияние диффузии примеси и деформации основной структуры. Выводится уравнение движения примеси — обобщенное уравнение диффузии, которое позволяет учитывать не только перенос примеси за счет движения основной структуры, но и влияние деформации на коэффициент диффузии. Рассмотрены модельные задачи, которые качественно описывают два важнейших явления, экспериментально наблюдаемые при воздействии вибрации на материалы с примесью, локализацию концентрации примеси и падение обобщенной жесткости образца. В обеих задачах получены приближенные аналитические решения, которые хорошо согласуются с проведенными ранее численными исследованиями и экспериментальными данными.

Ключевые слова: континуальная механика, двухкомпонентная модель, диффузия, деформация, приближенное аналитическое решение.

Библиография: 13 название.

IMPURITY DIFFUSION IN MATERIAL UNDER VIBRATION LOADS

D. A. Indeytsev, Yu. A. Mochalova

Abstract

[1]Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 31

[2]Индейцев Дмитрий Анатольевич, член-корреспондент Российской академии наук, научный руководитель Институт Проблем Машиноведения РАН, Dmitry.Indeitsev@gmail.com

[3]Мочалова Юлия Алексеевна, старший научный сотрудник Института Проблем Машиноведения РАН

Within the framework of the continuum mechanics, the authors develop a two-component impurity-containing model and investigate the mutual influence of impurity diffusion and the basic structure strains. They derive the equation of impurity motion — the generalized diffusion equation, which allows them to take into account not only impurity transport due to the basic structure motion, but also the effect of strain on the diffusion coefficient. The paper considers modeling problems that qualitatively describe two most important phenomena that are observed experimentally under vibration on materials with an admixture, localization of the impurity concentration, and the drop in the generalized rigidity of the sample. In both problems, approximate analytical solutions are obtained that are in good agreement with earlier numerical studies and experimental data.

Keywords: continuum mechanics, two-component material model, diffusion, deformation, approximate analytical solutions.

1. Введение

Вибрационная механика, как специальный раздел динамических задач механики сплошной среды, занимает особое место в исследовании явления массопереноса в неоднородных средах (в самом общем случае, это движение примеси в твердом теле, просачивание жидкости через твердое тело или другую жидкость, движение особых жидкостей). Подробное изложение основных проблем и методов вибрационной механики представлено в работе [1]. Здесь мы будем рассматривать проблему взаимного влияния диффузии примеси и деформации упругой среды, подвергающейся вибрационному воздействию. Известно, что нестационарные механические нагрузки приводят к перераспределению примеси в материале, что может оказать значительное влияние на механические свойства образца [2].

В большинстве исследований, посвященных диффузии в твердых телах, используются феноменологические модели, которые позволяют учитывать только влияние напряженного состояния среды на диффузию примеси [3]. При этом остается открытым вопрос как кинетические процессы в материале (диффузия примеси, осаждение частиц примеси на основную структуру) влияют на механические свойства материала. Для описания материала, содержащего примесь, в [4, 5] разработана (предложена) двухкомпонентная континуальная модель. Предполагалась, что взаимодействие между примесью и основной структурой определяется внутренними силами взаимодействия, которые зависят от деформации материала (напряженного состояния) и массобменом между частицами примеси и основной структуры. В рамках этой модели в [5] была получена система определяющих уравнений и исследовано статические напряженное состояние материала с примесью. В работе [4] предложена модель для описания процесса структурной перестройки в одномерном образце под действием динамической нагрузки. Здесь использовались упрощенные балансовые уравнения, не содержащие конвективной диффузионной части и изменение механических свойств материала было вызва-

но структурной перестройкой — абсорбцией примеси на основную структуру (массообменом между частицами примеси и основной структурой). В работе [7] анализ напряженно-деформируемого состояния материала с примесью был проведен с помощью методов статистической физики. Было получено хорошее качественное совпадение результатов с результатами, которые дает двухкомпонентная механическая модель [4, 5]. В работе [8] выведено уравнение движения примеси — обобщенное уравнение диффузии, позволяющее учитывать влияние деформации основной структуры на перераспределение примеси. Рассмотрен одномерный стержень под действием циклической нагрузки, показано, что если не учитывать массообмен между компонентами среды, то частицы примеси локализуется в центральной части образца.

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [5] и [8]. Ее цель — в рамках двухкомпонентной модели описать динамику материала, содержащего примесь, и исследовать взаимное влияние диффузии примеси и деформации основной структуры. Предполагается, что свободные частицы примеси могут встраиваться в основную структуру и, таким образом, влиять на ее механические свойства. В данной работе мы ограничимся исследованием частных (предельных) случаев, которые качественно описывают два важнейших явления, экспериментально наблюдаемых при воздействии вибрации на материалы с примесью, локализация концентрации примеси и падение обобщенной жесткости образца. В обеих задачах получены приближенные аналитические решения, которые хорошо согласуются с проведенными ранее численными исследованиями и экспериментальными данными. Данные модельные задачи позволяют качественно исследовать особенности диффузионных процессов при нестационарном внешнем воздействии и могут являться тестовыми для анализа сложных задач о взаимном влиянии диффузионных и динамических процессов в многокомпонентных средах, и связанных с ними проблем механики прочности материалов [6].

2. Уравнение движения примеси. Обобщенное диффузионное уравнение

В рамках двухкомпонентного подхода [5] будем рассматривать две взаимопроникающие среды: динамически деформируемую основную структуру тела (например, решетку металла) и подвижную примесь в теле. Будем предполагать, что возможен массообмен между диффундирующим веществом и основной структурой. Совместное движение и связь этих двух сред описываются в абсолютной системе координат следующей системой уравнений : уравнение движения основной структуры

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = \rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} - J\vec{v}_1 - \vec{R}, \tag{1}$$

уравнение движения подвижной примеси

$$-\vec{\nabla} p = \rho_2 \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + J\vec{v}_2 + \mathbf{R}, \tag{2}$$

уравнение баланса масс основной структуры

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_1) = -J, \tag{3}$$

уравнение баланса масс подвижной примеси

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_2 \mathbf{v}_2) = J, \tag{4}$$

уравнение состояния основной структуры

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\varepsilon) \tag{5}$$

уравнение состояния подвижной примеси

$$p = p(\rho_2) \tag{6}$$

Здесь ρ_1, $\vec{v}_1$ $\vec{\sigma}, \varepsilon$ — плотность, вектор скорости, тензор напряжений и деформация первой компоненты соответственно; ρ_2, $\mathbf{v}_2$, p — плотность, вектор скорости и давление подвижной примеси (вторая компонента). Взаимодействие между компонентами было определено в [5], J — источниковый член, $\vec{R}$ — внутренняя сила взаимодействия основной структуры и подвижной примеси

$$\mathbf{R} = \mu(\varepsilon)\, \rho_2\, (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\,. \tag{7}$$

Здесь $\mu(\varepsilon)$ — коэффициент сопротивления. Далее реактивными силами $J\mathbf{v}_1$ и $J\mathbf{v}_2$ в уравнениях (1) и (2) будем пренебрегать.

Система уравнений (1)–(7) дополненная начальными и граничными условиями описывает динамику среды, содержащей примесь. Введем относительную скорость движения примеси $\vec{\vartheta} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Подставляя $\mathbf{v}_2$, выраженную через относительную скорость движения примеси, в (2) и предполагая, что переносные силы инерции много больше относительных, получим

$$\vec{\vartheta} = -\frac{1}{\mu(\varepsilon)\rho_2} \left(\vec{\nabla} p + \rho_2 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right). \tag{8}$$

Подставляя $\vec{\vartheta}$ в выражение (4), получим диффузионное уравнение, учитывающее влияние деформации и силы инерции:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\mu(\varepsilon)} \left(\vec{\nabla} p + \rho_2 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) - \rho_2 \mathbf{v}_1 \right] = J. \tag{9}$$

Дифференцируя уравнение состояния (6) по ρ_2 и предполагая, что скорость звука в примеси $c_2^2 = \partial p / \partial \rho$ мало меняется, уравнение (9) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left[D(\varepsilon) \left(\vec{\nabla} \rho_2 + \frac{\rho_2}{c_2^2} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) - \rho_2 \mathbf{v}_1 \right] = J, \tag{10}$$

где $D(\varepsilon) = c_2^2/\mu(\varepsilon)$ — коэффициент диффузии, который пропорционален характерному размеру проницаемости основной структуры и зависит от сферической деформации [8]. Таким образом, полученное уравнение определяет движение примеси. Первое слагаемое

$$\vec{\nabla} \cdot \left[D(\varepsilon) \left(\vec{\nabla} \rho_2 + \frac{\rho_2}{c_2^2} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) \right] \tag{11}$$

определяет диффузионный перенос примеси. Второе слагаемое $\vec{\nabla} \cdot [\mathbf{v}_s \, \rho_f]$ определяет перенос примеси за счет движения основной структуры (ранее это слагаемое не учитывалось [8]). Заметим, что полученное обобщенное уравнение диффузии (10) отличается от известных адвективно-диффузионных уравнений (см. [9]) тем, что коэффициент диффузии зависит от деформации основной структуры, а так же наличием в первом «диффузионном» слагаемом (11) члена, определяемого вибрацией основной структуры.

Если нет деформации основной структуры, то уравнение (10) сводится к классическому уравнению диффузии с коэффициентом диффузии $D_0 = D(0)$. Поэтому в первом приближении D определяется экспериментальными значениями [5]. Для малых деформаций можно считать, что значение коэффициента диффузии D линейно зависит от ε и $D(\varepsilon) = D_0 - D_1\varepsilon$, где $D_1 > 0$.

Система уравнений (1), (3), (5) и (10) позволяет нам определить динамику перераспределения примеси при деформации материала. Заметим, что при решении конкретных задач уравнения должны быть дополнены начальными и граничными условиями.

3. Постановка задачи. Система определяющих уравнений

В качестве примера рассмотрим одномерный стержень длиной $2L$, содержащий примесь, под воздействием циклической нагрузки $F_0 \sin \omega t$, ω — частота нагрузки. Обозначим ρ_1^+ плотность частиц примеси, осажденных на основную структуру, и $\rho_1 = \rho_1^0 + \rho_1^+$, здесь $\rho_1^0 = \text{const}$. Тогда для плотности осажденных частиц из уравнения (3) получим

$$\frac{\partial \rho_1^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_1^+ v_1 \right) = -J. \tag{12}$$

Заметим, что $\rho_1^+ \ll \rho_1$ и в уравнении динамики стержня (1) можно считать $\rho_1 = \text{const}$. Кроме того в большинстве случаев влиянием внутренней силы взаимодействия $\mathbf{R}$ на движение основной структуры в уравнении (1) можно пренебречь.

Согласно [5], напряженное состояние основной структуры зависит от плотности осажденной примеси ρ_1^+ и уравнение состояния для первой компоненты (5) может быть записано в виде

$$\sigma = E(\rho_1^+) \, \varepsilon, \tag{13}$$

где $E(\rho_1^+)$ — обобщенный модуль Юнга.

Источниковые члены запишем в следующем виде $J = -\alpha\rho_2$, то есть будем считать, что возможно только встраивание частиц в основную структуру. Коэффициент α характеризует скорость осаждения частиц примеси на кристаллическую решетку и определяется из экспериментальных данных. Более подробно смотри [4, 5].

Переходя в уравнениях (1), (10) и (12) к перемещениям u ($v_1 = \partial u/\partial t$, $\varepsilon = \partial u/\partial x$), получим следующую систему определяющих соотношений для рассматриваемого одномерного стержня

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \sigma = E(\rho_1^+)\,\varepsilon, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\rho_1^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_1^+\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \alpha\,\rho_2, \tag{15}$$

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(D_0 - D_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial x} + \frac{\rho_2}{c_2^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\, t^2}\right) - \rho_2\frac{\partial u}{\partial\, t}\right] = -\alpha\,\rho_2 \tag{16}$$

со следующими граничными и начальными условиями

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad \sigma\big|_{x=L} = F_0\sin\omega t, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \left(D_0 - D_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial\rho_2}{\partial x} + \frac{\rho_2}{c_2^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] - \rho_2\,\frac{\partial u}{\partial\, t}\Big|_{x=L} = 0. \tag{18}$$

$$\rho_2\big|_{t=0} = \rho_0(x), \quad \rho_1^+\big|_{t=0} = 0$$

Введем безразмерные величины (параметры) следующим образом

$$t_1 = \frac{D_0}{L^2}\,t, \quad x_1 = \frac{x}{L}, \quad \overline{u} = \frac{u}{L}, \quad \overline{\rho}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \Omega = \frac{L^2}{D_0}\,\omega, \quad \overline{\sigma} = \frac{L^2}{\rho_1 D_0^2}\,\sigma,$$
$$\overline{E}_0 = \frac{L^2}{\rho_1 D_0^2}\,E_0, \quad \overline{\alpha} = \frac{\alpha L^2}{D_0}, \quad \beta = D_1/D_0, \quad \eta = \frac{D_0^2}{c_2^2 L^2}.$$

Тогда систем уравнений (14)–(16) принимает вид

$$\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t_1^2}, \quad \overline{\sigma} = \overline{E}(\overline{\rho}_1^+)\,\varepsilon, \tag{19}$$

$$\frac{\partial\overline{\rho}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(1 - \beta\frac{\partial\overline{u}}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial\overline{\rho}_2}{\partial x_1} + \eta\,\overline{\rho}_2\,\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\, t_1^2}\right) - \overline{\rho}_2\frac{\partial\overline{u}}{\partial\, t_1}\right] = -\overline{\alpha}\,\overline{\rho}_2, \tag{20}$$

$$\frac{\partial\overline{\rho}_1^+}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\overline{\rho}_1^+\frac{\partial\overline{u}}{\partial t_1}\right] = \overline{\alpha}\,\overline{\rho}_2. \tag{21}$$

с граничными условиями

$$\overline{u}\big|_{x_1=0} = 0, \quad \overline{\sigma}\big|_{x_1=1} = \overline{F}_0\sin\Omega t_1, \tag{22}$$
$$\frac{\partial\overline{\rho}_2}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = 0, \quad \left(1 - \beta\frac{\partial\overline{u}}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial\overline{\rho}_2}{\partial x_1} + \eta\,\overline{\rho}_2\,\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\, t_1^2}\right) - \overline{\rho}_2\frac{\partial\overline{u}}{\partial\, t_1}\Big|_{x_1=1} = 0,$$

где $\overline{F}_0 = L^2\, F_0/\rho_1 D_0^2$ и начальные условия

$$\overline{\rho}_2|_{t_1=0} = \overline{\rho}_0(x), \quad \overline{\rho}_1^+|_{t_1=0} = 0. \tag{23}$$

Система уравнений (19) - (23) сложна для прямого математического анализа, так как описывает взаимосвязь динамических процессов, имеющих разные временные масштабы: волновые процессы в основной структуре, диффузия примеси и массообмен между компонентами. Поэтому мы рассмотрим ряд частных случаев. Далее черту над величинами (верхнее подчеркивание) опускаем.

4. Локализация диффузионного процесса

Пусть $J = 0$, то есть нет массообмена между компонентами. В этом случае частицы примеси не оседают на решетку, $\rho_1^+ = 0$, и модуль Юнга материала остается постоянным $E = E_0$. Таким образом, система уравнений (19)–(23) распадается на две задачи. Первая задача определяет колебаниях стержня под действием вибрационной нагрузки, приложенной на его концах

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{24}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\,\Big|_{x=1} = F_0\, \sin \Omega t_1. \tag{25}$$

Здесь $c_0^2 = (cL/D_0)^2$, $c = \sqrt{E_0/\rho_1}$ — скорость звука в стержне. Естественно считать колебания стержня установившимся процессом и таким образом, решение задачи (24)–(25) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{c_0 F_0}{\Omega \cos\left(\Omega/c_0\right)}\, \sin \Omega t\, \sin\left(\Omega x/c_0\right).$$

Заметим, что $\Omega/c_0 \ll 1$ и

$$u(x,t) = F_0\, x\, \sin \Omega t. \tag{26}$$

Вторая задача описывает перераспределение примеси в стержне под действием вибрационной нагрузки

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - \beta\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \eta\,\rho_2\,\frac{\partial^2 u}{\partial\, t^2}\right) - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial\, t}\right] = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \left(1 - \beta \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \eta\,\rho_2\,\frac{\partial^2 u}{\partial\, t^2}\right) - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial\, t}\Big|_{x=1} = 0, \tag{28}$$

$$\rho_2|_{t=0} = \rho_0(x). \tag{29}$$

Обратимся к исследованию обобщенного уравнения диффузии. Заметим, что если деформации основной структуры нет, то уравнение (27) превращается в классическое уравнение диффузии. Решение соответствующей задачи

Коши известно и диффузия приводит к равномерному распределению плотности примеси по длине стержня

$$\rho_2 = \int_0^1 \rho_0 \, \mathrm{d}x \quad \text{for} \quad t \to \infty.$$

Если в начальный момент времени распределение примеси постоянная величина $\rho_0 = \mathrm{const}$, то диффузии примеси не происходит.

Если считать, что коэффициент диффузии не зависит от деформации стержня, то задача (27)–(29) сводится к следующей

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t}\right] = 0 \\ &\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=1} = 0, \\ &\rho_2|_{t=0} = \rho_0(x). \end{aligned}$$

Здесь $u(x,t)$ определяется (26). Это так называемое адвективно- диффузионное уравнение с переменным (периодическим) коэффициентом, которое подробно исследовано (смотри, например [9]) и хорошо поддается численному анализу. Диффузия приводит к перераспределению примеси с последующими колебаниями концентрации примеси около среднего значения, которые вызваны вибрационным воздействием. Максимальные значения концентрации примеси достигаются на концах и в центральной части образца.

Обратимся к общему случаю (27)–(29). Будем предполагать, что при вибрации стержня с частотой Ω плотность примеси ρ_2 (а так же производные $\partial\rho_2/\partial x$, $\partial^2\rho_2/\partial x^2$) мало меняется за период колебаний, то есть

$$< \rho_2(x,t) > = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \rho_2(x,t)\mathrm{d}t = \rho_2(x,t)$$

Тогда подставляя (26) в (27)–(29) и усредняя полученную систему по интервалу $[t, t + 2\pi/\Omega]$, получим следующую задачу Коши

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \gamma \, x \, \rho_2\Big] \tag{30}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \gamma \, x \, \rho_2\Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \tag{31}$$

$$\rho_2\big|_{t=0} = \rho_0, \tag{32}$$

где $\gamma = \beta \, \eta \, A_0^2 \Omega^2/2$. Решение задачи (30)-(32) будем искать с помощью метода разделения переменных. Поэтому сначала решим соответствующую задачу Штурма-Лиувилля, а именно определим те значения параметра λ при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$L\varphi = -\lambda\varphi, \quad L\varphi = (\varphi_x + \gamma \, x \, \varphi)'_x \tag{33}$$

удовлетворяющему граничным условиям

$$\varphi_x\big|_{x=0} = 0, \quad \varphi_x + \gamma\,\varphi\big|_{x=1} = 0. \tag{34}$$

Заметим, что преобразованиями $\varphi = \exp(-\gamma\zeta^2/4)\,\psi$ и $x = \sqrt{\gamma}\,\zeta$ уравнение (33) приводится к уравнению параболического цилиндра стандартной формы $v_{\zeta\zeta} - [\frac{1}{4}\zeta^2 - \frac{1}{2} - \lambda]\psi = 0$, решение которого удобно записать через вырожденные гипергеометрические функции [10]. Тогда решение (33) может быть представлено в виде

$$\varphi(x) = \left[\, a\,{}_1F_1\Big(-\frac{\lambda}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\Big) + b\,x\,{}_1F_1\Big(\frac{\gamma-\lambda}{2\gamma}, \frac{3}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\Big)\right] \mathrm{e}^{-\gamma x^2/2}, \tag{35}$$

где ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция, a, b — неизвестные постоянные. Дифференцируя (35) по x и подставляя полученные результаты в граничные условия (34), получим, что $b = 0$ и уравнение для определения собственных чисел λ имеет вид

$$\gamma\,{}_1F_1\Big(-\frac{\lambda}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\Big) - (\gamma+\lambda)\,{}_1F_1\Big(-\frac{\lambda}{2\gamma}, \frac{3}{2}, \frac{\gamma}{2}\Big) = 0. \tag{36}$$

Исследуя (36) для различных значений параметра γ, получим, что оператор L имеет простой дискретный спектр собственных чисел, начинающийся с $\lambda_0 = 0$:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Соответствующие собственные функции определяются выражением

$$\varphi_k(x) = {}_1F_1\Big(-\frac{\lambda_k}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma\,x^2}{2}\Big) \exp(-\gamma\,x^2/2)/N_k, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{37}$$

где $N_k = \big[\int_0^1 {}_1F_1\big(-\frac{\lambda_k}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\big)\mathrm{e}^{-\gamma x^2/2}\mathrm{d}x\big]^{1/2}$ $(k = 0, 1, \dots)$ — нормирующие коэффициенты.

Заметим, что при $\gamma \to 0$ собственные числа спектральной задачи (33)–(34) $\lambda_k \to (\pi k)^2$, а соответствующие собственные функции $\varphi_k \to \cos\pi k x$, $k = 0, 1, \dots$. При $\gamma < 1$ это дает хорошее приближение собственных чисел и собственных функций оператора L.

Будем искать решение исходной задачи Коши (30)–(32) в виде разложения по найденным собственным формам

$$\rho_2(x,t) = \varphi_0(x)q_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)q_k(t) \tag{38}$$

Подставляя (38) в (30)–(32), получим для определения обобщенных функций $q_k(t)$ следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} &\dot q_0 = 0, \\ &\dot q_k + \lambda_k q_k = 0, \ k = 1, \dots \\ &q_k\big|_{t=0} = (\varphi_k, \rho_0(x)), \ k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Здесь $(\varphi_k, \rho_0(x)) = \int_0^1 \rho_0(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x$. Тогда решение задачи Коши (30)–(32) имеет вид

$$\rho_2(x,t) = c_0\,\exp(-\gamma\,x^2/2) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,{}_1F_1\Big(-\frac{\lambda_k}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma\,x^2}{2}\Big)\,\exp(-\lambda_k t - \gamma\,x^2/2), \quad (39)$$

$$c_k = \frac{1}{N_k}\int_0^1 \rho_0(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x,\ \ k = 0, 1, \ldots.$$

Собственные числа λ_k определяются из уравнения (36). Если $\rho_0 = \mathrm{const}$, то при больших t плотность $\rho_2(x,t)$ стремиться к стационарному решению (30), которое имеет вид

$$\rho_2(x,t) \to \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}}\,\frac{\rho_0}{\mathrm{erf}\sqrt{\gamma/2}}\,\exp(-\gamma x^2/2), \quad t \to \infty.$$

Таким образом, полученное приближенное аналитическое решение задачи показывает, что влияние колебаний приводит к накоплению примеси в центральной части стержня. Если рассматривать в качестве примеси растворенный в металле водород, то полученное решение качественно описывает экспериментально наблюдаемое явление перераспределение водорода в стальном образце под действием длительной циклической нагрузки [2, 12]. Кроме того, решение согласуется с численными результатами, полученными в [8].

5. Структурные изменения в материале

Рассмотрим второй частный случай. Будем пренебрегать конвективной диффузионной частью в уравнениях баланса масс (15) и (16), то есть будем предполагать, что плотности компонент почти не меняются по длине стержня $\rho_2(x,t) = \rho_2(t)$, $\rho_1^+(x,t) = \rho_1^+(t)$. Тогда решение уравнений (20) и (21) имеет вид

$$\rho_2 = \rho_0\exp\{-\alpha\,t\}, \quad \rho_1^+ = \rho_0\big(1 - \exp\{-\alpha\,t\}\big).$$

Модуль упругости в соответствии с моделью, предложенной в [5], принимает вид

$$E(\rho_1^+) = 1/\big[1 + \kappa\big(1 - \exp\{-\alpha\,t\}\big)\big]$$

и уравнение движения основной структуры (19) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Big[1 + \kappa\big(1 - \exp\{-\alpha\,t\}\big)\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = \overline{F}_0\big[1 + \kappa\big(1 - \exp\{-\alpha\,t\}\big)\big]\sin\Omega t$$

где κ — безразмерный коэффициент, определяющий отношение модуля Юнга «чистого» материала к модулю Юнга материала со встроенными частицами примеси.

Считая $\alpha/\Omega \ll 1$ (малый параметр), будем решать задачу используя метод многих масштабов. Введем два масштаба времени t и $\tau = \alpha t$ и для нулевого приближения получим следующую задачу

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \Big[1 + \kappa\big(1 - \exp\{-\tau\}\big)\Big]\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2},$$
$$u_0|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x}\Big|_{x=1} = \overline{F}_0\big[1 + \kappa_2\big(1 - \exp\{-\tau\}\big)\big]\sin\Omega t,$$

решение которой имеет вид

$$u_0(x,t,\tau) = \frac{\overline{F}_0\Omega_0(\tau)}{\Omega^2\cos\Omega_0(\tau)}\,\sin\Omega_0(\tau)x\,\sin\Omega t,$$

где $\Omega_0(\tau) = \Omega\sqrt{1 + \kappa\big(1 - \mathrm{e}^{-\tau}\big)}$.

Таким образом в предположении, что $\alpha \ll 1$, получим «медленное» падение жесткости конструкции и увеличение амплитуды колебаний. Если $\alpha \gg 1$, то свободный водород встраивается в решетку со скоростью большей скорости звука в материале и структурная перестройка в материале (изменение обобщенной жесткости конструкции) происходит «почти» мгновенно. Из экспериментальных данных известно, что скорость таких изменений действительно может быть больше скорости звука в материале [4].

Замечание. В данной модели мы считали α постоянной величиной, но по всей видимости α, как и коэффициент диффузии, должна зависеть от деформации основной структуры, а возможно и концентрации примеси.

6. Заключение

Предложенная двухкомпонентная модель, которая позволяет описать диффузию примеси в деформируемом материале и изменения структуры материала (в частности, водородного охрупчивания металла) и сводится к взаимодействию трех «конкурирующих» процессов:

- диффузия примеси, скорость которой может зависеть от деформации основной структуры;
- осаждение примеси на основную структуру, которое в общем случае так же зависит от деформации тела;
- нестационарно-волновые процессы в материале

При решении конкретных задач определяющим является то, что эти процессы имеют различные масштабы во времени.

Мы рассмотрели два частных случая. Первый, когда массообменом примеси и основной структуры можно пренебречь (источниковые члены $J = 0$). Показано, что в этом случае влияние циклической нагрузки приводит к локализации примеси в центральной части образца. Во втором предельном случае предполагается, что скорость осаждения примеси на основную структуру

много больше скорости диффузии и диффузионно-конвективными членами в балансовых уравнениях можно пренебречь. Показано, что это приводит к структурным изменениям в материале, а именно, к падению обобщенной жесткости образца.

В общем случае процессы диффузии и массобмена невозможно разделить. Однако, при анализе задач о взаимном влиянии диффузии примеси и напряженно-деформируемого состояния среды можно понять как соотносятся скорости этих процессов. Например, если скорость диффузии примеси больше скорости ее осаждения на основную структуру, то можно ожидать, что под действием вибрации примесь сначала локализуется в некоторой области образца и частицы примеси встраиваются в основную структуру именно в этой локальной области, что приводит к локальному изменению структуры образца. Если же скорость осаждения примеси значительно превосходит скорость диффузии, тогда примесь встраивается в основную структуру не успевая локализоваться и структурная перестройка, а так же изменение механических свойств происходит по всей длине образца.

В заключении заметим, что при решении конкретных задач система определяющих уравнений может быть исследована с помощью метода многих масштабов и метода усреднения и решение предлагается искать в виде (26) и (39), считая коэффициенты неизвестными функциями времени.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блехман И. И. Вибрационная механика: М.: Наука, 1994

2. Polyanskiy, A. M., Polyanskiy, V. A., Popov-Diumin, D. B.: Diagnostics of mechanical condition of structural material by method of high-temperature hydrogen vacuum-extraction. In Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses, Vienna, Austria, 589–592 (2005)

3. Aifants, E. C.: On the problem of diffusions in solids. Acta Mechanica, **37**, 265–296 (1980)

4. Indeitsev, D. A., Naumov, V. N., Semenov, B. N. and Belyaev, A. K.: Thermoelastic waves in a continuum with complex structure. ZAMM, **89**, 279–287 (2009)

5. Indeitsev, D. A., Mochalova Yu. A.: Mechanics of multi-component media with exchange of mass and non-classical supplies. In: Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass. Springer, 165–194 (2014)

6. Левин В. А. Нелинейная вычислительная механика прочности. Т. 1. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. Под ред. В. А. Левина. М.: Физматлит, 2014. – 452 с.

7. Indeitsev, D. A., Osipova, E. V.: Hydrogen embrittlement under load as a first-order phase transition. Doclady Physics, **51**, 1901–1906 (2009)

8. Индейцев, Д. А., Семенов, Б. Н., Стерлин М. Д.: Явление локализации процесса диффузии в динамически деформируемом твердом теле. ДАН, **443**, 583–585 (2012)

9. J. David Logan: An introduction to nonlinear partial differential equations. Wiley-Interscience, 397 (2008)

10. Abramowitz, M., and Stegun I. A.: Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Dover: New York (1972)

11. Polyanin A. D., Manzhirov A. V.: Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton-London: Chapman and Hall/CRC Press (2007)

12. Belyaev, A. K., Polyanskiy, V. A., Yakovlev, Yu. A. Stresses in pipeline affected by hydrogen. Acta Mechanica, **223**, 1611–1619 (2012)

REFERENCES

1. Abramowitz, M. & Stegun, I. A. 1972, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, New York

2. Aifants, E.C.1980, "On the problem of diffusions in solids',*Acta Mechanica*, 37, pp. 265–296

3. Blekhman, I.I. 2000, *Vibrational Mechanics*, Word Scientific, Singapore

4. Belyaev, A.K., Polyanskiy, V.A. & Yakovlev, Yu.A. 2012 "Stresses in pipeline affected by hydrogen'. Acta Mechanica, 223, pp. 1611–1619

5. Indeitsev, D.A. & Osipova, E.V. 2009, "Hydrogen embrittlement under load as a first-order phase transition', *Doclady Physics*, 51, pp. 1901–1906

6. Indeitsev, D.A., Naumov, V.N., Semenov, B.N. & Belyaev, A.K. 2009, "Thermoelastic waves in a continuum with complex structure', *ZAMM*, 89, pp.279–287

7. Indeitsev, D.A., Semenov, B.N. & Sterlin, M. D. 2012, "The phenomenon of localization of diffusion process in a dynamically deformed solid'. *Doclady Physics*, 57, pp. 171–173

8. Indeitsev, D.A., Mochalova Yu.A. 2014, "Mechanics of multi-component media with exchange of mass and non-classical supplies', In: Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass, Springer, pp. 165–194

9. Papanicolaou G.P. 1995, "Diffusion in Random Media'. In: Surveys in Applied Mathematics, Springer, pp 205–253

10. Polyanin A.D., Manzhirov A.V.: 2007, *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*, Boca Raton-London: Chapman and Hall/CRC Press

11. Polyanskiy, A.M., Polyanskiy, V.A. & Popov-Diumin, D.B. 2005, "Diagnostics of mechanical condition of structural material by method of high-temperature hydrogen vacuum-extraction' (Proc. of the Sixth International Congress on Thermal Stresses) Vienna, Austria, pp.589–592

12. Indeitsev D.A. & Mochalova Yu.A. 2017 "On the Problem of Diffusion in Materials Under Vibrations', Chapter Mechanics for Materials and Technologies, Volume 46 of the series Advanced Structured Materials, pp 183-193.

13. Indeitsev, D. & Mochalova D. 2015, "Stress Stage Influence on Diffusion Process in Materials', (Proc. of ICNAAM 2014, 22-28 September 2014, Rhodes, Greece) AIP Conference Proceedings 1648, 300004

14. Levin V.A. 2014, *Nonlinear computational mechanics of strength*, Vol.1, Models and methods. Formation and development of defects, Ed. Levin, V.A. Phizmatlit, Moscow, 452p.

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-304-315

ОБ ОДНОЙ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БАРОТРОПНОГО ГАЗА

Г. М. Кобельков[1], А. Г. Соколов[2]

Аннотация

Для системы уравнений, описывающей течение идеального (вязкого) баротропного газа, предложена разностная схема, обеспечивающая положительность плотности. Доказано существование решения получающейся системы нелинейных уравнений при любых шагах сетки по времени и пространству. Предложен итерационный процесс для решения полученной системы на временном шаге.

Ключевые слова: Разностная схема, итерационный процесс, течение идеального (вязкого) баротропного газа.

Библиография: 7 названий.

IMPLICIT FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR BAROTROPIC GAS EQUATIONS

G. M. Kobel'kov, A. G. Sokolov (Moscow)

Abstract

An implicit finite difference scheme approximated barotropic gas equations is proposed. This scheme ensures positivity of density compared to previous methods. Existence of a solution to this scheme is proved for any time and space mesh-steps, an iterative method for solving the system of nonlinear equations on each time step is proposed.

Keywords: Difference scheme, iterative process, flow of an ideal (viscous) barotropic gas.

Bibliography: 7 titles.

[1]Кобельков Георгий Михайлович, заведующий кафедрой вычислительная математика механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, ИВМ РАН, kobelkov@dodo.inm.ras.ru

[2]Соколов Александр Германович, старший научный сотрудник кафедры вычислительная математика механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, shurunya@mtu-net.ru

1. Введение

Построению разностных схем для уравнений газовой динамики и использованию этих схем для численного моделирования течений сжимаемого идеального (вязкого) газа посвящено огромное количество публикаций (см., например, [1, 2] и цитированную литературу). При этом какие-либо теоретические исследования практически отсутствуют. Так, например, естественный вопрос — а обеспечивает ли разностная схема положительность плотности (что следует из физики), остается открытым. Исключение составляет монография [3], где для уравнений вязкого сжимаемого газа в лагранжевых переменных в одномерном случае доказана неотрицательность плотности, и основанные на этом работы по построению разностных схем (см., например, [4] и последующие публикации), где аналогичный результат доказан для предложенной там разностной схемы.

В настоящей работе предложена неявная разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений динамики баротропного газа, которая обеспечивает положительность плотности и сохранение баланса массы. Кроме этого, доказано существование решения разностной задачи при любых соотношениях шагов сетки по времени и пространству, а также выполнение энергетического неравенства. Предложен итерационный процесс для решения системы нелинейных уравнений, возникающих на временном шаге.

2. Постановка задачи и априорные оценки

Система уравнений, описывающая течений идеального баротропного сжимаемого газа имеет вид (см., например, [5])

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial \rho}{\partial t} + \tfrac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0, \\ &\tfrac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \tfrac{(\rho u^2)}{\partial x} + \tfrac{\partial p}{\partial x} = 0, p = a\rho^\gamma,\ \gamma = \mathrm{const} > 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Для простоты в дальнейшем полагаем $a = 1$. Уравнения (1) рассматриваются в цилиндре $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ и дополняются краевыми и начальными условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),\ \rho(x,0) = \rho_0(x) > 0. \tag{2}$$

Приведем вывод энергетического тождества [6] для задачи (1), (2), который нам понадобится в дальнейшем при исследовании разностной схемы. Умножим первое уравнение (1) (уравнение неразрывности) скалярно L_2 на $-\frac{1}{2}u^2$, а второе уравнение (1) — скалярно на u. Складывая результаты, получим:

$$-\tfrac{1}{2}(\rho_t, u^2) - \tfrac{1}{2}((\rho u)_x, u^2) + ((\rho u)_t, u) + ((\rho u^2)_x, u) + (p_x, u) = 0.$$

Преобразуем левую часть следующим образом:

$$((\rho u)_t, u) - \tfrac{1}{2}((\rho_t, u^2) = \tfrac{1}{2}[(\rho_t, u^2) + (\rho, (u^2)_t)] = \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}(\rho, u^2).$$

Интегрируя последнее соотношение по t от 0 до t, имеем

$$\int_0^t \left[((\rho u)_t, u) - \frac{1}{2}(\rho_t, u^2)\right] dt = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho(x,t)u^2(x,t) - \rho_0(x)u_0(x)^2\right] dx. \tag{3}$$

Далее,

$$\big((\rho u^2)_x, u\big) - \tfrac{1}{2}\big((\rho u)_x, u^2\big) = \tfrac{1}{2}\big((\rho u)_x, u^2\big) + (\rho u^2, u_x) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (\rho u^3)_x dx = 0. \tag{4}$$

Наконец,

$$(p_x, u) = \tfrac{\gamma}{\gamma-1}\left(\rho u, (\rho^{\gamma-1})_x\right) = \tfrac{\gamma}{\gamma-1}\left(\rho_t, \rho^{\gamma-1}\right) = \tfrac{1}{\gamma-1}\left((\rho^\gamma)_t, 1\right).$$

Интегрируя последнее соотношение по t, получаем

$$\int_0^t (p_x, u)dt = \frac{1}{\gamma-1}\left[\int_0^1 (p(x,t) - p_0(x))dx\right]. \tag{5}$$

Из соотношений (3)-(5) следует "энергетическое тождество"

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 \rho(t)u^2(x,t)dx + \frac{1}{\gamma-1}\int_0^1 p(x,t))dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \rho_0 u_0^2 dx + \frac{1}{\gamma-1}\int_0^1 p_0(x)dx. \tag{6}$$

Примечание. В случае наличия вязких членов в уравнении движения (второе уравнение (1)), равенство (6) становится неравенством.

Наша цель — построить разностную схему, аппроксимирующую задачу (1), (2) и удовлетворяющую следующим условиям:

1. Если в начальный момент времени плотность ρ в узлах сетки положительна, то во все последующие моменты времени это свойство будет выполняться.

2. Соотношение (6) при условии положительности плотности означает, что нормы
$$\|\rho(t)\|_{L_1[0,1]},\ \|\rho^{1/2}(t)u(t)\|_{L_2[0,1]}$$
равномерно ограничены по времени. Поэтому естественно потребовать от решения сеточной задачи, чтобы оно также было равномерно ограничено по времени.

3. Должен выполняться сеточный аналог закона сохранения массы.

4. Решение разностной схемы должно существовать.

3. Аппроксимация уравнения неразрывности

Введем на прямой равномерную сетку с шагом
$h = 1/M,\ x_i = ih, i = 0, \ldots, M$; пусть $\tau = T/N$ — шаг по времени. Определим сеточные функции $\rho_i^n, 0 \leqslant i \leqslant M-1$; $u_i^n, 0 \leqslant i \leqslant M$, $u_0^n = u_M^n = 0$. Будем считать, что за границами указанных индексов сеточные функции доопределены нулем. Как обычно, будем использовать обозначения

$$v_x = (v_{i+1} - v_i)/h, \quad v_{\bar{x}} = (v_i - v_{i-1})/h, \quad v_t = (v^{n+1} - v^n)/\tau.$$

Аппроксимируем уравнение неразрывности (первое уравнение (1)) в i-м узле, используя следующие соображения:
а) Если u_i и u_{i+1} имеют одинаковые знаки, то используем аппроксимацию "против потока". А именно, положим

$$(\rho u)_x \sim \begin{cases} \frac{\rho_i u_{i+1} - \rho_{i-1} u_i}{h}, & \text{если } u_i, u_{i+1} > 0, \\ \frac{\rho_{i+1} u_{i+1} - \rho_i u_i}{h}, & \text{если } u_i, u_{i+1} < 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае мы аппроксимируем член $(\rho u)_x$ с порядком $O(h)$.
б) Если $u_i < 0,\ u_{i+1} > 0$ (разрежение), то положим

$$(\rho u)_x = \rho_x u + \rho u_x \sim \frac{\rho_i (u_{i+1} - u_i)}{h}.$$

Таким образом, аппроксимируется только второе слагаемое, а первое слагаемое полагаем равным нулю. Так как на концах отрезка длины h функция u принимает значения разных знаков, то на гладких решениях величина $\rho_x u$ на этом отрезке имеет порядок $O(h)$, откуда следует, что аппроксимация $(\rho u)_x$ также имеет порядок $O(h)$.
в) Если $u_i > 0,\ u_{i+1} < 0$ (сжатие), то положим

$$(\rho u)_x = \rho_x u + \rho u_x \sim \frac{\rho_{i+1} u_{i+1} - \rho_i u_i}{h} + \frac{(\rho_i - \rho_{i-1}) u_i}{h}.$$

Первое слагаемое аппроксимирует $(\rho u)_x$, в то время второе — аппроксимирует $\rho_x u$. Однако, как уже отмечалось выше, на гладких решениях функция

скорости в этом случае на отрезке имеет порядок $O(h)$. Таким образом, и в этом случае аппроксимация имеет первый порядок.

Подытоживая рассмотренные выше случаи, имеем

$$(\rho u)_x \sim A(u)\rho \equiv \begin{cases} \frac{\rho_i u_{i+1} - \rho_{i-1} u_i}{h}, & \text{если } u_i, u_{i+1} > 0, \\ \frac{\rho_{i+1} u_{i+1} - \rho_i u_i}{h}, & \text{если } u_i, u_{i+1} < 0, \\ \frac{\rho_i (u_{i+1} - u_i)}{h}, & \text{если } u_i < 0, u_{i+1} > 0, \\ \frac{\rho_{i+1} u_{i+1} - \rho_{i-1} u_i}{h}, & \text{если } u_i > 0, u_{i+1} < 0 \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим двухслойную по времени неявную разностную схему, аппроксимирующую уравнение неразрывности. Будем использовать стандартные обозначения: $\rho^n = \rho$, $\rho^{n+1} = \hat{\rho}$ и $\rho_t = \frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau}$, где τ — шаг по времени. Аппроксимируем первое уравнение (1) следующим образом

$$\rho_t + A(u)\hat{\rho} = 0. \tag{8}$$

Запишем (8) в более удобном виде:

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} +$$

$$\frac{-\rho_{i+1}^{n+1}(-u_{i+1} + |u_{i+1}|) + \rho_i^{n+1}(u_{i+1} + |u_{i+1}| - u_i + |u_i|) - \rho_{i-1}^{n+1}(u_i + |u_i|)}{2h} = 0, \tag{9}$$

$$0 \leqslant i \leqslant N-1, \quad n \geqslant 0.$$

Напомним, что сеточная функция ρ_i^{n+1} доопределена нулем при $i = -1$, $i = N$.

Уравнение (9) неявно по $\hat{\rho}$. Выпишем матрицу оператора A. Имеем (с точностью до множителя $\frac{1}{2h}$)

$$A = \begin{pmatrix} u_1 + |u_1| & u_1 - |u_1| & 0 & \dots & 0 \\ -u_1 - |u_1| & u_2 + |u_2| - u_1 + |u_1| & u_2 - |u_2| & 0 & \dots \\ 0 & -u_2 - |u_2| & u_3 + |u_3| - u_2 + |u_2| & u_3 - |u_3| & 0 \\ 0 & \dots & -u_3 - |u_3| & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & A_{N-2,N-1} \\ 0 & \dots & 0 & A_{N-1,N-2} & A_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

Матрица A обладает следующими свойствами:

– *элементы на диагонали неотрицательны*;

– *элементы вне диагонали неположительны*;

– *сумма элементов по столбцу равна нулю.*

Из (8) следует $(I + \tau A(u))\hat{\rho} = \tau\rho$. Тогда из рассмотренного выше следует, что матрица $I + \tau A(u)$ является M-матрицей, поэтому у обратной к ней матрицы все элементы будут положительны. Отсюда следует

Теорема 1. *Пусть* $\rho_j^0 > 0$, $j = 0, \ldots, M-1$, *тогда при любом* $n > 0$ *имеет место неравенство* $\rho_j^n > 0$, *т.е. аппроксимация уравнения неразрывности (8) обеспечивает положительность плотности.*

Из вида матрицы A следует

Теорема 2. *Аппроксимация (8) уравнения неразрывности обеспечивает выполнение закона сохранения массы в сеточном случае. А именно, имеет место равенство*

$$\sum_{j=0}^{M-1} h\rho_j^n = \sum_{j=0}^{M-1} h\rho_j^0, \ n = 1, \ldots, N. \tag{10}$$

Доказательство. Так как сумма элементов по столбцу матрицы A равна нулю, то отсюда следует утверждение теоремы.

4. Аппроксимация уравнения движения

Введем другую форму записи аппроксимации уравнения неразрывности. А именно, положим

$$\{\rho\} = [\rho_i] - \tfrac{h}{2}\rho_{\bar{x}}\mathrm{sign}(u), \quad \text{где } [\rho_i] = \tfrac{\rho_i + \rho_{i-1}}{2};$$

заметим, что операторы $\{.\}, [\,.\,]$ зависят от сеточной функции u. Тогда по аналогии с (8) полностью неявная разностная схема для уравнения неразрывности примет вид

$$\rho_t + (\{\hat{\rho}\}\hat{u})_x = 0, \ x = ih, \ i = 0, \ldots, M-1. \tag{11}$$

При аппроксимации уравнения движения будем использовать тот же принцип направленных разностей против потока, что и при аппроксимации уравнения неразрывности. Аппроксимируем исходную задачу полностью неявной разностной схемой:

$$(\rho u)_t + (\{\hat{\rho}\hat{u}\}\hat{u})_x + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\{\hat{\rho}\}(\hat{\rho}^{\gamma-1})_{\bar{x}} = 0, \ x = ih, \ i = 1, \ldots, M-1. \tag{12}$$

Неизвестными в уравнениях (11), (12) являются функции $\hat{\rho}$ и $\hat{u}$, т.е. система уравнений (11), (12) содержит $2M-1$ уравнений и такое же количество неизвестных. Докажем равномерную ограниченность норм $\|(\rho^n)^{1/2}u^n\|$. Введем скалярное произведение (напомним, что функции ρ^n и u^n продолжены нулем на всю сеточную область) по формуле

$$(u, v) = \sum_{i=0}^{M} hu_i v_i.$$

По аналогии с дифференциальным случаем умножим (11) скалярно на $\frac{\tau}{2}\hat{u}^2$, а (12) — скалярно на $\tau\hat{u}$. Вычитая из второго соотношения первое, получим

$$\tau((\rho u)_t,\hat{u})-\tfrac{\tau}{2}(\rho_t,\hat{u}^2)+\tau((\{\hat{\rho}\hat{u}\}\hat{u})_x,\hat{u})-\tfrac{\tau}{2}((\{\hat{\rho}\}\hat{u})_x,\hat{u}^2)$$
$$+\tfrac{\tau\gamma}{\gamma-1}(\{\hat{\rho}\}(\hat{\rho}^{\gamma-1})_{\bar{x}},\hat{u})=0. \tag{13}$$

Оценим выражения в (13). Имеем

$$\tau((\rho u)_t,\hat{u})-\tfrac{\tau}{2}(\rho_t,\hat{u}^2)=(\hat{\rho},\hat{u}^2)-(\rho,u\hat{u})-\tfrac{1}{2}(\hat{\rho},\hat{u}^2)+\tfrac{1}{2}(\rho,\hat{u}^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[(\hat{\rho},\hat{u}^2)-(\rho,u^2)\right]+\tfrac{1}{2}(\rho,(\hat{u}-u)^2). \tag{14}$$

Далее,

$$\tfrac{\tau\gamma}{\gamma-1}(\{\hat{\rho}\}(\hat{\rho}^{\gamma-1})_{\bar{x}},\hat{u})=\tfrac{\tau\gamma}{\gamma-1}((\hat{\rho}^{\gamma-1})_{\bar{x}},\{\hat{\rho}\}\hat{u})$$
$$=-\tfrac{\tau\gamma}{\gamma-1}(\hat{\rho}^{\gamma-1},(\{\hat{\rho}\}\hat{u})_x)=\tfrac{\tau\gamma}{\gamma-1}(\hat{\rho}^{\gamma-1},\rho_t) \tag{15}$$
$$=\tfrac{\gamma}{\gamma-1}(\hat{\rho}^{\gamma},1)-\tfrac{\gamma}{\gamma-1}(\hat{\rho}^{\gamma-1},\rho).$$

Оценим последний член в (15) с помощью неравенства Юнга с показателями $\frac{\gamma}{\gamma-1}$ и γ:

$$\hat{\rho}^{\gamma-1}\cdot\rho\leqslant\tfrac{\gamma-1}{\gamma}\hat{\rho}^{\gamma}+\tfrac{1}{\gamma}\rho^{\gamma}.$$

Тогда из этого соотношения и (15) следует неравенство

$$\tfrac{\tau\gamma}{\gamma-1}(\{\hat{\rho}\}(\hat{\rho}^{\gamma-1})_{\bar{x}},\hat{u})\geqslant\tfrac{1}{\gamma-1}[(\hat{\rho}^{\gamma},1)-(\rho^{\gamma},1)]=\tfrac{1}{\gamma-1}[(\hat{p},1)-(p,1)]. \tag{16}$$

Наконец, оценим последние два слагаемых в (13). А именно, докажем что

$$J=((\{\hat{\rho}\hat{u}\}\hat{u})_x,\hat{u})-\frac{1}{2}\left((\{\hat{\rho}\}\hat{u})_x,\hat{u}^2\right)\geqslant 0.$$

При оценке, для упрощения формул вместо $\hat{\rho}$ и $\hat{u}$ будем писать ρ и u. Воспользуемся формулой (9) для представления аппроксимаций $(\{\rho\}u)_x$ и $(\{\rho u\}u)_x$. Имеем

$$-0.5((\{\rho\}u)_x,u^2)=\tfrac{1}{4h}\sum\Big[\rho_{i+1}(|u_{i+1}|-u_{i+1})u_i^2$$
$$-\rho_i(|u_{i+1}|+u_{i+1})u_i^2+\rho_i(-|u_i|+u_i)u_i^2+\rho_{i-1}(u_i+|u_i|)u_i^2\Big], \tag{17}$$

$$((\{\rho u\}u)_x,u)=\tfrac{1}{2h}\sum\Big[\rho_{i+1}(u_{i+1}-|u_{i+1}|)u_{i+1}u_i$$
$$+\rho_i(u_{i+1}+|u_{i+1}|+|u_i|-u_i)u_i^2-\rho_{i-1}(u_{i-1}u_i+u_{i-1}|u_i|)u_i\Big]. \tag{18}$$

Изменяя индексы в суммировании в формулах (17) и (18), получаем

$$J = \big((\{\rho u\}u)_x, u\big) - 0.5\big((\{\rho\}u)_x, u^2\big) = \sum I(i)\rho_i, \tag{19}$$

где $I = \frac{1}{4h}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + J_1 + J_2)$ и

$$I_1 = (|u_{i+1}| + u_{i+1})u_i^2, \quad I_2 = (|u_i| - u_i)u_i^2, \quad I_3 = (|u_i| - u_i)u_{i-1}^2,$$

$$I_4 = (|u_{i+1}| + u_{i+1})u_{i+1}^2, \tag{20}$$

$$J_1 = 2(u_i - |u_i|)u_i u_{i-1}), \quad J_2 = -2(|u_{i+1}| + u_{i+1})u_i u_{i+1}).$$

Покажем, что $I \geqslant 0$. Прежде всего заметим, что $I_k \geqslant 0,\ k = 1, \cdots, 4$. Рассмотрим восемь различных случаем. Имеем:

1) Пусть $u_i,\ u_{i+1},\ u_{i-1} \geqslant 0$. В этом случае $J_1 = 0,\ J_2 = -4u_{i+1}^2 u_i,\ I_1 = 2u_{i+1}u_i^2,\ I_4 = 2u_{i+1}^3$. Тогда

$$I \geqslant J_2 + I_1 + I_4 = 2u_{i+1}(u_{i+1} - u_i)^2 \geqslant 0.$$

2) Пусть $u_i,\ u_{i+1},\ u_{i-1} \leqslant 0$. В этом случае $J_2 = 0,\ J_1 = 4u_{i-1}u_i^2,\ I_2 = 2u_i^2|u_i|,\ I_3 = 2|u_i|u_{i-1}^2$. Тогда

$$I \geqslant J_1 + I_2 + I_3 = 2|u_i|(u_{i-1} + |u_i|)^2 \geqslant 0.$$

3) Пусть $u_i \geqslant 0,\ u_{i+1},\ u_{i-1} \leqslant 0$. В этом случае $J_2 = 0,\ J_1 = 0$, т.е. $I \geqslant 0$.

4) Пусть $u_i \leqslant 0,\ u_{i+1},\ u_{i-1} \geqslant 0$. В этом случае $J_2 \geqslant 0,\ J_1 = 4u_{i-1}u_i^2,\ I_2 = 2u_i^2|u_i|,\ I_3 = = 2|u_i|u_{i-1}^2$. Тогда

$$I \geqslant J_1 + I_2 + I_3 = 2|u_i|(u_{i-1} + |u_i|)^2 \geqslant 0.$$

5) Пусть $u_{i-1} \leqslant 0,\ u_{i+1},\ u_i \geqslant 0$. В этом случае $J_1 = 0,\ J_2 = 4u_{i+1}^2 u_i,\ I_1 = 2u_{i+1}u_i^2,\ I_4 = 2u_{i+1}^3$. Тогда

$$I \geqslant J_2 + I_1 + I_4 = 2|u_{i+1}|(u_{i+1} + u_i)^2 \geqslant 0.$$

6) Пусть $u_{i-1} \geqslant 0,\ u_i,\ u_{i+1} \leqslant 0$. В этом случае $J_2 = 0,\ J_1 = 4u_{i-1}u_i^2 \geqslant 0$, т.е. $I \geqslant 0$.

7) Пусть $u_{i+1} \leqslant 0,\ u_i,\ u_{i-1} \geqslant 0$. В этом случае $J_2 = 0,\ J_1 = 0$, т.е. $I \geqslant 0$.

8) Пусть $u_{i+1} \geqslant 0,\ u_i,\ u_{i-1} \leqslant 0$. В этом случае $J_2 = -4u_i u_{i-1}^2 \geqslant 0,\ J_1 = 4u_{i-1}u_i^2,\ I_2 = 2u_i^2|u_i|,\ I_3 = 2|u_i|u_{i-1}^2$. Тогда

$$I \geqslant J_1 + I_2 + I_3 = 2|u_i|(u_{i-1} + |u_i|)^2 \geqslant 0.$$

Итак, мы установили, что $I(i) \geqslant 0$. Тогда из (19) и того факта, что $\rho > 0$, следует неравенство $J \geqslant 0$.

Из соотношения (13) и неравенств $J \geqslant 0$, (14), (16), таким образом, следует

Теорема 3. *Для разностной схемы справедливо равенство*

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\big(\rho^n,(u^n)^2\big)+\tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\big(\rho^{i+1},(u^{i+1}-u^i)^2\big)+\frac{1}{\gamma-1}(p^n,1)\\&\quad\leqslant\tfrac{1}{2}\big(\rho^0,(u^0)^2\big)+\tfrac{1}{\gamma-1}(p^0,1).\end{aligned}\tag{20}$$

5. Существование решения разностной схемы

Докажем, что решение (11), (12) при любых шагах сетки τ и h всегда существует. Действительно, введем новую переменную $v=\rho u$. Тогда уравнение (12) примет вид

$$v_t+(\{\hat v\}\hat v/\hat\rho)_x+\tfrac{\gamma}{\gamma-1}\{\hat\rho\}\big(\hat\rho^{\gamma-1}\big)_{\bar x}=0.\tag{21}$$

Для доказательства разрешимости задачи (11), (21) воспользуемся теоремой Лере-Шаудера. Запишем (11), (21) в виде

$$\begin{aligned}&\hat\rho=\rho-\tau(\{\hat\rho\}\hat u)_x\equiv F_1(\hat\rho,\hat v),\\&\hat v=v-\tau\big[(\{\hat v\}\hat v/\hat\rho)_x+\tfrac{\gamma}{\gamma-1}\{\hat\rho\}\big(\hat\rho^{\gamma-1}\big)_{\bar x}\big]\equiv F_2(\hat\rho,\hat v).\end{aligned}\tag{22}$$

Покажем, что все возможные решения задачи

$$\begin{aligned}&\hat\rho=\lambda F_1(\hat\rho,\hat v),\\&\hat v=\lambda F_2(\hat\rho,\hat v),\quad\lambda\in(0,1),\end{aligned}\tag{23}$$

лежат в некотором шаре. Действительно, элементарными преобразованиями (23) сводится к виду

$$\begin{aligned}&\tfrac{1-\lambda}{\tau\lambda}\hat\rho+\rho_t+(\{\hat u\}\hat\rho)_x=0,\\&\tfrac{1-\lambda}{\tau\lambda}\hat\rho\hat u+(\rho u)_t+(\{\hat\rho\hat u\}\hat u)_x+\tfrac{\gamma}{\gamma-1}\hat\rho\big(\hat\rho^{\gamma-1}\big)_{\bar x}=0\end{aligned}\tag{24}$$

Умножая первое уравнение (24) скалярно на $-0.5\hat u^2$, а второе — на $\hat u$, после сложения получим

$$\begin{aligned}&\tfrac{1-\lambda}{2\tau\lambda}(\hat\rho,\hat u^2)+\tfrac{1}{2}\big(\hat\rho,(\hat u)^2\big)+\tfrac{1}{\gamma-1}(\hat\rho^\gamma,1)\\&\quad\leqslant\tfrac{1}{2}\big(\rho,u^2\big)+\tfrac{1}{\gamma-1}(\rho^\gamma,1)\leqslant\tfrac{1}{2}\big(\rho^0,(u^0)^2\big)+\tfrac{1}{\gamma-1}(p^0,1).\end{aligned}\tag{25}$$

Кроме этого, в силу (10) и теоремы 1 имеем

$$\hat\rho>0,\qquad\sum_{i=0}^{M-1}h\hat\rho_i=\sum_{i=0}^{M-1}h\rho_i^0.$$

Далее,

$$\max_i \hat{\rho}_i \leqslant \sum_{i=0}^{M-1} \hat{\rho}_i.$$

Тогда используя (25) и приведенные выше соотношения, получаем

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{\gamma-1}\|\hat{\rho}\|^{\gamma}_{L_{\gamma,h}} + \tfrac{1}{2}\|\hat{v}\|^2 = \tfrac{1}{\gamma-1}\|\hat{\rho}\|^{\gamma}_{L_{\gamma,h}} + \tfrac{1}{2}\|\hat{\rho}\hat{u}\|^2 \\ &\quad\leqslant \tfrac{1}{\gamma-1}\|\hat{\rho}\|^{\gamma}_{L_{\gamma,h}} + \tfrac{1}{2h}\|\rho^0\|_{L_{1,h}}\big(\hat{\rho},\hat{u}^2\big) \\ &\quad\leqslant \tfrac{1}{h}\max\{1,\|\rho^0\|_{L_{1,h}}\}\left[\tfrac{1}{\gamma-1}\|\hat{\rho}\|^{\gamma}_{L_{\gamma,h}} + \tfrac{1}{2}\big(\hat{\rho},\hat{u}^2\big)\right] \\ &\quad\leqslant \tfrac{1}{h}\max\{1,\|\rho^0\|_{L_{1,h}}\}\left[\tfrac{1}{2}\big(\rho^0,(u^0)^2\big) + \tfrac{1}{\gamma-1}(p^0,1)\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

Неравенство (26) означает равномерную по $\lambda \in (0,1)$ ограниченность норм решений операторного уравнения (23). Тогда из теоремы Лере-Шаудера [7] следует

Теорема 4. *Решение задачи (11), (21) при любых τ и h существует.*

Отметим, что по доказанному ранее, $\hat{\rho} > 0$, поэтому $\hat{u} = \hat{v}/\hat{\rho}$ также существует.

Для нахождения решения ρ^{n+1}, u^{n+1} задачи (11), (12) может быть использован следующий итерационный процесс

$$\begin{aligned} &\tfrac{\rho^{k+1}-\rho^n}{\tau} + (\{\rho^{k+1}\}u^k)_x = 0, \\ &\tfrac{\rho^{k+1}u^{k+1}-\rho^n u^n}{\tau} + (\{\rho^{k+1}u^{k+1}\}u^{k+1})_x \\ &\qquad + \tfrac{\gamma}{\gamma-1}\{\rho^{k+1}\}((\rho^{k+1})^{\gamma-1})_{\bar{x}} = 0, \quad u^k|_{k=0} = u^n; \end{aligned} \tag{27}$$

здесь $k = 0, 1, ...$ — номер итерации. Для решения первого уравнения (27) в одномерном случае можно использовать метод прогонки, а в многомерном — метод простой итерации. Для решения второго уравнения (27) используем метод простой итерации. Можно доказать, что при достаточно малом шаге по времени эти процессы сходятся.

6. Заключение

Таким образом для системы уравнений, описывающей течение идеального (вязкого) баротропного газа, предложена разностная схема, обеспечивающая положительность плотности. Доказано существование решения получающейся системы нелинейных уравнений при любых шагах сетки по времени и пространству. Предложен итерационный процесс для решения полученной системы на временном шаге.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 17-01-838) и Программы ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики"("Оптимальные методы решения задач математической физики").

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский О.М., Васильев М.О., Ведерников А.Б., Дымников В.П., Замышляев Б.В., Борис Юрьевич Крысанов Б.Ю., Николай Вадимович Ковшов Н.В., Вячеслав Евгеньевич Куницын В.Е., Евгений Александрович Молоков Е.А., Репин А.Ю., Сидоренкова Н.А., Ступицкий Е.Л., Холодов Я.А., Холодов А.С. О численном моделировании некоторых задач взаимодействия литосферы, гидросферы и атмосферы Земли. В кн.: Фрагменты истории и достижения ИАП РАН. 1986-2011. ИАП РАН, ООО ИЦ "Полет Джонатана" , 2011, с. 14 - 71.

2. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. «М.: КРАСАНД, 2014», 2015.

3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, Наука, 1983.

4. Амосов А.А., А. А. Злотник А.А., Разностные схемы второго порядка точности для уравнений одномерного движения вязкого газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1987, т. 27, №7, с.1032–1049

5. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Наука, 2001.

6. Lions P.-L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. V.2. Compressible Models. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 10. Oxford: Clarendon Press, 1998.

7. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

REFERENCES

1. Belotserkovskii O.M., Vasil'ev M.O., Vedernikov A.B., Dymnikov V.P., Zamyshlyaev B.V., Krysanov B.Yu., Kovshov N.V., Kunitsyn V.E., Molokov E.A., Repin A.Yu., Sidorenkova N.A., Stupitskii E.L., Kholodov Ya.A., Kholodov A.S. *Numerical simulation of some problems of interaction of Earth's lithosphere, hydrosphere and atmosphere.* In book: [Hystory fragments and achievements of the Design Automatization Institute of Russian Academy of Sciences. 1986-2011], Publishing House " Johnatan

flight" . Институт автоматизации проектирования РАН, ООО ИЦ " Полет Джонатана" , 2011, с. 14 - 71.

2. Popov I.V., Fryazinov I.V. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики *Metod adaptivnoy iskusstvennoy vyazkosti [Adaptive artificial viscosity method].* Moscow: Krasand, 2014.

3. Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей *Kraevye zadachi mekhaniki neodnorodnykh zhidkostey [Boundary value problems of inhomogenious flows].* Новосибирск, Наука, 1983.

4. Amosov A.A., Zlotnik A.A., Разностные схемы второго порядка точности для уравнений одномерного движения вязкого газа. *Raznostnye skhemy vtorogo poryadka tochnosti dlya uravneniy odnomernogo dvizheniya gaza [Second order accuracy finite difference schemes for 1D viscous gas flow]* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1987, т. 27, №7, с.1032–1049

5. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem [Mathematical problems of numerical solution of systems of hyperbolic equations]* M.: Наука, 2001.

6. Lions P.-L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. V.2. Compressible Models. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 10. Oxford: Clarendon Press, 1998.

7. Ladyzhenskaya O.A. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti [The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow].* M.: Наука, 1970.

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.4, 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-316-329

О ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛАСТОМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ CAE FIDESYS[1]

Д. А. Коновалов[2], М. Я. Яковлев[3] (Москва)

Аннотация

Одной из основных задач механики композитов является оценка эффективных характеристик композиционного материала. В данной работе описывается методика численной оценки эффективных нелинейно-упругих характеристик применительно к эластомерным композитам (наполненным резинам), при конечных деформациях. Методика основана на численном решении краевых задач нелинейной теории упругости на представительном объёме эластомерного композита. К представительному объёму последовательно прикладываются различные граничные условия: непериодические (в виде жёстко заданных перемещений каждой точки границы) либо периодические (в виде связей, наложенных на перемещения точек противоположных граней представительного объёма, проекции которых на эти грани совпадают). После решения краевой задачи упругости полученное поле напряжений осредняется по объёму. Эффективные свойства оцениваются в виде квадратичной зависимости второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа от тензора деформаций Грина. В статье представлены результаты численной оценки эффективных упругих характеристик наполненных резин при конечных деформациях. Численные расчёты проводились с помощью программного модуля Fidesys Composite, входящего в состав

[1]Исследования для данной работы были выполнены в ООО «Фидесис» при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (Соглашение о предоставлении субсидии №14.579.21.0112, уникальный идентификатор ПНИЭР: RFMEFI57915X0112).

[2]Коновалов Дмитрий Андреевич, директор департамента разработки ПО, ООО "Фидесис konovalov@cae-fidesys.com

[3]Яковлев Максим Яковлевич, руководитель сектора анализа свойств композиционных и пористых материалов, ООО "Фидесис yakovlev@cae-fidesys.com

отечественной CAE-системы Fidesys, с использованием метода конечных элементов и метода спектральных элементов. Метод спектральных элементов является более современной и эффективной версией метода конечных элементов. В нём в качестве базисных функций используются кусочно-полиномиальные функции высоких порядков. При работе с моделью у пользователя отсутствует необходимость перестроения и измельчения сетки для проверки сеточной сходимости полученного решения, поскольку сетка может оставаться изначальной, а изменяться только порядок элементов. Исследовались зависимости эффективных свойств наполненного эластомера от пространственной ориентации частиц наполнителя и от степени наполнения. Графики этих зависимостей приведены в статье. Полученные результаты свидетельствуют о применимости метода спектральных элементов к численному решению задачи оценки эффективных свойств композитов. Также полученные результаты позволяют оценить влияние нелинейных эффектов на механические свойства композита. Так, например, при одноосном растяжении величиной деформации порядка 15% поправка от учёта нелинейных эффектов для напряжения в направлении той же оси составит примерно 25%.

Ключевые слова: Механика деформируемого твёрдого тела, механика композитов, эффективные свойства, конечные деформации, эластомерные композиты, метод спектральных элементов.

Библиография: 19 названий.

NUMERICAL ESTIMATION OF EFFECTIVE ELASTIC PROPERTIES OF ELASTOMER COMPOSITES UNDER FINITE STRAINS USING SPECTRAL ELEMENT METHOD WITH CAE FIDESYS

D. A. Konovalov, M. Ya. Yakovlev (Moscow)

Abstract

Estimation of effective properties of composite materials is one of the main problems for the composite mechanics. In this article, a method is developed by which the effective nonlinear elastic properties of elastomer composites (filled rubbers) are estimated under finite strains. The method is based on numerical solution of nonlinear elastic boundary-value problems for a representative volume element (RVE) of elastomer composite. Different boundary conditions are consequently applied to the RVE: nonperiodic (displacements of the RVE boundary) or periodic (restraints on displacements of corresponding points of opposite faces of RVE). An obtained stress field is averaged by volume after the solution of

an elastic boundary-value problem. Effective properties are estimated as a quadratic dependence of the second Piola-Kirchhoff stress tensor upon the Green strain tensor. This article presents the results of numerical estimation of effective elastic properties of filled rubbers under finite strains. Numerical calculations were performed with the help of Fidesys Composite program module, which is a part of the domestic Fidesys CAE-system, using the finite element method and the spectral element method. Spectral element method is one of the most effective and modern finite element method version. High order piecewice-polynomial functions are reference functions in SEM. There is no need to rebuild or refine mesh to check solution mesh convergence, as mesh is kept in initial state and only element orders are changed. The subject of investigation was the filled elastomer effective properties dependence upon the filler particles special orientation and the filling degree. Graphs of these dependencies are given in the article. The obtained results show that the spectral element method is suitable for numerical solution of the effective properties estimation problem for composite materials. In addition, the results allow to estimate the influence of non-linear effects upon the mechanical properties of the composite. The correction for stress from taking the non-linearity into account is about 25% under the strain 15% in the case of uniaxial tension.

Keywords: Solid mechanics, composite mechanics, effective properties, finite strains, elastomer composites, spectral element method.

Bibliography: 19 titles.

1. Введение

К эластомерным композитам относятся, в основном, наполненные резины [4]. Они представляют собой каучук, насыщенный мельчайшими частицами технического углерода (сажи). Наличие наполнителя в составе резины приводит к многократному повышению уровня различных эксплуатационных характеристик: прочности, износостойкости, усталостной выносливости и т.д. При разработке новых типов наполненных резин возникает задача прогнозирования их свойств в зависимости от свойств каучука и наполнителя, от степени наполнения, от размера и формы частиц наполнителя. В данной работе описывается один из вариантов оценки эффективных упругих свойств [10, 12] таких материалов в нелинейном виде, при конечных деформациях [2, 3], основанный на численном решении краевых задач теории упругости на представительном объёме наполненного эластомера [11, 13, 14, 15].

2. Методика численной оценки эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях

Поскольку речь идёт о расчётах на представительном объёме, необходимо сначала дать определение этого понятия. **Представительным объёмом** эластомерного композита называется минимальный объём этого материала, на котором могут быть проведены некоторые эксперименты или измерения, на основе результатов которых можно сделать выводы о поведении композиционного материала в целом. Представительный объём наполненного эластомера должен содержать достаточный объём каждого компонента, чтобы позволить осреднить свойства всего материала. Если же рассматривается упрощённая модель наполненного эластомера, имеющая регулярную (периодическую) структуру – тогда в роли представительного объёма может выступать ячейка периодичности.

Используя приведённое выше определение, опишем методику численной оценки эффективных упругих характеристик эластомерного композита в нелинейном виде, при конечных деформациях.

Для представительного объёма V_0 в начальном состоянии (до деформирования) решается определённое число *последовательностей* краевых задач *нелинейной* теории упругости [4]:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \text{ или } \overset{0}{\nabla} \cdot \Re = 0 \tag{1}$$

с непериодическими граничными условиями в виде заданного вектора перемещений каждой точки границы

$$u\,|_{\Gamma_0} = r \cdot (\Psi^e - I) \tag{2}$$

либо с *периодическими* граничными условиями в виде связей на перемещения противоположных точек границы

$$\begin{aligned} u_i^1 - u_i^{-1} &= -2A\,(\psi_{1i} - \delta_{1i}) \\ u_i^2 - u_i^{-2} &= -2B\,(\psi_{2i} - \delta_{2i}) \\ u_i^3 - u_i^{-3} &= -2C\,(\psi_{3i} - \delta_{3i}) \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $ир$ – тензор истинных напряжений, $\Re$ – первый тензор напряжений Пиолы, ∇ – оператор градиента, r – радиус-вектор, Ψ^e – эффективный аффинор деформаций, ψ_{ji} – его компоненты, u – вектор перемещения точки. В периодических условиях:

1. пара (1; -1) – противоположные друг другу узлы на гранях представительного объёма, перпендикулярных оси X;

2. пара (2; -2) – противоположные друг другу узлы на гранях представительного объёма, перпендикулярных оси Y;

3. пара (3; -3) – противоположные друг другу узлы на гранях представительного объёма, перпендикулярных оси Z.

Для представительного объёма решается 21 последовательность краевых задач теории упругости. Разные последовательности задач отличаются типом приложенных граничных условий (т.е. типом эффективного тензора деформаций на представительном объёме). Разные задачи в рамках одной последовательности различаются величиной деформации при одном и том же типе. Прикладываются деформации следующих типов:

1. растяжения/сжатия (вдоль каждой из координатных осей);
2. сдвиги (в каждой из координатных плоскостей);
3. композиции растяжений с растяжениями;
4. композиции растяжений со сдвигами;
5. композиции сдвигов со сдвигами.

В результате решения каждой краевой задачи упругости вычисляется распределение тензора истинных напряжений *up* на представительном объёме (или ячейке периодичности). Тензор *up* осредняется по объёму по формуле

$$\sigma^e = \frac{1}{V}\int_V dV \tag{4}$$

И получается эффективный (средний) тензор напряжений σ^e.

Из известного эффективного аффинора деформаций, заданного в (2), вычисляется эффективный тензор деформаций Грина $\overset{0}{E}{}^e$ по формуле

$$\overset{0}{E}{}^e = \frac{1}{2}(\Psi^e \cdot \Psi^{e*} - I) \tag{5}$$

А из эффективного аффинора деформаций и вычисленного в (4) эффективного тензора напряжений вычисляется эффективный второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа $\overset{0}{E}{}^e$

$$\overset{0}{\Sigma}{}^e = (\det \Psi^e)\,(\Psi^e)^{*-1} \cdot \sigma^e \cdot (\Psi^e)^{-1} \tag{6}$$

Таким образом, для каждой задачи каждой последовательности фактически задаётся эффективный тензор деформаций Грина $\overset{0}{E}{}^e$, а вычисляется эффективный второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа $\overset{0}{\Sigma}{}^e$. Поскольку разные задачи в рамках одной последовательности различаются только величиной деформации, а тип деформации сохраняется – для каждой последовательности строится зависимость эффективного тензора Пиолы-Кирхгофа от характерной величины деформации q:

$$\overset{0}{\Sigma}{}^{e}_{ij} = \alpha^0_{ij} q + \alpha^1_{ij} q^2 \tag{7}$$

Коэффициенты α^0_{ij} и α^1_{ij} каждой из 21 зависимости вычисляются с помощью метода наименьших квадратов. Далее на основе этих зависимостей оцениваются эффективные упругие свойства материала в виде квадратичной зависимости тензора Пиолы-Кирхгофа $\overset{0}{e}$ от тензора Грина $\overset{0}{E}{}^{e}$

$$\overset{0}{\Sigma}{}^{e}_{ij} = \overset{(0)}{C}{}_{ijkl} \overset{0}{E}{}^{e}_{kl} + C^{(1)}_{ijklmn} \overset{0}{E}{}^{e}_{kl} \overset{0}{E}{}^{e}_{mn} \tag{8}$$

Таким образом, оценка эффективных упругих свойств в нелинейном виде представляет собой вычисление коэффициентов $\overset{(0)}{C}{}_{ijkl}$ и $C^{(1)}_{ijklmn}$ из (8).

Следует заметить, что оценка эффективных упругих свойств в линейном виде (при малых деформациях) имеет схожую идею, но существенно более простую реализацию [5, 6].

Данная методика была ранее реализована в программном модуле Fidesys Composite отечественной CAE-системы Fidesys [19], предназначенном для оценки эффективных механических и теплофизических характеристик неоднородных материалов (композиционных, пористых и т.п.), с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [17, 18]. В данной работе впервые реализован вариант методики, в котором решение краевых задач теории упругости в Fidesys Composite осуществляется с помощью более современного метода спектральных элементов (МСЭ) [9].

Одним из основных преимуществ МСЭ является высокая точность аппроксимации решения при небольшом числе сеточных элементов по сравнению с МКЭ. Погрешность численного решения оценивается при этом: $\|[u_h] - u_h\| \leqslant C(N)$, при этом $C(N) = K_1 h^N e^{-N}$ для МСЭ и $C(N) = K_2 h^N$ для МКЭ. K_1 и K_2 – константы, h – характерный размер сетки, N – порядок элемента, u_h – численное решение. Для интегрирования по элементам в МКЭ принято использовать квадратурные формулы Гаусса. Одной из отличительных особенностей МСЭ является использование для вычисления интегралов квадратурных формул Гаусса-Лобатто-Лежандра (ГЛЛ) [7]. Для аппроксимации решения u на гексаэдральных элементах (HEX) используются полиномы Лагранжа степени N, построенные на тех же ГЛЛ-узлах, что необходимы для вычисления интегралов по элементам с помощью квадратурной формулы Гаусса-Лобатто-Лежандра. Для аппроксимации решения u на тетраэдральных элементов (TET) используются функции формы, строящиеся на полиномах Якоби степени не выше N и элементах матрицы Вандермонда, построенной на основе значений полиномов Якоби в узлах элемента [8]. Для интегрирования по тетраэдральным спектральным элементам необходимо выбирать симметричные квадратурные формулы с положительными весами, например, описанные Чангом [16].

3. Результаты численных расчётов

С помощью разработанного модуля Fidesys Composite были проведены две серии численных расчётов эффективных характеристик резины, наполненной техническим углеродом. Механические свойства углерода описывались законом Гука с модулем Юнга 20000 МПа и коэффициентом Пуассона 0.2. Каучук моделировался материалом Муни-Ривлина с константами $C_1 = -0.05709$ МПа, $C_2 = 1.05046$ МПа. В обеих сериях рассматривалась упрощённая модель структуры наполненного эластомера – периодическая структура.

Задача №1. Зависимость эффективных упругих свойств наполненного эластомера от ориентации эллипсоидальных частиц наполнителя

Изучалась зависимость эффективных упругих свойств наполненного эластомера с частицами наполнителя в виде эллипсоида от ориентации частиц наполнителя в пространстве. Рассматривалась упрощённая модель геометрии композита в виде периодической структуры. Ячейкой периодичности был единичный куб. Частица наполнителя имела форму эллипсоида вращения с соотношением осей 2:1:1. Степень наполнения составляла 6.7%. Большая ось эллипсоида находилась в плоскости XY, варьировался угол её наклона по отношению к оси X от 0 до 90%.

Расчёты показали, что для коэффициента $\overset{(0)}{C}_{1111}$, отвечающего за поведение материала при деформации вдоль оси X, максимальное значение составляет 54 МПа (достигается при нулевом угле), а минимальное значение 50 МПа (достигается при угле 45 градусов). Таким образом, максимальное и минимальное значения $\overset{(0)}{C}_{1111}$ разнятся на 8%. Для прочих коэффициентов различие между максимальной и минимальной величиной ещё меньше.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод, что при данной степени наполнения и при данной форме частиц наполнителя **пространственная ориентация частиц влияет на эффективные упругие характеристики достаточно слабо**.

Расчёты для этой задачи для всех углов проводились как на тетраэдральных конечных элементах второго порядка, так и на тетраэдральных спектральных элементах третьего порядка, но большего характерного размера, нежели конечные элементы. Количество элементов сетки для МСЭ было в 3.5 раза меньше, чем для МКЭ. Результаты расчётов показали, что практически всегда различие между соответствующими коэффициентами составляло не более 1%, в редких случаях доходя до 2%. При этом более крупная сетка из спектральных элементов позволила сократить время расчёта в полтора раза. Поскольку расчёты нелинейно-упругих эффективных свойств композитов при конечных деформациях ранее сравнивались с аналитическими решениями в работах [11, 13, 15] и показали хорошее совпадение, это позволяет сделать вывод, что **метод спектральных элементов (МСЭ) применим для численной оценки эффективных характеристик композиционных материалов и позволяет получить определённый выигрыш по времени (по сравнению с МКЭ) при сохранении точности**.

Задача №2. Зависимость эффективных упругих свойств наполненного эластомера от степени наполнения

Изучалась зависимость эффективных упругих свойств наполненного эластомера от степени наполнения. Рассматривалась упрощённая модель геометрии композита в виде периодической структуры. Ячейкой периодичности был единичный куб. Частица наполнителя имела форму шара. Степень наполнения варьировалась от 5% до 30%.

Поскольку решение предыдущей задачи показало совпадение результатов для МКЭ и МСЭ в пределах 2% – данная задача рассчитывалась только с помощью МСЭ, что позволило уменьшить время расчётов.

Приведём графики для линейных коэффициентов $\overset{(0)}{C}_{1111}$, $\overset{(0)}{C}_{1212}$ и $\overset{(0)}{C}_{1122}$. Исходя из физических соображений, на графиках использовалась линейная аппроксимация.

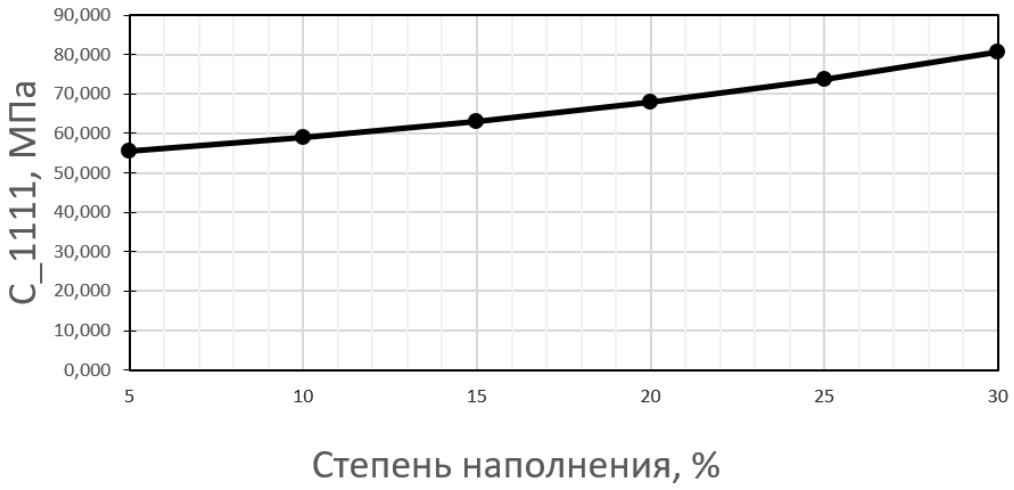


Рис. 1: Зависимость коэффициента $\overset{(0)}{C}_{1111}$ наполненного эластомера от степени наполнения.

Как видно из графиков, коэффициент $\overset{(0)}{C}_{1111}$, определяющий поведение материала при растяжении/сжатии вдоль оси X, зависит от степени наполнения практически линейно (Рисунок 1): чем больше степень наполнения – тем больше $\overset{(0)}{C}_{1111}$. График для коэффициента $\overset{(0)}{C}_{2222}$ выглядит точно так же, поэтому здесь он не приведён. Аналогичный характер имеют зависимости от степени наполнения коэффициента $\overset{(0)}{C}_{1212}$ (Рисунок 2), определяющего поведение материала при сдвиговых деформациях, и коэффициента $\overset{(0)}{C}_{1122}$ (Рисунок 3).

Можно отметить, что коэффициент $\overset{(0)}{C}_{1212}$ в 20-30 раз меньше $\overset{(0)}{C}_{1111}$ – особенность структуры наполненного эластомера такова, что материал ощутимо

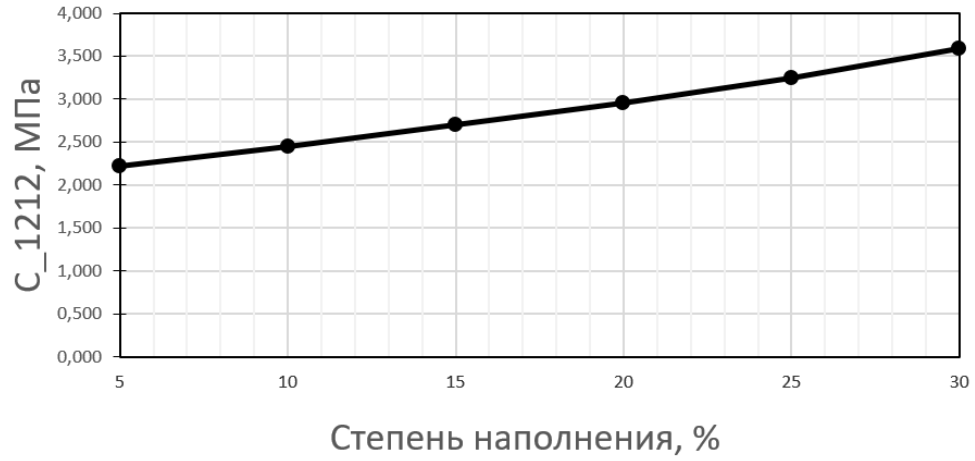


Рис. 2: Зависимость коэффициента $\overset{(0)}{C}_{1212}$ наполненного эластомера от степени наполнения.

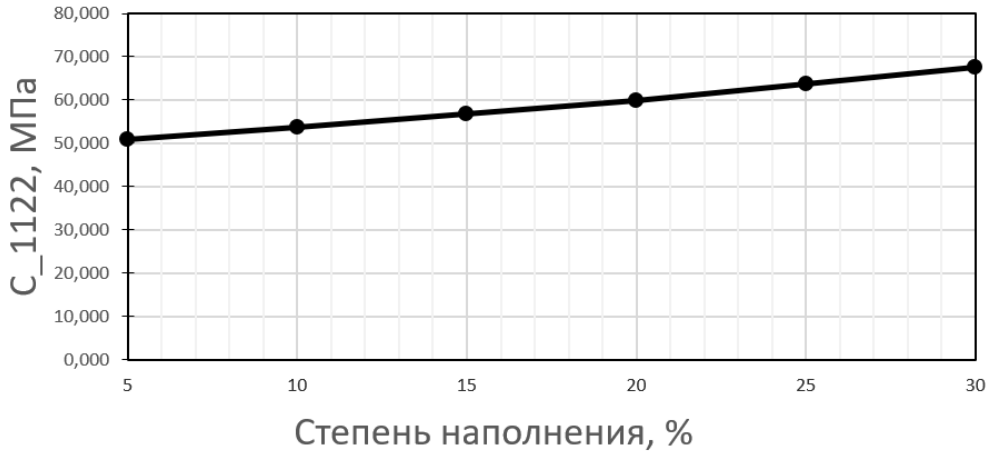


Рис. 3: Зависимость коэффициента $\overset{(0)}{C}_{1122}$ наполненного эластомера от степени наполнения.

легче поддаётся сдвиговым деформациям, чем растягивающим или сжимающим.

Приведём также графики для нелинейных коэффициентов $\overset{(1)}{C}_{111111}$ и $\overset{(1)}{C}_{121212}$.

Графики показывают, что коэффициент $\overset{(1)}{C}_{111111}$ (определяющий нелинейность материала при деформации вдоль оси X), увеличивается по модулю при росте степени наполнения (Рисунок 4). График для коэффициента $\overset{(1)}{C}_{222222}$ выглядит точно так же. При этом сами коэффициенты $\overset{(1)}{C}_{111111}$

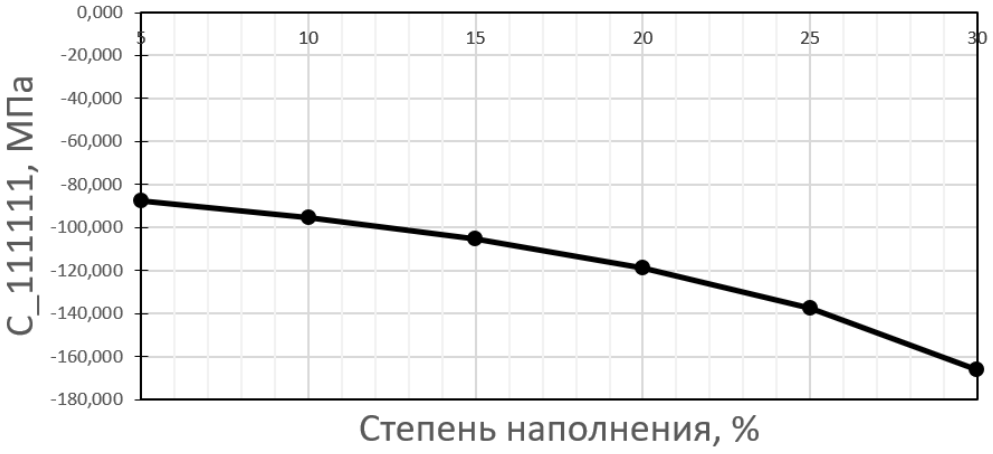


Рис. 4: Зависимость коэффициента $\overset{(1)}{C}_{111111}$ наполненного эластомера от степени наполнения.

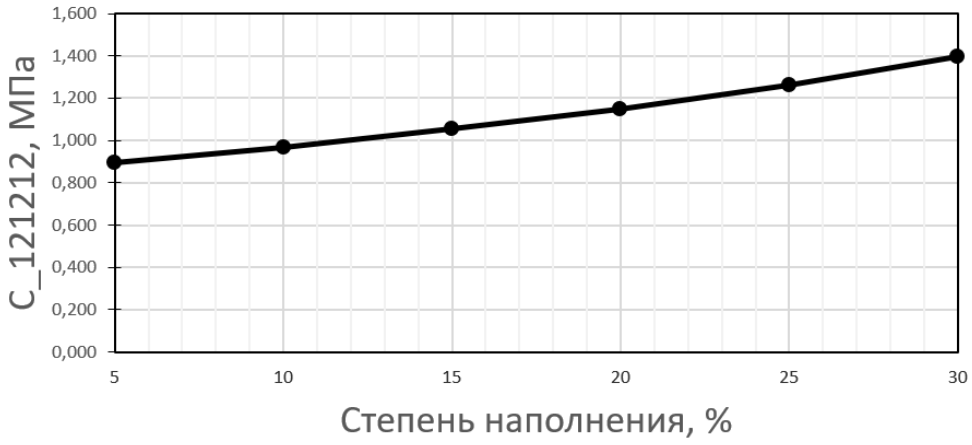


Рис. 5: Зависимость коэффициента $\overset{(1)}{C}_{121212}$ наполненного эластомера от степени наполнения.

и $\overset{(1)}{C}_{222222}$ являются отрицательными величинами. А коэффициент $\overset{(1)}{C}_{121212}$ (определяющий нелинейность при сдвиговых деформациях) – положителен, при увеличении степени наполнения также увеличивается (Рисунок 5). Это свидетельствует о том, что поправка от учёта нелинейных эффектов для напряжения при растягивающих деформациях является отрицательной, а при сдвиговых деформациях – положительной.

4. Заключение

Таким образом, в статье представлена методика численной оценки эффективных механических характеристик эластомерных композитов. Научная новизна этой методики определяется учётом нелинейных эффектов при конечных деформациях. Учитывается как физическая, так и геометрическая нелинейность. Эффективные определяющие соотношения представлены в виде квадратичной зависимости между осреднёнными напряжениями и деформациями. Для вычисления эффективных модулей упругости решаются последовательности краевых задач нелинейной теории упругости для деформаций разного типа и величины. Вычисления проводятся с помощью программного модуля Fidesys Composite в составе CAE-системы Fidesys. Результаты расчётов эффективных характеристик эластомерного композита, представленные в работе, подтверждают работоспособность методики. Исследовано влияние пространственной ориентации частиц наполнителя и степени наполнения на эффективные свойства. В частности, установлено, что влияние ориентации эллипсоидальных частиц наполнителя на эффективные свойства достаточно мало при достаточно малой степени наполнения. Кроме того, проведено сравнение численных результатов, полученных для одних и тех же задач с помощью МКЭ и МСЭ, показавшее совпадение результатов с хорошей точностью (порядка 1%).

Полученные результаты позволяют оценить влияние нелинейных эффектов на механические свойства наполненного эластомера для деформаций различной величины. Так, например, из рисунков (Рисунок 1 и Рисунок 4) видно, что при одноосном растяжении величиной деформации порядка 15% поправка от учёта нелинейных эффектов для напряжения в направлении той же оси составит примерно 25%.

Авторы выражают благодарность профессору МГУ имени М.В. Ломоносова В.А. Левину за постановку задачи и внимание при её выполнении.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Филиппенко Е.В., Яковлев М.Я. К вопросу о постановке задачи расчета поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокомпозита // Каучук и резина, №4, 2010. – С. 22–25.

2. Левин В.А. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 456 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В.А. Левина: В 5 т. Т. I).

3. Левин В.А., Зингерман К.М. Точные и приближённые аналитические решения при конечных деформациях и их наложении. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 400 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В.А. Левина: В 5 т. Т. III).

4. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М., Наука, 1980. – 512 с.

5. Яковлев М.Я. О численной оценке эффективных механических характеристик резинокордных композитов // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. №17, 2012. – С. 29–40.

6. Яковлев М.Я., Янгирова А.В. Метод и результаты численной оценки эффективных механических свойств резинокордных композитов для случая двухслойного материала [Электронный ресурс] // Инженерный вестник Дона, №2, 2013. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1639

7. Bronstein J.N., Semendjajew K.A., Musiol G., Muchkig H. Taschenbuch der Mathematik, 4. Auglage. Harri Deutch, Frankfurt a. M., 1999.

8. Hesthaven J.S., Teng C.H. Stable Spectral Methods on Tetrahedral Elements, SIAM Journal of Scientific Computing, Vol. 21, No. 6, 1998, pp. 2352-2380.

9. Komatitsch D., Violette J.-P., The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. Bulletin of Seismological Society of America, 88(2), 1998

10. Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2000. V. 67, No. 4. – P. 667-670.

11. Levin V.A., Vdovichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya., Zingerman K.M. Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced Plexiglas in the two-dimensional case [Электронный ресурс] // Model. Simulat. Eng., 2016. – Режим доступа: http://www.hindawi.com/journals/mse/aip/9010576/

12. Levin V.A., Zingermann K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains// Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2003. Vol. 70, No. 6. – P. 809–816.

13. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Compos. Struct., V. 131, 2015. – P. 25–36.

14. Vdovichenko I.I., Yakovlev M.Ya., Vershinin A.V., Levin V.A. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems [Электронный ресурс] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, V. 158, I. 1, article 012094. – Режим доступа: http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012094/pdf

15. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Ya. Software for estimation of second order effective material properties of

porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Adv. Eng. Softw., V. 86, 2015. – P. 80–84.

16. Zhang L. Cui T., Liu H. A set of symmetric quadrature rules on triangle and tetrahedral, Journal of Computational Mathematics, Vol. 27, No 1, 2009, pp. 89-96.

17. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. The finite element method. Vol. 1. The basis. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 707 pp.

18. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. The finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 479 pp.

19. Официальный сайт ООО «Фидесис» [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://cae-fidesys.ru/

REFERENCES

1. Gamlitskiy U.A., Levin V.A., Filippenko E.V. Yakovlev M.Y., On the problem of an elastomeric nanocomposite unit cell stress field calculation // Rubber №4, 2010. – p. 22–25.

2. Levin V.A., Models and methods. Defect inception and growth. - Moscow: FIZMATLIT, 2015. - 456 p. (Nonlinear computational mechanics of strength / Under the general editorship of VA Levin: In 5 volumes, vol. I).

3. Levin V.A., Zingerman K.M., Exact and approximate analytical solutions for finite deformations and their imposition. - Moscow: FIZMATLIT, - 400 p. (Nonlinear computational mechanics of strength / Under the general editorship of Levin V.A.: In 5 volumes, vol. III).

4. Lurie A.I., Nonlinear theory of elasticity. - M., Science, 1980. - 512 p.

5. Yakovlev M.Y., On the numerical estimation of effective mechanical characteristics of rubber-cord composites // Bulletin of Tver State University. Series: Applied Mathematics. № 17, 2012. - P. 29-40.

6. Yakovlev M.Y., Yangirova A.V., Method and results of a numerical evaluation of the effective mechanical properties of rubber-cord composites for the case of a two-layer material. [Electronic resource]. // Deng Engineering Digest, No. 2, 2013. - Access mode: http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1639

7. Bronstein J.N., Semendjajew K.A., Musiol G., Muchkig H. Taschenbuch der Mathematik, 4. Auglage. Harri Deutch, Frankfurt a. M., 1999.

8. Hesthaven J.S., Teng C.H. Stable Spectral Methods on Tetrahedral Elements, SIAM Journal of Scientific Computing, Vol. 21, No. 6, 1998, pp. 2352-2380.

9. Komatitsch D., Violette J.-P., The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. Bulletin of Seismological Society of America, 88(2), 1998

10. Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2000. V. 67, No. 4. – P. 667-670.

11. Levin V.A., Vdovichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya., Zingerman K.M. Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced Plexiglas in the two-dimensional case [Электронный ресурс] // Model. Simulat. Eng., 2016. – Режим доступа: http://www.hindawi.com/journals/mse/aip/9010576/

12. Levin V.A., Zingermann K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains// Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2003. Vol. 70, No. 6. – P. 809–816.

13. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Compos. Struct., V. 131, 2015. – P. 25–36.

14. Vdovichenko I.I., Yakovlev M.Ya., Vershinin A.V., Levin V.A. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems [Электронный ресурс] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, V. 158, I. 1, article 012094. – Режим доступа: http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012094/pdf

15. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Adv. Eng. Softw., V. 86, 2015. – P. 80–84.

16. Zhang L. Cui T., Liu H. A set of symmetric quadrature rules on triangle and tetrahedral, Journal of Computational Mathematics, Vol. 27, No 1, 2009, pp. 89-96.

17. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. The finite element method. Vol. 1. The basis. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 707 pp.

18. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. The finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 479 pp.

19. Fidesys LLC official web-site [Electronic resource] - Access mode: http://cae-fidesys.com/en

получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3, 539.4 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-330-349

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕРМО-ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В КОНЕЧНОМ ОДНОМЕРНОМ КРИСТАЛЛЕ[1]

А. М. Кривцов[2], А. С. Мурачёв[3], Д. В. Цветков[4]
(г. Санкт-Петербург)

Аннотация

Рассматривается периодический одномерный гармонический кристалл, подвергнутый мгновенному пространственно-однородному тепловому воздействию. Строится точное решение для тепловых и диффузионных характеристик: дисперсии скоростей частиц (кинетической температуры) и дисперсии перемещений частиц. Выявляется квазипериодическое повторение тепловых и диффузионных процессов. Характерное время повторения равно половине времени пробега звуковых волн вдоль кристалла. С указанной периодичностью в системе реализуется “тепловое эхо” — резкие всплески кинетической температуры. Диффузионные характеристики обнаруживают крупномасштабные изменения во времени с практически полным возвращением в исходное состояние на каждом квазипериоде. Показано, что для квадратов перемещений частиц среднее по пространству существенно отличается от среднего по ансамблю.

Ключевые слова: Гармонический кристалл, неравновесная термодинамика, температура, диффузия.

Библиография: 23 названий.

[1]Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-29-15121.

[2]Кривцов Антон Мирославович, член-корреспондент Российской академии наук, заведующий кафедрой теоретическая механика Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, akrivtsov@bk.ru

[3]Мурачёв Андрей Сергеевич, аспирант Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, andrey.murachev@gmail.com

[4]Цветков Денис Валерьевич, техник кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, DVTsvetkov@ya.ru

NON-STATIONARY THERMO-DIFFUSION PROCESSES IN FINITE ONE-DIMENSIONAL CRYSTAL

A. M. Krivtsov, A. S. Murachev, D. V. Tsvetkov (Saint-Petersburg)

Abstract

A periodic one-dimensional harmonic crystal subjected to an instantaneous spatially uniform thermal perturbation is considered. Fast transitional and long evolutionary processes are observed. Time dependance of thermal and diffusion characteristics is analyzed. Influence of the crystal finite size on the transitional and evolutionary processes is considered. The principal difference in long time behavior for statistical averages for squares of velocities and squares of displacements is demonstrated.

Keywords: Harmonic crystal, nonequilibrium thermodynamics, temperature, diffusion.

Bibliography: 23 titles.

1. Введение

Точное аналитическое описание нестационарных тепловых и диффузионных процессов на молекулярном уровне представляет собой сложную задачу, на настоящее время имеющую решение лишь для ограниченного класса систем. Значительный прогресс в этой области достигнут для гармонических кристаллов [1, 2, 3, 4, 5, 6], в которых используются линеаризованные силы взаимодействия между атомами. Подобное приближение оправдано, если температуры далеки от температур плавления, а электронная подсистема не вносит существенного вклада в общую динамику кристаллической решетки. Эти условия естественным образом могут быть выполнены для ковалентных кристаллов. В данной работе на примере одномерного гармонического кристалла будет проведен анализ нестационарных тепловых и диффузионных процессов в конечных системах. Под тепловыми будут пониматься процессы, связанные со случайными скоростями, под диффузионными — со случайными перемещениями частиц кристалла.

Тепловые процессы в кристаллических телах могут быть разделены на быстрые и медленные [6], где быстрые процессы носят переходный характер и связаны с перераспределением энергии по степеням свободы, а медленные процессы связаны с переносом тепла. В данной работе мы ограничимся рассмотрением быстрых процессов, для которых состояние системы может считаться пространственно-однородным. Современные технологии генерации и измерения сверхкоротких лазерных импульсов [7, 8, 9] позволяют рассчитывать в ближайшем будущем на возможность экспериментального исследования подобных процессов. Дополнительно к тепловым будут рассматриваться сопутствующие диффузионные процессы. В гармоническом кристалле

не происходит изменения порядка частиц, так что диффузия как перемешивание частиц не реализуется. Однако, в результате теплового движения частица может уходить на значительные расстояния от своего начального положения, соответствующие диффузионные процессы достаточно сложны и существенно отличаются от тепловых. В частности, как будет показано ниже, для диффузионных процессов в пространственно однородном случае реализуются как быстрые, так и медленные процессы.

В связи с развитием нанотехнологий особую актуальность приобрело исследование систем, содержащих конечное число атомов [10, 11, 12, 13]. Термодиффузионные процессы в таких системах обладают рядом характерных особенностей, связанных с ограниченностью системы. В частности, в работе будет показано, что быстрые тепловые процессы в конечном кристалле периодически самопроизвольно возобновляются — возникает эффект "теплового эха"; медленные диффузионные процессы приводят к возвращению системы в исходное состояние за времена порядка пробега звуковых волн в кристалле.

2. Модель

Одномерные кристаллы (цепочки) представляют удобную модель для аналитического исследования термомеханических процессов в твердых телах [1, 14, 15, 16, 17, 18]. Динамика частиц одномерного гармонического кристалла в простейшем случае описывается уравнением

$$\ddot{u}_k = \omega_e^2 \left(u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1} \right), \tag{1}$$

где $\omega_e \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{C/m}$ — элементарная частота, m — масса частицы, C — жесткость связи, u_k — перемещение частицы с номером k. Будем считать, что для уравнения (1) выполняются условия периодичности

$$u_{k+N} = u_k, \tag{2}$$

где N — число частиц в кристалле. Условия (2) можно интерпретировать так, что одномерный кристалл замкнут в кольцо (условия Борна-Кармана [19]). В качестве начальных условий будем использовать условия теплового удара:

$$t = 0: \qquad u_k = 0\,, \qquad \dot{u}_k = \sigma \rho_k, \tag{3}$$

где ρ_k — случайные величины, σ — дисперсия начальных скоростей частиц. Для случайных величин ρ_k выполняется:

$$\rho_{k+N} = \rho_k\,, \qquad \langle \rho_k \rangle = 0\,, \qquad \langle \rho_k \rho_{k+n} \rangle = \delta_n^N. \tag{4}$$

Здесь и далее: угловые скобки означают математическое ожидание, $\delta_n^N = 1$ при n кратном N и $\delta_n^N = 0$ в остальных случаях. Формулы (4) означают, что случайные величины периодичны по n, имеют нулевое матожидание и единичную дисперсию, а также они независимы при различии индексов менее, чем на N (иными словами, имеется N независимых случайных величин).

В силу линейности системы (1), перемещения и скорости имеют нулевое матожидание:

$$\langle u_k \rangle = 0\,, \qquad \langle v_k \rangle = 0, \tag{5}$$

где $v_k \stackrel{\text{def}}{=} \dot{u}_k$. Обозначим

$$\overline{u} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k\,, \qquad \overline{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} v_n \tag{6}$$

— средние по пространству значения перемещений и скоростей частиц (здесь и далее черта сверху означает среднее по пространству). Очевидно, величины (6) от k не зависят и представляют собой скорость и перемещение центра масс системы. Для конечных N эти величины, в отличие от матожиданий (5), являются случайными и, вообще говоря, ненулевыми. Только при $N \to \infty$ средние (6) стремятся к нулю. В этом состоит существенное отличие конечного и бесконечного кристаллов.

Введем центрированные перемещения и скорости

$$\tilde{u}_k \stackrel{\text{def}}{=} u_k - \overline{u}\,, \qquad \tilde{v}_k \stackrel{\text{def}}{=} v_k - \overline{v}. \tag{7}$$

Данные величины, в отличие от u_k и v_k, являются материально-объективными: они не меняются при смещении центра масс системы. Диффузионные и тепловые процессы определяются, соответственно, дисперсиями центрированных перемещений и скоростей:

$$\langle \tilde{u}_k^2 \rangle\,, \qquad \langle \tilde{v}_k^2 \rangle. \tag{8}$$

В частности, кинетическая температура одномерного кристалла определяется формулой

$$k_B T = m\langle \tilde{v}_k^2 \rangle, \tag{9}$$

где k_B — постоянная Больцмана. Согласно постановке задачи, величины (8)–(9) зависят от времени, но не зависят от пространственного индекса k.

Для описания нестационарных процессов будет использоваться метод, основанный на корреляционном анализе [1, 3, 4, 6, 20, 21]. Корреляционный анализ рассматривает детерминированные уравнения для статистических характеристик движения — ковариаций перемещений и скоростей частиц. Указанные уравнения замкнуты и позволяют получить аналитическое решение, включающее, в том числе, зависимости дисперсий (8) от времени.

3. Корреляционный анализ

Рассмотрим ковариации перемещений и скоростей:

$$\xi_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle u_k u_{k+n} \rangle\,, \qquad \kappa_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle v_k v_{k+n} \rangle. \tag{10}$$

В силу однородности задачи, ковариации не зависят от индекса k, а зависят только от индекса n, определяющего расстояние между коррелирующими частицами. Из условий периодичности (2) следуют аналогичные условия периодичности для ковариаций:

$$\xi_{n+N} = \xi_n\,, \qquad \kappa_{n+N} = \kappa_n. \tag{11}$$

Дифференцирование ковариаций с учетом уравнения динамики цепочки (1) приводит к замкнутой системе динамических уравнений для ковариаций. Наиболее простая форма может быть получена с использованием дополнительной переменной

$$\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_n + \omega_e^2\left(\xi_{n-1} - 2\xi_n + \xi_{n+1}\right). \tag{12}$$

Тогда начальной задаче (1)–(3) соответствует следующая начальная задача [3, 21]:

$$\ddot{\lambda}_n = 4\omega_e^2\left(\lambda_{n-1} - 2\lambda_n + \lambda_{n+1}\right), \tag{13}$$

$$t = 0: \qquad \lambda_n = \sigma^2\delta_n^N\,, \qquad \dot{\lambda}_n = 0. \tag{14}$$

Данная задача эквивалентна начальной задаче для одномерного кристалла (1), у которого в начальный момент времени смещена одна частица, а остальные неподвижны. Важное отличие начальной задачи (13)–(14) от исходной начальной задачи (1)–(3) состоит в том, что она описывает динамику детерминированных величин λ_n, в то время как исходная начальная задача описывает динамику стохастических величин u_k. Основная разница состоит в начальных условиях: в задаче (13)–(14) они детерминированы, в то время как в задаче (1)–(3) начальные условия стохастические.

Учитывая условия периодичности (11), задача (13)–(14) может быть решена как начальная задача для системы N линейных дифференциальных уравнений, что дает

$$\lambda_n = \frac{\sigma^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\cos q_k n\cos 2\omega_k t\,, \qquad q_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi k}{N}\,, \qquad \omega_k \stackrel{\text{def}}{=} 2\omega_e\sin\frac{\pi k}{N}. \tag{15}$$

После определения λ_n ковариации перемещений и скоростей находятся из соотношений:

$$2\kappa_n = \lambda_n + \sigma^2\delta_n^N\,; \qquad \ddot{\xi}_n = 2\lambda_n\,, \qquad \xi_n|_{t=0} = 0\,, \qquad \dot{\xi}_n|_{t=0} = 0; \tag{16}$$

а дисперсии центрированных перемещений и скоростей определяются значениями ковариаций при $n = 0$:

$$\langle\tilde{u}_k^2\rangle = \xi_0 - \frac{\sigma^2 t^2}{N}\,, \qquad \langle\tilde{v}_k^2\rangle = \kappa_0 - \frac{\sigma^2}{N}. \tag{17}$$

Удобно выразить дисперсии через функцию $\lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_0 \equiv \lambda_n|_{n=0}$:

$$\langle\tilde{u}_k^2\rangle = 2\mathcal{I}^2\lambda(t) - \frac{\sigma^2 t^2}{N}\,, \qquad \langle\tilde{v}_k^2\rangle = \frac{\lambda(t)}{2} + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{N}, \tag{18}$$

где использован интегральный оператор

$$\mathcal{I}f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{19}$$

Согласно [3] величина $\lambda(t)$ пропорциональна лагранжиану $\mathcal{L}$ (разности кинетической и потенциальной энергий системы): $\mathcal{L} = \frac{mN}{2}\lambda(t)$. Далее будем называть $\lambda(t)$ приведенным лагранжианом. Из формулы (15) получаем

$$\lambda(t) = \frac{\sigma^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\cos 2\omega_k t\,, \qquad \omega_k \stackrel{\text{def}}{=} 2\omega_e \sin\frac{\pi k}{N}. \tag{20}$$

Подстановка выражения (20) в соотношения (18) дает явные выражения для центрированных дисперсий

$$\langle\tilde{u}_k^2\rangle = \frac{\sigma^2}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\sin^2\omega_k t}{\omega_k^2}\,, \qquad \langle\tilde{v}_k^2\rangle = \frac{\sigma^2}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\cos^2\omega_k t, \tag{21}$$

где частоты ω_k определены формулой (20).

4. Тепловое эхо

Временные зависимости для диффузионных и тепловых процессов полностью определяются точными аналитическим зависимостями (21). Данные зависимости удобны для численных расчетов, однако их использование для аналитического анализа затруднено, так как при больших N (наиболее интересный с практической точки зрения случай) они содержат большое количество слагаемых. При этом слагаемые равноправны и нет возможности какой-то частью из них пренебречь. Существенно упростить аналитический анализ позволяет тождество

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(z\sin\frac{\pi k}{N}\right) = J_0(z) + 2\sum_{p=1}^{\infty}J_{2pN}(z), \tag{22}$$

где $J_n(z)$ — функции Бесселя 1-го рода. Доказательство данного тождества приведено в приложении. С использованием тождества (22) формула (20) для $\lambda(t)$ приобретает вид

$$\lambda(t) = \sigma^2\left(J_0(4\omega_e t) + 2\sum_{p=1}^{\infty}J_{2pN}(4\omega_e t)\right). \tag{23}$$

На первый взгляд может показаться, что формула усложнилась: сумма конечного числа элементарных функций заменяется бесконечной суммой специальных функций. Однако, это не так. Дело в том, что функции Бесселя

практически не отличаются от нуля, если значение аргумента меньше (с некоторым запасом), чем значение индекса. Поэтому во многих практически важных случаях формула (23) содержит лишь одно или несколько существенных слагаемых. Более того, при больших N наибольшие значения функции Бесселя реализуются при значениях аргумента, находящихся вблизи значения индекса. Этому соответствуют моменты времени

$$t = pt_* \,, \qquad t_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N}{2\omega_e} \,; \qquad p = 0, 1, 2, 3, ... \tag{24}$$

Тогда в окрестности этих моментов времени в сумме (23) доминирует одно основное слагаемое, а остальные вносят лишь незначительный вклад.

Сказанное позволяет проанализировать диффузионные и тепловые процессы, описываемые формулами (18). Величину t_* будем называть квазипериодом указанных процессов. Хотя рассматриваемые процессы, строго говоря, не периодичны, но для них наблюдается определенная повторяемость с периодом t_*. Как будет показано далее, при некоторых условиях эти процессы могут восприниматься как периодические. Величина квазипериода имеет простую физическую интерпретацию:

$$t_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N}{2\omega_e} = \frac{1}{2}\,\frac{L}{c_e}, \tag{25}$$

где $L = Na$ — длина кристалла, $c_e = \omega_e a$ — скорость звука, a — шаг кристаллической решетки. Таким образом, квазипериод — это время, за которое длинные (звуковые) волны проходят половину длины кристалла. За это время волны, расходящиеся от точечного источника, огибают кольцевой (периодический) кристалл и встречаются на его противоположной стороне — в этот момент резко возрастает амплитуда тепловых колебаний — реализуется “тепловое эхо”. Зависимость $\lambda(t)$, рассчитанная для миллиона частиц, представлена на рис. 1. Хорошо видные резкие увеличения амплитуды тепловых колебаний для $t = t_*$ и $t = 2t_*$. Каждому из этих увеличений отвечает одно слагаемое в сумме (23) — соответствующая функция Бесселя, представляющая собой пакет из волн последовательно уменьшающейся амплитуды. Таким образом, физический смысл преобразования (22) состоит в том, что суммирование по труднонаблюдаемым собственным формам кристалла заменяется на суммирование по волновым пакетам, наблюдаемым как реализации “теплового эха”.

5. Бесконечный кристалл

При $N \to \infty$ квазипериод t_* (24) стремится к бесконечности. В этом случае для конечных t в формуле (23) остается только первое слагаемое. Тогда из формул (18) получаем в пределе $N \to \infty$:

$$\langle \tilde{u}_k^2 \rangle = 2\sigma^2 \mathcal{I}^2 J_0(4\omega_e t) \,, \qquad \langle \tilde{v}_k^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{2} \Big(1 + J_0(4\omega_e t) \Big) \,. \tag{26}$$

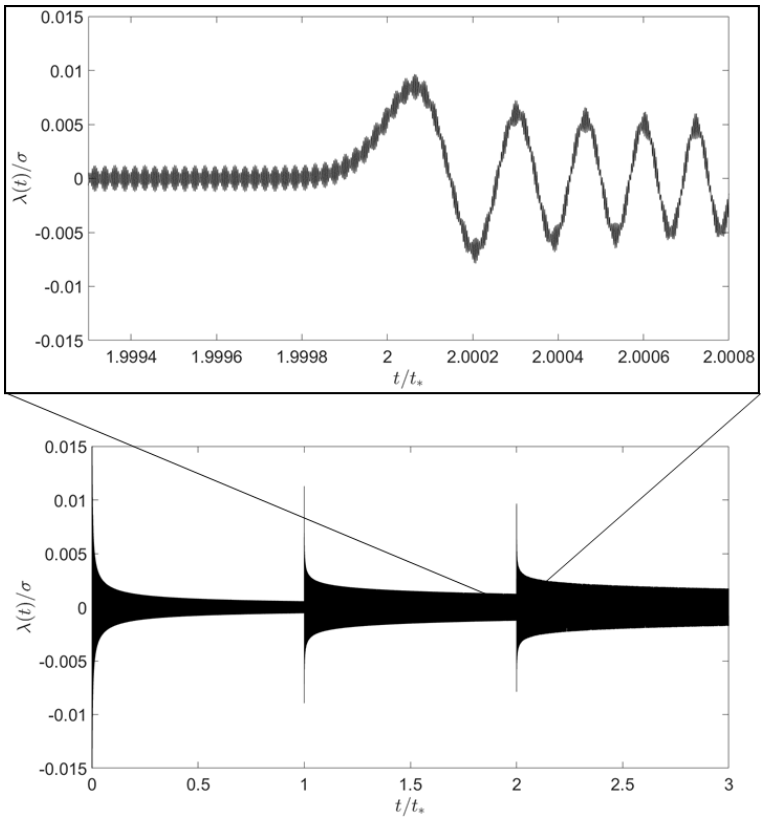


Рис. 1: Зависимость приведенного Лагранжиана от времени при $N = 10^6$. На выноске показаны колебания вблизи всплеска (разрешение по времени увеличено в 2000 раз).

Формула для $\langle \tilde{v}_k^2 \rangle = k_B T/m$ была ранее получена в работе [3]. Вычисление дисперсии перемещений дает

$$\langle \tilde{u}_k^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{8\omega_e^2}\,\mathcal{I}^2 \Phi(4\omega_e t)\,, \qquad \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I}^2 J_0(z), \tag{27}$$

где функция $\Phi(z)$ выражается через функции Бесселя J_n и Струве H_n [22]:

$$\Phi(z) = z^2 J_0(z) - z J_1(z) + \frac{\pi}{2}\, z^2 \left(J_1(z) H_0(z) - J_0(z) H_1(z) \right). \tag{28}$$

График функции $\Phi(z)$ представлен на рис. 2. Функция монотонно возрастающая, ее асимптотика при малых и больших z выглядит так:

$$z \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi(z) \simeq \frac{z^2}{2}\,, \qquad\qquad z \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi(z) \simeq z. \tag{29}$$

Более точная асимптотика при больших z:

$$z \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi(z) \simeq z - J_0(z). \tag{30}$$

Таким образом, для бесконечного кристалла дисперсия перемещений — монотонно возрастающая функция времени, совершающая затухающие колебания

вблизи наклонной асимптоты. Начиная с некоторых времен рост дисперсии практически становится линейным, совпадая с асимптотой:

$$t \gg t_e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{\omega_e}: \qquad \langle \tilde{u}_k^2 \rangle \simeq \frac{\sigma^2}{2\omega_e}\, t. \tag{31}$$

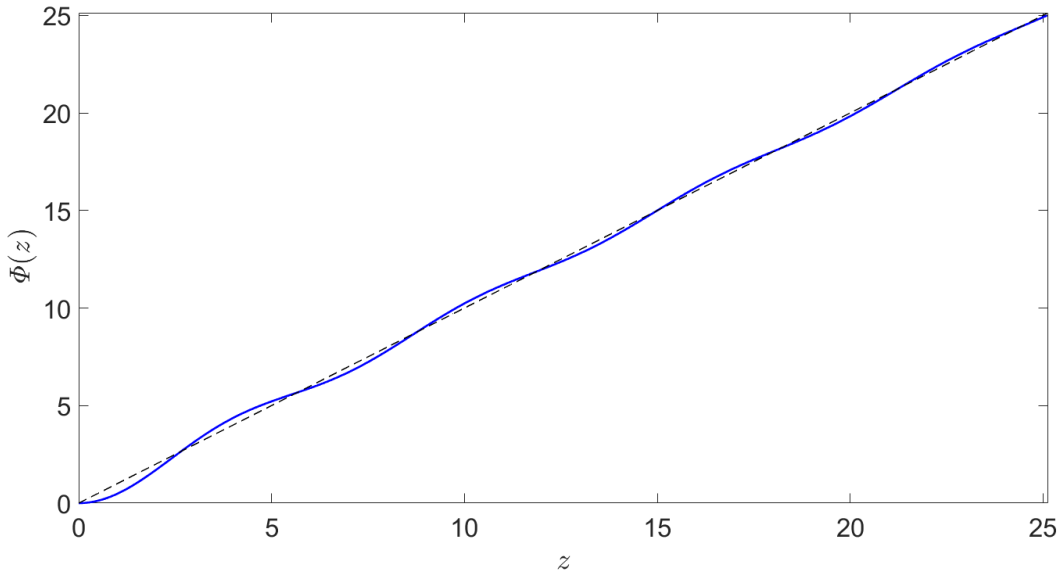


Рис. 2: График функции $\Phi(z)$, отображающий рост дисперсии перемещений в бесконечном кристалле. Пунктиром показана асимптота $\Phi(z) \simeq z$.

6. Первый квазипериод

Рассмотрим $t \in [0, t_*]$. В этом случае требуется учет двух первых слагаемых в представлении (23) для приведенного лагранжиана

$$\lambda(t) = \sigma^2 \left(J_0(4\omega_e t) + 2J_{2N}(4\omega_e t) \right), \tag{32}$$

что дает для дисперсий формулы

$$\langle \tilde{u}_k^2 \rangle = 2\sigma^2 \mathcal{I}^2 \left(J_0(4\omega_e t) + 2J_{2N}(4\omega_e t) \right) - \frac{\sigma^2 t^2}{N}, \tag{33}$$

$$\langle \tilde{v}_k^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{2} \left(1 + J_0(4\omega_e t) + 2J_{2N}(4\omega_e t) \right) - \frac{\sigma^2}{N}. \tag{34}$$

Здесь, в отличие от случая бесконечного кристалла, сохранены слагаемые $\sim 1/N$.

Из формулы (34) может быть получена простая асимптотическая формула для больших N. Воспользуемся следующими аппроксимациями: слагаемое

$2J_{2N}(4\omega_e t)$ не учитывается до приближения к моменту $t = t_*$, повторный интеграл от слагаемого $J_0(4\omega_e t)$ заменяется линейной зависимостью (31). Тогда получаем:

$$\langle \tilde{u}_k^2 \rangle \simeq \frac{\sigma^2}{N}\, t\,(t_* - t)\ , \qquad \langle \tilde{v}_k^2 \rangle \simeq \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{N} \tag{35}$$

— дисперсия перемещений представляет собой квадратичную зависимость времени (перевернутая парабола), дисперсия скоростей постоянна. Наиболее существенные отклонения от этих законов буду наблюдаться на границах рассматриваемого интервала, однако чем больше число частиц в кристалле, тем менее заметными будут указанные отклонения. Сравнение точной и асимптотической формул для дисперсии перемещений представлено[5] на рис. 3.

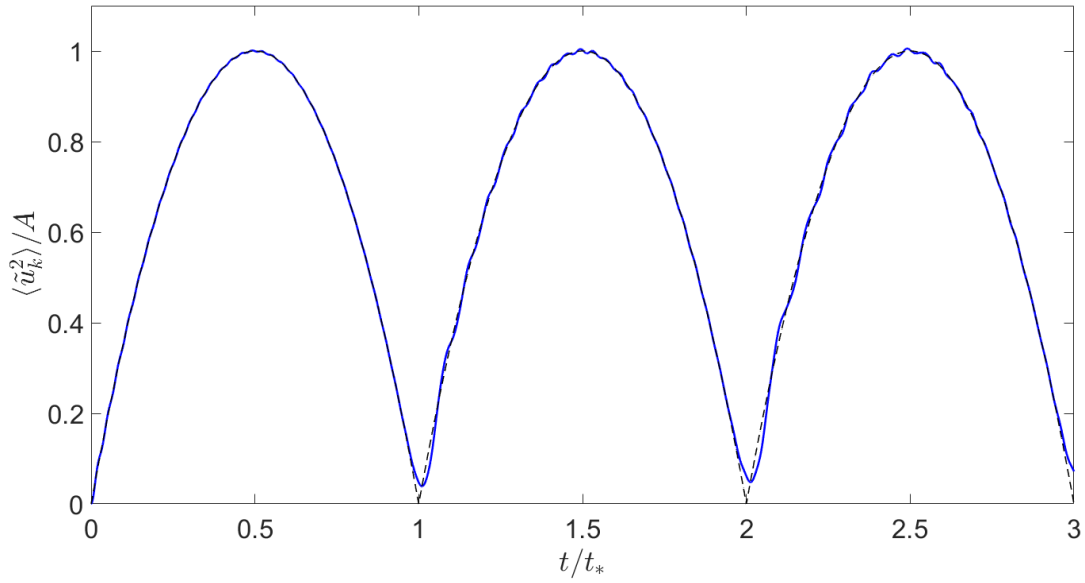


Рис. 3: Зависимость дисперсии центрированных перемещений от времени для $N = 100$ (сплошная линия); предельная зависимость при $N \to \infty$ (пунктир); обозначено: $A \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2 t_*^2/(4N)$ — максимальное значение дисперсии при $N \to \infty$.

Неожиданное следствие из формулы (35) состоит в том, что дисперсия перемещений обращается в ноль при $t = t_*$. Это означает, что в этот момент времени перемещения всех частиц в цепочке обращаются в ноль — она возвращается в исходное состояние. Время, которое для этого требуется, велико по микроскопическим меркам (много больше периодов атомарных колебаний), но отнюдь невелико по макроскопическим меркам — время за которое звук проходит половину длины кристалла. Конечно, этот результат неточный — формула (35) приближенная. Однако, она тем точнее, чем больше N, и

[5] Графики, представленные на рис. 3, могут быть получены в результате интегрирования в формуле (33), однако для численного расчета удобнее использовать формулу (21).

для достаточно протяженных кристаллов возвращение должно выполняться с высокой точностью. Результат напоминает теорему Пуанкаре о возвращении, но реализуется это возвращение за время на много порядков меньшее, чем предсказывается теоремой Пуанкаре.

Феномену обращения в ноль перемещений кристалла можно дать простое объяснение с точки зрения собственных форм (нормальных мод) колебаний кристалла. В макроскопическом (длинноволновом) приближении все собственные частоты кратны низшей частоте, соответствующей квазипериоду t_*. Это означает, что все собственные периоды укладываются целое число раз в казипериод t_*, который, тем самым, становится периодом колебаний кристалла. Для точных уравнений высшие частоты уже не кратны низшей, однако это отклонение тем меньше сказывается, чем больше атомов содержит кристалл, и, соответственно, чем ближе система становится к макроскопической. Поэтому обращение перемещений в ноль тем более ярко выражено, чем длиннее рассматриваемый одномерный кристалл.

7. Асимптотика для больших N

Для больших z может быть использовано асимптотическое представление[6]

$$J_{2pN}(z) \simeq \delta(z - 2pN), \tag{36}$$

где δ — дельта-функция Дирака, p целое неотрицательное число. Тогда

$$\lambda(t) \simeq \frac{\sigma^2}{4\omega_e}\left(\delta(t) + 2\sum_{p=1}^{\infty}\delta(t - pt_*)\right), \tag{37}$$

где использовано, что для положительных a выполняется $\delta(ax) = \delta(x)/a$. Данное представление является периодическим и квазипериод t_* (25) выступает в качестве периода для функции (37). Для величины t_* выполняется $t_* \sim N$ (25), поэтому для больших N формула (37) соответствует большим временам. В этом случае наибольшие значения функции Бесселя реализуются в окрестности моментов времени pt_*, где $p = 0, 1, 2, 3...$, поэтому представление (37) может использоваться в качестве аппроксимации выражения (32) — см. рис.1.

Применение формулы (37) на открытом интервале $(0, t_*)$ дает для дисперсий (18) формулы (35), только уже как асимптотически точные представления. На последующих временных интервалах продолжительностью t_*

[6]Данное представление означает, что при соответствующем изменении масштабов по осям функция Бесселя будет стремиться к дельта-функции. Формально это можно выразить соотношением $AJ_n\big(A(z-n)+n\big) \to \delta(z-n)$ при $A \to \infty$, где предел понимается в слабом (обобщенном) смысле. Для интегралов от функции Бесселя, которые потребуются для определения дисперсии перемещений, этот предел и соответствующая асимптотика могут уже рассматриваться в классическом смысле.

функции периодически повторяются. Результат можно представить в виде

$$\langle \tilde{u}_k^2 \rangle \simeq \sum_{p=0}^{\infty} f(t - pt_*)\,, \qquad \langle \tilde{v}_k^2 \rangle \simeq \sum_{p=0}^{\infty} \varphi(t - pt_*), \tag{38}$$

где функции на замкнутом интервале $[0, t_*]$ определяются формулами

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{N}\, t\,(t_* - t)\ , \qquad \varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{8\omega_e} \left(\delta(t) + \delta(t - t_*) \right) + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{N} \tag{39}$$

и равны нулю вне указанного интервала.

Согласно представлению (38)–(39), при тепловом ударе после первоначального переходного процесса дисперсия скоростей (а значит, и температура) практически постоянна, за исключением моментов времени pt_*, в которых реализуются локализованные всплески: "тепловое эхо". Их наличие связано с конечностью кристалла и определяется встречей упругих волн, сгенерированных начальным возмущением каждого атома. Эта встреча реализуется, когда волны огибают кристалл, поэтому соответствующее время t_* и равно времени, требуемому для звуковых волн, чтобы пройти половину длины кристалла (25). Согласно представлению (37) все всплески одинаковы. На самом деле, согласно точному выражению (32), они различаются. Можно показать, что высота каждого последующего всплеска ниже, а ширина больше — они как бы размываются, сохраняя при этом свою энергию. Согласно свойствам функций Бесселя, каждый всплеск представляет собой резко возникающие колебания, амплитуда которых затем затухает обратно пропорционально корню из времени.

Временная зависимость дисперсии перемещений, согласно (38)–(39), носит другой характер — рис. 3. После первоначального теплового удара дисперсия растет сперва линейно, потом рост ее замедляется, и при $t = t_*/2$ достигается максимум

$$\langle \tilde{u}_k^2 \rangle_{\max} \simeq \frac{\sigma^2 t_*^2}{4N} = \frac{\sigma^2 N}{16\omega_e^2}. \tag{40}$$

Величина максимума дисперсии, согласно (40), пропорциональна N, значит максимальные перемещения относительно центра масс кристалла пропорциональны $\sqrt{N}$. После достижения максимума начинается симметричный спад дисперсии, приводящий к ее тождественному обращению в ноль при $t = t_*$. Затем дисперсия снова начинает расти и процесс повторяется. Такая картина наблюдается на больших, макроскопических временах. На малых, микроскопических, временах вблизи моментов времени $t = pt_*$ реализуются переходные процессы. Формулы (38)–(39) описывают их просто как излом зависимости дисперсии от времени. Согласно точной формуле (32), переходные процессы представляют собой высокочастотный колебательный режим, наложенный на зависимость (38)–(39).

Отметим что в формулах (38)–(39) для достижения одинаковой точности для перемещений и скоростей требуются значения N, различающиеся на порядки. Так, согласно рис. 3, уже при $N = 100$ наблюдается хорошее согласие

точной и асимптотической формул для дисперсии перемещений. Для дисперсии же скоростей даже при $N = 10^6$ соответствующие графики все еще достаточно далеки от соответствующего асимптотического представления[7] — см. рис. 1. Это различие связано с тем, что переход от дисперсии скоростей к дисперсии перемещений осуществляется посредством двукратного интегрирования, а интегрирование сильно сглаживает зависимости. Обратный переход, напротив, требует двукратного дифференцирования, что приводит к сильному росту высокочастотной составляющей.

8. Сравнение средних по ансамблю и пространству

Описанные выше результаты для дисперсии перемещений относятся к математическому ожиданию квадрата перемещения, что эквивалентно осреднению по статистическому ансамблю. Для реальных систем этот результат соответствует осреднению по большому числу реализаций — экспериментов со сходными начальными условиями (одинаковыми статистически, но различными с точки зрения индивидуальных случайных значений). Для каждого конкретного эксперимента ситуация, вообще говоря, может быть отличной от той, которая была описана выше. Как показывают численные расчеты, и это может быть подтверждено аналитически, поведение среднего по пространству квадрата перемещений в каждом индивидуальном эксперименте очень сильно отличается от среднестатистической картины, даваемой формулами (38)–(39). Иллюстрация этого явления приведена[8] на рис. 4, где показаны временные зависимости величины

$$\{\tilde{u}_k^2\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\tilde{u}_k^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(u_k - \overline{u})^2. \tag{41}$$

Здесь фигурные скобки означают осреднение по пространству (или, что в данном случае то же самое, по частицам). Далее, для краткости, будем называть величину $\{\tilde{u}_k^2\}$ средним квадратом перемещений. Зависимости среднего квадрата перемещений от времени, представленные на рис. 4, получены в результате численного решения начальной задачи (1)–(3) для различных реализаций случайных начальных условий. В отличие от дисперсии $\langle\tilde{u}_k^2\rangle$, которая является детерминированной величиной, средний квадрат перемещений $\{\tilde{u}_k^2\}$ — величина случайная, и для разных реализаций получаются разные кривые. Зависимость $\{\tilde{u}_k^2\}(t)$, также, как и $\langle\tilde{u}_k^2\rangle(t)$, приближается к нулю периодически при $t = pt_*$ и практически повторяется в каждом новом квазипериоде. Однако, между обращениями в ноль, временная зависимость этой

[7] Согласно формуле (18), дисперсия скоростей связана линейно с приведённым лагранжианом (23), поэтому график на рис. 1 характеризует временную зависимость дисперсии скоростей.

[8] Соответствующие интерактивные графики представлены на сайте tm.spbstu.ru/uu

величины в разных экспериментах принимает различную форму, часто существенно отличающуюся от параболической. Максимальные значения могут сильно различаться (во много раз), а в рамках одного квазипериода может реализовываться несколько максимумов.

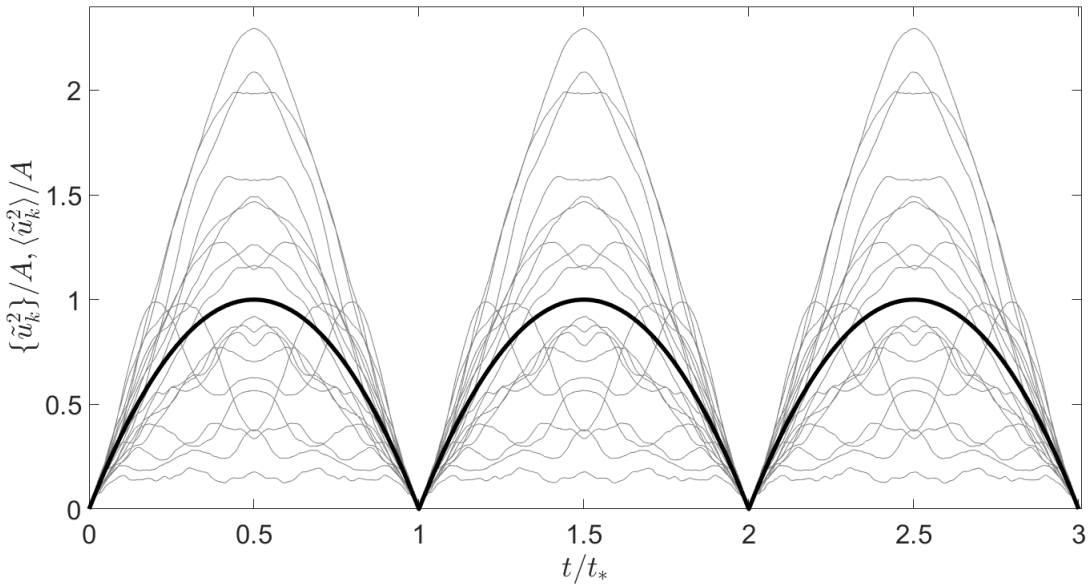


Рис. 4: Средний по пространству квадрат перемещений $\{\tilde{u}_k^2\}$ для различных реализаций при $N = 1000$ (тонкие линии); дисперсия перемещений $\langle\tilde{u}_k^2\rangle$ (жирная линия); обезразмеривающий множитель: $A \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2 t_*^2/(4N)$.

Зависимость $\langle\tilde{u}_k^2\rangle(t)$ является математическим ожиданием зависимостей $\{\tilde{u}_k^2\}(t)$, то есть пределом при осреднении этих зависимостей по случайным реализациям начальных условий. Однако, зависимости $\langle\tilde{u}_k^2\rangle(t)$ не стремятся к $\{\tilde{u}_k^2\}(t)$ при увеличении числа частиц. Даже для очень больших N средний квадрат перемещений $\{\tilde{u}_k^2\}$ остается случайной величиной. Таким образом, для квадрата перемещений среднее по пространству и среднее по ансамблю существенно различаются. Отметим, что для скоростей ситуация иная: средний квадрат скоростей $\{\tilde{v}_k^2\}$ при увеличении N стремится к детерминированной величине $\langle\tilde{v}_k^2\rangle$ — дисперсии скоростей, пропорциональной кинетической температуре кристалла. В этом состоит коренное отличие тепловых и диффузионных процессов.

9. Заключение

В работе рассмотрены процессы, возникающие в периодическом (кольцевом) одномерном кристалле при мгновенном тепловом воздействии, однородном по пространству. Получены точные временные зависимости для тепловых и диффузионных характеристик, таких как дисперсии скоростей и перемещений частиц. Наиболее значимые формулы: 21 — точные выражения для центрированных дисперсий скоростей и перемещений, удобные для

численного расчета; 22 — переход от суммирования по собственным формам к суммированию по волновым пакетам; 18, 23 — альтернативные выражения для дисперсий скоростей и перемещений, удобные для аналитического анализа; 27–28 — временная зависимость дисперсии перемещений для бесконечного кристалла; 38–39 — асимптотические выражения для дисперсий скоростей и перемещений при больших N.

В пределе бесконечного кристалла для тепловых характеристик реализуются затухающие колебания, описываемые функцией Бесселя — в соответствии с полученными ранее результатами [3]. Для диффузионных характеристик наблюдается неограниченный рост по закону, близкому к линейному — рис. 2.

В случае конечного кристалла колебания тепловых характеристик возобновляются через время, равное пробегу звуковой волны через половину длины кристалла — рис 1. Подобные всплески кинетической температуры могут интерпретироваться как “тепловое эхо”, связанное с тем, что упругие волны от возбужденной частицы обегают кристалл и встречаются с противоположной стороны от точки их возникновения. С течением времени последовательные всплески теряют амплитуду, но увеличивают ширину, сохраняя содержащуюся в них энергию. Таким образом, в кристалле реализуются периодически повторяющиеся быстрые переходные процессы.

Для диффузионных характеристик, кроме аналогичных быстрых процессов, наблюдается также медленный процесс — рост дисперсии до величины, пропорциональной числу частиц, и последующим приближением дисперсии перемещений к нулю в момент очередного всплеска температуры — рис. 3. Таким образом, кристалл возвращается в состояние, близкое к исходному, за половину времени пробега звуковой волны через кристалл — период незначительный по макроскопическим масштабам. Чем больше частиц в кристалле, тем ярче выражен эффект возвращения и тем ближе закон изменения дисперсии к параболическому. Среднее значение квадрата перемещений по пространству отличается от статистического среднего по реализациям: первая величина является случайной (для любого числа частиц), вторая — детерминированной (см. рис. 4).

Таким образом, тепловые и диффузионные процессы в конечном кристалле значительно сложнее, чем в бесконечном. Диффузионные процессы в конечном кристалле, в свою очередь, сложнее, чем тепловые — они включают быстрые и медленные движения, средние по кристаллу сохраняют стохастическую природу даже при очень большом числе частиц. Наиболее значимые из обнаруженных эффектов: тепловое эхо (периодические всплески температуры), периодическое возвращение частиц системы в исходное положение, случайность среднеквадратического значения перемещений по пространству.

Обнаруженные эффекты могут наблюдаться при ультракоротком лазерном воздействии на наноструктуры. Они также могут служить базисом для описания более сложных процессов — тепло- и массопереноса в бездефекных кристаллах и наноструктурах.

Авторы благодарны Д. А. Индейцеву и В. А. Кузькину за полезные об-

суждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rieder Z., Lebowitz J. L. and Lieb E. Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state. J. Math. Phys. 1967. vol. 8, pp. 1073–1078.

2. Dhar A. Heat Transport in low-dimensional systems. Advanced in Physics. 2008. Vol. 57, No. 5, pp. 457–537.

3. Кривцов А. М. Колебания энергий в одномерном кристалле. Доклады академии наук. 2014. том 458, № 3, С. 279–281.

4. Кривцов А. М. Распространение тепла в бесконечном одномерном гармоническом кристалле. Доклады академии наук. 2015. Т. 464, № 2, С. 162–166.

5. Thermal transport in low dimensions: from statistical physics to nanoscale heat transfer. Edited by S. Lepri. Lecture notes in physics, volume 921. Springer International Publishing, Switzerland. 2016. 418 p.

6. Kuzkin V. A., Krivtsov A. M. Unsteady heat transfer in harmonic scalar lattices. 2017. ArXiv:1702.08686.

7. Poletkin K. V., Gurzadyan G. G., Shang J., Kulish V. Ultrafast heat transfer on nanoscale in thin gold films. Applied Physics B. 2012. 107 (01), pp. 137–143.

8. Cartlidge E. European xfel to shine as brightest, fastest x-ray source. Science. 2016. Vol. 354, no. 6308, pp. 22—23.

9. Albertazzi B., Ozaki N., Zhakhovsky V. et al. Dynamic fracture of tantalum under extreme tensile stress. Science Advances. 2017. Vol. 3, no. 6.

10. Кривцов А. М., Морозов Н. Ф. О механических характеристиках наноразмерных объектов. Физика твердого тела. 2002. Т. 44. № 12. С. 2158–2163.

11. Гольдштейн Р. В., Морозов Н. Ф. Механика деформирования и разрушения наноматериалов и нанотехнологии. Физ. мезомех. - 2007. - Т. 10. № 5. С. 17-30.

12. Левин В.А., Левитас В.И., Лохин В.В., Зингерман К.М., Саяхова Л.Ф., Фрейман Е.И. Твердотельные фазовые переходы, вызванные действием механических напряжений в материале с наноразмерными неоднородностями. Модель и вычислительный эксперимент. Доклады Академии наук. 2010. Т. 434, № 4. С. 481–485.

13. Индейцев Д. А., Лобода О. С., Морозов Н. Ф., Скубов Д. Ю., Штукин Л. В. Автоколебательный режим нанорезонатора. Физическая мезомеханика. 2016. Т.19. № 5. С. 23-28.

14. Florencio J., Lee M. H. Exact time evolution of a classical harmonic-oscillator chain. Phys. Rev. A, 1985. Vol. 31, 3231.

15. Кривцов А. М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М.: Физматлит, 2007. 304 с.

16. Gendelman O. V., Savin A. V. Normal heat conductivity in chains capable of dissociation. Europhys. Lett. 2014. Vol. 106, 34004.

17. Savin A. V., Kosevich Y. A. Thermal conductivity of molecular chains with asymmetric potentials of pair interactions. Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89, 032102.

18. Berinskii I. E., Slepyan L. I. How a dissimilar-chain system is splitting. Quasi-static, subsonic and supersonic regimes. 2017. arXiv:1704.00046v2.

19. Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела. 1979. Т.2. М.: Мир.

20. Krivtsov A. M. On unsteady heat conduction in a harmonic crystal. 2015. ArXiv:1509.02506.

21. Кривцов А. М. Динамика тепловых процессов в одномерных гармонических кристаллах. Вопросы математической физики и прикладной математики. — Материалы семинара, приуроченного к 75-летию проф. Э.А. Троппа. 30 сентября 2015. СПб.: Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, 2016. С. 63–81.

22. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. 1964. М.: Наука.

23. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами. 1979. М.: Наука.

REFERENCES

1. Rieder Z., Lebowitz J. L. and Lieb, E. Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state. J. Math. Phys. 1967. vol. 8, pp. 1073–1078.

2. Dhar A. Heat Transport in low-dimensional systems. Advanced in Physics. 2008. Vol. 57, No. 5, pp. 457–537.

3. Krivtsov A. M. Energy Oscillations in a One-Dimensional Crystal. Doklady Physics. 2014, Vol. 59, No. 9, pp. 427–430.

4. Krivtsov A. M. Heat transfer in infinite harmonic one dimensional crystals. Doklady Physics. 2015, Vol. 60, No. 9, pp. 407–411.

5. Thermal transport in low dimensions: from statistical physics to nanoscale heat transfer. Edited by S. Lepri. Lecture notes in physics, volume 921. Springer International Publishing, Switzerland. 2016, 418 p.

6. Kuzkin V. A., Krivtsov, A. M. Unsteady heat transfer in harmonic scalar lattices. 2017. ArXiv:1702.08686.

7. Poletkin K. V., Gurzadyan G. G., Shang J., Kulish V. Ultrafast heat transfer on nanoscale in thin gold films. Applied Physics B. 2012. 107 (01), pp. 137–143.

8. Cartlidge E. European xfel to shine as brightest, fastest x-ray source. Science. 2016. Vol. 354, no. 6308, pp. 22—23.

9. Albertazzi B., Ozaki N., Zhakhovsky V. et al. Dynamic fracture of tantalum under extreme tensile stress. Science Advances. 2017. Vol. 3, no. 6.

10. Krivtsov A. M., Morozov N. F. On Mechanical Characteristics of Nanocrystals. Physics of the Solid State. 2002. Volume 44, Issue 12, pp 2260–2265.

11. Goldstein R.V., Morozov N.F. Mechanics of deformation and fracture of nanomaterials and nanotechnology. Physical Mesomechanics. 2007. Vol 10, p. 5-6.

12. Levin V.A., Levitas V.I., Lokhin V.V., Zingerman K.M., Sayakhova L.F., Freiman E.I. Solid-state stress-induced phase transitions in a material with nanodimensional inhomogeneities: Model and computational experiment. Doklady Physics. 2010. Vol. 55, No. 10, pp. 507–511.

13. Indeitsev D.A., Loboda O.S., Morozov N.F., Skubov D.Yu., Shtukin L.V. Self-oscillating mode of a nanoresonator. Physical Mesomechanics. 2016. Vol.19. №5. pp. 23-28.

14. Florencio J., Lee M. H. Exact time evolution of a classical harmonic-oscillator chain. Phys. Rev. A, 1985. Vol. 31, 3231 p.

15. Krivtsov A. M. Deformation and fracture of solids with microstructureй. Moscow, Fizmatlit. 2007. 304 p. (In Russian).

16. Gendelman O. V., Savin A. V. Normal heat conductivity in chains capable of dissociation. Europhys. Lett. 2014. Vol. 106, p. 34004.

17. Savin A. V., Kosevich Y. A. Thermal conductivity of molecular chains with asymmetric potentials of pair interactions. Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89, 032102.

18. Berinskii I. E., Slepyan L. I. How a dissimilar-chain system is splitting. Quasi-static, subsonic and supersonic regimes. 2017. arXiv:1704.00046v2.

19. Ashcroft N. W. and Mermin N.D. Solid State Physics. Holt, Rinehart and Winston. 1976. 847 p.

20. Krivtsov A. M. On unsteady heat conduction in a harmonic crystal. 2015. ArXiv:1509.02506.

21. Krivtsov A. M. Dynamics of thermal processes in one-dimensional harmonic crystals. Questions of mathematical physics and applied mathematics. - Proceedings of the seminar timed to the 75th anniversary of prof. E.A. Tropp. 30 September 2015. — SPb.: A.F. Ioffe Physico-Technical Institute , 2016. — pp. 63-81.

22. Yanke E., Emde F., Lesh F. Special functions: the formulas, graphs, tables. Science. 1964, Moscow, 344 p.

23. Abramowitz M. and Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover. 1979. 1046 p.

Приложение: доказательство тождества 22

Воспользуемся формулой [23]:

$$\cos(z\sin\theta) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{2p}(z)\cos(2p\,\theta), \tag{42}$$

где $J_{2p}(t)$ — функции Бесселя первого рода. Произведем подстановку $\theta = \pi k/N$, где $k = 0, 1, ..., N-1$ и, просуммировав по k, получим:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(z\sin\frac{\pi k}{N}\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{2p}(z)S_N(p), \tag{43}$$

где

$$S_N(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(p\,\frac{2\pi k}{N}\right). \tag{44}$$

Сумма косинусов кратных углов может быть вычислена через сумму экспонент, которая, в свою очередь, вычисляется как сумма геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\cos k\phi = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\phi} = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{iN\phi}-1}{e^{i\phi}-1}\right). \tag{45}$$

Вычисление вещественной части (45) позволяет получить следующее представление:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos k\phi = \frac{1}{2}\sin(N\phi)\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2} + \sin^2\frac{N\phi}{2}, \tag{46}$$

откуда находим

$$S_N(p) = \frac{\sin(2\pi p)}{2N}\operatorname{ctg}\frac{\pi p}{N} + \frac{\sin^2(\pi p)}{N}. \tag{47}$$

Анализ полученного выражения показывает, что для p, кратных N, оно равно единице, а для всех остальных целых p оно равно нулю. Иными словами, $S_N(p) = \delta_p^N$. Тогда для выражения 43 получаем окончательно:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(z\sin\frac{\pi k}{N}\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{2pN}(z) = J_0(z) + 2\sum_{p=1}^{\infty} J_{2pN}(z), \tag{48}$$

где используется, что $J_n(x) = J_{-n}(x)$ для всех целых n.

Получено 19.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3, 539.4, 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-350-362

К РАЗРАБОТКЕ ГЕОИНФОРМАЦИОННОЙ ПАНЕЛИ БЕЗОПАСНОСТИ ПОДЗЕМНЫХ ГОРНЫХ РАБОТ НА ОСНОВЕ СВЯЗАННЫХ РЕШЕНИЙ ПО ПРОГНОЗУ РАЗВИТИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД И ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ

С. Э. Лапин[1], В. Б. Писецкий[2]

Аннотация

Развитие инженерно-геологических процессов, в том числе и опасных, в границах области активного влияния горно-технических работ в подземной выработке (тоннеля, подготовительного или очистного забоев) на горный массив обусловлено, как хорошо известно, изменением структуры и параметров напряженно-деформированного состояния (НДС). Оценка напряжений в ближней зоне обнажения массива (в пределах первых метров) осуществляется рядом инструментальных методов, регламентированных федеральными или ведомственными документами для тех или иных инженерно-геологических условий и технологий ведения горных работ (давильные установки, дискование керна, извлечение штыба и др.). Широко известны и экспериментально-аналитические методы, основанные на расчетах напряжений в окрестности выработки по известным (измеренным) первоначальным напряжениям на обнажении массива.

Существенным продвижением по развитию экспериментально-аналитического подхода к организации непрерывного контроля и прогноза развития опасных инженерно-геологических процессов в подземном строительстве является совершенствование сейсмических методов дистанционной оценки структуры и параметров НДС [1, 6, 12, 13]. Отметим, что в настоящее время действует несколько нормативных документов по прогнозу динамических явлений и мониторингу массива горных пород при отработке угольных месторождений, а также состояния шахтной атмосферы в выработках и которые регламентируют, в

[1]Лапин Сергей Эдуардович, научный сотрудник кафедры автоматики и компьютерных технологий Уральского государственного горного университета, ingortech@yandex.ru

[2]Писецкий Владимир Борисович, заведующий кафедрой геоинформатики Уральского государственного горного университета

том числе, применение сейсмических систем контроля [2, 3, 4]. Подобные документы в ведомственных форматах действуют и для условий строительства транспортных тоннелей, гидросооружений и других объектов повышенной степени ответственности.

Предложен подход к созданию геоинформационной панели безопасности подземных горных работ на основе связанных решений по прогнозу развития напряженного состояния массива горных пород и газовых потоков в рамках пакета прочностного анализа Фидесис.

Ключевые слова: геоинформационная панель безопасности, дискретная структура массива, численное моделирование напряженно деформированного состояния горного массива, газовые потоки, меджисциплинарные задачи.

Библиография: 15 названий.

INFORMATION TO DEVELOP GEOINFORMATION SAFETY PANEL OF UNDERGROUND MINING WORKS BASED ON RELATED SOLUTIONS IN PROGNOSIS OF THE DEVELOPMENT OF STRESSED STATE OF THE MASSIF OF MOUNTAIN ROCKS AND GAS FLOWS

S. E. Lapin, V. B. Pisetskiy

Abstract

Development of engineering-geological processes, including dangerous, within the boundaries of the area of active influence of mining operations in the undeground minings (tunnels, preparatory face or working face) at the massif of mountain rocks, is due to, as is well known, changing in structure and parameters stress-strain state (SSTS).

Estimation of stresses in the near zone of exposures of the massif (within the first meters) is carried out by a number of instrumental methods, regulated by federal or departmental documents for those or other engineering and geological conditions and technologies for mining (pressure installations, disking of core, extraction of rubbles, etc.). Widely known and experimental analytical methods based on stress calculations in the neighborhood of working area from known (measured) initial stresses on the exposures of the massif.

A significant advance in the development of the experimental and analytical approach to the organization of continuous monitoring and forecasting the development of hazardous engineering and geological processes in underground construction is the improvement of seismic

methods of remote evaluation of the structure and parameters of SSTS [1, 6, 12, 13]. It should be noted that at present several regulatory documents on the forecast of dynamic phenomena and monitoring of rock mass during mining of coal deposits, as well as the state of the mine atmosphere in the excavations and which regulate, among other things, the use of seismic monitoring systems [2, 3, 4]. Similar documents in departmental formats are also applicable to the conditions of construction of transport tunnels, hydroconstructions and other objects of increased responsibility.

The article proposes an approach to the creation of a geoinformation safety panel of underground mining works based on related solutions in prognosis of the development of stressed state of the massif of mountain rocks and gas flows within the framework of the Fidesis strength analysis package.

Keywords: geoinformation safety panel, discrete massif structure, gas flows, interdisciplinary tasks.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Принципиально важным обстоятельством в решении проблемы организации эффективного и детерминируемого на значимом уровне метода прогноза событий, связанных с пликативной или импульсной потерей прочности массива является безальтернативная возможность дистанционной оценки структуры и параметров НДС по сейсмическому отклику горного массива [5, 6, 14]. Действительно, фудаментальная связь тензора “малых” напряжений во фронте упругой волны с тензором “больших” напряжений, действующих в том же объеме массива [7] представляет собой прямую основу для функционального перехода от сейсмических атрибутов сигналов упругих волн различного типа к оценкам структуры и параметров НДС в объеме пространства от первых до нескольких десятков метров во все стороны от обнажения массива в выработке. Такие оценки не совпадают по уровню с оценками инструментальных методов на обнажении массива по следующим понятным причинам:

- различие в физических процессах прямых и дистанционных методов измерений;
- вблизи обнажения массива оценки напряжений искажены свободной поверхностью с неизвестной функцией релаксации.

Формирование и изменчивость параметров НДС горного массива в реальных условиях строительства подземных сооружений определяется суперпозицией естественных гравитационных и геодинамических полей в совокупности с процессами техногенной трансформации подземного пространства [15]. В такой динамической природно-технической системе (ПТС) развитие многих инженерно-геологических процессов происходит по неочевидным сценариям. Именно по этим причинам достоверность прогноза структуры и пара-

метров НДС на безопасном удалении от обнажения массива возможна только с применением современных сейсмических технологий и будет зависить от точности определения упругих параметров, которые могут быть далее положены в основу аналитического перехода к регламентным оценкам прочности массива.

2. Основная часть

Принципиальной физической основой для постановки и решения задач по оценки прочности и критериев устойчивости является представление о структуре дискретности массива горных пород. По существу, любую трещинную систему можно рассматривать с двух точек зрения: как систему плоских элементов нарушения сплошности и как систему отдельных блоков, на которые среда разделилась в системах трещин, замкнутых друг на друга. Вторая точка зрения позволяет оперировать не с параметрами трещин, которые практически невозможно измерить, а с параметрами блоковой (дискретной) структуры тех или иных литологических элементов (рисунок 1). Поскольку геометрия и физические свойства стратиграфических и литологических объектов в процессах подземной разработки устанавливаются по факту проходки выработок, то представляется возможным оценить и параметры дискретной структуры этих объектов в формате горно-геологической модели с дискретной структурой. Заметим особым образом, что переход ПТС в динамическое состояние с последующим разрушением подчиняется блоковому механизму (рисунок 2).

Ключевым понятием развития деформационных процессов в дискретных средах с переменными напряжениями в окрестности подземной выработки является фрикционный механизм, который “разрешает” каждому дискрету и их ансамблям, входящим в рассматриваемый объем среды, деформироваться индивидуально за счет процессов проскальзывания. В свою очередь, фрикционный механизм, кроме величины и знака внешнего силового воздействия, будет управляться коэффициентом трения, величина которого связана с “качеством” контактных плоскостей блоков и с фазовым состоянием флюида, “смазывающим” эти контакты (газ, вода и прочие заполнители пустотного пространства).

Экспериментальным путем установлено (Byerlee J.D., 1978), что в интервале глубин 0.2-10 км блоки (дискреты) горной породы могут совместно и линейно деформироваться до того момента, пока выполняется неравенство $\tau < 0.85\sigma$ (для “сухой” среды), где τ — сдвиговое напряжение, σ — нормальное напряжение. Как только это условие будет нарушено, линейная деформация перейдет в нелинейную форму – в состояние пластического течения в интервале A-B графика фрагмента “а” на рисунке 2. При наличии “смазки” (вода, глинистый заполнитель и пр.) коэффициент трения (0.85) существенно снизится. За точкой B могут начаться процессы импульсного характера от “трескoв” до горных ударов.

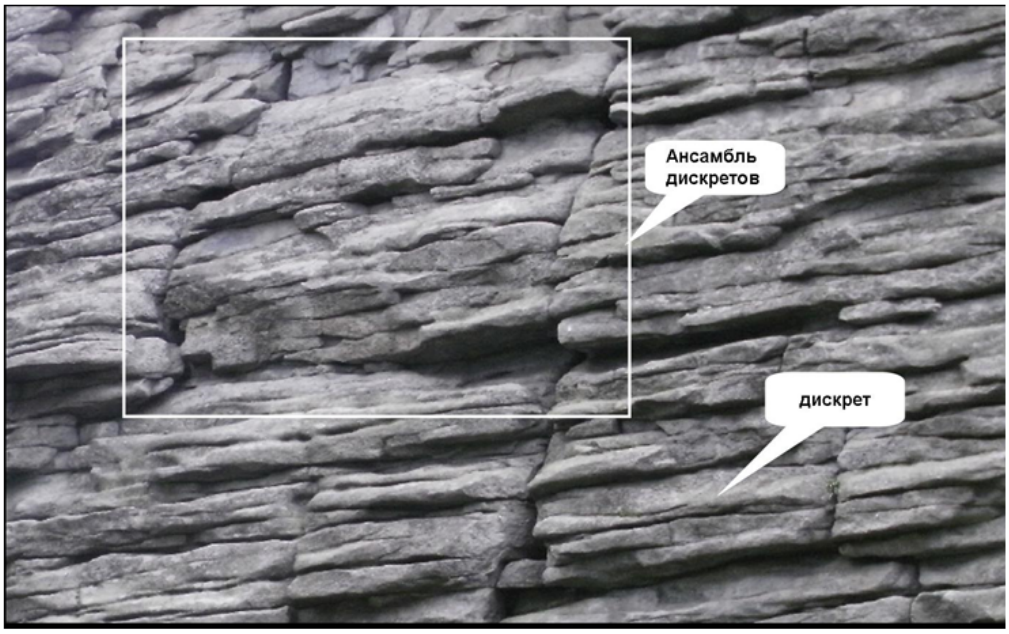


Рис. 1: Типичные элементы дискретной структуры массива горных пород

Внешняя силовая нагрузка на верхнюю кромку дискретной модели σ_{zz} и трение между блоками порождает появление дополнительных поперечных напряжений τ, которые можно рассматривать как граничные условия и решать с учетом этих условий систему классических уравнений теории упругости. Сила τ определяется в соответствии с законом Амонтона.

Дифференциальные уравнения равновесия записываются с учетом дополнительных напряжений на вертикальных контактах следующим образом [5]:

$$\begin{pmatrix} \lambda+2\cdot\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\cdot\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\cdot\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \frac{\partial w_1}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ \tau \\ -\sigma_{zz} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda+2\cdot\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\cdot\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\cdot\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} \\ \frac{\partial w_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ \tau \\ -\sigma_{zz} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

при выполнении в плоском случае граничного условия $u_1(x = 0) = u_2(x = 0) = 0$ решение систем имеет вид:

$$u_1 = u_2 = \frac{\lambda\cdot\sigma_{zz} + 2\cdot(\lambda+\mu)\cdot\tau}{2\cdot\mu\cdot(3\cdot\lambda+2\cdot\mu)}\cdot x;$$
$$v_1 = v_2 = \frac{\lambda\cdot\sigma_{zz} + 2\cdot(\lambda+\mu)\cdot\tau}{2\cdot\mu\cdot(3\cdot\lambda+2\cdot\mu)}\cdot y;$$
$$u_1 = u_2 = -\frac{\lambda\cdot\tau + 2\cdot(\lambda+\mu)\cdot\sigma_{zz}}{2\cdot\mu\cdot(3\cdot\lambda+2\cdot\mu)}\cdot z; \qquad (2)$$

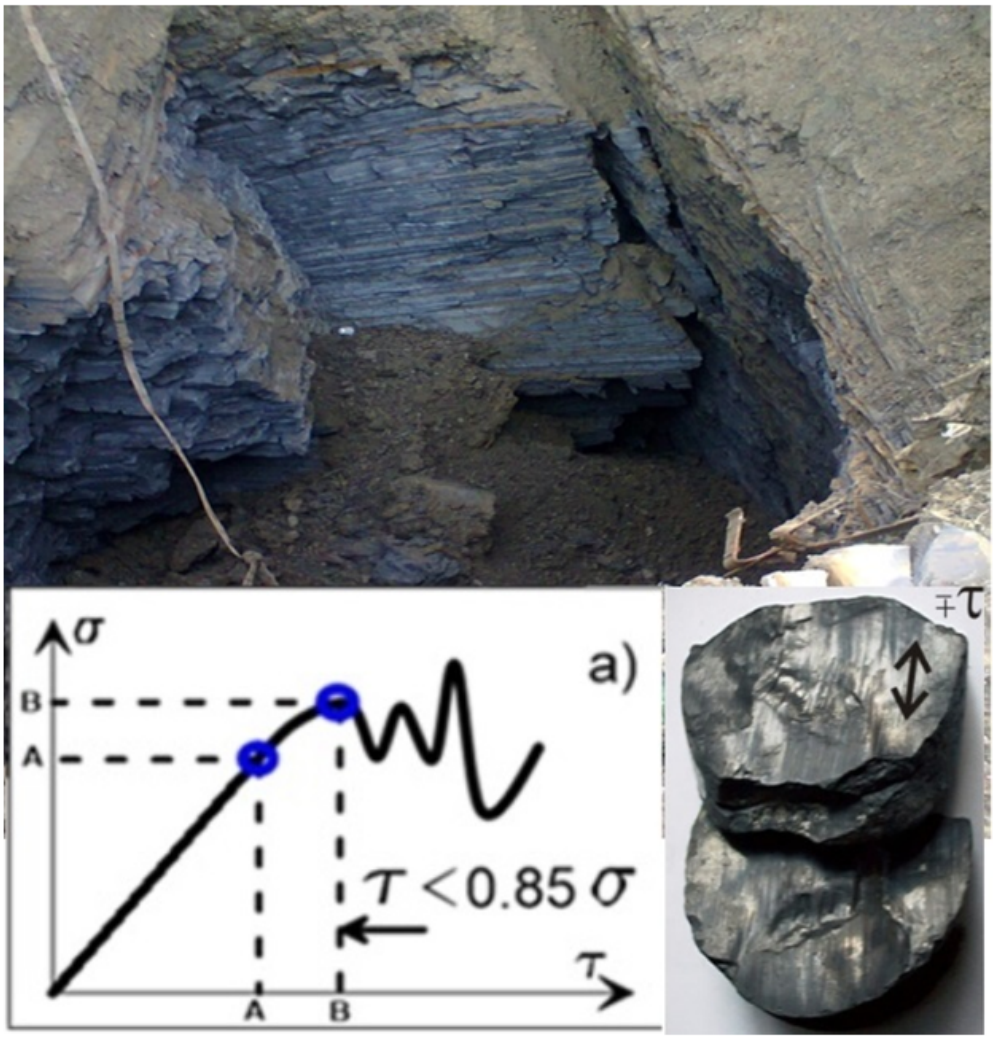


Рис. 2: Блоковый характер разрушения горного массива над подземной выработкой и соотношение сдвигового и нормального напряжений в дискретных средах

Отсюда можно получить решения для упругих модулей как функций дискретности и давления.

Далее можно считать, что процессы “течений” твердой и флюидной фаз в дискретных средах согласуются в диапазоне скоростей, сопоставимых со скоростями подземных горных работ (проходческие или очистные процессы). Такой подход имеет целый ряд содержательных отличий и преимуществ, которые в первую очередь позволяют конструктивно решать проблемы миграции флюида в приложении к геодинамическим процессам. С этой точки зрения общее давление в любой точке массива горных пород с дискретной структурой представляется следующим образом [6,7]:

$$\tilde{P} = P_g \pm P_d, \tag{3}$$

где : P_g — нормальное (статическое, или гидростатическое) давление, P_d — добавочное (динамическое, или сверхгидростатическое) давление, зависящее от времени.

В таком случае скорость и направление течения флюидного потока $\vec{V}$ будет определяться уравнением Дарси в следующем виде [6, 7]:

$$\vec{V} = -\frac{c}{\mu}\nabla P_d. \tag{4}$$

Здесь, c — проницаемость среды в данной точке, μ — вязкость флюида.

В моделях сред с дискретной структурой общая проницаемость k для выбранного объема среды определяется тремя типами проницаемости:

- матричной проницаемостью материала блоков k_I,
- проницаемостью межблокового пустотного пространства k_{II},
- контактной проницаемостью на границах блоковых ансамблей k_{III}.

В порядке перечисления типов проницаемости понятно, что самое высокое значение проницаемости в модели дискретных сред — k_{III}.

Проницаемость композиции слоев с дискретной структурой по нормальному (вертикальному) направлению будет существенно ниже, чем в горизонтальном направлении, т. к. величина пустотного промежутка между слоями (горизонтальный контакт блоков) всегда значительно меньше, чем между боковыми сторонами блоков. Пересечения сторон блоков в соседних слоях в отдельных точках так же не могут существенно увеличить “вертикальную” проницаемость дискретной толщи. Тогда следует предположить, что при существовании какого то общего направления флюидного потока, в каждом из рассматриваемых слоев будет собственные величина и направление флюидного потока $\vec{V}$. Таким образом, дискретные системы обладают явной анизотропией параметров флюидного течения и, следовательно, проницаемость в таких системах является тензором.

По аналогии с общепринятым представлением течений как проводимости рассмотрим подобный однородный тонкий анизотропный слой и в качестве исходного возьмем уравнение неразрывности для несжимаемого флюида с вязкостью μ:

$$\nabla\vec{V} = 0. \tag{5}$$

Пусть:

$$\vec{V} = \frac{\hat{k}}{\mu}\nabla P_d = \frac{\hat{k}}{\mu}\left(\frac{\partial P_d}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P_d}{\partial y}\vec{j}\right). \tag{6}$$

Здесь $\hat{k}$ — тензор проницаемости в главных осях:

$$\hat{k} = \begin{vmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Тогда из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\frac{\partial P_d}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{yy}\frac{\partial P_d}{\partial y}\right)=k_{xx}\frac{\partial^2 P_d}{\partial x^2}+k_{yy}\frac{\partial^2 P_d}{\partial y^2}=0. \tag{8}$$

Введем координаты: $\xi=\frac{x}{\sqrt{k_{xx}}};\eta=\frac{y}{\sqrt{k_{yy}}}$. Тогда: $\frac{\partial^2 P_d}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 P_d}{\partial \eta^2}=0$ и откуда:

$$P_d=A\ln\left(\xi^2+\eta^2\right)=A\ln\left(k+\frac{y^2}{k_{yy}}\right). \tag{9}$$

Изолинии равного давления имеют вид: $\frac{x^2}{k_{xx}}+\frac{y^2}{kyy}=const$ и являются эллипсами с отношением полуосей: $l^2=\frac{k_{yy}}{k_{xx}}$. Константу А находим из условия:

$$Q=\int\limits_l D_n dl, \tag{10}$$

где l — контур , окружающий область источника давления, а Q — дебит флюида из деформируемой области малых размеров D_n. Отсюда:

$$A=\frac{\mu Q}{4\pi\sqrt{k_{xx}k_{yy}}}, \tag{11}$$

$$P_d=-\frac{\mu Q}{4\pi\sqrt{k_{xx}k_{yy}}}\ln\left(\frac{x^2}{k_{xx}}+\frac{y^2}{k_{yy}}\right), \tag{12}$$

и далее:

$$V_x=-\frac{k_{xx}}{\mu}\frac{\partial P_d}{\partial x}=\frac{Q}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{k_{xx}k_{yy}}}\frac{x}{\frac{x^2}{k_{xx}}+\frac{y^2}{k_{yy}}}, \tag{13}$$

$$V_y=-\frac{k_{yy}}{\mu}\frac{\partial P_d}{\partial y}=\frac{Q}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{k_{xx}k_{yy}}}\frac{y}{\frac{x^2}{k_{xx}}+\frac{y^2}{k_{yy}}}. \tag{14}$$

Вектор скорости потока $\vec{V}$ направлен радиально: $\frac{V_{xx}}{V_{yy}}=\frac{x}{y}$, тогда

$$V_{x(y=0)}=\frac{1}{x}\frac{Q}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{yy}}};\quad V_{y(x=0)}=\frac{1}{y}\frac{Q}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{yy}}{k_{xx}}}. \tag{15}$$

При этом на круге $x=y$ имеем:

$$\frac{V_{x(y=0)}}{V_{y(x=0)}}=\frac{k_{xx}}{k_{yy}}. \tag{16}$$

Таким образом, отсюда следует, что где больше проницаемость, там и скорость больше. Но градиенты давления равны при $\varphi=0;\ \varphi=\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial P_d}{\partial x}(y=0)=-\frac{1}{x}\frac{\mu Q}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{k_{xx}k_{yy}}}; \tag{17}$$

$$\frac{\partial Pd}{\partial y}(x=0) = -\frac{1}{y}\frac{\mu Q}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{k_{xx}k_{yy}}}. \tag{18}$$

Отсюда ясно, что градиенты давления при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ максимальны, а при всех остальных значениях φ меньше. В то же время, при трехосной анизотропии в пространстве на некоторой плоскости, проходящей через два главных направления, имеем круговую диаграмму. Применительно к рассматриваемой проблеме течения флюида в дискретной среде все сказанное означает, что реальный формационный объект в виде дискретного слоя обладает анизотропией проницаемости и способен отклонять направление флюидного потока от исходного направления и изменять его величину.

Далее рассмотрим случай, когда источники и стоки флюида образуются в каждой единице объема дискретной среды за счет изменения общей пустотности, что является следствием непрерывного изменения общего горного давления в сторону его увеличения (сжатие) или уменьшения (разгрузка). Тогда из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Fr) + \nabla(rV) = 0, \tag{19}$$

для несжимаемого флюида с постоянной плотностью ro следует, что

$$\nabla V = -\frac{\partial F}{\partial t} = -q, \tag{20}$$

где V — скорость течения Дарси, F — общая пустотность (трещинно-поровое пространство), q — скорость его изменения (c^{-1}). Будем считать так же, что скорость объемной деформации $\Delta D/\Delta t$ некоторого объема дискретной среды D связана исключительно со скоростью изменения общей пустотности:

$$q = \frac{\Delta D}{D\Delta t}. \tag{21}$$

Подставляя в (13) выражение для скорости течения Дарси, имеем для давления уравнение Пуассона вида:

$$\nabla^2 P_d = -\frac{\mu}{k}\nabla\frac{k}{\mu}\nabla P_d + \frac{\mu}{k}q. \tag{22}$$

В случае однородной по проницаемости k_0 среды и однородного флюида с вязкостью μ_0 имеем, что:

$$\Delta P_d = -\frac{\mu_0 q}{k_0} \quad \text{и} \quad P_0 = -\frac{\mu_0}{4\pi k_0}\int\limits_{D_0}\frac{qdD_0}{R}, \tag{23}$$

где $dD_0 = dx_0dy_0dz_0$ — деформируемый объем, $R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + +(z-z_0)^2$.

Известно, что на основании (2.38) выражение для давления при наличии неоднородной области D, в которой k и μ являются функциями координат, может быть записано в виде:

$$P_d = P_0 - \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \left(\frac{k\mu_0}{k_0\mu} - 1\right)\nabla_D P_d \frac{r}{r^3} dD, \tag{24}$$

$$r = (x-\xi)i + (y-\eta)j + (z-\zeta)k, dD = d\xi d\eta d\zeta,$$

где P_0 в частности может соответствовать (2.40).

Выражения (23) и (24) непосредственно обобщаются на случай нескольких деформируемых и неоднородных объемов, причем D и D_0 могут частично или полностью совпадать. Предположим, что малая деформация не приводит к существенному перемещению границ проницаемости рассматриваемых объемов, что деформируемых объемов несколько $D_0 = \Sigma D_{0j}$, $j = 1, 2, 3 \ldots, n$, что в каждом D_{0j} своя скорость объемной деформации q_j, причем разного знака — в направлениях сжатия или растяжения объемов. Именно таким образом можно сконструировать осадочную толщу в виде модели дискретной динамической системы, о чем мы рассуждали в предыдущем разделе по поводу проблемы динамики сред с блоковой структурой. В данном случае проблема динамики бассейна непосредственным образом смыкается с проблемой изменения проницаемости среды, причем в виде временной функции, что, в конечном счете, и приводит к образованию вполне закономерных "переливающихся" блоковых схем — одна система блоков выталкивает флюид, другая — поглощает.

Для областей, достаточно протяженных по оси OY по сравнению с размерами по другим осям, запишем уравнение в двумерном случае, аналогичное уравнениям (23) и (24) в виде:

$$P_d = \frac{\mu_0}{2\pi k_0}\int\limits_{S_0} q \ln R dS_0 - \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \left(\frac{k\mu_0}{k_0\mu} - 1\right)\nabla_D P_d \frac{r}{r^2} dS, \tag{25}$$

причем из (13) для внутренних точек сечения S может быть получено интегральное уравнение для градиента потенциала:

$$\nabla_A P_d = \frac{\mu_0}{2\pi k_0}\int\limits_{S_0} q\frac{R}{R^2} dS_0 - \frac{1}{2\pi}\nabla_A \int\limits_S \left(\frac{k\mu_0}{k_0\mu} - 1\right)\nabla_M P_d \frac{r}{r^2} dS, \tag{26}$$

где: $\nabla_A = i\partial/\partial x + k\partial/\partial z$, $\nabla_D = i\partial/\partial\zeta + k\partial/\partial\zeta$, $dS = d\xi\partial\zeta$, $R = (x - x_0)i + +(z - z_0)k$, $r = (x-\xi)i + (z-\zeta)k$, $dS_0 = dx_0 0 dz_0$.

Решив интегральное уравнение (26) определим давление из (24), используя ту же матрицу внутренних значений $\nabla_D P_d$.

Далее рассмотрим тонкий горизонтальный слой, помещенный в непроницаемую для флюида среду, а так же совместим области деформации и неоднородности S и S_0. В этом случае уравнения (25) и (26) следует записать в

виде

$$P_d = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{\mu_0}{k_0} q \ln R dS - \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \left(\frac{k\mu_0}{k_0\mu} - 1\right)\nabla_M P_d \frac{r}{r^2} dS, \tag{27}$$

$$\nabla_A Pd = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{\mu_0}{k_0} q \frac{r}{r^2} dS - \frac{1}{2\pi}\nabla_A \int\limits_S \left(\frac{c\mu_0}{k_0\mu} - 1\right)\nabla_M P_d \frac{r}{r^2} dS, \tag{28}$$

$\nabla_A = i\partial/\partial x + j\partial/\partial y$, $\nabla_M = i\partial/\partial\zeta + k\partial/\partial\eta$, $dS = d\xi\partial\eta$, $r = (x-\xi)i + (y-\eta)k$.

Векторное интегральное уравнение (28) после скаляризации можно рассматривать как систему интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, если известно распределение k/μ и требуется определить градиент давления, а так же как уравнение Фредгольма 1-го рода относительно неизвестного распределения k/μ, если задано распределение градиента давления. Если целевой задачей поставить оценку соответствия между давлением и проницаемостью, то логично решать прямую задачу определения градиента давления по заданному распределению проницаемости, используя (24) в качестве уравнения Фредгольма 2-го рода, а затем вычислять давление по формуле (25).

3. Заключение

Достоинством предлагаемого решения является функциональное сведение проницаемости и общего горного давления, что, в принципе, вполне приемлемо для решения оценочных миграционных задач, в которых не столько важно знание абсолютных параметров течения, сколько важно определить – куда направлено течение.

Следовательно, в пакете прочностного анализа Фидесис [8] логично реализовать вышеназванные решения как следствие применения сейсмического прогноза структуры и параметров НДС в подземных условиях с целью опережающего прогноза параметров флюидных течений и оценки критериев опасности притока флюида (газа) в забой подземной выработки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Писецкий В. Б., Лапин Э. С., Александрова А. В., Лапин С. Э. К задаче формулирования общих требований и практической реализации сейсмической системы контроля и прогноза внезапных выбросов и горных ударов// Безопасность труда в промышленности. № 12. – 2013. – С. 49-57.

2. Писецкий В. Б. Механизм разрушения осадочных отложений и эффекты трения в дискретных средах., Известия высших учебных заведений, Горный журнал.- Екатеринбург, 2005.-№ 1, -с. 48-66 .

3. Pisetski, V. B., 1995. Dislocational Rock Mechanics as a Basis for Seismic Methods in the Search for Hydrocarbons. Vol.50:3, Revue de l'Institut Francais du Petrole, Paris, pp. 35.

4. Biot M. A. Mechanics of incremental deformations// New York: GU, -1965, - P. 430.

5. Писецкий В. Б., Крылатков С. М., 2005. О коэффициенте Пуассона нефтяных коллекторов с дискретной структурой. Горный журнал, Известия высших учебных заведений, Екатеринбург, №1.

6. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М., 1984. Движение жидкостей и газов в природных пластах. "Недра", Москва.

7. Pisetski V., Kormilcev V., Ratushnak A., 2002. Method for predicting dynamic parameters of fluids in a Subterranean reservoir. US Patent. № 6, 498, 989 B1.

8. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ ФИДЕСИС в руках инженера. ООО "ЛЕНАНД". Москва, 2015.

REFERENCES

1. Pisetskiy VB, Lapin ES, Aleksandrova AV, Lapin S.E. 2013, To the task of formulating general requirements and the practical implementation of a seismic monitoring and forecast system for sudden emissions and mountain impacts *Industrial Safety in Industry.* № 12. pp. 49-57.

2. Pisetsky V.B. 2005, Mechanism of destruction of sedimentary deposits and friction effects in discrete media., *News of Higher Educational Institutions, Mining Journal.* Ekaterinburg, № 1, pp. 48-66 .

3. Pisetski, V. B., 1995. Dislocational Rock Mechanics as a Basis for Seismic Methods in the Search for Hydrocarbons. *Revue de l'Institut Francais du Petrole*, Paris, Vol.50:3, pp. 35.

4. Biot M. A. 1965 *Mechanics of incremental deformations* New York: GU, P. 430.

5. Писецкий В. Б., Крылатков С. М., 2005. On the Poisson's ratio of oil reservoirs with a discrete structure. *Mining Journal, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii,* Ekaterinburg, №1.

6. Barenblatt GI, Entov VM, Ryzhik VM, 1984. *Movement of liquids and gases in natural formations.* "Nedra Moscow.

7. Pisetski V., Kormilcev V., Ratushnak A., 2002. *Method for predicting dynamic parameters of fluids in a Subterranean reservoir.* US Patent. № 6, 498, 989 B1.

8. Morozov EM, Levin VA, Vershinin AV *Strength analysis FIDESIS in the hands of an engineer.* OOO "LENAND". Moscow, 2015.

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет» на кафедрах геоинформатики и автоматики и компьютерных технологий

Получено 19.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3, 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-363-376

ПОДХОД ФАЗОВОГО ПОЛЯ К ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ МЕЖДУ ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ И ПЛАСТИЧНОСТЬЮ НА НАНОРАЗМЕРНОМ УРОВНЕ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В. И. Левитас[1], М. Джаванбакхт[2]

Аннотация

В статье рассматривается современный подход теории фазового поля (ПТФП) к взаимодействию между фазовыми переходами (ФП) и дислокациями на наноразмерном уровне. Он разрабатывается при больших деформациях как нетривиальное сочетание нового прогрессивного подхода теории фазового поля с мартенситными фазовыми переходами и эволюцией дислокаций. Выполняется моделирование на основе метода конечных элементов (МКЭ) для решения совместных уравнений теории фазового поля и теории упругости. Эволюция дислокаций и фазы высокого давления в наногранулированном материале, находящемся под действием давления и сдвига, изучается и используется для интерпретации экспериментальных результатов по фазовым переходам, вызванным пластической деформацией, под действием высокого давления в камере вращения алмазной наковальни.

Ключевые слова: подход теории фазового поля, фазовые переходы, дислокации, взаимодействие, наноразмерный уровень.

Библиография: 13 названий.

PHASE FIELD APPROACH TO INTERACTION BETWEEN PHASE TRANSFORMATIONS AND PLASTICITY AT THE NANOSCALE AT LARGE STRAINS

V. I. Levitas, M. Javanbakhtc

[1]Левитас Валерий, Iowa State University, Departments of Aerospace Engineering, Mechanical Engineering, and Material Science and Engineering, Ames Laboratory, Division of Materials Science and Engineering, vlevitas@iastate.edu

[2]Джаванбакхт Махди, Isfahan University of Technology, Department of Mechanical Engineering

Abstract

In the paper, our recent phase field approach (PFA) to the interaction between phase transformations (PTs) and dislocations at the nanoscale is reviewed. It is developed at large strains as a nontrivial combination of our recent advanced PFAs to martensitic PTs and dislocation evolution. Finite element method (FEM) simulations are performed to solve the coupled phase-field and elasticity equations. The evolution of dislocations and high pressure phase in a nanograined material under pressure and shear is studied and utilized for interpretation of experimental results on plastic strain induce PTs under high pressure in rotational diamond anvil cell.

Keywords: phase field approach, phase transformations, dislocations, interaction, nanoscale.

Bibliography: 13 titles.

1. Introduction

Interaction between martensitic PTs and dislocations is of great importance for various applications such as transformation-induced plasticity [1], plastic shear induced PTs under high pressure [2, 3], martensite nucleation and growth [4, 5, 6], and heat and thermomechanical treatments of steels. The main focus of the current paper is to review our recent work on PFA to interaction between evolving martensitic PTs and discrete dislocations at the nanoscale and at large strains. A thermodynamically consistent PFA for the coupled PT and dislocation evolution at the nanoscale was developed in [7–10]. This theory synergistically combines fully geometrically nonlinear theory for martensitic PTs [11–14] and dislocations [7, 15, 16], with nontrivial interactions and inheritance of dislocations during PTs. Corresponding numerical approaches presented in [11, 17] for PTs, in [7, 18] for dislocations, and in [8, 9, 19, 20] for interaction of dislocations and PTs. Note that for PTs [11, 17], the Levin's method of multiple superposition of finite deformations [21–23] have been utilized.

2. Complete system of equations [10, 19]

Both parts of the theory that describe PT and dislocation evolution satisfy some important requirements related to the thermodynamic equilibrium and instability conditions as well as provide the stress- and temperature-independent thermodynamically equilibrium transformation deformation gradient and Burgers vector [13,16]. They also reproduce some important features of the stress-strain curves, and allow one to include all thermomechanical properties of both austenite and martensitic variants [13,16]. PFA to dislocation evolution also defines dislocation height by equations rather than by computational mesh, which was typical for the previous approaches. Thus, it leads to a well-posed formulation and mesh-independent dislocation height H for any dislocation orientation. The

gradient energy for dislocations contains an additional term, which excludes localization of dislocation within height smaller than H without producing interfacial energy. The interaction between dislocations and PT is included in terms of kinematics and dependence of all material parameters for dislocations on the order parameter for PT η. Interaction also occurs through stress fields and is determined by solution of coupled phase field and nonlinear mechanical problems.

2.1. Kinematics

The following multiplicative decomposition of the deformation gradient $\boldsymbol{F}$ into elastic $\boldsymbol{F_e}$, transformational U_t, and plastic $F_p$parts is justified [10]:

$$F{=}F_e{\cdot}U_t{\cdot}F_p. \tag{1}$$

The expression for U_t vs. the order parameter η for a single martensitic variant, which satisfy thermodynamic equilibrium and instability conditions, is derived [13]:

$$U_t{=}I{+}\left[a\eta^2(1-\eta)^2+\left(4\eta^3-3\eta^4\right)\right]\varepsilon_t; 0<a<6, \tag{2}$$

where ε_t is the transformation strain tensor and $\boldsymbol{I}$ is the unit tensor. For the austenite, $\eta=0$; for the martensite, $\eta=1$.

An additivity of the plastic velocity gradients for different slip systems is postulated, similar to the crystal plasticity:

$$l_p{:=}\dot{F}_p{\cdot}F_p^{-1}{:=}\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{H^\alpha}b^\alpha\bigotimes n^\alpha\dot{\Upsilon}\left(\xi_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{p}\gamma_\alpha m^\alpha\bigotimes n^\alpha\dot{\Upsilon}\left(\xi_\alpha\right);$$

$$\Upsilon{=}(\overline{\xi}_\alpha)^2\left(3-2\overline{\xi}_\alpha\right)+Int(\xi_\alpha). \tag{3}$$

Here ξ_α is the order parameter for a dislocation in a slip system α, which varies between $n-1$ and n when $n-1$ complete dislocations exist and the n_{th} dislocation appears; $Int(\xi_\alpha)$ and $\overline{\xi}_\alpha$ are the integer and the fractional parts of ξ_α, respectively;b^α is the Burgers vector of the slip system α, $H^\alpha$is the height of dislocation band, n^α is the unit vector normal to the slip system, m^α is the unit vector in the direction of b^α, and $\gamma_\alpha=\frac{|b^\alpha|}{H^\alpha}$ is the plastic shear strain.

2.2. Helmholtz free energy

The Helmholtz free energy per unit mass can be expressed as the sum of elastic energyψ^e, thermal energy for PTψ_η^θ, crystalline energy for dislocationsψ_ξ^c, the energy of interaction of dislocation cores belonging to different slip systemsψ_ξ^{int}, and gradient energies related to martensitic PT $\psi_\eta^\nabla$and dislocations ψ_ξ^∇ as follows

$$\psi=J_t\psi^e+\psi_\eta^\theta+\psi_\xi^c+\psi_\xi^{int}+\psi_\eta^\nabla+\psi_\xi^\nabla; J_t=\det U_t. \tag{4}$$

The simplest finite-strain elastic energy is

$$\rho_0\psi^e = \frac{1}{2}E_e{:}C{:}E_e, \tag{5}$$

where $\rho_0$is the mass density in the reference configuration, $\boldsymbol{C}$ is the fourth-rank elastic moduli tensor, and $E_e{=}\frac{1}{2}(F_e^T \cdot F_e{-}I)$is the Lagrangian elastic strain tensor. The thermal energy is derived as

$$\rho_0\psi_\eta^\theta = A_0\left(\theta-\theta_c\right)\eta^2(1-\eta)^2 - \Delta s\left(\theta-\theta_e\right)\left(4\eta^3-3\eta^4\right), \tag{6}$$

where θ_c is the critical temperature at which stress-free austenite loses its stability, θ_e is the phase equilibrium temperature, Δs is the change in the entropy, and A_0 is a material parameter.

The crystalline energy for dislocations is accepted as follows

$$\rho_0\psi_\xi^c = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha\left(\eta,\overline{y}^\alpha\right)\left(\overline{\xi}_\alpha\right)^2\left(1-\overline{\xi}_\alpha\right)^2; A_\alpha\left(\eta\right) = A_\alpha + \left(A_\alpha^M - A_\alpha^A\right)\eta^2\left(3-2\eta\right);$$

$$A_\alpha\left(\overline{y}^\alpha\right) = \begin{cases} \overline{A}_\alpha & \overline{y}^\alpha \leqslant H^\alpha; \\ k\overline{A}_\alpha & \overline{y}^\alpha > H^\alpha; \end{cases} \quad \overline{y}^\alpha = y^\alpha - Int\left(\frac{y^\alpha}{H^\alpha+d^\alpha}\right)\left(H^\alpha+d^\alpha\right), \tag{7}$$

in which PTs and the inheritance of slip systems during PTs are taken into account. The coefficient $A_\alpha\left(\eta,\overline{y}^\alpha\right)$ characterizes the phase dependent theoretical yield strength. $A_\alpha\left(\eta,\overline{y}^\alpha\right)$ is a periodic step-wise fucntion of the coordinate y^α along the normal to the corresponding slip plane α. The parameter A_α is equal to its normal value $\overline{A}_\alpha$ within each dislocation band of the height H^α and $k\overline{A}_\alpha$ (k $>>$1) in a thin boundary layer between dislocations of the widthd^α. Thus, it excludes the spreading of the dislocation outside the desired dislocation band.

The energy of interaction of dislocation cores belonging to different slip systems is expressed in the following form

$$\rho_0\psi_\xi^{int} = \sum_{\alpha=1}^{p} A_{\alpha k}\left(\eta\right)\left(\overline{\xi}_\alpha\right)^2\left(1-\overline{\xi}_\alpha\right)^2\left(\overline{\xi}_k\right)^2\left(1-\overline{\xi}_k\right)^2; A_{\alpha\alpha} = 0;$$

$$A_{\alpha k}\left(\eta\right) = A_{\alpha k}^A + \left(A_{\alpha k}^M - A_{\alpha k}^A\right)\eta^2\left(3-2\eta\right), \tag{8}$$

where $A_{\alpha k}^A$ and $A_{\alpha k}^M$ are the coefficients of the energy of interaction of dislocation cores in the austenite and martensite, respectively. The interaction energy penalizes simultaneous presence of dislocations belonging to different slip systems at the same material point. For PTs with only one martensitic variant, the gradient energy is

$$\rho_0\psi_\eta^\nabla = \frac{\beta_\eta}{2}|\nabla\eta|^2, \tag{9}$$

where $\beta_\eta$is the coefficient of the gradient energy for PT. For dislocations, the gradient energy takes into account variation of the gradient energy coefficients $\beta_\xi\left(\eta\right)$during PTs:

$$\rho_0\psi_\xi^\nabla = \frac{\beta_\xi(\eta)}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left((\nabla^m\xi_\alpha)^2 + \mathrm{M}\left(1-\overline{\xi}_\alpha\right)^2(\nabla^n\xi_\alpha)^2\right);$$

$$\beta_\eta(\eta) = \beta_\xi^A + \left(\beta_\xi^M - \beta_\xi^A\right)\eta^2(3-2\eta), \tag{10}$$

where β_ξ^A and $\beta_\xi^M$are the coefficient of the gradient energy for dislocations in austenite and martensite, respectively; M is the ratio of the coefficients for the gradient energy normal to and along the slip plane; ∇^m and ∇^n are the gradient operators along and normal to the slip system α, respectively.

2.3. The first Piola-Kirchhoff P and Cauchy σ stresses

$$P = \rho_0 J_t F_e \cdot \frac{\partial\psi}{\partial E_e}\cdot U_t^{-1}\cdot F_p^{T-1}; \sigma = \rho J_t F_e\cdot\frac{\partial\psi}{\partial E_e}\cdot F_e^T, \tag{11}$$

where $\rho$is the mass density in the current (actual) configuration.

2.4. The Ginzburg-Landau equations for PTs and dislocations

The Ginzburg-Landau equations for PTs and dislocations represent linear kinetic relationship between the rates of the order parameters and conjugate driving forces:

$$\dot{\eta} = L^\eta\left(\frac{1}{\rho_0}P^T\cdot F_e : \frac{\partial U_t}{\partial\eta}\cdot F_p + \nabla\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nabla\eta}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right);$$

$$\dot{\xi}_\alpha = L_\alpha^\xi(\eta)\left(\frac{1}{\rho_0}\tau_\alpha\gamma_\alpha\frac{\partial\Upsilon}{\partial\xi_\alpha} + \nabla\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nabla\xi_\alpha}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial\xi_\alpha}\right);$$

$$L_\alpha^\xi(\eta) = L_\alpha^A + \left(L_\alpha^M - L_\alpha^A\right)\eta^2(3-2\eta); \tau_\alpha = n^\alpha\cdot F_p\cdot P^T\cdot F_e\cdot U_t\cdot m^\alpha, \tag{12}$$

where L_α^A and L_α^M are the kinetics coefficients for dislocations in the austenite and martensite, respectively. Momentum balance equation is expressed as$\nabla\cdot P = 0$. The boundary conditions for PTs and dislocations are $\nabla\eta\cdot k$=0 and $\nabla\xi_\alpha\cdot b^\alpha$=0, respectively, where k is the unit normal to the external surface. For some problems, periodic boundary conditions are applied.

FEM algorithms for the formulated system of equations have been implemented in code COMSOL.

3. Evolution of dislocations and high pressure phase in a nanograined material under pressure and shear

Application of high pressure to materials is a well-known way to discover new high pressure phases (HPPs) and phenomena. It is known from numerous

experiments that superposition of large plastic shear in rotational Bridgman or rotational diamond anvil cell (RDAC) [2,3,24-29] can lead to new phases that were not obtained under hydrostatic conditions and significantly reduces PT pressure. For example, a new high-density amorphous phase of SiC was observed in situ under pressure of 30 GPa and large shear [26] but no PTs were obtained under hydrostatic pressure up to 130 GPa. There are many examples that application of plastic straining reduces PT pressure by a factor of 2 to 10 for some PTs, including PTs to superhard phases of BN [25,29].

A basic understanding of the physics responsible for such drastic reduction in PT pressure is still in the development. It was demonstrated [2,3,9] that a simple addition of the work of shear stress along the transformation shear strain to the macroscopic mechanical driving force (which is minus pressure times volumetric transformation strain) does not change transformation pressure significantly. This is because macroscopic shear stress is limited by the yield strength in shear ($\sim$1 GPa), which is small in comparison to the applied pressure, e.g., 10-50 GPa.

The fundamental difference between the *plastic strain-induced* PTs under high pressure and *pressure-induced or stress-induced* PTs was first formulated in [2,3]. Pressure-induced or stress-induced PTs initiate at pre-existing defects at stress below the yield strength, while plastic strain-induced PTs occur by nucleation at new defects (e.g., dislocation pile-ups) produced during plastic straining, which cause stronger stress concentrations than the pre-existing defects. That is why plastic strain-induced PTs require completely different thermodynamic and kinetic treatment and experimental characterization, which is coupled to generation of defects and stress concentrators. To describe strain-induced PTs under high pressure at the nanoscale, a simple analytical model of nucleation at the tip of a dislocation pile-up in infinite space was developed in [2,3]. Despite the simplicity, this model explained many experimental results on PTs in RDAC and developed our intuition on the interaction between PTs and plasticity at the nanoscale.

Below, we review much more advanced results of studying HPP nucleation and evolution at the tip of a dislocation pile-up in a bicrystal under uniaxial compression and shear [9,20]. All size and time parameters are normalized by 1nm and 1ps, respectively. Plane strain problems and straight edge dislocations are considered. For the chosen material parameters, the phase equilibrium pressure between low and high pressure phases is 10 GPa; the critical pressure for the instability of the low pressure phase 20 GPa. With a single dislocation as a nucleation site, PT starts and almost completes at hydrostatic pressure of $p_h = 15GPa$. A rectangular sample with the size of 50×20 is considered which includes two nanograins surrounded by two areas at the top and bottom of the sample, each with the size of 50×5, which play role as elastic accommodators (Fig. 1). A horizontal dislocation band is located in the middle of the left grain. Two dislocation systems inclined at $\pm 30^0$ from the horizontal line are located in the right grain. The lower side of the sample is fixed in both directions, the periodic boundary conditions are applied at the lateral sides, and a vertical stress is applied to the upper side in the deformed state. The upper side is also subjected

to a horizontal displacement u (which is given in terms of prescribed macroscopic shear $\gamma = u/h$, with the height of grains $h = 20$). In the first problem, dislocation activity in the right grain is forbidden. Under the applied shear, dislocations of opposite signs are nucleated from both grain boundaries in the left grain and create dislocation pile ups. The pile-ups produce strong concentration of the stress tensor near their tips, which significantly increase the local transformation work. Thus, the external pressure required for PT can be drastically decreased. For example, in this problem due to the generation of 3 dislocation piled ups due to applied $\gamma = 0.2$, the PT pressure is reduced from $P_h = 15GPa$ to $1.2GPa$ (an averaged pressure over grains after PT). This explains drastic reduction of the PT pressure due to applied shear in experiments for various materials [2,3,24,25,29]. Figs. 2a and b show the coupled solutions for PT and dislocations at some initial stage (t=0.5) and the stationary solution in the right grain, respectively. The phase concentration, i.e. the ratio of the transformed area to the initial total area in the right grain, reaches *c=0.51*. Such a significant transformation progress is due to the small distance between stress concentrators, which leads to a coalescence of nuclei and corresponding morphological transition.

When dislocations in the right grain are included, besides the promoting effect of plasticity on PT, it also suppresses PT by relaxing stresses at other concentrators. The solutions for PT and dislocations with two dislocation systems in the transformed grain are presented in Figs. 2c and d. Several dislocations nucleated at the tip of the pile up and propagated through the right grain. Due to stress relaxation, almost no high pressure phase appears at the left side of the right grain. For the same reason, PT is also suppressed in the right side of the right grain and the transformed region (Fig. 2c) is smaller than that in Fig. 2b. Therefore, while the number of dislocations increases, coalescence does not occur and the stationary solution is reached with *c=0.19* and 6 and 3 dislocations in the lower and the upper dislocation systems, respectively.

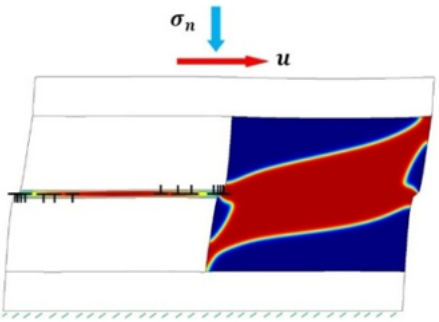


Fig.1. Schematics of the sample under pressure and shear and stationary solution. Dislocations in the left grain cause transformation from the low-pressure (blue) to the high (red) pressure phases [9].

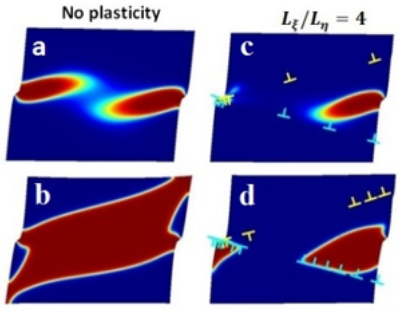


Fig. 2. The solution for PT without plasticity in the right grain at *t=0.5* (a) and for the stationary state (b). The coupled PT and dislocation solutions at *t=0.5* (c) and for the stationary state (d) [9].

Thus, dislocations play a dual role: in addition to creating stress concentrators and promoting PTs, they may relax stresses at other concentrators, thus

competing with PT. Some combinations of the applied normal and shear stresses have been found for which PT wins the competition, see Fig. 3.

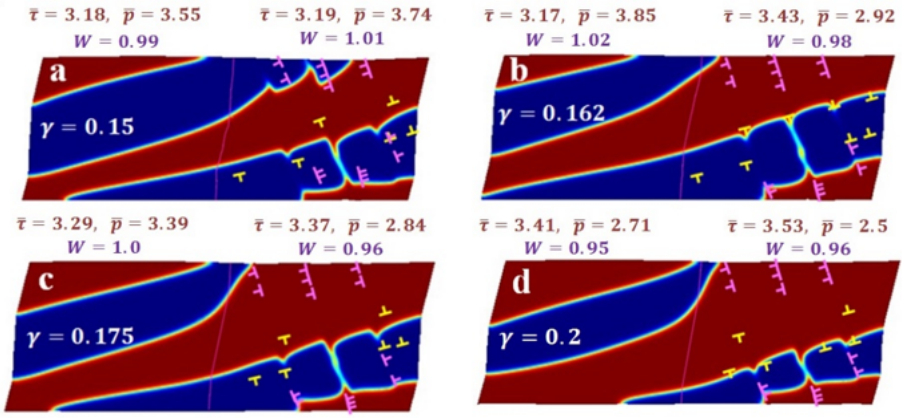


Fig. 3. Stationary phase and dislocation microstructures for different applied shears [9].

While nucleation is determined by the strong stress concentration, the stationary martensite morphology is determined by the equilibrium values of transformation work, i.e., by the simplest phase equilibrium condition. Indeed, the interface positions perfectly coincide with the lines corresponding to the equilibrium transformation work, both with and without plasticity (Fig. 4).

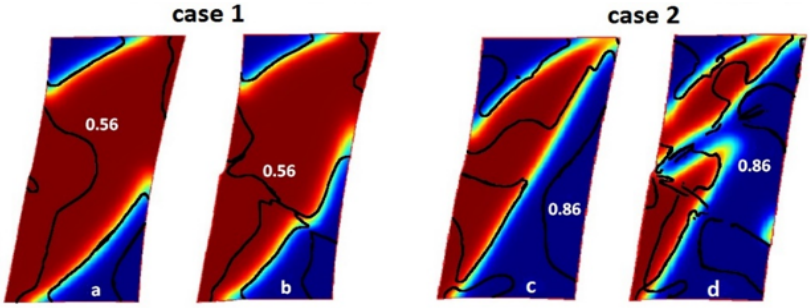


Fig. 4. Stationary phase state and contour line of the equilibrium transformation work for

case 1 without (a) and with plasticity (b), and for case 2 without (c) and with plasticity (d) [19]. Cases 1 and 2 differ by some material parameters.

Various parametric studies of this problem, as well as various other problems can be found in [9,19,20].

4. Concluding remarks

To summarize, a PFA to the interaction between PTs and dislocations at large strains is presented, which includes the following main features of the interaction event:

(a) multiplicative kinematic decomposition of the deformation gradient into elastic, transformational, and plastic contributions;

(b) inheritance of dislocations of austenite in martensite during martensitic PT and dislocations of martensite in austenite during reverse PT;

(c) dependence of all material parameters for dislocations on the order parameters for PT.

Problems for temperature and stress-induced PTs interacting with dislocation evolution are solved and several effects including the dual effect of plasticity on PT, athermal interface resistance caused by dislocations, and inheritance of dislocations of martensite in austenite for stress-induced PT are found [9,19,20]. Important next step should be inclusion of partial dislocations and dislocation reactions, in particular, for dislocations inherited by the growing phase. A similar approach can be developed for the interaction of dislocations with twins and diffusive PTs, as well as electromagnetic and reconstructive PTs. For multivariant martensitic PTs, the thermodynamic potentials developed in [30,31] can be utilized.

5. Acknowledgements

The support of NSF (CMMI-1536925 and DMR-1434613), ARO (W911NF-17-1-0225), and Iowa State University (Schafer 2050 Challenge Professorship) is gratefully acknowledged.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frenkel Y. 1952, "Theory of reversible and irreversible cracks in solids", *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki*, is. 22, no. 11, pp. 1857–1866.Fischer FD, Reisner G, Werner E, Tanaka K, Cailletaud G, Antretter T. A new view on transformation induced plasticity (TRIP). *Int J Plast* 2000; 16: 723-748. 1866.

2. Levitas VI. 2004, Continuum mechanical fundamentals of mechanochemistry. In: Ed. Y. Gogotsi and V. Domnich, *High Pressure Surface Science and Engineering. Section 3*, Institute of Physics Publishing, p. 159-292.

3. Levitas VI. 2004, High-pressure mechanochemistry: conceptual multiscale theory and interpretation of experiments. *Phys Rev B*; 70: 184118.

4. Olson GB, Cohen M. 1998, Dislocation theory of martensitic transformations. In: Ed. F R N. Nabarro, *Dislocations in solids*, Amsterdam, North-Holland, 7: 297-407.

5. Levitas VI. 2000, Structural changes without stable intermediate state in inelastic material. Parts I and II. *Int. J. Plast* 16: 805-849 and 851-892.

6. Idesman AV, Levitas VI, Stein E. 2000, Structural changes in elastoplastic materials: a unified finite element approach for phase transformation, twinning and fracture. *Int. J. Plast* 16: 893-949.

7. Levitas V. I., and Javanbakht M. 2012, Advanced Phase-Field Approach to Dislocation Evolution. *Physical Review B*, Vol. 86, 140101 (R).

8. Levitas V.I. 2013, and Javanbakht M. Phase field approach to interaction of phase transformation and dislocation evolution. *Applied Physics Letters*, Vol. 102, 251904.

9. Levitas VI. and Javanbakht M. 2014, Phase transformations in nanograin materials under high pressure and plastic shear: nanoscale mechanisms. *Nanoscale* 6: 162-166.

10. Levitas V.I. 2015, and Javanbakht M. Interaction between phase transformations and dislocations at the nanoscale. Part 1. General phase field approach. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 82, 287-319.

11. Levitas V. I., 2009, Levin V.A., Zingerman K. M., and Freiman E.I. Displacive phase transitions at large strains: Phase-field theory and simulations. *Physical Review Letters*, Vol.103, No. 2, 025702.

12. Levin V. A., Levitas V. I., LokhinV. V., Zingerman K. M., Sayakhova L. F., and Freiman E. I. 2010, Displacive phase transitions at large strains: Phase-field theory and simulations. *Doklady Phsyics*, Vol. 55, No. 10, pp. 507-511.

13. Levitas VI. 2013, Phase-field theory for martensitic phase transformations at large strains. *Int J Plast* 49: 85-118.

14. Levitas VI. 2014, Phase field approach to martensitic phase transformations with large strains and interface stresses. *J. Mech Phys Solids* 70: 154-189.

15. Levitas V. I., Preston D.L., and Lee D.-W. 2003, Three-dimensional Landau theory for multivariant stress-induced martensitic phase transformations. Part III. Alternative potentials, critical nuclei, kink solutions, and dislocation theory. *Physical Review B*, Vol. 68, 134201 (1-24).

16. Levitas V.I. 2015, and Javabakht M. Thermodynamically consistent phase field approach to dislocation evolution at small and large strains. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 82, 345-366.

17. Levin V. A., Levitas V. I., Zingerman K.M., Freiman E.I. 2013, Phase-field simulation of stress-induced martensitic phase transformations at large strains. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 50, 2914-2928.

18. Javanbakht M. and Levitas V.I. 2016, Phase field approach to dislocation evolution at large strains: Computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 82, 95-110.

19. Javanbakht M. and Levitas V.I. 2015, Interaction between phase transformations and dislocations at the nanoscale. Part 2. Phase field simulation examples. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 82, 164–185.

20. Javanbakht M. and Levitas V.I. 2016, Phase field simulations of plastic strain-induced phase transformations under high pressure and large shear. *Physical Review B*, Vol. 94, 214104, 21 pp.

21. Levin, V.A., 1998. Theory of repeated superposition of large deformations. Elastic and viscoelastic bodies. *Int. J. Solids Struct.* 35, 2585–2600.

22. Levin V. A. 1999, *Mnogokratnoe nalozhenie bol'shih deformacij v uprugih i vjazkouprugih telah.* M.: Nauka, Fizmatlit, — 223 p.

23. Levin V. A., Kalinin V. V., Zingerman K. M., Vershinin A. V. 2007, *Razvitie defektov pri konechnyh deformacijah. Komp'juternoe i fizicheskoe modelirovanie / Pod red. V. A. Levina.* — M.: FIZMATLIT, — 392 p.

24. V. D. Blank and E.I. Estrin 2014, *Phase Transitions in Solids under High Pressure*. CRC Press, Boca Raton,

25. Ji C., Levitas V. I., Zhu H., Chaudhuri J., Marathe A., and Ma Y. 2012, Shear-Induced Phase Transition of Nanocrystalline Hexagonal Boron Nitride to Wurtzic Structure at Room Temperature and Lower Pressure. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 109, No. 33, 201203285.

26. Levitas V. I., Ma Y., Selvi E., Wu J., and Patten J. A. 2012, High-density amorphous phase of silicon carbide obtained under large plastic shear and high pressure. *Physical Review B*, Vol. 85, No.5, 054114.

27. Levitas V. I., Ma Y. Z., and Hashemi J. Levitas V. I., Ma Y. Z., and Hashemi J. 2005, Transformation-induced Plasticity and Cascading Structural Changes in Hexagonal Boron Nitride Under High Pressure and Shear. *Appl. Physics Letters*, Vol. 86, 071912.

28. Levitas, V. I., Ma Y., Hashemi J., Holtz M., and Guven N. 2006, Strain-induced disorder, phase transformations and transformation induced plasticity in hexagonal boron nitride under compression and shear in a rotational diamond anvil cell: in-situ X-ray diffraction study and modeling. *The Journal of Chemical Physics* 125, 044507 (2006): 1-14.

29. Levitas V.I. and Shvedov, L.K. 2002, Low Pressure Phase Transformation from Rhombohedral to Cubic BN: Experiment and Theory. *Physical Review B*, Vol. 65, No. 10, 104109.

30. Levitas V.I. and Roy A.M. 2015, Multiphase phase field theory for temperature- and stress-induced phase transformations. *Physical Review B*, Vol. 91, No.17, 174109.

31. Levitas V.I., Roy A.M., and Preston D. L. 2013, Multiple twinning and variant-variant transformations in martensite: Phase-field approach. *Physical Review B*, Vol. 88, 054113.

REFERENCES

1. Frenkel Y. 1952, "Theory of reversible and irreversible cracks in solids", *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki*, is. 22, no. 11, pp. 1857–1866.Fischer FD, Reisner G, Werner E, Tanaka K, Cailletaud G, Antretter T. A new view on transformation induced plasticity (TRIP). *Int J Plast* 2000; 16: 723-748. 1866.

2. Levitas VI. 2004, Continuum mechanical fundamentals of mechanochemistry. In: Ed. Y. Gogotsi and V. Domnich, *High Pressure Surface Science and Engineering. Section 3*, Institute of Physics Publishing, p. 159-292.

3. Levitas VI. 2004, High-pressure mechanochemistry: conceptual multiscale theory and interpretation of experiments. *Phys Rev B*; 70: 184118.

4. Olson GB, Cohen M. 1998, Dislocation theory of martensitic transformations. In: Ed. F R N. Nabarro, *Dislocations in solids*, Amsterdam, North-Holland, 7: 297-407.

5. Levitas VI. 2000, Structural changes without stable intermediate state in inelastic material. Parts I and II. *Int. J. Plast* 16: 805-849 and 851-892.

6. Idesman AV, Levitas VI, Stein E. 2000, Structural changes in elastoplastic materials: a unified finite element approach for phase transformation, twinning and fracture. *Int. J. Plast* 16: 893-949.

7. Levitas V. I., and Javanbakht M. 2012, Advanced Phase-Field Approach to Dislocation Evolution. *Physical Review B*, Vol. 86, 140101 (R).

8. Levitas V.I. 2013, and Javanbakht M. Phase field approach to interaction of phase transformation and dislocation evolution. *Applied Physics Letters*, Vol. 102, 251904.

9. Levitas VI. and Javanbakht M. 2014, Phase transformations in nanograin materials under high pressure and plastic shear: nanoscale mechanisms. *Nanoscale* 6: 162-166.

10. Levitas V.I. 2015, and Javanbakht M. Interaction between phase transformations and dislocations at the nanoscale. Part 1. General phase field approach. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 82, 287-319.

11. Levitas V. I., 2009, Levin V.A., Zingerman K. M., and Freiman E.I. Displacive phase transitions at large strains: Phase-field theory and simulations. *Physical Review Letters*, Vol.103, No. 2, 025702.

12. Levin V. A., Levitas V. I., LokhinV. V., Zingerman K. M., Sayakhova L. F., and Freiman E. I. 2010, Displacive phase transitions at large strains: Phase-field theory and simulations. *Doklady Phsyics*, Vol. 55, No. 10, pp. 507-511.

13. Levitas VI. 2013, Phase-field theory for martensitic phase transformations at large strains. *Int J Plast* 49: 85-118.

14. Levitas VI. 2014, Phase field approach to martensitic phase transformations with large strains and interface stresses. *J. Mech Phys Solids* 70: 154-189.

15. Levitas V. I., Preston D.L., and Lee D.-W. 2003, Three-dimensional Landau theory for multivariant stress-induced martensitic phase transformations. Part III. Alternative potentials, critical nuclei, kink solutions, and dislocation theory. *Physical Review B*, Vol. 68, 134201 (1-24).

16. Levitas V.I. 2015, and Javabakht M. Thermodynamically consistent phase field approach to dislocation evolution at small and large strains. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 82, 345-366.

17. Levin V. A., Levitas V. I., Zingerman K.M., Freiman E.I. 2013, Phase-field simulation of stress-induced martensitic phase transformations at large strains. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 50, 2914-2928.

18. Javanbakht M. and Levitas V.I. 2016, Phase field approach to dislocation evolution at large strains: Computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 82, 95-110.

19. Javanbakht M. and Levitas V.I. 2015, Interaction between phase transformations and dislocations at the nanoscale. Part 2. Phase field simulation examples. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 82, 164–185.

20. Javanbakht M. and Levitas V.I. 2016, Phase field simulations of plastic strain-induced phase transformations under high pressure and large shear. *Physical Review B*, Vol. 94, 214104, 21 pp.

21. Levin, V.A., 1998. Theory of repeated superposition of large deformations. Elastic and viscoelastic bodies. *Int. J. Solids Struct.* 35, 2585–2600.

22. Levin V. A. 1999, *Mnogokratnoe nalozhenie bol'shih deformacij v uprugih i vjazkouprugih telah.* M.: Nauka, Fizmatlit, — 223 p.

23. Levin V. A., Kalinin V. V., Zingerman K. M., Vershinin A. V. 2007, *Razvitie defektov pri konechnyh deformacijah. Komp'juternoe i fizicheskoe modelirovanie / Pod red. V. A. Levina.* — M.: FIZMATLIT, — 392 p.

24. V. D. Blank and E.I. Estrin 2014, *Phase Transitions in Solids under High Pressure.* CRC Press, Boca Raton,

25. Ji C., Levitas V. I., Zhu H., Chaudhuri J., Marathe A., and Ma Y. 2012, Shear-Induced Phase Transition of Nanocrystalline Hexagonal Boron Nitride to Wurtzic Structure at Room Temperature and Lower Pressure. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 109, No. 33, 201203285.

26. Levitas V. I., Ma Y., Selvi E., Wu J., and Patten J. A. 2012, High-density amorphous phase of silicon carbide obtained under large plastic shear and high pressure. *Physical Review B*, Vol. 85, No.5, 054114.

27. Levitas V. I., Ma Y. Z., and Hashemi J. Levitas V. I., Ma Y. Z., and Hashemi J. 2005, Transformation-induced Plasticity and Cascading Structural Changes in Hexagonal Boron Nitride Under High Pressure and Shear. *Appl. Physics Letters*, Vol. 86, 071912.

28. Levitas, V. I., Ma Y., Hashemi J., Holtz M., and Guven N. 2006, Strain-induced disorder, phase transformations and transformation induced plasticity in hexagonal boron nitride under compression and shear in a rotational diamond anvil cell: in-situ X-ray diffraction study and modeling. *The Journal of Chemical Physics* 125, 044507 (2006): 1-14.

29. Levitas V.I. and Shvedov, L.K. 2002, Low Pressure Phase Transformation from Rhombohedral to Cubic BN: Experiment and Theory. *Physical Review B*, Vol. 65, No. 10, 104109.

30. Levitas V.I. and Roy A.M. 2015, Multiphase phase field theory for temperature- and stress-induced phase transformations. *Physical Review B*, Vol. 91, No.17, 174109.

31. Levitas V.I., Roy A.M., and Preston D. L. 2013, Multiple twinning and variant-variant transformations in martensite: Phase-field approach. *Physical Review B*, Vol. 88, 054113.

Получено 19.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 531 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-377-389

О ТЕОРИИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ Я. ФРЕНКЕЛЯ И А. ГРИФФИТСА

В. М. Маркочев[1], М. И. Алымов[2] (г. Москва)

Аннотация

Дан анализ теории хрупкого разрушения Френкеля. Для анализа использован аппарат теории катастроф. Посредством замены переменных уравнение потен-циальной энергии Френкеля приведено к каноническому виду уравнения ката-строфы складки. Переменной состояния в полученном уравнении складки явля-ется длина трещины. Приравняв нулю первую и вторую производные от энер-гии по длине трещины, получили критическое значение силы и критическое значение длины трещины. Критическая длина трещины и критическая нагрузка по Френкелю не зависят друг от друга. Их значения зависят только от внутрен-них управляющих параметров системы – от модуля упругости, поверхностной энергии и раскрытия кончика трещины.

Показано, что длина исходной трещины растет в процессе приближения к критическому состоянию. Получено уравнение, связывающее длину стабильно растущей трещины с внешней нагрузкой и управляющими параметрами систе-мы.

Предпринята попытка модернизации теории хрупкого разрушения Гриф-фитса на основе идей Френкеля. Для этого в известное уравнение энергии по Гриффитсу введен третий член. Энергия этого члена обратно пропорциональна длине трещины. Приравняв нулю первую и вторую производные по длине тре-щины, получили систему уравнений. Решив эту систему уравнений, получили формулы для критической длины трещины и критического напряжения. Дана оценка постоянной, входящей в третий член модернизированного уравнения Гриффитса. Длина критической трещины по модернизированному уравнению на 20 % меньше длины трещины по классическому уравнению Гриффитса.

Стабильной длине трещины по Френкелю и по модернизированному уравнению Гриффитса соответствует локальный минимум потенциальной энер-гии. Это обстоятельство фактически устраняет сингулярность при нулевой длине трещины.

[1]Маркочев Виктор Михайлович, заведующий кафедрой физики прочности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, VMMark@yandex.ru

[2]Алымов Михаил Иванович, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института структурной макрокинетики РАН, director@ism.ac.ru

Третий член в уравнении Френкеля можно интерпретировать как энергию раскрытия трещины. Тем самым Я.И. Френкель соединил силовой и деформа-ционный походы современной механики разрушения. Уравнение Френкеля, описывающее критическое состояние твердого тела с трещиной, предшествует появлению современной теории катастроф вообще и применительно к механике хрупкого разрушения в частности.

Ключевые слова: трещина, хрупкое разрушение, теория Гриффитса, теория Френкеля, механика разрушения, теория катастроф.

Библиография: 5 названий.

ON THE BRITTLE FRACTURE THEORY BY YA. FRENKEL AND A. GRIFFITH.

V. M. Markochev, M. I. Alymov

Abstract

The analysis of the theory of brittle fracture Frenkel. The analysis is based on the theo-ry of catastrophes. By replacing the variables in the equation of potential energy Fren-kel of the canonical reduced form of the equation of catastrophe folds. A state variable in the resulting equation of the fold is the crack length. Equating to zero first and sec-ond derivatives of the energy on the crack length, obtained critical force and critical length of crack. Critical crack length and critical load at Frenkel are independent from each other. Their values depend only on the internal of the system operating parame-ters – modulus of elasticity, surface energy and opening of the crack tip.

It is shown that the length of the initial crack grows in the process of approach to the critical state. The resulting equation linking the length of a steadily growing crack with the external load and control parameters of the system.

An attempt of modernization theories of brittle fracture Griffith based on the ideas of Frenkel. To do this in a well-known energy equation in Griffiths introduced the third member. The energy of this member is inversely proportional to the crack length. Equating to zero first and second derivatives on the crack length, obtained a system of equations. Solving this system of equations, obtained formulae for critical crack length and critical stress

The estimation of permanent member, the third member of the modernized equations Griffiths. The length of the critical crack for upgrade equation is 20% small-er than the crack length according to the classical equation of Griffith.

The stable crack length in Frenkel and modernized Griffiths equation corre-sponds to the local minimum of potential energy. This fact virtually eliminates the singularity at zero crack length.

The third member in the Frenkel equation can be interpreted as the energy of the crack opening. Thus Frankel joined the force and deformation criteria modern fracture mechanics. The Frenkel equation, which describes the critical state of a solid body with a crack that precedes the appearance of modern catastrophe theory in general and in relation to the mechanics of brittle fracture, in particular.

Keywords: fracture, brittle fracture, Griffiths theory, the theory of Frenkel, fracture mechanics, the theory of catastrophes.

Bibliography: 5 titles.

1. Введение

В 1952 году вышла статья Я.И. Френкеля [1], описывающее критическое состояние твердого тела с трещиной. Эта статья прошла практически не заме-ченной, за исключением монографии Б.А. Дроздовского и Я.Б. Фридмана [2], где частично пересказано ее содержание. Г.П. Черепанов [3] поместил ссылку на статью [1] в список литературы, однако в тексте своей книги отозвался кратко и невразумительно. Целью данной статьи является анализ работы Я.И. Френкеля с современных позиций теории катастроф и попытка модернизации энергетиче-ской теории хрупкого разрушения А. Гриффитса [4].

2. Анализ теории Я. И. Френкеля

Я. И. Френкелем записано следующее уравнение для изменения потенциальной энергии U пластины с боковой трещиной x

$$U = -\frac{F^2 x^3}{EI} + 2\gamma x b + \frac{F^2 \delta}{Ebx}, \tag{1}$$

где F — сила, приложенная к пластине, E — модуль упругости материала платины, I — осевой момент инерции поперечного сечения балки, моделирующей изгиб края пластины, γ — поверхностная энергия, δ — раскрытие кончика трещины. В уравнение (1) нами введена толщина пластины b, что необходимо для получения единой размерности всех членов уравнения.

В соответствии с теорией катастроф [5-11] длина трещины x — это параметр состояния тел с трещиной, напряжение (нагрузка F) — внешний управляющий параметр, модуль упругости E и поверхностная энергия γ — внутренние управляющие параметры. Предположим, что критическая длина трещины равна a. Заменим переменную x на

$$x = y + a, \tag{2}$$

и разложим множитель $1/(y+a)$ в степенной ряд в окрестности длины a.

$$\frac{1}{y+a} \approx \frac{1}{2a} - \frac{y-a}{4a^2} + \frac{(y-a)^2}{8a^3}. \tag{3}$$

Для иллюстрации ограничимся двумя первыми членами ряда. Теперь уравнение (1) примет следующий вид

$$U = \frac{F^2(a+y)^3}{EI} + 2\gamma b\,(a+y) - \frac{F^2\delta\,(a+y)}{4Eba^2} + \frac{F^2\delta}{Eba}. \tag{4}$$

Заметим, что при такой замене мы занижаем роль множителя $1/(y+a)$. Продолжив замену переменных.

$$V = \frac{EI}{3F^2}\left(U - \frac{F^2\delta}{Eba}\right), \tag{5}$$

$$z = a + y, \tag{6}$$

$$A = \frac{2\gamma EbI}{3F^2} - \frac{\delta I}{12ba^2}, \tag{7}$$

преобразуем уравнение (4) к виду (8), который имеет каноническое уравнение катастрофы складки [4, 5]

$$V = \frac{z^3}{3} + z, \tag{8}$$

В соответствии с теорией, для возникновения катастрофы складки необходимо, чтобы одновременно удовлетворялись два уравнения

$$z = 0, \tag{9}$$

и

$$A = 0. \tag{10}$$

Из уравнения (9) следует, с учетом (2) и (6) что длина прироста трещины

$$x = 0. \tag{11}$$

Из уравнений (10) и (7) следует, что критическая сила F_f, необходимая, чтобы трещина длиной a стала критической, равна

$$F_f = 2\sqrt{2}ab\sqrt{\frac{\gamma E}{\delta}}. \tag{12}$$

Итак, уравнение (1) Я. И. Френкеля — это уравнение катастрофы хрупкого разрушения.

В соответствии с теорией катастроф для возникновения катастрофы необходимо, чтобы первая и вторая производные от энергии по переменной состояния одновременно обращались в нуль. По достижении этого состояния переменная состояния x должна резко увеличиваться. Это доказывается построением семейства кривых для потенциальной энергии системы в зависимости от длины трещины при различных значениях внешнего управляющего параметра — напряжения или силы. Исследуем уравнение (1) этим методом.

Записав уравнения для первой и второй производной и приравняв их нулю, получаем систему уравнений

$$-\frac{3F^2x^2}{EI}+2\gamma b-\frac{F^2\delta}{Ebx^2}=0, \tag{13}$$

$$-\frac{3x}{I}+\frac{\delta}{bx^3}=0. \tag{14}$$

Решение этой системы уравнений дает формулы для критической длины трещины

$$x_f=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt[4]{\frac{3\delta I}{b}}, \tag{15}$$

для критической силы

$$F_f=\frac{b\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{\gamma E}{\delta}}\sqrt[4]{\frac{3\delta I}{b}}, \tag{16}$$

а также соотношение между критической силой F_f и критической длиной трещины x_f.

$$F_f=x_f b\sqrt{\frac{\gamma E}{\delta}}. \tag{17}$$

Существенно, что критическая длина трещины и критическая нагрузка определяются независимо друг от друга и зависят только от внутренних управляющих параметров E, γ, δ и I.

Эта независимость критической длины и критического напряжения в некоторой мере поясняет, почему хрупкие разрушения происходят внезапно, но сравнительно редко. И это происходит потому, что одновременно удовлетворить двум условиям (15) и (16) в реальных условиях эксплуатации практически невозможно — вероятность этого события мала. В лабораторных условиях, при нагружении образца с трещиной, исследователь постепенно приближается к критическим условиям, и они наступают со 100% вероятностью. Но такие условия при эксплуатации отсутствуют.

Для получения численных оценок примем, что $E=105$ МПа, $F=5$ Н, $\gamma=1$ Н/м, $I=0,083$ мм^4 , $b=1$ мм. При этих условиях $x_f=0,23$ мм , $F_f=7,26$ Н.

На рис. 1 приведено семейство кривых, рассчитанных по формуле (1).

Рис. 1 полностью подтверждает справедливость расчетов критических параметров по формулам (15) и (16). Он также показывает, что исходная трещина стабильно подрастает вплоть до ее критического значения $0,23$ мм. Вместе с тем следует отметить, что рис. 1 качественно не соответствует рис. 6 на стр. 1865 работы Я. И. Френкеля [1]. В соответствии с этим рисунком, рост нагрузки F приводит к снижению потенциальной энергии и уменьшению длины равновесной трещины, что противоречит рис. 1.

Зависимость длины равновесной (стабильной) трещины x_{st} от нагрузки F получаем, решив уравнение (13) относительно длины трещины x.

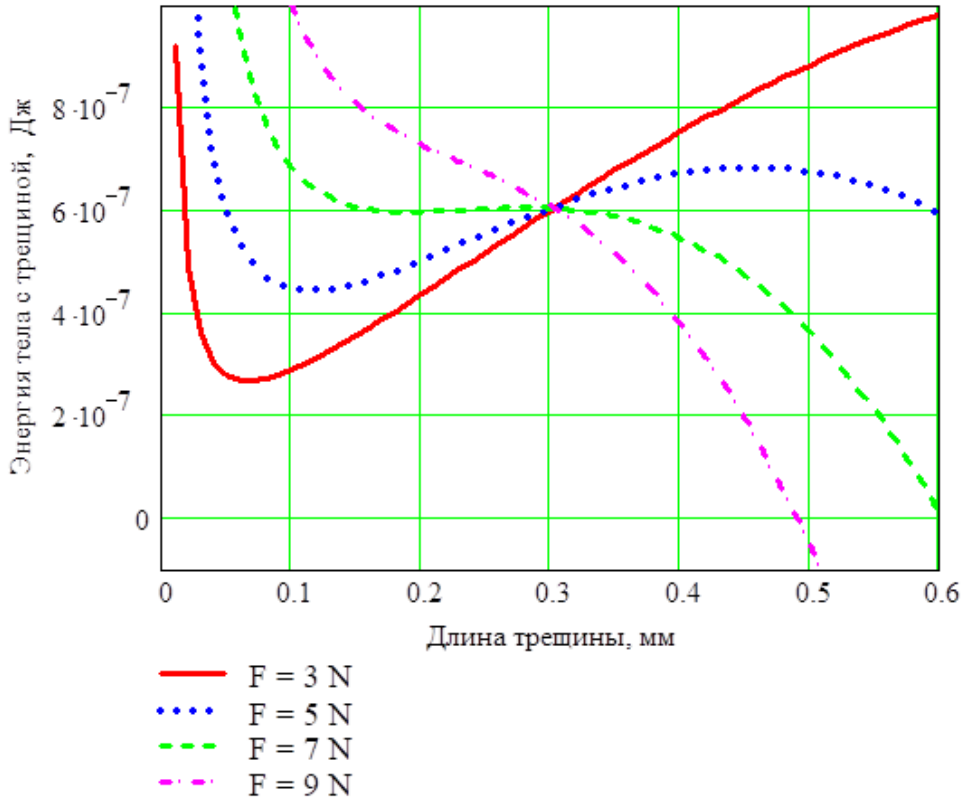


Рис. 1: Семейство кривых, описывающих зависимость потенциальной энергии пластины с трещиной от нагрузки по Френкелю

$$x_{st} = \frac{\sqrt{12\gamma Eb}I}{6F}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{3F^4\delta}{\gamma^2E^2b^3I}}} \tag{18}$$

Эта зависимость показана на рис. 2.

Рис. 1 показывает, что все кривые на этом рисунке пересекаются в одной точке. Анализ показывает, что абсцисса этой точки равна

$$x_s = \frac{\sqrt[4]{\delta Ib^3}}{b}. \tag{19}$$

Численное значение абсциссы для данного примера равно $x_s = 0,302$ мм.

Ординату U_s точки пересечения получаем, подставив x_s в уравнение для энергии (1), а именно

$$U_s = -\frac{F^2x_s}{EI} + 2\gamma x_s b + \frac{F^2\delta}{Ebx_s}. \tag{20}$$

Численное значение ординаты для данного примера равно $U_s = 6,043\cdot10^{-7}$ Дж.

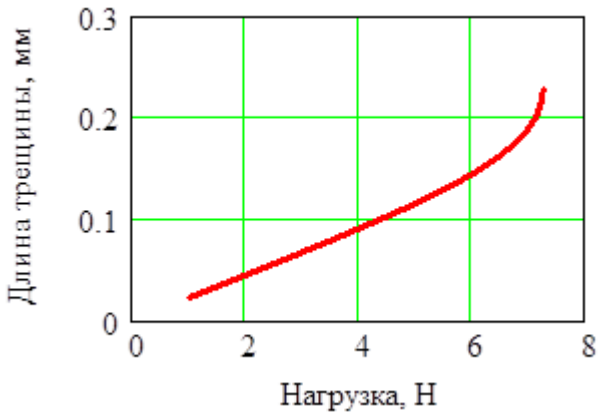


Рис. 2: Зависимость длины стабильной трещины от нагрузки

3. Модернизация теории А. Гриффитса

А. Гриффитс [3] заложил основы механики разрушения, добавив к теории упругости еще одну постоянную — поверхностную энергию γ. Его уравнение для энергии U_g бесконечной пластины с трещиной $2x$ имеет следующий вид

$$U_g = -\frac{\pi\sigma^2 x^2 b}{E} + 4\gamma b x \tag{21}$$

откуда следует формула для критической длины трещины x_g

$$x_g = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2}. \tag{22}$$

При $\sigma = 10$ МПа, и принятых ранее значениях γ и E, $x_g = 0,637$ мм.

Вводя в (21), по аналогии с Я. И. Френкелем, дополнительный член D/x, где D имеет размерность энергии, мы фиксируем сам факт существования трещины. Поэтому, изменяя ее длину, получаем возможность исследования степени ее стабильности. Итак,

$$U_{gf} = -\frac{\pi\sigma^2 x^2}{E} + 4\gamma x + \frac{D}{x}. \tag{23}$$

Дважды продифференцировав уравнение (23) и приравняв первую и вторую производные по длине трещины x, получаем систему уравнений

$$-\frac{D}{x^2} - \frac{2\pi\sigma^2 x}{E} + 4\gamma = 0, \tag{24}$$

$$\frac{D}{x^3} - \frac{\pi\sigma^2}{E} = 0. \tag{25}$$

Решив эту систему уравнений относительно x и σ, получаем формулы для критической длины трещины x_c и критического напряжения σ_c.

$$x_c = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{D}{\gamma}}, \tag{26}$$

$$\sigma_c = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{E\gamma^2}{\pi D}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{D}{\gamma}}}, \tag{27}$$

а также уравнение, связывающее σ_c и x_c:

$$\sigma_c = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{E\gamma^2 x_c}{\pi D}} \tag{28}$$

Приняв, что $D = 10^{-7}$ Дж, получаем оценки σ_c и x_c: $x_c = 0,274$ мм, $\sigma_c = 12,449$ MPa.

На рис. 3 приведено семейство кривых, рассчитанных по уравнению (23), где параметром служит напряжение σ. Видно исчезновение минимума функции U_{gf} при вычисленных значениях σ_c и x_c, которое сопровождается стабильным приростом трещины (см.рис. 2).

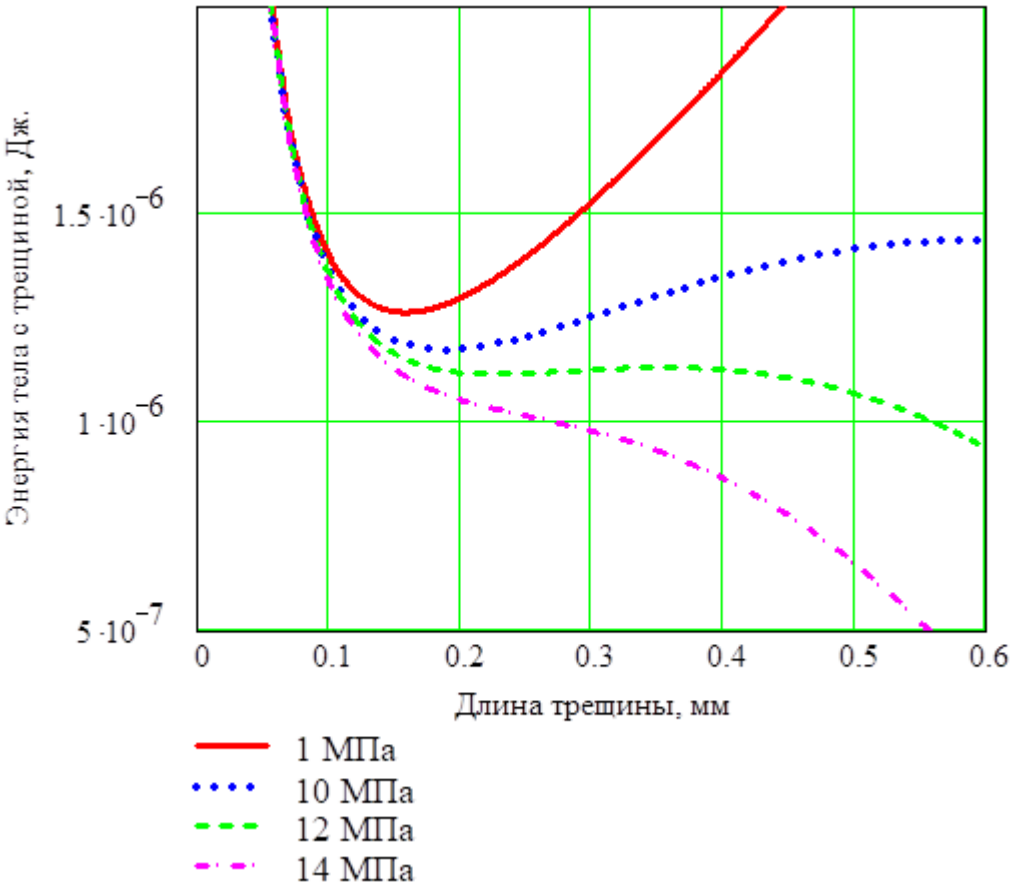


Рис. 3: Семейство кривых, описывающих зависимость потенциальной энергии пластины с трещиной от нагрузки по Гриффитсу–Френкелю

Приравняв значения критических длин трещин по (22) и (26) получаем формулу для D_g:

$$D_g = \frac{16}{3\pi^2}\frac{\gamma^3 E^2}{\sigma^4} \tag{29}$$

При принятых значениях входящих величин значение $D_g = 5,404 \cdot 10^{-7}$ Дж. Отметим, что комбинация $(E^2\gamma^3)/\sigma^4$ имеет размерность D и может служить его заменой. При использовании D_g вместо D и при замене σ на σ_0 в последнем члене уравнения (23) получаем

$$U_{gf} = -\frac{\pi\sigma^2 x^2}{E} + 4\gamma x + \frac{16E^2\gamma^3}{3\pi^2{\sigma_0}^2 x} \tag{30}$$

В этом случае критическая длина трещины x_{cc} и критическое напряжение σ_{cc} будут равны

$$x_{cc} = \frac{2\gamma E}{\pi{\sigma_0}^2}, \tag{31}$$

$$\sigma_{cc} = \sigma_0\sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{32}$$

Численно эти критические параметры при $\sigma_0 = 10$ МПа будут равны $x_{cc} = 0,637$ мм, $\sigma_{cc} = 8,165$ МПа.

На рис. 4 сопоставлены кривые, относящиеся как к исходной теории А. Гриффитса, так и ее модификации по Я. Френкелю при $\sigma_0 = 10$ МПа.

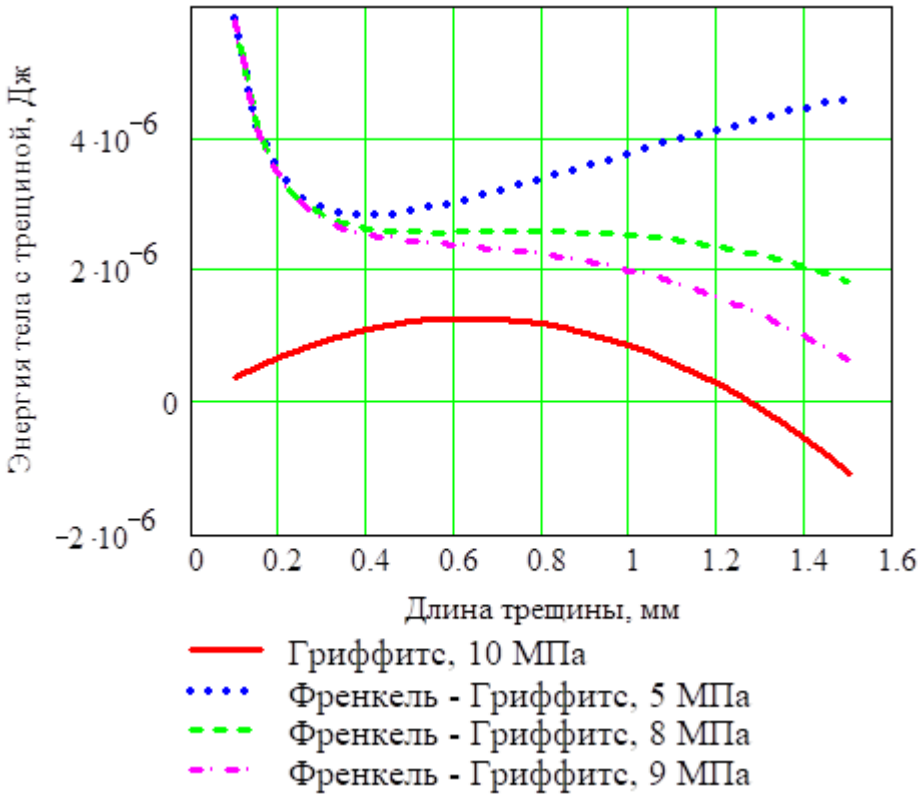


Рис. 4: Семейство кривых уравнения (30) на фоне классической кривой А. Гриффитса

Отметим, что в данном случае критическое напряжение составляет $\sqrt{2/3}$ напряжения по теории А. Гриффитса.

4. Обсуждение полученных результатов

Последний (третий) член уравнения (1) представляет особый интерес. Его можно, с точностью до множителя, интерпретировать как работу, совершаемую силой F при растяжении стержня длиной δ и площадью поперечного сечения bx, или как работу раскрытия трещины. Тем самым Я. И. Френкелем осуществлена попытка, на модельном уровне, связать воедино силовой и локально деформационный подход теории разрушения.

Существенно, что использование идей Я. И. Френкеля позволило объяснить существование не залечивающихся трещин как отвечающих локальному минимуму потенциальной энергии. Более того, критическое состояние к которому приближается трещина под действием внешних сил, определяется физическими свойствами твердого тела. Входящий в уравнения (26) и (27) параметр D, имеет размерность работы. Поэтому третий член уравнения (23) можно рассматривать как работу разрыва межатомных связей, отнесенную к единице длины трещины. Следовательно, упругая энергия должна затрачиваться как на разрыв связей, так и на образование поверхностного натяжения.

Классическое решение А. Гриффитса (22) приводит к бесконечной прочности при нулевой длине трещины. Я. И. Френкель в своей работе [1] указал путь решения этой проблемы — модернизация последнего члена в (1) или в (23) посредством использования в качестве этого члена произведения линейной и экспоненциальной функции. В этом случае уравнение (23) принимает следующий вид

$$U = -\frac{\pi b \sigma^2 x^2}{E} + 4\gamma b x + S x b \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \tag{33}$$

где параметр S можно рассматривать в качестве относительной работы разрыва межатомных связей. На рис. 5 показано семейство кривых, построенных по уравнению (33) при $S = 500$ Н/м, $\gamma = 5$ Н/м, $\delta = 1$ мм и $b = 1$ мм. Параметром семейства служит напряжение σ.

Рис. 5 определенно показывает наличие потенциального барьера между трещиной нулевой и конечной длины. Следовательно, природа должна иметь механизмы преодоления этого барьера. Видно также, что и бесконечность при нулевой длине отсутствует.

Нам не удалось получить аналитические выражения для критической длины трещины и для критического напряжения типа (26) и (27). Однако численное решение системы уравнений типа (24) и (25)

$$-\frac{2\pi\sigma^2 x}{E} + 4\gamma + S\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) = 0, \tag{34}$$

$$-\frac{2\pi\sigma^2}{E} - \frac{S}{\delta}\left(2 - \frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) = 0, \tag{35}$$

позволило получить численные значения для критической длины трещины x_{cf} и критического напряжения σ_{cf} : $x_{cf} = 6,9$ мм, $\sigma_{cf} = 6,27$ МПа.

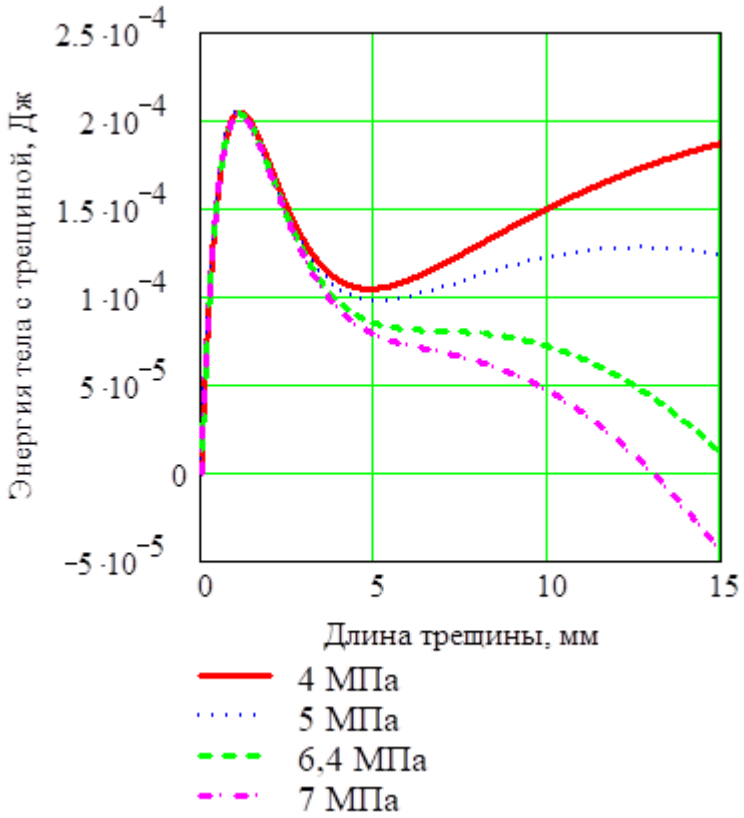


Рис. 5: Семейство кривых по уравнению (33)

Данная попытка модернизировать теорию А. Гриффитса на основе идей Я. И. Френкеля поставила ряд вопросов относительно интерпретации вновь введенных параметров, а также о допустимости использования постоянства такого параметра как поверхностная энергия. Полученные решения следует рассматривать как полученные в рамках сугубо модельных представлений. Возникает также вопрос о адекватности использованной модели твердого тела и ее ограничениях применительно к задачам механики разрушения.

5. Заключение

Ранее было замечено, что рис. 1 качественно не соответствует рис. 6 на стр. 1865 работы [1]. Из него следует, что критическое состояние разрушения достигается в результате уменьшения длины трещины. Скорее всего, этот рисунок сугубо качественный, и не является результатом расчетов. Но он совершенно явно демонстрирует наступление критического состояния как результат исчезновения локального минимума, что является основой современной теории катастроф. Поэтому к перечисленным в работе [6] предшественникам теории катастроф можно определенно причислить и Я. И. Френкеля, поскольку основные работы по современной теории катастроф относятся к 70-ым годам прошлого столетия.

Третий член в уравнении (1) предвосхитил появление в 60-х годах прошлого столетия деформационных критериев разрушения [12-15], базирующихся на понятии критического раскрытия трещины.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Френкель Я. И. Теория обратимых и необратимых трещин в твердых телах / Журнал технической физики, 1952, т. 22, № 11, С. 1857 – 1866.

2. Дроздовский Б. А., Фридман Я.Б. Влияние трещин на механические свойства конструкционных сталей / М.: Металлургиздат, 1960. – 260 с.

3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения - М.: Наука, 1974. – 640 с

4. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1921, Vol. 221, # 2, P. 163- 198. / В книге: Пестриков В. М., Морозов Е. М. Механика разрушения. Курс лекций. – СПб.: Профессия, 2012, Приложение 1, с. 435 – 461.

5. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения / М.: Мир, 1980. – 607 с.

6. Арнольд В. И. Теория катастроф / М.: Наука, 1990. – 128 с.

7. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике - М.: Мир, 1985. – 254 с.

8. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. В 2-х книгах. Кн.1 - М.: Мир, 1984. – 350 с. Кн. 2. М.: Мир, 1984. – 285 с.

9. Маркочев В.М. Теория катастроф и механика разрушения. / Проблемы прочности, 1985, № 7, С. 43-47.

10. Маркочев В.М. О роли энергии, запасенной при пластическом деформировании, в процессах разрушения / ФХММ, 1991, № 5, С. 53-56.

11. Маркочев В.М. Реологическая модель разрушающегося твердого тела / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2011, № 6, С. 44-47.

12. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.

13. Аверин С.И., Алымов М.И., Гнедовец А.Г. Трещиностойкость топливных таблеток твелов / Атомная энергия, 2011, т. 110, № 5, С. 295-297.

14. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения – М.: Наука, 1985. – 504 с.

15. Broek D. The Practical Use of Fracture Mechanics. – Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 1989.

REFERENCES

1. Frenkel Y. 1952, "Theory of reversible and irreversible cracks in solids", *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki*, is. 22, no. 11, pp. 1857–1866.

2. Drozdovskij B. A., Fridman YA. B. 1960, "Influence of cracks on the mechanical properties of structural steels", 260 p.

3. Cherepanov G.P. 1974, *Mechanics of brittle fracture*, Nauka, Moscow.

4. Griffith A. A. 1921, "The phenomena of rupture and flow in solids", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.* Vol. 221, no. 2, pp. 163–198.

5. Poston T. Styuart I. 1980, "Catastrophe theory and its applications", 607 p.

6. Arnold V. I. 1990, "Catastrophe theory", 128 p.

7. Thompson J.M.T. 1982, *Instabilites and Catastrophes in Science and Engineerpoing*, John Wiley & Sons, NY.

8. Gilmore R. 1981, *Catastrophe Theore for Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, NY.

9. Markochev V.M. 1985, “Catastrophe theory and fracture mechanics”, *Problemy prochnosti*, no 7, pp. 43-47.

10. Markochev V.M, 1991, “ On the role of the energy stored during plastic defor-mation, in failure, *“Physico-chemical mechanics of materials”*, no 5, pp. 53-56.

11. Markochev V.M. 2011, “The rheological model of the failing of a solid body”, *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, no 6, pp. 44-47.

12. Panasyuk V.V. 1968, *Limit equilibrium of brittle bodies with cracks*, Nauk. Dumka, Kiev.

13. Averin S.I., Alymov M.I., Gnedovech A.G. 2011, “Crack resistance of fuel pel-lets in fuel elements”, *Atomic Energy.* Vol. 110. no. 5. pp.360-363.

14. Parton V.Z., Morozov E.M. 1985, *Mechanics of elastic-plastic fracture*, Nauka, Moscow.

15. Broek D. 1989, *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 531.8 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-390-412

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ И ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ В ЭКСТРЕМАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ЗОНАХ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ[1]

Н. А. Махутов[2], М. М. Гаденин[3], Д. О. Резников[4], Д. А. Неганов[5]

Аннотация

Основой анализа характеристик прочности, ресурса живучести и безопасности элементов машин и конструкций в штатных и аварийных ситуациях являются уравнения и критерии линейной и нелинейной механики деформирования и разрушения. Они входят в нормы прочности и используются как при проектировании, так при изготовлении и эксплуатации оборудования. В статье показано, что результаты исследований прочности, ресурса и живучести являются базовой составляющей создания основ механики катастроф и рисков в техногенной сфере, новых принципов, технологий и технических комплексов, обеспечивающих их безопасную эксплуатацию и позволяющих научно обоснованно предотвращать возникновение аварийных и катастрофических ситуаций, а также минимизировать возможные ущербы при их возникновении. При этом инструментом обеспечения условий безопасной работы является диагностика текущих параметров состояния материала и определение характеристик напряженно-деформированных состояний в наиболее нагруженных зонах анализируемой технической системы. Решение задачи оценки прочности и ресурса в подобных условиях включает в себя создание обобщенных математических и физических моделей сложных технологических, рабочих и аварийных процессов в

[1]Работа выполнена за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00776-П).

[2]Махутов Николай Андреевич, член-корреспондент Российской академии наук, главный научный сотрудник Института машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, kei51@mail.ru

[3]Гаденин Михаил Матвеевич, ведущий научный сотрудник Института машиноведенияим. А. А. Благонравова РАН, safety@imash.ru

[4]Резников Дмитрий Олегович, ведущий научный сотрудник Института машиноведенияим. А. А. Благонравова РАН, mibsts@mail.ru

[5]Неганов Дмитрий Александрович, директор Центра, НИИ «Транснефть», neganovda@niitnn.transneft.ru

технических системах для анализа условий перехода от штатных состояний к условиям возникновения и развития аварий и катастроф. Такие модели характеризуются многоуровневой структурой, затрагивающей глобальные, локальные и объектовые аспекты безопасности. Эти разработки имеют междисциплинарный характер и лежат в основе нормирования безопасности и рисков.

Ключевые слова: Напряженно-деформированные состояния, предельные состояния, прочность, ресурс, живучесть, разрушение, аварии, катастрофы, диагностика, техногенная безопасность, риск, механика катастроф.

Библиография: 17 название.

ANALYSIS OF STRESS-STRAIN AND LIMIT STATES IN EXTREMELY LOADED ZONES OF MACHINES AND CONSTRUCTIONS

N. A. Makhutov, M. M. Gadenin, D. O. Reznikov, D. A. Neganov

Abstract

The basis for the analysis of such characteristics as strength, lifeendurance and safety of machine elements and structures in standard and emergency situations are the equations and criteria for linear and nonlinear mechanics of deformation and fracture. They are a part of the strength standards and are used both in the design and in the manufacture and operation of equipment. The article shows that the results of strength, resource and survivability studies are the basic component to create the foundations of the catastrophes and risks mechanics in the technogenic sphere, new principles, technologies and technical complexes that ensure their safe operation and let in a theoretically grounded manner prevent the appearance of emergency and catastrophic situations, and minimize possible damage when they occur. At the same time, the instrument for ensuring safe working conditions is to diagnose the current parameters of the material state and to determine the characteristics of stress-strain states in the most stressed zones of the analyzed technical system. The solution of the problem of strength and resource evaluation in such conditions includes the creation of generalized mathematical and physical models of complex technological, working and emergency processes in technical systems for analyzing the transition conditions from regular states to the conditions of occurrence and development of accidents and catastrophes. Such models are characterized by a multilevel structure that affects global, local and object security aspects. The developments are interdisciplinary in nature and underlie the safety and risks rationing.

Keywords: Stress-strain states, limiting states, strength, resource, survivability, fracture, accidents, disasters, diagnostics, technogenic safety, risk, mechanics of disasters.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение (Постановка проблемы)

Научно-методическое обоснование безопасной эксплуатации сложных технических систем в пределах их срока службы от 100÷1000 секунд (двигатели ракетно-космических комплексов) до 50-100 лет (ядерные реакторы, теплоэнергоустановки, гидротурбины, транспортные системы, инженерные сооружения) требует детального анализа кинетики характеристик механических свойста материала и условий эксплуатационного нагружения для установления реальных параметров прочности, ресурса и живучести, которые характеризуют переход этих сложных технических систем к предельному состоянию, угрожающему объектам, персоналу, населению и окружающей среде [1-11]. Количественное обоснование условий возможности возникновения аварийных ситуаций должно быть выполнено не только для нормальных условий эксплуатации с максимально достижимым числом циклов нагружения, но и для экстремальных условий с ограниченным числом циклов [1-3, 12, 13].

В число базовых проблем обоснования расчетных характеристик в рамках теоретической и экспериментальной механики, механики деформирования и разрушения входят три главные:

- расчетно-экспериментальный анализ напряженно-деформированных состояний (σ, e) с учетом механических $P^{э}$, термических $Q^{э}_{t}$, аэрогидродинамических $Q^{э}_{ah}$ нагрузок; при этом напряжения $\sigma^{э}_{\max}$ и деформации $e^{э}_{\max}$ оказываются зависящими от эксплуатационного числа циклов нагружения $N^{э}$, времени $\tau^{э}$ и температуры $t^{э}$

$$\{\sigma^{э}_{\max}, e^{э}_{\max}\} = F_{э}\left\{P^{э}, Q^{э}_{t}, Q^{э}_{ah}, Q^{э}_{rc}, N^{э}, \tau^{э}, t^{э}\right\}; \tag{1}$$

- анализ закономерностей статического, динамического, циклического и длительного упругого и упругопластического деформирования для варьируемых в испытаниях частот f_{τ}, амплитуд напряжений $\sigma^{э}_{a}$ и деформаций $e^{э}_{a}$, температур $t^{э}$ и времени $\tau^{э}$

$$\{\sigma^{э}_{\max}, e^{э}_{\max}\} = F_{1э}\left\{f_{\tau}, \left(\sigma^{э}_{a}, e^{э}_{a}\right), t^{э}, \tau^{э}\right\}; \tag{2}$$

- анализ критериев и условий накопления повреждений $d^{и}$, а также циклической долговечности $N^{и}_{c}$, в испытаниях для стадий образования и развития трещин

$$\{d^{э}, N^{э}_{c}\} = F_{2э}\left\{f_{\tau}, \left(\sigma^{э}_{a}, e^{э}_{a}\right), t^{э}, \tau^{э}\right\} \tag{3}$$

Результаты экспериментальных и расчетных исследований на образцах, моделях и натурных конструкциях дают возможность определить запасы по напряжениям n_{σ}, деформациям n_{e}, числу циклов n_{N}, времени n_{τ}, воздействию внешней среды n_{Φ} и размеру трещин n_{l}

$$\{n_{\sigma}, n_{e}, n_{N}, n_{\tau}, n_{\Phi}, n_{l}\} = \left\{\frac{\sigma_{c}}{\sigma^{э}_{\max}}, \frac{e_{c}}{e^{э}_{\max}}, \frac{N_{c}}{N^{э}}, \frac{\tau_{c}}{\tau^{э}}, \frac{\Phi_{c}}{\Phi^{э}}\frac{l_{c}}{l^{э}}\right\}, \tag{4}$$

где индекс «c» относится к критической (предельной) величине соответствующей характеристики прочности, долговечности, трещиностойкости, а индекс «э» - к соответствующим величинам при эксплуатации.

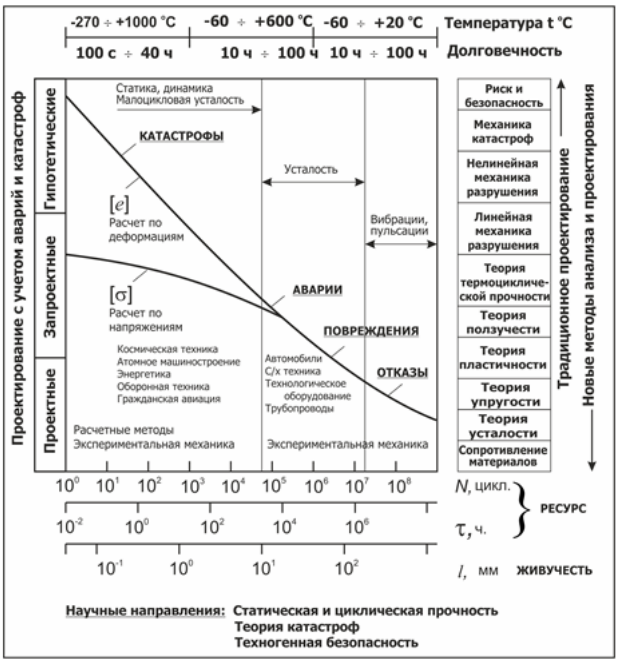


Рис. 1: Обобщенная диаграмма анализа прочности, ресурса, живучести и безопасности

Расчетно-экспериментальный анализ в соответствии с выражениями (1) – (4) является основой построения (рис. 1) обобщенных диаграмм прочности, ресурса (долговечности), живучести, термостойкости и хладостойкости на основе общих уравнений механики деформирования и разрушения (сопротивления материалов, теорий усталости, упругости, пластичности, ползучести, термоциклической прочности, линейной и нелинейной механики разрушения, механики катастроф, риска и безопасности).

2. Развитие и применение расчетных и экспериментальной методов

В соответствии с соотношениями (1)-(4) одной из важнейших задач при решении проблемы обоснования прочности, ресурса, живучести и безопасности работы функционирующих, строящихся и перспективных машин и конструкций является расчетно-экспериментальное определение реального напряженно-деформированного состояния (НДС) несущих элементов конструкций. На рис. 2 показана комплексная блок-схема решения проблем прочности, ресурса, живучести и безопасности таких потенциально опасных объектов техносферы, как атомные (АЭС), гидравлические (ГЭС) и тепловые (ТЭС) электростанции, ракетно-космические комплексы (РКК), летательные аппараты (ЛА), атомные подводные лодки (АПЛ), химические производства (ХП), магистральные трубопроводы (МТ). Эти проблемы охваты-



Рис. 2: Блок-схема анализа прочности, ресурса, живучести и безопасности машин и конструкций.

вают все стадии их жизненного цикла: проектирование, изготовление, испытания и эксплуатацию. При этом требования по безопасности, ресурсу и прочности закладываются на стадии проектирования, отслеживаются на стадии изготовления и испытаний, диагностируются, поддерживаются или повышаются на стадии эксплуатации [1-11, 14, 15].

Проектирование включает в себя разработку и согласование технического задания (ТЗ) с введением базовых требований по прочности, ресурсу и безопасности. Сама разработка проекта состоит из ряда стадий (принципиальные схемы, предэскизный, технический и рабочий проекты). На этой стадии разрабатываются физические и математические модели с применением быстроразвивающихся алгоритмов, программ и компьютерной техники и систем традиционного автоматизированного проектирования (САПР) и цифрового проектирования. На стадии проектирования проводится анализ прочности на основании нормативных и дополнительных расчетов и обосновывается исходный ресурс. Основными критериями и характеристиками таких расчетов являются: эксплуатационные нагрузки P, температуры t, время τ, числа циклов N, частоты f, характеристики сопротивления материалов $R(\sigma_{\text{т}}, \sigma_{\text{в}}, \sigma_{\text{дп}})$, деформации e, дефекты l. В качестве допустимых с использованием соотношений (1)-(4) обосновываются характеристики $[N]$, $[P]$, $[l]$ с заданными величинами запасов n. По комплексу расчетных и эксплуатационных иссле-

дований составляется заключение о прочности, долговечности, ресурсе, живучести и безопасности рассматриваемых элементов машин и конструкций.

На стадии изготовления решаются вопросы выбора, обоснования и развития технологий материалов и контроля. Для изготовленных элементов машин и конструкций устанавливаются характеристики исходного состояния: фактические механические свойства и их отклонения от технических требований, уровень реальной дефектности несущих узлов, геометрические формы и их отклонения. Уточненные данные контроля заносятся в соответствующие технические паспорта и в банки данных. Все эти характеристики являются исходной информацией о параметрах прочности - $R_m(\sigma_{\text{в}})$, $R_f(S_{\text{от}})$, деформативности - A (удлинений) и Z (поперечного сужения ψ), деформаций - e, температуры - t, скорости роста трещин - dl/dN (или $dl/d\tau$.). На их основе проводится уточнение проектных характеристик прочности, долговечности, ресурса, живучести и безопасности.

Стадия испытаний включают различные их виды и комбинации: автономные испытания ($АИ$) узлов, стендовые испытания узлов, агрегатов и изделий, огневые и имитационные испытания. Завершающими оказываются штатные испытания головных образцов с воспроизведением реальных эксплуатационных и экстремальных режимов.

С использование тех же критериев, что и для стадий проектирования и изготовления, проводится дополнительное уточнение допустимых предельных нагрузок $[P]$ и долговечности $[N]$. На этой основе составляется заключение о ресурсе, методах последующего контроля, назначаются уточненные режимы эксплуатации.

Для стадии ввода в эксплуатацию осуществляются предпусковые и пусковые испытания, физический пуск (с корректировкой всех систем поддержания эксплуатации) и ввод в эксплуатацию. При этом назначается и уточняется система штатной диагностики основных параметров: нагрузок P, температур t, циклов N, частот f, дефектов l с использованием соответствующих систем диагностики и мониторинга состояния). Для объектов высокой потенциальной опасности, разрабатываются, создаются и применяются специальные методы и системы оперативной диагностики аварийных ситуаций - с использованием тензо-, термометрии, акустической эмиссии ($АЭ$), термовидения ($ТВ$), импульсной голографии ($ИМГОЛ$) и др. Получаемые при этом данные могут давать исходную информацию для включения систем автоматической защиты ($САЗ$) и систем автоматической оперативной защиты ($САОЗ$).

На начальной стадии эксплуатации должна быть получена важнейшая информация по подтверждению или корректировке проектных решений о прочности, долговечности, ресурсе, живучести и безопасности. По мере исчерпания уточненного проектного ресурса проводится оценка остаточного ресурса безопасной эксплуатации. Для согласования всей информации для всех стадий жизненного цикла объекта должны использоваться унифицированные критерии и расчетные программы. При этом данные о ресурсе могут выводиться на блочные щиты управления ($БЩУ$) и бортовые счетчики ре-

сурса ($БСР$) – n_i/N.

Для решения указанных задач наряду с современными расчетными методами успешно применяются эффективные методы экспериментальной механики на всех основных этапах создания машин и конструкций (см. рис. 2), включая стадии проектирования, испытания и доводки опытных образцов, и, особенно, в реальных условиях эксплуатации [3-8, 12]. В ряде случаев при сложностях в проведении прямых экспериментальных исследований уникальных объектов применяются комбинированные расчетно-экспериментальные методы, сочетающие преимущества каждого из используемых методов на различных этапах исследований, что обеспечивает получение необходимой информации по напряженно-деформированным состояниям, в том числе в зонах, недоступных для измерений.

3. Накопление эксплуатационных повреждений и предельные состояния

Построение поверхностей предельных состояний и включение в перечисленные выше системы измерений универсальных и специальных компьютеризированных систем и соответствующих программных продуктов позволяет не только восстанавливать историю реального эксплуатационного нагружения $P(\tau)$, $\sigma(\tau)$, $e(\tau)$, но и оценивать степень накопления повреждений d, развития трещин l_i, исчерпывания ресурса и уровень показателей надежности [2, 3, 12, 14-17].

Наличие рассмотренной выше расчетно-экспериментальной информации об усилиях P, температурах t, напряжениях σ и деформациях e, а также критериальных величин сопротивления деформациям и разрушению соответствующих конструкционных материалов является основой для построения предельных кривых

$$P_c = \left\{ (\sigma_{\text{пр}}, e_{\text{пр}})_{\max k}, t, \tau, N \right\}, \tag{5}$$

где P_c – критическое (предельное) сочетание механических P_m, тепловых P_t и других типов усилий для различных режимов нагружения по времени τ, числу циклов N, температуре t.

Величины P_c, как правило, устанавливаются по критериальным величинам местных (приведенных) напряжений $(\sigma_{\text{пр}})_{max k}$ или деформаций $(e_{\text{пр}})_{max k}$. Для этого используют уравнения:

– кривых изотермической усталости (мало- или многоцикловой) для соответствующих материалов

$$\left\{ (\sigma_{\text{пр}})_{\max k}, \left(e_{\text{пр}}\right)_{\max k} \right\}_c = f_N \left\{ \frac{N, \sigma_{\text{в}}, \psi_{\text{к}}, S_{\text{к}}}{\sigma_{\text{т}}, m} \right\}, \tag{6}$$

где $\sigma_{\text{в}}$– предел прочности, $\sigma_{\text{т}}$– предел текучести, $S_{\text{к}}$ – сопротивление отрыву, $\psi_{\text{к}}$– относительное сужение в шейке образца при статическом разрыве, m – показатель упрочнения в упругопластической области;

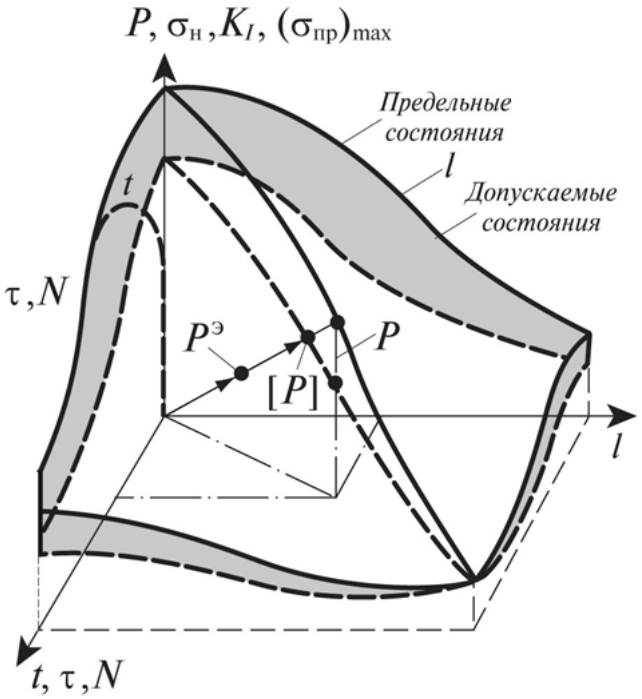


Рис. 3: Схема предельных и допускаемых состояний при анализе прочности и ресурса

– кривых длительной изотермической прочности

$$\left\{(\sigma_{\text{пр}})_{\max k}, (e_{\text{пр}})_{\max k}\right\}_c = f_\tau \left\{\frac{\tau, \sigma_{\text{в}}, \psi_{\text{к}}, S_{\text{к}}}{\sigma_{\text{т}}, m}\right\}, \tag{7}$$

– кривых статической прочности при варьировании температур t

$$\left\{(\sigma_{\text{пр}})_{\max k}, (e_{\text{пр}})_{\max k}\right\}_c = f_t \left\{\frac{t, \sigma_{\text{в}}, \psi_{\text{к}}, S_{\text{к}}}{\sigma_{\text{т}}, m}\right\}. \tag{8}$$

Кривые, описываемые уравнениями (6) и (7) для металлических конструкционных материалов, как правило, имеют (рис. 3) монотонный вид: при увеличении N и τ предельные значения разрушающих (критических) напряжений и деформаций уменьшаются. Температурные зависимости критических напряжений и деформаций (8) могут иметь в области низких температур t немонотонный характер: для радиационно-охрупченных или хладноломких состояний металла в этом случае прочность и пластичность могут снижаться.

По предельным кривым (6) – (8) для заданного i-режима, определенного величинами $\left\{(\sigma_{\text{пр}})_{\max k}, (e_{\text{пр}})_{\max k}\right\}_i$, устанавливают предельные (критические) величины N_{ci}, τ_{ci}, t_{ci}, Φ_{ci}. Если для i-режима заданы значения N_i, τ_i, t_i, Φ_i, то с использованием кривых усталости, трещиностойкости, длительной прочности и стойкости к внешним воздействиям можно оценить величины

накопленых повреждений

$$\{d_i\} = \left\{ \left(\frac{N_i}{N_{ci}} \right), \left(\frac{\tau_i}{\tau_{ci}} \right), \left(\frac{t_i}{t_{ci}} \right), \left(\frac{\Phi_i}{\Phi_{ci}} \right) \right\}. \tag{9}$$

Если общее число рассматриваемых режимов равно k, то суммарное повреждение на основе гипотезы линейного суммирования повреждений можно определять с использованием выражения (9), как сумму

$$d_\Sigma = \sum_i^k \{d_i\} \leqslant 1. \tag{10}$$

Вместе с этим, для случаев выраженного циклического упругопластического деформирования выражения (9) и (10) можно трансформировать, приняв положение, что определяющим фактором повреждений d_i является накопление циклических повреждений N_i/N_{ci}, а факторы t_i, τ_i, и Φ_i сказываются на предельном числе циклов до разрушения. Тогда

$$d_\Sigma = \sum_i^k \{d_i\} = \sum_i^k \left\{ \frac{N_i}{N_{ci}} (\tau_i, t_i, \Phi_i) \right\} \leqslant 1. \tag{11}$$

При сложных, например, двухчастотных режимах нагружения (рис. 4) с варьируемыми отношениями амплитуд и частот циклических напряжений (деформаций) в развитие уравнений (9) - (11), когда для одночастотного малоциклового нагружения гипотеза линейного суммирования усталостных (от основного процесса малоциклового нагружения) d_f^I и длительных статических (квазистатических) d_s повреждений представляется в виде $d_\Sigma = d_f^I + d_S$, накопление повреждений для двухчастотного малоциклового мягкого нагружения может быть описано на основе линейного суммирования дополнительной составляющей усталостного повреждения d_f^{II} от наложенной высокочастотной амплитуды напряжения σ_2 (деформации e_{a2}) с составляющими усталостного d_f^I и длительного статического d_s повреждения, и тогда суммарное повреждение для двухчастотного режима $d - \Sigma$ может быть выражено следующим уравнением [3, 16, 17]

$$d_\Sigma = d_f^I + d_f^{II} + d_s \tag{12}$$

В этом случае усталостное повреждение d_f^I от полной амплитуды деформации $e_a = e_{a1} + e_{a2}$ за один цикл малоциклового нагружения по гипотезе линейного суммирования с использованием соответствующего уравнения кривой усталости определится как $d_f^I = 1/N(e_a, t, \tau)$, и с учетом факторов времени τ и числа наработанных циклов n составит

$$d_f^I = \int_0^{N_C} \frac{1}{N[e_a(n), t, \tau]} dn. \tag{13}$$

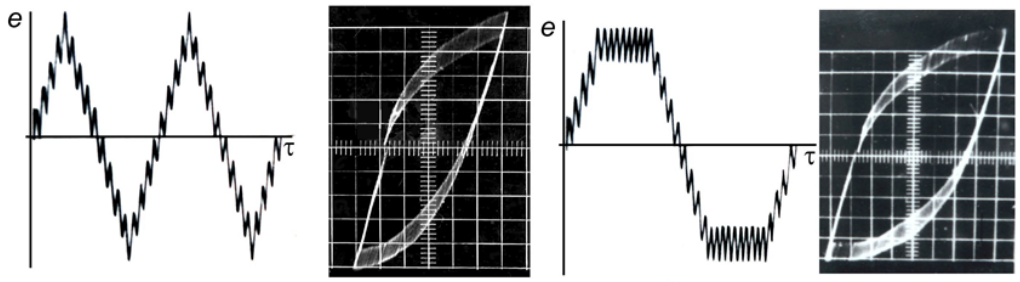


Рис. 4: Двухчастотные режимы и экспериментальные диаграммы циклического упругопластического деформирования.

Усталостная составляющая повреждения от высокочастотной деформации d_f^{II} при определении разрушающего (по высокой f_2 частоте нагружения) числа циклов N^* с учетом изменяющегося коэффициента асимметрии высокочастотных циклов $r(n^*)$ (в результате наложения двух гармонических процессов с существенно различными частотами $n = n^*(f_1/f_2)$ определится следующим образом

$$d_f^{II} = \int_0^{N_C^*} \frac{1}{N^* \left[e_{a2}, t, \tau, r\left(n^*\right)\right]} dn^*. \tag{14}$$

Как и рассматривалось выше, составляющая длительного статического повреждения d_s для соответствующих температуры и времени нагружения определится отношением односторонне накопленной необратимой деформации e_p к располагаемой (предельной) пластичности материала при длительном статическом нагружении

$$d_s = \int_0^{N_C} \frac{e_p}{e_C^{t\tau}} dn. \tag{15}$$

Тогда предельное состояние для условий двухчастотного малоциклового нагружения при разрушающем числе циклов N_c на основе линейного суммирования рассматриваемых составляющих повреждений согласно уравнениям (9) - (15) может быть определено как

$$d_\Sigma = \int_0^{N_C} \frac{1}{N[e_a(n), t, \tau]} dn + \int_0^{N_C^*} \frac{1}{N^* \left[e_{a2}, t, \tau, r\left(n^*\right)\right]} dn^* + \int_0^{N_C} \frac{e_p}{e_C^{t\tau}} dn. \tag{16}$$

На рис. 5, *а* показаны расчетные по уравнению (16) и соответствующие им экспериментальные данные по определению составляющих повреждения для мягкого режима высокотемпературного малоциклового двухчастотного

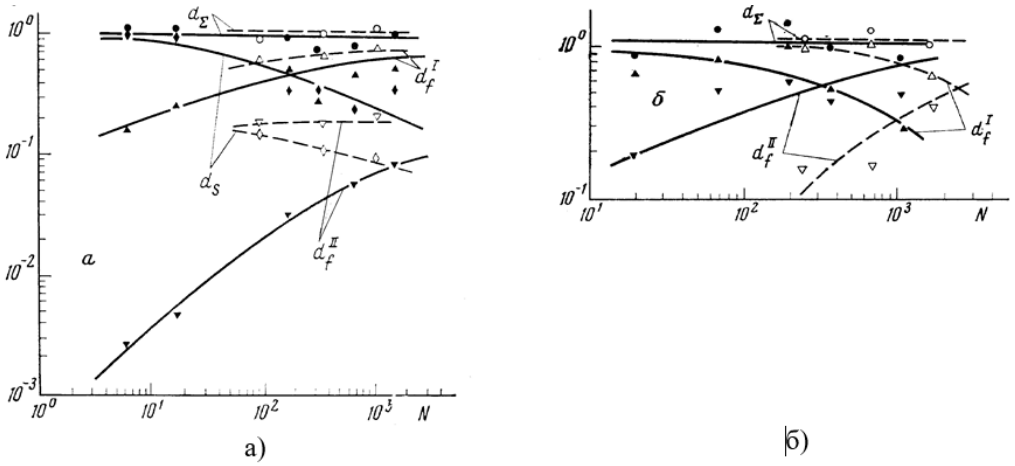


Рис. 5: Суммирование составляющих повреждения при мягком (а) и жестком (б) режимах двухчастотного нагружения для различных значений долговечностей и соотношений частот и амплитуд действующих напряжений (деформаций)

нагружения при наложении высокочастотных напряжений с двумя уровнями соотношений частот (соответственно темные точки и сплошные линии; светлые точки и пунктирные линии), а также для жесткого (рис. 5,*б*) двухчастотного нагружения с двумя уровнями амплитуд высокочастотных деформаций (соответственно темные точки и сплошные линии; светлые точки и пунктирные линии), из которых видно, что общее накопленное повреждение для этих условий, определенное на основе линейного суммирования его составляющих, близко к единице.

При этом следует иметь ввиду, что рассмотренное выше линейное суммирование усталостных и квазистатических составляющих повреждения при детальном анализе является нелинейным по числу циклов и времени нагружения, так как определяющие каждую из этих составляющих деформационные характеристики имеют в процессе нагружения сложную кинетику [12, 16, 17], нелинейным образом зависящую от числа циклов (циклическое упрочнение или разупрочнение материала в упругопластической области), а также от температуры и времени нагружения (температурно-временное изменение характеристик прочности и пластичности материала).

Для большинства машин и конструкций в процессе их работы в соответствии с уравнениями (1) и (11) характерно нарастание числа циклов и уровней эксплуатационного нагружения, и как следствие - накопление повреждений d_i и d_Σ, а также и интенсификация процессов циклического деформирования по выражению (2), исчерпание циклического ресурса по выражению (3), возникновение и развитие аварийных и катастрофических ситуаций при исчерпании запасов по выражению (4).

Для различных типов расчетных схем и расчетных случаев предусмотрены два уровня нормативов анализа прочности: обязательные нормы расчетов и испытаний и уточненные методики расчетов и испытаний.

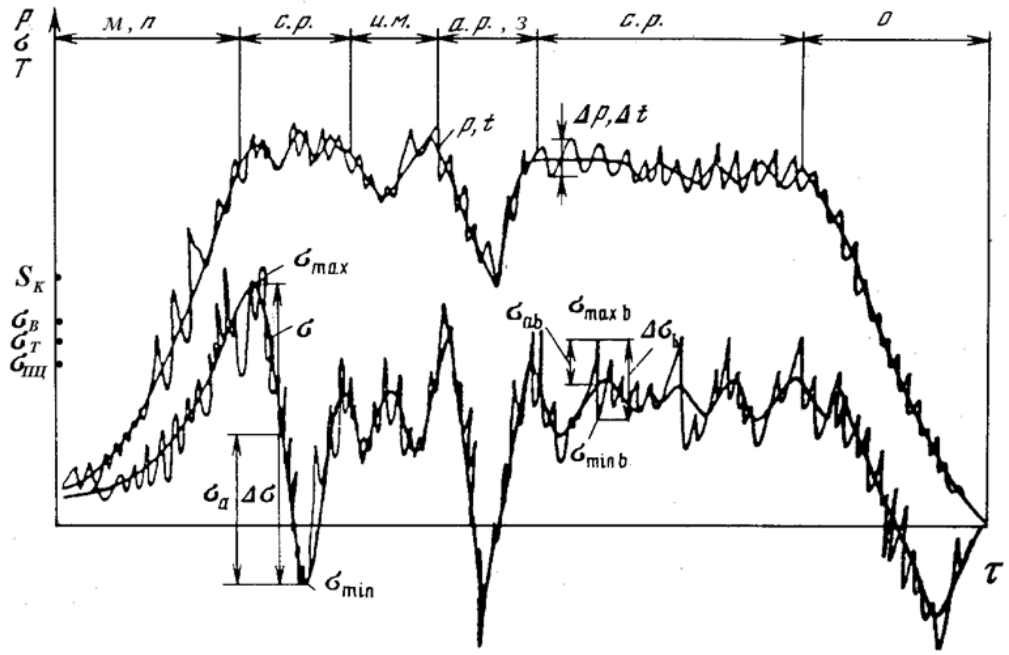


Рис. 6: Схема эксплуатационного нагружения и основные параметры эксплуатационных нагрузок

С учетом приведенных выше исходных параметров циклического нагружения машин и конструкций в штатных и аварийных режимах с общим временем эксплуатации τ э от $10^1 \div 10^2$секунд до $10^9 \div 10^{10}$ секунд можно выделить следующие области чисел циклов эксплуатационного нагружения (рис. 6):

$10^0 \div 10^1$ - экстремальные циклы (монтаж, запуск, испытания, аварийные режимы);

$10^2 \div 10^3$ - эксплуатационные циклы (выход на режим, регулирование мощности, срабатывание систем защиты);

$10^4 \div 10^5$ - эксплуатационные циклы (технологические циклы, регулирование рабочего процесса);

$10^6 \div 10^8$ - эксплуатационные циклы (технологические, транспортировочные циклы, изменения давления, изменения оборотов роторов);

$10^9 \div 10^{12}$- эксплуатационные циклы (вибрации, локальные пульсации, изменения температур и давлений).

Усталость конструкционных материалов и сварных соединений при числах циклов в диапазоне $10^0 \div 10^{12}$, которые имеют место при реальных условиях эксплуатации, можно охарактеризовать следующими шестью видами [2, 3]:

$10^0 \div 10^1$ - инфрамалоцикловое (декацикловое) динамическое, статическое и квазистатическое разрушение при аварийных или катастрофических ситуациях за счет первичных и вторичных повреждающих факторов (когда максимальные σ_{max} и амплитудные σ_a значения напряжений превосходят пределы

текучести $\sigma_{\text{т}}$ и прочности $\sigma_{\text{в}}$ и достигают сопротивления разрыву $S_{\text{к}}$ в макрообъемах);
$10^1 \div 10^3$ - малоцикловое (гектоцикловое) квазистатическое или усталостное разрушение при наличии больших микропластических деформаций в зоне разрушения на макроструктурном уровне (когда амплитуда напряжений $\sigma_a >> \sigma_{\text{т}}$);
$10^3 \div 10^5$ - малоцикловое (килоцикловое) усталостное разрушение при наличии относительно малых макропластических деформаций в зоне разрушения на макроструктурном уровне (когда $\sigma_{пц} \leq \sigma_a \leq \sigma_{\text{т}}$, $\sigma_{\text{пц}}$ - предел пропорциональности);
$10^5 \div 10^8$ - классическое многоцикловое (мегацикловое) усталостное разрушение при наличии микропластических деформаций в микро- и макрообъемах вблизи зоны разрушения (когда $\sigma_a \leq \sigma_{\text{пц}}$);
$10^8 \div 10^9$- усталостное (гигацикловое) разрушение на сверхвысоких базах (числах циклов) при наличии микропластических деформаций в микрообъемах вблизи зоны разрушения ($\sigma_a < \sigma_{\text{пц}}$);
$10^{10} \div 10^{12}$- гиперусталостное (терацикловое) разрушение на супервысоких базах при формировании разрушения на макроструктурном уровне ($\sigma_a << \sigma_{\text{пц}}$).

По данным рис. 6 могут быть установлены следующие расчетные значения:

1. механическая, инерционная, электромагнитная нагрузка, давление p (p_{max}, p_a, Δp);

2. температура t (t_{max}, t_{min}, t_a, Δt);

3. номинальные и местные напряжения σ (σ_{max}, σ_{min}, σ_a,) или деформации e (e_{max}, e_{min}, e_a).

При этом основные режимы эксплуатации включают в себя: монтаж ($м$), пуск ($п$) и гидроиспытания ($г.и.$), стационарные режимы ($с.р.$), изменение мощности ($и.м.$), аварийные режимы ($а.р.$), срабатывание защиты ($з$), вибрации (в), останов ($о$).

Наличие изменений давления Δp, изменения температур Δt и вибраций (v_p) обусловливает наличие высокочастотных амплитуд напряжений $\sigma_{ав}$. Это обстоятельство создает двухчастотные и многочастотные режимы нагружения с отношениями частот $f_a/f_{ав} = 10^1 \div 10^5$ и коэффициентом асимметрии $r_\sigma = \sigma_{min}/\sigma_{max} > 0$.

Диаграмма для обобщенной расчетной кривой усталости в координатах «e_a-N» и «σ_a-N» показана на рис. 7. На этом рисунке:

σ_{ai}, $(\sigma_{ав})_i$ - амплитуда основных и вибрационных напряжений для i-режима;

n_i, $(n_в)_i$ - число циклов для основного и вибрационного нагружений; $[\sigma_a^*]$, $[N]$ - допускаемые амплитуды напряжений и долговечность (число циклов);

$[\sigma_н]$ - допускаемые номинальные напряжения.

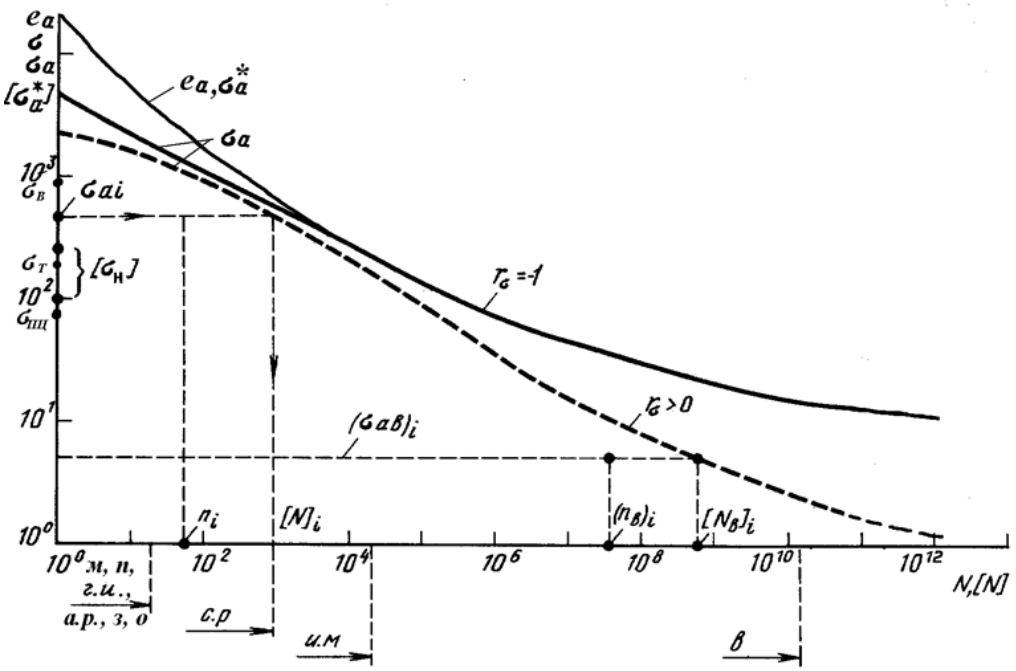


Рис. 7: Диаграмма для определения характеристик статической, циклической и длительной циклической прочности и ресурса.

Напряжения $[\sigma_и]$ можно определить на основе традиционного расчета исходной статической прочности по пределу прочности $\sigma_в$ и пределу текучести $\sigma_т$. При оценках остаточной статической прочности характеристики $\sigma_в$ и $\sigma_т$ должны быть назначены с учетом конкретных условий эксплуатации – влияния цикличности нагружения, температур и сред в соответствии с функционалами (1) - (3).

При оценках исходного и остаточного ресурса расчетная диаграмма статической и циклической прочности (рис. 7) строится по экспериментальным данным или по расчетным данным (по исходным характеристикам механических свойств с использованием степенных уравнений, обобщающих большую экспериментальную информацию и основные положения теории усталости). Эта же диаграмма используется и для оценки накопленных циклических повреждений, как правило, с применением линейного закона суммирования циклических повреждений. Для уточнения оценок остаточного ресурса используются модифицированные уравнения кривых циклической прочности, в которые вводятся расчетные характеристики, зависящие от времени и условий нагружения.

4. Сопротивление статическому и циклическому упругопластическому деформированию и разрушению.

Для описания процессов статического (k=0) и циклического ($k\geq1$) деформирования используются [2-8, 13, 16] уравнения состояния, связывающие напряжения σ, S и деформации e, ϵ по числу полуциклов нагружения k=$2N$ (рис. 8)

$$\sigma^{(0)} = \sigma_{\text{т}}(e^{(0)}/e_{\text{т}})^{m_0}, S^{(k)} = S_{\text{т}}(\varepsilon^{(k)}/\varepsilon_{\text{т}})^{m_k}, \tag{17}$$

где $\sigma^{(0)}$, $e^{(0)}$ – напряжения и деформации исходного нагружения (в нулевом полуцикле нагружения k=0);
$S^{(k)}$, $\epsilon^{(k)}$ – напряжения и деформации в k-ом полуцикле нагружения, отсчитываемые от точки разгрузки;
$\sigma_{\text{т}}$, $e_{\text{т}}$ – напряжения и деформации на уровне предела текучести в исходном нагружении (k=0);
$S_{\text{т}}$, $\epsilon_{\text{т}}$ – напряжения и деформации на уровне предела текучести при циклическом нагружении (k>0);
m_0, m_k – показатели упрочнения при исходном (k=0) и циклическом (k>0) нагружении.

По данным экспериментальных исследований $S_{\text{т}}\approx2\sigma_{\text{т}}$ и

$$m_k = m_0 f_k\left\{e^{(0)}, m_0, k\right\}. \tag{18}$$

Основу расчетных кривых усталости для широкого диапазона числа циклов N ($10^0\leq N\leq10^{12}$) составляют два положения:

- размахи упругопластических деформаций Δe состоят из размахов пластических деформаций Δe_p и размахов упругих деформаций Δe_e:

$$\Delta e = \Delta e_p \Delta e_e \tag{19}$$

- числа циклов N до разрушения при жестком нагружении связаны с размахами деформаций степенными уравнениями:

$$N^{m_p}\cdot\Delta e_p = C_p, N^{m_e}\cdot\Delta e_e = C_e, \tag{20}$$

где m_p, m_e, C_p, C_e – характеристики материала.

Для сталей с ростом предела прочности $\sigma_{\text{в}}$ от 400 до 1300 МПа показатели m_p и m_e увеличиваются ($0{,}5\leq m_p\leq0{,}65$), ($0{,}08\leq m_e\leq0{,}12$). Характеристики C_p и C_e зависят от статической пластичности $\psi_{\text{к}}$ ($\psi_{\text{к}i}\psi_c$ – относительное сужение в шейке при статическом разрыве) и от сопротивления разрыву $S_{\text{к}}$ в шейке:

$$C_p \cong \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\psi_{\text{к}}}, C_e \cong \frac{S_{\text{к}}}{1,15\cdot E}, \tag{21}$$

где E – модуль продольной упругости.

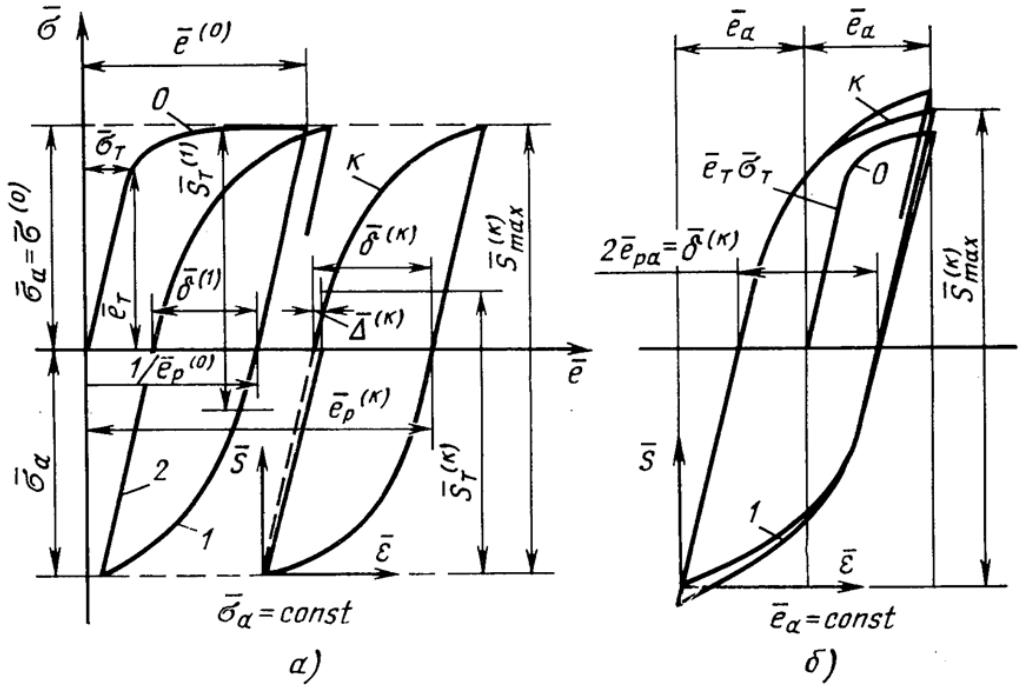


Рис. 8: Диаграммы циклического упругопластического деформирования при мягком (а) и жестком (б) режимах нагружения.

В нормативных расчетах прочности машин и конструкций в рассмотрение как правило вводятся условные упругие напряжения $\sigma_a^* = e_a \cdot E$. При числах циклов $N \geq 10^4$ условные упругие и фактические напряжения практически совпадают $\sigma_a^* \approx \sigma_a$ в силу малости пластических деформаций $\Delta e_p << \Delta e_e$ в этой области долговечностей. В области малого числа циклов ($10^1 \leq N \leq 10^3$) соотношение условных и фактических напряжений становится $\sigma_a << \sigma_a^*$.

Кривая исходного деформирования $f(\bar{\sigma}, \bar{e})$ в относительных координатах «$\bar{\sigma} - \bar{e}$» используется для определения максимальных местных напряжений $\bar{\sigma}_{\max}$ и деформаций $\bar{e}_{\max}$ в зонах или вне зон концентрации напряжений для исходного (нулевого) полуцикла нагружения. При этом используются относительные величины – напряжений $\bar{\sigma}$ ($\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_т$) и деформаций $\bar{e}$ ($\bar{e} = e/e_т$), исчисляемые в долях напряжений и деформаций от предела текучести. При отсутствии концентрации напряжений величины $\bar{\sigma}_{\max}$ и $\bar{e}_{\max}$ устанавливаются из решения соответствующей неупругой задачи. Для этого используются точные аналитические решения задач теории пластичности и ползучести, приближенные решения (методы упругих решений, дополнительных функций, переменных параметров упругости), численные решения методами конечных элементов и конечных разностей.

При наличии концентрации напряжений наиболее эффективно использование численных методов, а также приближенных решений (типа Нейбера), связывающих величины $\bar{\sigma}_{\max}$ и $\bar{e}_{\max}$ с номинальными напряжениями $\bar{\sigma}_i$ и деформациями $\bar{e}_i$ через коэффициенты концентрации напряжений K_σ и де-

формаций K_e для неупругой области

$$\bar{\sigma}_{\max} = \bar{\sigma}_i K_\sigma, \bar{e}_{\max} = \bar{e}_i K_e. \tag{22}$$

Коэффициенты концентрации K_σ и K_e функционально связываются с теоретическими коэффициентами концентрации напряжений α_σ, номинальными напряжениями $\bar{\sigma}_i$ и характеристиками упрочнения m для степенной аппроксимации диаграмм деформирования (или $G_т$ для линейной аппроксимации) в упругопластической области

$$K_\sigma, K_e = f\left(\bar{\sigma}_i, \alpha_\sigma, m\right). \tag{23}$$

При номинальных напряжениях $\bar{\sigma}_i \geq 1/\alpha_\sigma$ с ростом $\bar{\sigma}_i$ величины K_σ уменьшаются, а величины K_e растут. При циклическом упругопластическом деформировании в рамках деформационной теории в рассмотрение вводится обобщенная диаграмма циклического деформирования в координатах «$\bar{S} - \bar{\varepsilon}$» с началом координат в точке разгрузки в данном k-ом полуцикле (k=$2N$). Увеличение концентрации напряжений приближает режим нагружения в зоне концентрации к жесткому (с заданными амплитудами деформаций), обусловливая применимость деформационных теорий циклической пластичности. Для циклически разупрочняющегося материала кривая «$\bar{S} - \bar{\varepsilon}$» пройдет ниже, а для циклически упрочняющегося материала выше кривой «$2\bar{\sigma} - 2\bar{e}$». В первом случае величины K_e при циклическом деформировании будут выше, а во втором ниже, чем при исходном нагружении; величины коэффициентов концентрации напряжений K_σ при циклическом упрочнении получаются больше, чем при циклическом разупрочнении.

При установленных по уравнению (23) значениях K_σ и K_e по уравнению (22) определяются местные напряжения и деформации для исходного (статического) и циклического нагружении; эти данные позволяют охарактеризовать амплитуды местных упругопластических деформаций и соответствующие им значения коэффициентов асимметрии цикла. Для заданной формы цикла с использованием деформационных критериев разрушения определяется число циклов N_0 до образования макротрещины. При нормальных и умеренных температурах, когда температурно-временные эффекты не проявляются, разрушающие амплитуды деформаций $\bar{e}_a$ получаются выше, чем при возникновении статических и циклических деформаций ползучести при высоких температурах. Введение запасов по числу циклов и по разрушающим амплитудам деформаций позволяет построить кривые допускаемых амплитуд деформаций $[\bar{e}_a]$ и чисел циклов $[N_0]$. Для построения этих кривых в первом приближении можно использовать результаты базовых экспериментов при длительном статическом нагружении - предельные разрушающие напряжения $\bar{\sigma}_{вт}$ и пластичность $\bar{e}_{ст}$ (определяемую через относительное сужение $\psi_{вт}$). При этом следует учитывать, что изменение во времени величины $\bar{\sigma}_{вт}$ зависит от типа материала и степени его легирования (например, никелем, хромом, молибденом и другими элементами) в меньшей степени, чем величины $\bar{e}_{ст}$.

5. Трещиностойкость при циклическом нагружении

Долговечность (живучесть) N_p на стадии развития трещин при циклическом нагружении в соответствии с выражением (4) должна устанавливаться по кривым «l-N» роста трещин до критического размера по мере увеличения числа циклов N. Эти кривые получаются по данным о скоростях развития трещин dl/dN.

Скорости трещин dl/dN при малоцикловом нагружении следует определять через размахи коэффициентов интенсивности деформаций $\Delta\bar{K}_{Ie}$, в отличие от размахов коэффициентов интенсивности напряжений $\Delta\bar{K}_I$ для многоцикловой усталости, когда справедливы основные уравнения линейной механики разрушения. При этом уравнения состояния для статического и циклического нагружений входят в расчет значений $\Delta\bar{K}_{Ie}$ по величинам $\Delta\bar{K}_I$ при известных размерах дефектов (трещин) $l_{\text{д}}$ и номинальных напряжениях $\bar{\sigma}_i$

$$\Delta\bar{K}_{Ie} = f\left(\bar{\sigma}_{\text{н}}, l_{\text{д}}, m\right) = f\left(\Delta\bar{K}_I, \bar{\sigma}_{\text{н}}, m\right). \tag{24}$$

Уменьшение сопротивления упругопластическим деформациям и деформациям ползучести (за счет циклического разупрочнения, увеличения температур t и времени нагружения τ) приводит согласно (24) к увеличению $\Delta\bar{K}_{Ie}$ при заданных $\bar{\sigma}_{\text{н}}$ и $l_{\text{д}}$, росту скоростей развития трещин dl/dN и снижению долговечности N_p. Скорости распространения трещин dl/dN и их предельные размеры зависят от кратковременной или длительной статической пластичности. По данным расчета на стадии образования и развития трещин определяются соответственно долговечности до образования трещин N_0 и до окончательного разрушения N_p для заданного в эксплуатации номинального напряжения $\bar{\sigma}_i^{\text{э}}$, а введение запасов n_N по выражению (4) позволяет установить допускаемые числа циклов $[N_0]$ и $[N_p]$ для напряжений $\bar{\sigma}_i^{\text{э}}$.

Исключительно важным и принципиально сложным является вопрос о механике циклического разрушения на базах по числу циклов N от 10^0 до 10^{12} и по времени τ от 10^0 до 10^8 час. К настоящему времени выполнен существенный объем исследований по механике статического и циклического разрушения на базах 10^0 – 10^7 циклов и на временах кратковременного и длительного статического (10^0 – 10^5 час.) нагружения. В соответствии с уравнениями (1) - (11) на базе соответствующих исследований должна быть получена прямая экспериментальная информация как о средних значениях параметров диаграмм циклического и термоциклического разрушения, так и об их вариации. При этом с учетом выражения (11) в первом приближении можно ограничиться корреляционными связями этих параметров с базовыми характеристиками механических свойств на больших временных базах и решениями краевых задач линейной и нелинейной механики разрушения для коэффициентов интенсивности напряжений (K_I) и деформаций (K_{Ie})

$$\left\{\frac{dl}{dN}, \frac{dl}{d\tau}\right\} = F_l\left\{\ [e_c^\tau, \sigma_{\text{в}}^\tau, \sigma_{\text{в}}, e_c, \sigma_{-1}]\ \ (\Delta K_I, \Delta K_{Ie})\ \right\}. \tag{25}$$

На фоне статических и циклических термомеханических процессов длительного циклического деформирования и разрушения протекают сложные структурные превращения в металлах и изменения микромеханизмов накопления повреждений d и разрушения по выражениям (9) – (11), что порождает изменение форм кривых деформирования по уравнениям (17), кривых усталости по (19) – (21) и диаграмм разрушения по (25).

На основе рассмотренных выше обобщенных методов экспериментальной механики и механики деформирования и разрушения устанавливается система запасов в соответствии с выражением (4), и на этой базе дается заключение о прочности, ресурсе, живучести и безопасности эксплуатируемых в соответствующих условиях машин и конструкций.

6. Перспективные задачи анализа напряженно-деформированных и предельных состояний

Для экстремально нагруженных объектов ракетно-космической, атомной, термоядерной, авиационной техники в штатных и аварийных ситуациях принципиальное значение приобретают проблемы термосвязных задач [1-6]. В них для процессов статического, циклического и динамического упругопластического деформирования, накопления повреждений и разрушения, описываемых системой выражений (1) – (25), необходимо введение в анализ временных зависимостей максимальных локальных температур $t^{э}_{\max,e}(\tau)$ от локальных деформаций $e^{э}_{\max,t}(\tau)$, с последующим совместным решением прямых и обратных термодинамических задач с переменными источниками термовыделения за счет пластических деформаций в зонах экстремальной нагруженности.

Внутреннее тепловыделение $t^{э}_{\max,e}(\tau)$ в сочетании с внешним тепловым воздействием $t^{э}(\tau)$ изменяет сопротивление упругопластическим деформациям и повышает деформации $e^{э}_{\max,t}(\tau)$ и суммарные эксплуатационные деформации $e^{э}_{\max}(\tau)$. Это в свою очередь увеличивает температуры $t^{э}_{\max,e}(\tau)$.

$$e^{э}_{\max,t}(\tau) = F_e \left\{ e^{э}_{\max,t}(t^{э}(\tau)), t^{э}_{\max}(\tau) \, , t^{э}_{\max,e}(\tau) \right\}. \qquad (26)$$

Расчеты и эксперименты при высокочастотном (с частотами до 70 Гц) динамическом нагружении (при внешних изотермических условиях) на гладких образцах и образцах с трещинами показывали увеличение температур $t^{э}_{\max,e}(\tau)$ до $200 \div 1200^{o}$C и приводили к плавлению металла в вершине трещины.

В определенных средах с обогащенным содержанием кислорода и водорода становится возможным достижение двух принципиально новых предельных состояний [2, 3, 6-8]:

- полная потеря несущей способности из-за экстремально высоких температур $t^{э}_{\max,e}(\tau)$ и $t^{э}_{\max}(\tau)$;

- возгорание конструкционного материала.

7. Заключение

В связи с изложенным выше в число новых фундаментальных и прикладных расчетно-экспериментальных исследований войдет исследование напряженно-деформированных и предельных состояний с учетом штатных, аварийных и катастрофических условий эксплуатации потенциально опасных объектов новой техники.

Такой анализ, выполняемый совместно ИМАШ РАН, МГУ, МИФИ, «Фидесис» с применением универсальных алгоритмов и программ, компьютерной, голографической, термовизионной, акусто-эмиссионной техники, будет включать сложные кинетические зависимости типа (1) – (26) линейной и нелинейной механики деформирования, повреждения и разрушения в термосвязной постановке. При этом значительную роль будут играть [1-13, 16, 17] численные (прямые и обратные) решения огромного числа неклассических задач с постановкой специальных контрольных и тестовых экспериментов в лабораториях, на стендах и в натурных условиях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безопасность России Правовые, социально-экономические и научно технические аспекты. Фундаментальные и прикладные проблемы комплексной безопасности / Научный руководитель чл.-корр. РАН Н.А.Махутов. М.: МГОФ «Знание», 2017. - 992 с.

2. Махутов Н.А. Прочность и безопасность: фундаментальные и прикладные исследования. - Новосибирск: Наука. 2008. - 528 с.

3. Махутов Н. А. Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. В двух частях. Новосибирск: Наука, 2005. Часть 1: Критерии прочности и ресурса. – 494 с. Часть 2: Обоснование ресурса и безопасности. – 610 с.

4. Проблемы прочности и безопасности водо-водяных энергетических реакторов. / Махутов Н.А., Фролов К.В., Драгунов Ю.Г. и др. М.: Наука. 2008. – 446 с. - (Исследования напряжений и прочности ядерных реакторов).

5. Несущая способность парогенераторов водо-водяных энергетических реакторов / Махутов Н.А., Драгунов Ю.Г., Фролов К.В. и др. М.: Наука, 2003, 440 с. – (Серия «Исследования напряжений и прочности ядерных реакторов»)

6. Прочность и ресурс ЖРД / Махутов Н.А., Рачук В.С., Гаденин М.М. и др. М.: Наука, 2011. – 525 с. (Исследования напряжений и прочности ракетных двигателей)

7. Напряженно-деформированные состояния ЖРД / Махутов Н.А., Рачук В.С., Гаденин М.М. и др. М.: Наука, 2013. 646 с. (Исследования напряжений и прочности ракетных двигателей)

8. Локальные критерии прочности, ресурса и живучести авиационных конструкций / Н.А.Махутов, М.М.Гаденин, В.В.Москвичев и др. - Новосибирск: Наука, 2017. 600 с. (Исследования прочности, ресурса и безопасности летательных аппаратов)

9. Махутов Н.А. Безопасность и риски: системные исследования и разработки. Новосибирск: Наука. 2017. – 724 с.

10. Е.М.Морозов, В.А.Левин, А.В.Вершинин. Прочностной анализ. Фидесис в руках Инженера.М. ЛЕНАНД. 2015. – 408 с.

11. Левин В. А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. М.: Наука. Физматлит, 1999. - 223 с.

12. Гаденин М.М. Оценка влияния режимов нагружения на условия достижения предельных состояний и назначение запасов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2013, т. 79, № 10. С. 65-70.

13. Уравнения состояния при малоцикловом нагружении / Махутов Н.А., Гаденин М.М., Гохфельд Д.А. и др. Москва, Наука, 1981, 245 с.

14. Махутов Н.А., Гаденин М.М. Техногенная безопасность: Диагностика и мониторинг состояния потенциально опасного оборудования и рисков его эксплуатации / Федеральный справочник: Информационно-аналитическое издание. Т.26. М.: НП «Центр стратегического партнерства», 2012. – С. 307-314.

15. Гаденин М.М. Структура многоуровневого мониторинга параметров безопасности техносферы и окружающей среды // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. 2012, № 1. С. 93-102.

16. Гаденин М.М. Особенности развития деформаций и накопления повреждений при двухчастотном малоцикловом нагружении и повышенных температурах // Машиноведение. 1976, № 1, с. 69-77

17. Гаденин М.М. Исследование повреждаемости и долговечности при одно- и двухчастотных режимах нагружения на основе деформационных и энергетических подходов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017, т. 83, № 6. С. 44-52.

REFERENCES

1. 2017, *Bezopasnost' Rossii. Pravovye, socialno-ekonomicheskie i nauchno-tekhnicheskie aspekty. Fundamentalnye i prikladnye problem kompleksnoii*

bezopasnosti [Safety of Russia. Legal, social and economic and scientifically engineering aspects. Fundamental and application problems of integrated safety], MGOF "Znanie", Moscow, 992 p.

2. Makhutov N.A. 2008, *Prochnoct' i bezopasnost': fundamentalnye i prikladnye issledovaniya. [Strength and safety: fundamental and applied researches]*, Nauka, Novosibirsk, 528 p.

3. Makhutov N.A. 2005, *Konstruktsionnaya prochnost', resurs i tekhnogennaya bezopasnost', Chast' 1 "Kriterii prochnosti i resursa". Chast' 2 "Obosnovanie resursa i bezopasnosti" [Structural strength, resource and technogenic safety. Part 1: Criteria of strength and resource. Part 2: Justification of resource and safety.]*, Nauka, Novosibirsk, 494 p., 610 p.

4. Makhutov N.A., Frolov K.V., Dragunov Yu.G. 2008, *Problemy prochnosti i besopasnosti vodo-vodyanykh energeticheskikh reaktorov [Problems of strength and safety of water-moderated power reactors]*, Nauka, Moscow, 446 p.

5. Makhutov N.A., Dragunov Yu.G., Frolov K.V., 2003, *Nesushaya sposobnost' parogeneratorov vodo-vodyanykh energeticheskikh reaktorov [Steam plants carrying capacity of water-moderated power reactors]*, Nauka, Moscow, 440 p.

6. Makhutov N.A., Rachuk V.S., Gadenin M.M., 2011, *Prochnost' i resurs ZhRD [Strength and resource of liquid-fuel rocket engines]*, Nauka, Moscow, 525 p.

7. Makhutov N.A., Rachuk V.S., Gadenin M.M., 2013, *Napryazhenno-deformirovannye sostoyania ZhRD [Stress-strain states of liquid-fuel rocket engines]*, Nauka, Moscow, 646 p.

8. Makhutov N.A., Gadenin M.M., Moskvichov V.V., 2017, *Lokalnye kriterii prochnosti, resursa i zhivuchesti aviatsionnykh konstruktsii [Local criteria of strength, resource and survivability of aviation structures]*, Nauka, Novosibirsk, 600 p.

9. Makhutov N.A., 2017, *Bezopasnost' i riski: sistemnye issledovaniya i razrabotki [Safety and risks: system researches and developments]*, Nauka, Novosibirsk, 724 p.

10. Morozov E.M., Levin V.A., Vershinin A.V., 2015, *Prochnostnoii analiz. Fidesis v rukakh Inzhenera [Strength analysis. FIDESIS in the arms of the Engineer]*, LENAND, Moscow, 408 p.

11. Levin V.A., 1999, *Mnogokratnoe nalozhenie bolshikh deformatsii v uprugikh i vyazkouprugikh telakh [Multiple superposition of large deformations in elastic and elastico-viscous solids]*, Nauka. Fizmatlit, Moscow, 223 p.

12. Gadenin M.M., 2013, "Estimation of effect of loading regimes on conditions of limiting states reaching and assignment of margins", *Zavodskaya laboratoriya, Diagnostika materialov*, vol, 79, no. 10, pp. 65-70

13. Makhutov N.A., Gadenin M.M., Gokhfeld D.A., 1981, *Uravneniya sostoyaniya pri malotsiklovom nagruzhenii [State equations at a low cycle loading]*, Nauka, Moscow, 245 p.

14. Makhutov N.A., Gadenin M.M., 2012, "Technogenic safety: Diagnostics and monitoring of potentially dangerous equipment state and risks of its service", *Federalnyii spravochnik*, vol. 26, pp. 307-314

15. Gadenin M.M., 2012, "Structure of multilevel monitoring of technosphere safety and environment parametres", *Problemy bezopasnosti i chrezvychainykh situatsii*, no. 1, pp. 93-102

16. Gadenin M.M., 1976, "Peculiarities of strains evolution and damages accumulation of at two-frequency low cycle loading and heightened temperatures", *Mashinovedenie*, no. 1, pp. 69-77

17. Gadenin M.M., 2017, "Research of damageability and life-time at one- and two-frequency loading regimes on the basis of deformation and energy approaches", *Zavodskaya laboratoriya, Diagnostika materialov*, vol, 83, no. 6, pp. 44-52

Получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3, 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-413-422

РОСТ КОРОТКИХ ТРЕЩИН ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ. О РЕАЛИЗАЦИИ В ПАКЕТЕ ФИДЕСИС.

Е. М. Морозов[1]

Аннотация

Рассмотрен подход к описанию роста коротких трещин при циклическом нагружении. Обсуждается понятие термина короткая (малая) трещина. Приведены результаты решения конкретных задач.

В определённых случаях возникает разница в механическом поведении твёрдых тел при наличии короткой или длинной трещины в одном и том же месте детали. Рассмотрены некоторые эффекты, возникающие при циклическом нагружении во время роста начальной короткой трещины, и трансформации её в длинную. Рассмотрены малые (короткие) трещины в твёрдом теле. Дано определение короткой трещины. В некоторых случаях возникает разница в механическом поведении твёрдых тел при наличии короткой или длинной трещины в одном и том же месте детали. Рассмотрены некоторые эффекты, возникающие при циклическом нагружении во время роста начальной короткой трещины, и трансформации её в длинную. Актуальность проблемы малых трещин достаточно очевидна, но не вполне ясно, какие трещины считать малыми. Можно дать несколько определений малости трещины. Например, удобно отнести к малым трещинам те, которые отвечают нижнему пределу разрешающей способности дефектоскопической аппаратуры. Однако получаемые при этом абсолютные числа не связаны с процессом механического поведения тела с трещиной. Целесообразнее длину трещины сопоставлять с характерной шириной образца (детали) или же с диаметром пластической зоны у вершины трещины.

В условиях циклического нагружения поведение трещин в зоне концентрации также имеет свои особенности, которые выражаются в начальном ускорении трещины, а затем, по мере увеличения длины, её скорость падает. Среди рассмотренных видов коротких трещин можно выделить трещины, которые целиком умещаются в областях повышенных напряжений около надрезов. Такие трещины называют механически короткими. Длина таких трещин соизмерима с длиной трещин, определяющих пороговые коэффициенты интенсивности напряжений

[1]Морозов Евгений Михайлович, профессор кафедры прочности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, evgeny.morozof@gmail.com

в опытах по определению характеристик циклической трещиностойкости. Как видно из расчётов, механически короткая трещина сначала растёт быстро, но по мере выхода из области концентрации, достигает минимума, и затем снова возрастает, выходя из области концентрации. Далее трещина переходит в категорию длинных, следуя классической формуле Париса.

Ключевые слова: Короткая трещина, циклическое нагружение, классификация надрезов, скорость роста трещины.

Библиография: 15 название.

THE GROWTH OF SHORT CRACKS UNDER CYCLIC LOADING.

E. M. Morozov (Moscow)

Abstract

Considered small (short) crack in a solid body. In certain cases, there is a difference in the mechanical behavior of solid bodies in the presence of short or long cracks in the same place details. Discusses some of the effects arising from cyclic loading during the initial growth of short cracks, and transforming it into a long. The urgency of the problem of small cracks are fairly obvious, but it is not clear what the crack is considered small. It is possible to give several definitions of small cracks. For example, it is convenient to refer to the small cracks are those that meet the lower resolution limit of the flaw detection equipment. However, the resulting absolute sizes are not associated with the process of the mechanical behavior of body with crack. Better the crack length comparable with the characteristic width of the specimen (parts) or diameter of the plastic zone at the tip of the crack.

Under cyclic loading the behavior of cracks in the area of concentration also has its own characteristics, which are expressed in the initial acceleration of the crack, and then, with increasing length, her speed drops. Among the considered types of short cracks can be identified cracks that entirely fit in the areas of high stresses around notches. Such cracks are called mechanically short. The length of such cracks is comparable with the crack length, determining a threshold stress intensity factors in the experiments to determine the characteristics of cyclic crack resistance. As can be seen from the calculations, the mechanically short crack grows rapidly at first, but as the field of concentration, reaches a minimum and then increases again, leaving a region of concentration. Further, the crack goes into the category of long, following the classic formula of Paris.

Keywords: Short cracks, cyclic loading, classification of notches, the crack growth rate.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Актуальность проблемы малых трещин достаточно очевидна, но не вполне ясно, какие трещины считать малыми. Можно дать несколько определений малости трещины. Например, удобно отнести к малым трещинам те, которые отвечают нижнему пределу разрешающей способности дефектоскопической аппаратуры. Однако получаемые при этом абсолютные числа не связаны с процессом механического поведения тела с трещиной. Целесообразнее длину трещины сопоставлять с характерной шириной образца (детали) или же с диаметром пластической зоны у вершины трещины. Например, если диаметр пластической зоны не превышает 10% длины трещины, то трещина большая, и для расчёта критической нагрузки пригодна линейная механика разрушения. В противном случае трещина малая, и для расчёта критического состояния нужны методы нелинейной механики разрушения. Такой случай типичен при достаточно малых трещинах сравнительно с шириной образца. По-видимому, проблема малых трещин возникла в силу завышенных значений разрушающего напряжения (сравнительно с экспериментальным), которые даёт в этих случаях линейная механика разрушения.

2. Основная часть

Малой трещиной следовало бы называть такую, для которой закономерности зарождения трещины уже непригодны, а закономерности магистральной трещины ещё непригодны. Следовательно, по своим размерам длина этой трещины промежуточная между длиной (размером) области зарождения трещины и длиной трещины в континуальном смысле. Порядок длины такой малой трещины совпадает с диаметрами структурных элементов материала. Однако вопрос о наличии специфических критериев, определяющих поведение малой трещины в указанном смысле (и которые главным образом должны опираться на физическое металловедение) остаётся открытым, поскольку работы по этому вопросу нам неизвестны.

Если всё же попытаться оставаться в рамках механическо-континуального подхода, то расчёт методами нелинейной механики разрушения разрушающих напряжений при малых трещинах даёт результаты, близкие к экспериментальным [1]. При этом специальной проблемы малых трещин как таковой не возникает [2]. Тем не менее, можно выделить два аспекта, которые позволяют рассматривать малые трещины как объекты специального изучения, а именно: 1) установление области таких малых трещин, в пределах которой материал (образец) не чувствителен к наличию трещины -статическая разрушающая нагрузка при таких трещинах не снижается по сравнению с образцом без трещины; 2)установление эффектов, вносимых концентратором напряжений в случае, когда в его вершине имеется малая трещина. В этой ситуации малой трещиной можно назвать такую, которая целиком расположена в области повышенных (из-за концентратора) напряжений. При этом

высокий коэффициент концентрации напряжений приводит к высокому градиенту напряжений и, следовательно, трещина, начав двигаться из области высоких напряжений, тут же попадает в область пониженных напряжений, её рост замедляется, и она может остановиться.

В условиях циклического нагружения поведение трещин в зоне концентрации также имеет свои особенности, которые выражаются в начальном ускорении трещины, а затем, по мере увеличения длины, её скорость падает.

Таким образом, хотя установившегося определения малости трещины нет, тем не менее, можно предполагать, что малыми могут быть трещины сопоставимые, например, с размерами атомной решётки и тогда их можно назвать дислокационными трещинами. Если размеры трещины сопоставимы с размерами элементов структуры материала, тогда их можно назвать микроструктурными трещинами, если трещина имеет размеры соизмеримые с расстояниями между определёнными видами барьеров, то тогда такие трещины будут физически короткими трещинами [3, 4]. Наконец, если длина трещины такова, что коэффициент интенсивности напряжений располагается в припороговой области (т.е. в области K_{th}), то это уже механически короткая трещина. Далее рассмотрим только механически короткие трещины.

Классификация надрезов (*концентраторов*). Введём размеры поверхностного надреза – глубина D, радиус кривизны в глубине надреза ρ. Протяжённость надреза на поверхности достаточная, чтобы рассматривать плоскую задачу (поперёк надреза). В некоторых случаях можно ввести острый (трещиноподобный) надрез, который аналогичен трещине и, следовательно, возможно использовать параметры линейной механики разрушения. Тогда пороговый коэффициент ΔK_{th}можно выразить через предел выносливости образца с надрезом $\Delta\sigma_{RH}$ (в номинальных напряжениях) посредством зависимости [5, 6]

$$\Delta K_{th} = \Delta\sigma_{RH}\sqrt{\pi \cdot l} \cdot Y \tag{1}$$

где l– длина трещины, эквивалентная надрезу по своему влиянию на усталостную прочность; Y– поправочный коэффициент.

Если надрез тупой (следовательно, механику разрушения применять нельзя), то можно сказать, что предел выносливости, выраженный через максимальное напряжение у надреза, находится по пределу выносливости гладкого образца $\Delta\sigma_R$ с учётом коэффициента концентрации напряжений α_σ:

$$\Delta\sigma_{RH} = \frac{\Delta\sigma_R}{\alpha_\sigma} \tag{2}$$

Понятно, что между острым трещиноподобным надрезом и тупым надрезом должна быть граница в виде коэффициента концентрации напряжений α^*_σ. Кроме этого, разница будет зависеть и от размеров надреза. Поэтому введём три типа надрезов: тупые надрезы, трещиноподобные и короткие надрезы. На рис.1 даны области определения этих надрезов через относительные размеры. По оси абсцисс отложено D/a_o– относительная глубина, по оси ординат D/ρ – относительная острота. Ориентировочно граница между короткими надрезами и трещиноподобными установлена в виде $D/a_o \cong 3$. Граница

между трещиноподобными надрезами и тупыми может быть установлена на основе равенства пределов выносливости для этих надрезов по уравнениям (1) и (2):

$$\frac{\Delta\sigma_R}{\alpha_\sigma} = \frac{\Delta K_{th}}{\sqrt{\pi \cdot l} \cdot Y}$$

Для порогового коэффициента ΔK_{th} известна его связь с пределом выносливости гладкого образца[6]:

$$\Delta K_{th} = \Delta\sigma_R \sqrt{\pi \cdot a_o}$$

где a_o– эмпирическая длина трещины, служащая для определения порогового ΔK_{th}.

Кроме того, можно воспользоваться известной формулой для теоретического коэффициента концентрации напряжений Колосова-Инглиса:

$$\alpha_\sigma = 1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho}}.$$

Тогда находим

$$\frac{Y^2}{\alpha_\sigma^2} = \frac{a_o}{D}$$

или (звёздочка отмечает граничные значения)

$$\left(\frac{D}{a_o}\right)^* = \left(\frac{1 + 2 \cdot \sqrt{D/\rho}}{Y}\right)^2$$

По величине параметра формы надреза D/ρ граница между короткими и тупыми надрезами находится примерно на уровне $0{,}25$.

Для полукруглого надреза $D = \rho$, $Y = 1{,}12$ и $(D/a_o)^* = 7{,}17$. Учитывая, что размер a_o порядка долей миллиметра видим, что глубина трещиноподобного дефекта не очень велика.

$$D/a_o \; D/\rho \; D/a_o \; D/\rho$$

Приведённое деление надрезов имеет смысл, поскольку механизм наступления предела выносливости разный в этих случаях [7, 8, 9] . В трещиноподобных надрезах из его конца вырастает трещина, которая на уровне предела выносливости становится нераспространяющейся. Причём видно, что не столько важны условия инициирования трещины (поскольку надрез и без того вроде трещины), сколько условия наступления торможения и остановки трещины. Это находится в согласии с тем, что короткая трещина движется (при циклическом нагружении с данным размахом напряжений) до первой границы зерна (барьер). Её остановка перед барьером определяет предел выносливости на уровне строения материала.

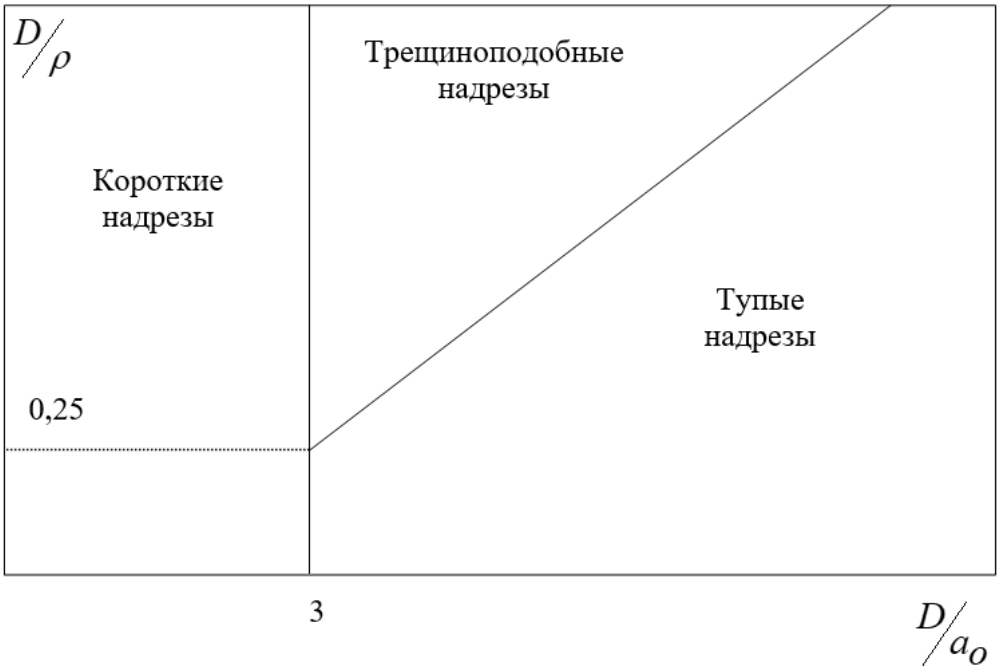


Рис. 1: Три области для надрезов в зависимости от размеров, остроты и свойств материалов.

Для тупых надрезов градиент мал, максимально он сопоставим с градиентом напряжений от изгиба. При этом наоборот существенны условия инициации (образования) трещины. Предел выносливости может быть определён по уравнению (2). Это уравнение даёт консервативную оценку, поскольку фактический коэффициент концентрации напряжений меньше теоретического. Тупые надрезы с уменьшением параметра размера D/a_o становятся нечувствительными к градиенту напряжений. Иными словами, короткий надрез находится в поле постоянного (по координате) напряжения и, следовательно, предел выносливости мало отличается от предела выносливости гладкого образца $\Delta\sigma_R$.

Все три типа надрезов фактически являются разновидностями дефектов поверхности тела.

Рост механически коротких трещин в области концентрации напряжений. Среди рассмотренных видов коротких трещин можно выделить трещины, которые целиком умещаются в областях повышенных напряжений около надрезов. Такие трещины называют механически короткими. Длина таких трещин соизмерима с длиной трещин, определяющих пороговые коэффициенты интенсивности напряжений в опытах по определению характеристик циклической трещиностойкости. Это означает, что для таких трещин можно пользоваться формулами для коэффициентов интенсивности напряжений, предполагающих справедливость использования механики сплошной среды. Поскольку трещина целиком находится в поле повышенных напряжений, то по ним и следует вычислять эти коэффициенты. При этом, можно ожидать,

что скорость роста этих трещин при циклическом нагружении будет выше, чем на уровне порогового коэффициента интенсивности напряжений.

Далее дадим расчёт поцикловой скорости распространения трещин в области концентрации напряжений. Все рассмотренные формулы представляют собой модернизации формулы Париса.

Прежде всего, отметим, что для длинных трещин используют формулу Париса, которая даёт линейную зависимость скорости от коэффициента интенсивности напряжений в логарифмических координатах. По сути, это обстоятельство можно использовать для отделения длинных трещин от коротких. Если в логарифмических координатах эта зависимость линейна, значит трещина длинная, если нет – то механически короткая.

В припороговой области короткая трещина может тормозиться и даже останавливаться. Вот, например, как выглядит график зависимости скорости от коэффициента интенсивности напряжений K при $K < K_{th}$.На рис. 2 приведён график, построенный по формуле (разность в скобках взята по модулю)

$$\frac{dl}{dN} \equiv v = C\,(K - K_{th})^m \tag{3}$$

Здесь C, m – постоянные материала (должны определяться экспериментально), $\Delta K = K_{\max}(1 - R)$ - размах коэффициента интенсивности напряжений. При коэффициенте асимметрии цикла $R = 0$ величина $K_{\max} = K = p\sqrt{\pi\, l}\, Y(l)$, где p – максимальное напряжение цикла.

Из формулы (3) и рис. 2 видно что, пороговый коэффициент интенсивности напряжений является границей, как для длинной трещины, так и для короткой.

Рассмотрим следующую задачу. В вертикальном направлении растягивается пластина с круговым отверстием радиуса a. Вдоль горизонтального диаметра симметрично влево и вправо от отверстия выходят трещины, каждая длиной l^*. Введём общую длину между концами трещин $2l = 2a + 2l^*$. Следовательно, принято, что отверстие принимается как бы частью трещины.

Скорость роста трещины при циклическом нагружении будем определять по формуле Париса, в которую введём приведённый коэффициент интенсивности напряжений

$$v = C\,(\Delta K_{np})^{\ m} \tag{4}$$

Здесь принято, что коэффициент интенсивности напряжений зависит не от брутто напряжения, как обычно, а от местного напряжения. Считая, что конец (вершина) трещины располагается в точке с координатой x, то эта координата одновременно равна половине длины трещины l. Тогда в выражение для коэффициента интенсивности напряжений $\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi l}$ войдёт напряжение, зависящее от длины трещины, и для задачи Кирша оно равно (Δp– размах приложенной нагрузки)

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta p}{2}\left(2 + \frac{a^2}{l^2} + 3\frac{a^4}{l^4}\right).$$

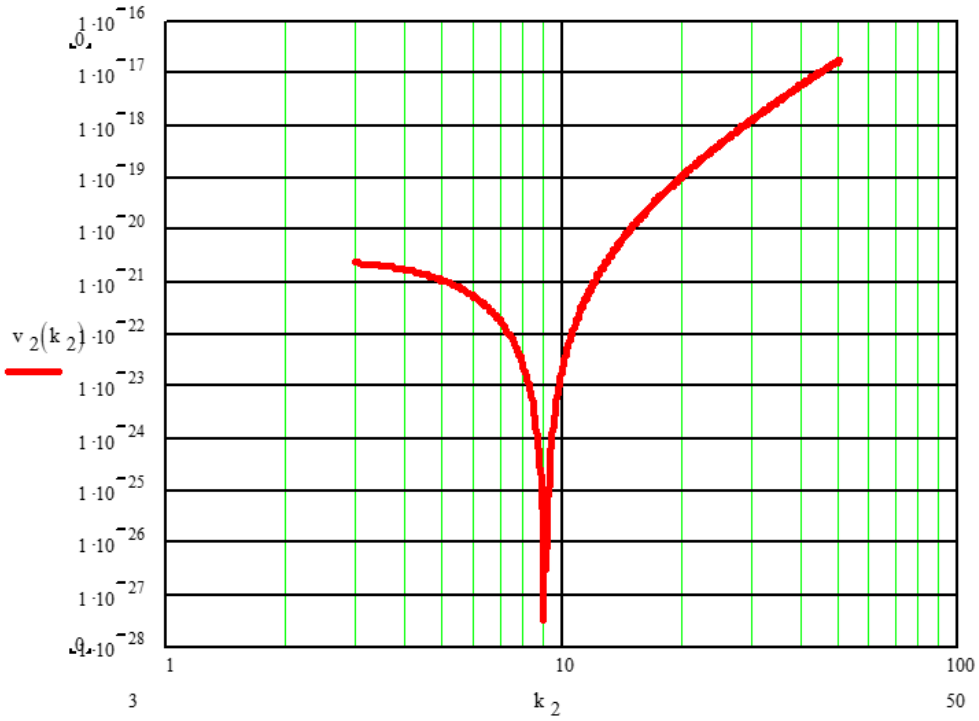


Рис. 2: Скорость роста трещины в припороговой области по видоизмененной формуле Париса (3) с учётом $K_{th} = 9\,\text{МПа}\cdot\sqrt{\text{м}}$.

Подставив это напряжение в формулу (4) получаем (введено обозначение $\bar{l} = \frac{l}{a}$)

$$v = C\left[\Delta p\left(1 + \frac{1}{2\bar{l}^2} + \frac{3}{2\bar{l}^4}\right)\sqrt{\pi\bar{l}a}\right]^m \tag{5}$$

Результат расчёта по этой формуле представлен на рис. 3. Для расчёта приняты следующие данные:

радиус отверстия $a = 0{,}01$ м, постоянная С=10^{-12}м/(МПам^{0,5})^m, показатель Париса $m = 3$, $\Delta p = 50$ МПа, цикл пульсирующий.

Обычно представляют скорость роста трещины в функции размаха коэффициента интенсивности напряжений. Рост коэффициента интенсивности обязан росту трещины, поэтому в данном примере, на графике вместо коэффициента интенсивности отложена длина трещины. Такой график отличится от традиционного на постоянный множитель.

3. Заключение

Как видно, механически короткая трещина сначала растёт быстро, но по мере выхода из области концентрации, достигает минимума, и затем снова возрастает, выходя из области концентрации. Далее трещина переходит в категорию длинных, следуя классической формуле Париса.

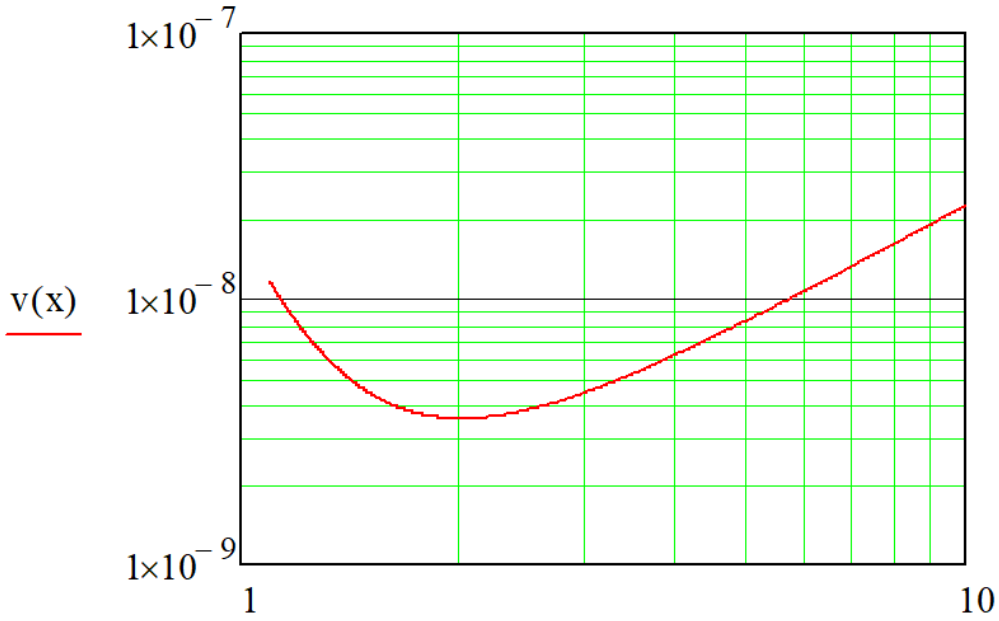


Рис. 3: Зависимость скорости роста трещины от длины трещины по формуле (5).

Промышленная реализации полученных результатов в постпроцессоре пакета Фидесис[10] даст возможность инженеру-прочнисту выбрать схему прочностного анализа. Отметим также, что данный подход реализуем и при учёте конечности деформаций, включая представление о трещине, как о физическом, а не математическом разрезе [11, 12, 13]. Программная реализация данного подхода потребует использование теории многократного наложения больших деформаций для учёта перераспределения деформаций и введения соответствующих критериев [14, 15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хажинский Г.М. Механика мелких трещин в расчётах прочности оборудования и трубопроводов. М.: Физматкнига, 2008. 256 с.

2. Морозов Е. М. Предельная прочность конструкций при наличии малых трещин // Сб.: Прочность материалов и элементов конструкций атомных реакторов. МИФИ. М.: Энергоатомиздат, 1985. С. 31 – 37.

3. Миллер К.Ж. Ползучесть и разрушение. М.: Металлургия, 1986. 120 с.

4. Миллер К.Ж. Усталость металлов – прошлое, настоящее и будущее // Заводская лаборатория. 1994. № 3. С. 31-44.

5. Эль-Хаддад, Смит, Топпер. Распространение коротких усталостных трещин // Тр. Амер. о-ваинж.-мех. Теор. основы инж. расчётов /Пер. сангл. М.: Мир, 1979. Т. 101. № 1. С. 43-47.

6. Taylor D., Wang G. The validation of some methods of notch fatigue analysis // Fatigue and Fracture Engineering Materials and Structures. 2000. V. 23. P. 387-394.

7. Морозов Е.М. Концепция предела трещиностойкости // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1997. № 12.

8. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений / Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 301 с. с.

9. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URRS, 2015 — 400 с.

10. Левин В. А., Калинин В. В., Зингерман К. М., Вершинин А. В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование / Под ред. В. А. Левина. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 392 с.

11. Левин В. А. О «физическом разрезе», привнесенном в предварительно нагруженное упругое тело. Конечные деформации // Докл. РАН. 2001. Т. 381, № 2. С. 196–198.

12. Левин В. А. Моделирование роста повреждения при конечных деформациях // Вестн. Моск. ун-та: Матем., мех. Сер. 1. 2006. № 3. С. 38–41.

13. Левин В.А., Морозов Е.М. Нелокальные критерии для определения зоны предразрушения при описании роста дефекта при конечных деформациях // Доклады РАН. 2007. Т. 415. № 1. С. 52-54.

14. Левин В. А., Морозов Е. М. Нелокальный критерий прочности. Конечные деформации // Докл. РАН. 2002. Т. 346, № 1. С. 62–67.

Получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 519.63 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-423-438

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИРОДНЫХ И ИНДУСТРИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В АРКТИЧЕСКОЙ ЗОНЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

И. Б. Петров[1]

Аннотация

В данной работе рассматриваются вопросы численного моделирования динамических задач Арктической зоны на высокопроизводительных вычислительных системах. Физические размеры области интегрирования в такого рода задачах могут достигать десятков и сотен километров. Для корректного моделирования распространения волновых возмущения на такие расстояния требуются высокоточные численные методы с учетом волновых свойств решаемых уравнений, а также возможностью моделирования сложных динамических процессов в неоднородных геологических средах с множеством контактных и свободных границ. В качестве такого численного метода в работе используется сеточно-характеристический метод [1] для численного решения систем уравнений механики деформируемого твердого тела. Данный метод позволяет использовать монотонные разностные схемы повышенного порядка точности [2], строить корректные численные алгоритмы на границах областей интегрирования и на контактных границах [3]. Для некоторых задач сейсмики данный метод уже применялся в двумерном случае [4], в данной работе моделирование проводилось в трехмерной постановке. Отметим, что сеточно-характеристический метод был успешно опробирован для численного решения задач в таких областях прикладной науки, как гидроаэродинамика, динамика плазмы, механика деформируемого твердого тела и разрушения, вычислительная медицина. Примеры его применения в различных приложениях описаны в работе [1].

Ключевые слова: численные методы, механика сплошных сред, механика льда, сейсморазведка, Арктика.

Библиография: 15 название.

[1]Петров Игорь Борисович, член-корреспондент Российской академии наук, заведующий кафедрой информатики и вычислительной математики Московского физико-технического института, petrov@mipt.ru

NUMERICAL PROBLEMS OF THE MODELING OF NATURAL AND INDUSTRIAL PROCESSES IN THE ARCTIC ZONE OF THE RUSSIAN FEDERATION

I. B. Petrov (Moscow)

Abstract

In this work questions of numerical modeling of dynamic problems of the Arctic zone on high-performance computing systems are considered. The physical sizes of field of integration in such tasks can reach tens and hundreds of kilometers. For correct modeling of distribution wave indignations on such distances are required high-precision numerical methods taking into account wave properties of the solvable equations and also a possibility of modeling of difficult dynamic processes in non-uniform geological environments with a set of contact and free borders. As such numerical method in work the net and characteristic method [1] to the numerical solution of systems of the equations of mechanics of a deformable solid body is used. This method allows to use monotonous differential schemes of the raised order of accuracy [2], to build correct numerical algorithms on borders of fields of integration and on contact borders [3]. This method was already applied to some problems of seismicity in a two-dimensional case [4], in this work modeling was carried out in three-dimensional statement. We will mark that the grid and characteristic method was successfully tested for the numerical decision of tasks in such fields of applied science as hydroaerodynamics, dynamics of plasma, the mechanic of a deformable solid body and corrupting, computing medicine. Examples of its application are described in different appendices in operation [1].

Keywords: numerical methods, mechanics of continuous environments, mechanics of ice, seismic exploration, Arctic.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Для корректного задания больших областей моделирования, требуются использовать трехмерные расчетные сетки, с достаточным количеством узлов. Вычисления на таких сетках требуют больших затрат процессорного времени и ресурсов памяти ЭВМ, для ускорения процесса расчета в работе применена технология MPI [5], что позволяет работать программе на больших сетках (до 1 млрд. узлов).

Сформулируем основные уравнения линейной динамической теории упругости, которым подчиняется состояние бесконечно малого объема линейно-упругой среды. Рассмотрим нестационарные уравнения теории упругости для случая трех переменных, в некоторой ортонормированной системе координат (x_1, x_2, x_3) :

$$\begin{aligned} \rho\dot{\upsilon}_i &= \nabla_j \sigma_{ij}, \\ \dot{\sigma}_{ij} &= q_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} + F_{ij}. \end{aligned} \tag{1}$$

здесь ρ – плотность среды, υ_i – компоненты вектора скорости смещения, σ_{ij} и ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений Коши и деформации, ∇_j – ковариантная производная по j-й координате, F_{ij}– добавочная правая часть. Вид компонент тензора q_{ijkl} 4-го порядка определяется реологией среды. Для линейно-упругого случая они имеют вид:

$$q_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right).$$

В этом соотношении, которое обобщает закон Гука, λ и μ – параметры Ляме, а δ_{ij} –символ Кронекера.

Первая строка в системе уравнений (1) представляет три уравнения движения, вторая — шесть реологических соотношений.

Вектор искомых функций, состоящий из 9-ти компонент имеет вид:

$$\mathbf{u} = \left\{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}\right\}^T.$$

2. Основная часть

Перечисленные модели твердого тела допускают запись системы уравнений (1) динамики деформируемого твердого тела в матричном виде [6]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}_j$ - матрицы размера 9×9:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Данная запись является канонической формой записи системы уравнений, принятой в вычислительной математике для построения сеточно-характеристических разностных схем. Система уравнений (2) является гиперболической, поэтому каждая из матриц $\mathbf{A}_j$ имеет девять вещественных собственных значений и базис из собственных векторов.

Для численного моделирования задач динамики деформируемого твердого тела широко применяется сеточно-характеристический метод [1, 6]. Вначале применяется методы расщепления по пространственным координатам, в результате чего имеем три одномерных системы:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \; j = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Каждая из этих систем является гиперболической и обладает полным набором собственных векторов с действительными собственными значениями,

поэтому каждую из систем можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \Omega_j^{-1} \Lambda_j \Omega_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j},$$

где матрица Ω_j — матрица составленная из собственных векторов, $\mathbf{A}_j$– диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения. Для всех координат матрица Λ имеет вид:

$$\Lambda = diag\left\{c_p, -c_p, c_s, -c_s, c_s, -c_s, 0, 0, 0\right\},$$

где $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$— продольная скорость звука в среде, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ — поперечная скорость звука.

После замены переменных $\mathbf{v} = \Omega\mathbf{u}$ каждая из систем (3) распадается на девять независимых скалярных уравнений переноса (индекс j далее опускается, где это возможно):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0.$$

Одномерные уравнения переноса решаются с помощью метода характеристик, либо обычными конечно-разностными схемами.
После того, как все компоненты $\mathbf{v}$ перенесены, восстанавливается само решение:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \Omega^{-1}\mathbf{v}^{n+1}.$$

В данной работе использовались TVD-разностные схемы [7] 2-го порядка точности. В программе реализовано 15 различных лимитеров [8], в расчетах в основном использовался ограничитель superbee, предложенный в [9]:

$$\varphi_{ab}(r) = \max\left[0, \min(2r, 1)\min(r, 2)\right].$$

Также использовались сеточно-характеристические монотонные разностные схемы, принцип построения которых описан в [2]. В программе реализованы схемы 2-4 порядка точности, большинство расчетов проводилось используя схему 4-го порядка точности.
Приведем ее для численного решения одномерного линейного уравнения упругости $u_t + \lambda u_x = 0, \sigma = \lambda\tau/h$:

$$\begin{array}{l} u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma\left(\Delta_1 - \sigma\left(\Delta_2 - \sigma\left(\Delta_3 - \sigma\Delta_4\right)\right)\right), \\ \Delta_1 = \frac{1}{24}\left(-2u_{m+2}^n + 16u_{m+1}^n - 16u_{m-1}^n + 2u_{m-2}^n\right), \\ \Delta_2 = \frac{1}{24}\left(-u_{m+2}^n + 16u_{m+1}^n - 30u_m^n + 16u_{m-1}^n - u_{m-2}^n\right), \\ \Delta_3 = \frac{1}{24}\left(2u_{m+2}^n - 4u_{m+1}^n + 4u_{m+1}^n + 4u_m^n - 2u_{m-2}^n\right), \\ \Delta_4 = \frac{1}{24}\left(u_{m+2}^n - 4u_{m+1}^n - 6u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n\right). \end{array}$$

Рассмотрим задачу о соударении стальной и ледовой пластин. Толщина ударника 0.1, толщина пластины 1, скорость ударника 0.003, нижняя граница — свободная (безразмерные единицы). Из экспериментов известен эффект тыльного откола: при ударе по плите с одной стороны, происходит откол материала с обратной. С физической точки зрения, откол происходит, когда

фронт отраженной от задней границы волны встречается с задним фронтом падающей волны. Таким образом, толщина откольной тарелки равняется половине длины волны. При такой конфигурации удара длина волны составляет удвоенную ширину ударника. Следовательно, толщина откола должна в точности совпадать с шириной ударника. Этот эффект используется для тестирования метода расчета разрушений. Как видно из рис. 1,2, результаты численного моделирования хорошо соотносятся с экспериментальными данными.

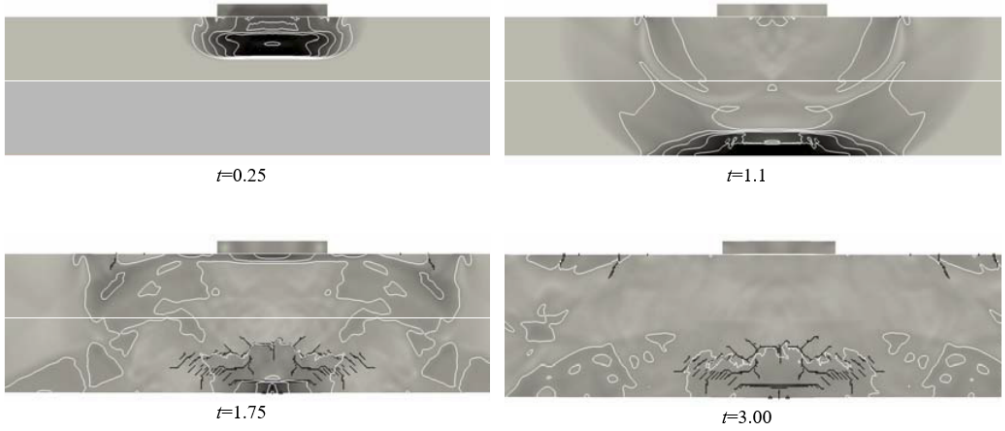


Рис. 1: Нормальный удар пластины в разные моменты времени. Черными линиями отмечены образовавшиеся трещины, белыми — изолинии скоростей. Насыщенность цвета соответствует также модулям скоростей.

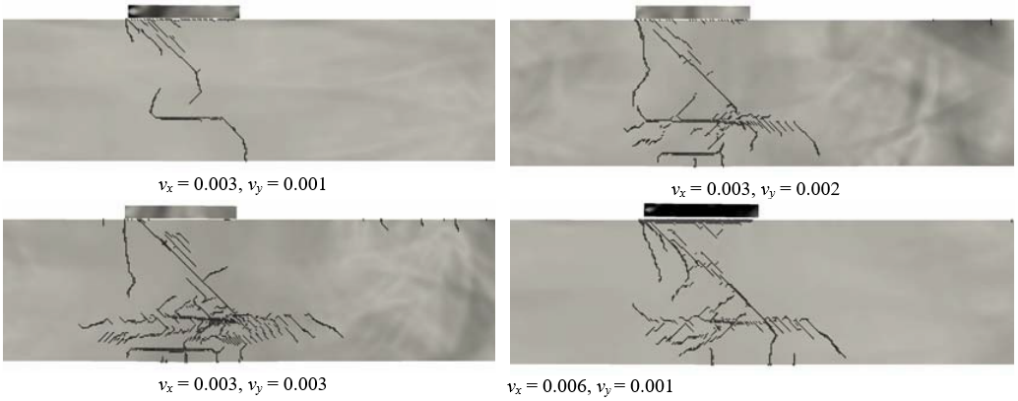


Рис. 2: Удар с различными скоростями и под различными углами. Компоненты скоростей ударника подписаны к каждому рисунку. Динамический контакт — условие слипания.

Некоторые параметры моделей механики сплошных сред, описывающей прочностные характеристики льда, затруднительно установить из натурных экспериментов непосредственным образом. Однако, проведя численный эксперимент, их можно связать с макроскопическими параметрами, поддающимися измерению. Одним из таких макроскопических параметров является

прочность льда на одноосное сжатие, по факту определяемая такими микроскопическими параметрами, как предел текучести, предел прочности на растяжение и деформация разрушения. Для численного моделирования эксперимента по измерению прочности льда на одноосное сжатие выбрана постановка со сдавливанием ледяного куба с постоянной скоростью движения плиты пресса, где измеряется зависимость приложенной нагрузки от осевого смещения, а также характер разрушения образца. В качестве исходных физико-механических параметров льда взяты данные из таблицы. Геометрия ледяного образца представляет собой куб со стороной 15 см, параллельные плитам пресса, грани которого сжимаются с постоянной скоростью 10 см/с. Данная задача решается как в двумерной, так и в трехмерной постановке, поскольку в двумерной постановке оказывается нагляднее сравнивать картину разрушений, а в трехмерной – численные значения получающихся нагрузок. В результате моделирования получаются следующие характерные картины разрушений (см. рис. 3).

В то время как внешняя картина разрушений достаточно наглядна и легко поддается качественному сравнению с натурным экспериментом, картина внутренних разрушений достаточно сложна и более подробно ее структуру можно видеть в разрезе (рис. 4).

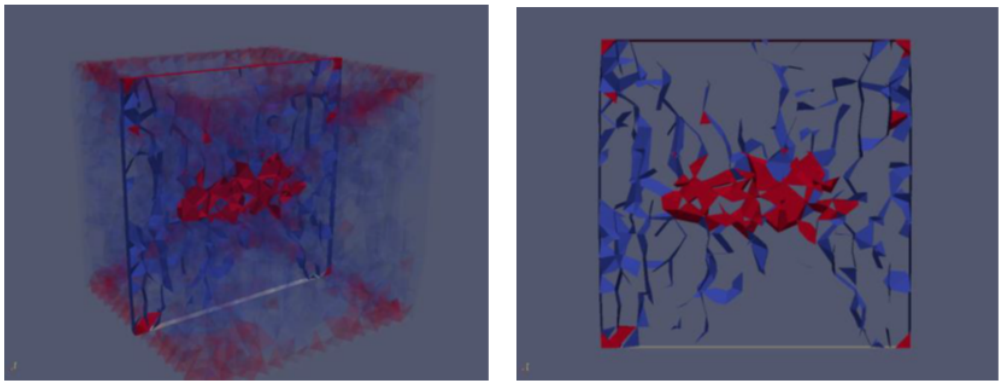


Рис. 3: Сечение картины разрушений ледяного образца.

Полученную картину разрушений можно качественно сравнить с натурными экспериментами, проведенными в аналогичных условиях (рис. 4).

Стоит отметить, что, несмотря на существенно отличающиеся картины разрушения в натурных экспериментах даже при, казалось бы, схожих начальных условиях, в них наблюдаются общие характерные черты, качественно согласующиеся с характером трещин в численных экспериментах:

- снаружи преобладают вертикальные трещины, образовавшиеся в результате локальных растяжений;

- наименее подвержены разрушению конические области, находящиеся в непосредственном контакте с прессом;

- внутри образца преобладает объемное разрушение, в результате чего лед крошится в мелкую крошку [10].

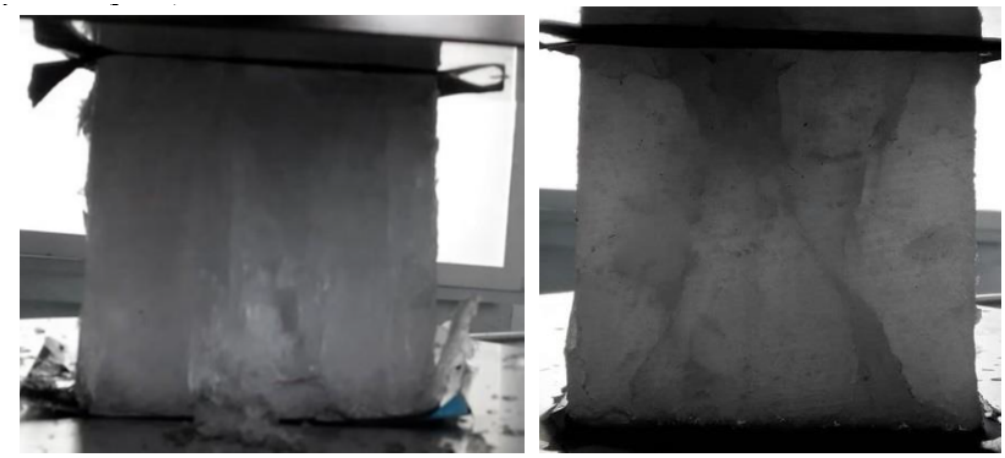


Рис. 4: Картины разрушения ледяного образца в натурных экспериментах.

Задача соударения льдины с неподвижной опорой является важной практической задачей. В данной работе исследована зависимость глобальной нагрузки на неподвижную опору от физико-механических параметров льда. Это важно, так как физико-механические характеристики льда могут меняться в зависимости от температуры, солёности и других параметров. Поскольку для такого анализа необходимо провести большое количество численных экспериментов, варьируя различные параметры, и, следовательно, такое исследование может быть ресурсозатратным, была выбрана двумерная постановка. Характер глобальной нагрузки в трехмерной постановке останется тем же [11] (рис 5).

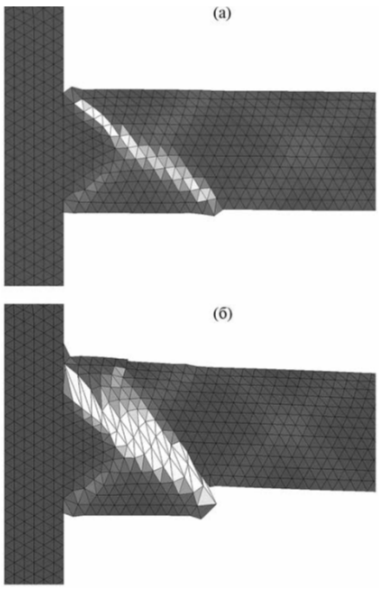


Рис. 5: Характерные картины разрушений ледяного образования. Цветом показана величина работы пластической деформации.

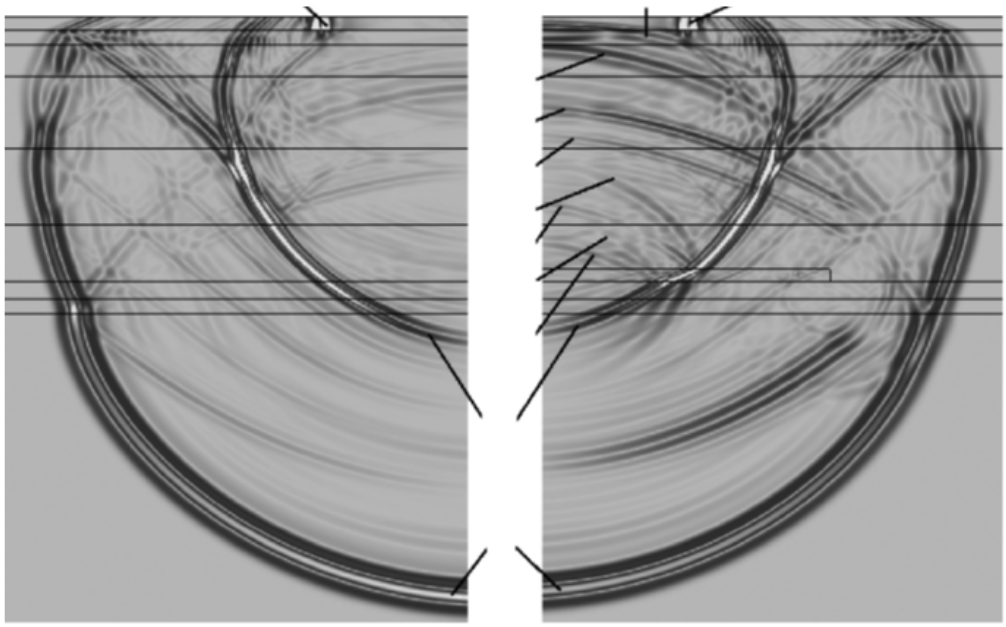


Рис. 6: Волновые картины в момент времени 0.6438 с. Отражение продольной и поперечной волн от резервуара: слева – без резервуара (постановка 2), справа – с резервуаром (постановка 1).

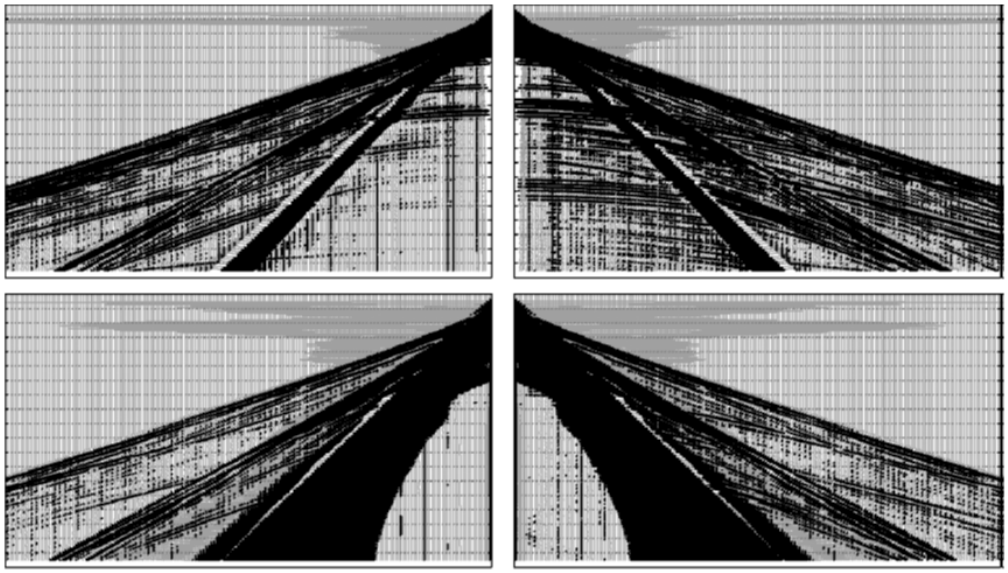


Рис. 7: Сейсмограммы, изображающие вертикальную (вверху) и горизонтальную (внизу) компоненты скорости. Слева – без резервуара (постановка 2), справа – с резервуаром (постановка 1).

На рис. 6,7 приведены волновые картины в моменты времени 0.6438, 0.8991 и 1.332 с соответственно, градацией серого показан модуль скорости (решается прямая задача сейсморазведки в условиях Арктики). Слева на рис. 6,7 показан регион из левой части области интегрирования для второй поста-

новки (без резервуара), справа – регион из правой части области интегрирования для первой постановки. На рис. 7 вверху приведены сейсмограммы, изображающие вертикальную компоненту скорости, внизу – горизонтальную. На рис. 7 слева изображены сейсмограммы, построенные по данным с приемников, расположенных левее источника для второй постановки (без резервуара), справа – с приемников, расположенных правее для первой постановки. На рис. 1 буквой P отмечены продольные волны от источника, St – волны Стоунли, S – поперечные волны, возникающие при распространении продольных волн P в геологических породах, буквами PP1, PP2 – отраженные от кровли и подошвы резервуара PP$волны, PS1, PS2 – отраженные от кровли и подошвы резервуара обменные PSS-волны, SP1, SP2 – отраженные от кровли и подошвы резервуара обменные SP$волны, SS1, SS2 – отраженные от кровли и подошвы резервуара SS$волны. На рис. 2 rPS1, rPS2 – отклики от волн PS1, PS2 в толще воды, на рис. 3 rSS1, rSS2 – отклики от волн SS1, SS2 в толще воды.

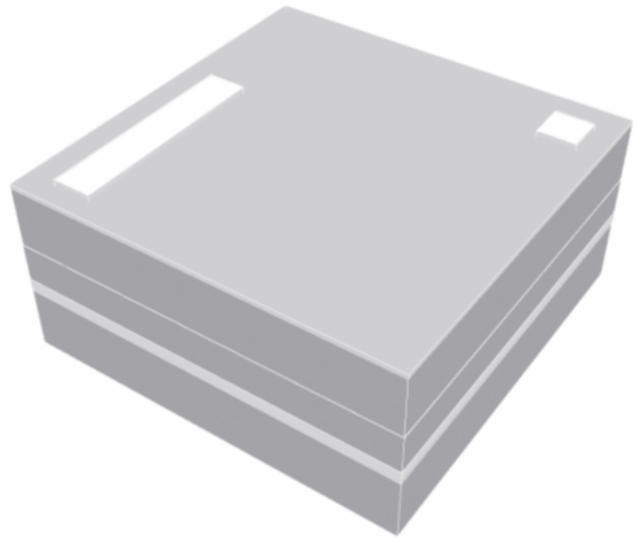


Рис. 8: Постановка задачи.

Рассматривается область интегрирования, представляющая собой параллелепипед шириной 120 м, глубиной 60 м и длиной 120 м. Моделируемая среда является многослойной системой, состоящей из водной толщи, в которой находятся два айсберга, и донного грунта с углеводородосодержащим слоем [12]. Далее решается задача морской сейсморазведки при наличии крупных ледовых образований (айсбергов).

Расчет проводился на прямоугольной сетке, содержащей 5.4×10^7узлов. Начальное точечное возмущение моделировалось импульсом Риккера частотой 42.85 Гц. На боковых границах области интегрирования поставлены неотражающие граничные условия. Было выполнено 15000 шагов по времени, шаг по времени составлял 3×10^{-5} сек. Шаг по координате брался равным 0.4 м. Рассматривались два айсберга размером 12 на 64 на 12 м и 12 на 12 на 12 м соответственно, заглубленные на 12 м и выступающие над поверхностью

воды на 1 м с плотностью 917 кг/м3, скорость продольных волн полагалась равной 394 м/сек, поперечных – 2491 м/сек.

На выступающих поверхностях айсбергов, плотностью внешней силы, равной нулю, на верхней поверхности воды ставилось условие с заданным давлением, равным нулю.

Слой воды имел следующие характеристики: толщину 20 м, плотность 1000 кг/м^3 и скорость звука 1500 м/сек. Для грунта плотности 2500 кг/м^3 скорости продольных и поперечных волн брались равными соответственно 6500 м/сек и 3700 м/сек. Плотность включения была взята равной 2000 кг/м^3. Скорость распространения волны составляла 4000 м/сек и 1250 м/сек. Постановка задачи изображена на рис. 8. На рис. 9 представлена волновая картина в момент времени 0.195 сек.

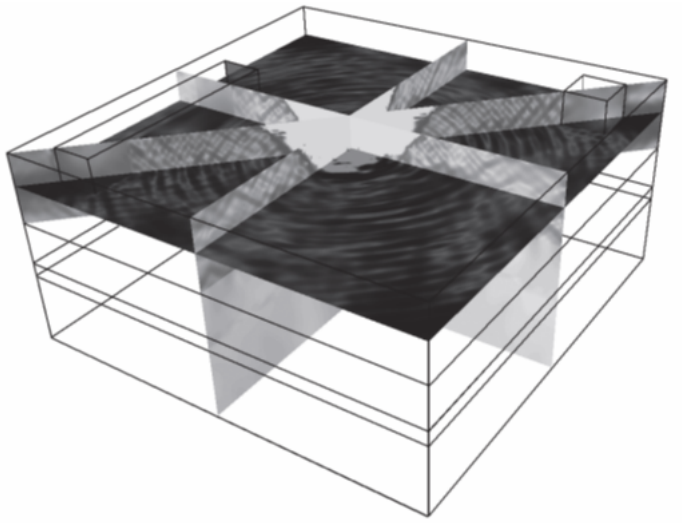
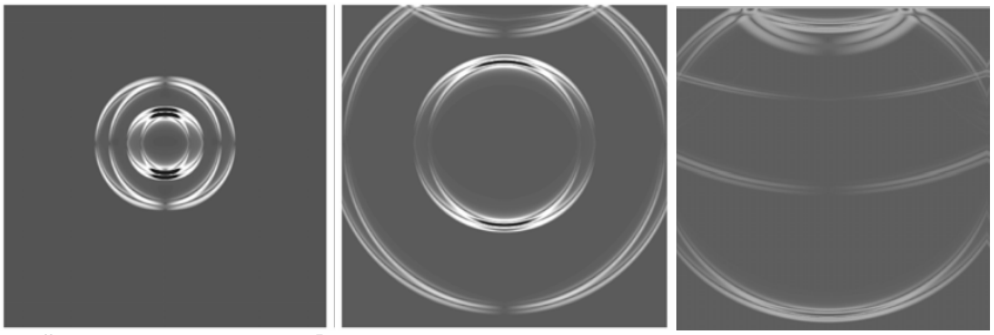


Рис. 9: Волны в воде, отраженные от айсбергов.

Актуальной проблемой для безопасности сооружений нефтегазовой индустрии является сейсмическая активность в Арктической зоне Российской Федерации, влияющая на стойкость стационарных ледостойких платформ и искусственных ледовых островов, находящихся в контакте с ледовыми полями с толщиной до 2,5 м. Эта задача может численно решаться двумя путями: в первом случае данные для ее решения могут браться из показаний сейсмодатчиков, установленных на донных станциях либо на платформах, во втором — расчет проводится с измельчением сетки вдали от очага землетрясения. В последнем случае численно моделируются процессы, происходящие в эпицентре, затем решается вычислительно трудоемкая пространственная задача о распространения волн в толще Земли от эпицентра до морского дна, после чего проводится измельчение расчетной сетки (используются иерархические сетки), вследствие большой разницы в характерных размерах исследуемых объектов. Примеры таких расчетов приведены на рис. 11.

На рис.11а изображены сейсмические волны, распространяющиеся от очага землетрясения, в момент времени 0.3 с. Можно видеть сформированные



а. Сейсмические волны от очага землетрясения. Момент времени 0.3 с.

б. Отражение P-волны от дневной поверхности. Момент времени 0.8 с.

в. Отражение S-волны от дневной поверхности. Момент времени 1.5 с.

Рис. 10: Распространение сейсмических волн.

P-волну (продольную волну) и S-волну (поперечную волну). На рис.11б приведена волновая картина в момент времени 0.8 с, P-волна отражается от дневной поверхности и формируются обменные PP-волна (продольная волна, возникающая при отражении P-волны) и PS-волна (поперечная волна, возникающая при отражении P-волны). А на рис.11в видно отражение S-волны от дневной поверхности в момент времени 1.5 с и формирование обменных SP-волны (продольной волны, возникающей при отражении S-волны) и SS-волны (поперечной волны, возникающей при отражении S-волны).

Картина прорезания стойкой платформы ледового поля и его разрушения, при его движении по направлению к ней показана на рис. 12. Расчет выполнялся с помощью разрывного метода Галёркина с учетом разрушения ледового поля. Решение этой задачи важно для предсказания последствий взаимодействия ледового поля и ледостойкой платформы в зоне шельфа, а также для проектирования самих платформ и обеспечения их безопасности. Разрушения в этом процессе имеют сдвиговой характер. На рис.12 видна картина разрушений ледового поля при его взаимодействии со стойкой ледостойкой платформы. Темная зона вблизи стойки соответствует сдвиговым разрушениям (дробление льда), трещины, обусловленные откольными разрушениями, распространения от углов стойки, имеющей 8 углов. На рисунке 12 показан характер разрушения ледовой пластины при ее наезде на стойку ледостойкой платформы. Отметим, что для численного решения этого класса задач использовались также подходы, разработанные в работах [13-15].

3. Заключение

К наиболее актуальным задачам, моделирующим природные и индустриальные процессы в шельфовой зоне Арктики относятся: прямые и обратные задачи сейсморазведки, безопасности стационарных и якорных платформ, движения крупных ледовых образований, их взаимодействия с шельфовыми конструкциями, движение судов ледового класса во льдах, расчет механиче-

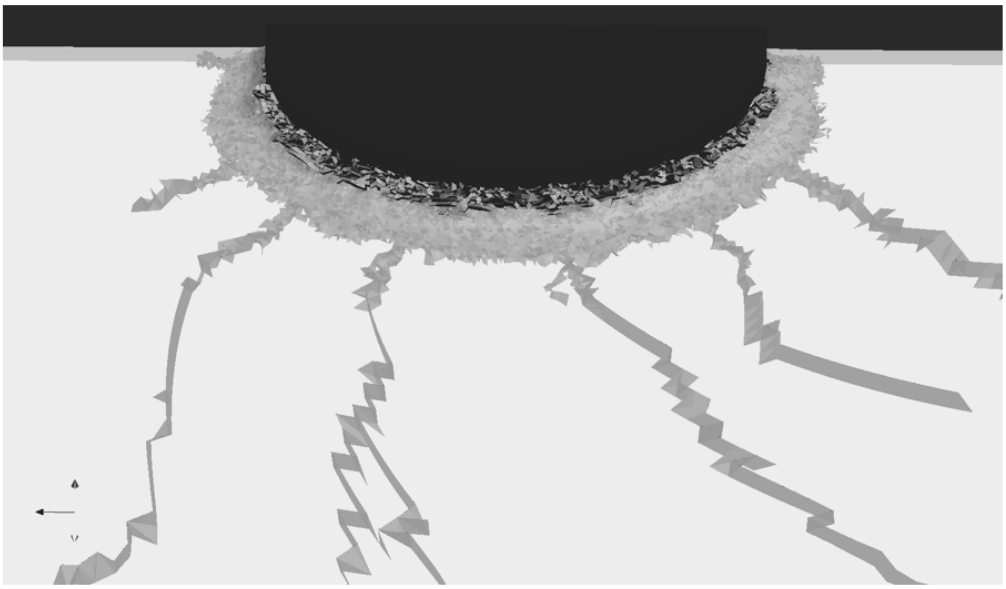


Рис. 11: Разрушения ледовой пластины.

ских свойств ледовых образований. В представленной работе показана возможность численного моделирования указанных процессов и явлений с помощью сеточно-характеристического метода и разрывного метода Галёркина. Следует отметить, что численное моделирование Арктических процессов намного дешевле проведения натурных испытаний, что необходимо учитывать при проектировании шельфовых сооружений и судов ледового класса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магомедов, К.М., Холодов, А.С. Сеточно-характеристические методы. — М., 1988 г., 288 с.

2. Петров, И.Б., Холодов, А.С. О регуляризации численных решений уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики (ЖВМ и МФ). 1984. Т. 24. №8. С. 1346-1358.

3. Петров, И.Б., Тормасов, А.Г., Холодов, А.С. О численном изучении нестационарных процессов в деформируемых средах многослойной структуры // Известия АНСССР. Серия Механика твердого тела. 1989. №4. С. 89-85.

4. Квасов, И.Е., Панкратов, С.А., Петров, И.Б. Численное моделирование сейсмических откликов в многослойных геологических средах сеточно-характеристическим методом // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. №9. С. 13-21.

5. MPI Forum. Messagep assing Interface (MPI) Forum Page. http: // www.mpi-forum. 2009.

6. Петров, И.Б., Холодов, А.С. Численное исследование некоторых задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984.т. 24. Вып. 5. С. 722-739.

7. Ami Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. of Comp. Phys. 1997. V. 135 (2). PP. 260-278.

8. Петров, И.Б., Хохлов, Н.И. Сравнение TVD-лимитеров для численного решения уравнений динамики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Математические модели и задачи управления: Сб. научных трудов МФТИ. 2011. С. 104-111.

9. Roe P.L. Characteristic-Based Schemes for Euler Equations // Annual Review Mechanics. 1986. №18. PP. 337-365.

10. Санников, А.В., Миряха, В.А., Петров И.Б. Численное моделирование экспериментов по исследованию прочностных свойств льда // Полярная механика. Материалы третьей международной научной конференции. 27-30 сентября 2016. Владивосток. Россия. ДВФУ. С. 14-50.

11. Бирюков, В.А., Миряха, В.А., Петров, И.Б. Анализ зависимости глобальной нагрузки от механических параметров льда при взаимодействии ледяного поля с конструкцией // Доклады Академии Наук. 2017. Т. 474. №6. С. 1-4.

12. Петров, Д.И., Петров, И.Б., Фаворская, А.В., Хохлов, Н.И. Численное решение задач сейсморазведки в условиях Арктики сеточно-характеристическим методом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. №6. С. 1149-1163.

13. Левянт, В.Б., Петров, И.Б., Квасов, И.Е. Численное моделирование волнового отклика от субвертикальных макротрещин, вероятных флюидонасыщенных каналов // Технологии сейсморазведки. 2011. №4. С. 41-61.

14. Квасов, И.Е., Панкратов, С.А., Петров, И.Б. Численное моделирование сейсмических откликов в многослойных гелогических средах сеточно-характеристическим методом // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. №9. С. 12-21.

15. Муратов, М.В., Петров, И.Б., Фаворская, А.В. Сеточно-характеристический метод на неструктурированных тетраэдральных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Том 54. №5. С. 85-96.

REFERENCES

1. Magomedov, K.M., Kholodov, A.S. 1988, "Grid-characteristic methods", *Moscow*, 288p.

2. Petrov, I.B, Kholodov, A.S. 1984, "Regularization of numerical solutions of hyperbolic eqution", *Zhurnal vychislitelnoi matematiki I matematicheskoy phisiki*, vol. 24, no. 8, pp. 1346 – 1358

3. Petrov, I.B., Tormasov, A.G., Kholodov, A.S. 1989, "Numerical investigation of nonstationary processes in the layered continuous medium", *Izvestiya ANSSR. Seria mekhanika tverdogo tela,* no. 4, pp. 85-89

4. Kvasov, I.E., Pankratov, S.A., Petrov, I.B. 2010, "Computation modeling of seismic response in multilayered geologic medium by grid-characteristic method", *Matematicheskoe modelirovenie*, vol. 22, no.9, pp. 13 – 21

5. MPI Forum (2009), Available at: http://http://mpi-forum.org/docs (accessed 4 September 2009)

6. Petrov, I.B., Kholodov, A.S. 1984, "Numerical solution of the solid problems with use of grid-characteristic method", *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoy phisiki,* vol. 24., no. 5,pp. 722 – 739

7. Harten, A. 1997, "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws", *Journal of Computation Physics*, vol. 135 (2), pp. 260 – 278

8. Petrov, I.B., Khokhlov, N.I. 2011, "Comparison of TVD limiters for the numerical solution of the equations of dynamics of a deformable solid body by grid-characteristic method", *Sb. Trudov MFTI Matematicheskie modeli i zadachi upravleniya*, pp. 104 – 111

9. Roe, P.L. 1986, "Characteristic-Based Schemes for Euler Equations", *Annual Review Mechanics*, no. 18, pp. 337 – 365

10. Sannikov, A.V., Miryha, V.A., Petrov, I.B, 2016, "Numerical investigation of ice mechanical propaties experiments", *Trudy 3 Mezhdunarodnoi nauchnoi conferentsii "Polyarnaya mekhanika"* (Proc. 3th Int. Scien. Conf. "Polar mechanics"). Vladivostok, 2016, pp. 14 – 50

11. Birykov, V.A., Miryaha, V.A., Petrov, I.B. 2017, "Analysis of the Dependence of the Global Load on the Mechanical Parameters of Ice under Interaction between an Ice Field and Construction", *Doclady Academii Nauk*, vol. 474, no. 6, pp. 1 – 4.

12. Petrov, D.I, Petrov, I.B., Favorskaya, A.V., Khokhlov, N.I. 2016, "Grid-Characteristic Method on Embedded Hierarchical Grids and Its Application in the Study of Seismic Waves", *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoy phisiki*, vol. 56, no. 6, pp. 1149 – 1163.

13. Levyant, V.B., Petrov, I.B., Kvasov, I.E. 201, "Numerical modeling of wave response of subvertical crecs", *Technologii seismorazvedki*, no. 4, pp. 41 – 61

14. Kvasov, I.E., Pankratov, S.A., Petrov, I.B. 2010, "Numerical investigation of dynamic processes in solid with creck by grid-characteristic method", *Matematicheskoe modelirovenie*, vol. 22, no. 9, pp. 13 – 22

15. Muratov, M.V., Petrov, I.B., Sannikov, A.V., Favorskaya, A.V. 2014, "Grid-Characteristic method on nonstructure tetrahedral grids", *Zhurnal vychislitelnoi matematiki I matematicheskoy phisiki*, vol. 54, no. 5, pp. 85 – 96.

Получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3:539.62:004.94 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-439-460

МЕТОД ПОДВИЖНЫХ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ КАК НАПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ[1]

С. Г. Псахье[2], А. Ю. Смолин[3], А. И. Дмитриев[4], Е. В. Шилько[5], С. Ю. Коростелев[6] (г. Томск)

Аннотация

В статье рассмотрены основные положения метода подвижных клеточных автоматов, который предназначен для моделирования процессов деформирования и разрушения материалов и сред в рамках метода частиц на различных масштабах. Изначально метод частиц в механике материалов применялся только для моделирования поведения материалов на микроуровне в виде метода молекулярной динамики. Дальнейшее его развитие привело к целой группе методов под общим названием метода дискретных элементов, которые в основном применяются для моделирования сыпучих и гранулированных материалов на макроуровне. Рассматриваемый в работе метод подвижных клеточных автоматов разработан для моделирования процессов деформирования и разрушения материалов на различных масштабах: на мезоскопическом масштабе с явным учётом структуры материала и на макроскопическом масштабе в рамках среды с эффективными свойствами. В работе изложены важные отличия и преимущества данного подхода по сравнению с другими методами современной дискретной вычислительной механики. Эти преимущества обусловлены прежде всего тем,

[1]Исследование выполнено за счёт проекта III.23.2.4 Программы фундаментальных исследований СО РАН на 2017-2020 годы.

[2]Псахье Сергей Григорьевич, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, sp@ms.tsc.ru

[3]Смолин Алексей Юрьевич, ведущий научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, asmolin@ispms.tsc.ru

[4]Дмитриев Андрей Иванович, профессор кафедры физики металлов Томского государственного университета, ведущий научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН

[5]Шилько Евгений Викторович, профессор кафедры физики металлов, ведущий научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН

[6]Коростелев Сергей Юрьевич, старший научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН

что представленный здесь подход основывается на двух базовых методах дискретного моделирования: методе частиц и методе клеточных автоматов. Использование формализма клеточных автоматов позволяет явно описывать как процессы зарождения и развития повреждений (разрушения), так и залечивания трещин и микросварки. Кроме того, в рамках этого же формализма возможно описание процессов теплопроводности, химических и фазовых превращений. Вторым важным преимуществом метода подвижных клеточных автоматов является многочастичный характер взаимодействия его элементов. В результате использования многочастичного взаимодействия удаётся избавиться от искусственного влияния упаковки частиц и локальности их взаимодействия в точках контакта на поведение моделируемого материала, что наиболее важно для моделирования его упруго-пластического течения. В плане дальнейшего развития рассмотренного подхода в работе предложены способы описания в рамках метода частиц контактного взаимодействия поверхностей различных тел на микро- и мезоскопическом масштабах.

Ключевые слова: вычислительная механика, метод частиц, клеточные автоматы, деформация и разрушение.

Библиография: 31 название.

MOVABLE CELLULAR AUTOMATON METHOD AS A TREND IN DISCRETE COMPUTATIONAL MECHANICS

S. G. Psakhie, A. Yu. Smolin, A. I. Dmitriev, E. V. Shilko, S. Yu. Korostelev (Tomsk)

Abstract

The paper presents the basics of movable cellular automaton method aimed for simulating deformation and fracture of materials and media at different scales. Initially, the particle method has been employed in mechanics of materials only at microscale as molecular dynamics. Its further development has been led to a group of methods which are usually called as discrete element method and used for simulation of loose and granular materials at the macroscale. The presented method of movable cellular automata was developed for simulating deformation and fracture of materials at different scales: at mesoscale with an explicit account for material structure, and at macroscale within the framework of a media with effective properties. The main advantages and differences of the approach compared with the other methods of discrete computational mechanics are considered. These advantages, first of all, are determined by the fact that the considered approach is based on two basic methods of discrete simulation: particle method and cellular automaton method. Employing

the formalism of cellular automata allows explicit description of both processes of damage generation and evolution as well as of crack healing and microwelding. More of that, it is possible to describe heat transfer, chemical reactions and phase transitions as well. The second important advantage of the movable cellular automaton method is the many-body type of interaction among its elements. The use of many-body interaction allows us to avoid artificial effect of the particle packing and locality of their interaction on the resulting behavior of the modeled material that is extremely important for modeling elastic-plastic matereials. As a further development of the considered approach, two techniques are discussed which enable to describe contact interaction of solid bodies surfaces at the micro- and mesoscopic scales within the framework of the particle method.

Keywords: computational mechanics, particle method, cellular automata, deformation and fracture.

Bibliography: 31 titles.

1. Введение

Механика — это наука о движении в самом общем смысле этого понятия. Если говорить о механике материалов и сред, то объектом её описания может быть как некий континуум, так и множество взаимодействующих частиц (выделенных элементов среды). Эти два различных подхода были предложены соответственно Огюстеном Луи Коши и Анри Навье ещё в начале 1820-х годов [1]. Преимущественное развитие континуального подхода на протяжении последующих более чем ста пятидесяти лет было обусловлено более широкими возможностями аналитического описания.

Важный этап развития механики, — разработка и создание численных методов, — был связан с появлением вычислительной техники. Вычислительную механику можно смело рассматривать как самостоятельный раздел механики, дополняющий теоретические и экспериментальные исследования. Для неё характерны как теоретический, так и экспериментальный аспекты. По этой причине компьютерное моделирование часто называют компьютерным экспериментом.

Специфика численного решения уравнений механики сплошных сред требует дискретизации изучаемого объекта, что приводит к ряду дополнительных проблем, связанных в первую очередь со сходимостью и устойчивостью получаемых решений. Большинство этих проблем, а также проблема описания процессов возникновения и развития несплошностей в рамках континуума были успешно решены [2, 3]. Успехи современной континуальной вычислительной механики трудно переоценить. Её инженерные приложения совершили своеобразную революцию в технических науках и проектировании [4].

Дискретная вычислительная механика вначале развивалась главным образом на атомном уровне как молекулярная динамика. Необходимо отме-

тить, что хотя молекулярная динамика и получила исключительно широкое развитие во многих областях современной науки начиная от физики и кончая биологией, она, безусловно, не исчерпывает всех возможностей дискретного подхода. 40–45 лет назад появились работы, в которых метод частиц использовался для описания различных сред, в том числе гранулированных и сыпучих. Это в первую очередь работы таких зарубежных учёных, как P. A. Cundall, H. J. Herrmann, O. R. Walton, S. Luding, T. Pöschel, D. Greenspan, G. P. Ostermeyer и др. [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Фактически все эти работы были основаны на технике и уравнениях движения молекулярной динамики, с той лишь разницей, что добавлялись уравнения для вращения частиц. Т. е. использовались классические уравнения движения Ньютона-Эйлера. В рамках этого подхода информация о взаимодействии частиц (в том числе атомов) передается в радиусе ближайших соседей за один шаг интегрирования уравнений движения (т. е. практически мгновенно) [16, 17]. Если для описания поведения систем на атомном уровне это обосновано в рамках адиабатического приближения, то для частиц на мезо- и макроуровне это является более грубым приближением и требует использования искусственных приёмов при интегрировании уравнений движения.

В настоящее время наиболее известным представителем дискретной вычислительной механики является так называемый метод дискретных элементов (discrete element method — DEM). Точнее говоря, под этим термином понимается целая группа методов, в которых моделируемый объект представляется набором взаимодействующих частиц различной формы (элементов). Главное отличие различных представителей этих методов заключается в аппроксимации деформации этих элементов. И здесь можно выделить два подхода: отдельных элементов (distinct elements) и однородно деформируемых элементов (simply deformable elements) [14, 15]. В первом случае дискретные элементы рассматриваются как абсолютно жёсткие тела, связанные между собой пружинами с заданными жёсткостями и вязкостями. Второй метод является более строгим и учитывает возможность деформирования образца в линейном приближении распределения смещений в объёме элемента. Фактически данное приближение подразумевает, что напряжения и деформации однородно распределены в объёме элемента.

Таким образом, подходы, основанные на классических уравнениях движения Ньютона-Эйлера, хотя и включают в себя уравнения для вращения, фактически описывают поведение точечных масс в парном приближении. Данный подход хорошо подходит для описания упруго-хрупких материалов и сред, однако при описании больших упругих, а также пластических деформаций сказывается искусственное влияние упаковки частиц и локальность их взаимодействия в точках контакта.

Новый вид уравнений движения, позволяющий преодолеть данное противоречие был получен в рамках метода подвижных клеточных автоматов [18, 19, 20, 21, 22].

2. Описание моделируемой системы

В рамках метода подвижных клеточных автоматов (movable cellular automata — MCA) моделируемая система представляет собой ансамбль взаимодействующих автоматов (элементов), имеющих конечный размер. Концепция метода MCA основана на введении нового типа состояний в подходе классических клеточных автоматов — состояния пары автоматов. Это позволило сделать принципиально важный шаг — перейти к использованию пространственной переменной как параметра переключения. В качестве такого параметра было выбрано перекрытие пары автоматов (рис. 1):

$$h^{ij} = r^{ij} - r_0^{ij}, \tag{1}$$

где r^{ij} — расстояние между автоматами i и j (верхние индексы в данной работе будут обозначать номера автоматов); нижний индекс 0 обозначает начальный момент времени (недеформируемая конфигурация, расстояние в которой вычисляется как $r_0^{ij} = (d^i + d^j)/2$, где параметр d^i характеризует размер автомата i).

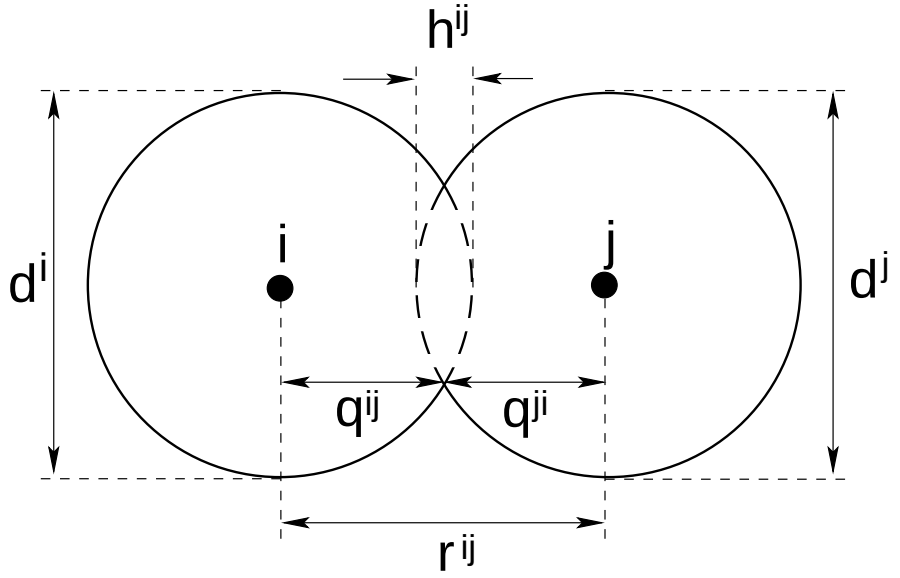


Рис. 1: Пространственные параметры пары подвижных клеточных автоматов i и j.

В простейшем случае существует два состояния пар автоматов: связанное (linked) и несвязанное (unlinked). Связанное состояние означает наличие химических связей между элементами (они образуют единый фрагмент консолидированного тела), а несвязанное — отсутствие каких-либо химических связей (элементы принадлежат раздельным фрагментам разрушенного тела или различным телам). Следует подчеркнуть, что данный параметр имеет пространственную размерность. Это приводит к качественно новому свойству клеточных автоматов — способности изменять своё пространственное

положение и как результат, — изменять пространственную конфигурацию всей системы. Таким образом, изменение состояния пар автоматов определяется (управляется) относительными смещениями (в общем случае также поворотами) автоматов, образующих пару. Поскольку названные состояния являются устойчивыми, то среда, образуемая парами таких автоматов, может рассматриваться как бистабильная.

Рассмотрим пару автоматов ij. Состояние данной пары однозначно определяется двумя типами полей $h^{\alpha\beta}(t)$. Первый тип связан с состоянием самой пары ij — $h^{ij}(t)$, второй — с состояниями соседних пар, а именно: пар ik — $h^{ik}(t)$ и jl — $h^{jl}(t)$ Следует отметить, что эти поля по существу определяют локальные деформации (деформации элементов среды) и, следовательно, определяют распределение и потоки упругой энергии в моделируемой среде. Производная по времени от параметра перекрытия может быть определена подобно тому как это делается в модели Винера-Розенблюта [23]. В этом случае рассматриваемая система может быть описана на основе соотношения:

$$\frac{\Delta h^{ij}}{\Delta t} = f(h^{ij}) + \sum_{k\neq j} C(ij,ik)I(h^{ik}) + \sum_{l\neq i} C(ij,jl)I(h^{jl}), \qquad (2)$$

где функция $f(h^{ij})$ имеет смысл нормальной составляющей относительной скорости автоматов i и j (V_n^{ij}); $C(ij,ik)$ — коэффициент, связанный с переносом параметра h от пары ik к паре ij; $I(h^{ik})$ — явная функция от h^{ik}, которая определяет перераспределение параметра h^{ik} между парами: ij и ik (рис. 2).

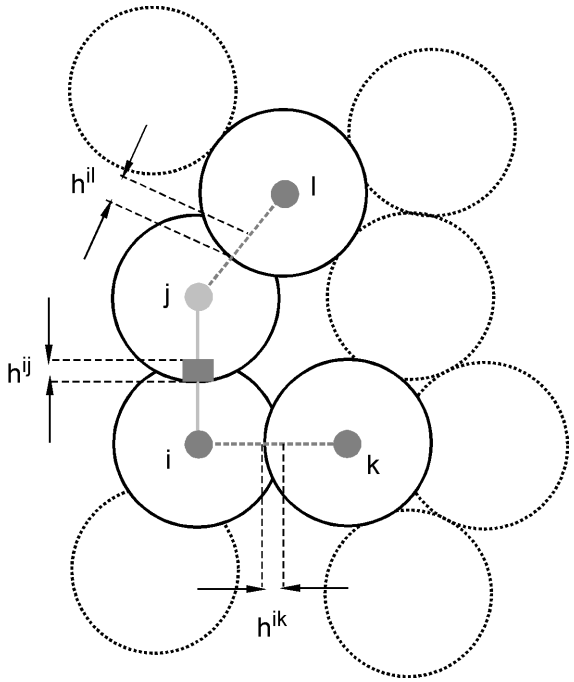


Рис. 2: Параметры перекрытия соседних пар элементов ij, ik и jl.

В рамках линейного приближения функция $I(h^{ik})$ может быть представ-

лена как:

$$I(h^{ik}) = \psi(\alpha^{ij,ik})V_n^{ik}, \tag{3}$$

В общем случае множитель $\psi(\alpha^{ij,ik})$ определяется взаимным расположением автоматов ij и ik и является комбинацией тригонометрических функций, а $\alpha^{ij,ik}$ — набор значений соответствующих углов, определяемых относительной упаковкой.

Таким образом, изменение параметра перекрытия автоматов h_{ij} определяется следующими факторами:

1. относительной скоростью V_n^{ij} между автоматами i и j;
2. изменением перекрытий Δh^{ij} i-го автомата с его соседями;
3. изменением перекрытий Δh^{jl} j-го автомата с его соседями.

3. Уравнения движения подвижных клеточных автоматов

Как следует из соотношения (2) система, состоящая из подвижных клеточных автоматов, будет описываться следующими уравнениями движения для трансляционного поведения:

$$\frac{d^2h^{ij}}{dt^2} = \Big(\frac{1}{m^i} + \frac{1}{m^j}\Big)p^{ij} + \sum_{k\neq j} C(ij,ik)\psi(\alpha^{ij,ik})\frac{1}{m^i}p^{ik} + \sum_{l\neq i} C(ij,jl)\psi(\alpha^{ij,jl})\frac{1}{m^j}p^{jl}. \tag{4}$$

В уравнении (4) вклад $\dfrac{dV_n^{ij}}{dt}$ был представлен как $\dfrac{1}{m^i}p^{ik}$, где p^{ik} — сила нормального взаимодействия между автоматами i и k, m^i — масса автомата i. Коэффициент $C(ij,ik)$ как и в соотношении (2), связан с переносом параметра h от пары ik к паре ij. Член $\psi(\alpha^{ij,ik})$ определяется коэффициентом Пуассона и соответственно связан со взаимным расположением пар элементов ij и ik.

Уравнения движения для поворотов могут быть записаны в виде:

$$\frac{d\omega^{ij}}{dt} = \Big(\frac{q^{ij}}{\hat{J}^i} + \frac{q^{ji}}{\hat{J}^j}\Big)\tau^{ij} + \sum_{k\neq j} S(ij,ik)\frac{q^{ik}}{\hat{J}^i}\tau^{ik} + \sum_{l\neq i} S(ij,jl)\frac{q^{jl}}{\hat{J}^j}\tau^{jl}. \tag{5}$$

Здесь ω^{ij} скорость относительного поворота элементов (сам относительный поворот тоже является параметром переключения подобно h^{ij}); q^{ij} — расстояние от центра автомата i до точки его контакта с автоматом j; τ^{ij} — сила парного тангенциального взаимодействия; $\hat{J}^i$ — момент инерции автомата i. Коэффициент $S(ij,ik)$ связан с переносом относительного вращения от пары ik к паре ij. Важность учёта вращений при моделировании методом МСА отражена в работе [24].

Хорошо видно, что если положить $C(ij, ik(jl)) = 1$ и $S(ij, ik(jl)) = 1$, то уравнения (4) и (5) полностью эквивалентны уравнениям Ньютона-Эйлера для многочастичного взаимодействия.

Как отмечалось выше, члены с множителями $C(ij, ik(jl))$ определяют перенос параметра h от пар ik или jl к паре ij. Таким образом, уравнения движения (4) и (5) явно учитывают некоторое «запаздывание» $\delta t^{ij,ik}$ и $\delta t^{ij,jl}$ влияния параметров перекрытия пар ik и jl, соответственно, на взаимодействие пары элементов ij (см. рис. 2). Время «запаздывания» определяется размерами автоматов, продольной и поперечной скоростями звука, а также взаимным расположением пары ij и пар ik jl. Очевидно, что эффекты, связанные с генерацией и распространением ударных волн, требуют специального рассмотрения.

4. Явный учёт отклика, обусловленного изменением объёма

Уравнения движения (4) и (5) могут быть записаны в следующем виде [22]:

$$\begin{cases} m^i \dfrac{d^2\vec{R}^i}{dt^2} = \sum\limits_j \vec{F}^{ij}_{\text{pair}} + \vec{F}^i_\Omega \\ \hat{J}^i \dfrac{d\vec{\omega}^i}{dt} = \sum\limits_j \vec{M}^{ij} \end{cases}, \tag{6}$$

где $\vec{R}^i$ — вектор положения, $\vec{\omega}^i$ — скорость вращения, m^i — масса, $\hat{J}^i$ — момент инерции автомата i, соответственно, $\vec{F}^{ij}_{\text{pair}} = \vec{p}^{ij} + \vec{\tau}^{ij}$ — общая парная сила взаимодействия автоматов i и j, $\vec{F}^i_\Omega$ — объёмно-зависящая сила, действующая на автомат i и обусловленная давлением со стороны окружающих автоматов, $\vec{M}^{ij} = q^{ij}(\vec{n}^{ij} \times \vec{F}^{ij}_{\text{pair}}) + \vec{K}^{ij}_{\text{rot}}$ — вращательный момент, действующий на автомат i, q^{ij} — расстояние от цнентра автомата i до точки его взаимодействия с автоматом j, $\vec{n}^{ij} = (\vec{R}^j - \vec{R}^i)/r^{ij}$ — единичный вектор, направленный от центра автомата i к центру автомата j, r^{ij} — расстояние между центрами автоматов, $\vec{K}^{ij}_{\text{rot}}$ — вращательный момент, вызванный относительным вращением автоматов пары [21, 22].

В рамках подхода модели «погруженной частицы», аналогичной модели погруженного атома в молекулярной динамике [25], объёмно-зависящая сила может быть представлена как [21, 22]

$$\vec{F}^i_\Omega = \sum_j (1 - \frac{2G^j}{3K^j}) P^j A^{ij} \vec{n}^{ij} \tag{7}$$

где индекс $j (j = 1 \dots N^i)$ нумерует автоматы, взаимодействующие с автоматом i; P^j — давление j-го соседнего автомата; A^{ij} — площадь контакта i-го автомата с j-м; G^j — модуль сдвига, K^j — модуль сжатия материала автомата j. Давление автомата определяется изменением его объёма. В простейшем

(линейном) случае эта зависимость имеет вид:

$$P^j = K^j \frac{\Omega^j - \Omega_0^j}{\Omega_0^j} \tag{8}$$

где Ω_0^j — начальный (равновесный) объём автомата; Ω^j — его текущий объём. Изменение объёма автомата за время Δt в простейшем приближении можно определить исходя из соответствующих изменений расстояний от центра этого автомата до точек его контакта с соседями Δq^{jk} из соотношения:

$$\Delta\Omega^j = \sum_k \Delta q^{jk} A^{jk}. \tag{9}$$

5. Функция отклика подвижного клеточного автомата

Как известно из механики сплошной среды формоизменение при деформировании описывается девиатором тензора деформаций или вторым инвариантом этого тензора (интенсивностью деформаций ε). Соответственно напряжения сдвига характеризуются вторым инвариантом тензора напряжений (интенсивностью напряжений σ). Как показано в работах [21, 22], в приближении однородно деформируемого элемента можно вычислить средние значения этих величин в подвижном клеточном автомате через силы в точках его взаимодействия с соседними автоматами. В случае линейно-упругого тела значения интенсивности напряжений пропорциональны значениям интенсивности деформаций с коэффициентом пропорциональности, равном утроенному модулю сдвига. В случае пластического течения часто постулируется наличие единой кривой упрочнения, как $\sigma = f(\varepsilon)$ для произвольного типа нагружения. Экспериментально это подтверждено для простого нагружения.

В методе подвижных клеточных автоматов зависимость $\sigma = f(\varepsilon)$ принято называть функцией отклика. Она является аналогом определяющих соотношений механики деформируемого твёрдого тела и характеризует силовой отклик материала автомата при деформировании.

Можно выделить четыре основных типа функции отклика автоматов, используемых при описании различных материалов и сред (рис. 3). В простейшем случае межавтоматное взаимодействие полагается упругим и линейным. Вид такой функции показан на рис. 3, а. Следует отметить, что в этом случае нагрузка и разгрузка идут по одной и той же линии. Переключение пары автоматов из состояния linked в состояние unlinked происходит когда их перекрытие достигает значения, соответствующего нагрузке σ_c.

Для того чтобы учесть генерацию повреждений на масштабном уровне, меньшем чем размер автомата, линейная функция оклика должна быть модифицирована. Простейшая такая модификация показана на рис. 3, б, где приведён вид функции отклика типичной для бетонов. Хорошо известно,

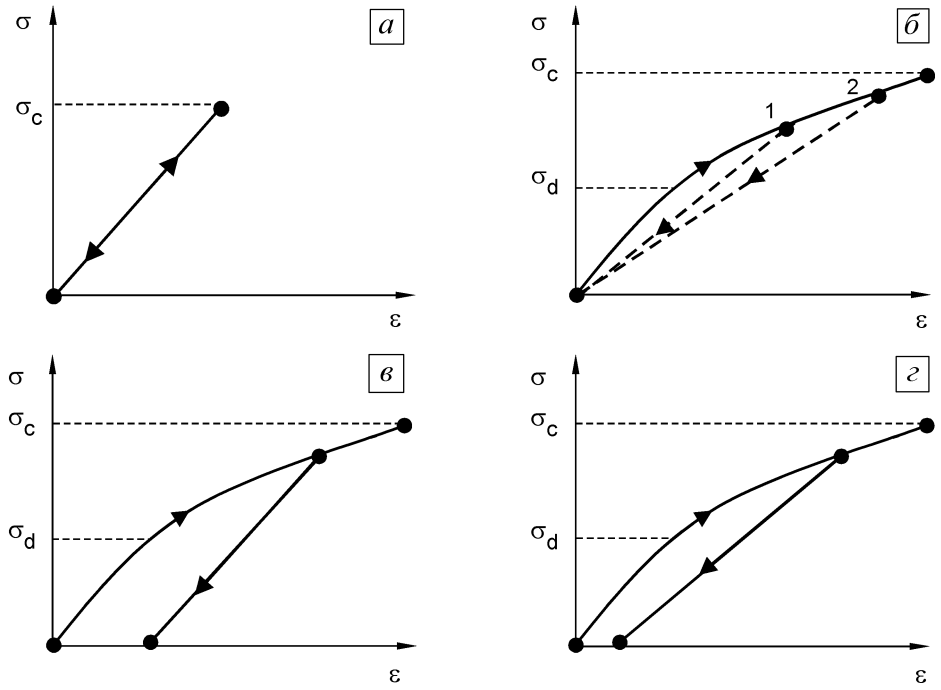


Рис. 3: Примеры функций отклика: σ_{d} – предел упругого поведения (точка деградации); σ_{c} — прочность.

что для подобных материалов начиная с некоторой нагрузки (выше точки деградации σ_{d}) эффективный модуль упругости понижается в результате генерации микроповреждений. Это означает, что линейный отклик имеет место при нагрузке в диапазоне $[0, \sigma_{\mathrm{d}}]$, в диапазоне же $[\sigma_{\mathrm{d}}, \sigma_{\mathrm{c}}]$ генерируются повреждения и функция отклика ведёт себя нелинейно. Кроме того, по этой же причине разгрузка определяется новым модулем упругости (см. пунктирные линии на рис. 3, б). Из рис. 3, б хорошо видно, что каждой точке такой функции отклика (например, точкам 1 и 2) из диапазона $[\sigma_{\mathrm{d}}, \sigma_{\mathrm{c}}]$ соответствует свой модуль упругости, который и будет определять поведение материала при разгрузке.

Функции отклика показанные на рис. 3, а и б могут быть использованы для моделирования разрушения хрупких материалов типа керамики, бетона, и т. п.

Примеры функций отклика для необратимого поведения материала приведены на рис. 3, в и г. Случай, показанный на рис. 3, в, соответствует пластической деформации, а функция отклика, приведённая на рис. 3, г — комбинации пластического течения и процессов деградации материала (генерации микроповреждений). Следует подчеркнуть, что примеры, показанные на рис. 3, в и г носят иллюстративный характер. Определение функции отклика для описания необратимого поведения, особенно пластической деформации, является сложной задачей и подразумевает достаточно глубокие знания о закономерностях инициирования и развития пластического течения [27, 26].

Таким образом, для моделирования поведения образцов, структур, кон-

струкций (или их частей) в рамках метода подвижных клеточных автоматов необходимо знание конкретных функций отклика, примеры которых показаны на рис. 3. В случае композитных систем необходимо знание функций отклика для всех составляющих компонент. Подобная информация может быть получена как экспериментальным путем, так и на основе теоретического рассмотрения.

6. Метод отрезков и описание взаимодействия контактирующих поверхностей

При моделировании контактирующих поверхностей в рамках метода частиц возникает серьёзная проблема, связанная с корректным заданием их структуры и взаимодействия. Очевидно, что при рассмотрении тела как набора частиц, поверхности являются искусственно шероховатыми. Характеристики шероховатости, как можно видеть из рис. 4, связаны с размерами элементов.

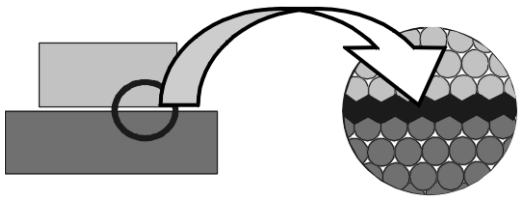


Рис. 4: Искусственная шероховатость поверхностей двух соприкасающихся тел, рассматриваемых как набор частиц.

В общем случае при описании реальной поверхности можно выделить три масштабных уровня: макро- (масштаб моделируемого тела как целого), микро- (масштаб отдельных «бугорков», «впадин», повреждений и небольших трещин) и мезо- (промежуточный уровень, комбинирующий особенности макро- и микромасштабных уровней) [28, 29].

Следовательно, существует два способа для моделирования поверхности контакта:

1. Задать размеры автоматов настолько малыми, чтобы непосредственно (топологически) описать реальный рельеф поверхности. Это позволяет исследовать процессы на всех трёх перечисленных масштабных уровнях. В этом случае поверхностная шероховатость, неоднородность материала, другие структурные дефекты типа повреждений, трещин и прочих задаются явным образом через топологию поверхностного слоя.

2. Задать размеры автоматов достаточно большими для того, чтобы рассматривать контактирующие поверхности как плоские с косвенным заданием шероховатости через шероховатость меньшего масштабного

уровня. Такое приближение позволяет охватить макро- и мезомасштабные уровни. В этом случае, взаимодействие двух контактирующих поверхностей можно описать путем введения сил, зависящих от микропараметров поверхностей.

Даже с учётом мощностей современных компьютеров первый способ позволяет исследовать только малые области контактирующих поверхностей (см. рис. 5, а), поскольку для описания реальных материалов необходимо огромное число элементов. Следовательно, такое приближение может быть использовано для изучения механизмов очень сложных процессов в поверхностном слое материала, например возникновение и накопление повреждений, распространение трещин, изменение поверхностного профиля, структуры и состава материала возле поверхности и другие. Результаты подобных исследований могут быть очень полезными для понимания причин и тенденций явления на мезомасштабном уровне поскольку характерные размеры моделируемой системы соответствуют данному масштабу. Но этого недостаточно для анализа и описания взаимодействия между двумя поверхностями для реального (макро-) масштабного уровня.

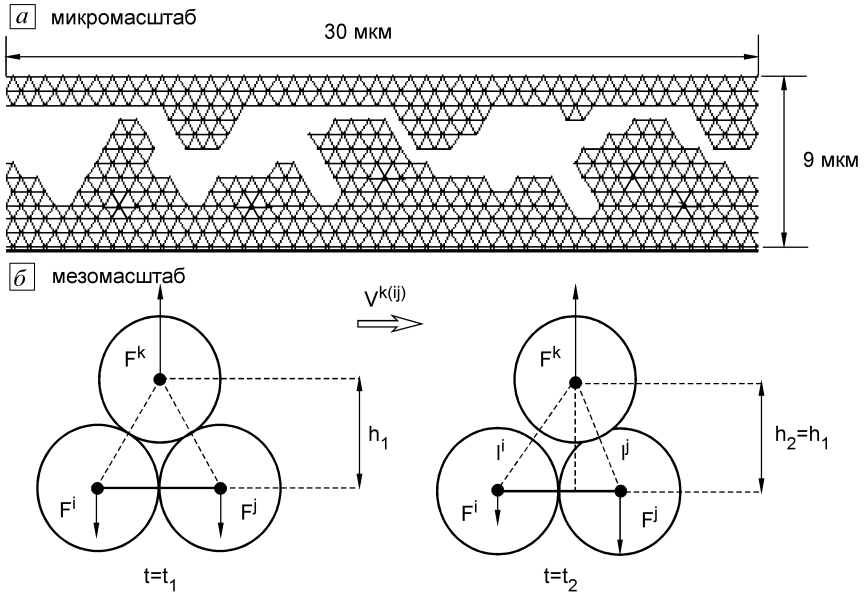


Рис. 5: Два способа описания контактирующих поверхностей: на микромасштабном уровне шероховатость поверхности задается явным образом (а); опосредованное (мезомасштабное) описание шероховатости на основе приближения отрезков в методе МСА (б).

В рамках второго способа описания контактирующие поверхности рассматриваются как совокупность отрезков в двумерном случае и площадок в трёхмерном. В двумерном случае для описания взаимодействия между подвижными автоматами контактирующих поверхностей был разработан новый подход названный методом отрезков. Схема данного подхода приведена на рис. 5, б. Здесь автоматы i и j соответствуют нижней контактирующей

поверхности, автомат k соответствует верхней поверхности. Пара ij рассматривается как отрезок, взаимодействующий с автоматом k. Вводятся два типа взаимодействия между автоматом и отрезком: нормальное (действующее по нормали к отрезку) потенциальное взаимодействие и тангенциальная сила трения.

Нормальное взаимодействие определяется высотой h между автоматом k и отрезком $i-j$. Нормальная сила прикладывается к каждому автомату в треугольнике $k-i-j$ в следующем соотношении. Сила, действующая на автомат k со стороны отрезка $i-j$:

$$F^{k(ij)}\big(h_n^{k(ij)}\big) = E\left(\frac{h_n^{k(ij)} - h_0^{k(ij)}}{h_0^{k(ij)}}\right). \tag{10}$$

Сила, действующая со стороны автомата k на автомат i как часть отрезка $i-j$:

$$F^{(ij)k}\big(h_n^{k(ij)}\big) = \frac{El^j}{r^{ij}}\left(\frac{h_n^{k(ij)} - h_0^{k(ij)}}{h_0^{k(ij)}}\right). \tag{11}$$

Сила, действующая со стороны автомата k на автомат j как часть отрезка $i-j$:

$$F^{(ji)k}\big(h_n^{k(ij)}\big) = \frac{El^i}{r^{ij}}\left(\frac{h_n^{k(ij)} - h_0^{k(ij)}}{h_0^{k(ij)}}\right). \tag{12}$$

Равновесное расстояние (высота) h_0 для взаимодействия «отрезок – автомат» определяется как $h_0 = \sqrt{3}R$ где R — радиус автомата. Можно видеть, что $F^{k(ij)} = F^{(ij)k} + F^{(ji)k}$.

Тангенциальное взаимодействие двух контактирующих поверхностей описывается диссипативной силой трения. В рамках предложенного подхода мезофрагменты соприкасающихся поверхностей рассматриваются как плоские. Тогда тангенциальное взаимодействие «отрезок – автомат» можно записать следующим образом (по аналогии с (10)–(12)):

$$F_{\mathrm{R}}^{k(ij)}\big(V_\tau\big) = F_{\mathrm{R}}, \tag{13}$$

$$F_{\mathrm{R}}^{(ij)k}\big(V_\tau\big) = \frac{F_{\mathrm{R}} l^j}{r^{ij}}, \tag{14}$$

$$F_{\mathrm{R}}^{(ji)k}\big(V_\tau\big) = \frac{F_{\mathrm{R}} l^i}{r^{ij}}. \tag{15}$$

где F_{R} — локальная сила трения.

Сопротивление относительному тангенциальному смещению определяется характеристиками шероховатости поверхностей на микромасштабном уровне. В данной работе общее выражение для локальной силы трения на мезомасштабном уровне имеет вид:

$$F_{\mathrm{R}} = \mu_0 V_\tau + f(\mu_1, K_\mu, \sigma_{\mathrm{N}}, \sigma_0, V_\tau), \tag{16}$$

где первое слагаемое в правой части описывает вязкое трение, а второе — трение, как результат взаимодействия контактирующих областей поверхностей. Здесь V_τ — относительная тангенциальная скорость; μ_0 — коэффициент вязкого трения; f — некоторая функция; μ_1 — коэффициент трения при контакте сухих поверхностей; σ_{N} — локальное значение силы нормального сжатия; σ_0 — предел упругости; K_μ — специальная переменная, эффективно отражающая локальное сопротивление тангенциальному смещению контактирующих поверхностей благодаря их зацеплению на микроуровне.

В общем случае параметры $\mu_0, \mu_1, K_\mu, \sigma_{\mathrm{N}}$ и являются сложными функциями различных факторов микроуровня, таких как локальный профиль контакта поверхностей x, локальное состояние поверхностей и история их взаимодействия L, относительная тангенциальная скорость V_τ локальное значение нормального сжимающего напряжения $\sigma_{\mathrm{N}}^{\mathrm{local}}$ локальная температура T^{local} и т. д. Переменная K_μ также является функцией средней площади контакта S.

Для учёта зависимости перечисленных параметров уравнения (16) от микро- и мезоуровневых переменных могут быть использованы различные теоретические подходы и результаты экспериментов. Использование различных форм зависимости позволит описать и исследовать в деталях различные эффекты, возникающие в процессе трения, на мезо- и макромасштабном уровнях [29, 30].

Таким образом, предложенная модель даёт возможность непосредственно изучать взаимодействие контактирующих поверхностей на двух последовательных масштабных уровнях: мезо- и макро-, а также непосредственно исследовать влияние параметров микроуровня.

Использование мезоскопических моделей трения и износа является очень важным для получения практически важной обобщенной информации об изменениях поверхности (например, сглаживании рельефа) и характеристиках трения.

На практике часто используются макрохарактеристики трения, такие как коэффициент трения двух поверхностей

$$\mu_{\mathrm{dr}} = \frac{F_{\mathrm{dr}}}{F_{\mathrm{N}}}, \tag{17}$$

где F_{dr} — сила сопротивления контактирующих тел относительному тангенциальному движению; F_{N} — приложенная нормальная сила. В зависимости от мезомодели трения можно получить различные формы зависимости μ_{dr} от времени и частоты трения, пройденного пути, начальной температуры и состояния поверхностей, а также других используемых на практике характеристик.

7. Эффективный учёт микрошероховатости поверхности

Для переменной K_μ, описывающей микрошероховатость, очень сложная реальная зависимость $K_\mu(x)$ (см. рис. 6, а) аппроксимируется суперпозицией двух кусочно-периодических функций (см. рис. 6, б). Периодические фрагменты аппроксимирующей функции описываются фрагментами синусоид

$$\begin{cases} K_n = \dfrac{A_1^n}{A}\sin\Big(\pi\dfrac{x_1^n-\ell_1}{\ell_1}\Big) + \dfrac{A_2^n}{A}\sin\Big(\pi\dfrac{x_2^n-\ell_2}{\ell_2}\Big), \\ x_1^n = x_1^{n-1} + V_\tau^n\Delta t, \\ x_2^n = x_2^{n-1} + V_\tau^n\Delta t. \end{cases} \tag{18}$$

Здесь n — номер временного шага; $A_{1(2)}$ и $\ell_{1(2)}$ — амплитуда и полупериод синусоиды, соответственно; x — текущее значение координаты на оси, направленной вдоль линии контакта поверхностей (тангенциальное направление), индексы 1 и 2 отмечают номер синусоиды; A — размер представительного мезообъема.

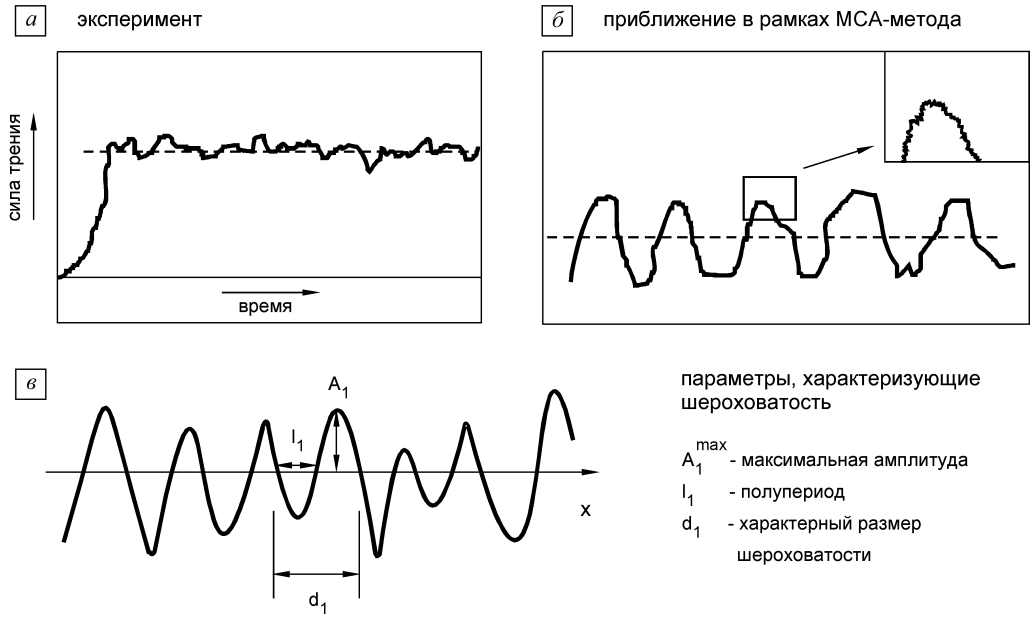


Рис. 6: Действительная (а) и аппроксимирующая (б, в) зависимости мезокоэффициента K_μ от характеристик зацепления поверхностей на микроуровне (то есть, рельефа контакта).

Первая из синусоид (номер 1) в выражении (18) рассматривается как первое (грубое) приближение реальной зависимости $K_\mu(x)$. Вторая синусоида позволяет получать более точное (тонкое) приближение к реальному профилю (см. рис. 6, б).

Каждая синусоидальная компонента сложной кривой $K_\mu(x)$ имеет свое собственное значение амплитуды A, которое коррелирует с заданными средними значениями амплитуд первой и второй синусоид $A_{1(2)}^{\mathrm{av}}$ (см. рис. 6, в).

Для оценки характерной длины регулярного (периодического) участков кривой $K_\mu(x)$ были введены параметры регулярности d_1 и d_2 (см. рис. 6, в). Каждый периодический (синусоидальный) участок кривой имеет свою собственную длину, которая коррелирует со средним заданным значением $d_{1(2)}$.

Очевидно, что значения параметров $d_{1(2)}$ как и $A^{\max}_{1(2)}$ и $\ell_{1(2)}$ могут быть получены из экспериментов или теоретических оценок на основе других моделей [28, 30, 31].

В общем случае кривая $K_\mu(x)$ колеблется около некоторой средней величины K^{av}_μ большей нуля. Эта величина не зависит от F_{N} и определяется только профилем контакта самих поверхностей. Вообще говоря, условие $K^{\mathrm{av}}_\mu > 0$ определяется тем, что на мезоуровне на характерной длине R укладывается множество элементарных единиц поверхности («выпуклостей», «впадин» и т. д.). Так на микроуровне при рассмотрении взаимодействия двух сцепленных «выпуклостей» неизбежно реализуется механизм stick-slip (прерывистого скольжения) и, следовательно, здесь $K^{\mathrm{av}}_\mu = 0$. При взаимодействии двух клеточных автоматов на мезоуровне вне зависимости от взаимодействия элементарных единиц всегда будет существовать некоторое зацепление поверхностей (тем большее, чем больше отношение R к характерному размеру элементарной единицы поверхности), и, следовательно, $K^{\min}_\mu > 0$. Также заметим, что при увеличении R относительное значение амплитуды колебаний K_μ (по отношению к K^{av}_μ. будет уменьшаться до нуля.

Таким образом, при увеличении отношения размера клеточного автомата R к характерному размеру элементарных единиц поверхности величина K^{av}_μ будет расти и достигнет некоторого максимального значения при выходе R на макромасштабный уровень. Относительное значение амплитуды колебаний при этом должно спадать до нуля.

8. Заключение

В работе изложены основы метода подвижных клеточных автоматов и его отличия от других методов частиц, предназначенных для моделирования деформации материалов и сред. Главным существенным отличием МСА является запись уравнений движения с учётом многочастичности взаимодействия элементов. Подробно изложены способы описания поверхностей контактирующих тел в рамках метода МСА. Следует отметить, что данный метод не является закрытым и позволяет применять различные подходы и модели для описания моделируемых сред. Так, в зависимости от функции отклика клеточного автомата, существует возможность описания процессов в твёрдом теле как на мезомасштабном уровне (с явным учётом анизотропии представительных объёмов), так и на макроуровне (в приближении изотропности автоматов).

Важным преимуществом метода МСА в сравнении с методами механики сплошной среды является возможность прямого моделирования процессов разрушения. Такая возможность напрямую вытекает из постулатов метода,

поэтому не нуждается в искусственных построениях.

К сожалению, в рамках одной статьи невозможно охватить все составляющие метода МСА. В частности, не было рассмотрено использование этого метода для многоуровневого моделирования структурированных материалов и сред. Следует отметить, что в настоящее время созданы и апробированы два основных подхода. Первый основан на совместном использовании метода МСА (мезоуровень) с численными методами континуальной механики (макроуровень). Второй подход предполагает поэтапное моделирование методом МСА представительных элементов всех структурных уровней. Для этого проводятся серии расчётов начиная с самого нижнего уровня, где все структурные элементы учитываются явно. На основе анализа результатов этих расчётов определяются функции отклика подвижных клеточных автоматов следующего структурного уровня и функции случайного распределения параметров функций отклика. Полученная таким образом информация позволяет проводить серии расчётов на представительных образцах следующего структурного уровня, и так далее. Подобный подход был успешно применён для моделирования наноструктурной керамики и металлокерамических композитов.

Необходимо отметить, что перспективы развития метода МСА являются достаточно широкими. Так, ведётся работа по развитию на основе МСА так называемого метода гибридных клеточных автоматов, предназначенного для решения двумерных и трёхмерных задач деформирования флюидо- и газонасыщенных сред.

Таким образом, благодаря своим преимуществам метод МСА открывает новые возможности для непосредственного моделирования таких сложных процессов, как перемешивание масс, возникновение и накопление повреждений, распространение трещин, фазовые переходы и химические реакции и т. д.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Darrigol O. Between hydrodynamics and elasticity theory: the first five births of the Navier-Stokes equation // Arch. Hist. Exact Sci. 2002. Vol. 56. P. 95-150.

2. Левин В. А. Нелинейная вычислительная механика прочности. Т. 1. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. Под ред. В. А. Левина. М.: Физматлит, 2015. 454 с.

3. Левин В. А., Вершинин А. В. Нелинейная вычислительная механика прочности. Т. 3. Численные методы. Реализация на высокопроизводительных вычислительных системах. Под ред. В. А. Левина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. 543 с.

4. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URRS, 2015. 400 с.

5. Cundall P. A., Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies // Geotechnique. 1979. Vol. 29. No. 1. P. 47-65.

6. Cundall P. A. A computer simulations of dense sphere assembles // Micromechanics of granular materials / Eds. by M. Satake and J.T. Jenkins. Amsterdam: Elsever Sci. Publ., 1988. P. 113-123.

7. Herrmann H. J. Simulating granular media on the computer // 3rd Granada lectures in computational physics / Eds. by P.L. Garrido and J. Marro. Heidelberg: Springer, 1995. P. 67-114.

8. Hemmingsson J., Herrmann H. J., Roux S. On stress networks in granular media // J. Phys. I. 1997. Vol. 7. P. 291-302.

9. Walton O. R. Numerical simulation of inclined chute flows of monodisperse, inelastic, frictional spheres // Mechanics of Materials. 1993. Vol. 16. P. 239-247.

10. Luding S. Granular materials under vibration: Simulations of rotating spheres // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52. No. 4. P. 4442.

11. Pöschel T. Granular material flowing down an inclined chute: A molecular dynamic simulation // J. Phys. II. 1993. V. 3. P. 27.

12. Greenspan D. Particle modeling in science and technology // Coll. Math. Societatis Janos Bolyai. 1988. №. 50. P. 51.

13. Ostermayer G. P. Friction models with discrete layers // Z. Angew. Math. Mech. 2000. Vol. 80. P. 61-64.

14. Mustoe G. G. W. A generalized formulation of the discrete element method // Engineering computations. 1992. Vol. 9. P. 181-190.

15. Bićanić N. Discrete element methods. In: E. Stein, R. Borst, T.J.R. Hughes (Eds.), Encyclopedia of computational mechanics. Vol. 1: Fundamentals, Wiley, Chichester, 2004. P. 311-337.

16. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 640 с.

17. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 218 с.

18. Псахье С. Г., Хори Я., Коростелев С. Ю., Смолин А. Ю., Дмитриев А. И., Шилько Е. В., Алексеев С. В. Метод подвижных клеточных автоматов, как инструмент для моделирования в рамках физической мезомеханики // Изв. вузов. Физика. 1995. № 11. С. 58-69.

19. Псахье С. Г., Коростелев С. Ю., Смолин А. Ю., Дмитриев А. И., Шилько Е. В., Моисеенко Д. Д., Татаринцев Е. М., Алексеев С. В. Метод подвижных клеточных автоматов как инструмент физической мезомеханики материалов // Физическая мезомеханика. 1998. Т. 1. № 1. С. 95-108.

20. Дмитриев А.И., Коростелев С.Ю., Остермайер Г.П., Псахье С.Г., Смолин А.Ю., Шилько Е.В. Метод подвижных клеточных автоматов, как инструмент для моделирования на мезоуровне // Известия РАН. Механика твердого тела. 1999. № 6. С. 87-94.

21. Psakhie S., Shilko E., Smolin A., Astafurov S., Ovcharenko V. Development of a formalism of movable cellular automaton method for numerical modeling of fracture of heterogeneous elastic-plastic materials // Frattura ed Integrità Strutturale. Vol. 24. 2013. P. 26-59.

22. Shilko E.V., Psakhie S.G., Schmauder S., Popov V.L., Astafurov S.V., Smolin A.Yu. Overcoming the limitations of distinct element method for multiscale modeling of materials with multimodal internal structure // Computational Materials Science. 2015. Vol. 102. P. 267-285.

23. Mikhailov A.S. Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems. Berlin: Springer, 1994. 112 p.

24. Смолин А.Ю., Роман Н.В., Добрынин С.А., Псахье С.Г. О вращательном движении в методе подвижных клеточных автоматов // Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12, № 2. С. 17-22.

25. Foiles S.M., Baskes M.I., Daw M.S. Embeded-atom-method functions for the f.c.c. metals Cu, Ag, Au, Ni, Pd, Pt and their alloys // Physical Review B. 1986. Vol. 33. No. 12. P. 7983-7991.

26. Psakhie S.G., Zolnikov K.P., Kryzhevich D.S., Protodefect as a basis of multilevel nanoscale plasticity of crystal materials // American Institute of Physics. 2008. Vol. 999 P. 20-31.

27. Корчуганов А.В., Зольников К.П., Крыжевич Д.С., Чернов В.М., Псахье С.Г. Моделирование зарождения пластической деформации в механически-нагруженных кристаллитах при радиационном воздействии // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 2015. Т. 38, Вып. 1. С. 42-48.

28. Крагельский И.В. Трение и износ. М.: Машгиз., 1962. 384 с.

29. Tworzydlo W.W., Cecot W., Oden J.T., Yew C.H. Computational micro- and macroscopic models of contact and friction: formulation, approach and applications // Wear. 1999. Vol. 220. P. 113-140.

30. Rozman M.G., Urbakh M., Klafter J. Stick-slip dynamics of interfacial friction // Physica A. 1998. Vol. 249. P. 184-189.

31. Raharijaona F., Roizard X., Stebut J. Usage of 3D roughness parameters adapted to the experimental simulation of sheet-tool contact during a drawing operation // Tribology International. 1999. Vol. 32. P. 59-67.

REFERENCES

1. Darrigol, O. 2002, "Between hydrodynamics and elasticity theory: the first five births of the Navier-Stokes equation", *Arch. Hist. Exact Sci.*, vol. 56. pp. 95-150.

2. Levin, V. A. 2015, *Nonlinear computational mechanics of strength. V. 1. Models and methods. Nucleation and development of defects. Eds. V. A. Levin*, Physmatlit, Moscow. (inRussian)

3. Levin, V. A. & Vershinin, A. V. 2015, *Nonlinear computational mechanics of strength. V. 3. Numerical methods. Implementation for high-performance computers. Eds. V. A. Levin*, Physmatlit, Moscow. (inRussian)

4. Morozov, E. M., Levin, V. A. & Vershinin, A. V. 2015, *Strength analysis. Fidesis for engineers*, URRS, Moscow. (inRussian)

5. Cundall, P. A. & Strack, O. D. L. 1979, "A discrete numerical model for granular assemblies", *Geotechnique*, vol. 29. No. 1. pp. 47-65.

6. Cundall, P. A. 1988, "A computer simulations of dense sphere assembles", *Micromechanics of granular materialsEds. Eds. by M. Satake and J.T. Jenkins. Amsterdam: Elsever Sci. Publ.*, pp. 113-123.

7. Herrmann, H. J. 1995, "Simulating granular media on the computer", *3rd Granada lectures in computational physics. Eds. by P.L. Garrido and J. Marro. Heidelberg: Springer*, pp. 67-114.

8. Hemmingsson, J., Herrmann, H. J. & Roux, S. 1997, "On stress networks in granular media", *J. Phys. I*, vol. 7. pp. 291-302.

9. Walton, O. R. 1993, "Numerical simulation of inclined chute flows of monodisperse, inelastic, frictional spheres", *Mechanics of Materials*, vol. 16. pp. 239-247.

10. Luding, S. 1995, "Granular materials under vibration: Simulations of rotating spheres", *Phys. Rev. E*, vol. 52. No. 4. pp. 4442.

11. Pöschel, T. 1993, "Granular material flowing down an inclined chute: A molecular dynamic simulation", *J. Phys. II*, vol. 3. pp. 27.

12. Greenspan, D. 1988, "Particle modeling in science and technology", *Coll. Math. Societatis Janos Bolyai.*, №. 50. pp. 51.

13. Ostermayer, G. P. 2000, "Friction models with discrete layers", *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 80. pp. 61-64.

14. Mustoe, G. G. W. 1992, "A generalized formulation of the discrete element method", *Engineering computations*, vol. 9. pp. 181-190.

15. Bićanić, N. 2004, "Discrete element methods", In: *E. Stein, R. Borst, T.J.R. Hughes (Eds.), Encyclopedia of computational mechanics. Vol. 1: Fundamentals, Wiley, Chichester*, pp. 311-337.

16. Hockney, R.W. & Eastwood, J.W. 1981, *Numerical Simulation by the Particle Method*, McGraw-Hill International Book Company.

17. Potter, D. 1973, *Computational Physics*, John Wiley & Sons Ltd., London.

18. Psakhie, S.G., Horie, Y., Korostelev, S.Yu., Smolin, A.Yu., Dmitriev, A.I., Shilko, E.V. & Alekseev, S.V., 1995, "Method of movable cellular automata as a tool for simulation within the framework of mesomechanics", *Russian Physics Journal*, vol. 38. № 11, pp. 1157-1168.

19. Psakhie, S.G., Korostelev, S.Yu., Smolin, A.Yu., Dmitriev, A.I., Shilko, E.V., Moiseyenko, D,D., Tatarintsev, E.M. & Alexeev, S.V. 1998, "Movable cellular automata method as a tool for physical mesomechanics of materials", *Physical Mesomechanics*, vol. 1, No. 1 pp. 89-102.

20. Dmitriev, A.I., Korostelev, S.Yu., Ostermeyer, G.P., Psakhie, S.G., Smolin, A. Yu. & Shilko, E.V. 1999, "Movable cellular automata method as a tool for simulation at the mesolevel", *Proc. of RAS. Mechanics of solids*, vol. 6. pp. 87-94.

21. Psakhie, S., Shilko, E., Smolin, A., Astafurov, S. & Ovcharenko, V. 2013, "Development of a formalism of movable cellular automaton method for numerical modeling of fracture of heterogeneous elastic-plastic materials", *Frattura ed Integrità Strutturale*, vol. 24. pp. 26-59.

22. Shilko, E.V., Psakhie, S.G., Schmauder, S., Popov, V.L., Astafurov, S.V. & Smolin, A.Yu. 2015, "Overcoming the limitations of distinct element method for multiscale modeling of materials with multimodal internal structure", *Computational Materials Science*, vol. 102. pp. 267-285.

23. Mikhailov, A.S. 1994, *Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems*. Springer, Berlin.

24. Smolin, A.Y., Roman, N.V., Dobrynin, S.A. & Psakhie, S.G. 2009, "On rotation in the movable cellular automaton method", *Physical Mesomechanics* vol. 12. № 2. pp. 17-22.

25. Foiles, S.M., Baskes, M.I. & Daw, M.S. 1986, Embeded-atom-method functions for the f.c.c. metals Cu, Ag, Au, Ni, Pd, Pt and their alloys", *Physical Review B*, vol. 33. No. 12. pp. 7983-7991.

26. Psakhie, S.G., Zolnikov, K.P. & Kryzhevich, D.S. 2008, "Protodefect as a basis of multilevel nanoscale plasticity of crystal materials", *American Institute of Physics*, vol. 999. pp. 20-31.

27. Korchuganov, A. V., Zolnikov, K. P., Kryzhevich, D. S. Chernov, V. M. & Psakhie, S. G. 2016, "MD simulation of plastic deformation nucleation in stressed crystallites under irradiation", *Physics of Atomic Nuclei*, vol. 79. iss. 7. pp. 1193-1198.

28. Kragelskii, I. V. 1962, *Friction and Wear*, Mashgiz, Moscow.

29. Tworzydlo, W. W., Cecot, W., Oden, J. T. & Yew, C. H. 1999, "Computational micro- and macroscopic models of contact and friction: formulation, approach and applications", *Wear*, vol. 220. P. 113-140.

30. Rozman, M. G., Urbakh, M. & Klafter, J. 1998, "Stick-slip dynamics of interfacial friction", *Physica A*, vol. 249. pp. 184-189.

31. Raharijaona, F., Roizard, X. & Stebut, J. 1999. "Usage of 3D roughness parameters adapted to the experimental simulation of sheet-tool contact during a drawing operation", *Tribology International*, vol. 32, pp. 59-67.

Получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.89 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-461-468

ЗАТВЕРДЕВАНИЕ ВОДЫ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ СЖАТИИ И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА ДИНАМИКУ УДАРНЫХ ВОЛН[1]

А. С. Савиных[2], Г. В. Гаркушин[3], Г. И. Канель[4], С. В. Разоренов[5] (г. Москва)

Аннотация

В экспериментах со ступенчатым сжатием воды наблюдалось ее превращение в лед VII, которое происходит из «переохлажденного» на примерно 40 K, состояния. Регистрировались как релаксация давления в результате превращения в поверхностном слое, так и дисперсия волны сжатия, распространяющейся по воде с параметрами, требуемыми для начала превращения.

Ключевые слова: ударные волны, высокие давления, вода, затвердевание.

Библиография: 14 названий.

SOLIDIFICATION OF WATER UNDER DYNAMIC COMPRESSION AND ITS INFLUENCE ON THE EVOLUTIONS OF SHOCK WAVES

A. S. Savinykh, G. V. Garkushin, G. I. Kanel', S.V. Razorenov (Moscow)

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект номер 14-50-00124).

[2]Савиных Андрей Сергеевич, старший научный сотрудник Института проблем химической физики РАН, savas@ficp.ac.ru

[3]Гаркушин Геннадий Валерьевич, старший научный сотрудник Института проблем химической физики РАН, garkushin@ficp.ac.ru

[4]Канель Геннадий Исаакович, член-корреспондент Российской академии наук, заместитель директора Объединенного института высоких температур РАН, kanel@ficp.ac.ru

[5]Разоренов Сергей Владимирович, заведующий лабораторией Института проблем химической физики РАН, razsv@ficp.ac.ru

Abstract

The transition of water into the ice VII phase was observed in experiments with its step-like shock compression. The transition occurs from a state "overcooled" by approximately 40 K. In the experiments, we observed relaxation of pressure as a result of the transition on a surface of LiF window as well as dispersion of the compression wave which propagates through the water with the state parameters needed for beginning of the transformation.

Keywords: shock waves, high pressures, water, solidification.

Bibliography: 14 titles.

1. Введение

При существующих методах приближенных вычислений и мощностях вычислительной техники точность описания реальных физических процессов и явлений, даже в рамках таких крупных программных комплексов как Фидесис [1], самым непосредственным образом зависит от точности описания свойств среды. В частности, при анализе действия взрыва или высокоскоростного удара в воде, то есть, казалось бы, в простой ситуации, не связанной с проблемами упругопластических деформаций, встает вопрос о реальной вязкости сжатой воды, о возможном ее затвердевании при сжатии и о влиянии этих факторов на параметры и динамику ударных волн в воде. Что касается вязкости воды в условиях ударного сжатия, то в течение длительного времени сведения о ней были противоречивы. В экспериментах [2] с регистрацией возмущений поверхности ударной волны, основанных на идее Сахарова и Зайделя [3], было найдено, что вязкость ударно-сжатой воды и ртути близка к вязкости твердых тел. С другой стороны, измерения, в частности, примесной электропроводности ударно-сжатого глицерина [4] дали значения вязкости, мало отличающиеся от ее значений в нормальных условиях. Наши недавние измерения ширины ударной волны [5] дали значения вязкости глицерина, близкие к оценкам, основанным на измерении примесной электропроводности. Помимо прочего, это совпадение свидетельствует о малости вклада скорости деформации в величину коэффициента вязкости жидкостей. Эволюция ударной волны с синусоидальными возмущениями была детально проанализирована в работе [6], на основе чего твердотельные значения вязкости ударно-сжатой воды были объяснены ее превращением в лед VII при ударном сжатии. Нужно сказать, что это фазовое превращение исследуется, начиная еще с шестидесятых годов прошлого века. На рисунке 1 показана часть фазовой диаграммы воды, из которой следует, что необратимый нагрев вещества в ударной волне не допускает возможности превращения воды в лед VII при однократном ударном сжатии. Однако это превращение возможно при безударном изэнтропическом и ступенчатом ударном сжатии. В работе [7] превращение воды в лед VII при двухэтапном ударном сжатии, где давление за первой ударной волной находилось

в диапазоне от 1.8 до 3.5 ГПа, а конечное давление от 3.9 до 10 ГПа, было зафиксировано по рассеянию света, как предполагается, смесью воды с частицами льда. В дальнейшем в работах [8-11] была зафиксирована релаксация давления и подтверждена потеря гомогенности воды при ступенчатом или безударном изэнтропическом сжатии. Остается, однако, неясным, имеет ли превращение объемный характер или происходит лишь в тонком слое у поверхности окна, через которое производится его регистрация и на которой происходит нуклеация частиц льда. Использование в качестве окна кварцевого стекла стимулирует быструю нуклеацию льда VII благодаря, как предполагается, наличию гидроксильных групп на поверхности, в то время как при использовании сапфирового окна превращение требует более высокого давления или вообще не происходит. В данной работе расширен диапазон давлений при использовании окна из фтористого лития.

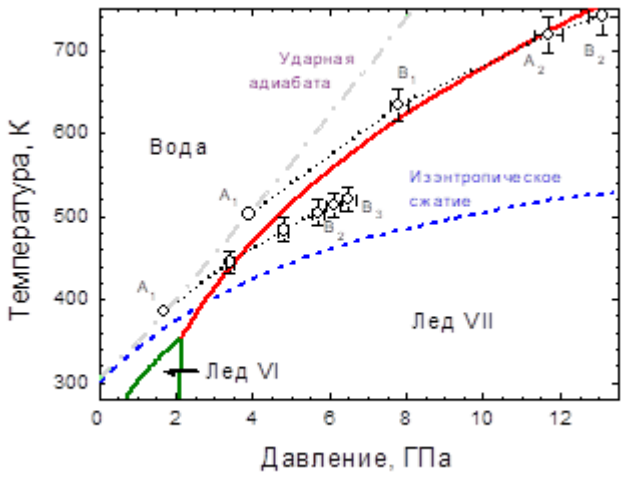


Рис. 1: Фазовая диаграмма воды в области температур выше 0 C° [8]. Круглые маркеры, соединенные пунктирной линией показывают изменение состояния воды при ступенчатом сжатии в опытах 2 (нижний ряд точек) и 3.

2. Постановка экспериментов

Эксперименты проведены с дистиллированной водой при комнатной температуре. Вода заливалась в герметичную кювету, дном которой являлся металлический экран, через который в образец вводилась ударная волна, а крышкой было окно из монокристалла фтористого лития. Толщина слоя воды находилась в пределах от 0.9 мм до 1.35 мм. Экран (дно кюветы) изготавливался из алюминия, меди или молибдена. Ударная волна в экране создавалась ударом алюминиевой пластины со скоростью в диапазоне от 300 м/с до 2600 м/с. Разгон ударников до скорости 300–350 м/с осуществлялся с помощью ствольной метательной установки — «газовой пушки». Для высоко-

скоростного метания использовались взрывные устройства. В экспериментах с помощью лазерного Допплеровского измерителя скорости VISAR [12] регистрировалась история изменения скорости поверхности контакта окна с образцом $u_p(t)$ в процессе выхода на нее волн сжатия. Для отражения зондирующего лазерного излучения прибора VISAR на поверхность окна, обращенную к образцу, вакуумным напылением наносился тонкий отражающий слой алюминия. При использовавшихся параметрах оборудования временное разрешение измерений составляло примерно 1.5 нс.

3. Результаты измерений

Результаты измерений показаны на рисунках 2 и 3 в виде профилей скорости контактной поверхности воды и окна из фтористого лития как функции времени, $u(t)$. Условия опытов приведены в таблице 1.

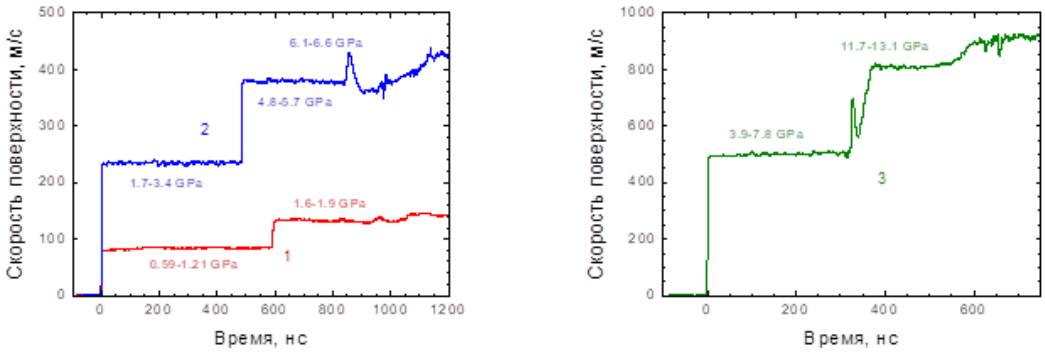


Рис. 2: Результаты опытов при скорости удара 295 м/с и 1095 м/с. Использовались экоаны из алюминия и меди, соответственно. Числа указывают давление перед и после отражения соответствующей ударной волны от окна LiF.

Рис. 3: Результат опыта со скоростью удара 2600 м/с с использованием экрана из молибдена.

Таблица 1: Параметры экспериментов по ступенчатому ударному сжатию воды

Номер опыта	Скорость удара, м/с (±5%)	Материал экрана	Толщина слоя воды, мм
1	293	Алюминий	0.94
2	1095	Медь	1.34
3	2600	Молибден	1.28

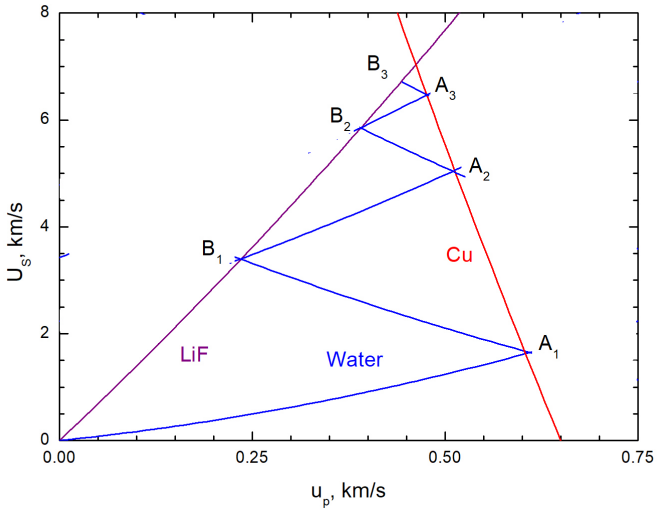


Рис. 4: Диаграмма ступенчатого ударного сжатия воды в опыте 2, показанном на рис. 2.

На рисунке 4 поясняется ступенчатое нарастание давления в воде в процессе многократных отражений ударных волн между экраном и окном. Значения массовой скорости за ударной волной регистрировались на поверхности контакта окна LiF с водой — точки Bi в то время как параметры ударных волн, подходящих к этой поверхности, соответствуют точкам Ai на ударной адиабате торможения медного экрана. Ударные адиабаты воды, медного экрана и материала окна — фтористого лития взяты из [13].

В опыте 1 не достигается давление 2.6 ГПа, соответствующее пересечению изэнтропы с линией равновесия вода-лед VII, затвердевание воды в этом опыте происходить не должно, волновой профиль особенностей не имеет. Время нарастания параметров в ударных волнах находится на пределе временного разрешения измерений, что говорит о сохранении низкой вязкости воды в процессе ступенчатого сжатия. В опыте 2 первые две ступени особенностей не имеют, а выход на поверхность окна следующей ударной волны сопровождается значительной релаксацией давления, подобной наблюдавшейся в работах [8-10]. После релаксации наблюдается постепенное восстановление давления. На рисунке 1 оценочно показан ход изменения состояния в процессе ступенчатого сжатия. Видно, что состояние на второй «ступеньке» с давлением B2 = 5.7 ГПа находится на фазовой диаграмме далеко в области льда VII, однако превращение начинается лишь при увеличении давления до 6.1 или 6.5 ГПа (неопределенность связана с тем, что неясно, начинается ли превращение у экрана или у поверхности окна). Отклонение по температуре от линии межфазного равновесия, то есть переохлаждение воды перед началом превращения, составляет примерно 40 K. В опыте 3 с давлением в первой ударной волне в воде 3.9 ГПа межфазная граница вода-лед VII пере-

ходится уже на второй ступеньке. Хотя при этом состояние вещества значительно меньшее уходит от межфазной границы, чем в опыте 2, на волновом профиле четко фиксируется релаксация давления и его быстрое восстановление во второй ступеньке. Новым является то, что следующая волна сжатия, пришедшая на поверхность окна (третья ступенька), весьма размыта. Относительно большое время нарастания параметров в ней может иметь два объяснения: либо мы имеем дело с волной сжатия, распространяющейся по льду VII, имеющему вязкость много больше, чем вода, либо в этой волне происходи превращение воды в лед VII за время примерно 40-50 нс. Второе предположение подкрепляется тем обстоятельством, что давление 13.1 ГПа на второй регистрируемой ступеньке точно соответствует построениям, подобным приведенным на рис. 4, с использованием ударной адиабаты воды, то есть без учета ее превращения.

4. Заключение

Проведенные эксперименты со ступенчатым сжатием воды в области ее превращения в лед VII. Подтверждено превращение из «переохлажденного», то есть отклоняющегося от линии межфазного равновесия на примерно 40 K, состояния. Не подтверждена необходимость наличия кварцевого стекла для нуклеации превращения: эксперименты указывают на зарождение превращения у поверхности окна из монокристалла фтористого линия и на поверхности металлического экрана. Регистрировались как релаксация давления в результате превращения в поверхностном слое, так и дисперсия волны сжатия, распространяющейся по воде с параметрами, требуемыми для начала превращения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URRS, 2015 — 400 с.

2. В. Н Минеев, Р. М. Зайдель. Вязкость воды и ртути при ударном сжатии. ЖЭТФ, 1968, Т. 54, № 6, С. 1633

3. А. Д. Сахаров, Р.М. Зайдель, В.Н. Минеев, А.Г. Олейник. Экспериментальное исследование устойчивости ударных волн и механических свойств вещества при высоких давлениях и температурах // ДАН СССР. - 1964. - Т.159, N 5. - С.1019-1022.

4. А. Н. Дремин, Д.И. Кузнецов, В.М. Шунин, В.В. Якушев. Вязкость и электропроводность глицерина при высоких динамических и статических давлениях. ЖФХ, 1980, Т. 54, вып. 1., С. 135-139

5. Г. И. Канель, А. С. Савиных, Г. В. Гаркушин, С. В. Разоренов. Оценка вязкости глицерина по ширине слабой ударной волны. Теплофизика высоких температур, т. 55, № 3, сс. 380–385.

6. G. H. Miller and T. J. Ahrens. Shock-wave viscosity measurement. Reviews of Modern Physics, 1991, V. 63, No. 4, pp. 919-947

7. С. Б. Кормер, К.Б. Юшко, Г.В. Кришкевич. Фазовое превращение воды в лед VII при ударном сжатии. ЖЭТФ, 1968, Т. 54, № 6, С. 1640

8. D. H. Dolan, Y.M. Gupta. Time-dependent freezing of water under dynamic compression. Chemical Physics Letters 374 (2003) 608–612

9. D. H. Dolan, J. N. Johnson, and Y. M. Gupta. Nanosecond freezing of water under multiple shock wave compression: Continuum modeling and wave profile measurements. J. Chem. Phys. 123, 064702 (2005)

10. D. H. Dolan, M. D. Knudson, C. A. Hall and C. Deeney. A metastable limit for compressed liquid water. Nature Physics 2007, V. 3 pp. 339-342

11. Stafford S.J.P., Chapman D.J., Bland S.N., and Eakins D.E. Observations on the nucleation of ice VII in compressed water. // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1793, P. 130005.

12. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортов В.Е.. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996. 407 с.

13. L.M. Barker and R.E. Hollenbach. Laser interferometer for measuring high velocities of any reflecting surface. J. Appl. Phys. 43, 4669 (1972)

14. S. P. Marsh (Ed.), LASL Shock Hugoniot Data, (Univ. California Press, Berkeley, 1980)

REFERENCES

1. Morozov, EM, Levin, VA & Vershinin, AV 2015, *Prochnostnoy analiz. Fidesis v rukakh inginera [The Strength analysis. Fidesys in the hands of an engineer]*, URRS, Moscow.

2. Mineev, V.N. & Zaidel', R.M. 1968, "The Viscosity of Water and Mercury Under Shock Loading", *JETP*, vol. 27, no 6, pp. 874-878.

3. Sakharov, A.D., Zaidel', R.M., Mineev, V.N. & Ole'lnik A.G. 1964, "Experimental Investigation of the Stability of Shock Waves and the Mechanical Properties of Matter at High Pressures and Temperatures" *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol.159, no. 5, pp.1019-1022.

4. Dremin, A.N., Kuznetsov, D.I., Shunin, V.M. & Yakushev V.V. 1980, "Viscosity and Electric-Conductivity of Glycerol at High Dynamic and Static Pressures" *Zhurnal Fizicheskoi Khimii*, vol. 54, no. 1, pp. 135-139.

5. Kanel', G.I., Savinykh, A.S., Garkushin, G.V. & Razorenov, S.V. 2017, "Evaluation of Glycerol Viscosity through the Width of a Weak Shock Wave", *High Temperature*, vol. 55, no. 3, pp. 365–369. https://doi.org/10.1134/S0018151X17030105

6. Miller, G.H. & Ahrens, T.J. 1991, "Shock-Wave Viscosity Measurement", *Reviews of Modern Physics*, vol. 63, no. 4, pp. 919-947. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.63.919

7. Kormer, S.B., Yushko, K.B. & Krishkevich, G.V. 1968, "Phase Transformation of Water into Ice VII by Shock Compression", *JETP*, vol. 27, no 6, pp. 879-881.

8. Dolan, D.H. & Gupta, Y.M. 2003, "Time-Dependent Freezing of Water Under Dynamic Compression", *Chem. Phys. Letters*, vol. 374, pp. 608–612. https://doi.org/10.1016/S0009-2614(03)00777-2

9. Dolan, D.H., Johnson, J.N., & Gupta, Y.M. 2005 "Nanosecond Freezing of Water Under Multiple Shock Wave Compression: Continuum Modeling and Wave Profile Measurements", *J. Chem. Phys*, vol. 123, P. 064702. https://doi.org/10.1063/1.1993556

10. Dolan, D.H., Knudson, M.D., Hall, C.A. & Deeney, C. 2007, "A Metastable Limit for Compressed Liquid Water", *Nature Physics*, vol. 3, pp. 339-342. doi:10.1038/nphys562.

11. Stafford, S.J.P., Chapman, D.J., Bland, S.N., & Eakins, D.E. "Observations on the Nucleation of Ice VII in Compressed Water", *AIP Conf. Proc.* 2017. vol. 1793, P. 130005. https://doi.org/10.1063/1.4971716

12. Kanel, GI, Razorenov, SV, Utkin, AV & Fortov, VE 1996, *Udarno-Volnovye Yavleniya V Kondensirovannyh Sredah [Shock Wave Phenomena in Condensed Media]*, Yanus-K, Moscow.

13. Barker, L.M. & Hollenbach, R.E. 1972, "Laser Interferometer for Measuring High Velocities of any Reflecting Surface", *J. Appl. Phys*, vol. 43, P. 4669. https://doi.org/10.1063/1.1660986

14. Marsh SP (Ed.) 1980, *LASL Shock Hugoniot Data*. Univ. California Press. Berkeley.

Получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3, 544 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-469-481

О БЛОКИРУЮЩИХ ДЕФОРМАЦИЯХ В МЕХАНОХИМИИ ФРОНТОВ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

А. Б. Фрейдин[1], Л. Л. Шарипова[2], Н. Ф. Морозов[3] (г. Санкт-Петербург)

Аннотация

На основе концепции тензора химического сродства исследуется влияние напряжений и деформаций на скорость химической реакции. Рассматривается реакция между деформируемым твердым и диффундирующим газообразным компонентами. Реакция локализована на фронте и поглощает все подводимое диффузией вещество. Примерами таких реакций являются окисление или литизация кремния. Тензорность химического сродства связана с тем, что в деформируемом материале следует рассматривать реакции не в точках, а на ориентированных площадках. Кинетическое уравнение принимает вид зависимости скорости реакции на ориентированной площадке от нормальной компоненты тензора сродства. Напряженно-деформированное состояние влияет на скорость реакции и, следовательно, на скорость фронта реакции через сродство – постольку, поскольку напряжения и деформации влияют на сродство. Если нормальная компонента тензора сродства отрицательна, то реакция невозможна. Деформации и напряжения, при которых нормальная компонента тензора сродства не может быть положительной ни при каких концентрациях диффундирующего компонента и ни при каких ориентациях площадок, образуют запретные зоны в пространстве деформаций или напряжений. В статье развивается процедура построения запретных зон для случая малых деформаций. В результате использования соотношений для скачков деформаций и напряжений, нормальная компонента тензора сродства представляется в виде зависимости от деформаций или напряжений по одну из сторон фронта реакции, и нормали к границе. Затем показывается, что ее

[1]Фрейдин Александр Борисович, заведующий отделом математических методов механики материалов и конструкций Института проблем машиноведения РАН, alexander.freidin@gmail.com

[2]Шарипова Лия Львовна, старший научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН, sleah07@gmail.com

[3]Морозов Никита Федорович, академик Российской академии наук, заведующий кафедрой теории упругости в Санкт-Петербургском государственном университете, morozov@nm1016.spb.edu

границы определены максимумом и минимумом квадратичной формы, исследовавшейся ранее в связи с построением зон фазовых переходов. Положение и размеры запретных зон в пространстве деформаций зависят от вклада химических энергий компонентов реакции относительно энергии деформаций. Запретная зона уменьшается при уменьшении относительного вклада энергии деформаций. Помимо деформаций, соответствующих запретным зонам, рассматриваются деформации, при которых заблокированная реакция может вновь запуститься в результате неупругого деформирования или за счет диффузии.

Ключевые слова: Тензор химического сродства, механохимия, кинетика фронта химических реакций, блокирующие деформации, запретные зоны.

Библиография: 20 названий.

ON LOCKING STRAINS IN MECHANOCHEMISTRY OF CHEMICAL REACTIONS FRONTS

A. B. Freidin, L. L. Sharipova, N. F. Morozov (Saint Petersburg)

Abstract

The influence of stresses and strains on the chemical reaction rate is studied basing on the concept of the chemical affinity tensor. The reaction between a deformable solid and diffusive gaseous constituents is considered. The reaction is localized at the reaction front and consumes all the matter supplied by the diffusion. Silicon oxidation and lithiation are examples of such a reaction. Tensorial nature of the chemical reaction is manifestation of the fact that in the case of deformable material the reaction is to be considered not in a point but at an oriented area element. A kinetic equation takes the form of the dependence of the reaction rate at the oriented area element on the normal component of the chemical affinity tensor. Stress-strain state affects the reaction rate as it affects the chemical affinity tensor. If the normal component of the affinity tensor is negative then the reaction at the oriented area element is impossible. Strains and stresses at which the normal component of the affinity tensor cannot be positive at any orientation or concentration of the diffusive constituent form forbidden zones in strain or stress space. A procedure for forbidden zones construction is developed. The use of the jump relationships for stresses and strains allows to present the normal component of the chemical affinity tensor as a dependence on strains/stresses on one side of the reaction front and the normal to the front. Then it is shown that the boundaries of the zone are determined by maximum and minimum of a quadratic form that was earlier studied for phase transitions zones construction. The location and sizes of the zone depend on the input of the chemical energies of the constituents relatively to strain energies. Besides the deformations which correspond to

forbidden regions, blocking deformations are also considered which can be unblocked and started-up due to inelastic strains or diffusion.

Keywords: Chemical affinity tensor, mechanochemistry, chemical reaction front kinetics, blocking strains, forbidden regions.

Bibliography: 20 titles.

1. Введение

Влияние напряженно-деформированного состояния на скорость химических реакций во многом остается неясным, при том, что современные инженерные задачи приводят к необходимости тонкого учета влияния напряжений на кинетику фронтов химических реакций. Особенно остро эти вопросы встают в связи с миниатюризацией конструкционных элементов. В данной работе на основе подхода к постановке и решению связанных задач механохимии, основанного на концепции тензора химического сродства [1, 2, 3, 4, 5], исследуется запирающий эффект — блокирование распространения фронта реакции напряжениями, действующими на фронте. Отметим, что исследованиям химических реакций предшествовали исследования фазовых переходов (см., напр., [6, 7]), причем помимо моделей с явным введением фазовых границ рассматривались и другие подходы, например, модели фазового поля (см., напр., [8, 10]).

Напомним, что в классической физической химии химическим сродством реакции называется множитель A, появляющийся в выражении производства энтропии $P[S]$ при скорости реакции ω:

$$TP[S] = A\omega,$$

где T — температура. Далее рассмотрим химическую реакцию вида

$$n_- B_- + n_* B_* \to n_+ B_+, \tag{1}$$

где B_-, B_* и B_+ — химические формулы реагирующих компонент, причем B_- и B_+ являются деформируемыми твердыми компонентами, а B_* — диффундирующей компонентой, n_-, n_* и n_+ — стехиометрические коэффициенты. Полагаем, что химическая реакция локализована на фронте реакции Γ — поверхности, разделяющей области, занятые материалами B_- и B_+, и поддерживается диффузией компоненты B_* сквозь образовавшийся материал B_+ (Рис. 1). Полагаем также, что все подошедшее к фронту реакции вещество расходуется на реакцию. Примером реакции рассматриваемого типа является реакция окисления кремния

$$Si + O_2 \to SiO_2$$

Для реакции (1) химическое сродство равно

$$A = n_1 M_1 \mu_1 + n_2 M_2 \mu_2 - n_3 M_3 \mu_3$$

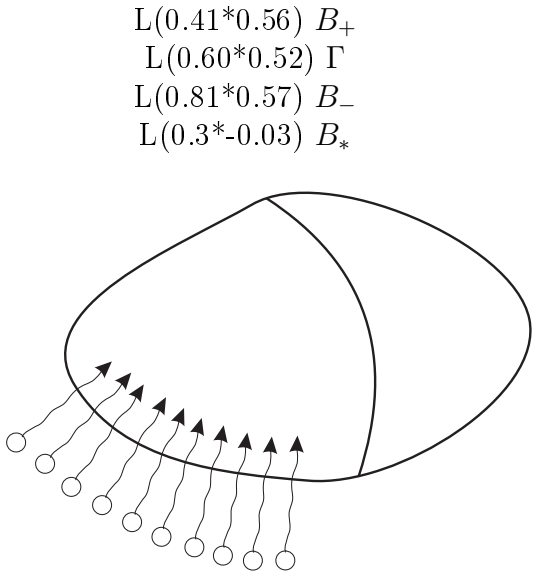


Рис. 1: Деформируемое тело с фронтом химической реакции, поддерживаемой диффузией

где μ_i и M_i $(i = 1...4)$ — химические потенциалы на единицу массы и молярные массы компонент реакции. Химическому равновесию соответствует $A = 0$, а прямая реакция возможна только если $A > 0$.

В общем случае химическое сродство

$$A = -\sum n_i M_k \mu_i$$

где стехиометрический коэффициент n_i берется со знаком «$-$», если k-я компонента расходуется в ходе реакции, и со знаком «$+$», если производится.

Структура производства энтропии указывает на то, что кинетическое уравнение может быть сформулировано в виде зависимости скорости реакции от сродства: $\omega = \omega(A)$. Например,

$$\omega = \overrightarrow{\omega} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{A}{RT} \right) \right\}$$

где $\overrightarrow{\omega}^g = k_* c$ — скорость прямой химической реакции, k_* — кинетический коэффициент (константа скорости реакции), $c = \rho_*/M_*$ — молярная концентрация диффундирующей компоненты [11]. Тогда из баланса массы на фронте реакции следует, что скорость фронта равна

$$W = \frac{n_- M_-}{\rho_-} k_* c \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{A}{RT} \right) \right\}$$

где ρ_- — плотность компонента B_+.

В случае деформируемого тела химическое сродство является тензором. Тензорность сродства связана с тем, что в деформируемом материале следует рассматривать реакции не в точках, а на ориентированных площадках.

Производство энтропии принимает вид произведения скорости реакции на площадке на нормальную компоненту тензора сродства, а кинетическое уравнение принимает вид зависимости скорости фронта реакции от нормальной компоненты тензора сродства.

Далее используем формулы для тензора сродства, полученное в [1] на основе балансов массы, импульса, энергии и второго начала термодинамики (см. также [3, 2]). На тензорность химического сродства ранее также указывалось в работах [12, 13].

Использование тензора сродства в кинетическом уравнении позволяет термодинамически обоснованным образом описать влияние напряжений на скорость химической реакции: напряжения влияют на скорость реакции через сродство и так, как они входят в сродство.

В работах [2, 4, 5] на примере решения краевых задач для тел, в которых идут химические реакции, продемонстрировано, что напряжения могут ускорять, замедлять и даже блокировать химические реакции. В работе [5] введено понятие запретной зоны, образованной деформациями, при которых химическая реакция невозможна, и приведены соотношения для построения запретной зоны. Целью настоящей статьи является построение и исследование запретных зон.

2. Исходные соотношения.

В случае малых деформаций нормальная компонента тензора сродства может быть представлена в виде [2, 3]:

$$A_{NN} = \frac{n_- M_-}{\rho_-}\left(w_- - g^3 w_+ + \boldsymbol{\sigma}_\pm : [\![\boldsymbol{\varepsilon}]\!]\right) + n_*\left(\eta_* + RT\ln\frac{c}{c_*}\right),$$

где $w_\pm$ — объемные плотности свободной энергии Гельмгольца деформируемых компонентов реакции, $\boldsymbol{\varepsilon}_\pm$ — деформации на фронте реакции, тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}_\pm$ может быть взят на любой стороне фронта; принято, что химический потенциал μ_* диффундирующего компонента определяется формулой

$$M_*\mu_* = \eta_* + RT\ln\frac{c}{c_*},$$

где c — молярная концентрация диффундирующего компонента, c_* и η_* — отсчетные концентрация и химический потенциал диффундирующего компонента. В качестве отсчетной берут концентрацию, заданную граничным условием на внешней поверхности тела, или растворимость компонента B_* в B_+.

Напряжения свяжем с деформациями законом Гука:

$$\boldsymbol{\sigma}_- = \mathbf{C}_- : (\boldsymbol{\varepsilon}_- - \boldsymbol{\varepsilon}_-^*), \quad \boldsymbol{\sigma}_+ = \mathbf{C}_+ : (\boldsymbol{\varepsilon}_+ - \boldsymbol{\varepsilon}_+^*), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_-^* = \boldsymbol{\varepsilon}_-^{in}$ — неупругие (вязкие, пластические) деформации в материале B_-, $\boldsymbol{\varepsilon}_+^* = \boldsymbol{\varepsilon}^{ch} + \boldsymbol{\varepsilon}_+^{in}$ — сумма деформации превращения $\boldsymbol{\varepsilon}^{ch}$ и неупругой деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_+^{in}$ в материале B_+, $\mathbf{C}_\pm$ — тензоры модулей упругости материалов $B_\pm$.

Из (2) следует, что объемные плотности свободных энергий Гельмгольца материалов $B_{\mp}$ равны

$$w_- = \eta_-(T) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_- - \boldsymbol{\varepsilon}_-^*) : \mathbf{C}_- : (\boldsymbol{\varepsilon}_- - \boldsymbol{\varepsilon}_-^*),$$
$$w_+ = \eta_+(T) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_+ - \boldsymbol{\varepsilon}_+^*\right) : \mathbf{C}_+ : \left(\boldsymbol{\varepsilon}_+ - \boldsymbol{\varepsilon}_+^*\right),$$

где $\eta_{\pm}(T)$ — плотности свободной энергии материалов $B_{\pm}$ в ненапряженном состоянии (химические энергии). Тогда нормальная компонента тензора сродства принимает вид:

$$A_{nn} = \frac{n_- M_-}{\rho_-}\left\{\gamma(T) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_- : (\boldsymbol{\varepsilon}_- - \boldsymbol{\varepsilon}_-^*) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_+ : (\boldsymbol{\varepsilon}_+ - \boldsymbol{\varepsilon}_+^*) + \boldsymbol{\sigma}_- : (\boldsymbol{\varepsilon}_+ - \boldsymbol{\varepsilon}_-)\right\} + \\ + n_* RT \ln\frac{c}{c_*}, \quad (3)$$

где параметр γ зависит от температуры и определяется химическими энергиями компонентов реакции:

$$\gamma = \eta_- - g\eta_+ + \frac{\rho_-}{n_- M_-} n_* \eta_*.$$

Отметим, что напряжения влияют на сродство, только если вклад энергий деформаций сравним с вкладом химических энергий.

Нормальная компонента тензора сродства может быть выражена через деформации или напряжения на одной из сторон фронта реакции аналогично тому, как это было сделано ранее для межфазной границы в случае фазовых превращений (см., напр., [14, 15]). Действительно, из условий непрерывности перемещений и усилий на фронте реакции (мы пренебрегаем напряжениями, порождаемыми движущейся компонентой, по сравнению с напряжениями, порождаемыми деформацией превращения) следует, что если определяющие соотношения контактирующих материалов имеют вид (2), тогда скачки деформаций и напряжений могут быть выражены через деформации и напряжения на одной стороне границы [16]:

$$[\![\boldsymbol{\varepsilon}]\!] = -\mathbf{K}_{\mp}(\mathbf{n}) : \mathbf{q}_{\pm}, \quad [\![\boldsymbol{\sigma}]\!] = \mathbf{S}_{\mp}(\mathbf{n}) : \mathbf{m}_{\pm} \quad (4)$$

где тензоры $\mathbf{q}$ и $\mathbf{m}$ — линейные преобразования деформаций и напряжений на фронте реакции с коэффициентами, равными скачкам модулей упругости в комбинации со скачками неупругих деформаций:

$$\mathbf{q}_{\pm} = [\![\mathbf{C}]\!] : \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm} - [\![\mathbf{C}]\!] : \boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad \mathbf{m}_{\pm} = [\![\mathbf{B}]\!] : \boldsymbol{\sigma}_{\pm} + [\![\boldsymbol{\varepsilon}^*]\!],$$
$$\mathbf{K}_{\mp}(\mathbf{n}) = \{\mathbf{n} \otimes \mathbf{G}_{\mp}(\mathbf{n}) \otimes \mathbf{n}\}^s, \ \mathbf{G}_{\mp}(\mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\mp} \cdot \mathbf{n})^{-1}$$
$$\mathbf{S}_{\mp}(\mathbf{n}) = \mathbf{C}_{\mp} : \mathbf{K}_{\mp}(\mathbf{n}) : \mathbf{C}_{\mp} - \mathbf{C}_{\mp}, \ \mathbf{B}_{\pm} = \mathbf{C}_{\pm}^{-1},$$

$\mathbf{G}_{\mp}(\mathbf{n})$ — преобразования Фурье тензора Грина для определения перемещений в упругой среде B_- или B_+, равно обратному акустическому тензору, s означает симметризацию: $K_{ijkl} = N_{(i}G_{j)(k}N_{l)}$.

Если материал B_+ — изотропный, то

$$\mathbf{K}_+(\mathbf{n}) = \frac{1}{\mu_+}\left((\mathbf{n}\otimes\mathbf{E}\otimes\mathbf{n})^s - \frac{1}{2(1-\nu_+)}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\right)$$

где μ_- и ν_- — модуль сдвига и коэффициент Пуассона, $\mathbf{E}$ — единичный тензор.

Из (3) и (4) следует, что

$$A_{nn} = \frac{n_- M_-}{\rho_-}\Big\{\gamma - \frac{1}{2}[\![\boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^*]\!] - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_- : [\![\mathbf{C}]\!] : \boldsymbol{\varepsilon}_- + \boldsymbol{\varepsilon}_- : [\![\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^*]\!] + \frac{1}{2}\mathbf{q}_- : \mathbf{K}_+(\mathbf{n}) : \mathbf{q}_-\Big\} + n_* RT \ln\frac{c}{c_*} = \tag{5}$$

$$= \frac{n_- M_-}{\rho_-}\left\{\gamma + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_- : [\![\mathbf{B}]\!] : \boldsymbol{\sigma}_- + \boldsymbol{\sigma}_- : [\![\boldsymbol{\varepsilon}^*]\!] + \frac{1}{2}\mathbf{m}_- : \mathbf{S}_+(\mathbf{n}) : \mathbf{m}_-\right\} + n_* RT \ln\frac{c}{c_*}. \tag{6}$$

Если существует обратный тензор $[\![\mathbf{C}]\!]^{-1}$, то деформации и напряжения в A_{nn} могут быть выражены через $\mathbf{q}$ и $\mathbf{m}$. В результате получим, что нормальная компонента A_{nn} представима в виде квадратичных форм $\mathbf{q}$ и $\mathbf{m}$:

$$A_{nn} = \frac{n_- M_-}{\rho_-}\left\{\gamma_* - \frac{1}{2}\mathbf{q}_- : \left([\![\mathbf{C}]\!]^{-1} - \mathbf{K}_+(\mathbf{n})\right) : \mathbf{q}_-\right\} + n_* RT \ln\frac{c}{c_*} \tag{7}$$

$$= \frac{n_- M_-}{\rho_-}\left\{\gamma_* + \frac{1}{2}\mathbf{m}_- : \left([\![\mathbf{B}]\!]^{-1} + \mathbf{S}_+(\mathbf{n})\right) : \mathbf{m}_-\right\} + n_* RT \ln\frac{c}{c_*} \tag{8}$$

$$\gamma_* = \gamma - \frac{1}{2}[\![\boldsymbol{\varepsilon}^*]\!] : [\![\mathbf{B}]\!]^{-1} : [\![\boldsymbol{\varepsilon}^*]\!]$$

Представления (5)–(8) показывают, как A_{nn} и, следовательно, скорость фронта реакции зависят от деформаци и напряжений на фронте и ориентации фронта.

3. Запретные зоны.

Прямая реакция возможна, только если $A_{nn} > 0$, то есть если

$$\widehat{\gamma} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_- : [\![\mathbf{C}]\!] : \boldsymbol{\varepsilon}_- + \boldsymbol{\varepsilon}_- : [\![\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^*]\!] + \frac{1}{2}\mathbf{q}_- : \mathbf{K}_+(\mathbf{n}) : \mathbf{q}_- \geq \frac{n_* \rho_-}{n_- M_-} RT \ln\frac{c_*}{c}, \tag{9}$$

где

$$\widehat{\gamma} = \gamma - \frac{1}{2}[\![\boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^*]\!].$$

Так как на фронте реакции $c < c_*$, то для распространяющегося фронта должно выполняться неравенство

$$\widehat{\gamma} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_- : [\![\mathbf{C}]\!] : \boldsymbol{\varepsilon}_- + \boldsymbol{\varepsilon}_- : [\![\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^*]\!] + \frac{1}{2}\mathcal{K}_{max}(\mathbf{q}_-) \geq 0, \tag{10}$$

где

$$\mathcal{K}_{max}(\mathbf{q}_-) = \max_{\mathbf{n}} \mathbf{q}_- : \mathbf{K}_+(\mathbf{n}) : \mathbf{q}_-$$

В результате получаем грубую оценку границ запретной зоны: реакция не идет и не может быть запущена подводом диффундирующего компонента, если

$$\widehat{\gamma} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_- : [\![\mathbf{C}]\!] : \boldsymbol{\varepsilon}_- + \boldsymbol{\varepsilon}_- : [\![\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^*]\!] + \frac{1}{2}\mathcal{K}_{max}(\mathbf{q}_-) \le 0. \tag{11}$$

С другой стороны, реакция заведомо допустима вторым законом термодинамики, если

$$\widehat{\gamma} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_- : [\![\mathbf{C}]\!] : \boldsymbol{\varepsilon}_- + \boldsymbol{\varepsilon}_- : [\![\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^*]\!] + \frac{1}{2}\mathcal{K}_{min}(\mathbf{q}_-) \ge \frac{n_* \rho_-}{n_- M_-} RT \ln \frac{c_*}{c},$$

где

$$\mathcal{K}_{min}(\mathbf{q}_-) = \min_{\mathbf{n}} \mathbf{q}_- : \mathbf{K}_+(\mathbf{n}) : \mathbf{q}_-.$$

Например, если твердые компоненты линейно-упругие, тогда $\boldsymbol{\varepsilon}_-^* = 0$, $\boldsymbol{\varepsilon}_+^* = \boldsymbol{\varepsilon}^{ch}$. Если при этом они изотропные и $\boldsymbol{\varepsilon}^{ch} = \varepsilon^{ch}\mathbf{E}$, то

$$\widehat{\gamma} = \gamma - \frac{9}{2} k_+ (\varepsilon^{ch})^2, \ \mathbf{q}_- = -\mathbf{C}_+ : \boldsymbol{\varepsilon}^{ch} = -3k_+\varepsilon^{ch}\mathbf{E},$$
$$\mathbf{q}_- : \mathbf{K}_+ : \mathbf{q}_- = 9k_+^2 \left(k_+ + \frac{4}{3}\mu_+\right)^{-1} (\varepsilon^{ch})^2$$

Тогда согласно (11) реакция не может начаться при $\boldsymbol{\varepsilon}_- = 0$, если

$$\gamma < \frac{6k_+\mu_+}{k_+ + \frac{4}{3}\mu_+}(\varepsilon^{ch})^2 = \frac{E_+(\varepsilon^{ch})^2}{1-\nu_+}$$

где E_+ — модуль Юнга. Блокирование реакции связано здесь с внутренними напряжениями, порождаемыми деформацией превращения. Неравенства такого типа могут использоваться для оценки величин параметров, при которых реакция возможна.

В более общем случае нужно найти направления нормалей, обеспечивающих максимум или минимум квадратичной формы $\mathbf{q}_- : \mathbf{K}_+(\mathbf{n}) : \mathbf{q}_-$ и затем построить зависимости $\mathcal{K}_{max}(\mathbf{q}_-)$ и $\mathcal{K}_{min}(\mathbf{q}_-)$. Для случая изотропного материала эти зависимости были получены при исследовании фазовых переходов в контексте построения в пространстве деформаций так называемых зон фазовых переходов [14, 17, 18] (см. также недавнюю статью [19]).

Равенство в (10) соответствует границе запретной зоны, состоящей из запирающих деформаций, при которых реакция идти не может ни при каких ориентациях площадки, проходящей через данную точку тела. Положение границы запретной зоны зависит от параметра γ (то есть, температуры),

L(0.485*0.9) ε_1
L(0.98*0.44) ε
L(0.2*0.21) $\hat{\gamma}_1$
L(0.15*0.24) $\hat{\gamma}_2$
L(0.09*0.29) $\hat{\gamma}_3$
L(0.03*0.34) $\hat{\gamma}_4$
L(0.46*1.00) **n**
L(0.94*0.42) **n**
L(0.68*0.75) **n**

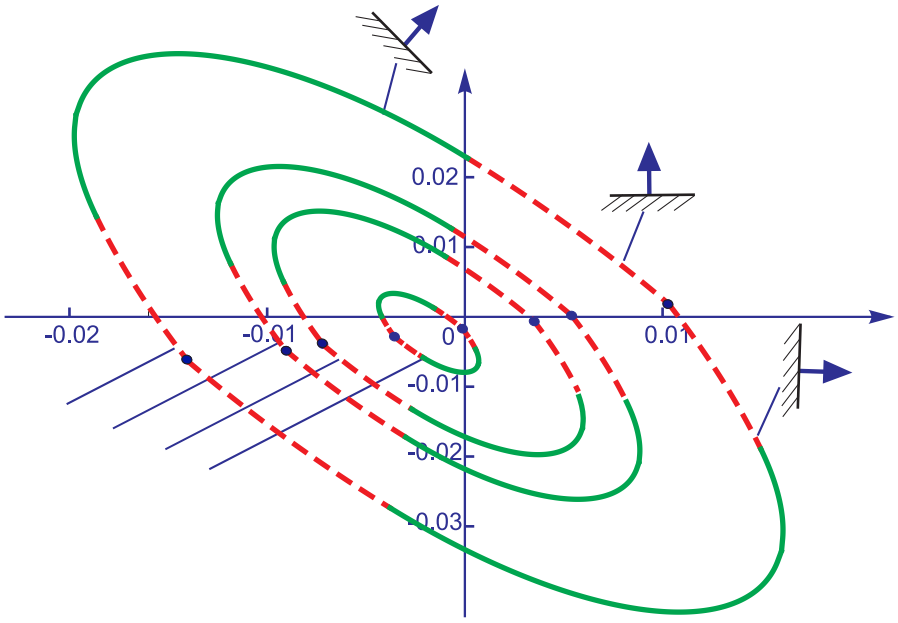


Рис. 2: Сечения запретной зоны в пространстве деформаций плоскостью $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \equiv \varepsilon$ при различных $\hat{\gamma}$: $\hat{\gamma}_1 > \hat{\gamma}_2 > \hat{\gamma}_3 > \hat{\gamma}_4$.

модулей упругости деформируемых компонентов реакции, деформации превращения, неупругих деформаций и концентрации диффундирующего компонента.

Блокирующие напряжения находятся аналогично. Запретные зоны могут строиться также в $q-$ и m-пространствах на основании соотношений (7) и (8), аналогично построению зон фазовых переходов в $q-$пространстве [17, 18].

На Рис. 2 показаны сечения запретных зон плоскостью $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ при разных величинах параметра γ. Указаны также направления нормалей, соответствующих площадкам наибольшей скорости реакции.

При больших величинах γ вклад энергии деформаций в сродство невелик относительно вклада химической энергии, запретная зона при $\gamma = \gamma_1$ представляет собой небольшую область. Но уже при $\gamma = \gamma_2 < \gamma_1$ реакция не идет без дополнительных внешних деформаций. По мере уменьшения параметра

γ запретная зона расширяется.

В заключение отметим, что согласно неравенству (9) форма и размеры запретной зоны в общем случае определяются параметром

$$\widetilde{\gamma} = \gamma - \frac{1}{2}[\![\boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^*]\!] - \frac{n_* \rho_-}{n_- M_-} RT \ln \frac{c_*}{c}$$

Поэтому заблокированная реакция может снова запуститься в результате увеличения $\widetilde{\gamma}$ за счет диффузии и неупругих деформаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант N 16-01-00815)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Freidin, A. Chemical affinity tensor and stress-assist chemical reactions front propagation in solids. // ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, November 13-21, 2013, San Diego, California, USA. 2014.

2. Freidin, A., Vilchevskaya, E., Korolev, I. Stress-assist chemical reactions front propagation in deformable solids // Int. J. Engineering Science. 2014. Vol. 83. P. 57–75.

3. Фрейдин А.Б. О тензоре химического сродства при химических реакциях в деформируемых материалах. // Известия АН. МТТ. 2015. Vol. 3. P. 35–68.

4. Freidin, A., Morozov, N., Petrenko, S., Vilchevskaya, E. Chemical reactions in spherically symmetric problems of mechanochemistry // Acta Mech. 2016. Vol. 227, №1. P. 43–56.

5. Freidin, A.„ Korolev, I., Aleshchenko, S., Vilchevskaya, E. Chemical affinity tensor and chemical reaction front propagation: theory and FE-simulations // Int. J. Fract. 2016. Vol. 202, №2. P. 245–259.

6. Гринфельд М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука. 1990. 312 с.

7. Abeyaratne, R., Knowles, J. Elovution of phase transitions. A continuum theory. Cambridge University Press. 2006. 242 p.

8. Levitas V.I., Levin V.A., Zingerman K.M., Freiman E.I. Displacive phase transitions at large strains: phase-field theory and simulations // Physical Review Letters. 2009. Vol. 103, №2. P. 025702.

9. Левин В.А., Левитас В.И., Лохин В.В., Зингерман К.М., Саяхова Л.Ф., Фрейман Е.И. Твердотельные фазовые переходы, вызванные действием

механических напряжений в материале с наноразмерными неоднородностями: модель и вычислительный эксперимент// Доклады Академии наук. 2010. Vol. 434б №4. P. 481-485.

10. Levin V.A., Levitas V.I., Zingerman K.M., Freiman E.I. Phase-field simulation of stress-induced martensitic phase transformations at large strains // International Journal of Solids and Structures. 2013. Vol. 50. P. 2914–2928.

11. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.

12. Rusanov, A.I. Surface thermodynamics revisited // Surface Science Reports. 2005. Vol. 58. P. 111–239.

13. Русанов, А.И. Термодинамические основы механохимии. Санкт-Петербург, Наука. 2006. 222 с.

14. Морозов, Н.Ф., Фрейдин, А.Б. Зоны фазовых переходов и фазовые превращения упругих тел при различных видах напряженного состояния// Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1998. Vol. 223. P. 220–232.

15. Freidin, A.B. On new phase inclusions in elastic solids // ZAMM. 2007. Vol. 87б №2. P. 102–116.

16. Kunin, I. Elastic Media with Microstructure. Springer-Verlag, Berlin, New York, etc . 1983.

17. Freidin, A.B., Vilchevskaya, E.N., Sharipova, L.L. Two-phase deformations within the framework of phase transition zones // Theoretical and Applied Mechanics. 2002. Vol. 28–29. P. 149–172

18. Freidin, A.B., Sharipova, L.L. On a model of heterogenous deformation of elastic bodies by the mechanism of multiple appearance of new phase layers // Meccanica. 2006. Vol. 41, №2. P. 321–339.

19. Antimonov, M.A., Cherkaev, A., Freidin, A.B. Phase transformations surfaces and exact energy lower bounds // International Journal of Engineering Science. 2016. Vol. 98. P. 153–182.

REFERENCES

1. Freidin, A. 2014, “Chemical affinity tensor and stress-assist chemical reactions front propagation in solids” *ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, November 13-21, 2013, San Diego, California, USA.*

2. Freidin, A., Vilchevskaya, E., Korolev, I. 2014, “Stress-assist chemical reactions front propagation in deformable solids” *Int. J. Engineering Science.* vol. 83, pp. 57–75.

3. Freidin, A.B. 2015, “On a chemical affinity tensor for chemical reactions in deformable solids.” *Mechanics of Solids* vol. 50, no. 3, pp. 260–285.

4. Freidin, A., Morozov, N., Petrenko, S., Vilchevskaya, E. 2016, “Chemical reactions in spherically symmetric problems of mechanochemistry” *Acta Mech.* vol. 227, no. 1, pp. 43–56.

5. Freidin, A.„ Korolev, I., Aleshchenko, S., Vilchevskaya, E. 2016, “Chemical affinity tensor and chemical reaction front propagation: theory and FE-simulations” *Int. J. Fract.* vol. 202, no. 2, pp. 245–259.

6. Grinfeld, M., Thermodynamic methods in the theory of heterogeneous systems. Longman, New York, 1991.

7. Abeyaratne, R., Knowles, J. Elovution of phase transitions. A continuum theory. Cambridge University Press. 2006. 242 p.

8. Levitas V.I., Levin V.A., Zingerman K.M., Freiman E.I. 2009, “Displacive phase transitions at large strains: phase-field theory and simulations ” *Physical Review Letters.* vol. 103, no. 2, pp. 025702.

9. Levin V.A., Levitas V.I., Lokhin V.V., Zingerman K.M., Sayakhova L.F., Freiman E.I. 2010, “Solid-state stress-induced phase transitions in a material with nanodimensional inhomogeneities: model and computational experiment” *Doklady Physics.* vol. 55, no. 10, pp. 507-511.

10. Levin V.A., Levitas V.I., Zingerman K.M., Freiman E.I. 2013, “Phase-field simulation of stress-induced martensitic phase transformations at large strains” *International Journal of Solids and Structures.* vol. 50, pp. 2914–2928.

11. Glansdorff, P., Prigogine, I. 1971, *Thermodynamic theory of stability and fluctuation.* Wiley-Interscience. New York.

12. Rusanov, A.I. 2005, “Surface thermodynamics revisited” // *Surface Science Reports.* vol. 58, pp. 111–239.

13. A. I. Rusanov 2006, *Thermodynamic foundations of mechanochemistry.* Nauka, Saint-Petersburg. 222 p. (Russian)

14. Morozov, N. F.,Freidin, A.Б. 1998, "Phase transition zones and phase transformations of elastic solids under different stress states"*Proc. Steklov Mathe. Inst.* vol. 223, pp. 220–232. (Russian)

15. Freidin, A.B. 2007, “On new phase inclusions in elastic solids” *ZAMM.* vol. 87, no. 2, pp. 102–116.

16. Kunin, I. 1983, *Elastic Media with Microstructure.* Springer-Verlag, Berlin, New York, etc .

17. Freidin, A.B., Vilchevskaya, E.N., Sharipova, L.L. 2002, "Two-phase deformations within the framework of phase transition zones" *Theoretical and Applied Mechanics.* vol. 28–29, pp. 149–172

18. Freidin, A.B., Sharipova, L.L. 2006, "On a model of heterogenous deformation of elastic bodies by the mechanism of multiple appearance of new phase layers" *Meccanica.* 2006. vol. 41, no. 2, pp. 321–339.

19. Antimonov, M.A., Cherkaev, A., Freidin 2016, "A.B. Phase transformations surfaces and exact energy lower bounds" *International Journal of Engineering Science.* vol. 98, pp. 153–182.

Институт проблем машиноведения Российской Академии Наук,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург

Получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 629.7.025.1 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-482-499

ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ПРОЧНОСТНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ЛА

С. Л. Чернышев[1], М. Ч. Зиченков[2], Ф. З. Ишмуратов[3], В. В. Чедрик[4] (г. Жуковский)

Аннотация

Разработка новых подходов, методов и алгоритмов решения задач вычислительной механики для обеспечения прочностного проектирования летательных аппаратов (ЛА) является весьма актуальной проблемой. Её актуальность обусловлена необходимостью существенного увеличения объема и оперативности расчетных исследований, гарантии достоверности результатов расчётов перспективных силовых конструкций различных ЛА из металлических и композиционных материалов. Разрабатываемые методы целесообразно реализовать в виде отечественных специализированных тиражируемых отраслевых решений на базе имеющегося отчуждаемого от разработчика программного обеспечения как импортозамещающего программного продукта. Это позволит уже на предварительной стадии проектирования учитывать важные требования по обеспечению аэроупругости, статической и усталостной прочности. На заключительной сертификационной стадии создания ЛА, робастные расчётные методы позволят уменьшить объём необходимых доказательных испытаний в соответствии с современной концепцией “certification by calculation”.

В статье сформулированы требования к созданию новой технологии, направленной на интеграцию имеющихся отечественных программных средств и внедрение новых методов расчёта прочностных, усталостных и аэроупругих характеристик. Они включают методы моделирования и анализа, разрабатываемые в российских и зарубежных исследовательских организациях и университетах. Обсуждается создание промышленного «отчуждаемого от разработчика» специализированного тиражируемого отраслевого решения в рамках «мягкого импортозамещения» на основе имеющихся программных средств ЦАГИ

[1]Чернышев Сергей Леонидович, академик Российской академии наук, генеральный директор ФГУП «ЦАГИ», info@tsagi.ru

[2]Зиченков Михаил Чеславович, заместитель генерального директора ФГУП «ЦАГИ» — начальник комплекса прочности ЛА, zichenkov@tsagi.ru

[3]Ишмуратов Фаниль Закиевич, начальник отдела ФГУП «ЦАГИ»

[4]Чедрик Василий Васильевич, начальник отдела ФГУП «ЦАГИ», chedrik@tsagi.ru

и пакета CAE-Fidesys. Продемонстрирован новый подход к решению связанной задачи взаимодействия упругой конструкции с потоком воздуха. На примере численного расчёта среднемагистрального пассажирского самолёта показано существенное влияние вязкости потока на аэроупругие характеристики конструкции. Важной тенденцией развития методов проектирования является применение многодисциплинарного подхода в исследованиях по синтезу и оптимизации конструктивно-силовых схем ЛА. Он проиллюстрирован на примере проектирования крыла перспективного вертолёта, а также в задаче поиска оптимальной формы концевой части крыла большого удлинения с учётом ограничений по прочности, устойчивости и аэроупругости.

Ключевые слова: вычислительная механика, конструкция, прочность, аэроупругость, проектирование, самолёт, программные комплексы, специализированое тиражируемое отраслевое решение.

Библиография: 19 названий.

TENDENCIES IN DEVELOPMENT OF COMPUTATIONAL MECHANICS FOR STRENGTH DESIGN OF AIRCRAFT STRUCTURES

S. L. Chernyshev, M. Ch. Zichenkov, F. Z. Ishmuratov, V. V. Chedrik (Zhukovsky)

Abstract

Development of novel approaches, methods and algorithms for solution of the computational mechanics problems for providing structural design of aircraft is an actual problem. Its solution allows to significantly increase bulk and efficiency of numerical investigations and to guarantee a high confidence of numerical results for advanced load-bearing structures of different aircraft made of metallic and composite materials. It is supposed that the developing methods will be implemented in the specialized replicable industry solutions on the basis of available software alienated from the developer as import substitution software. It gives feasibility to take into account important aeroelasticity, strength and fatigue requirements already in the preliminary design stage. At the final certification stage of the aircraft development the robust computational methods will reduce the amount of necessary evidentiary tests in accordance with the modern concept of "certification by calculation".

In the paper the requirements are formulated for development of new technology which is directed on integrating the available software tools and implementation of new methods for analysis of strength, fatigue and aeroelastic characteristics. They include the simulation and analysis methods that are under development in Russian and foreign research

companies and universities. Development of the specialized replicable industry solution in the framework of "soft import substitution" based on the program tools available in TsAGI and the CAE-Fidesys software package.

New approach to solution of the coupled problem of interaction of flexible structure with airflow is demonstrated. Substantial influence of airflow viscosity on aeroelastic characteristics of structure is shown on the example of numerical analysis of middle-range passenger airplane. The important tendency in development of design methods is application of multidisciplinary approach in investigations on synthesis and optimization of aircraft structural layouts. It has been illustrated on the example of wing design of advanced helicopter and on the problem of searching optimal shape of tip part of high-aspect ratio wing with taking into account strength, buckling and aeroelasticity constraints.

Keywords: computational mechanics, structure, strength, aeroelasticity, design, airplane, software systems, specialized replicable industry solution.

Bibliography: 19 titles.

1. Введение

Разработка перспективных изделий авиастроения в настоящее время связана с применением универсальных систем для моделирования и оптимизации конструкций. Это зачастую обусловлено необходимостью создания ЛА нетрадиционных, малоизученных компоновочных схем, применением в них новых материалов, в том числе композитов, сокращением сроков проведения проектных работ и повышением требований к детализации проработки проектов. Данные обстоятельства требуют разработки новых подходов, методов и алгоритмов решения задач вычислительной механики для обеспечения прочностного проектирования ЛА, увеличения объема и оперативности расчетных исследований, высокой степени автоматизации всех этапов проектирования [1].

Наиболее мощным вычислительным средством анализа силовых конструкций является метод конечных элементов (МКЭ). В настоящее время расчеты по МКЭ являются хорошо разработанной технологией. В научно-исследовательских институтах и конструкторских бюро получили широкое распространения зарубежные коммерческие комплексы программ, такие как NASTRAN, ANSYS, ABAQUS и др. Интенсивно развивается программное обеспечение анализа конструкций также в России. Здесь в первую очередь стоит отметить систему многодисциплинарного проектирования АРГОН [2], пакет программ ЛЭГАК-ДК [3] для комплексного имитационного динамического и статического деформирования конструкций на вычислительных системах различной архитектуры, систему Fidesys [4]. В системе реализован промышленный отечественный решатель задач механики деформируемого твердого тела, впервые в мире для промышленного программного обеспечения реализован метод спектрального элемента [6]. Сочетание методов ана-

лиза, развитых в зарубежном и отечественном программном обеспечении, позволяет проводить оценки прочностных, жесткостных и усталостных характеристик силовой конструкции агрегатов самолётов и их стыковочных узлов с учетом отраслевых требований и критериев безопасной эксплуатации.

Стоит отметить высокую стоимость зарубежных расчётных комплексов, неполный учёт в них отечественной специфики проектирования конструкций, а также необходимость использования их как «чёрного ящика». Широкое внедрение композиционных материалов (КМ) при проектировании ЛА [5] с целью уменьшения веса и улучшения лётно-технических характеристик ведут к необходимости разработки новых методов вычислительной прочности и реализации их в виде специализированного тиражируемого отраслевого решения (СТОР) как импортозамещающего программного продукта. Это позволит внедрить в практику исследования авиационных конструкций нелинейные методы вычислительной механики прочности, позволяющие точнее предсказывать возникновение и развитие трещин, а также использовать нелокальные критерии прочности [6-8]. Численные решения задач теории наложения больших деформаций и задач о напряженном состоянии тел с предварительно деформированными частями, разработанные Левиным В.А., его коллегами по научной группе и учениками [9-11], могут быть использованы для уточнённого анализа прочностных свойств отдельных элементов авиационных конструкций, включая изделия, изготавливаемые с помощью аддитивных технологий.

Практика проектирования конструкций из КМ выдвигает много новых проблем численного анализа, например, динамического поведения многослойных композиционных конструкций в потоке воздуха, анализа несущей способности с учётом деградации свойств материала, разработки новых критериев прочности изделий из КМ. Сложность конструкций ЛА требует возможности применения многоуровневого моделирования изделий от основных агрегатов до их отдельных элементов. Это может быть осуществлено только при разработке различных классов конечных элементов и эффективных решателей.

В работе [12] представлены основные проблемы создания безопасных авиационных конструкций с минимальным весом и длительным сроком эксплуатации. Важнейшим направлением развития вычислительной механики самолёта является развитие методов решения так называемой связанной задачи взаимодействия упругой конструкции с набегающим потоком воздуха. Благодаря стремительному развитию вычислительной аэродинамики и прочности такую задачу для практических целей необходимо решать с учётом вязкости потока [13]. Современной тенденцией в авиационной науке является разработка и применение многодисциплинарного подхода к проектированию конструктивно-силовых схем (КСС) агрегатов ЛА [14]. Он основывается на оптимизации топологии и размеров параметров силовой конструкции, а также учитываются многодисциплинарные аспекты, связанные с вопросами многоуровневого моделирования, выбором конструкционных материалов,

точностью расчёта нагрузок и др.

В статье представлены основные направления и некоторые тенденции развития методов вычислительной механики для обеспечения статической и усталостной прочности проектируемых авиационных изделий, а также безопасности ЛА по критериям аэроупругости. Описаны требования к созданию нового программного продукта, учитывающего отечественную специфику проектирования и новые научные достижения в механике конструкций.

2. Специализированное тиражируемое отраслевое решение

В последнее время наиболее критическим направлением развития прикладной науки о прочности ЛА является решение проблемы обеспечения безопасности самолётов по условиям усталостной прочности и живучести. Это весьма сложный, длительный и трудоёмкий процесс, включающий большое количество экспериментальных и расчётных работ. К расчётным работам относятся:

- анализ возможных условий эксплуатации и критических зон конструкции в соответствии с критериями статической, остаточной и усталостной прочности;
- анализ напряжённо-деформированного состояния (НДС) самолёта и его агрегатов с применением современных программных продуктов, базирующихся на методе конечных элементов;
- численное моделирование высокоскоростных ударных воздействий, которые могут иметь место при эксплуатации гражданских и военных самолётов;
- оптимизация проектных параметров для обеспечения потребных прочностных, жесткостных и усталостных характеристик.

Эти работы необходимо проводить с применением подробных конечно-элементных моделей авиационных изделий. Они требуют долгих сроков, связанных с затратами на подготовку моделей, инженерным анализом сложных технических проблем и обработкой результатов расчёта. Поэтому необходимо создание новой технологии, направленной, например, на интеграцию имеющихся программных средств ЦАГИ и компании «Фидесис», на внедрение новых методов расчёта прочностных и усталостных характеристик, а также на разработку новых модулей с целью минимизации затрат времени инженера-расчётчика при применении комплексной методологии анализа остаточной и усталостной прочности критических зон конструкции ЛА.

Такая технология в виде СТОР могла бы позволить осуществлять комплексный анализ силовой конструкции и тем самым дать возможность более

эффективно и точнее определять её прочностные и усталостные характеристики. Применение зарубежных коммерческих продуктов в данное время не позволяет без существенных доработок решать комплексную проблему обеспечения усталостной прочности. Поэтому специализированное отраслевое решение целесообразно разрабатывать на федеральном уровне программно-целевым методом.

Целью прикладной промышленной технологии является создание СТОР для оценки напряжённо-деформированного состояния, прочностных, жесткостных и усталостных характеристик силовой конструкции агрегатов гражданских и военных самолётов и их стыковочных узлов на основе отечественного пакета для прочностного анализа Фидесис (с учетом отраслевых требований) и критериев безопасной эксплуатации. Решаемые задачи состоят в анализе и разработке методик, методов и алгоритмов расчёта в следующих направлениях:

- Формирование методологии и функциональной схемы системы прочностного анализа.
- Анализ основных сведений по технологии обеспечения усталостной прочности и боевой живучести при ударных воздействиях.
- Выбор экстремальных условий эксплуатации, определение возможных ударных воздействий и выбор критических зон силовой конструкции самолёта.
- Разработка методов и алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния конструкций с концентраторами напряжений, а также усталостных характеристик.
- Анализ прочности конструкции на основе высокоточных конечно-элементных методов и различных критериев;
- Разработка схемы расчётного моделирования высокоскоростного ударного воздействия на основе метода спектральных элементов.
- Обоснование и внедрение критериев разрушения при ударных воздействиях.
- Реализация и валидация методов и алгоритмов расчёта в рамках СТОР.
- Технологическое тиражирование для расчётных исследований прочностных и усталостных характеристик отдельных агрегатов ЛА.

Развитие комплекса программ анализа прочности ЛА должно учитывать увеличивающуюся тенденцию по использованию композиционных материалов в перспективных конструкциях. Это наряду с хорошо разработанными классическими методами анализа прочностных свойств композиционного пакета на основе известных критериев разрушения слоёв требует разработки и внедрения новых подходов, таких как

- Совместный анализ микро- и макромеханического поведения слоев КМ.
- Определение несущей способности композиционного пакета на основе учёта деградации свойств материала в слоях при первичном разрушении.
- Анализ расслоений и краевых эффектов в композиционном материале.
- Анализ поведения авиационных панелей из КМ после потери устойчивости
- Учет технологических требований по укладке КМ при формировании схем в проектировочных расчётах.
- Анализ концентраторов напряжений, усталостных характеристик и эксплуатационной живучести в композитах.
- Оптимизация раскроя композиционного материала по условиям прочности и аэроупругости.

В качестве примера, инициирующего развитие отечественной системы, приведём расчёт композиционного кессона в пакете Fidesys для одного из полётных случаев нагружения. На рис. 1 показаны интерфейсная оболочка пакета и деформированное состояние конструкции.

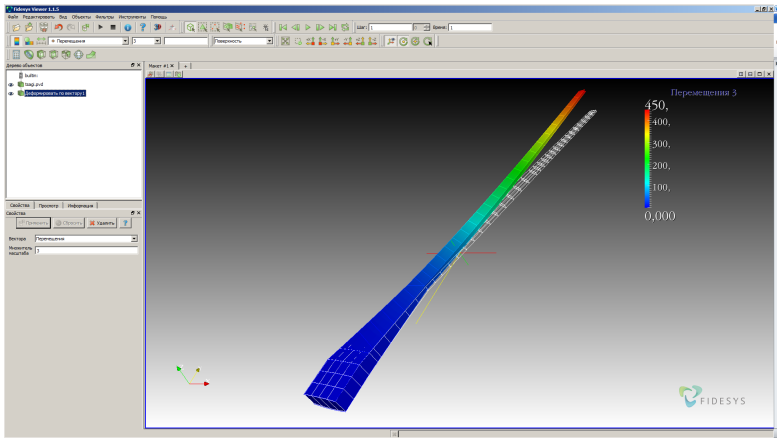


Рис. 1: Пример расчёта конструкции кессона крыла

Аналогичные расчёты были проведены с применением системы АРГОН и коммерческого программного обеспечения Nastran. Сравнение максимальных перемещений на конце кессона показало, что их различия при расчётах по разным программным продуктам не превышают 2.7%. Максимальные эквивалентные напряжения наблюдаются в зоне излома кессона, они также весьма близки к результатам расчёта по двум другим программам. Различие с результатами системы АРГОН составляет около 4%. Всё это свидетельствует о достоверности получаемых результатов по системе Fidesys при расчёте

авиационных конструкций, и эта система может служить основой для разработки СТОР.

Применение СТОР при успешной его реализации повысит точность вычисляемых прочностных, жесткостных и усталостных характеристик ЛА, существенно увеличит информативность результатов вычислительных экспериментов, повысится уровень автоматизации при подготовке расчётных сеток и анализе результатов. Созданное СТОР существенно увеличит эффективность проектировочных исследований, даст возможность инженеру-конструктору уже на предварительной стадии проектирования учитывать требования по обеспечению усталостной прочности и живучести. Такая программная технология позволит существенно сократить затраты на изготовление опытных образцов и проведение их испытаний.

3. Связанная задача взаимодействия упругой конструкции с потоком воздуха

Одной из актуальных задач вычислительной прочности и аэродинамики является задача о влиянии вязкости потока на характеристики аэроупругости. Она связана также с проблемой разделения влияния упругости конструкции и вязкости потока на аэродинамические характеристики. Много работ последних лет посвящено созданию новых подходов в вычислительной аэродинамике, пригодных для практики, для решения задач аэроупругости с учетом вязкости в наиболее актуальной для магистральных самолетов трансзвуковой области скоростей. Например, целью двух недавно закончившихся Международных проектов по аэроупругости [15, 16] являлось оценка точности и повышение эффективности расчетных методов определения таких характеристик аэроупругости как флаттер и деформации конструкции в трансзвуковом потоке. При выполнении проектов использовались современные экспериментальные данные, полученные в трансзвуковых аэродинамических трубах NASA и DLR. В первом проекте участвовало 17 организаций из разных стран, представивших 26 вариантов численного решения для сравнения с экспериментом, во втором проекте – 16 организаций с 23 вариантами численного анализа.

Задачи аэроупругости отличаются необходимостью большого объема параметрических исследований как на этапах проектирования, так и на этапах сертификации ЛА. Часто быстродействие и оперативность математического обеспечения имеют определяющее значение в практических исследованиях. В ЦАГИ выполнена разработка и подробный анализ одного из эффективных методов расчета характеристик аэроупругости в трансзвуковом потоке, когда вязкость потока может оказывать заметное воздействие и на статические, и на динамические характеристики [13, 17]. Метод основан на интеграции подходов комплекса аэродинамических программ BLWF и многодисциплинарной системы анализа и проектирования конструкций АРГОН.

Разработанное математическое обеспечение предназначено для оператив-

ного расчета трансзвукового обтекания многоэлементных аэродинамических компоновок с учетом влияния вязкости на крыльях, в том числе и в присутствии умеренных отрывов. Используемый алгоритм расчета базируется на итерационной методике вязко-невязкого взаимодействия в рамках теории пограничного слоя и включает:

- методику расчета внешнего невязкого обтекания компоновки;
- метод расчета пространственного сжимаемого пограничного слоя, в том числе пригодный для расчета отрывных зон;
- методику сращивания внешнего невязкого течения и течения в пограничном слое.

Расчёт внешнего невязкого стационарного течения осуществляется путем численного интегрирования консервативной формы конечно-разностного аналога системы уравнений Эйлера, на основе быстрого неявного алгоритма с использованием методики пересекающихся расчетных сеток (подход Химера). Затем выполняется расчет нестационарного, гармонически возмущенного по времени обтекания. Для каждой формы колебаний конструкции и каждого числа Струхаля выполняется конечноразностное решение системы нестационарных уравнений Эйлера, линеаризованных на соответствующем поле стационарного течения, и определяются комплексные амплитуды осцилляций параметров течения, в том числе распределение давления на несущих поверхностях и объемных телах. По рассчитанным распределениям давления определяются обобщенные аэродинамические силы в модальных координатах и применяются процедуры расчета характеристик статической и динамической аэроупругости как для линейной системы.

Проведен большой цикл исследований по валидации разработанного математического обеспечения, включающий:

- определение соответствия получаемых расчетных результатов имеющимся экспериментальным данным, или данным других верифицированных расчетов;
- определение пределов применимости математических моделей по разным параметрам для получения практически полезных результатов;
- коррекция параметров математической модели для лучшего соответствия экспериментальным данным.

Для валидации отобраны и использованы результаты сложных экспериментов, относящихся к исследованиям стационарных и нестационарных распределений давления, упругих деформаций в характерных точках конструкции, статической и динамической эффективности органов управления, критической скорости и частоты флаттера. Рассмотрены результаты известных экспериментальных исследований по NASA CRM (Common Research Model),

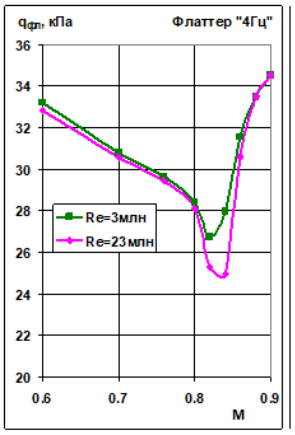


Рис. 2: Влияние вязкости на скоростной напор флаттера (различие до 8%)

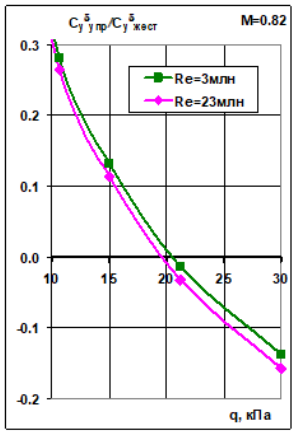


Рис. 3: Влияние вязкости на эффективность элерона (различие до 6%)

LANN, BACT, AGARD 445.6 и испытаний модели пассажирского самолета в АДТ Т 128 ЦАГИ.

Результаты валидационных исследований показывают, что вязкость потока может оказывать заметное влияние на характеристики аэроупругости. На рис. 2–4 показано сравнение результатов расчета для двух режимов обтекания типового современного среднемагистрального самолета с крейсерским числом Маха M=0.82. Первый режим с числом Рейнольдса Re=3 млн является типичным для испытаний аэроупругих моделей в трансзвуковой аэродинамической трубе, а второй с Re=23 млн – для крейсерского полета.

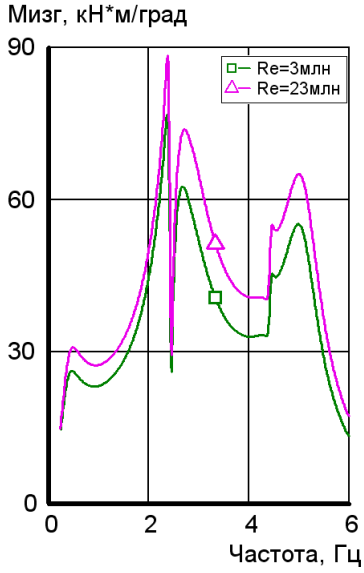


Рис. 4: Амплитудно-частотные характеристики по изгибающему моменту в корне крыла при отклонениях элеронов (различие до13%)

Отметим, что отличия в характеристиках статической и динамической аэ-

роупругости составляет от 6% до 13%. Такие отличия существенны для практики проектирования самолета, в особенности по характеристикам флаттера, и они должны учитываться при разработке и сертификации ЛА.

4. Многодисциплинарные аспекты в исследованиях синтеза и оптимизации конструктивно-силовых схем ЛА

Традиционный подход к проектированию конструкции ЛА характеризуется последовательным циклом привлечения к исследованиям различных групп специалистов. Проект, сформированный одной группой, передается другой группе, которая использует эти данные в качестве своих входных данных. Подход состоит из шагов, расположенных в определенном иерархическом порядке и обычно представляется тремя этапами проектирования: концептуальным, предварительным и детальным. Очевидным недостатком традиционного подхода является то, что он не позволяет на указанных стадиях проектирования включить различные дисциплины в единый оптимизационный процесс и часто не учитывает всей сложности задачи, тем самым, не позволяя создавать высокотехнологические проекты нового поколения. По этой причине традиционный подход медленно устаревает и на смену ему приходит методология многодисциплинарного проектирования, в которой учитывается взаимодействие между такими дисциплинами, как аэродинамика, аэроупругость, статическая прочность, системы управления, устойчивость и др. При многодисциплинарном подходе предлагается на всех стадиях использовать в задачах оптимизации функциональные ограничения различных авиационных дисциплин.

Такой подход реализован в системе многодисциплинарного проектирования силовых конструкций АРГОН [2], где в задачах оптимизации эффективно используются упругие модели различного уровня детализации: пластинно-балочные модели, основанные на методе заданных форм, для оперативного анализа характеристик статической и динамической аэроупругости и конечно-элементные модели для детального анализа прочностных характеристик. Реализована связь между моделями разных уровней путём приведения матриц модели МКЭ к соответствующим матрицам моделей метода заданных форм [18]. Это позволяет с помощью расчётной модели МКЭ осуществлять решение как задач прочности, так и аэроупругости.

В настоящее время усилия разработчиков программного обеспечения направлены на создание многодисциплинарного подхода к проектированию авиационных КСС. Он основывается на оптимизации топологии и глобально-локальном методе оптимизации конструкционных параметров. При его разработке необходимо учитывать различные многодисциплинарные аспекты, связанные с вопросами многоуровневого моделирования, вычислительными процедурами, выбором конструкционных материалов, точностью расчё-

та аэродинамических нагрузок и другие. Первые проведённые исследования выявили принципиальные аспекты, которые необходимо учитывать при проектировочных исследованиях перспективных авиационных конструкций.

Определяющей стадией при проектировании силовой конструкции является синтез КСС. Разработанные алгоритмы топологической оптимизации позволяют определить основные направления силовых потоков, вдоль которых должен располагаться силовой материал. Эти направления зависят от способа приложения нагрузки и количества рассматриваемых случаев нагружения. Решение представляется в виде картины распределения плотности материала в проектной области. На основании этого распределения проектировщик может предложить несколько инженерных интерпретаций результатов топологической оптимизации, согласующихся с технологическими возможностями производства конструкции.

Другим важным аспектом является определение оптимальных форм и размеров элементов конструкции с точки зрения минимизации её массы при удовлетворении ограничений по напряжениям и устойчивости для местных задач прочности, а также ограничениям по аэроупругости в задачах на глобальных расчётных моделях. Сложность такой задачи обусловлена наличием большого количества требований, вытекающих из различных прочностных дисциплин. Для её решения создан метод многодисциплинарной оптимизации, основанный на глобально-локальном подходе, который позволяет совместно учесть большое количество проектных переменных и функциональных ограничений.

Схема интеграции алгоритмов топологической оптимизации с оптимизацией формы/размеров позволяет в едином цикле получить инновационные технические решения для агрегатов и конструкционных элементов ЛА (рис. 5).

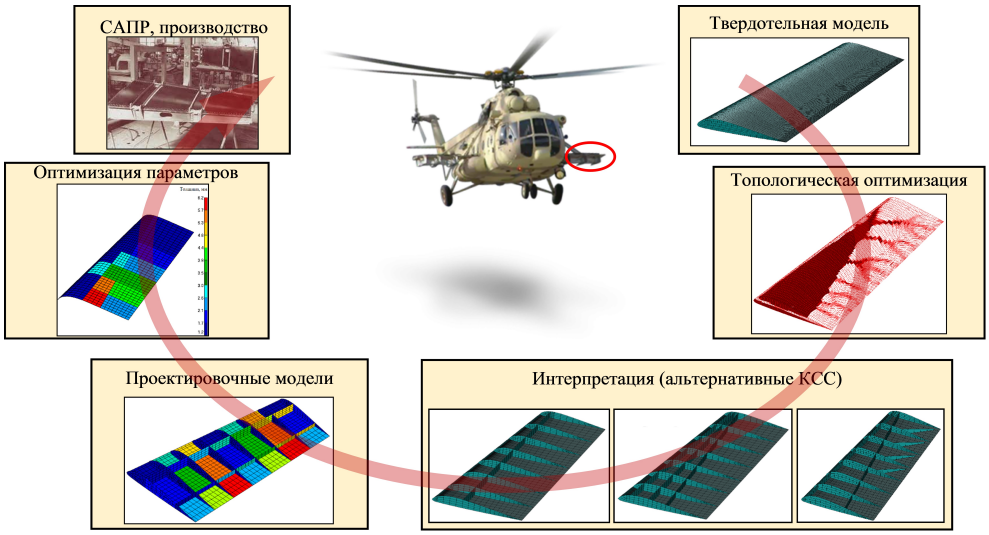


Рис. 5: Схема многодисциплинарного подхода к проектированию КСС крыла

Этот метод продемонстрирован на примере крыла малого удлинения. По-

лученная конструкция оказалась на 37.5% легче, чем конструкция, спроектированная традиционными методами без использования методов оптимизации [14]. Наилучшей КСС с точки зрения прочности, устойчивости и аэроупругости является трёхлонжеронная схема с дополнительными нервюрами в концевой части.

Весовая эффективность получаемых технических решений существенно зависит от точности расчёта нагрузок, действующих на конструкцию. В ЦАГИ разрабатываются методы расчёта нагружения конструкции с применением линейной и нелинейной аэродинамики. Анализ напряжённо-деформированного состояния конструкции крыла на нагрузки, рассчитанные линейным панельным методом и с учетом трансзвукового обтекания, показывает, что наличие таких нелинейных эффектов как скачки уплотнения, может привести к существенному различию в прогибах конструкции и максимальных напряжениях. Важным является разработка методов уточнения нагрузок при экстремальных режимах полёта, что может привести к значительному уменьшению весовых затрат.

Уже на предварительном этапе проектирования крыла необходимо учитывать влияние упругости на распределение нагрузок, а также требования по аэроупругости. Получены предварительные результаты многодисциплинарной оптимизации с ограничениями по условиям прочности и аэроупругости для двух конфигураций самолёта, когда дополнительной проектной переменной, определяющей форму крыла, являлся угол стреловидности концевой части крыла [19].

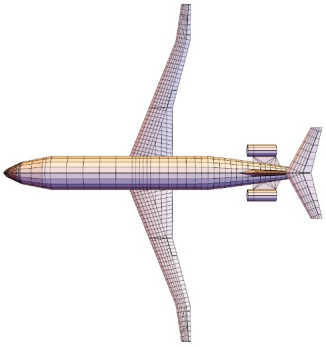


Рис. 6: Оптимальная форма крыла в плане для самолёта с Т-образным оперением

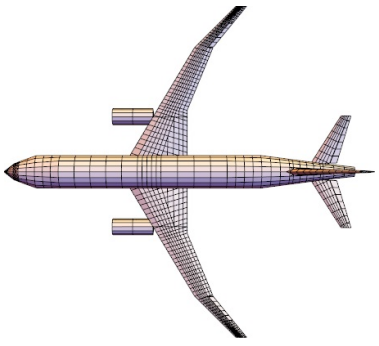


Рис. 7: Оптимальная форма крыла в плане для самолёта традиционной компоновки

Наиболее предпочтительным вариантом с точки зрения нагрузок, прочности, флаттера и весового совершенства для конфигурации с Т образным хвостовым оперением (рис. 6) является незначительное уменьшение угла концевой части (примерно на 10°) по отношению к базовой модели (без изменения стреловидности). Интересно отметить, что для традиционной конфигурации (рис. 7), с двигателем на крыле, напротив небольшое увеличение этого угла на те же 10° в перспективе позволяет снизить вес силовой конструкции крыла на 6.3% при удовлетворении ограничений по прочности и аэроупругости. По-

лученные проекты крыла практически невозможно достичь без применения многодисциплинарного подхода к проектированию силовых конструкций.

5. Выводы

Представлены некоторые важные тенденции развития современных методов вычислительной механики, направленных на обеспечение прочности и аэроупругости перспективных отечественных ЛА. Они включают методы моделирования и анализа, разрабатываемые в российских и зарубежных исследовательских организациях и университетах. Необходима реализация этих методов в виде отечественных программных продуктов, который существенно увеличат эффективность проектировочных исследований, дадут возможность уже на предварительной стадии проектирования учитывать важные требования по обеспечению требований аэроупругости, статической и усталостной прочности.

Описаны требования к созданию специального тиражируемого отраслевого решения, учитывающего отечественную специфику проектирования и новые научные достижения в механике конструкций. Сочетание применения методов расчёта, развитых в зарубежном программном обеспечении, совместно с новой российской системой анализа прочности позволит решить проблему мягкого импортозамещения, снизить стоимость проектировочных исследований в российских конструкторских бюро. Применение системы анализа прочности позволит существенно сократить затраты на изготовление опытных образцов и проведения их испытаний. Проектировочные исследования по созданной технологии позволят также снизить материалоемкость конструкции за счет выбора рациональных силовых схем и применяемых материалов и повысить весовую эффективность.

Важнейшими направлениями развития вычислительной механики являются исследования динамического поведения композиционных конструкций в потоке воздуха, разработка критериев прочности композиционных материалов, многоуровневое моделирование силовых конструкций, развитие методов решения задачи взаимодействия упругой конструкции с набегающим потоком воздуха, а также разработка и применение многодисциплинарных оптимизационных подходов к проектированию конструктивно-силовых схем агрегатов ЛА. Разрабатываемые методы в этих направлениях необходимо реализовывать в виде программного обеспечения в рамках единой системы анализа прочности и аэроупругости. Одним из вариантов промышленной реализации СТОР «отчуждаемой от разработчика» станет промышленная система, создаваемая на основе имеющихся программных средств ЦАГИ и пакета CAE-Fidesys.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернышев С.Л., Ланшин А.И., Ножницкий Ю.А. Форсайт развития авиационной науки и технологий до 2030 года и на дальнейшую перспективу. // Техника воздушного флота. 2012. № 4. С. 45-49.

2. Гудилин А.В., Евсеев Д.Д., Ишмуратов Ф.З., Липин Е.К., Маркин В.Н., Мосунов В.А., Пантелеев И.М., Сотников С.В., Теняева В.Е., Тимонин А.С., Чедрик В.В. Комплекс программ аэропрочностного проектирования самолета «АРГОН» // Ученые записки ЦАГИ. 1991. Т. XXII. № 5. С. 89-101.

3. Рябов А.А., Величко С.В., Волков А.Ю., Володина Н.А., Дьянов Д.Ю., Корсакова Е.И., Косарим С.С., Куделькин В.Г., Авдеев П.А., Артамонов М.В., Борляев В.В. Параллельный пакет программ ЛЭГАК-ДК для расчета задач гидрогазодинамики и прочности на неструктурированных сетках в лагранжево-эйлеровых переменных // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), С. 2472–2473.

4. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URRS, 2015 — 400 с., https://cae-fidesys.com.

5. Чернышев С.Л. Новый этап применения композиционных материалов в авиастроении. // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2013. № 1. С. 3-10.

6. Нелинейная вычислительная механика прочности в 5 томах (под ред. В.А. Левина). Том 2. Левин В.А. , Вершинин А.В. Численные методы. Реализация на высокопроизводительных вычислительных системах. М.: Физматлит, 2015 – 543с.

7. Левин В.А., Морозов Е.М. Нелокальные критерии для определения зоны предразрушения при описании роста дефекта при конечных деформациях // Доклады РАН. 2007. Т. 415. № 1. С. 52-54.

8. Нелинейная вычислительная механика прочности (предисловие академика Г.И. Марчука). Том 1. Левин В.А. Модели и методы. Образование и развитие дефектов. Под ред. В.А. Левина. М.: Физматлит, 2014. – 452 с.

9. Левин В.А. О концентрации напряжений вблизи отверстия, образованного в предварительно напряженном теле из вязкоупругого материала // Доклады АН СССР. 1988. Т.299. № 5. С. 1079-1082.

10. Левин В. А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах (предисловие академика Л.И. Седова). — М.: Наука, Физматлит, 1999. — 223 с.

11. Левин В.А. К построению модели развития дефекта при конечных деформациях. Нелокальные критерии // Прикл. матем. и мех. 2008. Т. 73, вып. 3.

12. Чернышев С.Л. Задачи механики в авиастроении // В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, сборник докладов. 2015. С. 4411-4428.

13. Kuzmina S., Karas O., Ishmuratov F., Zichenkov M., Chedrik V. Analysis of static and dynamic aeroelastic characteristics of airplane in transonic flow // В сборнике: 28th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences 2012, ICAS 2012. С. 2081-2090.

14. Александрин Ю.С., Туктаров С.А., Чедрик В.В. Проектирование силовой конструкции крыла вертолёта на основе топологической и глобально-локальной оптимизации // Учёные записки ЦАГИ. 2017. Т. XLVIII, №1, С. 72-85

15. Heeg J., Chwalowski P., Schuster D.M., Dalenbring M., Jirasek, A., Taylor P., Mavriplis D., Boucke A., Ballmann J., Smith M.; Overview and lessons learned from the aeroelastic prediction workshop, IFASD-2013-1A, International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, June 2013, Bristol, UK.

16. Heeg J., Wieseman C.D., Chwalowski, P.; Overview and data comparisons from the 2nd Aeroelastic Prediction Workshop, AIAA-2016-2721, AIAA Aviation Conference, June 2016, Washington, D.C.

17. Kuzmina S., Ishmuratov F., Karas O., Chizhov A. Dynamic response of an airplane elastic structure in transonic flow // В сборнике: 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, ICAS 2014 CD-ROM Proceedings. 2014.

18. Евсеев Д.Д., Липин Е.К., Чедрик В.В. Редуцирование расчетных моделей в задачах прочности // Ученые записки ЦАГИ. 1991. Т. XXII. № 1. С. 61-71.

19. Balunov K.A., Chedrik V.V., Ishmuratov F.Z., Karkle P.G. Aeroelastic optimization of wing shape and structural parameters for different aircraft configurations. // В сборнике: International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, IFASD 2015. 16. 2015.

REFERENCES

1. Chernyshev S.L., Lanshin A.I., Nozhnitsky Yu.A. 2012, Foresight of development of aviation science and technologies until 2030 and beyond. *Tekhnika vozdushnogo flota*. No 4. pp. 45-49.

2. Gudilin A.V., Yevseev D.D., Ishmuratov F.Z., Lipin Ye.K., Markin V.N., Mosunov V.A., Panteleev I.M., Sotnikov S.V., Tenyaeva V.Ye., Timonin A.S., Chedrik V.V. 1991. Software system for aero/strength design of aircraft ARGON *Uchenyye zapiski TsAGI.* vol. XXII. no 5. pp. 89-101.

3. Ryabov A.A., Velichko S.V., Volkov A.Yu., Volodina N.A., Dyanov D.Yu., Korsakova Ye.I., Kosarim S.S., Kudelkin V.G., Avdeev P.A., Artamonov M.V., Borlyaev V.V. 2011, Parallel software package LEGAK-DK for analysis of fluid dynamics and strength problems on unstructured meshes in Lagrange-Euler variables *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta imeni N.I. Lobachevskogo* no. 4 (5), pp. 2472–2473.

4. Morozov Ye.M., Levin V.A., Vershinin A.V. 2015, *Strength analysis. Fidesys in engineer's hands.* M.: URRS, 400 p., https://cae-fidesys.com

5. Chernyshev S.L. 2013, New stage of application of composite materials in aircraft production. *Problemy mashinostroyeniya i avtomatizatsii* No 1. pp. 3-10.

6. Levin V.A., Vershinin A.V. 2015, *Nonlinear computational mechanics of strength in 5 volumes (edited by V.A. Levin). Vol. 2. Numerical methods. Implementation on high-speed computational systems.* M.: Fizmatlit, – 543 p.

7. Levin V.A., Morozov Ye.M. 2007, Non-local criteria for determination of pre-failure zone at description of defect growth at finite deformations *Doklady RAN.* vol. 415. no 1. pp. 52-54.

8. Levin V.A. 2014, *Nonlinear computational mechanics of strength (preface by Academician G.I. Marchuk). Vol. 1. Models and methods. Formation and propagation of defects. Edited by V.A. Levin.* M.: Fizmatlit, 452 p.

9. Levin V.A. 1988. On stress concentration around hole arisen in preliminary stressed body made of viscoelastic material *Doklady AN USSR.* vol. 299. no 5. pp. 1079-1082.

10. Levin V.A. 1999. *Multiple superposition of large deformations in elastic and viscoelastic bodies (preface by Academician L.I. Sedov).* – M.: Nauka, Fizmatlit, – 223 p.

11. Levin V.A. 2008. On development of model of defect growth at finite deformations. Non-local criteria. *Applied mathematics and mechanics.* vol. 73, issue 3.

12. Chernyshev S.L. 2015. Mechanics problems in aircraft production *In proceedings: XI Russian congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics.* pp. 4411-4428.

13. Kuzmina S., Karas O., Ishmuratov F., Zichenkov M., Chedrik V. 2012 Analysis of static and dynamic aeroelastic characteristics of airplane in transonic flow *Proceeding of 28th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences 2012*, ICAS 2012. C. 2081-2090.

14. Aleksandrin Yu.S., Tuktarov S.A., Chedrik V.V. 2017. Structural design of helicopter wing on the basis of topology and global-local optimization *Uchenyye zapiski TsAGI.* vol. XLVIII, no. 1, pp. 72-85

15. Heeg J., Chwalowski P., Schuster D.M., Dalenbring M., Jirasek, A., Taylor P., Mavriplis D., Boucke A., Ballmann J., Smith M. 2013, Overview and lessons learned from the aeroelastic prediction workshop, *IFASD-2013-1A, International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, June 2013, Bristol, UK.

16. Heeg J., Wieseman C.D., Chwalowski, P. 2016, Overview and data comparisons from the 2nd Aeroelastic Prediction Workshop, *AIAA-2016-2721, AIAA Aviation Conference*, June 2016, Washington, D.C.

17. Kuzmina S., Ishmuratov F., Karas O., Chizhov A. 2014, Dynamic response of an airplane elastic structure in transonic flow *В сборнике: 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*, ICAS 2014 CD-ROM Proceedings. 2014.

18. Yevseev D.D., Lipin Ye.K., Chedrik V.V. 1991. Reducing numerical models in the problems of strength *Uchenyye zapiski TsAGI.* vol. XXII. no. 1. pp. 61-71.

19. Balunov K.A., Chedrik V.V., Ishmuratov F.Z., Karkle P.G. 2015. Aeroelastic optimization of wing shape and structural parameters for different aircraft configurations. *Proceeding of International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, IFASD 16. 2015.

Получено 25.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-500-517

МОДУЛЬ МЕХАНИКИ КОМПОЗИТОВ ДЛЯ ПАКЕТА FYDESIS

С. В. Шешенин[1]

Аннотация

С точки зрения вычислительной механики будущее развитие и конкурентная способность пакетов конечно-элементного анализа связано с реализацией в них сложных физико-механических и геометрических моделей механики деформируемого твердого тела. Имеются в виду связанные модели, физическая и геометрическая нелинейности, наличие в задачах малых параметров физической или геометрической природы.

Примером могут служить задачи для тонкостенных тел, деформирование при больших деформациях и искажения формы, задачи, в которых участвуют как твердые деформируемые тела, так и жидкости. Отдельное место занимает моделирование композиционных материалов, начиная с решения так называемых локальных задач и продолжая далее моделированием деформирования и разрушения элементов конструкций, а также технологические задачи механики композитов. Например, это задача затекания смолы с короткими включениями в матрицу сложной формы. Другой пример касается процесса полимеризации смолы с длинными волокнами в форме и проблемы коробления произведенного ламината. Пористая и трещиноватая среда, например, грунт и скальные породы, не являются композитами в стандартном понимании этого термина. Однако для их описания используются методы механики композитов. Здесь можно отметить достаточно сложную задачу фильтрации жидкости в пористой деформируемой среде испытывающей большие деформации.

Основным приемом механики композитов является многоуровневый подход, приводящий к так называемым локальным задачам в представительной области. В данной статье описываются конечно-элементные реализации локальных задач, разработанные под руководством автора статьи. Модели и вычислительные алгоритмы, реализованные в виде собственного программного кода, прошли тестирование и в перспективе могут использоваться совместно с пакетом конечно-элементного

[1]Шешенин Сергей Владимирович, профессор Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, sheshenin@mech.math.msu.su

анализа FIDESES в виде отдельного модуля. Эти численные моделирования разрабатывались в рамках долгосрочного сотрудничества с техническим университетом Берлина, компанией Dr. Mirtsch GmbH, известным французским производителем шин компанией Michelin. Дальнейшее развития развитие модуля может быть связано с использованием многоуровневого подхода для моделирования деформирования и прогрессирующего разрушения ламинатов, течения смолы с короткими волокнами, технологических задач производства ламинатов.

Ключевые слова: асимптотический метод осреднения, осреднение пластин, теория Миндлина, моментная модель резинокорда, нелинейная модель резинокорда, моделирование композитов с короткими волокнами, локальные задачи.

Библиография: 24 названия.

THE COMPOSITE MECHANICS PACKAGE FOR FYDESIS SOFTWARE.

S. V. Sheshenin

Abstract

According to the recent development of the Computational Mechanics, the future development and competitive ability of finite element analysis software seems to be related with the implementation of complicated physical, mechanical and geometric models of solids and fluids. These are coupled models, problems that include physical and geometric nonlinearities, the models or boundary-value problems with small physical or geometric parameters.

Thin-walled solids, deformation with large strains and shape distortions, problems coupling solids and fluids supply well-known examples. The modeling of composite materials is another and quite important example nowadays. It begins with solving so-called cell problems and leads to modeling deforming and damaging of composite structural elements as well as to technological problems simulation. The latter type of problems is the problem of a resin with short fibers flow into a mold of complex shape. Another example concerns the process of a resin with long fibers polymerization in a mold followed by the problem of laminate warping. Porous ground and fractured rock are not composites in the commonly used meaning of the term. However, Compositional Mechanics methods are used for their analysis. It is reasonable to mention rather complicated problem of fluid filtration in a porous media experiencing large strains.

It seems that a multi scale approach is the most general technique of composite mechanics. It results in so-called local problems in the representative volume element. This paper shows finite-element implementations of local problems developed by the author. Mechanical models and computational algorithms were implemented as home-made computer code.

The code has been thoroughly tested and can be used together with FIDESES finite element analysis software as third party package. I may be noted that the developed numerical simulations were elaborated during long term cooperation with the Technical University of Berlin, Dr. Mirtsch GmbH and famous French tire maker Michelin. Further development of the package can be associated with the use of a multi scale approach aiming composite structural elements deformation and progressive damaging modeling, resin with short fibers flow simulation as well as numerical simulation of laminate production process.

Keywords: asymptotic method of averaging, averaging of plates, Mindlin theory, moment model of rubber cord, nonlinear model of rubber cord, modeling of short fiber composite, cell problems.

Bibliography: 24 titles.

1. Введение

Вычислительная механика композитов затрагивает следующие области [2,3]: построение модели и экспериментальную идентификация параметров, постановку краевой задачи и конечно-элементную (или другую) дискретизацию, многоуровневый численный алгоритм решения, экспериментальную верификацию. Взаимосвязь расчетов с экспериментами контрастно отличает вычислительную механику от вычислительной математики.

Сведение практических задач техники, строительства и др. к решению обыкновенных дифференциальных уравнений позволило эффективно получать и анализировать напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов конструкций в «докомпьютерную» эпоху, что обусловило процветание сопротивления материалов. Прогресс вычислительной техники привел к интенсивному развитию конечно-элементных схем. Это открыло возможность эффективного решения двух- и трехмерных краевых задач. С этого и началось развитие вычислительной механики деформируемого твердого тела. Однако для развития вычислительной механики композитов потребовался еще один шаг в развитии, который был сделан с привлечением многоуровневого подхода, в частности, на основе асимптотического «метода осреднения» [4,5]. Развитие методов вычислений и, в частности, параллельных вычислений также способствует прогрессу вычислительной механики [6].

2. Вычисление эффективных свойств

Чередование компонентов композита происходит очень часто. Даже в резинокордном композите кордные нити расположены на расстоянии около 1 мм друг от друга. Отсюда возникает необходимость использования нескольких (обычно двух) уровней моделирования. Вначале эта идея использовалась в наиболее простом виде: микроуровень использовался для вычисления эффективных свойств композита на представительном элементе структуры

(RVE — representative volume element), а макроуровень — для вычисления НДС на основе эффективных свойств во всем элементе конструкции. Поскольку часто рассматривались композиты с длинными волокнами, то последующее вычисление напряжений в волокнах не вызывало затруднений. Для более сложной структуры по решению, найденному для материала с эффективными (однородными) свойствами, найти НДС в компонентах композита сложнее. Строгую математическую основу дал асимптотический метод осреднения [4]. Именно частое расположение корда позволяет использовать асимптотическое решение, причем почти всегда первые два члена асимптотического ряда дают хорошее приближение.

Метод осреднения одновременно дает определение эффективных свойств, совпадающее с общим определением [7]. Поэтому методика осреднения является математической основой в механике композитов. С другой стороны она предлагает и вычислительную процедуру решения линейных и нелинейных (в сочетании с линеаризацией) краевых задач механики композитов.

Метод осреднения позволяет находить эффективные свойства и так называемые локальные функции путем решения локальных краевых задач в представительной области (RVE) с помощью метода конечных элементов. Под представительной областью обычно понималась ячейка периодичности. Одной из первых работ такого типа является [8]. Метод осреднения для непериодической среды и пример конечно-элементного решения локальных задач с непериодическими граничными условиями приведены в [9, 10]. При этом в работах [10, 11, 12] предложена итерационная процедура связывания микро и макро уровней, по своей идее похожая на метод СН-ЭВМ [13, 14]. Аналогом опытов с макро образцами теперь служит решение локальных задач. Построение собственно эффективных свойств для нелинейных материалов намного сложнее, чем для линейных. Отметим работы [15, 16] в этом направлении.

3. Осреднение пластин

Одной из областей применения метода осреднения является моделирование неоднородных по форме и свойствам тонкостенных тел [17], т. е. пластин, оболочек, стержней. Сложность определяется тем, что помимо традиционного для метода осреднения малого параметра еще появляется малый параметр, определяемый толщиной пластины или диаметром стержня. При рассмотрении материала, имеющего структуру периодическую по всем направлениям обычно осредняются только уравнения равновесия. При осреднении тонкостенных тел пограничный слой пронизывает всю толщину тонкого тела. Следовательно, необходимо применять асимптотическое разложение и для граничных условий на лицевых поверхностях тонкого тела.

Идея метода двух масштабов для пластин состоит в том, что искомые функции, например, перемещения, считаются функциями двух медленных координат в плане тонкого тела и трех быстрых координат, описывающих трехмерную ячейку периодичности (в более общем случае, представительный

элемент): $\mathbf{u} = \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^b$, где

$$u_i^e = v_i(x_1, x_2) + \sum_{m=1} \varepsilon^m N^e_{iPQ_0\ldots Q_{m-1}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_{P,Q_0\ldots Q_{m-1}}(x_1, x_2) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u_I^b &= -\varepsilon\xi_3 w_{,I}(x_1, x_2) + \sum_{m=2} \varepsilon^m N^b_{IPQ_0\ldots Q_{m-2}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ_0\ldots Q_{m-2}}(x_1, x_2) \\ u_3^b &= w(x_1, x_2) + \sum_{m=2} \varepsilon^m N^b_{3PQ_0\ldots Q_{m-2}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ_0\ldots Q_{m-2}}(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{2}$$

$v = \{v_1, v_2, 0\}$ — гладкая составляющая перемещения в плоскости пластины, w — гладкая составляющая прогиба. Локальные функции, отмеченные индексом «e», соответствуют состоянию растяжения в плоскости пластины (extension) в отличие от локальных функций изгиба, которые отмечены индексом «b» (bending). Ряды (1), (2) не являются, вообще говоря, сходящимися и обычно используются несколько первых членов.

Например, потому, что использование большего числа членов может быть полезным только для толстых пластин, для которых описание трехмерной теорией упругости, вероятно, будет более эффективным. Здесь и далее индексы, обозначенные большими буквами, принимают значения 1,2.

В (1), (2) обычно в деталях рассматривались только первые члены

$$u_i^{ext} = v_i(x_1, x_2) + \varepsilon N^e_{iPQ}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_{P,Q}(x_1, x_2) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} u_I^{bend} &= -\varepsilon\xi_3 w_{,I}(x_1, x_2) + \varepsilon^2 N^b_{IPQ}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ} \\ u_3^{bend} &= w(x_1, x_2) + \varepsilon^2 N^b_{3PQ}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ}(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения равновесия теории пластин относительно усилий и моментов имеют вид

$$T_{IJ,J} = 0, \quad M_{IJ,J} + Q_I = 0, \quad Q_{I,I} + \varepsilon^3 p\,(\mathbf{x}) = 0, \tag{5}$$

где p — суть поперечная нагрузка, а усилия, моменты и поперечные силы определяются в виде средних по объему ячейки периодичности[17]

$$T_{IJ} = \frac{1}{\Sigma^{\text{cell}}} \int\limits_{V^{\text{cell}}} \sigma_{IJ} dV, \;\; M_{IJ} = \frac{1}{\Sigma^{\text{cell}}} \int\limits_{V^{\text{cell}}} x_3 \sigma_{IJ} dV, \;\; Q_I = \frac{1}{\Sigma^{\text{cell}}} \int\limits_{V^{\text{cell}}} \sigma_{I3} dV \tag{6}$$

Здесь V^{cell} — трехмерная область ячейки периодичности или представительного элемента, а Σ^{cell} — двумерная область, являющейся проекцией V^{cell} на отсчетную поверхность пластины.

Эффективные определяющие соотношения осредненной пластины следуют из (6) и закона Гука [17]

$$T_{IJ} = A_{IJPQ}e_{PQ} + B^{(I)}_{IJPQ}k_{PQ}\,, \qquad M_{IJ} = B^{(II)}_{IJPQ}e_{PQ} + D_{IJPQ}k_{PQ} \tag{7}$$

где A_{IJPQ} — эффективные жесткости на растяжение, D_{IJPQ} — на изгиб, а $B^{(I)}_{IJPQ}$ и $B^{(II)}_{IJPQ}$ — жесткости взаимного влияния. В общем случае первого приближения система уравнений равновесия относительно перемещений v и прогиба w, как следует из (5), (7) имеет вид

$$A_{IJPQ}v_{P,QJ} - B^{(I)}_{IJPQ}w_{,PQJ} = 0, \qquad -B^{(II)}_{IJPQ}v_{P,QIJ} + D_{IJPQ}w_{,PQIJ} = \varepsilon^3 p \tag{8}$$

т. е. такой же, как для слоистых пластин [18]. В случае пластины, имеющей плоскость симметрии, уравнения (2) разделяются, и получается классическое уравнение изгиба

$$D_{IJPQ}w_{,IJPQ} = \varepsilon^3 p\,(x)$$

Локальные функции $\mathbf{N}^e$ и $\mathbf{N}^b$ находятся из решения локальных задач в V^{cell}

$$\begin{array}{ll} P_{ijPQ,j} = 0 \quad \xi \in V^{\text{cell}}_{\xi}, & P_{ijPQ}n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma^{\text{cell}}_2 \\ Q_{ijPQ\,,j} = 0, \quad \xi \in V^{\text{cell}}_{\xi}, & Q_{ijPQ}n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma^{\text{cell}}_2 \end{array} \tag{9}$$

Приведем пример расчета эффективных жесткостей гофрированной пластины, изображенной на рис. 1.



Рис. 1: Гофрированная пластина, производимая компанией Mirtsch GmbH

Решение локальных задач по собственной программе и с помощью коммерческого конечно-элементного пакета показали хорошее совпадение результатов. Сравнение приведено в таблице 1. В строке, помеченной цифрой 1, приведены жесткости, вычисленные с помощью собственной программы. Данные, вычисленные при помощи коммерческой конечно-элементной программы, даны в строке, отмеченной цифрой 2. Как видно совпадение весьма хорошее.

Таблица 1

	A_{1111}	A_{1122}	A_{2211}	A_{2222}	B_{11}	B_{1122}	B_{1221}	B_{2222}
1	$1.44 \cdot 10^{-2}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$	$5.52 \cdot 10^{-3}$	$5.58 \cdot 10^{-5}$	$6.51 \cdot 10^{-5}$	$-1.80 \cdot 10^{6}$	$2.79 \cdot 10^{-5}$
2	$1.44 \cdot 10^{-2}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$5.60 \cdot 10^{-3}$	$5.50 \cdot 10^{-5}$	$6.50 \cdot 10^{-5}$	$-1.00 \cdot 10^{-6}$	$2.60 \cdot 10^{-5}$

Локальные задачи в для нахождения функций $\mathbf{N}^e$ и $\mathbf{N}^b$ приведены в (9) с условиями периодичности на ее боковых гранях $\xi_I = \pm l_I/2$. Здесь $\mathbf{n}(\xi)$ — вектор нормали к верхней или нижней поверхностям ячейки периодичности V^{cell}.

В случае гофрированной пластины осуществляется совместное состояние растяжения и изгиба. При этом жесткости отличаются на четыре порядка, что доставляет существенную вычислительную сложность, типичную для композитов. Использование двух масштабов в том числе нужно, для ее преодоления. Сравнение цилиндрических жесткостей $\tilde{D}_{11} = D_{11} - \frac{B_{11}^{(1)} B_{11}^{(2)}}{E_{11}}$ и $\tilde{D}_{22} = D_{22} - \frac{B_{22}^{(1)} B_{22}^{(2)}}{E_{22}}$ с жесткостями, измеренными в эксперименте на цилиндрический изгиб, проведенном в компании Mirtsch GmbH показало хорошее совпадение. Пластина оказалась не точно изотропной. Поскольку для идеальной пластины с шестиугольной ячейкой эффективные жесткости являются изотропными, то следует сделать важный вывод о сильном влиянии малых искажений формы шестиугольной ячейки на эффективные изгибные жесткости.

В случае изгиба балки, например, в плоскости x_1, x_2, имеем соотношения, которые, исходя из (3) — (8), можно почти автоматически записать в виде

$$u_i^{ext} = v_i(x_1) + \varepsilon N_i^e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{dv}{dx_1}(x_1) + \dots\,,\ i = 1, 2, 3$$

$$u_1^{bend} = -\varepsilon \xi_2 \frac{dw}{dx_1}(x_1) + \varepsilon^2 N_1^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{d^2 w}{dx_1^2} + \dots\,,$$

$$u_2^{bend} = w(x_1) + \varepsilon^2 N_2^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{d^2 w}{dx_1^2}(x_1, x_2) + \dots\,,$$

$$u_3^{bend} = \varepsilon^2 N_3^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \dots\,,\quad v = \{v, 0, 0\}\,.$$

Напряжения имеют вид

$$\sigma_{ij}^e = P_{ij} \tfrac{dv}{dx_1}\,,\quad P_{ij} = C_{ij11} + C_{ijkl} N_k^e{}_{,l}$$
$$\sigma_{ij}^b = \varepsilon Q_{ij} \tfrac{d^2 w}{dx_1^2}\,,\quad Q_{ij} = -\xi_2 C_{ij11} + C_{ijkl} N_k^b{}_{,l}$$

Продольное усилие, изгибающий момент и поперечная сила теперь определяются как

$$T = \frac{1}{\Sigma^{\text{cell}}} \int\limits_{V^{\text{cell}}} \sigma_{11} dV,\ \ M = \frac{1}{\Sigma^{\text{cell}}} \int\limits_{V^{\text{cell}}} x_2 \sigma_{11} dV,\ \ Q = \frac{1}{\Sigma^{\text{cell}}} \int\limits_{V^{\text{cell}}} \sigma_{12} dV$$

а определяющие соотношения имеют вид

$$T = Ae + B^{(I)}k\,, \qquad M = B^{(II)}e + Dk$$

где A — эффективная жесткость на растяжение, D — на изгиб, $B^{(I)}$ и $B^{(II)}$ — жесткости взаимного влияния растяжения и изгиба.

Локальные задачи записываются в виде, аналогичном (9)

$$\begin{array}{llll} P_{ij,j} = 0 & \xi \in V_\xi^{\text{cell}}, & P_{ij}n_j = 0, & \xi \in \Sigma_2^{\text{cell}} \\ Q_{ij,j} = 0, & \xi \in V_\xi^{\text{cell}}, & Q_{ij}n_j = 0, & \xi \in \Sigma_2^{\text{cell}} \end{array} \tag{10}$$

с условиями периодичности при $\xi_1 = \pm l/2$, $\mathbf{n}(\xi)$ — вектор нормали к боковой поверхности.

Алгоритм решения задач (9), (10) реализован автором в виде собственного программного кода. Интеграция с FIDESYS позволит охватить широкий круг задач, связанных с вычислением жесткостей неоднородных пластин и стержней.

В [17] изучены кроме первого еще два приближения. Для слоистой пластины каждое приближение уточняет решение так же, как и для однородной пластины, согласно таблице 2.

Таблица 2

	1	2	3
σ_{11}	+	−	+
σ_{12}	+	−	+
σ_{13}	−	+	−
σ_{22}	+	−	+
σ_{23}	−	+	−
σ_{33}	−	−	+

Из таблицы видно, что три члена ряда позволяют найти все компоненты тензора напряжения. Исследование четвертого члена остается открытым, хотя уже три члена обеспечивают достаточную точность для толстых пластин [19, 20]. В [20, 21] показано, что для слоистой пластины асимптотическим является уравнение

$$w_{,IIJJ} = \frac{p}{D} + \frac{p_{,II}}{\gamma\mu h}$$

Теория Миндлина приводит к такому же уравнению, в котором часто используются значения коэффициента $\gamma = 5/6$ и $\gamma = 4/5$. В асимптотическом методе множитель κ находится из локальной задачи пятого приближения и имеет выражение $\gamma = \frac{5}{6} + \frac{29}{6}\frac{\nu}{12-7\nu}$. Несмотря на совпадение уравнений для прогиба, теория Миндлина даёт другие распределения деформаций (и, соответственно, напряжений) по толщине пластины, чем асимптотическое решение [21].

4. Линейная модель резинокорда

Описанную выше методику осреднения можно применить к резинокордной пластине. Обычно принято считать, что структура резинокорда имеет плоскость симметрии. Следовательно, асимптотический анализ приводит к несвязанным определяющим уравнениям вида (7)

$$T_{IJ} = A_{IJPQ} \cdot \varepsilon_{PQ}, \qquad M_{IJ} = D_{IJPQ} \cdot k_{PQ}, \qquad I, J, P, Q = 1, 2 \qquad (11)$$

где $\varepsilon_{PQ} = \frac{1}{2}(u_{P,Q}+u_{Q,P})$, $k_{PQ} = w_{,PQ}$. В (11) жесткости на изгиб и растяжение являются независимыми друг от друга. Их можно вычислить из решений локальных задач, но точнее измерить экспериментально. Будем считать что соотношения (11) адекватно описывают двумерные свойства резинокорда в рамках модели эффективного слоя.

С другой стороны двумерные определяющие соотношения (11) неудобно использовать в трехмерной модели пневматической шины [22]. Разрешить противоречие можно, если резинокордный слой описывается уравнениями трехмерной моментной теории упругости. Свойства такого упругого материала можно определить из условия, что при стремлении толщины пластины к нулю предельными являются соотношения (11). Другой подход, непосредственно ориентированный на конечно-элементную реализацию, состоит в приравнивании энергии трехмерной моментной упругой среды к энергии деформации, соответствующей соотношениям (11). Для них удельная энергия выражается в виде

$$\varphi^{in-plane} = \frac{1}{2}\left(T_{IJ}\varepsilon_{IJ} + M_{IJ}k_{IJ}\right) = \frac{1}{2}\left(A_{IJPQ}\varepsilon_{IJ}\varepsilon_{PQ} + D_{IJPQ}k_{IJ}k_{PQ}\right). \qquad (12)$$

Нужно отметить, что соотношения (11) определяют только двумерные свойства эффективного слоя. Соотношения трехмерной моментной среды в обозначениях из [23] имеют выражение

$$\varphi = \int\limits_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \mu_{ij}\kappa_{ij})dx_3, \quad \varepsilon_{ij} = u_{j,i} - \in_{kij}\omega_k, \quad \kappa_{ij} = \omega_{j,i}, \quad ij = 1, 2, 3,$$

где ω — вектор собственного поворота материальной точки. Нас интересует частный случай моментной теории, описываемый далее. Энергия представляется в виде $\varphi = \varphi^{in-plane} + \varphi^{out-plane}$, где

$$\varphi^{out-plane} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{I3}\varepsilon_{I3} + \sigma_{3I}\varepsilon_{3I} + \sigma_{33}\varepsilon_{33})dx_3 =$$

$$= \int\limits_{-h/2}^{h/2} (C_{I3J3}\varepsilon_{I3}\varepsilon_{J3} + C_{I33J}\varepsilon_{I3}\varepsilon_{3J} + C_{3333}\varepsilon_{33}\varepsilon_{33})dx_3 \quad (13)$$

$$\varphi^{in-plane} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{IJ}\varepsilon_{IJ} + \mu_{IJ}\omega_{J,I})dx_3 \quad (14)$$

Поперечные касательные напряжения σ_{I3} и σ_{3I} вызваны как сдвигом так и изгибом. Будем считать, что несимметричность этих напряжений вызвана только изгибным состоянием. Поскольку поперечные касательные напряжения вследствие изгиба в $1/h$ раз меньше напряжений растяжений сжатия, то в теории первого приближения относительно h ею можно пренебречь и в (13) считать, что $C_{I3J3} = C_{I33J}$, $\varepsilon_{I3} = \varepsilon_{3I}$, а вектор поворота выражается через перемещения $\omega_k = \in_{kij}\omega_{ij}, \omega_{ij} = {}^1\!/_2(u_{i,j} - u_{j,i})$. Второе слагаемое в подынтегральном выражении можно переписать, использую обозначения моментов и кривизн такие же, как в (11) $\mu_{IJ}\omega_{J,I} = m_{IJ}k_{IJ}$, где

$$\mu_{12} = m_{11}, \mu_{21} = m_{22}, \mu_{11} = m_{22}, \mu_{22} = m_{12}, \quad k_{11} = {}^1\!/_2(u_{3,1} - u_{1,3})_{,1},$$
$$k_{22} = {}^1\!/_2(u_{3,2} - u_{2,3})_{,2}, k_{21} = {}^1\!/_2(u_{3,2} - u_{2,3})_{,1}, \quad k_{11} = {}^1\!/_2(u_{3,1} - u_{1,3})_{,2}.$$

Поскольку в теории первого приближения поперечные деформации сдвига считаются нулевыми, то формулы для кривизн можно преобразовать

$$k_{11} = u_{3,11}, \quad k_{22} = u_{3,22}, \quad k_{21} = k_{12} = u_{3,21}.$$

Таким образом, формулы приобретают вид аналогичный, используемому в теории пластин.

Чтобы энергии в (12) и (14) приближенно совпадали, положим

$$\sigma_{IJ} = a_{IJKL}\varepsilon_{KL}, \quad \mu_{IJ} = d_{IJKL}k_{KL}, \quad a_{IJKL} = {}^1\!/_h A_{IJKL}, \quad d_{IJKL} = {}^1\!/_h D_{IJKL}.$$

Для описанной моментной модели аспирантом А. Романовым реализована конечно-элементная реализация, в которой вычисление поворотов осуществлено с помощью разностных производных $\omega_I = \frac{1}{h}\left(u_I^+ - u_I^-\right)$. В этой формуле значения продольных перемещений с плюсом и минусом берутся на верхней и нижней лицевых поверхностях, как пояснено на рис. 2.

Пример влияния модифицированных изгибных свойств на прогиб пластины показан в таблице 3. Расчеты проведены с использованием трехмерной

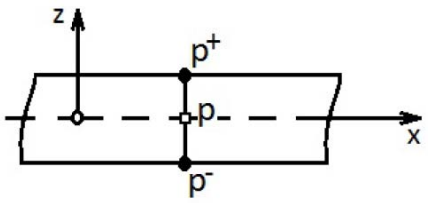


Рис. 2: Пояснение к вычислению поворотов

моментной теории упругости для цилиндрического изгиба при отношении толщины к длине пластины равном , что вполне адекватно для резинокорда.

В первом столбце приведены отношения заданных в трех расчетах цилиндрических жесткостей пластины к значениям стандартной цилиндрической жесткости, соответствующей обычной теории упругости. Как видно, отношение прогибов достаточно точно повторяет отношение жесткостей и доказывает работоспособность построенной теории. Заметим, что предлагаемая моментная модель резинокорда представляется подходящей для описания слоев брекера, имеющих металлические волокна.

Таблица 3

1.1	1.09
1.2	1.18
1.4	1.35

5. Нелинейная модель резинокорда

Для описания резинокордного слоя с текстильными волокнами моментные свойства менее важны, поскольку изгибная жесткость мала. Однако интерес может представлять деформирование при деформациях до 15 – 20%. Ниже описывается модель анизотропного гиперупругого монослоя и решение локальных задач для вычисления параметров потенциала.

Для гиперупругого материала напряжения определяются как $S_{ij} = 2\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \cdot$ $\cdot (\mathbf{C})$. Здесь S_{ij} есть компоненты 2-го тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа, W — гиперупругий потенциал, C_{ij} — компонента меры деформаций Коши–Грина. Для изотропных материалов потенциал является функцией от трех инвариантов ортогональных преобразований. Например, $W = W(I_1(\mathbf{C}),$ $I_2(\mathbf{C}),\ I_3(\mathbf{C}))$ или $W = W\left(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), J\right)$, где $I_1(\mathbf{C}) = tr(\mathbf{C}),\ I_2(\mathbf{C}) =$ $= \frac{1}{2}\left({I_1}^2 - I_1(\mathbf{C}^2)\right),\ I_3(\mathbf{C}) = J^2,\ J = \det \mathbf{F}$, а $\mathbf{F}$ — градиент деформации. С помощью девиатора меры деформаций можно разделить свойства на сдвиг и объем¬ное деформирование: $\bar{\mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}}\mathbf{C}$. Тогда $\overline{I}_1 = I_1\left(\bar{\mathbf{C}}\right) = J^{-\frac{2}{3}} I_1$, $\overline{I_2} = I_2\left(\bar{\mathbf{C}}\right) = J^{-\frac{4}{3}} I_2$, а потенциал представить как $W_{iso} = W_{shear}(\bar{I}_1, \bar{I}_2)+$

$+W_{vol}(J)$.

Материал матрицы при деформациях, не превышающих 20%, может быть хорошо описан потенциалом Муни $W_{shear} = W_m = c_{10}(\overline{I}_1 - 3) + c_{01}(\overline{I}_2 - 3)$. «Объемная» составляющая потенциала часто принимается в виде квадратичного потенциала $W_{vol}(J) = \frac{K}{2}(J-1)^2$, где K — модуль объемного сжатия.

Моделирование упругой анизотропной среды при больших деформациях может быть основано на использовании инвариантов, соответствующих типу анизотропии. Число алгебраически независимых инвариантов для трансверсально-изотропной среды равно пяти, а для ортотропной — шести. Наборы независимых инвариантов могут быть выбраны по-разному. Если принять, что ось трансверсальной изотропии направлена вдоль оси 3 декартовой системы координат, то можно выбрать следующий набор независимых инвариантов для трансверсальной изотропии:

$$I_1(\underline{C}) = C_{11} + C_{22} + C_{33}, \quad I_2(\underline{C}) = \frac{1}{2}\left({I_1}^2 - I_1(C^2)\right), \quad I_3(\underline{C}) = J$$

$$I_4(\underline{C}) = \sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}, \qquad I_5(\underline{C}) = C_{33}$$

Эти инварианты сохраняют свои значения в любой системе координат, полученной с помощью преобразований трансверсальной изотропии. Можно записать инварианты $I_4(\underline{C})$, $I_5(\underline{C})$ в виде, инвариантном, относительно любых преобразований, а не только преобразований из группы трансверсальной изотропии. Инвариант $I_5(\underline{C})$ может быть представлен в виде $I_4(\underline{C}) = \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{k}_3$, где k_3 — единичный вектор, направленный вдоль оси 3. Инвариант $I_4(\underline{C})$ может быть записан как $I_4(\mathbf{C}) = \sqrt{I_5(\mathbf{C}^2) - I_5^2(\mathbf{C})}$.

Поскольку резинокорд состоит из изотропной резины и волокон, то представим потенциал в виде суммы изотропной части и дополнительных членов, учитывающих наличие волокон [24]

$$W = W_{iso} + W_{tr_sh}(I_4) + W_L(I_5)$$

Учитывая что, деформации сдвига и растяжения вдоль волокон малы, можно принять $W_{tr_sh}(I_4) = \frac{a}{2}I_4^2$, $W_L(I_5) = \frac{1}{2}b(I_5 - 1)^2$.

Для волокнистого материала, выбранная выше форма потенциала соответствует представлению всей энергии деформации в виде суммы энергии, аккумулированной в матрице, и энергии, запасенной в волокнах без учета взаимного влияния друг на друга.

Аналогичные представления для ортотропной модели резинокордного слоя имеют вид

$$I_1(\mathbf{C}) = C_{11} + C_{22} + C_{33}, \quad I_2(\mathbf{C}) = \tfrac{1}{2}\left({I_1}^2 - I_1(\mathbf{C}^2)\right), \qquad I_3(\mathbf{C}) = J^2,$$
$$I_4(\mathbf{C}) = {C_{13}}^2, \qquad I_5(\mathbf{C}) = C_{33}, \qquad I_6(\mathbf{C}) = {C_{23}}^2$$

и соответственно

$$W = W_{iso} + W_{13}(I_4) + W_L(I_5) + W_{23}(I_6)$$

Поскольку резинокорд можно с достаточной точностью имеет периодическую структуру, то определение материальных параметров используются решения локальных задач, причем вычисления на ячейке можно рассматривать как численную замену реального теста. Нагружая ячейку периодичности различными типами нагрузки можно получить эффективные диаграммы нагружения, связывающие средние напряжения и деформации для каждого вида нагружения. Аппроксимируя вычисленную (или экспериментальную) диаграмму нагружения кривой, полученной исходя из упругого потенциала, можно получить соотношение для определения неизвестных материальных параметров. Для приведенных потенциалов построен набор нагружений, позволяющих вычислить все материальные параметры.

6. Локальные задачи для композита с короткими волокнами

При решении локальных задач с короткими волокнами существует вычислительная проблема, не имеющая места для композита с длинными волокнами. Именно, в представительной области возникают конечно-элементные задачи, не поддающиеся решению. Даже построение сетки вызывает затруднения. Однако оказалось, что вычисление эффективных свойств на прямоугольной сетке с грубой аппроксимацией межфазных границ может давать достаточную точность для эффективных модулей. Интересно заметить, что известный пакет Digimat позволяет использовать такой же подход.

Моделирование структуры композита с короткими волокнами может осуществляться двумя способами. В случае, когда волокно моделируется одномерным конечным элементом, построение сетки вызывает не столь большие трудности, но такая модель дает приемлемые результаты только для небольшой концентрации волокон. В случае, когда волокно моделировалось цилиндром, попытки построить сетку и решить конечно-элементную задачу не приводят к успеху. Для того, чтобы обойти возникшую проблему может использоваться старый метод построения сетки. Представительная область в виде куба или параллелепипеда разбивается на большое число равных конечных элементов по форме аналогичной форме области, после чего каждому конечному элементу присваивается номер материала, который оказался в его геометрическом центре элемента. Конечно, такое построение сетки ведет к грубому решению задачи на микроуровне, однако при вычислении осредненных напряжений и деформаций получаются результаты, хорошо совпадающие с экспериментальными значениями.

В подтверждение приведем пример вычисления модуля Юнга среды с равномерно распределенными волокнами, у которых отношение длины к диаметру равнялось 100. Объемная доля волокон в материале составляля 7.25%, 15% и 32%. Модуль Юнга волокон равнялся 240 ГПа, матрицы — 5.4 ГПа. Коэффициент Пуассона волокна 0.2, матрицы — 0.36. В таблице 4 приведено сравнение вычисленных значений модуля Юнга с экспериментально измерен-

ными значениями. В этой таблице в первой колонке приведены концентрации, во второй — значения модуля Юнга (ГПа) вычисленные, когда волокна (не менее 200 волокон) моделировались одномерными конечными элементами. Результаты в третьей (50 волокон, 125000 конечных элементов) и четвертой (50 волокон, 1000000 элементов) колонках соответствуют случаю, когда волокна моделировались цилиндрами. Т. е. аппроксимацией цилиндров на кубической сетке. В последней колонке приведены экспериментальные значения.

Таблица 4: Модули Юнга, полученные численно

0.075	7.14	8.53	8.7	9.1
0.15	9.88	13.43	12.73	11
0.32	16.25	26.4	24.53	22

Из Таблицы 4 можно заметить, что значения модуля Юнга, полученные при моделировании волокна одномерными элементами, дают не слишком хорошее совпадение с экспериментальными результатами. Результаты, полученные при моделировании волокон на кубической сетке, дают явно лучшее совпадают для концентрации 32% при значительном числе элементов.

7. Заключение

В работе описаны некоторые примеры численного моделирования в механике композитов, которые могут представлять интерес для разработчиков пакета FIDESYS. При написании статьи использовалась финансовая поддержка РФФИ: грант № 15-01-05887-а.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URRS, 2015 — 400 с.

2. Победря Б.Е. Принципы вычислительной механики композитов//Механика композитных материалов.1996. т.32. №6.

3. Победря Б.Е., Шешенин С.В. Некоторые приложения вычислительной механики композитов // В сборнике «Современные проблемы математики и механики», изд- во МГУ. 2009.

4. Бахвалов Н.С. , Панасенко Г.П. Осреднение структур с периодической структурой. М.: Наука, 1984.

5. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М:. Изд-во МГУ. 1984.

6. Левин В.А., Вершинин А.В. Нелинейная вычислительная механика прочности. Т. 2. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. Под общ. ред. В.А. Левина. М.: Физматлит, 2015. – 544 с

7. Хилл Р. Упругие свойства составных сред: некоторые теоретические принципы // Механика. Сб. переводов. 1964. № 5. С. 127-143.

8. Шешенин С.В. Осредненные модули одного композита // Вестник МГУ. 1980. №6. С. 79-83

9. Brandmair, Mueller W., Savenkova M., Sheshenin S. A multi-scale homogenization technique applied to the elastic properties of solders // Technische Mechanik. — 2011. — Vol. 31, no. 2. — P. 156–170.

10. Шешенин С., Савенкова М. Осреднение нелинейных задач в механике композитов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2012. № 5. С. 58–62.

11. Савенкова М.И., Шешенин С.В., Закалюкина И.М. Применение метода осреднения в задаче упругопластического изгиба пластины // Вестник МГСУ. 2012, №9. – С. 156-164.

12. Шешенин С.В., Савенкова М.И., Об осреднении композитов при наличии нелинейности // Упругость и неупругость: дополнительные материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. – М.: Издательство Московского университета, 2012. – С. 260-269.

13. Ильюшин А.А. Пластичность. М. Наука. 1963.

14. Васин Р.А., Колтин Г.П., Шешенин С.В. О решении плоской задачи пластичности в случае сложного нагружения//Вестник Моск. Ун-та. №1.1986.

15. Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М. Об одном способе оценки эффективных характеристик пористых тел при конечных деформациях.// Известия АН. Механика твердого тела. 1997, № 4. - С.45-50.

16. Левин В.А., Зингерман К.М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении.// Доклады РАН. 2002. Т. 382, № 4. – С. 482–487.

17. Шешенин С. В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин// Известия Российской академии наук. МТТ.2006. №6. С.

18. Jones R.M. Mechanics of Composite Materials, 2nd ed. Philadelphia. L.:Taylor&Francis, 1998.

19. Скопцов К.А., Шешенин С.В. Асимптотический анализ слоистых пластин и пологих оболочек // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 161-171

20. Скопцов К.А., Шешенин С.В. Асимптотический метод получения уравнений теории пластин Рейсснера-Миндлина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2013. № 2, с. 65-67

21. Шешенин С.В., Скопцов К.А. Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений // Математическое моделирование и численные методы. № 2. С. 49-61.

22. Шешенин С.В. Трехмерное моделирование шины // МТТ.2007.3.

23. Новацкий В. Теория упругости. Мир. 1975.

24. Шешенин С.В., Закалюкина И.М., Скопцов К.А. Упругий потенциал резинокордного монослоя // Вестник МГСУ. 2013. Том 11, с. 100-106.

REFERENCES

1. Morozov, E.M., Levin, V.A. & Vershinin, A.V. (2015), *Prochnostnoy analiz. FIDESIS v rukakh inzhenera* [Strength Analysis. FIDESIS in the Hands of an Engineer], URRS, Moscow, Russia.

2. Pobedrya, B.E. (1996), "Principles of Computational Mechanics of Composites" , *Mechanics of Composite Materials*, vol. 32, no. 6, pp. 720-746.

3. Pobedrya B.E. & Sheshenin S.V. (2009), "Some Applications of Computational Composite Mechanics", *Sovremennyye problemy matematiki i mekhaniki* [Modern Problems of Mathematics and Mechanics], Izd. Moscow. Univ., Moscow, Vol. 2, Issue 2, pp. 3-10.

4. Bakhvalov, N.S. & Panasenko, G.P. (1984), *Osredneniye Sred s Periodicheskoy Strukturoy* [Homogenization of Media with Periodic Structure], Science Moscow, Russia.

5. Pobedrya, B.E. (1984), Mekhanika kompozitsionnykh materialov, [Mechanics of composite materials], Lomonosov Moscow Univ. Press, Moscow, Russia.

6. Levin, V.A. & sVershinin, A.V. (2015), "Nonlinear Computational Mechanics of Strength", *in Chislennyye metody. Parallel'nyye vychisleniya na EVM* [Numerical methods. Parallel computing], ed. V.A. Levin, Fizmatlit, Moscow, Russia.

7. Hill, R. (1964), "Elastic Properties of Composite Media: some theoretical principles", *Mechanics*, no. 5, pp. 127-143.

8. Sheshenin, S.V. (1980), "Averaged Modules of One Composite", *Vestn. Moskovsk. univ. Ser. 1. Matem. mekhan* [Moscow Univ. Mech. Bulletin], no. 6, pp. 78-83.

9. Brandmair, A., Mueller, W., Savenkova, M.I. & Sheshenin, S.V. (2011), "A Multi-scale Homogenization Technique Applied to the Elastic Properties of Solders", *Technische Mechanik*, vol. 31, no. 2, pp. 156–170.

10. Sheshenin, S.V. & Savenkova, M.I. (2012), "Homogenization of Nonlinear Problems in Composite Mechanics", *Vestn. Moskovsk. univ. Ser. 1. Matem. Mekhan.* [Moscow Univ. Mech. Bulletin], no. 5. pp. 58-62.

11. Savenkova, M.I., Sheshenin, S.V., & Zakalyukina I.M. (2012), "Application of the Averaging Method to the Problem of Elastoplastic Plate Bending" , *Vestnik MGSU*, no. 9, pp. 156-164.

12. Sheshenin, S.V. & Savenkova M.I. (2012), "Averaging of the Nonlinear Composites", *Elasticity and inelasticity, Additional materials*, Proc. of the Int. Sci. Symp. on the Problems of Solid Mech. dedicated to the 100th Anniv. of A.A. Ilyushin, Izd. Moscow. Univ., Moscow, pp. 260-269.

13. Ilyushin, A.A. (1963), *Plasticity*, Publ. House of the USSR Acad. of Sci., Moscow, USSR.

14. Vasin, R.A., Coltin, G.P. & Sheshenin, S.V. (1986), "On the Solution of the Plane Plasticity Problem in the Case of Complex Loading", *Vestn. Moskovsk. univ. Ser. 1. Matem. Mekhan.* [Moscow Univ. Mech. Bulletin], No. 2, pp. 60-63.

15. Levin, V.A., Lokhin, V.V. & Zingerman, K.M. (1997), "On the Method for Estimating Effective Properties of Porous Solids at Large Strains"[Ob odnom sposobe otsenki effektivnykh kharakteristik poristykh tel pri konechnykh deformatsiyakh], *Izvestiya RAN, MTT* [Mechanics of Solids], no. 4, pp.45-50.

16. Levin, V.A., Zingerman, K.M. (2002), "On the Construction of Effective Constitutive Lows for Porous Elastic Materials for Large Strains and their Imposition", *Dokl. Acad. Nauk*, vol. 382, no. 4, pp. 482-487.

17. Sheshenin, S.V. (2006), "Asymptotic Analysis of the In-plane Periodic Plates", *Izvestiya RAN. MTT* [Mechanics of Solids], no. 6, pp. 71-79.

18. Jones, R.M. (1998), *Mechanics of Composite Materials*, 2nd ed., Taylor & Francis, Philadelphia, US.

19. Skoptsov, K.A. & Sheshenin, S.V. (2011), "Asymptotic Analysis of Laminated Plates and Shallow Shells", *Izvestiya RAN. MTT* [Mechanics of Solids], no. 1, pp. 161-171.

20. Skoptsov, K.A. & Sheshenin, S.V. (2013), "Asymptotic Method for Deriving Equations of the Reissner-Mindlin Plate Theory", *Vestn. Moskovsk. univ. Ser. 1. Matem. Mekhan.* [Moscow Univ. Mech. Bulletin], no. 2, pp. 65-67.

21. Sheshenin, S.V. & Skoptsov, K.A. (2014), "The Theory of Plates Based on the Method of Asymptotic Expansions", *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metod* [Mathematical modeling and numerical methods], No. 2, pp. 49-61.

22. Sheshenin, S.V. (2007), "Three-Dimensional Modeling of the Tire" *Izvestiya RAN. MTT* [Mechanics of Solids], no. 3, pp. 13-21.

23. Novatsky, V. (1975),*Theory of Elasticity* [Teoria Sprezystoscy], Translated by B.E. Pobedria, Mir, Moscow, USSR.

24. Sheshenin, S.V., Zakalyukina, I.M. & Skoptsov, K.A. (2013), "Elastic Potential of Rubbercord Ply", *Vestnik MGSU*, no. 11. pp. 100-106.

Получено 22.05.2017
принято в печать 14.09.2017

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 3

УДК 539.3, 519.6, 539.4 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-518-537

ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО НАЛОЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ, РАЗВИТИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ ЗАДАЧ. ПУТИ ЕЕ РЕАЛИЗАЦИИ В ПАКЕТЕ ФИДЕСИС ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОЧНОСТНОГО АНАЛИЗА В НОВЫХ ОТРАСЛЯХ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В. А. Левин[1] (г. Москва)

Аннотация

Отмечается, что теория многократного наложения больших деформаций позволяет формулировать задачи, в которых в процессе нагружения неоднократно дискретно или непрерывно изменяются границы, граничные условия, включая связность области, занимаемой телом, свойства материала части тела, причем каждое изменение приводит к перераспределению в теле больших деформаций и напряжений. Указывается, что в рамках данной теории под термином «последовательность нагружения» понимается последовательность механических и немеханических воздействий на тело (изделие, элемент конструкции, горный массив), изменение в процессе нагружения (эксплуатации) свойств материала части тела, добавление (включая послойное) или удаление (например, принудительное образование дефектов) частей нагруженного тела.

Приведена постановка задач теории многократного наложения больших деформаций, позволяющая формулировать и решать междисциплинарные (связанные) задачи для двух основных случаев. В первом случае учитываются внешние не механические воздействия на тело (включая изменения свойств материала тела или его части от их воздействия): температурные, электромагнитные, химические, радиационные воздействия, твердотельный фазовый переход и иные воздействия, не описываемые в рамках соотношений механики деформируемого твердого тела. Во втором случае учитывается взаимодействие деформируемого твердого тела с внешней (иной) средой.

[1]Левин Владимир Анатольевич, профессор кафедры вычислительная механика механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, v.a.levin@mail.ru

Отмечается, что промышленная программная реализация решения междисциплинарных задач теории многократного наложения больших деформаций в пакете Фидесис потребует для первого случая разработку дополнительных модулей и (или) изменения в расчетных ядрах пакета Фидесис. Сообщается, что для ряда задач исследовательский программный код разработан и научно апробирован в рамках работ дорожной карты развития пакета Фидесис. Во втором случае, с промышленной точки зрения, программная реализация может достаточно качественно и относительно быстро выполнена путем интеграции пакета Фидесис с соответствующими промышленными пакетами, позволяющими проводить моделирование внешней среды. Такая интеграция предусмотрена в дорожной карте развития пакета, и такие работы ведутся.

Ключевые слова: Многократное наложение больших деформаций, междисциплинарные задачи, инженерное программное обеспечение, инженерный анализ

Библиография: 50 названий.

THEORY OF REPEATED SUPERPOSITION OF LARGE STRAINS. DEVELOPMENT OF THIS THEORY FOR SOLUTION OF MULTIDISCIPLINARY PROBLEMS. METHODS OF IMPLEMENTATION OF THIS THEORY FOR STRENGTH ANALYSIS IN NEW BRANCHES OF INDUSTRY

V. A. Levin (Moscow)

Abstract

It is noted that the theory of repeatedly superimposed large strains permits one to formulate the problems in which the boundaries or boundary conditions are multiply changed step by step or continuously, including the changes of connectedness of the region occupied by the body and the changes of material properties of parts of the body. Every change leads to redistribution of large strains and stresses in the body. It is pointed out that the term "loading sequence" within the framework of this theory denotes the sequence of mechanical and non-mechanical actions on the body (article, element of construction, rock massif), changes of properties of a body part during loading (exploitation), addition or removal of parts of loaded bodies (including layered growth or forced origination of defects).

The problem statement of the theory of repeatedly superimposed large strains is developed for two basic cases of interdisciplinary (coupled)

problems. In the first case external non-mechanical actions on the body are taken into account: thermal, electromagnetic, chemical, radiation actions, solid-state phase transformations, and other actions that can not be described within the scope of solid body mechanics. This case involves the changes of material properties of the body or its part due to external actions. In the second case the interaction between deformable solids and other (external) surroundings is taken into account.

It is noted that the industrial software implementation of interdisciplinary problems of the theory of repeatedly superimposed large strains in the FIDESYS program package in the first case requires the development of additional modules and (or) changes in computational kernels of the FIDESYS package. It is reported that for some problems in the first case the software is developed and scientifically approved within the framework of development roadmap of the FIDESYS package. In the second case, for industrial purposes, the implementation can be performed with proper quality and quickly enough by integration of the FIDESYS package with respective industrial packages that permits one to model the environment. Such integration is provided in the development roadmap of the package, and such works are carried out.

Keywords: Theory of repeatedly superimposed large strains, mechanics of deformable solids, engineering software, computer-aided engineering, engineering analysis

Bibliography: 50 titles.

С разрешения редакции автор нарушает формат научно-технической статьи и включает в статью благодарность коллегам и редакции.

Автор благодарен редакции журнала, предложившей выпустить этот номер журнала в юбилейном формате, редакционному совету данного номера и коллегам, подготовившим столь значимые статьи для этого выпуска журнала.

На взгляд автора, данные статьи относятся к четырем основным направлениям, определяющим развитие CAE (Computer Aided Engineering) — инженерного программного обеспечения (ИПО) для инженерного анализа (ИА):

1. Фундаментальным научным результатам, позволяющим развивать функциональность CAE на основе актуальных запросов промышленности,

2. реализации разработчиками CAE этой функциональности на промышленном уровне с использованием новых для промышленного использования моделей и методов в CAE,

3. решению промышленных наукоемких задач с использованием CAE,

4. подготовке специалистов как для разработки CAE, так и для их профессионального использования.

С развитием CAE у ученого, занимающегося прочностным анализом и смежными областями, за последнюю треть века существенно изменился подход к решению новой задачи. Если исследователь работает в рамках малых деформаций, ему достаточно предложить и обосновать модель и провести расчет с использованием промышленного CAE, иногда дописать на внешнем языке пакета небольшие возможные дополнения. Это связано с тем, что проблема создания программы для ЭВМ для решения задачи «с нуля» практически полностью решена с введением в расчетную практику промышленных CAE[2]. Если деформации не малые, то это не так. В ряде случаев (особенно связанных с ключевыми направлениями развития промышленности) требуется развитие функционала CAE и научной составляющей для такого развития. Дорожная карта совершенствования пакета Фидесис предусматривает такое развитие функционала для многомасштабного (разномасштабного) моделирования, необходимого при применении наноструктурированных материалов, метаматериалов, учета структуры материала при моделировании высоких давлений, разрушения, использования аддитивных технологий [3,11,12,13,15,17,18, 22,26, 27, 28, 29, 32,42,43,44,47]. Кроме того, в дорожной карте предусмотрено создание специализированных, в ряде случаев междисциплинарных отраслевых решений (СТОР) с заложенной в них соответствующей функциональностью [1, 2, 4,7, 16, 25, 30,31,35, 36,44,46,48], с упором на повышение точности [5,9], производительности [14,40,41]. Еще сложнее развитие функционала CAE для случая учета перераспределения конечных деформаций в процессе нагружения.

Поэтому одним из направлений развития функциональности промышленных CAE для прочностного инженерного анализа является учет нелинейных эффектов[6,8,10,24,33,37,38], связанных с конечностью деформаций и последовательностью нагружения [19,22]. Под термином «последовательность нагружения» понимается:

1. последовательность механических и немеханических воздействий на тело (изделие, элемент конструкции, горный массив),

2. изменение в процессе нагружения (эксплуатации) свойств материала части тела,

3. добавление (включая послойное) или удаление (например, принудительное образование дефектов) частей нагруженного тела.

Постановку и решение таких задач при больших деформациях позволяет осуществлять теория *многократного наложения больших деформаций* [19, 20]. Это связано с тем, что данная теория позволяет формулировать задачи,

[2]Следует отметить, что стремительное развитие CAE (включая облачный сервис), вероятно, в ближайшее время позволит исследователю сосредоточиться на построении моделей прочности и их обосновании, но поставит исследователя новых наукоемких задач в зависимость от качества расчетов CAE-системы, в том числе от заложенных в нее систем уравнений, описывающих расчетную модель и методы решения.

в которых в процессе нагружения неоднократно дискретно или непрерывно изменяются границы, граничные условия, включая связность области, занимаемой телом, свойства материала части тела, причем каждое изменение приводит к перераспределению в теле больших деформаций и напряжений.

На рис. 1 укрупнено приведены некоторые, по мнению автора, ключевые модели, которые позволяет описывать данная теория, на их основе постановки классов задач (модели) и некоторые конкретные типы задач для различных отраслей промышленности, в которых следует учитывать перераспределение больших деформаций.

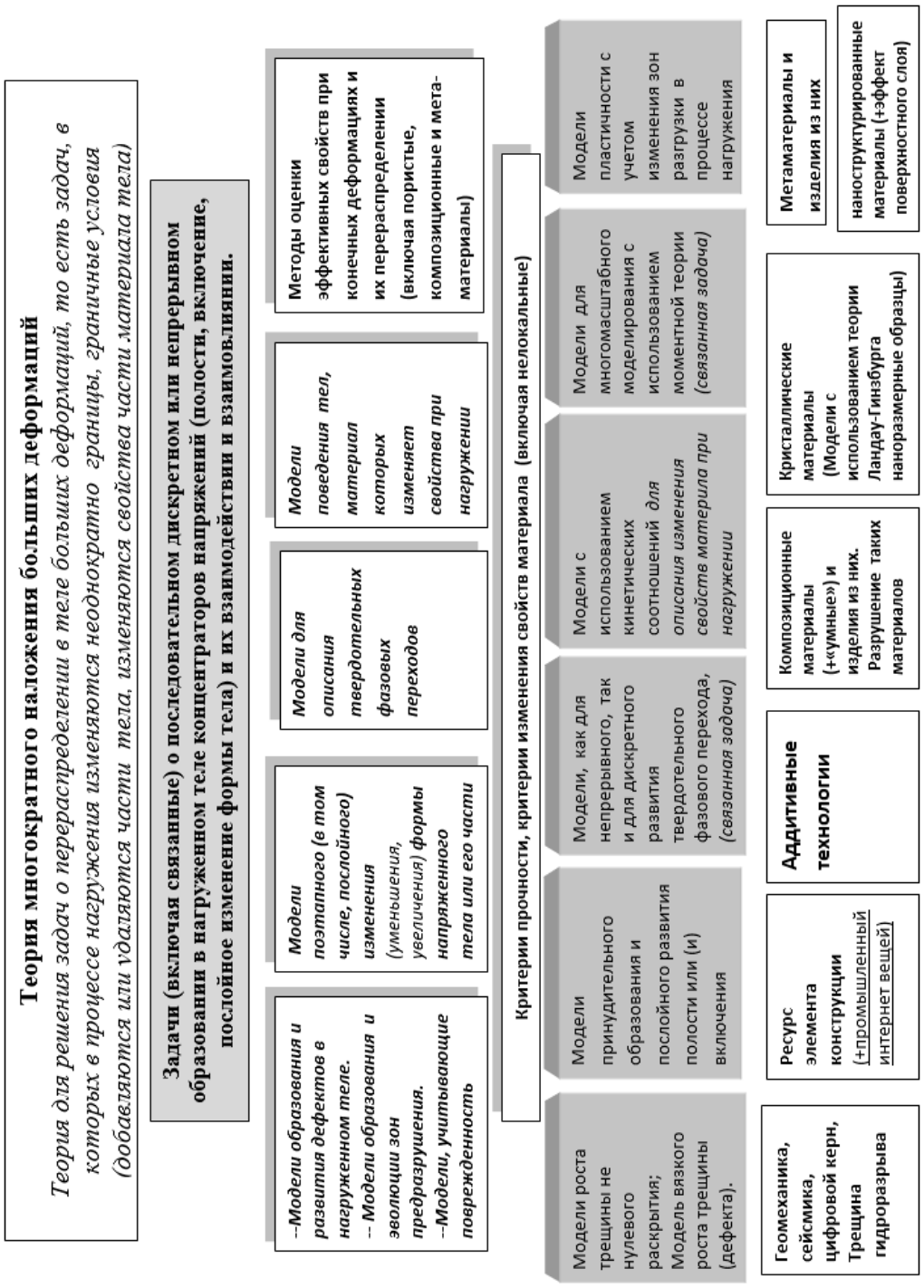


Рис. 1: Ключевые модели и задачи, описываемые теорией многократного наложения больших деформаций

Примеры решения таких 2D и 3D на основе «исследовательского» программного обеспечения, которое является прототипом промышленного для реализации в пакете Фидесис, приведены в [20,21]. Часть исследовательского кода доведена до промышленного и реализована в пакете Фидесис [49].Напри-

мер, оценка эффективных механических, прочностных и термоупругих характеристик различных типов материалов при конечных деформациях[19][3].

По мнению автора, естественным развитием теории многократного наложения больших деформаций является ее обобщение на случай междисциплинарных задач. В [19] получена на основе подходов [24,34,35] и методологии [33] постановка термоупругой задачи теории многократного наложения больших деформаций, в [47] рассмотрена задача о твердотельном фазовом переходе с учетом перераспределения конечных деформаций с использованием теории Гинзбурга-Ландау.

В общем случае учет междисциплинарности в постановке задачи укрупнено можно свести к двум случаям. Первый случай – когда учитываются внешние не механические воздействия на тело, включая изменения его свойств от их воздействия: температурные, электромагнитные, химические, радиационные воздействия, твердотельный фазовый переход и иные воздействия, не описываемые в рамках соотношений механики деформируемого твердого тела. Второй случай – когда учитывается взаимодействие деформируемого твердого тела с внешней (иной) средой.

В первом случае приходим к совместному решению уравнений равновесия (движения) теории многократного наложения больших деформаций и эволюционных уравнений. Эволюционные уравнения позволяют учесть не механические и иные воздействия на тело с учетом зависимости напряжений и деформаций от параметров (или в общем случае тензорных инвариантов) воздействий, не описываемых в рамках механики, а их, в свою очередь, от напряженно-деформированного состояния тела. Постановка задачи в общем виде имеет следующий вид [19,20]

Уравнение движения

$$\overset{p-1}{\nabla}\cdot\left[(1+\Delta_{0,q-1})^{-1}\overset{q-1}{\underset{0,q}{\sum}}\cdot\Psi_{q-1,q}\right]=\rho_{q-1}\frac{\partial^2 \mathrm{u}_q}{\partial t^2},$$

здесь $\overset{q-1}{\underset{0,q}{\sum}}=\Psi^*_{0,q-1}\cdot\overset{0}{\underset{0,q}{\sum}}\cdot\Psi_{0,q-1}$ - тензор обобщенных полных для q-го состояния напряжений, отнесенных к базису $(q-1)$-го состояния, $\Psi_{q-1,q}$ – аффинор полных деформаций при переходе из $(q-1)$-го в q-е состояние; $1+\Delta_{0,q-1}=\det\Psi_{0,q-1}$- кратность изменения объема при переходе из начального в $(q-1)$-е состояние; ρ_{q-1} - плотность частицы тела в $(q-1)$-м состоянии. Определяющие соотношения для выбранного потенциала:

[3]Темп внедрения данных разработок в пакет Фидесис связан с тем, что пакет разработан и развивается по принципу «развитие функциональности должно добавляться для всех типов анализов (статический расчет, динамический расчет, собственные частоты, устойчивость, контактная задача и т.д.) и всех типов элементов (трехмерные, оболочечные, балочные) и вариантов, используемых в пакете, причем как для метода конечного элемента, так и метода спектрального элемента», что с одной стороны замедляет работы по увеличению функциональности (особенно ее наукоемких составляющих), но с другой стороны делает эту функциональность доступной для качественного промышленного использования.

$$\overset{0}{\underset{0,q}{\sum}} = \frac{\partial \mathrm{A}\left(\overset{0}{\underset{e}{\mathrm{E}}}, \eta_1, ...\eta_n\right)}{\partial \overset{0}{\underset{e}{\mathrm{E}}}}.$$

Кинематические соотношения [20]

$$\overset{0}{\underset{e}{\mathrm{E}}} = \frac{1}{2}\left(\Psi_e \cdot \Psi_e^* - \mathrm{I}\right), \Psi_e = \Psi_t^{-1} \cdot \Psi_{0,q},$$

$$\Psi_{0,q} = \Psi_{0,q-1} \cdot \Psi_{q-1,q}, \Psi_{q-1,q} = \mathrm{I} + \overset{q-1}{\nabla}\, \mathrm{u}_q,$$

здесь u_q - вектор перемещений из 0-го в q-е состояние, $\overset{0}{\underset{e}{E}}$ – тензор упругой деформации; Ψ_e – аффинор упругой деформации; $\Psi_{0,p}$ – аффинор полных деформаций при переходе из начального в p-е состояние; Ψ_t – аффинор собственных деформаций, обусловленных изменением параметров.

Эволюционные уравнения для параметров $\eta_k (k = 1, \ldots, n)$:

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial t} = 2\Lambda\beta \overset{q-1}{\nabla} \cdot \left(\overset{q-1}{\nabla}\, \eta_k\right) + \Lambda \mathrm{X}_k, k = 1, \ldots, n,$$

здесь X_k $(k = 1, \ldots, n)$ – движущие силы эволюционных процессов, $\mathrm{P} = \overset{0}{\underset{0,q}{\sum}} \cdot \Psi_{0,q}$ – первый тензор напряжений Пиолы (при q=1) Λ – кинетический коэффициент, характеризующий скорость эволюционных процессов; β – константа.

Упругий потенциал A может быть задан, например, в форме, соответствующей потенциалу Мурнагана, с учетом зависимости модулей упругости от параметров [47]:

$$\begin{array}{l} \mathrm{A}\left(\overset{0}{\underset{e}{\mathrm{E}}}, \eta_1, ...\eta_n\right) = \frac{\lambda(\eta_1, ...\eta_n)}{2}\left(E_1\right)^2 + \mu(\eta_1, ...\eta_n)E_2 + \\ +C_3(\eta_1, ...\eta_n)\left(E_1\right)^3 + C_4(\eta_1, ...\eta_n)E_1E_2 + C_5(\eta_1, ...\eta_n)E_3 \end{array},$$

здесь E_k- инварианты тензора $\overset{0}{\underset{e}{\mathrm{E}}}$.

На внешней границе тела задаются напряжения $\sigma_{0,p} = \sigma_\infty$, на контурах отверстий задается давление p:

$$\overset{q-1}{N} \cdot \overset{q-1}{\underset{0,q}{\sum}} = -p(1 + \Delta_{0,q}) \overset{q-1}{N} \cdot \left(\Psi_{q-1,q}^T\right)^{-1} \cdot \left(\Psi_{q-1,q}\right)^{-1},$$

здесь $\overset{q-1}{N}$ – вектор единичной нормали. Для параметров на внешней границе и контурах отверстий задаются условия $\overset{q-1}{N} \cdot \left(\overset{q-1}{\nabla}\, \eta_k\right) = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Во втором случае приходим к совместной (связанной) задаче взаимодействия двух и более сред. На промышленном уровне это может быть достигнуто и интеграцией с имеющимися пакетами Постановка задачи в общем виде имеет следующий вид

$$\overset{q-1}{\nabla}\cdot\left[\left(1+\Delta_{0,q-1}\right)^{-1}\overset{q-1}{\underset{0,q}{\Sigma}}\cdot\Psi_{q-1,q}\right]=\rho_{q-1}\frac{\partial^2 \mathrm{u}_q}{\partial t^2} \tag{1}$$

здесь $\overset{q-1}{\underset{0,q}{\Sigma}}=\Psi^*_{0,q-1}\cdot\overset{0}{\underset{0,q}{\Sigma}}\cdot\Psi_{0,q-1}$ - тензор обобщенных полных для q-го состояния напряжений, отнесенных к базису $(q-1)$-го состояния, $\Psi_{q-1,q}$– аффинор деформаций при переходе из $(q-1)$-го в q-е состояние; $1+\Delta_{0,q-1}=\det\Psi_{0,q-1}$ - кратность изменения объема при переходе из начального в $(q-1)$-е состояние; ρ_{q-1} - плотность частицы тела в $(q-1)$-м состоянии. Определяющие соотношения для выбранного потенциала:

$$\overset{0}{\underset{0,q}{\Sigma}}=\frac{\partial \mathrm{A}\left(\overset{0}{\underset{0,q}{\mathrm{E}}}\right)}{\partial\overset{0}{\underset{0,q}{\mathrm{E}}}}. \tag{2}$$

Кинематические соотношения

$$\overset{0}{\underset{0,q}{\mathrm{E}}}=\frac{1}{2}\left(\Psi_{0,q}\cdot\Psi^*_{0,q}-\mathrm{I}\right), \tag{3}$$

$$\Psi_{0,q}=\Psi_{0,q-1}\cdot\Psi_{q-1,q},\Psi_{q-1,q}=\mathrm{I}+\overset{q-1}{\nabla}\mathrm{u}_q, \tag{4}$$

здесь u_q - вектор перемещений из $(q-1)$-го в q-е состояние, $\underset{0,q}{\overset{0}{E}}$– тензор деформации при переходе из начального в q-е состояние; $\Psi_{0,q}$– аффинор полных деформаций при переходе из начального в q-е состояние.

Соответственно в сжимаемой жидкой или газообразной средах распределение поля давлений и скоростей среды описывается следующей системой уравнений Навье-Стокса в Эйлеровой системе координат:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\left(\rho V\right)=0. \tag{5}$$

Здесь t - время, ρ - плотность, V - скорость потока в среде.

Уравнение импульсов:

$$\frac{\partial\rho V}{\partial t}+\nabla\left(\rho V\otimes V\right)=-\nabla p+\nabla\cdot\hat{\tau}_{eff}+\rho g, \tag{6}$$

$$\hat{\tau}_{eff}=\left(\mu+\mu_t\right)\left(2\hat{S}-\frac{2}{3}\left(\nabla\cdot V\right)\hat{I}\right).$$

Здесь p - давление, g - ускорение свободного падения, $\hat{\tau}_{eff}$ - эффективный тензор вязких напряжений, μ - динамический коэффициент вязкости, μ_t -

динамический коэффициент турбулентной вязкости, $\hat{S}$ - тензор скоростей деформации.

Уравнение энергии, записанное через полную энтальпию H:

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \nabla(\rho V H) = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho V \cdot g - \nabla \cdot J_q + \nabla \cdot (\hat{\tau}_{eff} \cdot V), \tag{7}$$

$$H = h + V^2/2.$$

или через термодинамическую энтальпию h:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla(\rho V h) = \frac{\partial p}{\partial t} + V \cdot \nabla P - \nabla \cdot J_q + \sum_{i,j=1}^{3} \tau_{ij} S_{ij} + \rho\varepsilon, \tag{8}$$

$$h = h_0(298.15) + \int_{298.15}^{T} C_p(T)\, dT.$$

Здесь $h_0(298.15)$ - энтальпия образования при 298.15 K, $C_p(T)$ - его удельная теплоёмкость при постоянном давлении, T - абсолютная статическая температура. Уравнение (7) решается при моделировании транс- и сверхзвуковых течений. Уравнение (8) решается при моделировании течений без ударных волн. В уравнениях (7) и (8) J_q - эффективный тепловой поток:

$$J_q = -\left(\lambda + \frac{\mu_t C_p}{\mathrm{Pr}_t}\right) \nabla T.$$

Здесь λ - коэффициент теплопроводности, Pr_t - турбулентное число Прандтля. Индексы, указывающие номер состояния, в уравнениях (5)-(8) для краткости опущены.

Система (5), (6), (7) или (5), (6), (8) дополняется уравнением состояния среды и уравнениями используемой модели турбулентности.

На границе между двумя средами задается условие равенства нормальных напряжений в твердом теле и давления в жидкости или газе:

$$\overset{q-1}{N} \cdot \sum_{0,q}^{q-1} = -p(1 + \Delta_{0,q}) \overset{q-1}{N} \cdot \left(\Psi^T_{q-1,q}\right)^{-1} \cdot \left(\Psi_{q-1,q}\right)^{-1},$$

здесь $\overset{q-1}{N}$ – вектор единичной нормали к границе тела в $(q-1)$-м состоянии, а также условия непротекания (равенства нормальных компонент вектора скоростей) $\overset{q-1}{N} \cdot \left(\Psi^T_{q-1,q}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathrm{u}_q}{\partial t} = \overset{q-1}{N} \cdot \left(\Psi^T_{q-1,q}\right)^{-1} \cdot V$.

Отметим, что при разработке программного кода для решения конкретных задач в общем случае строится пошаговый процесс последовательного решения уравнений (1)-(4), определение изменения параметров НДС и формы границы, решения уравнений (5)-(8) с определением изменения параметров влияния внешней среды на деформируемое твердое тело и т. д.

В обоих случаях следует помнить, что при конечных деформациях принцип суперпозиции не применим[19,23].

В заключении отметим основные результаты статьи.

1. Сформулирована (обобщена) постановка задачи теории многократного наложения больших деформаций [19,20] для двух основных типов мультидисциплинарных (связанных) задач.

- Первый случай, учитывающий внешние не механические воздействия на тело, включая изменения его свойств от их воздействия: термические, электромагнитные, химические, радиационные и иные воздействия, твердотельный фазовый переход.

- Второй случай, учитывающий взаимодействие деформируемого твердого тела с внешней (иной) средой.

2. Промышленная программная реализация в пакете Фидесис потребует выполнения следующих работ.

- для первого случая потребуется разработка дополнительных модулей и (или) изменения в расчетных ядрах пакета Фидесис (для ряда вариантов исследовательский программный код разработан и научно апробирован, например, [20,47]), что предусмотрено в дорожной карте развития пакета;

- во втором случае, с промышленной точки зрения, по мнению автора, задача может достаточно качественно и относительно быстро реализована путем интеграции пакета Фидесис с соответствующими промышленными пакетами, позволяющими проводить моделирование внешней среды. Такая интеграция предусмотрена в дорожной карте развития пакета, и такие работы ведутся.

Еще раз, нарушая формат научно-технической статьи, автор отмечает, что когда в современной науке (далее речь идет о механике деформируемого твердого тела) предлагается новая механическая модель, описывающая тот или иной процесс нагружения и реакцию тела на него, исследователь должен дать адекватное математическое описание такой модели и обязательно получить решение нетривиальных 2D и 3D задач, сформулированных в рамках предложенной модели. Крайне желательно также получить точные решения задач, последнее позволяет «верифицировать» численные результаты.

С точки зрения промышленности важно, чтобы решения сложных задач 2D и 3D осуществлялось либо с помощью создаваемых на основе предложенной теории специализированных программных комплексов, либо с помощью модулей, дополняющих функциональность имеющихся CAE.

При создании и развитии теории многократного наложения больших деформаций автор стремился поступать именно таким образом: модель, математический аппарат, промышленный программный пакет для прочностного инженерного анализа [49,50].

К пониманию такого подхода к развитию научного направления автор пришел в процессе длительного ученического и личностного общения с

Л. И. Седовым, В. П. Мясниковым, Л. А. Толоконниковым, Г. С. Тарасьевым.

Автор отмечает крайне важную и существенную поддержку данному направлению в наиболее сложные моменты его развития Г.И. Марчука,

Б. Е. Победри, Е. И. Шемякина.

Автор выражает благодарность руководителю ТБН-групп А. А. Галенко за поддержку при создании пакета Фидесис и внешним членам Совета директоров инжиниринговой компании Фидесис, приложивших на разных этапах создания пакета Фидесис много усилий для поступательного его развития Н. И. Касперской, М. Г. Король, И. Н. Протопопову, А. А. Тарасову.

Автор отмечает ежедневную как творческую, так и «рутинно кропотливую» многолетнюю работу по созданию и развитию пакета Фидесис основных его разработчиков А. В. Вершинина, Д. А. Коновалова, Е. Д. Комоловой, К. Ю. Крапивина, А. В. Кукушкина, К. А. Петровского, Д. А. Улькина, М. Я. Яковлева и значительный вклад в развитие пакета ключевых профессоров-консультантов К. М. Зингермана, Л. М. Зубова, Е. М. Морозова.

Автор выражает благодарность В. В. Лохину, В. Левитасу (Valery I. Levitas), Д. Фишу (Jacob Fish), И. Цукрову (I. Tsukrov) за многочисленные собеседования.

Автор еще раз выражает благодарность редакции журнала, предложившей выпустить этот номер журнала в юбилейном формате, редакционному совету данного номера и коллегам, подготовившим столь значимые статьи для этого выпуска журнала.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамов А. А., Матвеенко В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. Методы прикладной вязкоупругости. — Екатеринбург: УрО РАН, 2003. — 411 с.

2. Аксенов А.А., Жлуктов С.В., Кудимов Н.М., Сон Э.Е., Савицкий Д.В., Третьякова О.Н., Шишаева А.С., Исследование теплообмена в силовых трансформаторах большой емкости с учетом конструкционных особенностей, обеспечивающих взрывобезопасность Известия РАН. Энергетика, 2014, № 1, с. 102-111.

3. Алымов М. И. Порошковая металлургия нанокристаллических материалов. — М.: Наука, 2007. — 169 с.

4. Барях А. А., Самоделкина Н. А., Паньков И.Л. Разрушение водоупорных толщ при крупномасштабных горных работах. Ч. 1. // Физ.-тех. проблемы разработки полезных ископаемых. 2012. № 5.

5. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001, 630с.

6. Белых С.В., Бормотин К.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Прокудин А.Н. О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С.144-156

7. Блох В. И. Теория упругости. — Харьков: Изд-во Харьк. ун-т, 1964. — 483 с.

8. Бондарь В.Д. Осредненные повороты при конечной плоской деформации // Прикл. мех. и техн. физ. 2000. Т. 41, № 3. С. 187- 196.

9. Василевский Ю.В., Данилов А.А. , Липников К.Н., Чугунов В.Н. Нелинейная вычислительная механика прочности в 5 томах (под общей редакцией В.А. Левина). Т. 4. Автоматизированные технологии построения неструкторизированных расчетных сеток (предисловие проф. В.А. Левина), М.:Физматлит , 2016, 214с.

10. Георгиевский Д.В., Победря Б.Е. О понятии устойчивости деформирования в упругой и вязкоупругой моделях Известия РАН МТТ , 2002, № 4, с. 46-56

11. Горбачев В.И., Победря Б.Е. О некоторых критериях разрушения. Известия Армянской ССР, Т. 38, № 4, 1985, с. 30-37

12. Гузь А. Н., Роджер А. А., Гузь И. А. О построении теории разрушения нанокомпозитов при сжатии // Прикл. мех. 2005. Т. 41, № 3. С. 3–29.

13. Индейцев Д. А., Наумов В. Н., Семенов Б. Н.Динамические эффекты в материалах со сложной структурой // Известия РАН. Механика твердого тела. N5, стр.17-39, 2007.

14. Климов Ю.А. , Шворин А.Б., Хренов А.Ю., Адамович И.А., Орлов А.Ю., Абрамов С.М., Шевчук Ю.В., Пономарев А.Ю. Паутина: высокоскоростная коммуникационная сеть // Программные системы: теория и приложения: электронный научный журнал. — 2015. — Т. 6, № 1 (22). — С. 109-120.

15. Кондауров В.И., Петров И.Б. Расчет процессов динамического деформирования упругопластических тел с учетом континуального разрушения //ДАН СССР т. 285. №6., 1985, с. 1344-1347

16. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. — М.: Московский Лицей, 1998. — 412 с.

17. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. - М.: Физматлит, 2007. – 304 с.

18. Лавит И. М., Толоконников Л. А. Термоупругопластическая задача механики разрушения для полого цилиндра с внутренними трещинами // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1990. С. 55–60

19. Левин В. А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. (Предисловие академика Л.И. Седова)— М.: Наука, Физматлит, 1999. — 223 с.

20. Левин В.А. Нелинейная вычислительная механика прочности в 5 томах (предисловие академика Г.И. Марчука) т.1 Модели и методы. Образование и развитие дефектов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015 — 454 с.

21. Левин В.А., Вершинин А.В. Нелинейная вычислительная механика прочности в 5 томах (под общей редакцией В.А. Левина) т. 2 Численные методы. Реализация на высокопроизводительных вычислительных системах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015 — 543с.

22. Левин В.А., Морозов Е.М. Нелокальные критерии для определения зоны предразрушения при описании роста дефекта при конечных деформациях // Доклады РАН. 2007. Т. 415. № 1. С. 52-54.

23. Левин В.А., Зубов Л.М., Зингерман К.М. Точное решение задачи о нелинейном изгибе составного бруса с предварительно деформированным слоем при конечных деформациях// Доклады РАН, 2015, т. 460, № 2, с. 155–158.

24. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.

25. Махутов Н. А. Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. - В двух частях. Новосибирск: Наука, 2005. Часть 1: Критерии прочности и ресурса. – 494 с. Часть 2: Обоснование ресурса и безопасности. – 610 с.

26. Морозов Н. Ф., Фрейдин А. Б. Зоны фазовых переходов и фазовые превращения упругих тел при различных видах напряженного состояния // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. Т. 223. — М.: Наука, 1998. — С. 220–232.

27. Мулюков Р.Р., Пшеничнюк А.И., Баимова Ю.А. Демпфирование нанокристаллических материалов: обзор . Письма о материалах 2015. Т.5. №4. С.485-490 DOI: 10.22226/2410-3535-2015-4-485-490

28. Мясников В. П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.

29. Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И. Микронапряжения в конструкционных материалах. — Л.: Машиностроение, 1990. — 222 с.

30. Победря Б. Е., Шешенин С. В., Холматов Т. Задача в напряжениях. — Ташкент: Изд-во ФАН, 1988. - 197 с.

31. Писецкий В.Б., Абатурова И.В., Савинцев И.А., Патрушев Ю.В., Чевдарь С.М., Вершинин А.В., Левин В.А.Оптимизация инженерно-геофизического обеспечения проектов разработки месторождений твердого сырья на основе геомеханических исследований 12th Conference and Exhibition Engineering Geophysics 2016, серия Изыскания под инженерные сооружения и применение геофизики на техногенных объектах, геотехнический мониторинг, с. 444-451

32. Псахье С.Г., Смолин А.Ю., Коростелев С.Ю., Дмитриев А.И., Шилько Е.В., Астафуров СВ. Метод подвижных клеточных автоматов и его применение при моделировании на разных масштабах // Механика — от дискретного к сплошному / А.Н. Андреев и др; Отв. ред. В.М. Фомин; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича. - Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. Гл. 2. - С. 88-128.

33. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. — М.: Физматгиз, 1962. — 284 с.

34. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука, 1994. — 528 с.

35. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. — М.: Наука, 1994. — 560 с.

36. Тарасьев Г. С., Толоконников Л. А. Концентрация напряжений около полостей в несжимаемом материале // Концентрация напряжений. Вып. 1. — Киев: Наук. думка, 1965. — С. 251.

37. Тарасьев Г. С. Конечные деформации упругого изотропного материала // ДАН СССР. 1970. Т. 194, № 4. С. 162–166.

38. Тарасьев Г. С. Об одной оценке «малого» параметра в одной задаче нелинейной теории упругости // Прикл. мех. 1980. Т. 16, № 7. С. 137–139.

39. Чернышев С.Л. Новый этап применения композиционных материалов в авиастроении. // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2013. № 1. С. 3-10.

40. Четверушкин Б.Н., Шильников Е.В. Вычислительный и программный инструментарий для моделирования трехмерных течений вязкого газа на многопроцессорных системах Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2008, Т. 8, №2, с. 309–320

41. Antonov A., Voevodin V., Dongarra J., “Algowiki: an Open encyclopedia of parallel algorithmic features"// Journal of Supercomputing Frontiers and Innovations, vol. 2, no. 1, 2015, pp. 4-18.

42. Bailakanavar M., Fish J., Aitharaju V. ,RodgersW. Coupling of moisture diffusion and mechanical deformation in polymer matrix composites Volume 98, Issue 12, pages 859–880, 2014.

43. Goryacheva I.G., Makhovskaya Y. Y. Sliding of a wavy indentor on a viscoelastic layer surface in the case of adhesion. Mechanics of Solids, Allerton Press Inc. (United , 50, № 4, 2015 p.439-450,

44. Kanel G.I. , Razorenov S.V. ,. Fortov V.E. Shock-Wave Phenomena and the Properties of Condensed Matter. Springer, New York, 2004, 320 pp.

45. Kuzmina S., Karas O., Ishmuratov F., Zichenkov M., Chedrik V. Analysis of static and dynamic aeroelastic characteristics of airplane in transonic flow // В сборнике: 28th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences 2012, ICAS 2012. С. 2081-2090.

46. Levin V. A., Manuylovich I. S., Markov V. V. Numerical simulation of multidimensional modes of gaseous detonation // Combustion Science and Technology. — 2016. — Vol. 188, no. 11-12. — P. 2236–2249.

47. Levitas V. I., Levin V. A., Zingerman K. M., Freiman E. I. Displacive Phase Transitions at Large Strains: Phase-Field Theory and Simulations // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 025702.

48. Nozhnitsky Yu, Karimbaev K., Servetnik A. Numerical simulation of spin testing for turbo machine disks using energy-based fracture criteria. ASME TURBO EXPO, Copenhagen, 2012 [Электронный ресурс].

49. Официальный сайт ООО «Фидесис» [Электронный ресурс] https://cae-fidesys.com/ru

50. Официальный сайт SimStreamlinedForDesign [Электронный ресурс] https://www.sim4design.com

REFERENCES

1. Adamov, A.A., Matveenko, V.P., Trufanov, N.A. & Shardakov I.N. 2003, *Methods of applied viscoelasticity*, UrO RAN, Ekaterinburg.

2. Aksenov, A.A., Zhluktov, S.V., Kudimov, N.M., Son, E.E., Savitsky, D.V., Tretyakova & O.N., Shishaeva, A.S. 2014, “Investigation of heat transfer in power transformers large capacity taking into account the design features ensuring explosion safety”, *Izvestiya RAN. Power Engineering*, no. 1, pp. 102-111.

3. Alymov, M.I. 2007, *Powder metallurgy of nanocrystalline materials*, Nauka, Moscow.

4. Baryakh, A.A., Samodelkina, N.A. & Pankov, I.L. 2012, "Destruction of waterproof strata in large-scale mining operations. Part 1", *Phys.-Tech. problems of mining*, no. 5.

5. Bakhvalov, N.S., Zhidkov, N.P. & Kobelkov, G.M. 2001, *Numerical methods*, Fizmatlit, Moscow.

6. Belykh, S.V., Bormotin, K.S., Burenin, A.A., Kovtanyuk, L.V. & Prokudin, A.N. 2014, "On large isothermal deformations of materials with elastic, viscous and plastic properties", *Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the Ultimate State*. no. 4 (22), pp.144-156.

7. Blokh, V.I. 1964, *Theory of Elasticity*, Kharkov University, Kharkov.

8. Bondar ,V.D. 2000, "Averaged rotations for a finite plane deformation", *Prikl. mech. and techn*, vol. 41, no. 3, pp. 187-196.

9. Vasilevsky, Yu.V., Danilov, A.A., Lipnikov, K.N. & Chugunov, V.N. 2016, *Nonlinear computational mechanics of strength in 5 volumes (under the general editorship of VA Levin). Vol. 4. Automated technologies for constructing unstructured computed grids (foreword by Prof. VA Levin)*, Fizmatlit, Moscow.

10. Georgievsky, D.V. & Pobedrya, B.E. 2002, "On the concept of stability of deformation in elastic and viscoelastic models", *Izvestiya RAN. Mechanics of a solid body*, no 4, pp. 46-56

11. Gorbachev, V.I. & Pobedrya, B.E 1985, "About some criteria of destruction", *Izvestiya Armyanskoy SSR*, vol. 38, no. 4, pp. 30-37.

12. Guz', A.N., Roger, A.A. & Guz', I.A. 2005, "On the construction of the theory of destruction of nanocomposites under compression", *Prikl. mech.*, vol. 41, no. 3, pp. 3-29.

13. Indeytsev, D.A., Naumov, V.N. & Semenov, B.N. 2007, "Dynamic effects in materials with a complex structure", *Izvestiya RAN. Mechanics of a solid body*. no. 5, pp. 17-39.

14. Klimov, Y.A., Shvorin A.B., Khrenov, A.Y., Adamovich, I.A., Orlov, A.Y., Abramov, S.M., Shevchuk, Y.V. & Ponomarev, A.Y. 2015, "Web: high-speed communication network", *Software systems: theory and applications: electronic scientific journal*, vol. 6, no. 1 (24), pp. 109-120.

15. Kondaurov, V.I. & Petrov, I.B. 1985, "Calculation of the processes of dynamic deformation of elastoplastic bodies with allowance for continual destruction", *DAN USSR*, vol. 285, no. 6, pp. 1344-1347.

16. Kulikovskii, A.G. & Sveshnikova, E.I. 1998, *Nonlinear waves in elastic media*, Moscow Lyceum, Moscow.

17. Krivtsov, A.M. 2007, *Deformation and destruction of solids with microstructure*, Fizmatlit, Moscow.

18. Lavit, I.M. & Tolokonnikov L.A. 1990, "Thermoelastoplastic problem of fracture mechanics for a hollow cylinder with internal cracks", *Applied problems of strength and plasticity. Methods of solution*, pp. 55-60.

19. Levin, V.A. 1999, *Multiple imposition of large deformations in elastic and viscoelastic bodies. (Foreword by Academician LI Sedov)*, Fizmatlit, Moscow.

20. Levin, V.A. 2015, *Nonlinear computational mechanics of strength in 5 volumes (preface by Academician GI Marchuk), vol.1 Models and methods. Education and development of defects*, Fizmatlit, Moscow.

21. Levin, V.A. & Vershinin, A.V. 2015, *Nonlinear computational mechanics of strength in 5 volumes (under the general editorship of VA Levin), vol. 2 Numerical methods. Implementation on high-performance computing systems*, Fizmatlit, Moscow.

22. Levin, V.A. & Morozov, E.M. 2007, Nonlocal criteria for determining the predestruction zone in describing defect growth at finite deformations, *Reports of the Russian Academy of Sciences*, vol. 415, no 1, pp. 52-54.

23. Levin, V.A., Zubov, L.M. & Zingerman, K.M. 2015, Exact solution of the problem of nonlinear bending of a composite bar with a previously deformed layer under finite deformations, *Doklady RAN*, vol. 460, no. 2, pp. 155-158.

24. Lur'e, A.I. 1980, *Nonlinear theory of elasticity*, Nauka, Moscow.

25. Makhutov, N. A. 2005, *Structural strength, resource and technogenic safety. - In two parts. Novosibirsk: Science. Part 1: Criteria of Strength and Resource. Part 2: Justification of the resource and safety*, Nauka, Novosibirsk.

26. Morozov, N.F. & Freidin, A.B. 1998, "Zones of Phase Transitions and Phase Transformations of Elastic Bodies for Various Types of Stress State", *Tr. Matem.In-ta im.V.A.Steklova*,vol. 223, pp. 220-232.

27. Mulyukov, R.R., Pshenichnyuk, A.I., & Baimova, Y.A. 2015, "Damping of nanocrystalline materials: a review", *Letters on materials*, vol.5, no 4, pp. 485-490, DOI: 10.22226 / 2410-3535-2015-4-485-490.

28. Myasnikov, V.P. 1996, "Equations of motion of elastoplastic materials for large deformations", *Vestn. DVO RAN*, no 4, pp. 8-13.

29. Novozhilov, V.V. & Kadashevich, Y. I. 1990, *Microvoltage in structural materials, Mechanical Engineering*, Leningrad.

30. Pobedrya, B.E., Sheshenin, S.V. & Kholmatov, T. 1988, *The problem in stresses*, FAN, Tashkent.

31. Pisetskiy, V.B., Abaturova, I.V., Savintsev, I.A., Patrushev, Y.V., Chevdar, S.M., Vershinin, A.V. & Levin, V.A. 2016, "Optimization of engineering and geophysical support for development projects deposits of solid raw materials on the basis of geomechanical studies", *12th Conference and Exhibition Engineering Geophysics 2016, a series Research of engineering structures and application of geophysics on man-made objects, geotechnical monitoring*, pp. 444-451

32. Psakhier, S.G., Smolin, A.Y., Korostelev, S.Y., Dmitriev A.I., Shilko E.V. & Astafurov, S.V. 2008, "The method of mobile cellular automata and its application in modeling on different scales", *Mechanics - from discrete to continuous, ch. 2*, pp. 88-128.

33. Sedov, L.I. 1962, *Introduction to Continuum Mechanics*, Fizmatgiz, Moscow.

34. Sedov, L.I. 1994, *Continuum Mechanics, vol. 1*, Nauka, Moscow.

35. Sedov, L.I. 1994, *Mechanics of a continuous medium, vol. 2*, Nauka, Moscow.

36. Tarasiev, G.S. & Tolokonnikov, L.A, 1965, "Concentration of stresses near cavities in an incompressible material", *Concentration of stresses. vol. 1.*

37. Tarasiev, G.S. 1970, "Finite deformations of an elastic isotropic material", *DAN USSR*, vol. 194, no. 4, pp. 162-166.

38. Tarasiev, G.S. 1980, "On an estimate of a small parameter in a problem in the nonlinear theory of elasticity *Prikl. mech*, vol. 16, no. 7, pp. 137-139.

39. Chernyshev, S.L. 2013, "A new stage in the use of composite materials in the aircraft industry", *Problems of mechanical engineering and automation*, no. 1, pp. 3-10.

40. Chetverushkin, B.N. & Shilnikov E.V. 2008, "Computing and software tools for modeling three-dimensional flows of viscous gas on multiprocessor systems", *Zh. vychisl. math. and math. fiz.*, vol. 8, no. 2, pp. 309-320.

41. Antonov, A., Voevodin, V. & Dongarra, J. 2015, "Algowiki: an Open encyclopedia of parallel algorithmic features *Journal of Supercomputing Frontiers and Innovations*, vol. 2, no. 1, pp. 4-18.

42. Bailakanavar, M., Fish, J., Aitharaju, V. & Rodgers, W. 2014, "Coupling of moisture diffusion and mechanical deformation in polymer matrix composites", vol. 98, no 12, pp. 859–880.

43. Goryacheva, I.G. & Makhovskaya, Y.Y. 2015, "Sliding of a wavy indentor on a viscoelastic layer surface in the case of adhesion", *Mechanics of Solids*, vol. 50, no 4, pp. 439-450.

44. Kanel, G.I., Razorenov, S.V. & Fortov V.E. 2004, *Shock-Wave Phenomena and the Properties of Condensed Matter, Springer*, New York.

45. Kuzmina, S., Karas, O., Ishmuratov, F., Zichenkov, M. & Chedrik, V. 2012, "Analysis of static and dynamic aeroelastic characteristics of airplane in transonic flow", *28th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, ICAS 2012*, pp. 2081-2090.

46. Levin, V.A., Manuylovich, I.S., Markov, V.V. 2016, "Numerical simulation of multidimensional modes of gaseous detonation", *Combustion Science and Technology*, vol. 188, no. 11-12, pp. 2236–2249.

47. Levitas, V. I., Levin, V. A., Zingerman, K. M., Freiman, E. I. 2009, "Displacive Phase Transitions at Large Strains: Phase-Field Theory and Simulations", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, pp. 025702.

48. Nozhnitsky, Y., Karimbaev, K., Servetnik, A. 2012, "Numerical simulation of spin testing for turbo machine disks using energy-based fracture criteria", *ASME TURBO EXPO*, Copenhagen.

49. Available at: https://cae-fidesys.com/ru

50. Available at: https://www.sim4design.com

Получено 19.05.2017
принято в печать 14.09.2017

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Том 18 Выпуск 3

Абрамов Сергей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН
e-mail: abram@botik.ru

Аксенов Андрей Александрович — кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией Объединенного института высоких температур РАН
e-mail: andrey@tesis.com.ru

Алымов Михаил Иванович — доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института структурной макрокинетики РАН
e-mail: director@ism.ac.ru

Алхименков Юрий Александрович — инженер Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН
e-mail: alkhimenkov.yury@gmail.com

Амелькин Сергей Анатольевич — кандидат технических наук, старший научный сотрудник, руководитель исследовательского центра системного анализа Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН, sergey.a.amelkin@gmail.com
e-mail: amelkin@pereslavl.university

Ахунова Ангелина Халитовна — кандидат технических наук, научный сотрудник, Институт проблем сверхпластичности металлов РАН
e-mail: akhunova.a.kh@gmail.com

Барях Александр Абрамович — доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, директор Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН
e-mail: bar@mi-perm.ru

Баюк Ирина Олеговна — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института физики Земли имени О. Ю. Шмидта РАН
e-mail: ibayuk@yandex.ru

Безмозгий Иосиф Менделевич — кандидат технических наук, начальник отдела ПАО РКК Энергия
e-mail: iosif.bezmozgy@rsce.ru

Белых Сергей Викторович — кандидат технических наук, доцент, проректор по науке и инновационной работе, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

e-mail: prorector-nir@knastu.ru

Бойков Владимир Георгиевич — кандидат технических наук, доцент, кафедра оптимального управления факультета ВМиК Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, генеральный директор, ООО "АвтоМеханика"
e-mail: boykov@euler.ru

Буренин Анатолий Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН
e-mail: mail@imim.ru

Василевский Юрий Викторович — доктор физико-математических наук, доцент, член-корреспондент Российской академии наук, заместитель директора Института вычислительной математики РАН
e-mail: yuri.vassilevski.gmail.com

Вершинин Анатолий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительная механика механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: versh1984@mail.ru

Воеводин Владимир Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заместитель директора НИВЦ Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: voevodin@parallel.ru

Гаганов Илья Валерьевич — студент, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, программист-разработчик, ООО Фидесис
e-mail: gaganov@saldlab.com

Гаденин Михаил Матвеевич — кандидат технических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения имени А. А. Благонравова РАН
e-mail: safety@imash.ru

Гаркушин Геннадий Валерьевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем химической физики РАН
e-mail: garkushin@ficp.ac.ru

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор РАН, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачев Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор, заведующего кафедрой механики композитов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: vigorby@mail.ru

Григорьев Федор Владимирович — инженер-исследователь в Институте проблем безопасного развития атомной энергетики РАН
e-mail: grig-fedor@yandex.ru

Джаванбакхт Махди — Isfahan University of Technology, Department of Mechanical Engineering

Дмитриев Андрей Иванович — доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН
e-mail: dmitr@ispms.tsc.ru

Жлуктов Сергей Васильевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Объединенного института высоких температур РАН

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики Тверского государственного университет
e-mail: Zingerman.KM@tversu.ru

Зифенг Юань — Postdoctoral Researcher at Columbia University in the City of New York

Зиченков Михаил Чеславович — кандидат технических наук, доцент, заместитель генерального директора ФГУП «ЦАГИ» — начальник комплекса прочности ЛА, Центральный аэрогидродинамический институт имени Н. Е. Жуковского
e-mail: zichenkov@tsagi.ru

Зубов Леонид Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ
e-mail: lmzubov@sfedu.ru

Индейцев Дмитрий Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, научный руководитель Институт Проблем Машиноведения РАН
e-mail: Dmitry.Indeitsev@gmail.com

Ишбулатов Салават Юлаевич — аспирант Центра добычи углеводородов Сколковского института науки и технологий
e-mail: salavat.ishbulatov@skoltech.ru

Ишмуратов Фаниль Закиевич — доктор технических наук, начальник отдела ФГУП «ЦАГИ», Центральный аэрогидродинамический институт имени Н. Е. Жуковского

e-mail: stataer@tsagi.ru

Казакова Ольга Игоревна — инженер-конструктор 1 категории ПАО РКК Энергия
e-mail: olga.kazakova@rsce.ru

Канель Геннадий Исаакович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заместитель директора, Объединенный институт высоких температур РАН
e-mail: kanel@ficp.ac.ru

Капырин Иван Викторович — кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией геомиграционного моделирования Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, старший научный сотрудник Института вычислительной математики РАН
e-mail: ivan.kapyrin@gmail.com

Карпенко Виталий Сергеевич — ведущий-программист ООО “Фидесис”
e-mail: vitkarpenko@gmail.com

Клюев Леонид Владимирович — кандидат технических наук, генеральный директор ООО “ИММЕРС”
e-mail: l.klyuev@immers.ru

Кобельков Георгий Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: kobelkov@dodo.inm.ras.ru

Ковтанюк Лариса Валентиновна — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН
e-mail: lk@iacp.dvo.ru

Коновалов Дмитрий Андреевич — директор департамента разработки ПО, ООО "Фидесис"
e-mail: konovalov@cae-fidesys.com

Коростелев Сергей Юрьевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН
e-mail: sergeyk@ispms.tsc.ru

Крапивин Кирилл Юрьевич — ведущий программист-алгоритмист ООО Фидесис
e-mail: krapivin@saldlab.com

Кривцов Антон Мирославович — доктор физико-математических наук, профессор РАН, член-корреспондент Российской академии наук, заведующий кафедрой теоретическая механика Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого

e-mail: akrivtsov@bk.ru

Лапин Сергей Эдуардович — кандидат технических наук, старший научный сотрудник кафедры автоматики и компьютерных технологий Уральского государственного горного университета
e-mail: ingortech@yandex.ru

Левин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, заведующий кафедрой вычислительной механики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: levin@imec.msu.ru

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительная механика механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: v.a.levin@mail.ru

Лохин Валерий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Магжанов Раис Мухтясибович — заместитель генерального конструктора ПАО РКК Энергия
e-mail: rais.magzhanov@rsce.ru

Маркочев Виктор Михайлович — доктор технических наук, профессор, Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ
e-mail: VMMark@yandex.ru

Махутов Николай Андреевич — доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, главный научный сотрудник, Институт машиноведения имени А. А. Благонравова РАН
e-mail: kei51@mail.ru

Морозов Евгений Михайлович — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры физики прочности Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»
e-mail: evgeny.morozof@gmail.com

Морозов Никита Федорович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, заведующий кафедрой теории упругости в Санкт-Петербургском государственном университете
e-mail: morozov@nm1016.spb.edu

Мочалова Юлия Алексеевна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт Проблем Машиноведения РАН
e-mail: yumochalova@yandex.ru

Мулюков Радик Рафикович — доктор физико-математических наук, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института проблем сверхпластичности металлов РАН

e-mail: imsp@imsp.ru

Мурачёв Андрей Сергеевич — аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
e-mail: iandrey.murachev@gmail.com

Мясников Артем Вениаминович — доктор физико-математических наук, профессор практики Центра добычи углеводородов Сколковского института науки и технологий
e-mail: a.myasnikov@skoltech.ru

Неганов Дмитрий Александрович — кандидат технических наук, Директор центра НИИ «Транснефть»
e-mail: neganovda@niitnn.transneft.ru

Ножницкий Юрий Александрович — доктор технических наук, заместитель генерального директора — директор исследовательского центра динамика, прочность, надежность, начальник отделения динамика и прочность авиационных двигателей Центрального института авиационного моторостроения имени П. И. Баранова
e-mail: nozhnitsky@ciam.ru

Петров Игорь Борисович — доктор физико-математических, член-корреспондент Российской Академии Наук, заведующий кафедрой информатики и вычислительной математики федерального Московского физико-технического института
e-mail: petrov@mipt.ru

Писецкий Владимир Борисович — доктор геолого-минералогических наук, профессор, заведующий кафедрой геоинформатики Уральского государственного горного университета
e-mail: pisetski@yandex.ru

Прокудин Александр Николаевич — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук
e-mail: prokudin@imim.ru

Псахье Сергей Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН
e-mail: : sp@ispms.tsc.ru

Разоренов Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией, Институт проблем химической физики РАН
e-mail: : razsv@ficp.ac.ru

Резников Дмитрий Олегович — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения имени А. А. Благонравова РАН

e-mail: mibsts@mail.ru

Сабитов Денис Иджадович — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Центра добычи углеводородов Сколковского института науки и технологий
e-mail: d.sabitov@skoltech.ru

Савиных Андрей Сергеевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем химической физики РАН
e-mail: savas@ficp.ac.ru

Самоделкина Надежда Анатольевна — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Горного института УрО РАН
e-mail: samolelkina@mi-perm.ru

Сафиуллин Ринат Владикович — кандидат технических наук, старший научный сотрудник Институт проблем сверхпластичности металлов РАН
e-mail: dr_rvs@mail.ru

Серветник Антон Николаевич — начальник сектора Государственного научного центра Центрального института авиационного моторостроения имени П. И. Баранова
e-mail: servetnik@ciam.ru

Смердов Алексей Андреевич — инженер конструктор 2 категории ПАО РКК Энергия
e-mail: aleksey.smerdov2@rsce.ru

Смолин Алексей Юрьевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН
e-mail: asmolin@ispms.tsc.ru

Соколов Александр Германович — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры вычислительной математики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: shurunya@mtu-net.ru

Сон Эдуард Евгеньевич — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, заместитель директора по научной работе, Объединенный институт высоких температур РАН
e-mail: son@ihed.ras.ru

Тихоцкий Сергей Андреевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН
e-mail: sat@ifz.ru

Токарь Антон Александрович — аспирант Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

e-mail: kronoscentury@gmail.com

Файзуллин Фарис Рафаэльевич — аспирант, кафедра СМ1 МГТУ им. Н. Э. Баумана, инженер, ООО "АвтоМеханика"
e-mail: jake-take@yandex.ru

Фиш Джейкоб — The Carleton Professor, Columbia University in the City of New York (Civil Engineering and Engineering Mechanics)
e-mail: fishj@columbia.edu

Фрейдин Александр Борисович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий отделом математических методов механики материалов и конструкций Института проблем машиноведения РАН, профессор кафедры механики и процессов управления, заведующий базовой кафедрой механика сплошных сред, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
e-mail: alexander.freidin@gmail.com

Цветков Денис Валерьевич — техник кафедры теоретической механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого
e-mail: DVTsvetkov@ya.ru

Чедрик Василий Васильевич — кандидат технических наук, доцент, начальник отдела ФГУП «ЦАГИ, Центральный аэрогидродинамический институт имени Н. Е. Жуковского
e-mail: chedrik@tsagi.ru

Чернышев Сергей Леонидович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, генеральный директор ФГУП «ЦАГИ», Центральный аэрогидродинамический институт имени Н. Е. Жуковского
e-mail: info@tsagi.ru

Чернявский Александр Григорьевич — советник генерального директора ПАО РКК Энергия
e-mail: alexander.cherniavsky@rsce.ru

Чернягин Александр Григорьевич — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник ПАО РКК Энергия
e-mail: alexander.chernyagin@rsce.ru

Чичковский Александр Александрович — директор по развитию ООО “ИММЕРС”
e-mail: chaa14@gmail.com

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: chubarik2009@live.ru

Шарипова Лия Львовна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН
e-mail: sleah07@gmail.com

Шешенин Сергей Владимирович — доктор физико-математических, профессор, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: sheshenin@mech.math.msu.su

Юдаков Алексей Александрович — научный сотрудник, ООО "АвтоМеханика"
e-mail: you_ad@mail.ru

Яковлев Максим Яковлевич — кандидат физико-математических наук, руководитель сектора анализа свойств композиционных и пористых материалов, ООО Фидесис
e-mail: yakovlev@cae-fidesys.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Volume 18 Issue 3

Abramov Sergey Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, director of PSI RAS, Organization of Russian Academy of Sciences Program Systems Institute of RAS
e-mail: abram@botik.ru

Aksenov Andrey Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, head of laboratory of Joint Institute for High Temperatures of the RAS
e-mail: andrey@tesis.com.ru

Alymov Mikhail Ivanovich — doctor of technical sciences, professor, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, director Institute of Structural Macrokinetics and Materials Science RAS
e-mail: director@ism.ac.ru

Alkhimenkov Yuri Alexandrovich — engineer of the O. Yu. Shmidt Institute of Physics of the Earth, RAS
e-mail: alkhimenkov.yury@gmail.com

Amelkin Sergey Anatolievich — candidate of technical sciences, senior researcher, head of the system analysis research center, Organization of Russian Academy of Sciences Program Systems Institute of RAS, sergey.a.amelkin@gmail.com
e-mail: amelkin@pereslavl.university

Akhunova Angelina Khalitovna — candidate of technical sciences, Researcher associate Institute for Metals Superplasticity Problems, RAS
e-mail: akhunova.a.kh@gmail.com

Baryakh Aleksandr Abramovich — doctor of technical sciences, professor, corresponding member of Russian Academy of Sciences, Director of the PFRC UB RAS
e-mail: bar@mi-perm.ru

Bayuk Irina Olegovna — doctor of physical and mathematical sciences, chief researcher of the O. Yu. Shmidt Institute of Physics of the Earth, RAS
e-mail: ibayuk@yandex.ru

Bezmozgy Joseph Mendelevich — candidate of technical sciences, head of the department of RKK Energia
e-mail: iosif.bezmozgy@rsce.ru

Boikov Vladimir Georgievich — candidate of technical sciences, Associate Professor, Optimal Control Department of CMC faculty of Lomonosov Moscow State University, director general, AutoMechanics Inc.
e-mail: boykov@euler.ru

Burenin Anatoly Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director, Institute of Engineering Science and Metallurgy of the Far-Eastern Branch of the RAS
e-mail: mail@imim.ru

Василевский Юрий Викторович — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, зDeputy Director of the Institute of Numerical Mathematics of the RAS
e-mail: yuri.vassilevski.gmail.com

Vershinin Anatoly Victorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of Lomonosov Moscow State University
e-mail: versh1984@mail.ru

Voevodin Vladimir Valentinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of Russian Academy of Sciences, Deputy Director, Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University
e-mail: voevodin@parallel.ru

Gaganov Ilya Valerievich — student, mechanics-mathematical faculty of Lomonosov Moscow State University, programmer-developer, Fidesys
e-mail: gaganov@saldlab.com

Gadenin Mikhail Matveevich — candidate of technical sciences, senior researcher, leading researcher, The A. A. Blagonravov Institute for Machine Sciences of the RAS
e-mail: safety@imash.ru

Garkushin Gennady Valeryevich — candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Institute of Problems of Chemical Physics RAS
e-mail: garkushin@ficp.ac.ru

Georgievskii Dimitri Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of RAS, head of chair of elasticity theory at mechanical and mathematical department of Lomonosov Moscwo State University
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, senior researcher, professor, head of the department of composite mechanics of faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscwo State University
e-mail: vigorby@mail.ru

Grigoriev Fedor Vladimirovich — Research engineer of the Nuclear safety institute of the RAS
e-mail: grig-fedor@yandex.ru

Mahdi Javanbakht — Isfahan University of Technology, Department of Mechanical Engineering

Dmitriev Andrey Ivanovich — Doctor of physics and mathematics, Assistant professor, Leader researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of RAS
e-mail: dmitr@ispms.tsc.ru

Zhluktov Sergey Vasilievich — candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Joint Institute for High Temperatures of the RAS

Zingerman Konstasntin Moiseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of chair of mathematical modeling and computational mathematics, Tver State University
e-mail: Zingerman.KM@tversu.ru

Zifeng Yuan — Postdoctoral Researcher at Columbia University in the City of New York

Zichenkov Mikhail Cheslavovich — candidate of technical sciences, associate professor deputy general director of TsAGI, head of aircraft strength department, Central Aerohydrodynamic Institute named after N.E. Zhukovsky
e-mail: zichenkov@tsagi.ru

Zubov Leonid Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of chair of theory of elasticity, institute of mathematics, mechanics and computer sciences, Souphern Federal University
e-mail: lmzubov@sfedu.ru

Indeitsev Dmitry Anatolyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of Russian Academy of Sciences, scientific head of the Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS
e-mail: Dmitry.Indeitsev@gmail.com

Ishbulatov Salavat Yulaevich — graduate student Center of Hydrocarbon Recovery, Skolkovo Institute of Science and Technology
e-mail: salavat.ishbulatov@skoltech.ru

Ishmuratov Fanil Zakievich — doctor of technical sciences, head of division, Central Aerohydrodynamic Institute named after N. E. Zhukovsky
e-mail: stataer@tsagi.ru

Kazakova Olga Igorevna — Engineer-designer of the 1st category of RKK Energia
e-mail: olga.kazakova@rsce.ru

Kanel Gennady Isaakovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of Russian Academy of Sciences, Deputy Director, Joint Institute for High Temperatures of Russian Academy of Sciences
e-mail: kanel@ficp.ac.ru

Kapyrin Ivan Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, chief of the geomigration laboratory of the Nuclear safety institute of

the RAS, Senior Scientific Researcher of the Institute of Numerical Mathematics of the RAS
e-mail: ivan.kapyrin@gmail.com

Karpenko Vitaly Sergeevich — lead programmer Fidesys LLC
e-mail: vitkarpenko@gmail.com

Klyuev Leonid Vladimirovich — candidate of technical sciences, General Manager at IMMERS Ltd
e-mail: l.klyuev@immers.ru

Kobel'kov Georgy Mikhailovich — doctor of physics and mathematics, professor, head of the department computational mathematics of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University
e-mail: kobelkov@dodo.inm.ras.ru

Kovtanyuk Larisa Valentinovna — doctor of physics and mathematics, professor, head of the laboratory, Institute of Automation and Control Processes of the Far-Eastern Branch of the RAS
e-mail: lk@iacp.dvo.ru

Konovalov Dmitry Andreevich — Head of software development department, Fidesys LLC
e-mail: konovalov@cae-fidesys.com

Korostelev Sergei Yurievich — candidat of physics and mathematics, senior researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences
e-mail: sergeyk@ispms.tsc.ru

Krapivin Kirill Yurievich — Leading programmer-algorithmist Fidesys LLC
e-mail: krapivin@saldlab.com

Krivtsov Anton Miroslavovich —doctor of physical and mathematical sciences, professor of RAS, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, head of the department of theoretical mechanics of St. Petersburg Polytechnic University Peter the Great
e-mail: akrivtsov@bk.ru

Lapin Sergey Eduardovich — candidate of technical sciences, senior scientific of the department of automation and computer technologies of the Ural State Mining University
e-mail: ingortech@yandex.ru

Levin Vladimir Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the Russian Academy of Sciences, head of the department of computational mechanics of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University
e-mail: levin@imec.msu.ru

Levin Vladimir Anatolyevich — octor of physical and mathematical sciences, professor, Professor of the department of computational mechanics of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University
e-mail: v.a.levin@mail.ru

Valery Levitas — Iowa State University, Departments of Aerospace Engineering, Mechanical Engineering, and Material Science and Engineering, Ames Laboratory, Division of Materials Science and Engineering,
e-mail: vlevitas@iastate.edu

Lohin Valery Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, senior researcher, Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University

Magzhanov Rais Mukhtyansibovich — Deputy General Designer of RKK Energia
e-mail: rais.magzhanov@rsce.ru

Markochev Viktor Michajlovich — doctor of technical sciences, professor, National Research Nuclear University MEPhI
e-mail: VMMark@yandex.ru

Makhutov Nikolay Andreevich — doctor of technical sciences, professor, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, chief researcher The A. A. Blagonravov Institute for Machine Sciences of the RAS
e-mail: kei51@mail.ru

Morozov Evgeniy Mikhailovich — doctor of technical sciences, professor, full professor of the department of strength physics of the National Research Nuclear University "MEPhI"
e-mail: evgeny.morozof@gmail.com

Morozov Nikita Fedorovich — doctor of physics and mathematics science, professor, academician of the Russian Academy of Science, head of the elasticity department of mathematics & mechanics faculty , St.-Petersburg State University
e-mail: morozov@nm1016.spb.edu

Mochalova Yulia Alexeevna — candidate of physical and mathematical sciences, csenior research, Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS
e-mail: yumochalova@yandex.ru

Mulyukov Radik Rafikovich — doctor of physical and mathematical sciences, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Director Institute for Metals Superplasticity Problems RAS
e-mail: imsp@imsp.ru

Murachev Andrey Sergeevich — graduate student of St. Petersburg Polytechnic University Peter the Great
e-mail: iandrey.murachev@gmail.com

Myasnikov Artyom Veniaminovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the practice, Center of Hydrocarbon Recovery, Skolkovo Institute of Science and Technology

e-mail: a.myasnikov@skoltech.ru

Neganon Dmitry Alexandrovich — candidate of technical sciences, department director, The Pipeline Transport Institute
e-mail: neganovda@niitnn.transneft.ru

Nozhnitsky Yury Alexandrovich — doctor of technical sciences, deputy general director — director of the research center dynamics, strength, reliability, head of the department dynamics and strength of aircraft engines of the Central Institute of Aviation Motors named after P. I. Baranova
e-mail: nozhnitsky@ciam.ru

Petrov Igor Borisovich — doctor of physical and mathematical sciences, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, head of the department of informatics and calculus mathematics of Moscow Institute of Physics and Technology
e-mail: petrov@mipt.ru

Pisetskiy Vladimir Borisovich — doctor of mineralogy and geology, professor, head of the department of Geoinformatics Ural State Mining University
e-mail: pisetski@yandex.ru

Prokudin Alexander Nikolaevich — candidate of technical sciences, leading researcher, Institute of Engineering Science and Metallurgy of the Far-Eastern Branch of the RAS
e-mail: prokudin@imim.ru

Psakhie Sergey Grigorievich — doctor of physics and mathematics, professor, corresponding member of the Russian Academy of Sciences director Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of RAS
e-mail: : sp@ispms.tsc.ru

Razorenov Sergey Vladimirovich — doctor of physics and mathematics, professor, head of laboratory, Institute of Problems of Chemical Physics RAS
e-mail: : razsv@ficp.ac.ru

Reznikov Dmitry Olegovich — candidate of technical sciences, leading researcher, The A. A. Blagonravov Institute for Machine Sciences of the RAS
e-mail: mibsts@mail.ru

Sabitov Denis Ijadovich — candidate of physical and mathematical sciences, senior research scientst, Center of Hydrocarbon Recovery, Skolkovo Institute of Science and Technology
e-mail: d.sabitov@skoltech.ru

Savinykh Andrey Sergeevich — candidate of physical and mathematical sciences, senior research, Institute of Problems of Chemical Physics RAS
e-mail: savas@ficp.ac.ru

Samodelkina Nadezhda Anatolevna — candidate of technical sciences, leading researcher, Mining Institute of the Ural Branch RAS
e-mail: samolelkina@mi-perm.ru

Safiullin Rinat Vladikovich — candidate of technical sciences, senior researcher, Institute for Metals Superplasticity Problems RAS Институт проблем сверхпластичности металлов РАН
e-mail: dr_ rvs@mail.ru

Servetnik Anton Nikolayevich — chief of the sector of the state scientific center of the Central Institute of Aviation Motors named after P. I. Baranov
e-mail: servetnik@ciam.ru

Smerdov Alexey Andreevich — engineer of the 2nd category RKK Energia
e-mail: aleksey.smerdov2@rsce.ru

Smolin Alexey Yurievich — Doctor of physics and mathematics, Assistant professor Leader researcher Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences
e-mail: asmolin@ispms.tsc.ru

Sokolov Alexander Germanovich — candidate of physical and mathematical sciences, senior research of chairs computational mathematics of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University
e-mail: shurunya@mtu-net.ru

Son Eduard Evgenevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Joint Institute for High Temperatures of the RAS
e-mail: son@ihed.ras.ru

Tikhotsky Sergey Andreevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Director of the O. Yu. Shmidt Institute of Physics of the Earth, RAS
e-mail: sat@ifz.ru

Tokar Anton Alexandrovich — graduate student of the M. V. Lomonosov Moscow State University
e-mail: kronoscentury@gmail.com

Faizullin Faris Rafaelyevich — graduate student of the SM1 Department of Bauman Moscow State Technical University, engineer, AutoMechanics Inc.
e-mail: jake-take@yandex.ru

Jacob Fish — The Carleton Professor, Columbia University in the City of New York (Civil Engineering and Engineering Mechanics)

Freidin Alexander Borisovich — doctor of physics and mathematics sciences, head of the department of mathematical methods in mechanics of materials and structures Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, professor of the department of mechanics and control, head of the departments of continuum mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
e-mail: alexander.freidin@gmail.com

Tsvetkov Denis Valerievich — technician of the department of theoretical mechanics of St. Petersburg Polytechnic University Peter the Great

e-mail: DVTsvetkov@ya.ru

Chedrik Vasily Vasilievich — candidate of technical sciences, assistant professor, head of division, Central Aerohydrodynamic Institute named after N. E. Zhukovsky
e-mail: chedrik@tsagi.ru

Chernyshev Sergey Leonidovich — doctor of physics and mathematics sciences, professor, academician of Russian Academy of Sciences, general director of TsAGI, Central Aerohydrodynamic Institute named after N.E. Zhukovsky
e-mail: info@tsagi.ru

Chernyavsky Alexander Grigorievich — adviser to the general director of RKK Energia
e-mail: alexander.cherniavsky@rsce.ru

Chernyagin Alexander Grigoryevich — candidate of technical sciences, Leading Researcher of RKK Energia
e-mail: alexander.chernyagin@rsce.ru

Chichkovskiy Alexander Alexandrovitch — Deputy Director at IMMERS Ltd.
e-mail: chaa14@gmail.com

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2009@live.ru

Sharipova Leah Lvovna — candidate of physical and mathematical sciences, seniour researcher of the laboratory of mathematical methods in mechanics of materials, Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS
e-mail: sleah07@gmail.com

Shilko Evgeniy Viktorovich — Doctor of physics and mathematics, Assistant professor Deputy director Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of RAS
e-mail: shilko@ispms.tsc.ru

Sheshenin Sergey Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow State University
e-mail: sheshenin@mech.math.msu.su

Yudakov Aleksei Aleksandrovich — researcher, AutoMechanics Inc.
e-mail: you_ ad@mail.ru

Yakovlev Maksim Yakovlevich — candidate of physical and mathematical sciences, Composite Analysis Lead, Fidesys LLC
e-mail: yakovlev@cae-fidesys.com

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 18 Выпуск 3

Главный редактор

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: chubarik2009@live.ru

Заместители главного редактора:

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

Ответственный секретарь

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Члены редколлегии:

Артамонов Вячеслав Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Безверхний Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого
e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН) по научной работе, директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН
e-mail: vab@iam.khv.ru

Глухов Михаил Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, академик-секретарь отделения математических проблем криптографии Академии криптографии Российской Федерации
e-mail: glukhovmm@rambler.ru

Голод Евгений Соломонович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: golod@mech.math.msu.su

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры Математика 1 Финансового университета при Правительстве РФ, профессор механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Ярославского государственного университета
e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Есаян Альберт Рубенович — доктор педагогических наук, профессор, профессор Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого
e-mail: esayanalbert@mail.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, заведующий Отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Карташов Владимир Константинович — кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Волгоградского государственного социально-педагогического университета
e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН

e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Латышев Виктор Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого
e-mail: tgpu@tula.net

Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры Московского педагогического государственного университета
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории чисел Московского педагогического государственного университета, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар Илана, Рамат Ган, Израиль
e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович (Белоруссия) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Белоруси
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Касьянов Павел Олегович (Украина) — доктор физико-математических наук, профессор, Учебно-научный комплекс «Институт прикладного системного анализа» НТУУ «КПИ» МОН и НАН Украины

e-mail: kasyanov@i.ua

Лауринчикас Антанас (Литва) — доктор физико-математических наук, профессор, Действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Мисир Джумаил оглы Марданов (Азербайджан) — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.
e-mail: rmi@lan.ab.az

Рахмонов Зарулло Хусейнович (Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН
e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

THE EDITORIAL BOARD

Volume 18, Issue 3

THE MAIN EDITOR

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2009@live.ru

THE ASSISTANTS OF THE MAIN EDITOR:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department algebra, calculus and geometry of the Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of theoretical Informatics of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — doctor of pedagogical sciences, professor, head of chair of the mathematical physics of the Moscow Pedagogical State University, honored worker of the higher school of the Russian Federation.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

THE EXECUTIVE SECRETARY

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science of the Tula State University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

THE MEMBERS OF THE EDITORIAL BOARD:

Artamonov Vyacheslav Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of Higher algebra's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: viacheslav.artamonov@gmail.com

Bezverhny Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — doctor of physico-mathematical Sciences, correspondent member of RAS, Deputy Director of the Federal state institution of science, Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (IPM RAS) on scientific work, Director of the Khabarovsk branch of the IPM DVO RAS.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Gluhov Mihail Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician-secretary of the cryptography mathematical problems' department in the Academy of Cryptography of the Russian Federation.
e-mail: glukhovmm@rambler.ru

Golod Evgeny Solomonovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: golod@mech.math.msu.su

Gritsenko Sergey Alexandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the chair Mathematics of the 1 Financial University under the Government of the Russian Federation, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Durnev Valery Georgievich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of computer security and mathematical methods of data processing of the Yaroslavl statea public University. P. G. Demidov.
e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Esayan Albert Rubenovich — doctor of pedagogical sciences, professor, professor of the Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: esayanalbert@mail.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of the Academy of cryptography of the Russian Federation, head of the chair of mathematical statistics and random processes mechanics and mathematics faculty Moscow state University of a name of M. of Century University, head of the Department of discrete mathematics Mathematical Institute. Century A. Steklov mathematical Institute RAS.
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Valery Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of applied mathematics and Informatics of Institute of Applied Mathematics and Computer Science of the Tula State University.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Kartashov Vladimir Konstantinovich — candidate of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra, geometry and Informatics of the Volgograd State Social and Pedagogical University.
e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, the leading researcher of the Department of Algebra and Number Theory of Steklov Mathematical Institute of RAS.
e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, head of the Department of computer algebra and theory of numbers of the N. G. Chernyshevsky Saratov State University.
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Latyshev Viktor Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: latyshev@basis.math.msu.su

Mishchenko Sergey Petrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor, Department of applied mathematics of the Ulyanovsk State University.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of RAS, head of number theory's chair of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member Russian Academy of Natural Sciences, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: tgpu@tula.net

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, head of number theory's chair of the Moscow Pedagogical State University, professor of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor, professor Bar Ilan University, Ramat Gan, Israel.
e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich (Belorussia) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, the main researcher of the Belorussia Institute of Mathematics of NAS.
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Kasyanov Pavel Olegovich (Ukraine) — doctor of physical and mathematical Sciences, head of the research department at Educational and Scientific Complex "Institute for Applied System Analysis"of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Politechnic Institute"of the MES of Ukraine and NAS of Ukraine.
e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas (Lithuania) — Full member of the AS in Lithuania, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of probability theory's and number theory's chair of the Vilnius University.
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Misir Jumayil oglu Mardanov (Azerbaijan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, director of the institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan.

e-mail: rmi@lan.ab.az

Rahmonov Zarullo Huseinovich (Tajikistan) — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Republic of Tajikistan AS, director of the Institute of Mathematics of tne Tajik AS.
e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ НОМЕРА

Том 18 Выпуск 3

Председатель редакционного совета номера

Левин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук
e-mail: levin@imec.msu.ru

Члены редакционного совета номера:

Горячева Ирина Георгиевна — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук
e-mail: goryache@ipmnet.ru

Куликовский Андрей Геннадьевич — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук
e-mail: kulik@mi.ras.ru

Матвиенко Валерий Павлович — доктор технических наук, профессор, академик Российской академии наук
e-mail: mvp@icmm.ru

Четверушкин Борис Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук
e-mail: chetver@imamod.ru

THE EDITORIAL COUNCIL ISSUE

Volume 18, Issue 3

Chairman of the editorial council of the issue

Levin Vladimir Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the Russian Academy of Sciences
e-mail: levin@imec.msu.ru

Members of the editorial council of the issue:

Goryacheva Irina Georgievna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the Russian Academy of Sciences
e-mail: goryache@ipmnet.ru

Kulikovsky Andrey Gennadievich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the Russian Academy of Sciences
e-mail: kulik@mi.ras.ru

Matvienko Valery Pavlovich — doctor of technical sciences, professor, academician of the Russian Academy of Sciences
e-mail: mvp@icmm.ru

Chetverushkin Boris Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the Russian Academy of Sciences
e-mail: chetver@imamod.ru

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Журнал "Чебышевский сборник" является общематематическим. В журнале публикуются оригинальные и обзорные работы по всем разделам современной математики и информатики на русском или английском языке.

Журнал "Чебышевский сборник" выходит четыре раза в год в одном томе из четырех выпусков.

Редакция журнала "Чебышевский сборник" предлагает авторам ознакомиться с данными правилами и придерживаться их при подготовке рукописей, направляемых в журнал.

1. Общие положения

1.1. Рукопись сопровождается краткой аннотацией на русском и английском языках, которая должна содержать не менее 250 слов, как на русском, так и на английском языках. Ключевые слова входят в анотацию, но отделяются одной строкой.

Все материалы представляются в редакцию в двух экземплярах.

1.2. Текст статьи начинается с шифра УДК, затем следуют заглавие статьи, инициалы и фамилии авторов, с указанием в скобках города проживания, аннотация.

Затем идет перевод на английский язык заглавия статьи, фамилия и инициалы авторов в латинской транскрипции, с указанием в скобках города проживания, аннотация.

Статья должна иметь следующую структуру: Введение, Основная часть из одного или нескольких разделов, Заключение.

Статья должна быть тщательно выверена и подписана всеми авторами "в печать".

Все страницы рукописи, включая таблицы, список литературы, рисунки и подписи к рисункам, следует пронумеровать. После списка литературы приводятся названия учреждений, в которых выполнена работа.

1.3. На отдельном листе указываются сведения о каждом из авторов: фамилия, имя, отчество — полностью, ученая степень, звание, должность, полное название учреждения, полный почтовый адрес, номер телефона с кодом города, адрес электронной почты (e-mail). Обязательно следует указать автора, ответственного за переписку и переговоры с редакцией.

1.4. Российские авторы представляют в редакцию акт комиссии, о том что статья не содержит сведений, связанных с государственной тайной, и может публиковаться в открытой печати.

1.5. Отклонения в оформлении рукописи от приведенных правил позволяют редколлегии принять решение о снятии с публикации статьи в текущем томе журнала (статья может быть опубликована в следующем томе).

2. Требования к оформлению рукописей

2.1. Редакция принимает к публикации статьи, подготовленные только в системе LaTeX2$_\varepsilon$; при этом в редакцию одновременно с распечаткой статьи представляются также соответствующие файлы. Статьи, подготовленные на компьютере в других текстовых редакторах, а также машинописный или рукописный варианты не принимаются.

2.2. При подготовке статьи в LaTeX2$_\varepsilon$ следует использовать класс *article* (см. пример в конце).

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения. Пример подготовки статьи находится на Web-странице http://cheb.tsput.ru

2.3. Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку. Номер формулы ставится у правого края страницы. Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки. Запрещаются прямые ссылки по номеру на формулы из других работ. Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита.

2.4. Все рисунки и таблицы должны иметь подпись. Файлы с рисунками необходимо представить в формате *.eps. Максимальный размер рисунка или таблицы вместе с подписью не должен превышать 80% размера A4. Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

2.5. Список цитированной литературы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008. Сокращение слов и словосочетаний на русском языке оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.12-2011, сокращение слов и словосочетаний на иностранных европейских языках — ГОСТ 7.11-2004.

2.6. Раздел REFERENCES оформляется в соответствии с Гарвардским стандартом (см. раздел 4 данных правил).

3. Пример оформления списка цитированной литературы

1. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985. 510 с.

2. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2001. Т. 2, вып. 1. С. 41—53.

3. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994. 376 с.

4. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об аддитивной проблеме И. М. Виноградова // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 3. С. 325—339.

5. Archipov G. I., Buriev K., Chubarikov V. N. Exponential sums in some binary additive problems over prime parameters // Materials of international scientific workshop on analytic number theory and its applications. Moscow: MSU, 1997. P. 12—13.

6. Голод Е. С. Комплекс Шафаревича и его применения: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1999. 68 с.

4. Список использованных источников (Reference) по Harvard Standard

Наиболее значимыми составляющими в библиографических ссылках являются фамилии авторов и названия журналов , поэтому

- в описание статьи вносят всех авторов, не сокращая их тремя, четырьмя и т.п.
- названия журналов приводят обязательно.

Ссылки на публикации оформляются по Harvard Citation Standard
Оформление ссылок на публикации на русском языке

- Запись всегда начинается с фамилии автора, затем инициалы, за которыми следует дата.
- Фамилии и инициалы авторов приводят в транслитерации (иностранных авторов — в оригинале).
- Если более чем одна запись одного и того же автора, сортировать по датам.
- Название публикации, книга или журнал, всегда выделяется курсивом.
- Выдержки из публикаций, то есть главы в книгах или журнальные статьи, всегда в английских "кавычках" , начиная с первого слова.
- Имя издателя ставится перед местом издания (как это было бы в адресе). Место издания — город, страна. Сокращения для штатов США должны быть с большой буквы, и должны быть добавлены по мере необходимости.

- Ссылки на электронные ресурсы следуют тем же правилам, а в конце ставится "Available at:" и URL-адрес ресурса. Недопустимо указывать только URL-адрес.

- Название статьи переводят на английский язык.

- Название книги приводят в транслитерации и в квадратных скобках переводят на английский язык. У англоязычных книг приводят только оригинальное английское название.

- Название периодического издания приводят в транслитерации. Если издание имеет официальное англоязычное название, то это название приводят в круглых скобках.

- Название издательств и организаций приводят в транслитерации.

- Название города, названия конференций, пояснительные слова, словосочетания переводят на английский язык. Для международных конференций, имеющих второе англоязычное название, приводят это название.

- Сокращения заменяют англоязычными аналогами:

  part 2; volume 3; Vol. 3; pp. 10–19; 323p.; no.1; issue;

  Abstract of the dissertation;

  International conference proceedings (Int. Conf. Proc.);

  Scientific-and-technical (Sci.-Tech.) collected articles; dated 19 December 2013;

  monograph; Annals — Ann.; Annual — Annu.; Colloquium — Colloq.;

  Conference — Conf.; Congress — Congr.; Technical Paper — Tech. Paper;

  First; Second; Third; Fourth/nth... -1st; 2nd; 3rd; 4th/nth...;

  Convention — Conv.; Digest — Dig.; Exposition — Expo.;

  International — Int.; National — Nat.; Proceedings — Proc.; Record — Rec.;

  Symposium — Symp.; Technical Digest — Tech. Dig.

Базовая схема описания

Автор, А.А., Автор, В.В. & Автор, С.С. Год публикации, "Заглавие статьи в переводе" , *Название журнала в транслитерации или перевод заглавия, если журнал переводной* , том., номер, страницы.

Примеры описания статей из журналов:

Polyanchikov, Yu. N., Bannikov, A. I. & Kurchenko, A. I. 2007, "Improved Performance of Thermofrictional Cutting Disks" , *Vestnik Saratovskogo Gos. Tekhn. Univ.*, vol. 67, no. 1 (23), pp. 21–24.

Danilovich, A. S. & Koltyshev, S. M. 2009, "Setup for radiometric separation of contaminated soil" , *Pribory*, no. 12, pp. 56–59.

Пример описания статьи из электронного журнала:

Swaminathan V., Lepkoswka-White E., Rao B. P. 1999, "Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange" , *Journal of ComputerMediated Communication*, vol. 5, no. 2, Available at:

www.ascusc.org/ jcmc/vol5/ issue2/.

при наличии в статье DOI, в списке литературы желательно указывать ее doi - идентификатор:

Zhang, Z & Zhu, D 2008, "Experimental research on the localized electrochemical micromachining" , *Russian Journal of Electrochemistry*, no. 44 (8), pp. 926–930.

doi: 10.1134/S1023193508080077/.

Пример описания монографии:

Автор, А. А. Год, "Заглавие" , Издание – если не первое, Издатель, Место публикации, страницы (pp.)

Jones, J. 2002, "Managing small teams" , Penguin, Sydney.

Smith, P. & Benn, J. 2012, "Report of the University of Western Australia" , Small Business Working group, University of Western Australia, W. A.

Пример описания материалов конференций

Usmanov T. S., Gusmanov A. A., Mullagalin I. Z., Muhametshina R. Ju., Chervyakova A. N., Sveshnikov A. V. 2007, "Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing" , *Trudy 6 Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursosberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"*
(Proc. 6th Int. Technol. Symp. "New energy saving subsoil technologies and the increasing of the oil and gas impact"), Moscow, pp. 267–272.

Пример описания Интернет-ресурса:

"APA Style" , 2011, Available at: http://www.apastyle.org/apa-style-help.aspx (accessed 5 February 2011).

5. Шаблон структуры статьи

Задание колонтитулов

```
\levkolonttl{ И. О. ФАМИЛИЯ}

\prvkolonttl{НАЗВАНИЕ СТАТЬИ }

\thispagestyle{empty}
\input{shapka.tex}
```

Заголовок на русском

```
УДК ?????
\begin{center}
{\Large\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ  }\footnote
{Работа выполнена по гранту РФФИ
........}

\medskip
{\large
И. О. Фамилия (г. ????????)}
\end{center}
```

Аннотация на русском

```
\begin{abstract}
В данной работе .........

\medskip
{\it Ключевые слова:}  .

\medskip
{\it Библиография:} ?? названий.
\end{abstract}
```

Заголовок на английском

```
\begin{center}
{\Large\bf ?????????}

\medskip
{\large
  I. O. Family (???????????)}
\end{center}
```

Аннотация на английском

```
\begin{engabstract}
In~this paper ......

\medskip
{\it Keywords:} ......

\medskip
{\it Bibliography:} ?? titles.
\end{engabstract}
```

Текст статьи на русском или английском

```
\section{Введение}
\section{}
.....
\section{Заключение}
\begin{thebibliography}{19}
\bibitem{Gru1} Оформляется по ГОСТу.
\end{thebibliography}
\begin{engbibliography}{19}
\bibitem{eGru1} Оформляется по Гарвардскому стандарту.
\end{engbibliography}
\noindent Организация.

\noindent  Поступило 30.04.2015
```

6. Пример оформления статьи

```
\levkolonttl{О. А. МАТВЕЕВА}
\prvkolonttl{О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ \ldots}
\thispagestyle{empty}
\input{shapka.tex}
%
УДК 511.3
\begin{center}
{\Large \bf О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ В КРИТИЧЕСКОЙ
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
ПОЛОСЕ L-ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ}
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
{\large О.~А.~Матвеева (г. Саратов)}
\end{center}
%
\begin{abstract}
Получены плотностные теоремы о нулях полиномов Дирихле,
аппроксимирующих L-функции Дирихле в критической области.
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
{\it Ключевые слова}: полиномы Дирихле, L-функции Дирихле, нули
полиномов Дирихле.
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
{\it Библиография:} 21 название.
\end{abstract}
%
\begin{center}
```

```
{\Large \bf ZEROS OF DIRICHLET POLYNOMIALS
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
APPROXIMATING DIRICHLET L-FUNCTIONS
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
IN THE CRITICAL STRIP}
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
{\large O.~A.~Matveeva}
\end{center}
%

\begin{engabstract}
Density theorems about zeros of dirichlet polynomials approximating
Dirichlet L-fuctions in the critical strip are obtained.
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
{\it Keywords}: Dirichlet polynomials, Dirichlet L-fuctions,
zeros  of Dirichlet polynomials.
% пустая строка перед  \medskip обязательна
\medskip
{\it Bibliography:} 21 titles.
\end{engabstract}
%
\section{Введение}
В работе \cite{KorotkovMatveeva} была приведена
вычислительная схема построения полиномов Дирихле
$Q_n(s),\; s = \sigma + it$, которые в прямоугольнике
$0<\sigma<1,\; 0<t<T$ аппроксимируют целые функции,
заданные рядами Дирихле с периодическими коэффициентами,
с показательной скоростью. В частности, эта схема позволяет
эффективно вычислять нули L-функций Дирихле, лежащие в критической
полосе. В данной работе показано, что, с одной стороны,
известные факты о нулях L-функций Дирихле дают возможность получить
результаты о нулях аппроксимирующих полиномов Дирихле; с другой
стороны, поведение в критической полосе аппроксимирующих полиномов
Дирихле определяет поведение L-функций Дирихле.
%
\section{Конструкция полиномов Дирихле, аппроксимирующих
в критической полосе L-функции Дирихле}
Рассмотрим L-функцию Дирихле
\begin{equation}
L(s,\chi)=\sum_{1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}, \quad s=\sigma+it,
\end{equation}
```

```
и соответствующий степенной ряд
\begin{equation}\label{powerseries}
g(z)=\sum_{1}^{\infty}\chi(n)t^n.
\end{equation}
.....
Для оценки величины \eqref{Meq10} сверху необходимо применить
численную схему, которая связана с вычислением полиномов $Q_n(s)$.
.....
\section{Заключение}
В заключении отметим, что аналогичные факты будут иметь место
и в случае рядов Дирихле с периодическими коэффициентами.
.....
```

Оформление списка цитированной литературы по ГОСТу

```
\begin{thebibliography}{99}
\bibitem{KorotkovMatveeva} А. Е. Коротков, О. А. Матвеева \,
Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций,
определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами  //
Научные ведомости  Белгородского государственного  университета.
Сер. Математика. Физика. --- Белгород: Изд-во
НИУ "Белгу", 2011. Вып.24, № 17(112). С. 47--53.
.....
\bibitem{Prahar}
Прахар К. Распределение простых чисел / К. Прахар. --- М.:
Мир, 1967. --- 513 с.
.....
\end{thebibliography}
```

Оформление раздела REFERENCES по Гарвардскому стандарту

```
\begin{engbibliography}{99}
\bibitem{eKorotkovMatveeva} Korotkov, A. E. \& Matveeva, O. A.
2011, "On a numerical algorithm for determining zeros of
entire functions defined by  series Dirichlet series with
periodic coefficients"\,, {\it Scientific statements
Belgorod State  University. Ser. Mathematics. Physics.
--- Belgorod Univ.  NIU "Belgu"\,}, issue 24, № 17(112),
pp. 47--53.
.....
\bibitem{ePrahar}
Prahar, K. 1967, "{\cyr Raspredelenie prostykh chisel.}"\,,
(Russian) [Distribution of prime numbers]
Translated from the German by A. A. Karacuba.
Edited by A. I. Vinogradov.
With two supplements by M. B. Barban and A. I. Vinogradov,
```

```
and N. M. Korobov {\it Izdat. ‘‘Mir’’, Moscow}  511 pp.
\end{engbibliography}
%
\noindent Саратовский государственный университет им.
Н. Г. Чернышевского.
% пустая строка  здесь обязательна
\noindent Получено 10.03.2013
```

Адрес редакции: г. Тула, пр. Ленина, 125, учебный корпус № 4 ТГПУ им. Л. Н. Толстого, комната 310, кафедра алгебры, математического анализа и геометрии.

Электронные адреса (e-mail): dobrovol@tsput.ru,

TABLE OF CONTENTS

Volume 18 Issue 3

V. A. Levin, V. V. Lohin, E. M. Morozov, V. N. Chubarikov Anniversary of the professor of the moscow university of Vladimir Anatolyevich Levin 10

S. M. Abramov, S. A. Amel'kin, L. V. Kljuev, K. Ju. Krapivin, Ju. A. Nozhnickij, A. N. Servetnik , A. A. Chichkovskij Modeling the development of large plastic deformations in a rotating disk in the Fidesys program 15

A. A. Aksenov, S. V. Zhluktov, E. E. Son, A. A. Tokar', V. S. Karpenko Solving fluid-structure interaction problems using the FloWvision and CAE Fidesys software packages 28

Yu. A. Alkhimenkov, I. O. Bayuk, S. A. Tikhotskiy Influence of spatial interactions of inclusions on the effective elastic tensor of cracked porous medium 44

A. Kh. Akhunova, R. R. Mulyukov, R. V. Safiullin Finite-element modeling of super-plastic forming processes 55

A. A. Baryakh, N. A. Samodelkina About one criteria of strength of rocks . 72

I. M. Bezmozgiy, O. I. Kazakova, R. M. Magzhanov, A. A. Smerdov, A. G. Chernyavsky, A. G. Chernyagin Results of testing and assessment of the possibility of building a system of specialized solutions for strength analysis based on CAE Fidesys 88

S. V. Belykh, A. A. Burenin,L. V. Kovtanyuk, A. N. Prokudin On account of viscous properties of materials in the theory of large elastoplastic strains 109

V. G. Boikov, I. V. Gaganov, F. F. Rafaelyevich, A. A. Yudakov Modeling the motion of a mechanical system consisting of deformable elastic bodies, by integrating two packages: Euler and Fidesys 131

A. V. Vershinin, D. I. Sabitov, S. Y. Ishbulatov, A. V. Myasnikov Hydro-geomechanical modeling of reservoir by external coupling of specialized computational software and universal CAE Fidesys 154

V. V. Voevodin Parallelism in large software packages (why is it difficult to create efficient software) 187

D. V. Georgievskii Linearization of tensor nonlinear constitutive relations in the problems on stability of flows 201

V. I. Gorbachev Integral formulas of solutions of the basic linear differential equations of mathematical physics with variable factors 209

F. V. Grigoriev, I. V. Kapyrin, Y. V. Vassilevski Modeling of thermal convection in porous media with volumetric heat source using the GERA code 234

K. M. Zingerman, L. M. Zubov Exact solutions of problems of the theory of repeated superposition of large strains for bodies created by successive junction of strained parts 254

Zifeng Yuan, Jacob Fish Reduced order multiscale analysis of moisture degradation in composite materials 279

D. A. Indeytsev, Yu. A. Mochalova Diffusion of impurity in material under vibration loads 290

G. M. Kobel'kov, A. G. Sokolov Iimplicit finite difference scheme for barotropic gas equations 304

D. A. Konovalov, M. Ya. Yakovlev Numerical estimation of effective elastic properties of elastomer composites under finite strains using spectral element method with CAE Fidesys 316

A. M. Krivtsov, A. S. Murachev, D. V. Tsvetkov Non-stationary thermo-diffusion processes in finite one-dimensional crystal 330

S. E. Lapin, V. B. Pisetskiy Information to develop geoinformation safety panel of underground mining works based on related solutions in prognosis of the development of stressed state of the massif of mountain rocks and gas flows 350

V. I. Levitas, M. Javanbakhtc Phase field approach to interaction between phase transformations and plasticity at the nanoscale at large strains 363

V. M. Markochev, M. I. Alymov On the brittle fracture theory by Ya. Frenkel and A. Griffith. 377

N. A. Makhutov, M. M. Gadenin, D. O. Reznikov, D. A. Neganov Analysis of stress-strain and limit states in extremely loaded zones of machines and constructions 390

E. M. Morozov The growth of short cracks under cyclic loading. 413

I. B. Petrov Numerical problems of the modeling of natural and industrial processes in the Arctic zone of the Russian Federation 423

S. G. Psakhie, A. Yu. Smolin, A. I. Dmitriev, E. V. Shilko, S. Yu. Korostelev Movable cellular automaton method as a trend in discrete computational mechanics 439

A. S. Savinykh, G. V. Garkushin, G. I. Kanel', S.V. Razorenov Solidification of water under dynamic compression and its influence on the evolutions of shock waves 461

A. B. Freidin, L. L. Sharipova, N. F. Morozov On locking strains in mechanochemistry of chemical reactions fronts 469

S. L. Chernyshev, M. Ch. Zichenkov, F. Z. Ishmuratov, V. V. Chedrik Tendencies in development of computational mechanics for strength design of aircraft structures 482

S. V. Sheshenin The composite mechanics package for Fydesis software ... 500

V. A. Levin Theory of repeated superposition of large strains. Development of this theory for solution of multidisciplinary problems. Methods of implementation of this theory for strength analysis in new branches of industry 518

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ 538

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS 547

РЕДКОЛЛЕГИЯ 555

THE EDITORIAL BOARD 559

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ НОМЕРА 563

THE EDITORIAL COUNCIL ISSUE 564

MANUSCRIPT FORMATTING GUIDELINES 565